



Universidade de Brasília
IE - Instituto de Exatas
Departamento de Estatística

Acoplamentos e a Estrutura de Dependência: Um estudo empírico

Luis Gustavo Santos Barros

Brasília
2014

Luis Gustavo Santos Barros

Acoplamentos e a Estrutura de Dependência

Um Estudo Empírico

Monografia apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador(a): Prof.^o Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Brasília
2014

BARROS, S. L. G.

Acoplamentos e a Estrutura de Dependência

79 páginas

Monografia - Instituto de Exatas da Universidade de Brasília. Departamento de Estatística.

1. Cópulas
2. Autocópulas
3. Dependência

I. Universidade de Brasília. Instituto de Exatas. Departamento de Estatística.

Comissão Julgadora:

Prof.^o Dr. Jhames Matos Sampaio

Prof.^a Dr.^a Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Prof.^o Dr. Raul Yukihiro Matsushita
Orientador

Resumo

Devido à necessidade de modelar o comportamento conjunto de dois ou mais fenômenos em diversas áreas, a modelagem por acoplamentos se mostra uma ferramenta muito útil para resolver este tipo de problema. Neste estudo apresentamos uma revisão teórica de Cópulas e Autocópulas e também das medidas adequadas para investigar a dependência entre as distribuições marginais destas. O estudo é focado numa análise empírica o ajustamento de Autocópulas de séries de taxas de câmbio, em que é testada a adequação de alguns modelos de cópulas Arquimedianas e também da cópula Gaussiana, também conhecida como cópula Normal. Nos resultados encontrados não houve ajustamento significativo para os modelos testados, entretanto isso não diminui a utilidade deste tipo de modelagem, mas sim abre margem para mais estudos posteriores, visto que, o estudo de Autocópulas em especial é algo recente.

Palavras-chave

cópulas, autocópulas, dependência

Abstract

Due to the necessity of modeling the behavior of two or more phenomena together within several areas, copula modeling shows itself to be a very useful tool in solving this kind of issue. In this study, we present a review on copula theory, including Autocopulas, and on the adequate measures to investigate the dependency among its marginal distributions. Our focus is an empirical analysis of the goodness-of-fit of Autocopulas of exchange rates series. We tested the adequacy of some Archimedian copulas and the Gaussian copula as well, also known as Normal copula. We did not find any statistically significant goodness-of-fit for the tested models. Although, it does not make this kind of modeling less useful. It opens paths for further studies instead since Autocopula modeling, in particular, is quite recent.

Keywords

copula, autocopula, dependency

Sumário

1	Introdução	1
2	Metodologia	4
2.1	Cópuas e Dependência	4
2.1.1	Funções de Cópuas	4
2.1.2	Implicações do Teorema de Sklar	5
2.1.3	Cópuas Associadas	6
2.1.4	Medidas de Dependência	7
2.2	Métodos para Geração de Cópuas	9
2.2.1	Método da Inversão	9
2.2.2	Métodos Algébricos	10
2.2.3	Cópuas Arquimedianas	11
2.2.4	Cópuas Arquimedianas Extendidas por Transformações	13
2.2.5	Alguns Exemplos de Cópuas Arquimedianas	14
3	Autocópuas e a Estrutura de Interdependência	15
3.1	Autocópuas a partir de Cópuas	15
3.2	Ajustamento para Autocópuas	16
3.2.1	Função de Kendall	17
3.3	Autocópuas e Dependência	19
3.3.1	Medidas de Dependência	20
3.4	Simulação de Séries Temporais Utilizando Cópuas	21
4	Análise de Dados	23
4.1	Resultados	25
4.1.1	Evolução Temporal	25
4.1.2	Histogramas	28
4.1.3	Gráficos de Dispersão	31
4.1.4	Medidas de Correlação	36
4.1.5	Simulações de Autocópuas	40
4.1.6	Testes de Ajustamento	43
5	Considerações Finais	44
A	Tabelas de P-Valores	47
B	Códigos em R	50

Capítulo 1

Introdução

Cópulas são funções de distribuição de probabilidade conjuntas obtidas a partir de duas ou mais distribuições marginais dadas. Suas aplicações são vastas, principalmente na área de Econometria.

Pesquisadores utilizam modelos de acoplamentos em estudos sobre dependência dos preços de ativos financeiros, incidência conjunta de doenças ou morte, e algumas aplicações microeconômicas, nas quais as distribuições marginais de duas variáveis não são facilmente combináveis em uma distribuição conjunta; além de outras aplicações, em que se conhece as distribuições marginais e que é de interesse também se obter uma distribuição conjunta das variáveis.

Utilizando a modelagem por acoplamentos, pode-se obter as distribuições conjuntas de interesse quando se conhece apenas as marginais e ao mesmo tempo capturar a estrutura de dependência das variáveis. Isso torna as cópulas muito dinâmicas, em questão de aplicação prática, pois são relativamente simples de serem geradas.

Neste estudo, serão abordados, no Capítulo 2, aspectos teóricos das cópulas, tais como medidas de dependência adequadas e também alguns métodos de geração de acoplamentos dadas duas marginais. Nesta parte iniciamos com a definição de cópulas a partir de seu teorema mais importante, o teorema de *Sklar*.

Na subseção 2.1.4 do Capítulo 2, são apresentadas alternativas ao uso de medidas como o coeficiente de correlação de *Pearson*, por motivos que serão abordados ao longo do trabalho. Veremos que são necessárias algumas condições para que uma medida de dependência seja considerada adequada ao se medir a dependência entre duas marginais unidas por uma função

de cópula. Podemos destacar o coeficiente de correlação de *Kendall*. Este coeficiente será utilizado para a construção de testes de ajustamento de autocópias.

Em seguida, na seção 2.2 ainda no Capítulo 2, apresentamos algumas técnicas simples para geração de cópias. Para este estudo, optamos por trabalhar com cópias bivariadas por serem mais simples de serem manuseadas; assim como para garantir que o estudo cumprisse o cronograma. Dentre as técnicas apresentadas podemos ressaltar a técnica da inversão, uma vez que ela surge a partir do teorema de *Sklar*, e também é utilizada posteriormente no capítulo sobre autocópias. Outra técnica importante é a técnica que gera as cópias Arquimedianas. Para tanto, é necessário apresentar as funções geradoras e suas propriedades. A geração de cópias da família Arquimediana é de extrema importância por estas serem facilmente aplicáveis, e as cópias pertencentes a esta família capturarem amplas estruturas de dependência.

No Capítulo 3, serão apresentadas as autocópias, suas medidas de dependência, testes de ajustamento, além de um método de simulação para estas. Na seção de testes de ajustamento tratamos de como verificar se dados empíricos se ajustam a um determinado modelo de autocópula pressuposto. O método de simulação apresentado, denominado ACD (*Adapted Conditional Distribution*), consiste em utilizar a distribuição condicional de uma distribuição marginal num tempo qualquer, dado a mesma marginal trasladada no tempo.

- **Objetivos Gerais**

Estudar modelos de dependência por acoplamentos e sua implementação na linguagem R. Estudar séries temporais com estrutura baseada em cópias, bem como maneiras de simulá-las. Além de estudar cópias e autocópias e técnicas de simulação, temos por objetivo estudar sua estrutura de dependência.

- **Objetivos Específicos**

- i) Estudar possíveis modelos de cópias para dados de séries de taxas de câmbio diárias de vinte e três países no período de 04/01/1971 a 23/05/2014 separados em grupos de forma que fiquem homogêneos com relação a seus aspectos econômicos.

- ii) Testar o ajustamento das séries de câmbio dos BRICS transladadas no tempo utilizando os testes da família de *Cramér-von-Mises* para autocópuas.

Capítulo 2

Metodologia

2.1 Cópulas e Dependência

2.1.1 Funções de Cópulas

O primeiro passo é definir formalmente o que são cópulas. Pode-se encontrar em Nelsen (2006) o Teorema mais importante envolvendo cópulas: o *Teorema de Sklar*.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Sklar) *Dada uma distribuição conjunta F com distribuições marginais F_1, \dots, F_m , existe uma cópula C tal que, para todo $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^m$*

$$F(y_1, \dots, y_m) = C(F_1(y_1), \dots, F_m(y_m)). \quad (2.1.1.1)$$

Se C é uma cópula e $F_1 \dots F_m$ são distribuições de probabilidade, então a expressão em (2.1.1.1) é uma distribuição conjunta de probabilidade.

Trivedi e Zimmer (2007) citam ainda algumas propriedades das funções de cópulas que devem ser atendidas por uma função C para que esta seja uma cópula:

1. $C(1, \dots, 1, a_n, 1, \dots, 1) = a_n$, $\forall n \leq m$ e $a_n \in [0, 1]$;
2. $C(a_1, \dots, a_m) = 0$, se $a_n = 0$ para qualquer $n \leq m$;
3. C é definida no C -volume $V_C(B) = V_C(\text{Im}(F_1) \times \text{Im}(F_2) \times \dots \times \text{Im}(F_m))$;
4. C é m -crescente.

A primeira propriedade nos diz que se os resultados de $m - 1$ variáveis são conhecidos com probabilidades marginais igual a um, então a distribuição conjunta de todos os resultados é a mesma distribuição dos resultados restantes e ainda incertos. A segunda se trata da propriedade de aterramento¹, que diz que se algum resultado das marginais for igual a zero, então os resultados conjuntos também serão iguais a zero. A terceira propriedade diz que uma função de cópula está definida no C -volume composto pelo produto cartesiano das imagens das distribuições marginais que a compõem. E por fim, a quarta propriedade diz que qualquer C -volume em um intervalo m -dimensional é não-negativo.

2.1.2 Implicações do Teorema de Sklar

Do Teorema de *Sklar*, *Trivedi e Zimmer (2007)* derivam algumas implicações interessantes tais como

- Dada uma distribuição conjunta F com dimensão m , a cópula associada a F é uma função distribuição que satisfaz

$$F(y_1, \dots, y_m) = C(F_1(y_1), \dots, F_m(y_m); \theta), \quad (2.1.2.1)$$

onde θ é chamado parâmetro de dependência, o qual mede a dependência entre as distribuições marginais. No caso bivariado é de costume utilizar uma medida escalar de dependência. No estudo de cópulas, o parâmetro de dependência é o foco principal da estimação.

- Se as distribuições marginais que compõem a cópula forem contínuas, então a cópula correspondente será única. No caso de as distribuições não serem contínuas, então a cópula correspondente é unicamente determinada. Dessa forma a equação (2.1.2.1) pode ser chamada de função de dependência.

Há ainda outras propriedades interessantes de serem ressaltadas. Uma delas é que, assim como as distribuições conjuntas, as cópulas também são limitadas pelos limites inferior e superior de *Fréchet-Hoeffding*, ou seja,

¹Tradução literal do inglês para *grounding property*.

$$\max \left[\sum_{i=1}^m F_j - m + 1, 0 \right] \leq C(y_1, \dots, y_m) \leq \min [F_1, \dots, F_m],$$

$$C_L(y_1, \dots, y_m) \leq C(y_1, \dots, y_m) \leq C_U(y_1, \dots, y_m). \quad (2.1.2.2)$$

Um atributo desejável de uma cópula é que ela cubra o espaço amostral entre os limites de (2.1.2.2), e também que a medida que θ se aproxime de seus limites máximos possíveis, inferior ou superior, a cópula correspondente deve seguir a mesma tendência em relação aos limites de *Fréchet–Hoeffding*.

Outras propriedades interessantes, de acordo com Trivedi e Zimmer (2007), são a comonotonicidade e a contramonotonicidade. No caso bivariado, dadas duas variáveis aleatórias Y_1 e Y_2 , e sejam (y_{1j}, y_{2j}) e (y_{1k}, y_{2k}) ; um conjunto é dito comonótono se $\{y_{1j} \leq y_{2j}, y_{1k} \leq y_{2k}\}$ ou $\{y_{1j} \geq y_{2j}, y_{1k} \geq y_{2k}\}$. O conjunto é dito contramonótono se $\{y_{1j} \leq y_{2j}, y_{1k} \geq y_{2k}\}$ ou $\{y_{1j} \geq y_{2j}, y_{1k} \leq y_{2k}\}$. Pode-se com isso definir perfeita dependência positiva ou negativa em termos dessas duas propriedades. Perfeita dependência positiva se tem quando $C(\cdot) = C_U(\cdot)$. Dizemos nesse caso que Y_1 é função crescente de Y_2 . De maneira análoga, tem-se dependência perfeita negativa quando $C(\cdot) = C_L(\cdot)$, neste caso dizemos que Y_1 é função decrescente de Y_2 .

Além dessas propriedades, há ainda outra propriedade que merece ser mencionada, a propriedade de invariância. Essa propriedade significa que a dependência capturada por uma cópula é invariante a qualquer transformação contínua e crescente das marginais.

2.1.3 Cópulas Associadas

Dado um par de distribuições marginais $(U_1, U_2) \sim C$, uma cópula associada é uma cópula com formas $(1 - U_1, 1 - U_2)$, $(1 - U_1, U_2)$ e $(U_1, 1 - U_2)$. Uma cópula que merece especial atenção é a cópula associada $(1 - U_1, 1 - U_2)$, que também é chamada de *Cópula de Sobrevivência*.

Temos que se $F_1^{-1}(u_1) \sim F_1(u_1)$, então $F_1^{-1}(1 - u_1) \sim \bar{F}_1(u_1)$ e $F_2^{-1}(1 - u_2) \sim \bar{F}_2(u_2)$, logo $(1 - U_1, 1 - U_2) \sim \bar{C}$, que é á chamada cópula de sobrevivência. De maneira geral, uma cópula de sobrevivência m -dimensional é da forma:

$$\bar{F}(\mathbf{u}) = (F_1^{-1}(1 - u_1), \dots, F_m^{-1}(1 - u_m)) = \bar{F}(\bar{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \bar{F}_m^{-1}(u_m)) = \bar{C}(u_1, \dots, u_m) \quad (2.1.3.1)$$

2.1.4 Medidas de Dependência

Como o parâmetro de dependência é o foco principal da estimação no estudo de cópulas, precisamos de uma medida que satisfaça algumas condições. As condições para que a medida de dependência seja apropriada são citadas por Trivedi e Zimmer (2007):

1. $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$;
2. $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$;
3. Se $\delta(X, Y) = 1 \Leftrightarrow (X, Y)$ comonótono; Se $\delta(X, Y) = -1 \Leftrightarrow (X, Y)$ contramonótono;
4. Para uma transformação estritamente monótona $T : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de X :

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) , & \text{se } T \text{ é crescente} \\ -\delta(X, Y) , & \text{se } T \text{ é decrescente} \end{cases}$$

A primeira medida que vem à mente e que satisfaz essas condições é a correlação de *Pearson*. Esta medida apresenta simetria (condição 1); é limitada entre -1 e 1 nos seus extremos (condição 2); mede dependência perfeita, positiva, negativa e independência (condição 3); e é invariante a transformações lineares das variáveis (condição 4).

Entretanto, segundo Trivedi e Zimmer (2007), a correlação de *Pearson* tem alguns pontos negativos que a tornam não a melhor opção para uma medida de dependência para cópulas. Por exemplo, para algumas distribuições de famílias elípticas, como a normal bivariada, correlação zero não implica em independência. Esta medida também não é definida para algumas distribuições de cauda pesada, que não possuem segundo momento. Também há o problema de que esta medida não é invariante a transformações estritamente crescente e não-lineares das v.a.'s. Os valores desse coeficiente de correlação também dependem das distribuições das v.a.'s, o que impõe limites aos valores que estes podem assumir.

Outras duas medidas que podem ser utilizadas e que atendem aos requisitos mencionados anteriormente são a correlação por *ranks* de *Spearman* e a correlação por *ranks* de *Kendall*.

A correlação por *ranks* de *Spearman* é definida como a correlação de *Pearson* entre as distribuições marginais,

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y)). \quad (2.1.4.1)$$

Por sua vez para definir a correlação por *ranks* de *Kendall*, sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) dois pares de v.a.'s independentes de F , então a correlação por postos de *Kendall* é dada por,

$$\rho_\tau(X, Y) = \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (2.1.4.2)$$

Ambas as medidas apresentadas acima são baseadas no conceito de concordância, que quer dizer que valores grandes de uma variável estão relacionados também com valores grandes da outra variável. Em contrapartida, discordância significa que valores pequenos de uma variável estão relacionados com valores grandes da outra variável.

Para ambas as medidas, quando seus valores extremos correspondem aos limites mencionados em 2.1.2.2, tem-se perfeita dependência positiva ou negativa e também assumem valor zero sob independência. Este fato permanece inalterado mesmo que se apliquem transformações monótonas às variáveis (Trivedi e Zimmer, 2007).

As medidas ρ_S (2.1.4.1) e ρ_τ (2.1.4.2) funcionam muito bem para dados contínuos. Entretanto, para dados discretos perde-se propriedades atraentes dessas medidas pelo fato de, no caso discreto, haver empates entre alguns valores das variáveis (Trivedi e Zimmer, 2007).

Existem ainda, mais algumas medidas que podem ser utilizadas para medir dependência entre as distribuições marginais que compõem uma cópula. São elas, as medidas de dependência nas caudas e a propriedade PQD².

A medida de dependência nas caudas é definida por Trivedi e Zimmer (2007) a partir da função de sobrevivência e de uma cópula em termos de variáveis aleatórias uniformes padrão u_1 e u_2 :

²Positive Quadrant Dependence ou Dependência do Quadrante Positivo.

$$\lambda_L = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{C(v, v)}{v} = C_{U_1|U_2}(v, v), \quad (2.1.4.3)$$

$$\lambda_U = \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{S(v, v)}{1 - v} = S_{U_1|U_2}(v, v). \quad (2.1.4.4)$$

Ambas as equações podem ser obtidas a partir da regra de *Bayes* para probabilidades condicionais; partindo de $\Pr[U_1 < v|U_2 < v]$ no caso de (2.1.4.3) e $\Pr[U_1 > v|U_2 > v]$ no caso de (2.1.4.4).

Das medidas de dependência nas caudas surgem duas propriedades: LTD³ e RTI⁴. Tomando-se duas variáveis aleatórias X e Y , a variável Y é dita LTD em x se $\Pr[Y < y|X < x]$ for decrescente em x para todo y . Análogamente, Y é dita RTI em x se $\Pr[Y > y|X > x]$ for crescente em x para todo y . Ainda nessa linha, dizemos que Y é estocasticamente crescente se $\Pr[Y > y|X = x]$ é crescente em x para todo y .

A dependência no quadrante positivo (PQD) acontece quando a cópula de duas variáveis aleatórias quaisquer for maior do que sua cópula produto. A propriedade PQD também implica que a distribuição conjunta de duas v.a.'s é maior que o produto de suas marginais.

2.2 Métodos para Geração de Cópulas

2.2.1 Método da Inversão

O método da inversão é obtido diretamente do Teorema de *Sklar*. Partindo deste teorema, e como mostrado por Trivedi e Zimmer (2007), dadas duas distribuições marginais contínuas F_1 e F_2 e uma distribuição conjunta também contínua $F(y_1, y_2) = C(F_1(y_1), F_2(y_2))$, podemos obter a cópula correspondente pela transformação inversa das marginais. Ou seja,

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)), \quad (2.2.1.1)$$

³Left Tail Decreasing.

⁴Right Tail Increasing.

em que, $y_1 = F_1^{-1}(u_1)$, $y_2 = F_2^{-1}(u_2)$ e u_1 e u_2 são variáveis aleatórias uniformes padrão.

