

## **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

# **ESTUDO COMPARATIVO ENTRE RESULTADOS OBTIDOS POR SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA E MODELOS $\kappa$ - $\epsilon$ E $\kappa$ - $\omega$ PARA ESCOAMENTO SOBRE O DEGRAU**

Por,  
**Gabriel Studart Corrêa Galvão**

**Brasília, 04 de dezembro de 2013**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

GABRIEL STUDART CORRÊA GALVÃO

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE RESULTADOS OBTIDOS POR  
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA E MODELOS  $k-\epsilon$  E  $k-\omega$  PARA  
ESCOAMENTO SOBRE O DEGRAU**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à  
Universidade de Brasília como requisito  
parcial para obtenção do grau de Engenheiro  
Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Alves da  
Fontoura Rodrigues, UnB/ ENM

Brasília  
2013

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE  
RESULTADOS OBTIDOS POR SIMULAÇÃO  
NUMÉRICA DIRETA E MODELOS  $k-\epsilon$  E  $k-\omega$   
PARA ESCOAMENTO SOBRE O DEGRAU**

POR,

**Gabriel Studart Corrêa Galvão**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

**Banca Examinadora**

Prof. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues, UnB/  
ENM (Orientador)

---

Prof. Rafael Gabler Gontijo, UnB/ ENM

---

Prof. Roberto Francisco Bobenrieth Miserda, UnB/  
ENM

---

## **AGRADECIMENTOS**

*Gostaria de agradecer primeiramente a minha família por ajudar a tornar esse sonho realidade e me proporcionar tudo que precisei até hoje, especialmente aos meus pais, Gerson e Andréa. Sem o apoio deles, nada disso seria possível.*

*Agradeço muito ao meu orientador, Professor José Luiz, pelo trabalho que conseguimos desenvolver nesses três anos, começando na iniciação científica. Esse período de orientação me fez crescer muito e com certeza levarei para o resto da vida. Que este seja apenas mais um de outros trabalhos que possamos desenvolver juntos.*

*Agradeço também a todos que me ajudaram de alguma forma neste trabalho e a todos os meus amigos e colegas da Engenharia Mecânica que participaram de alguma forma dessa conquista, seja nos estudos, seja nos churrascos e mesas de bar, tornando esses cinco anos sensacionais, sem os quais a graduação não faria sentido. Deixo um abraço especial ao Boareto, Biel, Geo e Zega, que participaram de todos os momentos desde o início. Deixo também meu agradecimento especial a Larissa, pelos quatro anos de apoio, tendo participado de quase todos os momentos importantes.*

*Gostaria de agradecer também a todos os membros da TECMEC, que me fizeram crescer mais do que eu imaginava no ano que passei por lá. Espero