Uma característica que torna este método menos atraente é o fato de que para se obter a cópula é necessário conhecer a distribuição conjunta, o que limita a aplicabilidade deste método em circunstâncias as quais não se conhece-a.

2.2.2 Métodos Algébricos

Partindo de uma relação entre duas marginais baseadas na independência e, em seguida, modificando a estrutura adicionando um parâmetro de dependência é uma maneira de se obter cópulas. Este método é chamado de método algébrico. Trivedi e Zimmer (2007) apresentam o funcionamento deste método usando como exemplo a distribuição logística bivariada de Gumbel, que tem função de distribuição

$$F(y_1, y_2) = (1 + e^{-y_1} + e^{-y_2})^{-1}.$$

Tomando a razão de chances de sobrevivência $(1 - F(y_1, y_2))/F(y_1, y_2)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(y_1, y_2)}{F(y_1, y_2)} &= e^{-y_1} + e^{-y_2} \\ &= \frac{1 - F_1(y_1)}{F_1(y_1)} + \frac{1 - F_2(y_2)}{F_2(y_2)}. \end{aligned}$$

No caso de independência, onde $F(y_1, y_2) = F_1(y_1)F_2(y_2)$, podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(y_1, y_2)}{F(y_1, y_2)} &= \frac{1 - F_1(y_1)F_2(y_2)}{F_1(y_1)F_2(y_2)} \\ &= \frac{1 - F_1(y_1)}{F_1(y_1)} + \frac{1 - F_2(y_2)}{F_2(y_2)} + \frac{1 - F_1(y_1)}{F_1(y_1)} \frac{1 - F_2(y_2)}{F_2(y_2)}. \end{aligned}$$

Pode-se notar a semelhança entre os casos de independência e dependência da razão de chance de sobrevivência. Com uma pequena modificação, que inclui um parâmetro de dependência, podemos obter uma razão de chance de sobrevivência generalizada,

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(y_1, y_2)}{F(y_1, y_2)} &= \frac{1 - F_1(y_1)}{F_1(y_1)} + \frac{1 - F_2(y_2)}{F_2(y_2)} \\ &+ (1 - \theta) \frac{1 - F_1(y_1)}{F_1(y_1)} \frac{1 - F_2(y_2)}{F_2(y_2)}. \end{aligned}$$

Tomando $u_1 = F_1(y_1)$ e $u_2 = F_2(y_2)$, temos que

$$\frac{1 - C(u_1, u_2; \theta)}{C(u_1, u_2; \theta)} = \frac{1 - u_1}{u_1} + \frac{1 - u_2}{u_2} + (1 - \theta) \frac{1 - u_1}{u_1} \frac{1 - u_2}{u_2},$$

assim,

$$C(u_1, u_2; \theta) = \frac{u_1 u_2}{1 - \theta(1 - u_1)(1 - u_2)}.$$

A partir deste exemplo, pode-se ver como funciona o método algébrico, em que partimos de uma relação de independência e adicionando um parâmetro de dependência obtemos uma função de cópula.

2.2.3 Cópulas Arquimedianas

Esta técnica de geração de cópulas talvez seja uma das mais úteis por sua facilidade de ser aplicada e pela capacidade de capturar amplas estruturas de dependência. Para se construir uma cópula Arquimediana é necessário antes definir uma função geradora. Trivedi e Zimmer (2007) definem as características de uma função geradora.

Seja uma classe de funções Φ com $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ com derivadas em $(0, 1)$ com as propriedades $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ (decrecente) e $\varphi''(t) > 0$ (convexa) para todo $0 < t < 1$. Além disso, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \infty$. Essas condições asseguram que existe uma inversa φ^{-1} e mais ainda, que qualquer função que as satisfaça é capaz de gerar uma função de distribuição bivariada. Este tipo de função é denominada *função geradora*. Ainda segundo Trivedi e Zimmer (2007), se $\varphi(0) = \infty$ a função geradora é dita estrita e possui inversa. Se as geradoras forem estritas então $C(u_1, u_2) > 0$, a menos que $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$. No caso de $\varphi(t) < \infty$, então a geradora é dita não-estrita e ela possui uma pseudo-inversa. a cópula neste caso tem um componente singular.

A definição formal de pseudo-inversa segue abaixo

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(t) \leq t \leq +\infty, \end{cases}$$

e

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) = t.$$

Cópiulas com uma componente singular tem a forma $C(u_1, u_2; \theta) = \max[(\cdot), 0]$. Já as cópiula que não possuem um componente singular são da forma

$$C(u_1, u_2; \theta) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), \quad (2.2.3.1)$$

em que o parâmetro de dependência θ vem embutido na forma da função geradora.

Algumas características das cópiulas Arquimedianas são a simetria, ou seja, $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ e o fato delas serem associativas, a saber, $C(C(u_1, u_2), u_3) = C(u_1, C(u_2, u_3))$.

Para obter a densidade de uma cópiula Genest e MacKay (1986 apud Trivedi e Zimmer, 2007, p.42) apresentam a diferenciação da expressão em (2.2.3.1) para se obter a densidade de uma cópiula Arquimediana bivariada:

$$c_{u_1 u_2} = \frac{\varphi''(C(u_1, u_2))\varphi'(u_1)\varphi'(u_2)}{[\varphi'(C(u_1, u_2))]^3}, \quad (2.2.3.2)$$

Neste caso as derivadas não existem na fronteira $\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(0)$.

A densidade condicional para a cópiula Arquimediana bivariada é, segundo Trivedi e Zimmer (2007),

$$\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) = \frac{\varphi'(u_2)}{\varphi'(C(u_1, u_2))}, \quad (2.2.3.3)$$

que nada mais é do que a derivada parcial de (2.2.3.1) em relação a u_2 .

Uma vantagem das cópiulas Arquimedianas é a facilidade de se quantificar a dependência entre as marginais, uma vez que o *tau* de Kendall pode ser escrito como um funcional da função geradora

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Genest e MacKay (1986 apud Trivedi e Zimmer, 2007, p. 43) mostram como obter este resultado.

2.2.4 Cópulas Arquimedianas Extendidas por Transformações

As vezes adicionar um segundo parâmetro na cópula pode trazer algum benefício. Este parâmetro pode ser incluído aplicando-se uma transformação na função geradora. Junker e May (2005 apud Trivedi e Zimmer, 2007, p.43) demonstram o resultado a seguir. "Seja φ uma função geradora e $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função estritamente crescente e côncava com $g(1) = 1$. Então $\varphi \circ g$ é uma função geradora. Seja $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ uma função estritamente crescente e convexa com $f(0) = 0$, então $f \circ \varphi$ é uma função geradora." (Trivedi e Zimmer, 2003, p.43, tradução nossa). Junker e May apresentam alguns exemplos de transformações recorrentes na literatura:

$$g(t) = t^\nu, \quad \nu \in (0, 1);$$

$$g(t) = \frac{\ln(at+1)}{\ln(a+1)}, \quad a \in (0, \infty);$$

$$f(\varphi) = \varphi^\delta, \quad \delta \in (1, \infty);$$

$$f(\varphi) = a^\varphi - 1, \quad a \in (1, \infty).$$

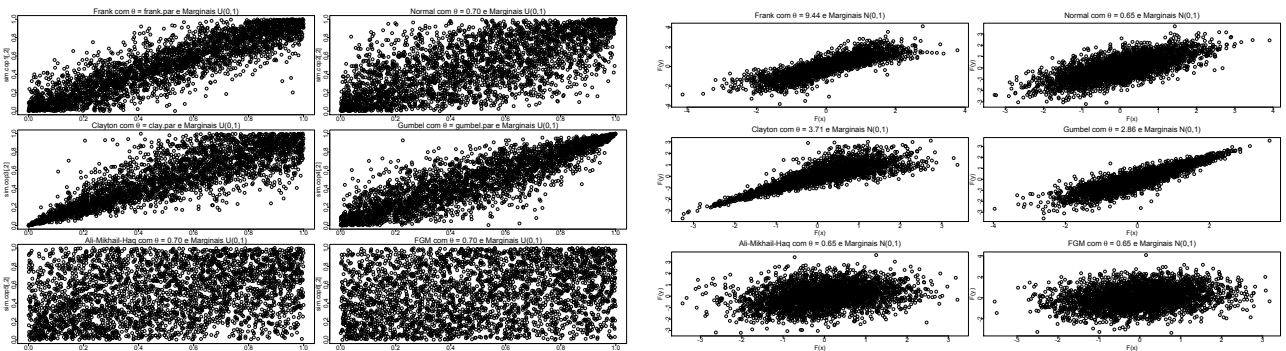
2.2.5 Alguns Exemplos de Cópulas Arquimedianas

Na tabela 2.1 a seguir, encontramos alguns modelos de famílias de cópulas Arquimedianas apresentados por Nelsen (2006),

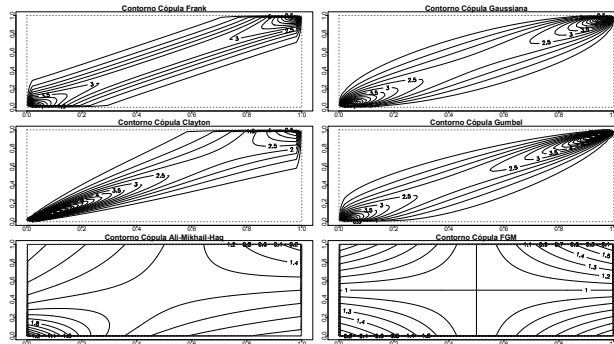
Família	$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \theta)$	$\varphi(t)$	Estrita	θ
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$-\log[(e^{-\theta t} - 1)/(e^{-\theta} - 1)]$	sim	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\theta^{-1}(t^{-\theta} - 1)$	sim	$(0, \infty)$
Clayton	$[\max(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$\theta^{-1}(t^{-\theta} - 1)$	não	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel	$\exp \{ -[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta} \}$	$(-\ln t)^\theta$	sim	$[1, \infty)$
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{u_1 u_2}{1 - \theta(1 - u_1)(1 - u_2)}$	$\ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}$	sim	$[-1, 1)$

Tabela 2.1: Alguns modelos de cópulas Arquimedianas.

No gráfico, estão as curvas de contorno e os gráficos de dispersão de simulações das cópulas apresentadas na tabela 2.1, além das cópulas Normal e *Farlie-Gumbel-Morgenstern*:



(a) Gráficos de dispersão com marginais uniforme padrão (b) Gráficos de dispersão com marginais normal padrão



(c) Gráficos de contorno

Figura 2.1: Estruturas de cópulas simuladas.

Capítulo 3

Autocópuas e a Estrutura de Interdependência

3.1 Autocópuas a partir de Cópulas

A partir da definição de cópuas dada pelo Teorema de Sklar, de maneira semelhante, Rakonczai et al. (2012) define o que ele chama de Autocópuas:

Definição 3.1.1 *"Dada uma série temporal estritamente estacionária Y_t e $\mathcal{L} = l_i \in \mathbb{Z}^+, i = 1, \dots, d$ um conjunto de lags, a autocópuas $C_{Y, \mathcal{L}}$ é definida como a cópuas do vetor aleatório $d+1$ -dimensional $(Y_t, Y_{t-l_1}, \dots, Y_{t-l_d})$ " (Rakonczai et al., 2012, p. 4, tradução nossa).*

Na família de cópuas Gaussianas, por se tratar de uma família de cópuas muito utilizada, Rakonczai et al. (2012) dá exemplo de como processos lineares, com atualizações *Gaussianas*, geram autocópuas Gaussianas. Uma cópuas Gaussianas pode ser obtida (Teorema de *Sklar*) como

$$C(x, y) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(y)).$$

sendo Φ_{Σ} a função de distribuição de uma normal bivariada com matriz de covariância Σ e Φ^{-1} a inversa de uma função de distribuição normal padrão.

Rakonczai et al. (2012) segue dizendo que processos lineares com inovações não-gaussianas, em geral, não geram cópuas Gaussianas. É importante ressaltar isto pelo fato de que, na família

das cópulas Gaussianas, a estrutura de dependência é completamente descrita pela matriz de covariâncias. ”No caso de séries temporais Gaussianas lineares com função de autocorrelação apresentando decaimento mais rápido que $1/\log(t)$, considera-se que estas tenham estrutura de interdependência semelhante à de uma série Gaussiana, ou seja, eventos extremos não podem ocorrer sincronizadamente.” (Rakonczai et al., 2012, p. 4, tradução nossa).

3.2 Ajustamento para Autocópulas

Quando se tem um processo estocástico gerado a partir de uma cópula, deparamo-nos com o problemas de testar o ajustamento de uma série para qualquer *lag* $l \geq 1$. Ou seja, de acordo com Rakonczai et al. (2012), isso é o mesmo que testar a hipótese nula

$$H_0 : C_{Y_t, l} \in C_{0, l} = \{C_{\theta, l} : \theta \in \Theta\},$$

que é análogo a testar se a estrutura de dependência da cópula de interesse surge de uma família de cópulas definida por uma série temporal específica.

Um ponto importante que se deve levar em consideração antes de começar a testar o ajustamento do modelo, de acordo com Rakonczai et al. (2012), é a escolha da amostra. A teoria de inferência funciona para as cópulas contanto que as observações sejam independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*). No caso das autocópulas, não se pode tomar todos os pares (Y_t, Y_{t-l}) $i \in \mathbb{Z}^+$ da autocópula, uma vez que, em geral, estes não são independentes. Para resolver este problema, Rakonczai et al. (2012) propõe que se tome uma amostra refinada das observações. Isso pode ser feito tomando pares com distância m entre uma observação e outra, ou seja $\mathcal{T} = \{l + 1, l + m + 1, l + 2m + 1, \dots, l + rm + 1 \leq n\}$, com $|\mathcal{T}| = r + 1$. Deve-se tomar m grande o bastante para ter observações que serão supostamente independentes entre si. Os pares resultantes do refinamento serão então, $\{(Y_i, Y_{i-l}) : i \in \mathcal{T}\}$.

Após o refinamento utiliza-se a transformação integral de probabilidade (PIT¹) para que ambas as distribuições marginais fiquem contidas no intervalo unitário. Isso é feito por Rakonczai et al. (2012) através da distribuição empírica, a PIT é definida como

¹Sigla do inglês para *Probability Integral Transform*

$$\left\{ \left(\underbrace{\frac{\sum_{j \in \mathcal{T}} \mathbf{1}(Y_j \leq Y_i)}{|\mathcal{T}| + 1}}_{=U_i}, \underbrace{\frac{\sum_{j \in \mathcal{T}} \mathbf{1}(Y_{j-1} \leq Y_{i-1})}{|\mathcal{T}| + 1}}_{=V_i} \right) : i \in \mathcal{T} \right\},$$

após aplicar a PIT, tem-se uma amostra *i.i.d.* da cópula $C_{Y_i, l}$, com isso pode-se utilizar a teoria de inferência para testar o ajustamento.

3.2.1 Função de Kendall

Quando se tratando do caso univariado, Rakonczai et al. (2012) apresenta os testes da família de *Cramér-von-Mises* (CvM) por serem mais sensíveis a discrepâncias nas caudas da distribuição. Para os fins deste estudo também escolhemos os testes desta família. Os testes de *Cramér-von-Mises*, no caso univariado, são geralmente da forma

$$T = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 \Phi(x) dF(x),$$

sendo $F_n(x)$ a distribuição empírica de $F(x)$ e $\Phi(x)$ uma função de ponderação.

Num caso particular, em que $\Phi(x) = 1$, obtém-se a estatística de *Cramér-von-Mises*

$$T_{CvM} = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(X) - F(x))^2 dF(x). \quad (3.2.1.1)$$

Rakonczai et al. (2012) ainda apresenta duas outras variações de testes da família de CvM, que levam em maior consideração as caudas. Estas variações são adaptações na função de ponderação. Quando o foco são ambas as caudas utiliza-se $\Phi(x) = 1/F(x)(1 - F(x))$. Para somente a cauda superior utiliza-se $\Phi(x) = 1/(1 - F(x))$ e, de maneira análoga, para a cauda inferior $\Phi(x) = 1/F(x)$. A estatística que utiliza a ponderação para as duas caudas é chamada de estatística de *Anderson-Darling*, as outras ponderações para as caudas inferior e superior são variações desta.

Após a utilização da PIT para que as distribuições marginais fiquem em $[0, 1] \times [0, 1]$, Rakonczai et al. (2012) sugere que os testes da família de CvM sejam utilizados fazendo uma redução de dimensões na distribuição da cópula. Para tanto utiliza-se a função de *Kendall*

$$\mathcal{K}(t) = P(H(X, Y) \leq t) = P(C(F(X), G(Y)) \leq t) = P(C(U, V) \leq t), \quad (3.2.1.2)$$

em que $t \in [0, 1]$.

A função de Kendall possui uma forma empírica que permite que $\mathcal{K}(t)$ seja facilmente aproximada computacionalmente, uma vez que uma forma fechada para a equação (3.2.1.2) só existe para algumas famílias de cópulas.

As cópulas Arquimedianas têm uma forma fechada para calcular a função de *Kendall*. Isto é feito a partir de suas funções geradoras definidas na seção 2.2.3

$$\mathcal{K}(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \quad (3.2.1.3)$$

A versão empírica de \mathcal{K} , como apresentada por Rakonczai et al. (2012) é obtida por

$$\mathcal{K}_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(E_{in} \leq t), \quad t \in [0, 1],$$

em que

$$E_{in}(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(U_j \leq U_i, V_j \leq V_i).$$

No pacote `copula` no software **R**, existe uma função implementada para a versão empírica de \mathcal{K} .

Para verificar o ajustamento da distribuição empírica de $\mathcal{K}(t)$ e sua forma teórica há alguns testes que utilizam funcionais contínuos da função de Kendall (Rakonczai et al., 2012).

A abordagem envolvendo à família de testes de *Cramér-von-Mises* foi estudada por Genest et al. (2006), e a versão bivariada, como apresentada por Rakonczai et al. (2012) segue

$$S_n = \int_0^1 (\kappa_n(t))^2 dt. \quad (3.2.1.4)$$

Rakonczai et al. (2012) propõe a tabela a seguir de estatísticas de teste para testar ajustamento conforme a necessidade de sensibilidade para eventos nas caudas da distribuição. Sendo $\{t_i\}_{i=1}^m$ uma divisão apropriada do intervalo $(0, 1)$, temos as estatísticas

Região de Interesse	Estatística do Teste
Global	$S_1 = m^{-1} \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} (\mathcal{K}(\theta_n, t_i) - \mathcal{K}_n(t_i))^2$
Cauda Superior	$S_2 = m^{-1} \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} \frac{(\mathcal{K}(\theta_n, t_i) - \mathcal{K}_n(t_i))^2}{1 - \mathcal{K}(\theta_n, t_i)}$
Cauda Inferior	$S_3 = m^{-1} \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} \frac{(\mathcal{K}(\theta_n, t_i) - \mathcal{K}_n(t_i))^2}{\mathcal{K}(\theta_n, t_i)}$
Ambas as Caudas	$S_2 = m^{-1} \sum_{t_i \in [0+\epsilon, 1-\epsilon]} \frac{(\mathcal{K}(\theta_n, t_i) - \mathcal{K}_n(t_i))^2}{\mathcal{K}(\theta_n, t_i)(1 - \mathcal{K}(\theta_n, t_i))}$

Tabela 3.1: Aproximações numéricas das estatísticas do processo de Kendall na família de Cramér-von-Mises.

3.3 Autocópuas e Dependência

É de interesse em muitas áreas conhecer quando um fenômeno extremo ocorrerá. Em particular nas finanças algo que muito se estuda é a ocorrência de grandes crises, como em 1929 e em 2008. Chakraborti e Chicheportiche (2013) propõem métodos para investigar como eventos ditos "negativos" ou "positivos" têm impacto nos eventos subsequentes. Segundo a definição de Chakraborti e Chicheportiche (2013), eventos que ultrapassam um ponto inicial $X^{(\pm)}$ são ditos "negativos" se $X_t < X^{(-)}$, e "positivos" se $X_t > X^{(+)}$. As probabilidades associadas a esses eventos são $p_- = F(X^{(-)})$ e $p_+ = 1 - F(X^{(+)})$. Esses pontos iniciais podem ser fixados ou podem variar com a distribuição. No caso de serem fixados são chamados pontos iniciais *absolutos* e, no caso quando variam, são chamados *relativos*. Pontos relativos são definidos pelos quantis da distribuição F , ou seja, $X^{(+)}$ é o q -ésimo quantil de F , enquanto $X^{(-)}$ é o $(1-q)$ -ésimo quantil de F . Quando se adotam pontos de partida relativos, é desejável que empiricamente haja estacionariedade na série. Em contrapartida, com pontos de partida absolutos não é necessária

a estacionariedade no caso empírico, porém a teoria só faz sentido com marginais estacionárias (Chakraborti e Chicheportiche, 2013).

3.3.1 Medidas de Dependência

Chakraborti e Chicheportiche (2013) tratam de medidas de dependência para avaliar a relação entre os eventos nas autocópias. As medidas de dependência nas caudas λ_L e λ_U (equações 2.1.4.3 e 2.1.4.4), são muito importantes pois levam em consideração toda a cópula bivariada, ao invés de somente avaliar correlações. A distribuição condicional de $X_{t+1}|X_t$, escrita como

$$p_{++}^{(l)} = P[X_{t+1} > X^{(+)} | X_t > X^{(+)}], \quad (3.3.1.1)$$

é chamada de medida de *persistência* de eventos positivos e, juntamente com outros casos de distribuição condicional, pode ser escrita em termos de cópulas, como em Chakraborti e Chicheportiche (2013)

$$p_{++}^{(l)} = [2p_+ - 1 + C_{Y_t, l}(1 - p_+, 1 - p_+)]/p_+ ; \quad (3.3.1.2a)$$

$$p_{--}^{(l)} = C_{Y_t, l}(p_-, p_-)/p_- ; \quad (3.3.1.2b)$$

$$p_{-+}^{(l)} = [p_- - C_{Y_t, l}(p_-, 1 - p_+)]/p_- ; \quad (3.3.1.2c)$$

$$p_{+-}^{(l)} = [p_- - C_{Y_t, l}(1 - p_+, p_-)]/p_+ . \quad (3.3.1.2d)$$

Os casos de (3.3.1.2c) e (3.3.1.2d) são chamados, por analogia, de medidas de *reversão*. Nas simulações feitas por Chakraborti e Chicheportiche (2013) para dados de índices de ações (S&P500, KOSPI-200, CAC-40, DAX-30, SMI-20), percebe-se que eventos positivos são seguidos mais vezes por eventos positivos e, analogamente, eventos negativos são seguidos por eventos negativos, ou seja, é esperado que na maioria das vezes haja persistência após os eventos anteriores. Para os eventos negativos, observa-se que para pontos de partida $q \gtrsim 0.9$ acontece reversão. Ainda nas simulações para dados financeiros, Chakraborti e Chicheportiche (2013) mostram que a distribuição t-Student, com cinco graus de liberdade não se adequa bem aos dados. Este resultado corrobora sua crítica ao uso dos modelos analíticos mais simples para

investigar dependência de dados multivariados, o que dá suporte à importância das cópulas para a investigação das propriedades empíricas de dados multivariados (Chakraborti e Chicheportiche, 2013).

3.4 Simulação de Séries Temporais Utilizando Cópulas

Um problema que aparece quando se trabalha com modelagem por acoplamentos é a dificuldade encontrada ao se tentar gerar processos estocásticos com uma estrutura baseada em cópulas. Pumi e Lopes (2010) apresentam em seu trabalho uma alternativa para tal. Dentre as dificuldades encontradas ao gerar processos estocásticos a partir de cópulas está o fato de uma amostra obtida a partir de uma função de cópula ter seus valores no intervalo $[0, 1]$. Pumi e Lopes (2010) sugerem, para que a amostra tenha valores em toda reta real, que seja utilizada a Transformação Integral de Probabilidade (PIT). Aplicando a transformação, pode-se então gerar uma amostra com valores em \mathbb{R} .

No trabalho de Pumi e Lopes (2010) são apresentados alguns algoritmos para gerar simulações de processos estocásticos a partir de funções de cópulas. O primeiro algoritmo apresentado parte do pressuposto de que para um processo estocástico (P.E.) Markoviano de primeira ordem $\{Y_t\}_{t=1}^n$, sendo C_θ a verdadeira cópula associada ao par (Y_{t-1}, Y_t) . Para uma dada uma transformação F absolutamente contínua, se escrevermos $U_t = F(Y_t)$, o processo resultante, ou processo transformado, continua sendo um processo Markoviano e a distribuição conjunta de (U_{t-1}, U_t) será $C_\theta(u, v)$. A distribuição condicional de $U_t|U_{t-1} = u_0$ será então $f_{U_t|U_{t-1}=u_0}(u) = c_\theta(u_0, u)$. Com isso, Pumi e Lopes (2010) afirmam que estes resultados são consistentes com o modelo linear generalizado semiparamétrico

$$\varphi_\alpha(U_t) = \psi_\beta(U_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad E(\varepsilon_t|U_{t-1}) = 0, \quad (3.4.0.3)$$

sendo φ_α uma função paramétrica crescente,

$$\psi_\beta(U_t) = E(\varphi_\alpha(U_t)|U_{t-1} = u) = \int_0^1 \varphi_\alpha(v)c_\theta(u, v)dv,$$

e para a distribuição condicional de $\varepsilon_t|U_{t-1} = u_0$ tem-se

$$f_{\varepsilon_t|U_{t-1}=u_0}(x) = \frac{c_{\theta}(u_0, \varphi_{\alpha}^{-1}(x + \psi_{\beta}(u_0)))}{\frac{d}{dx}(\varphi_{\alpha}(x + \psi_{\beta}(u_0)))}.$$

Para simular algo tal qual apresentado em (3.4.0.3), Pumi e Lopes (2010) apresentam um algoritmo que objetiva gerar uma amostra de qualquer distribuição bivariada dadas as distribuições condicionais. Para uma cópula bidimensional qualquer, com a densidade condicional de U_t dado $U_{t-1} = u$ sendo $c(u, v)$, o algoritmo mencionado segue:

1. Gere n amostras independentes de uma distribuição uniforme padrão u_1, \dots, u_n .
2. Tome $h_u(v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ e defina $x_1 = u_1$.
3. Para $i = 2, \dots, n$ defina $x_i = h_{x_{i-1}}^{-1}(u_i)$.
4. A amostra resultante é x_1, \dots, x_n .

Pumi e Lopes chamam o algoritmo acima de método *ACD*², sigla em inglês para método da Distribuição Condicional Adaptada. Este método pode ser usado para simular diversas estruturas de dependência. Pumi e Lopes (2010) apresentam dois exemplos, utilizando as cópulas de *Frank* e *Farlie-Gumbel-Morgenstern*, ou FGM, onde se observa as variações na aparência de estacionariedade da série conforme se varia o parâmetro de dependência e as distribuições marginais.

²Adapted Conditional Distribution

Capítulo 4

Análise de Dados

Para fazer a análise do banco de dados, o qual continha dados diários de cotações de moedas de vinte e três séries de taxas de câmbio obtidas no site do *Federal Reserve*, o Banco Central americano, foi necessário dividir os países em grupos de acordo com a atual situação econômica destes. A tabela a seguir mostra os grupos em que foram separados as moedas e os países contidos nestes:

BRICS	União Européia	Tigres Asiáticos	Outros Desenvolvidos	Outros Subdesenvolvidos
Brasil	Zona do EURO	Hong Kong	Austrália	Malásia
China	Reino Unido	Coréia do Sul	Nova Zelândia	Mexico
Índia	Dinamarca	Singapura	Canadá	Sri Lanka
África do Sul	Noruega	Taiwan	Japão	Tailândia
–	Suécia	–	Suíça	Venezuela

Tabela 4.1: Divisão dos países por grupos político-econômicos

Para deixar o estudo mais homogêneo, algumas moedas que tinham suas cotações na forma USD/u.m. ¹ foram convertidas de forma que a cotação ficasse da forma u.m./USD.

Em seguida à separação dos grupos, foram feitos gráficos de evolução temporal para cada país de cada grupo. Também foram feitos gráficos de dispersão entre os países do grupo dos BRICS com os países de outros grupos e também do grupo da União Européia com outros

¹Dólar americano por respectiva unidade monetária.

países desenvolvidos, como uma espécie de "controle", uma vez que ambos os grupos possuem moedas bem comportadas.

Outros gráficos confeccionados foram os histogramas dos retornos das moedas de cada grupo, com o intuito de fazer uma verificação visual de possível normalidade dos dados. Por fim foram feitos gráficos de dispersão entre as moedas do grupo dos BRICS com elas mesmas em tempos passados. O *lag* máximo foi de três unidades de tempo, ou seja, foram comparados r_t vs. r_{t-1} , r_t vs. r_{t-2} e r_t vs. r_{t-3} .

Juntamente aos gráficos de dispersão foram calculados os coeficientes de correlação de *Spearman* e *Kendall*, uma vez que a literatura sugere que estes dois coeficientes são os mais apropriados para mensurar a dependência entre duas variáveis no estudo de cópulas (Trivedi e Zimmer, 2007, p. 21-23).

4.1 Resultados

4.1.1 Evolução Temporal

Os gráficos a seguir (figura 4.1) mostram a evolução temporal das séries de taxas de câmbio dos países pertencentes aos BRICS. Observa-se que as séries são descontinuadas, no caso do Brasil, por ser uma moeda recente, não há dados para anos anteriores a 1994, quando o real entrou em circulação. O *Yuan*, moeda da China, apresenta um comportamento atípico para um série temporal. Isso ocorre provavelmente pelas políticas de controle cambial chinesas.

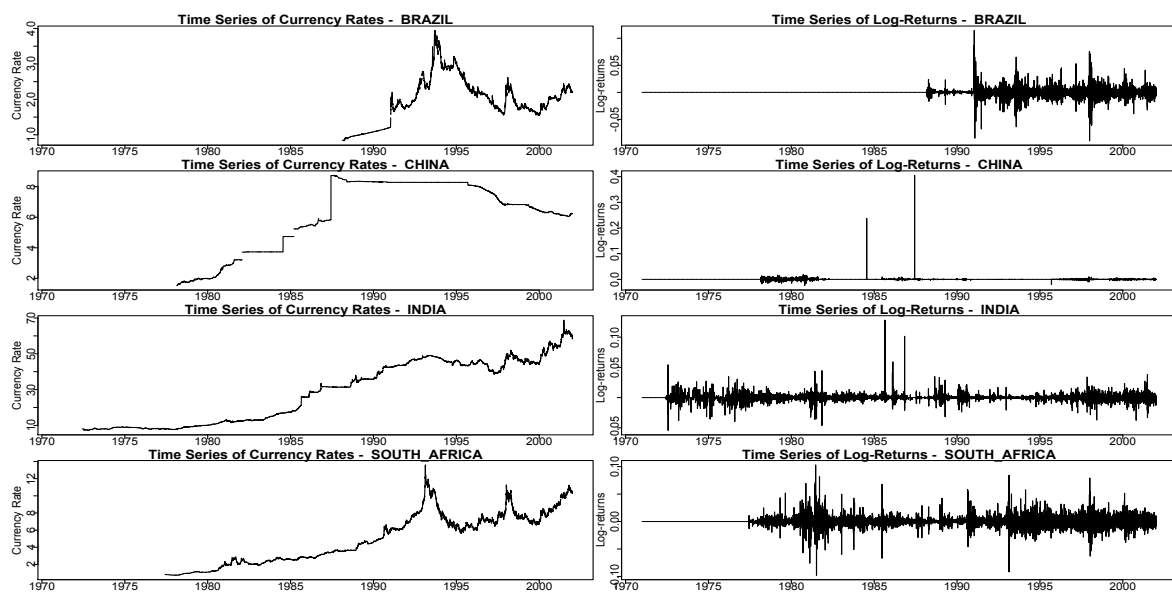


Figura 4.1: Evolução Temporal - BRICS

A figura 4.2 mostra a evolução temporal das moedas da União Europeia (UE), as quais incluem outras moedas além do euro, como a libra esterlina, coroa sueca, etc. O comportamento das séries é o que se espera de uma série temporal, pelo fato de os países do grupo adotarem políticas de câmbio flutuante. A série do euro aparece descontinuada pois, assim como o real, é uma moeda relativamente recente.

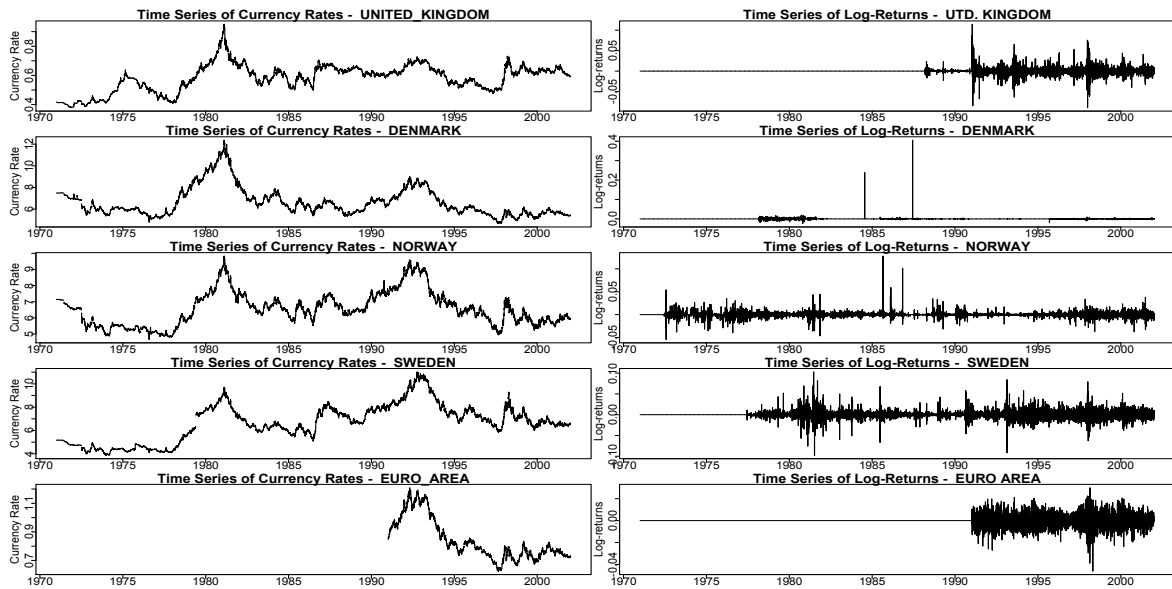


Figura 4.2: Evolução Temporal - E.U.

As séries dos Tigres Asiáticos (figura 4.3) apresentam comportamento de processos estocásticos, como esperado. No caso do dólar de Hong Kong, a série parece apresentar comportamento não aleatório, se vista bem de perto, observa-se que há variações nos retornos.

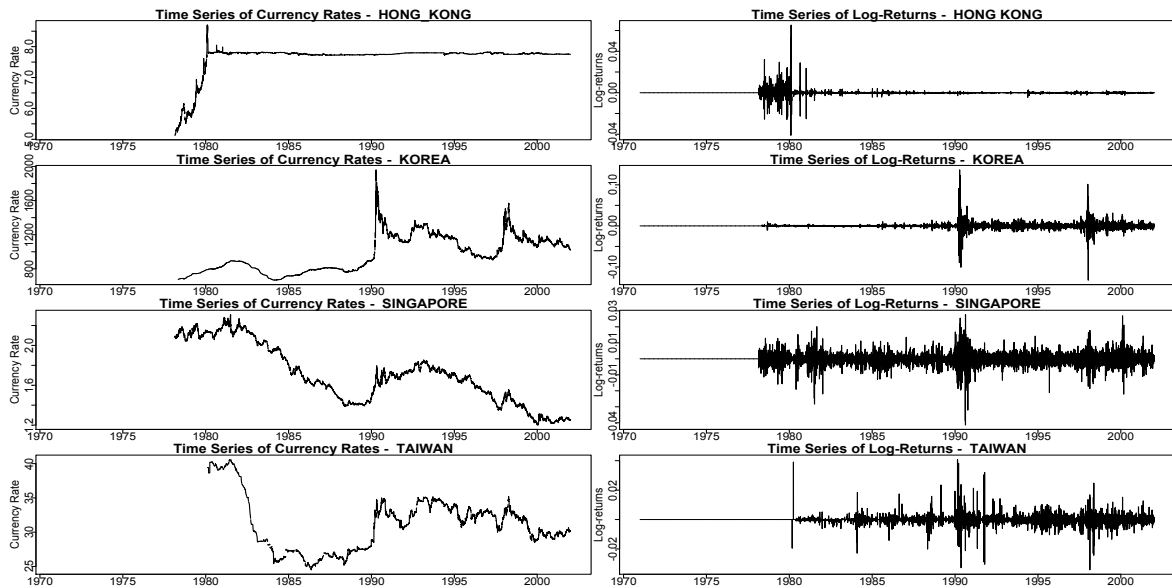


Figura 4.3: Evolução Temporal - Tigres Asiáticos

O padrão das séries dos outros países desenvolvidos (figura 4.4) é semelhante às séries da União Européia, com flutuações aleatórias dos retornos. Os outros países subdesenvolvidos (figura 4.5) apresentam comportamento aleatório, com exceção da Venezuela, que possui política de câmbio fixado.

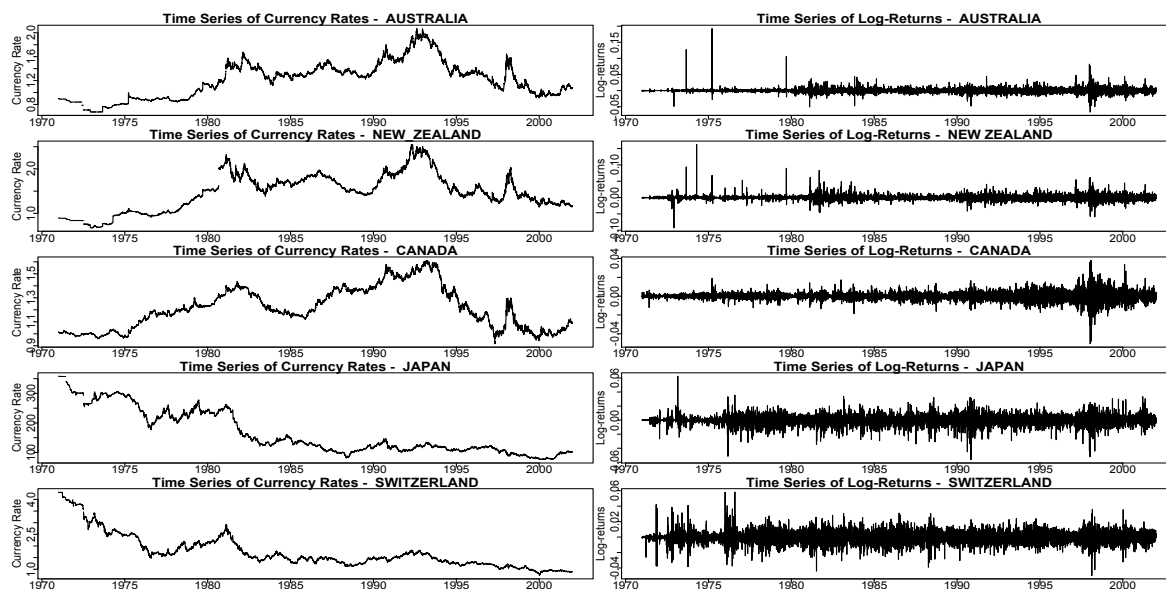


Figura 4.4: Evolução Temporal - Outros países desenvolvidos

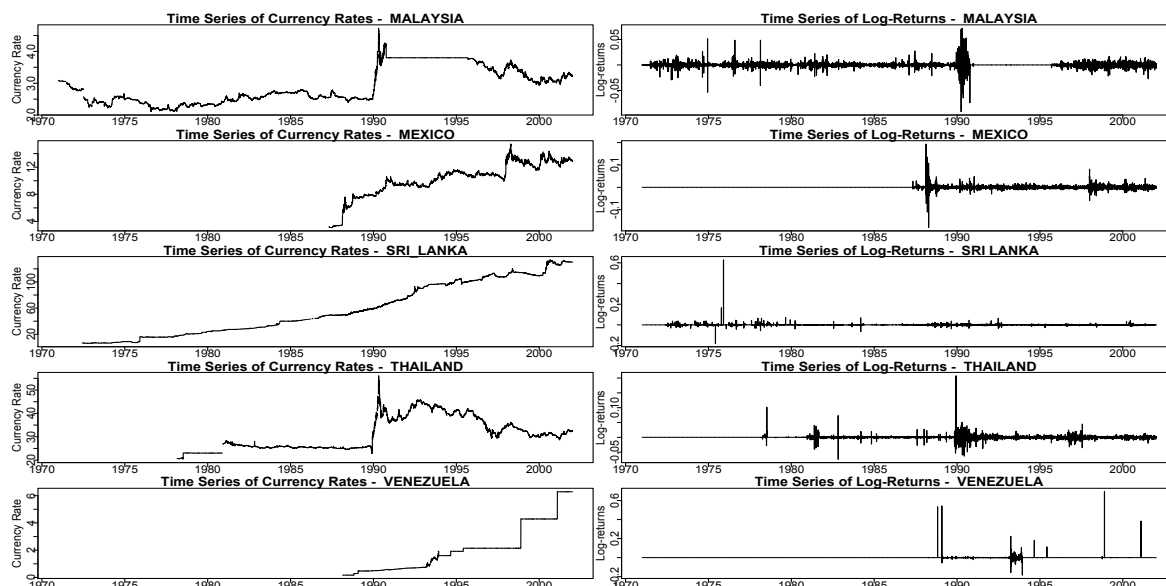


Figura 4.5: Evolução Temporal - Outros países subdesenvolvidos

4.1.2 Histogramas

A seguir, são apresentados os histogramas dos retornos das moedas dentro de cada grupo, anteriormente mencionados. O primeiro gráfico (figura 4.6) mostra o histograma dos retornos dos BRICS. Os histogramas dão a impressão de que a distribuição normal não é a mais adequada para os dados, uma vez que os histogramas sugerem que é necessário uma distribuição mais leptocúrtica. Uma distribuição que poderia se aplicar seria a distribuição t-Student, ou para um caso mais complexo uma distribuição alfa-estável, devido à sua adaptabilidade de acordo com os parâmetros.

A figura 4.7 da mesma maneira sugere que distribuições com maior excesso de curtose são mais adequadas para os dados de retornos de taxas de câmbio.

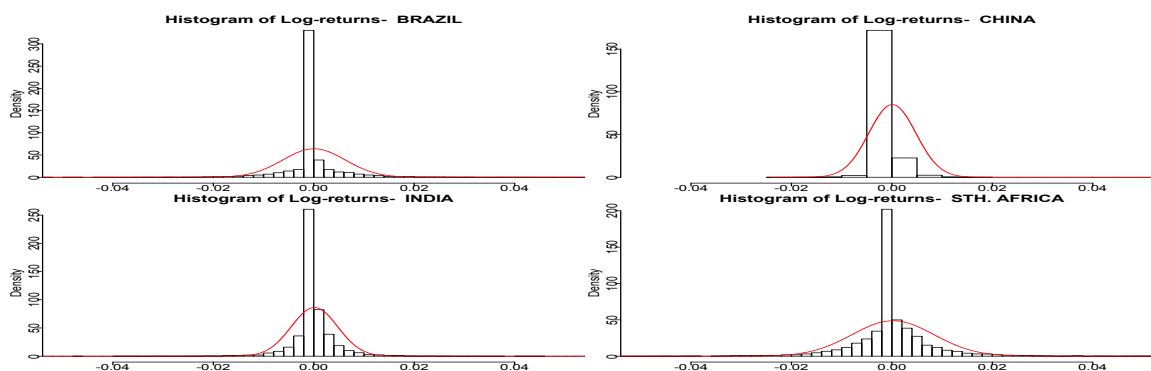


Figura 4.6: Histogramas dos log-retornos - BRICS

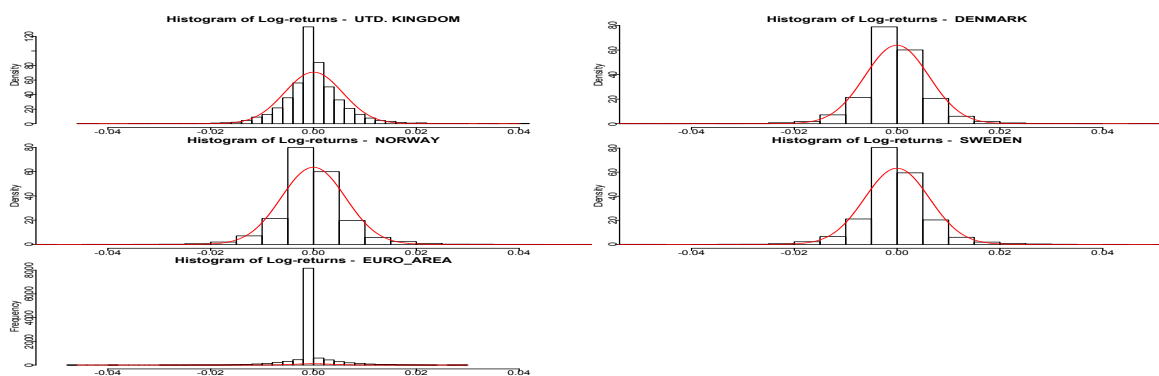


Figura 4.7: Histogramas dos log-retornos - E.U.

Enquanto a série dos BRICS sugere distribuições leptocúrticas e para os retornos das moedas da União Européia ditribuições de cauda pesada, para os Tigres Asiáticos semelhante aos BRICS distribuições com maior excesso de curtose são mais apropriadas, o que também vale para as séries de outros países desenvolvidos.

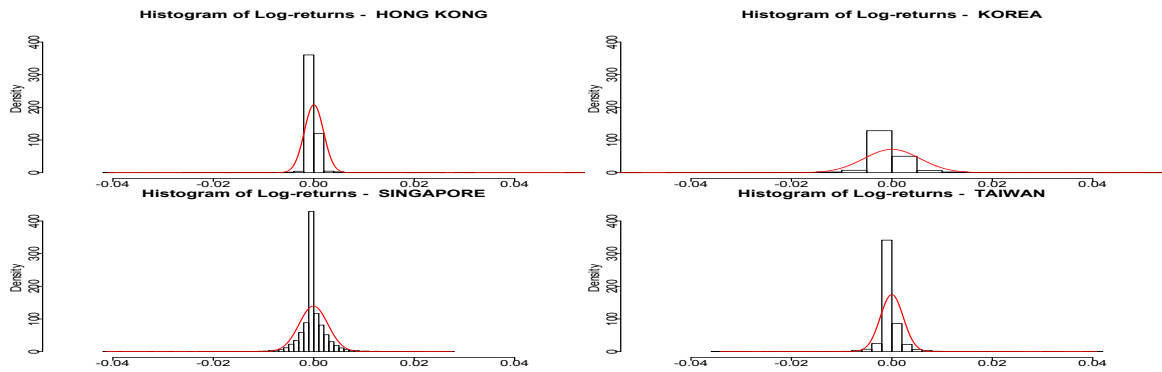


Figura 4.8: Histogramas dos log-retornos - Tigres Asiáticos

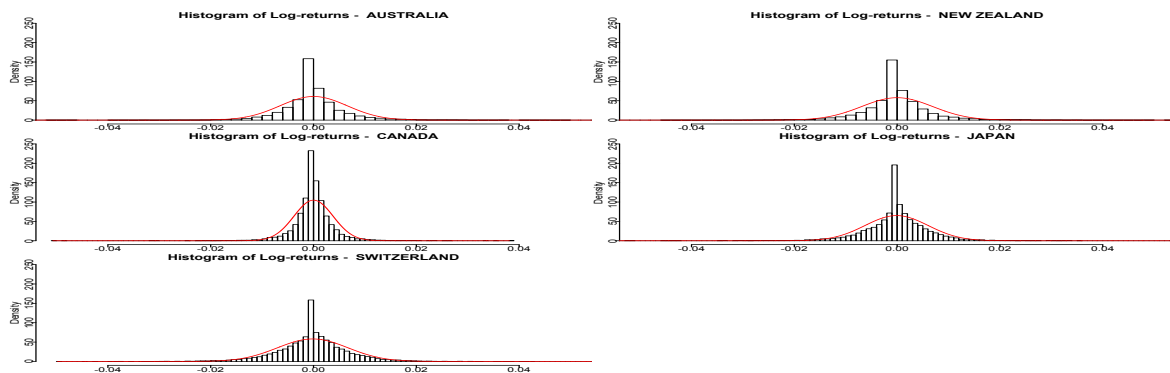


Figura 4.9: Histogramas dos log-retornos - Outros países desenvolvidos

Os outros países subdesenvolvidos não apresentaram histogramas muito informativos devido ao fato de os retornos variarem muito pouco por causa do câmbio fixado que alguns desses países adotam, com exceção da Malásia que apresenta comportamento semelhante às séries anteriores.

Em seguida, temos os gráficos quantil-quantil (Q-Q Plots), que mostram como as séries desviam da distribuição, principalmente no peso das caudas.

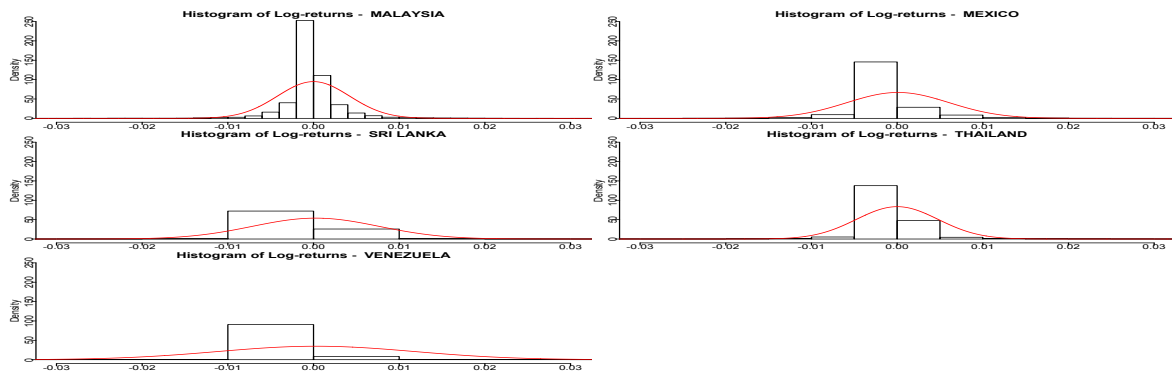
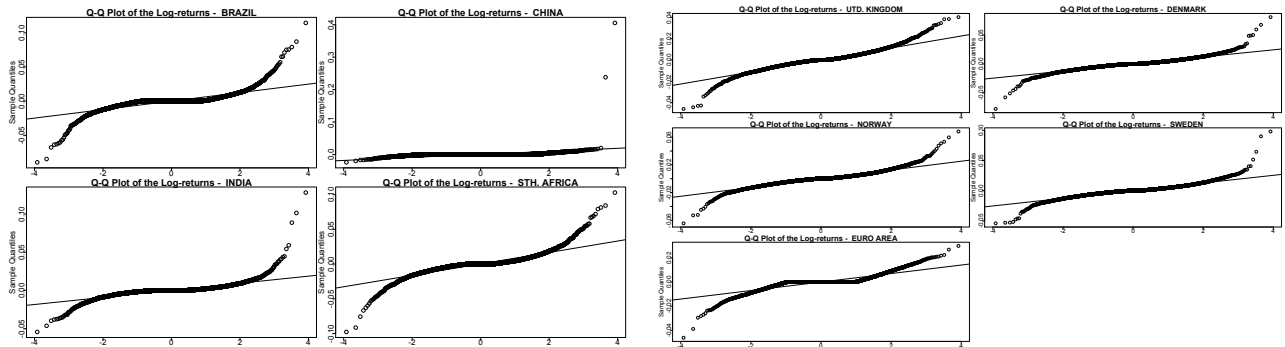
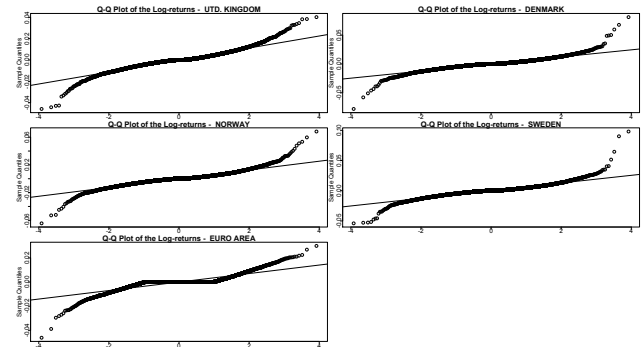


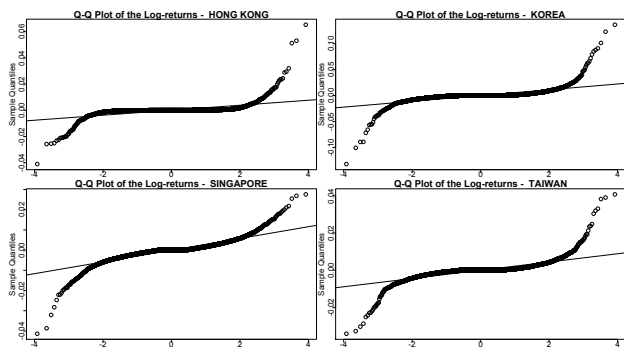
Figura 4.10: Histogramas dos log-retornos - Outros países subdesenvolvidos



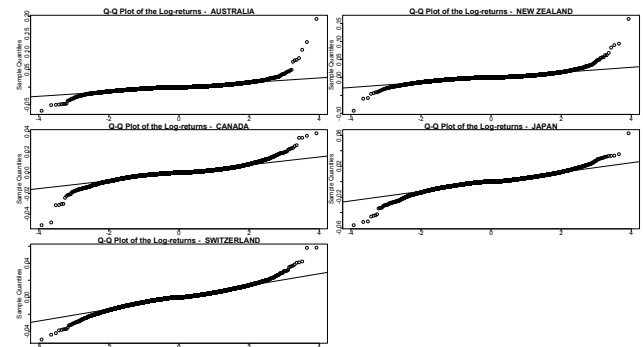
(a) BRICS



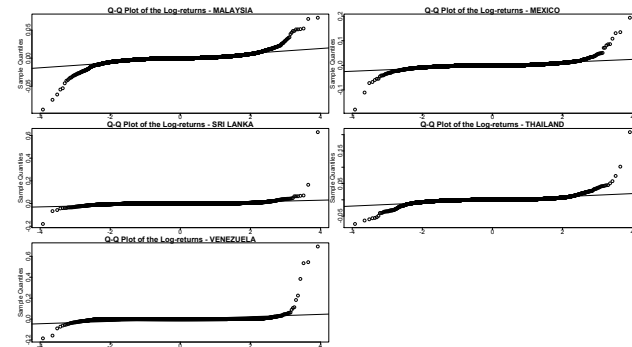
(b) União Européia



(c) Tigres Asiáticos



(d) Outros Desenvolvidos



(e) Outros Subdesenvolvidos

Figura 4.11: Q-Q Plots para as séries de câmbio de cada grupo.

4.1.3 Gráficos de Dispersão

Entre os Grupos

No grupo dos BRICS com a UE, vemos que há indicativos de associação entre os retornos do Brasil e da África do Sul com os países da UE. Índia e China não indicam associação entre seus retornos e os retornos dos países europeus. Para todos os pares de marginais a associação é mais forte no centro, além de aparentar haver pouca associação entre os retornos, o que pode ser indício de que uma cópula da família Farlie-Gumbel-Morgenstern, ou uma cópula elíptica.

Os gráficos de dispersão entre os BRICS e os Tigres (figura 4.13) mostram que de maneira semelhante aos gráficos da figura 4.12, o yuan (China), a rúpia (Índia) e, nos Tigres, o dólar de Hong Kong, apresentam pouca evidência de associação entre os retornos das taxas de câmbio destes países com os retornos de outros países.

Na figura 4.14 observamos um comportamento que indica associação positiva entre os retornos das moedas dos BRICS e de outros países desenvolvidos mais evidente, até mesmo para a Índia, com exceção da China.

Já para as séries de moedas de outros países subdesenvolvidos (figura 4.15), observa-se indícios de associação somente entre os BRICS e México, Malásia e Tailândia. Todos os outros aparentam ter correlação muito pequena com as moedas dos BRICS.

Por fim, a figura 4.16 foi feita para funcionar como uma espécie de grupo "controle", pois o comportamento das moedas dos dois grupos comparados, UE e outros países desenvolvidos, é bom e apresenta evidência de correlação positiva, pois são moedas que tem suas cotações definidas pelo mercado.

Na seção subsequente, veremos os log-retornos dos BRICS como Autocópuas, ou seja, tomaremos os log-retornos de cada país membro deste grupo e formaremos cópulas com seus log-retornos transladados no tempo. Eventualmente, faremos teste de ajustamento para verificar se os dados se ajustam a alguma família de cópulas Arquimedianas e também nas Gaussianas.

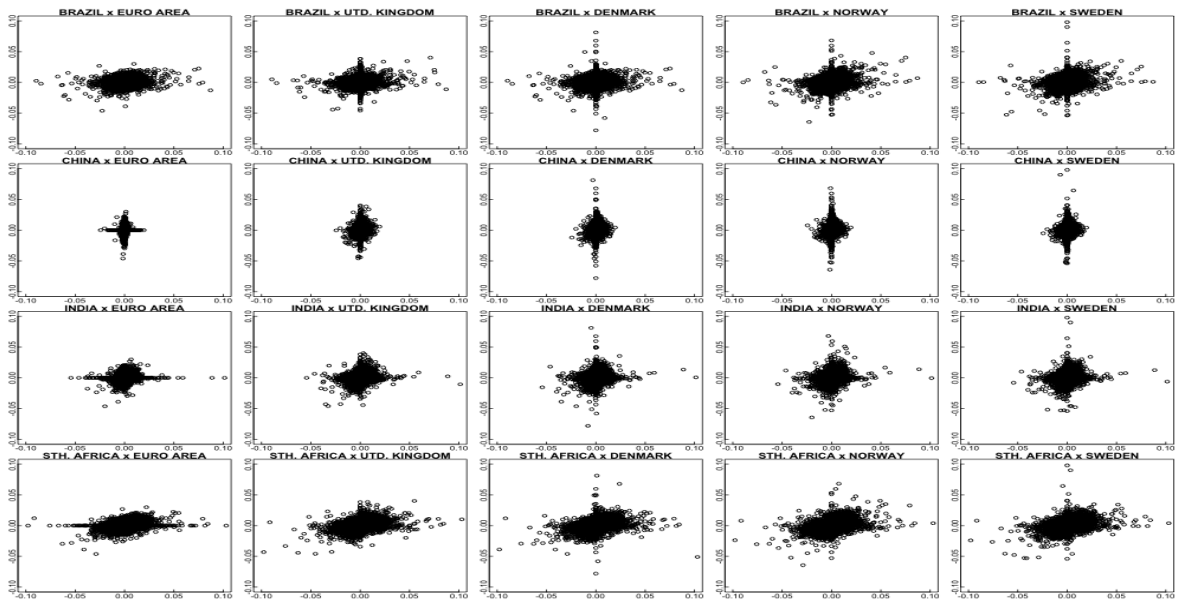


Figura 4.12: Gráficos de dispersão dos log-retornos - BRICS vs. U.E.

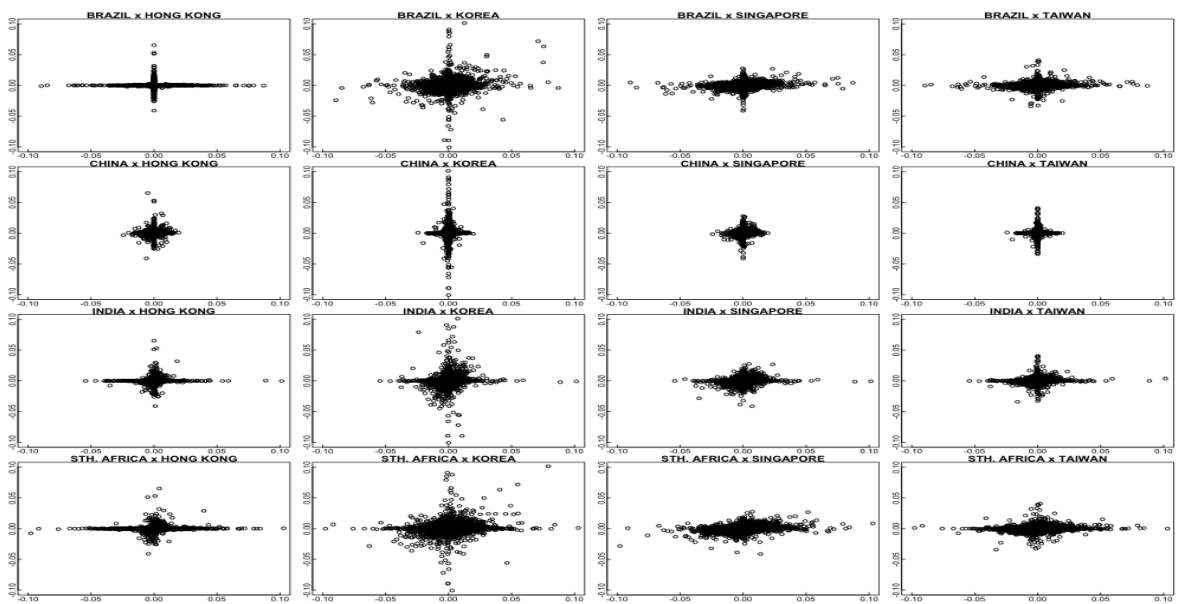


Figura 4.13: Gráficos de dispersão dos log-retornos - BRICS vs. Tigres Asiáticos

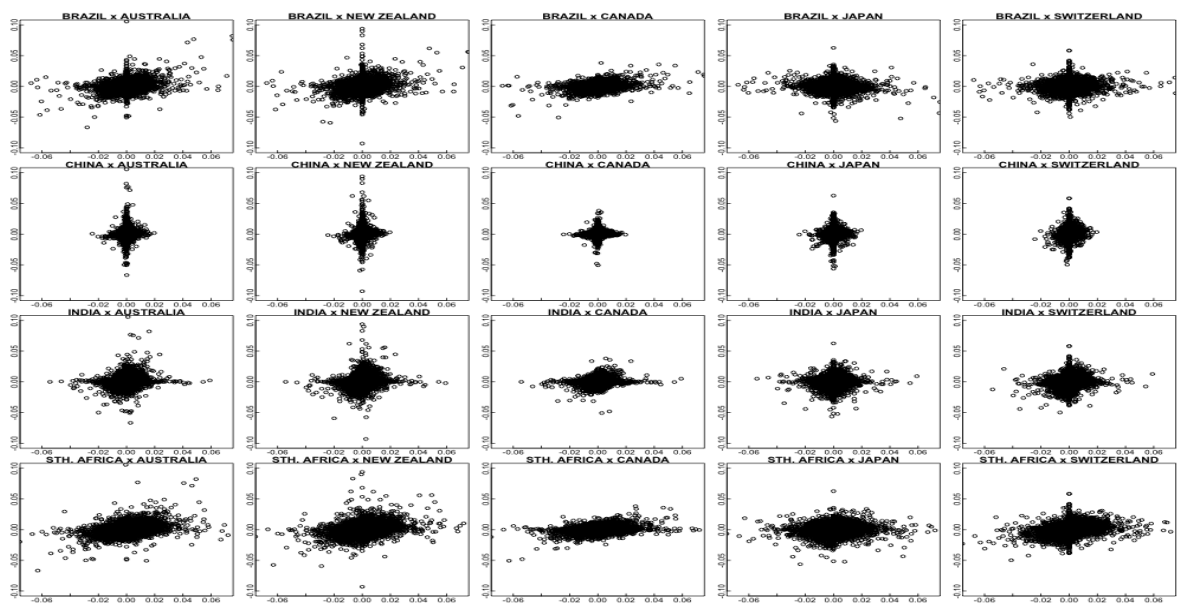


Figura 4.14: Gráficos de dispersão dos log-retornos - BRICS vs. Outros países desenvolvidos

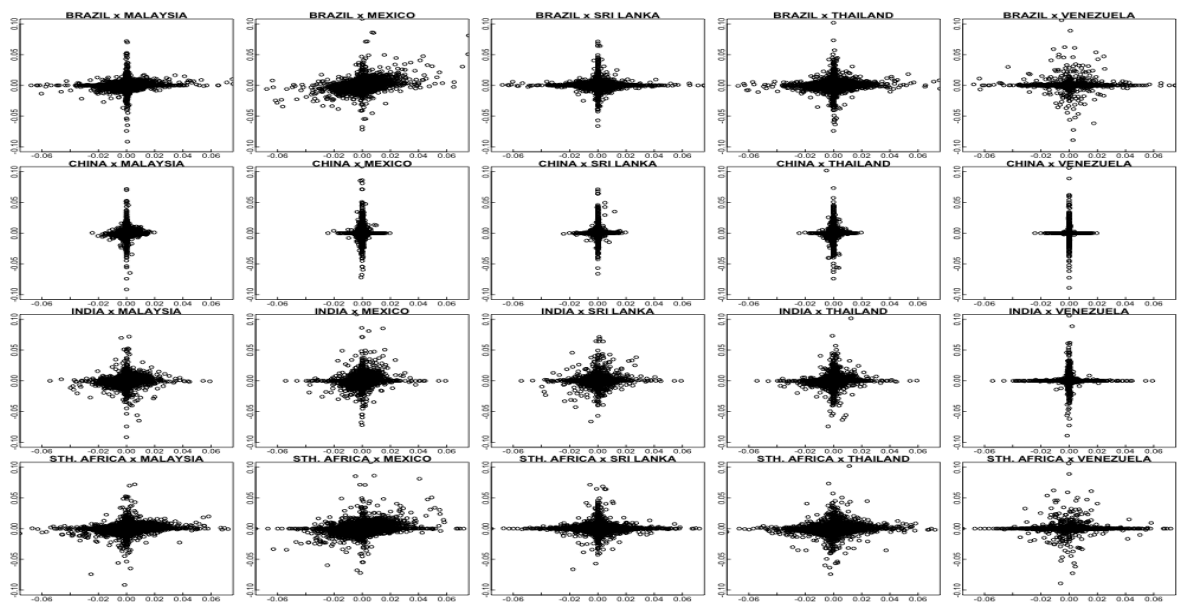


Figura 4.15: Gráficos de dispersão dos log-retornos - BRICS vs. Outros países subdesenvolvidos

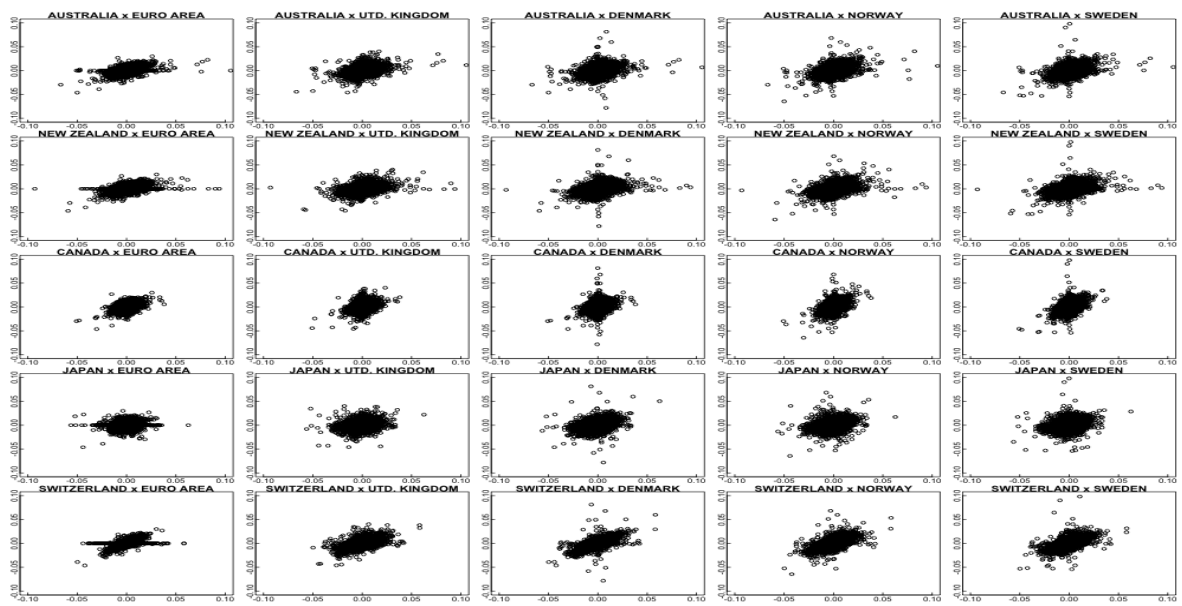


Figura 4.16: Gráficos de dispersão dos log-retornos - E.U. vs. Outros países desenvolvidos

Entre os Tempos Passados

Para os gráficos comparando as moedas dos BRICS com seus retornos em tempos passados, observa-se que há evidência de uma leve associação entre os retornos com os retornos passados, a não ser pela rúpia (Índia) e pelo rand (África do Sul), o qual apresenta possível inexistência de associação.

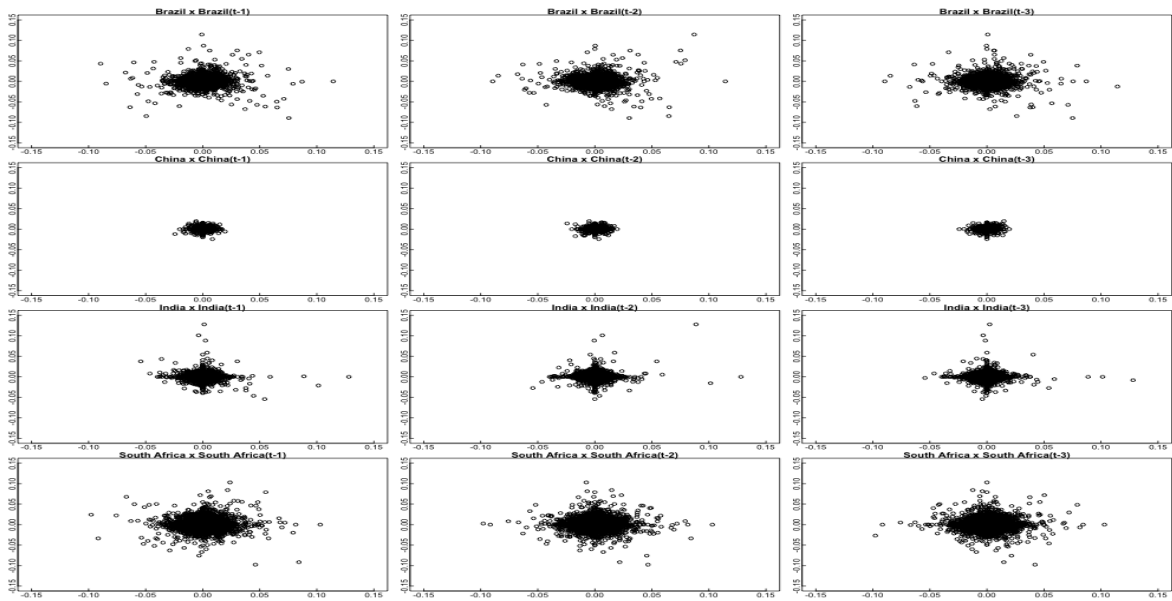


Figura 4.17: Gráficos de dispersão dos log-retornos - BRICS e seus log-retornos passados

4.1.4 Medidas de Correlação

A seguir seguem algumas tabelas que mostram os coeficientes de correlação de *Spearman* (ρ_S) e *Kendall* (ρ_τ) para cada um dos gráficos de dispersão feitos anteriormente. Foram calculados os p-valores para o coeficiente de *Spearman*, os quais são apresentados nas tabelas contidas no Anexo A.

A tabela 4.2 apresenta os coeficientes de correlação de *Spearman*, enquanto que a tabela 4.3 mostra os coeficientes de *Kendall*. Os testes de hipóteses para o coeficiente de *Spearman* indicaram que se deve rejeitar a hipóteses de correlação zero para qualquer um dos coeficientes. Entretanto, observa-se que a China apresenta correlação menor do que outros países quando comparada com o bloco europeu.

	Zona do Euro	Reino Unido	Dinamarca	Noruega	Suécia
Brasil	0.144	0.096	0.107	0.140	0.139
China	0.056	0.075	0.089	0.080	0.084
Índia	0.121	0.224	0.218	0.227	0.213
África do Sul	0.241	0.347	0.388	0.392	0.387

Tabela 4.2: Coeficientes de correlação de Spearman - BRICS vs. U.E.

	Zona do Euro	Reino Unido	Dinamarca	Noruega	Suécia
Brasil	0.123	0.072	0.081	0.106	0.106
China	0.048	0.058	0.069	0.062	0.065
Índia	0.096	0.162	0.158	0.166	0.155
África do Sul	0.193	0.254	0.284	0.290	0.285

Tabela 4.3: Coeficientes de correlação de Kendall - BRICS vs. U.E.

Nas tabelas 4.4 e 4.5 seguem da mesma forma ρ_S e ρ_τ , respectivamente. O teste de hipóteses indicou também que há evidencia para rejeitar a hipótese nula do teste. Percebe-se porém, que neste caso o Brasil apresenta menor associação com alguns países.

	Hong Kong	Coréia do Sul	Singapura	Taiwan
Brasil	0.048	0.113	0.166	0.096
China	0.108	0.114	0.126	0.094
Índia	0.124	0.154	0.240	0.134
África do Sul	0.139	0.146	0.347	0.132

Tabela 4.4: Coeficientes de correlação de Spearman - BRICS vs. Tigres Asiáticos

	Hong Kong	Coréia do Sul	Singapura	Taiwan
Brasil	0.039	0.091	0.132	0.079
China	0.093	0.094	0.101	0.079
Índia	0.097	0.116	0.181	0.103
África do Sul	0.108	0.111	0.265	0.102

Tabela 4.5: Coeficientes de correlação de Kendall - BRICS vs. Tigres Asiáticos

As tabelas 4.6 e 4.7 mostram os coeficientes entre BRICS e outros países desenvolvidos. Apesar de alguns coeficientes muito pequenos apresentados por Brasil e China. Novamente o teste de hipóteses conclui que a dependência entres as moedas dos dois grupos não é nula, exceto para real e yene (Japão) os quais foram considerados independentes a 5% de significância.

	Austrália	Nova Zelândia	Canadá	Japão	Suíça
Brasil	0.192	0.158	0.156	-0.017	0.057
China	0.093	0.087	0.062	0.037	0.073
Índia	0.169	0.185	0.144	0.093	0.177
África do Sul	0.319	0.297	0.245	0.178	0.341

Tabela 4.6: Coeficientes de correlação de Spearman - BRICS vs. Outros países desenvolvidos

	Austrália	Nova Zelândia	Canadá	Japão	Suíça
Brasil	0.149	0.121	0.119	-0.013	0.043
China	0.073	0.068	0.048	0.029	0.057
Índia	0.122	0.135	0.104	0.067	0.127
África do Sul	0.236	0.221	0.178	0.130	0.247

Tabela 4.7: Coeficientes de correlação de Kendall - BRICS vs. Outros países desenvolvidos

As últimas comparações entre grupos são as dos países dos BRICS com outros países subdesenvolvidos e o entre a U.E. e os outros países desenvolvidos, como apresentado nas tabelas 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11. Os testes de hipótese resultaram em não rejeição da hipótese nula para todos os coeficientes entre os BRICS e Venezuela e também Brasil e Sri Lanka a um nível de significância de 5%.

	Malásia	México	Sri Lanka	Tailândia	Venezuela
Brasil	0.096	0.335	0.002	0.114	0.009
China	0.152	0.036	0.036	0.099	-0.006
Índia	0.235	0.119	0.068	0.186	-0.002
África do Sul	0.233	0.245	0.030	0.194	0.017

Tabela 4.8: Coeficientes de correlação de Spearman - BRICS vs. Outros países subdesenvolvidos

	Malásia	México	Sri Lanka	Tailândia	Venezuela
Brasil	0.074	0.284	0.001	0.093	0.007
China	0.122	0.030	0.030	0.083	-0.006
Índia	0.178	0.092	0.053	0.143	-0.002
África do Sul	0.170	0.192	0.024	0.151	0.014

Tabela 4.9: Coeficientes de correlação de Kendall - BRICS vs. Outros países subdesenvolvidos

Para o grupo teste, ou seja, os outros países desenvolvidos com comparados com a União Européia obteve-se os seguintes resultados, mostrados nas tabelas 10 e 11:

	Zona do Euro	Reino Unido	Dinamarca	Noruega	Suécia
Austrália	0.311	0.342	0.339	0.347	0.361
Nova Zelândia	0.295	0.356	0.348	0.351	0.343
Canadá	0.222	0.220	0.237	0.251	0.257
Japão	0.158	0.333	0.419	0.364	0.356
Suíça	0.480	0.595	0.810	0.705	0.695

Tabela 4.10: Coeficientes de correlação de Spearman - Outros países desenvolvidos vs. U.E.

	Zona do Euro	Reino Unido	Dinamarca	Noruega	Suécia
Austrália	0.245	0.247	0.245	0.252	0.262
Nova Zelândia	0.232	0.257	0.249	0.253	0.246
Canadá	0.173	0.154	0.167	0.177	0.182
Japão	0.123	0.239	0.304	0.264	0.260
Suíça	0.388	0.443	0.653	0.542	0.531

Tabela 4.11: Coeficientes de correlação de Kendall - Outros países desenvolvidos vs. U.E.

Os coeficientes são relativamente altos e positivos para todos os países e apresentaram significância a 5%, como era esperado para moedas bem comportadas.

Na próxima tabela temos os coeficientes de *Spearman* para os BRICS quando comparados com seus retornos passados. Pelos testes de hipóteses, rejeitamos a hipótese nula somente para r_{t-3} no caso do Brasil, r_{t-2} e r_{t-3} no caso da China e r_{t-1} para a Índia. Para a África do Sul todos os coeficientes foram considerados não nulos a um nível de significância de 5%.

	\mathbf{r}_{t-1}	\mathbf{r}_{t-2}	\mathbf{r}_{t-3}
Brasil	0.01	0.014	0.026
China	-0.017	0.024	0.06
Índia	-0.084	-0.013	0.015
África do Sul	0.001	-0.018	0.006

Tabela 4.12: Coeficientes de correlação de Spearman
BRICS vs. Log-retonos Passados

	\mathbf{r}_{t-1}	\mathbf{r}_{t-2}	\mathbf{r}_{t-3}
Brasil	0.007	0.016	0.027
China	-0.016	0.023	0.054
Índia	-0.07	-0.01	0.012
África do Sul	0.001	-0.015	0.005

Tabela 4.13: Coeficientes de correlação de Kendall
BRICS vs. Log-retonos Passados

4.1.5 Simulações de Autocópuas

A seguir, temos algumas simulações de Autocópuas, utilizando os valores do tau de Kendall calculados a partir das séries de log-retornos dos BRICS e estas mesmas séries transladadas no tempo. Optamos por utilizar somente os parâmetros das séries que apresentaram siginificância quando correlacionadas com suas versões transladadas. Os gráficos mostram diferentes Autocópuas geradas a partir de diferentes parâmetros e distribuições marginais. Simulamos somente na família *Farlie-Gumbel-Morgenstern*, pois esta seria a cópula que possui estrutura de dependência mais parecida com o que foi observado nos dados, ou seja, dependência fraca entre as séries.

A primeira simulação (figura 4.18) foi feita para os retornos do Real, com o parâmetro $\theta = 0.0016$.

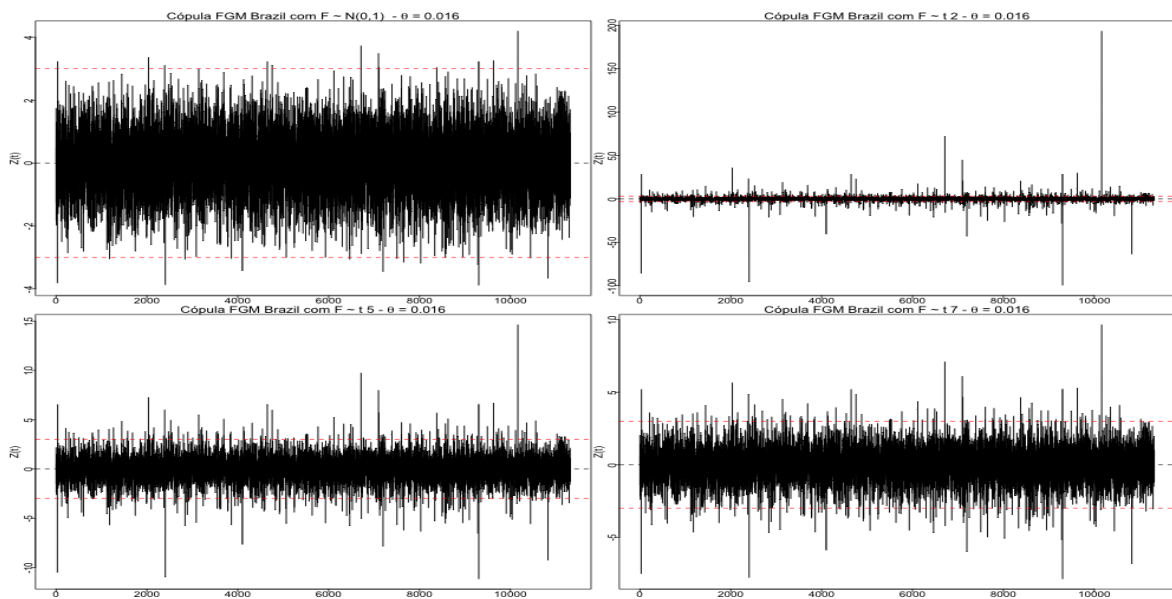


Figura 4.18: Simulação de Autocópuas com diferentes distribuições marginais para o Real.

Na próxima simulação (figura 4.19), temos a série de retornos do Real, com $\theta = 0.027$.

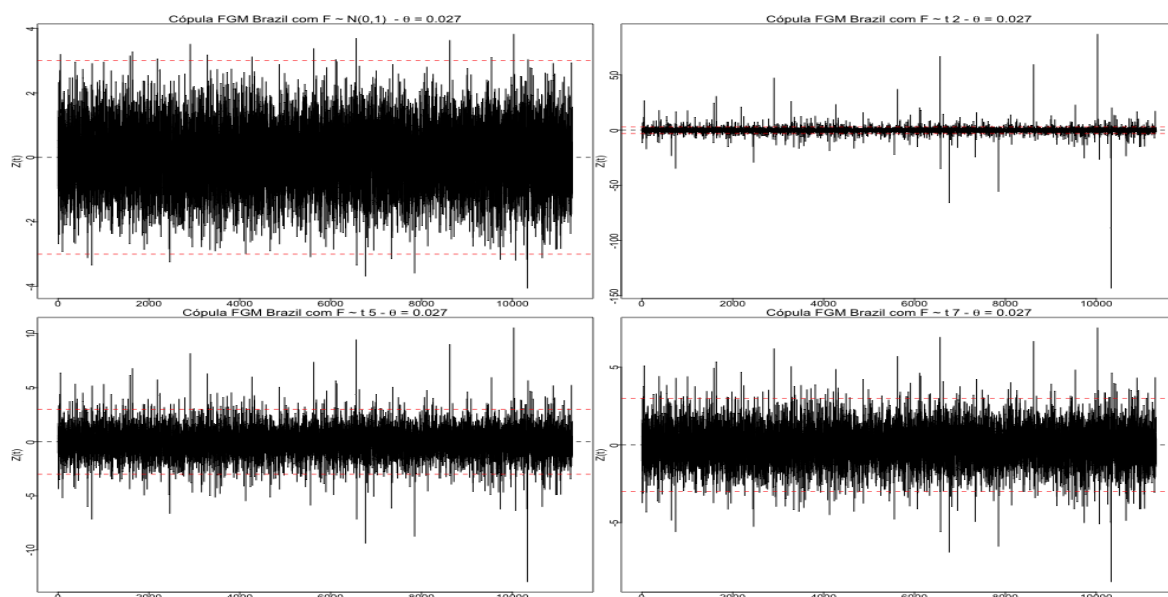


Figura 4.19: Simulação de Autocópuas com diferentes distribuições marginais para o Real.

A seguir, nas figuras 4.20 e 4.21, temos a simulação dos retornos do Yuan

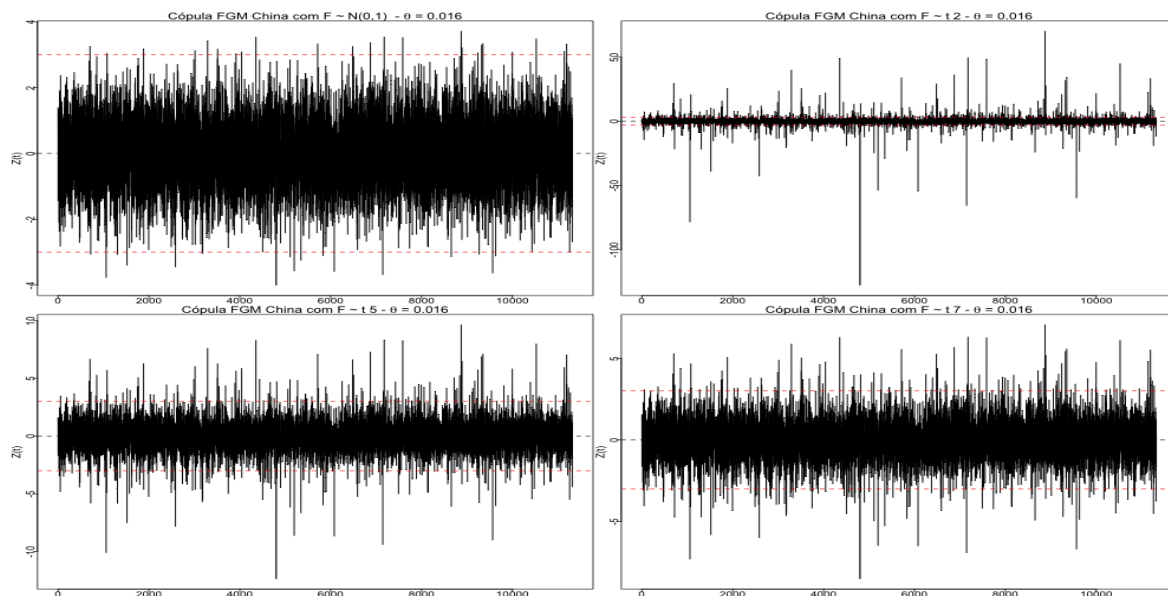


Figura 4.20: Simulação de Autocópuas com diferentes distribuições marginais para o Yuan.

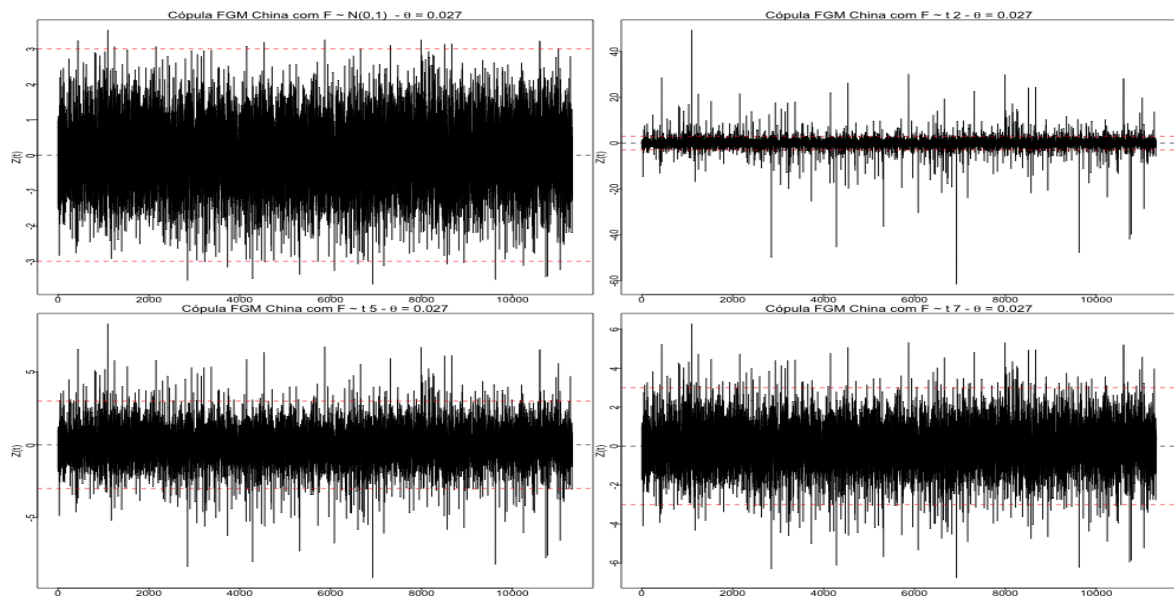


Figura 4.21: Simulação de Autocópuas com diferentes distribuições marginais para o Yuan.

Por fim, nas figuras 4.22 e 4.23, podemos ver as simulações para a Rúpia e o Rand, com parâmetros $\theta = -0.07$ e $\theta = 0.015$, respectivamente.

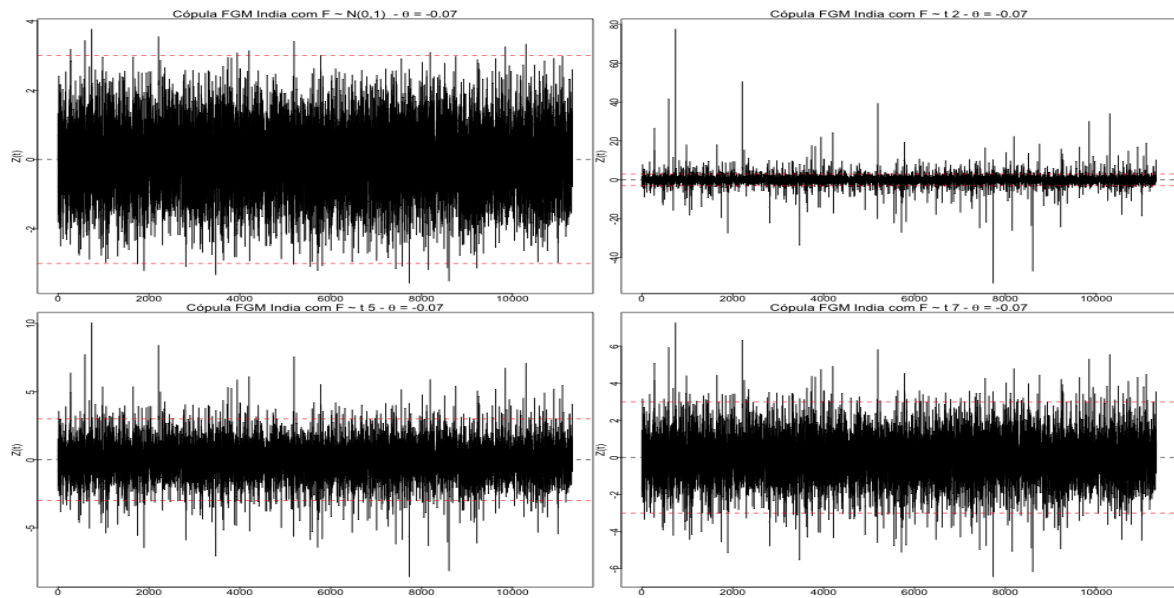


Figura 4.22: Simulação de Autocópuas com diferentes distribuições marginais para a Rúpia.

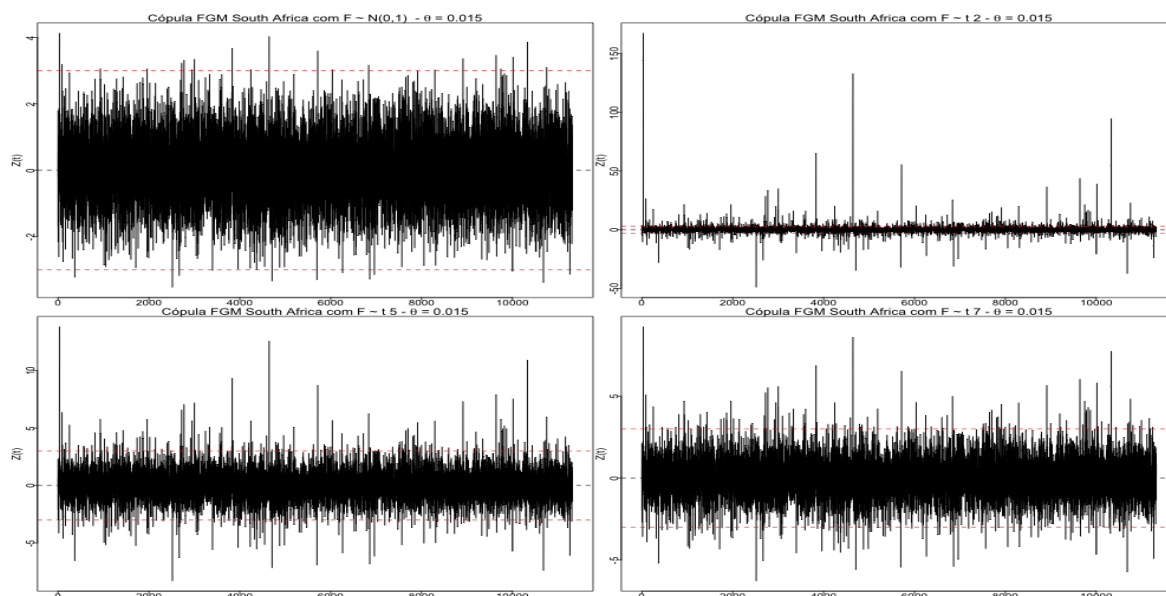


Figura 4.23: Simulação de Autocópuas com diferentes distribuições marginais para o Rand.

4.1.6 Testes de Ajustamento

Utilizou-se o pacote `copula` do R para fazer os testes descritos no capítulo 3. Não se encontrou nenhum ajustamento significativo, entretanto pode-se testar em trabalhos posteriores outras famílias de cópuas. Neste trabalho testamos as famílias *Farlie-Gumbel-Morgenstern*, *Frank*, *Clayton* e a família de cópuas Gaussianas.

	Frank		FGM		Clayton		Normal	
	S_n	p-Valor	S_n	p-Valor	S_n	p-Valor	S_n	p-Valor
Brasil 2-lag	63.903	< 0.001	63.473	< 0.001	60.673	< 0.001	63.372	< 0.001
Brasil 3-lag	44.917	< 0.001	64.356	< 0.001	59.473	< 0.001	59.799	< 0.001
China 2-lag	136.803	< 0.001	100.463	< 0.001	96.602	< 0.001	103.021	< 0.001
China 3-lag	69.120	< 0.001	102.877	< 0.001	97.741	< 0.001	99.497	< 0.001
Índia 1-lag	14.561	< 0.001	12.496	< 0.001	-	-	12.792	< 0.001
Afr. Sul 2-lag	6.241	< 0.001	6.010	< 0.001	5.880	< 0.001	5.9243	< 0.001

Tabela 4.14: Tabela de resultados de testes de ajustamento para as séries dos BRICS.

Capítulo 5

Considerações Finais

Com os resultados obtidos, a partir do conjunto de dados das taxas de câmbio, vemos que as cópulas podem ser uma boa alternativa para estudar a estrutura de dependência entre esses dados. Apesar de não encontrarmos ajustamentos significativos para as cópulas propostas (Frank, FGM, Clayton e Normal), observamos, a partir das simulações, que temos estruturas parecidas nos dados analisados com as estruturas obtidas nas simulações de cópulas com distribuições marginais t-Student com poucos graus de liberdade.

Uma possível explicação para não ter sido encontrado nem um ajustamento significativo é o formato da dispersão das séries de tempo. As cópulas propostas apresentam estruturas de dependência que não se assemelham com o que é observado nos dados. Mesmo a cópula FGM, que é de maior utilidade quando a dependência entre as distribuições marginais é pequena, não apresentou ajuste significativo. Algo que pode ser feito em algum estudo posterior é testar as cópulas Arquimedianas propostas, modificando suas funções geradoras, como descrito na seção (2.2.4).

Neste estudo, devido ao pouco tempo não pudemos realizar outros testes, para cobrir uma maior gama de famílias de cópulas, geradas de maneiras diferentes e com outras distribuições marginais. Nos testes apresentados no Capítulo 3, temos a possibilidade de incluir estas nuances. Em algum estudo posterior, é possível implementar as funções dos testes ali apresentados e utilizá-los, por exemplo, para testar o ajustamento dos dados a alguma cópula simulada. Durante a realização deste estudo, foi realizada a implementação dos algoritmos das funções e testes descritos na seção (3.2), entretanto, aplicá-los aos dados requer muito tempo; por este

fato, foi utilizado o pacote implementado no R.

Sem dúvidas, modelagem por acoplamentos é uma técnica muito poderosa e que vem ganhando cada vez mais espaço em diversos campos de aplicação da teoria de probabilidades e da Estatística. O estudo de modelagem por acoplamentos se mostra muito útil nas mais diversas aplicações, que certamente motivará outros trabalhos posteriores e também foi uma motivação para este trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] CHAKRABORTI, A., AND CHICHEPORTICHE, R. Copulas and time series with long-ranged dependences. Tech. rep., 2013.
- [2] GENEST, C., AND MACKAY, J. The joy of copulas: bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician* 40, 4 (1986), 280–283.
- [3] GENEST, C., QUESSY, J.-F., AND RÉMILLARD, B. Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation. *Scandinavian Journal of Statistics* 33, 2 (2006), 337–366.
- [4] JUNKER, M., AND MAY, A. Measurement of aggregate risk with copulas. *The Econometrics Journal* 8, 3 (2005), 428–454.
- [5] NELSEN, R. *An introduction to copulas, ser.* Springer Series in Statistics. New York: Springer, 2006.
- [6] PUMI, G., AND LOPES, S. R. Simulation of univariate time series using copulas.
- [7] RAKONCZAI, P., MÁRKUS, L., AND ZEMPLÉNI, A. Autocopulas: Investigating the interdependence structure of stationary time series. *Methodology and Computing in Applied Probability* 14, 1 (2012), 149–167.
- [8] TRIVEDI, P. K. E ZIMMER, D. M. *Copula modeling: an introduction for practitioners.* Now Publishers Inc, 2007.

Anexo A

Tabelas de P-Valores

A seguir estão as tabelas com os p-valores para os testes de hipóteses realizados para os coeficientes de correlação de *Spearman*.

O os p-valores são referentes ao teste das hipóteses $H_0 : \rho_S = 0$ e $H_1 : \rho_S \neq 0$.

	Zona do Euro	Reino Unido	Dinamarca	Noruega	Suécia
Brasil	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
China	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
Índia	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
África do Sul	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001

Tabela A.1: P-valores para os testes de hipóteses
BRICS vs. U.E.

	Hong Kong	Coréia do Sul	Singapura	Taiwan
Brasil	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
China	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
Índia	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
África do Sul	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001

Tabela A.2: P-valores para os testes de hipóteses
BRICS vs. Tigres Asiáticos

	Austrália	Nova Zelândia	Canadá	Japão	Suíça
Brasil	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0707	< 0.0001
China	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0001	< 0.0001
Índia	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
África do Sul	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001

Tabela A.3: P-valores para os testes de hipóteses
BRICS vs. Outros países desenvolvidos

	Malásia	México	Sri Lanka	Tailândia	Venezuela
Brasil	< 0.0001	< 0.0001	0.8176	< 0.0001	0.3241
China	< 0.0001	0.0001	0.0001	< 0.0001	0.5067
Índia	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.8171
África do Sul	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	0.0720

Tabela A.4: P-valores para os testes de hipóteses
BRICS vs. Outros países subdesenvolvidos

	Zona do Euro	Reino Unido	Dinamarca	Noruega	Suécia
Austrália	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
Nova Zelândia	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
Canadá	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
Japão	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001
Suíça	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001	< 0.0001

Tabela A.5: P-valores para os testes de hipóteses
Outros países desenvolvidos vs. U.E.

	\mathbf{r}_{t-1}	\mathbf{r}_{t-2}	\mathbf{r}_{t-3}
Brasil	0.2913	0.1329	0.0051
China	0.0688	0.0094	< 0.0001
Índia	< 0.0001	0.1705	0.1086
África do Sul	0.8778	0.0609	0.4986

Tabela A.6: P-valores para os testes de hipóteses
BRICS vs. Log-retonos Passados

	\mathbf{r}_{t-1}	\mathbf{r}_{t-2}	\mathbf{r}_{t-3}
Brasil	0.3741	0.0349	0.0005
China	0.0578	0.0052	< 0.0001
Índia	< 0.0001	0.1571	0.0845
África do Sul	0.9125	0.0287	0.4456

Tabela A.7: P-valores para o *tau* de Kendall
BRICS vs. Log-retornos Passados

Anexo B

Códigos em R

```
exchange = read.table(file.choose(), header=T, sep=',')
```

```
#head(exchange)
```

```
#sapply(exchange, class)
```

```
exchange[,1] = as.Date(exchange[,1], format='%m/%d/%y')
```

```
for (i in 2:24){
```

```
exchange[,i] = as.numeric(exchange[,i])
```

```
}
```

```
for (i in 2:5){
```

```
exchange[,i]=1/exchange[,i]
```

```
}
```

```
#head(exchange)
```

```
#sapply(exchange, class)
```

```
#dim(exchange)
```

```
returns = matrix(0,nrow=11320,ncol=24)
```

```

data = exchange[,-1]

#head(data)
#tail(data)
#dim(data)

#Cálculo do log-retornos

for (j in 1:23){
for (i in 2:length(data$AUSTRALIA)){
returns[1,j]=NA
returns[i,j]=round(log(data[i,j]/data[i-1,j]),4)
}
}

#head(returns)
#tail(returns)
#dim(returns)

#summary(returns[,23])
#summary(returns[,24])

returns = returns[,-24]

colnames = names(exchange[,-1])
colnames[2] = "EURO AREA"
colnames[3] = "NEW ZEALAND"

```

```

colnames[4] = "UTD. KINGDOM"
colnames[9] = "HONG KONG"
colnames[17] = "STH. AFRICA"
colnames[19] = "SRI LANKA"

#colnames

#class(returns)

returns[is.na(returns)]=0
#head(returns)

#Nomeando as colunas da matriz

returns = matrix(returns, nrow=11320, ncol=23, dimnames=list(NULL,colnames))
#returns[1:3,]

#Separando outros países integrantes da EU

eu_others_rates = data[,c(4,8,15,16)]
eu_others = returns[,c(4,8,15,16)]
#head(eu_others)
#tail(eu_others)
#dim(eu_others)

#Separando os BRICS

brics_rates = data[,c(5,7,10,17)]
brics = returns[,c(5,7,10,17)]

```

```

#head(brics)

#dim(brics)

#Separando os quatro Tigres Asiáticos

asian_tigers_rates = data[,c(9,12,18,21)]
asian_tigers = returns[,c(9,12,18,21)]

#head(asian_tigers)

#dim(asian_tigers)

names(as.data.frame(returns))
names(data)

others_developed_rates = data[,c(1,3,6,11,20)]
others_developed = returns[,c(1,3,6,11,20)]

#head(others_developed_rates)

#head(others_developed)

others_undeveloped_rates = data[,-c(1,2,3,6,11,20,5,7,10,17,9,12,18,21,4,8,15,16)]
others_undeveloped = returns[,-c(1,2,3,6,11,20,5,7,10,17,9,12,18,21,4,8,15,16)]

head(others_undeveloped_rates)
head(others_undeveloped)

#well_behaved = returns[,c(1:4,6,8,9,11,12,15,16,18,20,21)]

#head(well_behaved)

#dim(well_behaved)

#bad_behaved = returns[,-c(1:4,6,8,11,12,15,16,20)]

#head(bad_behaved)

```

```

#dim(bad_behaved)

#Transformando as subbases em séries temporais

ts_eu_others_rates = ts(eu_others_rates)
ts_brics_rates = ts(brics_rates)
ts_asian_tigers_rates = ts(asian_tigers_rates)
ts_others_developed_rates = ts(others_developed_rates)
ts_others_undeveloped_rates = ts(others_undeveloped_rates)

ts_eu_others = ts(eu_others)
ts_brics = ts(brics)
ts_asian_tigers = ts(asian_tigers)
ts_others_developed = ts(others_developed)
ts_others_undeveloped = ts(others_undeveloped)

#ts_well_behaved = ts(well_behaved)
#ts_bad_behaved = ts(bad_behaved)

#Evolução Temporal

par(mfrow=c(4,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
  ts.plot(ts_brics_rates[,i], xlab='t', ylab='Currency Rate',
  main=paste("Time Series of Currency Rates - ",
  names(as.data.frame(ts_brics_rates))[i]))
  ts.plot(ts_brics[,i], xlab='t', ylab='Log-returns',
  main=paste("Time Series of Log>Returns - ",

```

```

names(as.data.frame(ts_brics_rates))[i]))
}

par(mfrow=c(5,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
ts.plot(ts_eu_others_rates[,i], xlab='t', ylab='Currency Rate',
main=paste("Time Series of Currency Rates - ",
names(as.data.frame(ts_eu_others_rates))[i]))
ts.plot(ts_brics[,i], xlab='t', ylab='Log-returns',
main=paste("Time Series of Log>Returns - ",
names(as.data.frame(ts_eu_others))[i]))
}
ts.plot(ts(data[,2]), xlab='t', ylab='Currency Rate',
main=paste("Time Series of Currency Rates - ", names(as.data.frame(data))[2]))
ts.plot(ts(returns[,2]), xlab='t', ylab='Log-returns',
main=paste("Time Series of Log>Returns - ", names(as.data.frame(returns))[2]))

par(mfrow=c(4,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
ts.plot(ts_asian_tigers_rates[,i], xlab='t', ylab='Currency Rate',
main=paste("Time Series of Currency Rates - ",
names(as.data.frame(ts_asian_tigers_rates))[i]))
ts.plot(ts_asian_tigers[,i], xlab='t', ylab='Log-returns',
main=paste("Time Series of Log>Returns - ",
names(as.data.frame(ts_asian_tigers))[i]))
}

par(mfrow=c(5,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))

```

```

for (i in 1:5){
  ts.plot(ts_others_developed_rates[,i], xlab='t', ylab='Currency Rate',
  main=paste("Time Series of Currency Rates - ",
  names(as.data.frame(ts_others_developed_rates))[i]))
  ts.plot(ts_others_developed[,i], xlab='t', ylab='Log-returns',
  main=paste("Time Series of Log>Returns - ",
  names(as.data.frame(ts_others_developed))[i]))
}

par(mfrow=c(5,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:5){
  ts.plot(ts_others_undeveloped_rates[,i], xlab='t', ylab='Currency Rate',
  main=paste("Time Series of Currency Rates - ",
  names(as.data.frame(ts_others_undeveloped_rates))[i]))
  ts.plot(ts_others_undeveloped[,i], xlab='t', ylab='Log-returns',
  main=paste("Time Series of Log>Returns - ",
  names(as.data.frame(ts_others_undeveloped))[i]))
}

#Histogramas

par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
  hist(ts_brics[,i], xlab='Log-return', xlim=c(-.05,.05) ,
  ylim=c(0,350),main=paste("Histogram of Log-returns- ",
  names(as.data.frame(ts_brics))[i]), breaks=100, probability=T)
}

```

```

par(mfrow=c(3,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
hist(ts_eu_others[,i], xlab='Log-return', xlim=c(-.05,.05),
ylim=c(0,350), main=paste("Histogram of Log-returns - ",
names(as.data.frame(ts_eu_others))[i]), probability=T, breaks=40)
}
hist(ts(returns[,2]), xlab='Log_returns', xlim=c(-.05,.05), ylim=c(0,350),
main=paste("Histogram of Log-returns - ",
names(as.data.frame(data))[2]), probability=T, breaks=40)

par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
hist(ts_asian_tigers[,i], xlab='Log-return', xlim=c(-.05,.05), ylim=c(0,450),
main=paste("Histogram of Log-returns - ",
names(as.data.frame(ts_asian_tigers))[i]), probability=T, breaks=50)
}

par(mfrow=c(3,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:5){
hist(ts_others_developed[,i], xlab='Log-return', xlim=c(-.05,.05), ylim=c(0,250),
main=paste("Histogram of Log-returns - ",
names(as.data.frame(ts_others_developed))[i]), probability=T, breaks=100)
}

par(mfrow=c(3,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:5){
hist(ts_others_undeveloped[,i], xlab='Log-return', xlim=c(-.03,.03), ylim=c(0,250),
main=paste("Histogram of Log-returns - ",
names(as.data.frame(ts_others_undeveloped))[i]), probability=T, breaks=100)
}

```



```
}
```

```
eu = cbind(returns[,2], eu_others)
names = c("EURO AREA", names(as.data.frame(eu_others)))
eu = matrix(eu, nrow=11320, ncol=5, dimnames=list(NULL,names))
```

```
#Scatter-plots
```

```
#cor(brics, eu, method="pearson")
round(cor(brics, eu, method="spearman"), 3)
round(cor(brics, eu, method="kendall"), 3)
```

```
tests_rho_EU = matrix(0, nrow=4, ncol=5)
for (i in 1:4){
  for (j in 1:5){
    tests_rho_EU[i,j] = cor.test(brics[,i], eu[,j], method="spearman")$p.value
  }
}
```

```
round(tests_rho_EU, 4)
```

```
png('SCATTER1_BRICS_EU.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(4,5), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
  for (j in 1:5){
    plot(brics[,i], cbind(returns[,2], eu_others)[,j],
         main=paste(names(as.data.frame(brics))[i], "x" ,names(as.data.frame(eu))[j])),
```

```

ylab="", xlab="", cex.main=1.3, xlim=c(-.1,.1), ylim=c(-.1,.1))
}
}
dev.off()

#cor(brics, asian_tigers, method="pearson")
round(cor(brics, asian_tigers, method="spearman"), 3)
round(cor(brics, asian_tigers, method="kendall"), 3)

tests_rho_tigers = matrix(0, nrow=4, ncol=4)
for (i in 1:4){
  for (j in 1:4){
    tests_rho_tigers[i,j] = cor.test(brics[,i], asian_tigers[,j],
method="spearman")$p.value
  }
}

round(tests_rho_tigers, 4)

png('SCATTER2_BRICS_TIGERS.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(4,4), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
  for (j in 1:4){
    plot(brics[,i], asian_tigers[,j],
main=paste(names(as.data.frame(brics))[i], "x" ,
names(as.data.frame(asian_tigers))[j]),
ylab="", xlab="", cex.main=1.3, xlim=c(-.1,.1), ylim=c(-.1,.1))

```

```

}
}
dev.off()

#cor(brics, others_developed, method="pearson")
round(cor(brics, others_developed, method="spearman"), 3)
round(cor(brics, others_developed, method="kendall"), 3)

(tests_rho_dev = matrix(0, nrow=4, ncol=5)
for (i in 1:4){
for (j in 1:5){
tests_rho_dev[i,j] = cor.test(brics[,i], others_developed[,j],
method="spearman")$p.value
}
}

)
round(tests_rho_dev,4)

png('SCATTER3_BRICS_DEVELOPED.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(4,5), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
for (j in 1:5){
plot(brics[,i], others_developed[,j],
main=paste(names(as.data.frame(brics))[i], "x" ,
names(as.data.frame(others_developed))[j]),
ylab="", xlab="", cex.main=1.3, xlim=c(-.07,.07), ylim=c(-.1,.1))
}
}
}

```

```

dev.off()

#cor(brics, others_undeveloped, method="pearson")
round(cor(brics, others_undeveloped, method="spearman"), 3)
round(cor(brics, others_undeveloped, method="kendall"), 3)

tests_rho_und = matrix(0, nrow=4, ncol=5)
for (i in 1:4){
  for (j in 1:5){
    tests_rho_und[i,j] = cor.test(brics[,i], others_undeveloped[,j],
method="spearman")$p.value
  }
}

round(tests_rho_und, 4)

png('SCATTER4_BRICS_UNDEVELOPED.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(4,5), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:4){
  for (j in 1:5){
    plot(brics[,i], others_undeveloped[,j],
main=paste(names(as.data.frame(brics))[i], "x" ,
names(as.data.frame(others_undeveloped))[j]),
ylab="", xlab="", cex.main=1.3, xlim=c(-.07,.07), ylim=c(-.1,.1))
  }
}

dev.off()

```

```

#cor(others_developed, eu, method="pearson")
round(cor(others_developed, eu, method="spearman"), 3)
round(cor(others_developed, eu, method="kendall"), 3)

tests_rho_well = matrix(0, nrow=5, ncol=5)
for (i in 1:5){
  for (j in 1:5){
    tests_rho_well[i,j] = cor.test(others_developed[,i], eu[,j],
method="spearman")$p.value
  }
}

round(tests_rho_well, 4)

png('SCATTER5_EURO_DEVELOPED.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(5,5), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=0.3, mgp=c(1,0,0))
for (i in 1:5){
  for (j in 1:5){
    plot(others_developed[,i], cbind(returns[,2], eu_others)[,j],
main=paste(names(as.data.frame(others_developed))[i], "x" ,
names(as.data.frame(eu))[j]),
ylab="", xlab="", cex.main=1.3, xlim=c(-.1,.1), ylim=c(-.1,.1))
  }
}

dev.off()

#Comparação entre os log-retornos dos BRICS com os seus retornos passados

lag1 = matrix(0, nrow=11320, ncol=4)

```

```

lag2 = matrix(0, nrow=11320, ncol=4)
lag3 = matrix(0, nrow=11320, ncol=4)

lags.names = c('Brazil', 'Brazil(t-1)', 'Brazil(t-2)', 'Brazil(t-3)', 'China', 'China(t-1)',
'China(t-2)', 'China(t-3)', 'India', 'India(t-1)', 'India(t-2)', 'India(t-3)', 'South Africa',
'South Africa(t-1)', 'South Africa(t-2)', 'South Africa(t-3)')

for (j in 1:4){
for (i in 2:11320){
lag1[i-1,j] = brics[i,j]
}
}

for (j in 1:4){
for (i in 3:11320){
lag2[i-2,j] = brics[i,j]
}
}

for (j in 1:4){
for (i in 4:11320){
lag3[i-3,j] = brics[i,j]
}
}

brics_lag = cbind(brics[,1], lag1[,1], lag2[,1], lag3[,1],
brics[,2], lag1[,2], lag2[,2], lag3[,2],
brics[,3], lag1[,3], lag2[,3], lag3[,3],

```

```

brics[,4], lag1[,4], lag2[,4], lag3[,4])

brics_lag = matrix(brics_lag[,-c(17:20)], nrow=11320,
ncol=16, dimnames=list(NULL, lags.names))

png('SCATTER6_BRICSOVERTIME.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(4,3), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=0.3, mgp=c(1,0,0))
for (j in 2:4){
plot(brics_lag[,1], brics_lag[,j], ylab="",xlab="",xlim=c(-.15, .15),
ylim=c(-.15, .15), main=paste(names(as.data.frame(brics_lag))[1], "x" ,
names(as.data.frame(brics_lag))[j]))
}
for (j in 6:8){
plot(brics_lag[,5], brics_lag[,j], ylab="",xlab="",xlim=c(-.15, .15),
ylim=c(-.15, .15), main=paste(names(as.data.frame(brics_lag))[5], "x" ,
names(as.data.frame(brics_lag))[j]))
}
for (j in 10:12){
plot(brics_lag[,9], brics_lag[,j], ylab="", xlab="",xlim=c(-.15, .15),
ylim=c(-.15, .15), main=paste(names(as.data.frame(brics_lag))[9], "x" ,
names(as.data.frame(brics_lag))[j]))
}
for (j in 14:16){
plot(brics_lag[,13], brics_lag[,j], ylab="",xlab="",xlim=c(-.15, .15),
ylim=c(-.15, .15), main=paste(names(as.data.frame(brics_lag))[13], "x" ,
names(as.data.frame(brics_lag))[j]))
}
dev.off()

```

```
brazil.lag = brics_lag[,1:4]
china.lag = brics_lag[,5:8]
india.lag = brics_lag[,9:12]
sth.afr.lag = brics_lag[,13:16]
```

```
brazil.rates.lag = brics.rates.lag[,1:4]
china.rates.lag = brics.rates.lag[,5:8]
india.rates.lag = brics.rates.lag[,9:12]
sth.afr.rates.lag = brics.rates.lag[,13:16]
```

```
#round(cor(brazil.lag[,1], brazil.lag[,2:4], method='pearson'), digits=3)
round(cor(brazil.lag[,1], brazil.lag[,2:4], method='spearman'), digits=3)
round(cor(brazil.lag[,1], brazil.lag[,2:4], method='kendall'), digits=3)
```

```
#round(cor(china.lag[,1], china.lag[,2:4], method='pearson'), digits=3)
round(cor(china.lag[,1], china.lag[,2:4], method='spearman'), digits=3)
round(cor(china.lag[,1], china.lag[,2:4], method='kendall'), digits=3)
```

```
#round(cor(india.lag[,1], india.lag[,2:4], method='pearson'), digits=3)
round(cor(india.lag[,1], india.lag[,2:4], method='spearman'), digits=3)
round(cor(india.lag[,1], india.lag[,2:4], method='kendall'), digits=3)
```

```
#round(cor(sth.afr.lag[,1], sth.afr.lag[,2:4], method='pearson'), digits=3)
round(cor(sth.afr.lag[,1], sth.afr.lag[,2:4], method='spearman'), digits=3)
round(cor(sth.afr.lag[,1], sth.afr.lag[,2:4], method='kendall'), digits=3)
```



```

tests_rho_brazil = numeric()
tests_rho_china = numeric()
tests_rho_india = numeric()
tests_rho_sthafr = numeric()
for (i in 2:4){
tests_rho_brazil[i-1] = round(cor.test(brazil.lag[,1],
brazil.lag[,i], method="spearman")$p.value, 4)
tests_rho_china[i-1] = round(cor.test(china.lag[,1],
china.lag[,i], method="spearman")$p.value, 4)
tests_rho_india[i-1] = round(cor.test(india.lag[,1],
india.lag[,i], method="spearman")$p.value, 4)
tests_rho_sthafr[i-1] = round(cor.test(sth.afr.lag[,1],
sth.afr.lag[,i], method="spearman")$p.value, 4)
}
rho_tests = rbind(tests_rho_brazil, tests_rho_china,
tests_rho_india, tests_rho_sthafr)
round(rho_tests, 4)

#####Testes de hipóteses para o coeficiente de Kendall#####

tests_tau_brazil = numeric()
tests_tau_china = numeric()
tests_tau_india = numeric()
tests_tau_sthafr = numeric()

```

```

for (i in 2:4){
tests_tau_brazil[i-1] = round(cor.test(brazil.lag[,1],
brazil.lag[,i], method="kendall")$p.value, 4)
tests_tau_china[i-1] = round(cor.test(china.lag[,1],
china.lag[,i], method="kendall")$p.value, 4)
tests_tau_india[i-1] = round(cor.test(india.lag[,1],
india.lag[,i], method="kendall")$p.value, 4)
tests_tau_sthafr[i-1] = round(cor.test(sth.afr.lag[,1],
sth.afr.lag[,i], method="kendall")$p.value, 4)
}

tau_tests = rbind(tests_tau_brazil, tests_tau_china,
tests_tau_india, tests_tau_sthafr)

round(tau_tests, 4)

```

#####Simulação de Autocopulas#####

```

fgm.sample = function(size, theta){
u = runif(size,0,1)
A = numeric()
B = numeric()
v = numeric()
v[1] = u[1]
for (i in 2:size){
v[i] = (1/2)*(-1-theta+2*theta*v[i-1]+
sqrt(4*(theta**2)*((v[i-1])**2)-4*theta*v[i-1]-
4*(theta**2)*v[i-1]+1+2*theta+(theta**2)-
4*u[i]*theta+8*u[i]*theta*v[i-1]))/(theta*(-1+2*v[i-1]))
}
}

```

```

f.norm = qnorm(v,0,1)
f.t2 = qt(v, 2)
f.t5 = qt(v, 5)
f.t7 = qt(v, 7)
sim.data = as.data.frame(cbind(f.norm, f.t2, f.t5, f.t7),
col.names=c('norm.fgm', 't2.fgm', 't5.fgm', 't7.fgm'))
return(sim.data)
}

```

```

set.seed(11390)
sim.fgm.br2 = fgm.sample(11320, 0.016)
sim.fgm.br3 = fgm.sample(11320, 0.027)
sim.fgm.cn2 = fgm.sample(11320, 0.023)
sim.fgm.cn3 = fgm.sample(11320, 0.054)
sim.fgm.ind1 = fgm.sample(11320, -0.07)
sim.fgm.saf2 = fgm.sample(11320, 0.015)

```

```

dim(sim.fgm.br2)

```

```

sim.fgm.lag.br2 = matrix(0, 11320, 4)
sim.fgm.lag.br3 = matrix(0, 11320, 4)
sim.fgm.lag.cn2 = matrix(0, 11320, 4)
sim.fgm.lag.cn3 = matrix(0, 11320, 4)
sim.fgm.lag.ind1 = matrix(0, 11320, 4)
sim.fgm.lag.saf2 = matrix(0, 11320, 4)

```

```

for (j in 1:4){
for (i in 3:11320){
sim.fgm.lag.br2[i-2,j] = sim.fgm.br2[i,j]

```

```

sim.fgm.lag.cn2[i-2,j] = sim.fgm.cn2[i,j]
sim.fgm.lag.saf2[i-2,j] = sim.fgm.saf2[i,j]
}
}

for (j in 1:4){
for (i in 4:11320){
sim.fgm.lag.br3[i-3,j] = sim.fgm.br3[i,j]
sim.fgm.lag.cn3[i-3,j] = sim.fgm.cn3[i,j]
}
}

for (j in 1:4){
for (i in 2:11320){
sim.fgm.lag.ind1[i-1,j] = sim.fgm.ind1[i,j]
}
}

#Brasil 2-lag

png('SIM_BRAZIL_2LAG.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
ts.plot(ts(sim.fgm.br2[,1]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim N(0,1)$  - ', theta, ' = 0.016'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.br2[,2]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim t^2$  - ', theta, ' = 0.016'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.br2[,3]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',

```

```

main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim t_5$  - ', theta, ' = 0.016'))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.br2[,4]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim t_7$  - ', theta, ' = 0.016'))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
dev.off()

#Brasil 3-lag

png('SIM_BRAZIL_3LAG.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
ts.plot(ts(sim.fgm.br3[,1]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim N(0,1)$  - ', theta, ' = 0.027'))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.br3[,2]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim t_2$  - ', theta, ' = 0.027'))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.br3[,3]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim t_5$  - ', theta, ' = 0.027'))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.br3[,4]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM Brazil com  $F \sim t_7$  - ', theta, ' = 0.027'))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
dev.off()

#China 2-lag

png('SIM_CHINA_2LAG.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))

```

```

ts.plot(ts(sim.fgm.cn2[,1]), xlab='t',ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim N(0,1) -$ ', theta, ' = 0.016'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.cn2[,2]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim t^2 -$ ', theta, ' = 0.016'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.cn2[,3]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim t^5 -$ ', theta, ' = 0.016'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.cn2[,4]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim t^7 -$ ', theta, ' = 0.016'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
dev.off()

```

#China 3-lag

```

png('SIM_CHINA_3LAG.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
ts.plot(ts(sim.fgm.cn3[,1]), xlab='t',ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim N(0,1) -$ ', theta, ' = 0.027'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.cn3[,2]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim t^2 -$ ', theta, ' = 0.027'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.cn3[,3]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim t^5 -$ ', theta, ' = 0.027'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.cn3[,4]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM China com  $F \sim t^7 -$ ', theta, ' = 0.027'))))

```

```

abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
dev.off()

#Índia 1-lag

png('SIM_INDIA_1LAG.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
ts.plot(ts(sim.fgm.ind1[,1]), xlab='t',ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM India com  $F \sim N(0,1)$  - ', theta, ' = -0.07'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.ind1[,2]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM India com  $F \sim t^2$  - ', theta, ' = -0.07'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.ind1[,3]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM India com  $F \sim t^5$  - ', theta, ' = -0.07'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.ind1[,4]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM India com  $F \sim t^7$  - ', theta, ' = -0.07'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
dev.off()

```

```

#Africa do Sul 2-lag

```

```

png('SIM_STHAFRICA_2LAG.png', 1024, 768)
par(mfrow=c(2,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
ts.plot(ts(sim.fgm.saf2[,1]), xlab='t',ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM South Africa com  $F \sim N(0,1)$  - ',
theta, ' = 0.015'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))

```

```

ts.plot(ts(sim.fgm.saf2[,2]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM South Africa com  $F \sim t^2 -$ ',
theta, ' = 0.015'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.saf2[,3]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM South Africa com  $F \sim t^5 -$ ',
theta, ' = 0.015'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
ts.plot(ts(sim.fgm.saf2[,4]), xlab='t', ylab='Z(t)', type='l',
main=expression(paste('Cópula FGM South Africa com  $F \sim t^7 -$ ',
theta, ' = 0.015'))))
abline(h=c(0,-3,3), lty=c(2,2,2), col=c('black', 'red', 'red'))
dev.off()

```

```
#####Testes de ajustamento#####
```

```
require('copula')
```

```
#Função da Transformação Integral de Probabilidade e Refinamento da Amostra
```

```

pit = function(data, n0, n1, s){
y0 = numeric()
y1 = numeric()
T. = seq.int(n0, n1, s)
for (n in T.){
y0[n] = data[n,1]

```



```

y1[n] = data[n,2]
y0 = y0[!is.na(y0)]
y1 = y1[!is.na(y1)] #Os dois últimos comandos retiram os NA's#
}

U = numeric()
V = numeric()
for (j in 1:length(T.)){
U[j] = sum(y0<=y0[j])/(length(y0)+1)
V[j] = sum(y1<=y1[j])/(length(y1)+1)
}
return(cbind(U,V))
}

gof.br2 = pit(cbind(brazil.lag[,1], brazil.lag[,3]), 1, 11320, 20)
gof.br3 = pit(cbind(brazil.lag[,1], brazil.lag[,4]), 1, 11320, 20)
gof.cn2 = pit(cbind(china.lag[,1], china.lag[,3]), 1, 11320, 20)
gof.cn3 = pit(cbind(china.lag[,1], china.lag[,4]), 1, 11320, 20)
gof.ind1 = pit(cbind(india.lag[,1], india.lag[,2]), 1, 11320, 20)
gof.saf2 = pit(cbind(sth.afr.lag[,1], sth.afr.lag[,3]), 1, 11320, 20)

frank.br2 = gofCopula(francCopula(iTau(francCopula(), 0.016)),
gof.br2, method='Sn')
frank.br3 = gofCopula(francCopula(iTau(francCopula(), 0.027)),
gof.br3, method='Sn')
frank.cn2 = gofCopula(francCopula(iTau(francCopula(), 0.023)),
gof.cn2, method='Sn')

```

```

frank.cn3 = gofCopula(franksCopula(iTau(franksCopula(), 0.054)),
gof.cn3, method='Sn')
frank.ind1 = gofCopula(franksCopula(iTau(franksCopula(), -0.07)),
gof.ind1, method='Sn')
frank.saf2 = gofCopula(franksCopula(iTau(franksCopula(), 0.015)),
gof.saf2, method='Sn')

fgm.br2 = gofCopula(fgmCopula(iTau(fgmCopula(), 0.016)), gof.br2,
method='Sn')
fgm.br3 = gofCopula(fgmCopula(iTau(fgmCopula(), 0.027)), gof.br3,
method='Sn')
fgm.cn2 = gofCopula(fgmCopula(iTau(fgmCopula(), 0.023)), gof.cn2,
method='Sn')
fgm.cn3 = gofCopula(fgmCopula(iTau(fgmCopula(), 0.054)), gof.cn3,
method='Sn')
fgm.ind1 = gofCopula(fgmCopula(iTau(fgmCopula(), -0.07)), gof.ind1,
method='Sn')
fgm.saf2 = gofCopula(fgmCopula(iTau(fgmCopula(), 0.015)), gof.saf2,
method='Sn')

clayton.br2 = gofCopula(claytonCopula(iTau(claytonCopula(), 0.016)), gof.br2,
method='Sn')
clayton.br3 = gofCopula(claytonCopula(iTau(claytonCopula(), 0.027)), gof.br3,
method='Sn')
clayton.cn2 = gofCopula(claytonCopula(iTau(claytonCopula(), 0.023)), gof.cn2,
method='Sn')
clayton.cn3 = gofCopula(claytonCopula(iTau(claytonCopula(), 0.054)), gof.cn3,
method='Sn')
clayton.ind1 = gofCopula(claytonCopula(iTau(claytonCopula(), -0.07)), gof.ind1,

```

```

method='Sn')
clayton.saf2 = gofCopula(claytonCopula(iTau(claytonCopula(), 0.015)), gof.saf2,
method='Sn')

normal.br2 = gofCopula(normalCopula(iTau(normalCopula(), 0.016)), gof.br2,
method='Sn')
normal.br3 = gofCopula(normalCopula(iTau(normalCopula(), 0.027)), gof.br3,
method='Sn')
normal.cn2 = gofCopula(normalCopula(iTau(normalCopula(), 0.023)), gof.cn2,
method='Sn')
normal.cn3 = gofCopula(normalCopula(iTau(normalCopula(), 0.054)), gof.cn3,
method='Sn')
normal.ind1 = gofCopula(normalCopula(iTau(normalCopula(), -0.07)), gof.ind1,
method='Sn')
normal.saf2 = gofCopula(normalCopula(iTau(normalCopula(), 0.015)), gof.saf2,
method='Sn')

frank.br2
frank.br3
frank.cn2
frank.cn3
frank.ind1
frank.saf2

fgm.br2
fgm.br3
fgm.cn2
fgm.cn3
fgm.ind1
fgm.saf2

```

```
clayton.br2
clayton.br3
clayton.cn2
clayton.cn3
clayton.ind1
clayton.saf2
normal.br2
normal.br3
normal.cn2
normal.cn3
normal.ind1
normal.saf2
```

```
#Outras Simulações
```

```
require(copula)
```

```
par(mfrow=c(3,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
contour(francCopula(iTau(francCopula(), 0.70)),
dCopula, nlevels=20, main='Contorno Cópula Frank')
contour(normalCopula(iTau(normalCopula(), 0.70)),
dCopula, nlevels=30,main='Contorno Cópula Gaussiana')
contour(claytonCopula(iTau(claytonCopula(), 0.70)),
dCopula, nlevels=100, main='Contorno Cópula Clayton')
contour(gumbelCopula(iTau(gumbelCopula(), 0.70)),
dCopula, nlevels=100, main='Contorno Cópula Gumbel')
contour(amhCopula(0.70), dCopula, n=300, nlevels=20,
main='Contorno Cópula Ali-Mikhail-Haq')
contour(fgmCopula(0.70), dCopula, n=300, nlevels=20,main='Contorno Cópula FGM')
```

```
tau=0.70
```

```
frank.par = iTau(francCopula(), tau)
```

```
fgm.par = iTau(fgmCopula(), tau)
```

```
clay.par = iTau(claytonCopula(), tau)
```

```
norm.par = iTau(normalCopula(), tau)
```

```
gumbel.par = iTau(gumbelCopula(), tau)
```

```
amh.par = iTau(amhCopula(), tau)
```

```
sim.cop1 = rCopula(3000, francCopula(iTau(francCopula(), 0.70)))
```

```
sim.cop2 = rCopula(3000, normalCopula(0.70))
```

```
sim.cop3 = rCopula(3000, claytonCopula(iTau(claytonCopula(), 0.70)))
```

```
sim.cop4 = rCopula(3000, gumbelCopula(iTau(gumbelCopula(), 0.70)))
```

```
sim.cop5 = rCopula(3000, amhCopula(0.70))
```

```
sim.cop6 = rCopula(3000, fgmCopula(0.70))
```

```
inv.sim1 = qnorm(sim.cop1, 0, 1)
```

```
inv.sim2 = qnorm(sim.cop2, 0, 1)
```

```
inv.sim3 = qnorm(sim.cop3, 0, 1)
```

```
inv.sim4 = qnorm(sim.cop4, 0, 1)
```

```
inv.sim5 = qnorm(sim.cop5, 0, 1)
```

```
inv.sim6 = qnorm(sim.cop6, 0, 1)
```

```
par(mfrow=c(3,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(1,2,1,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
```

```
plot(sim.cop1, main=expression(paste('Frank com ', theta, ' = ',  
frank.par, ' e Marginais U(0,1)')))
```

```
plot(sim.cop2, main=expression(paste('Normal com ', theta,  
' = 0.70 e Marginais U(0,1)')))
```

```

plot(sim.cop3, main=expression(paste('Clayton com ', theta,
' = ', clay.par, ' e Marginais U(0,1)'))))
plot(sim.cop4, main=expression(paste('Gumbel com ', theta,
' = ', gumbel.par, ' e Marginais U(0,1)'))))
plot(sim.cop5, main=expression(paste('Ali-Mikhail-Haq com ', theta,
' = 0.70 e Marginais U(0,1)'))))
plot(sim.cop6, main=expression(paste('FGM com ', theta,
' = 0.70 e Marginais U(0,1)'))))

par(mfrow=c(3,2), oma=c(1,2,1,1), mar=c(2,2,2,0), tcl=-0.3, mgp=c(1,0,0))
plot(inv.sim1, main=expression(paste('Frank com ', theta,
' = 9.44 e Marginais N(0,1)')), xlab='F(x)', ylab='F(y)')
plot(inv.sim2, main=expression(paste('Normal com ', theta,
' = 0.65 e Marginais N(0,1)')), xlab='F(x)', ylab='F(y)')
plot(inv.sim3, main=expression(paste('Clayton com ', theta,
' = 3.71 e Marginais N(0,1)')), xlab='F(x)', ylab='F(y)')
plot(inv.sim4, main=expression(paste('Gumbel com ', theta,
' = 2.86 e Marginais N(0,1)')), xlab='F(x)', ylab='F(y)')
plot(inv.sim5, main=expression(paste('Ali-Mikhail-Haq com
', theta, ' = 0.65 e Marginais N(0,1)')), xlab='F(x)', ylab='F(y)')
plot(inv.sim6, main=expression(paste('FGM com ', theta,
' = 0.65 e Marginais N(0,1)')), xlab='F(x)', ylab='F(y)')

```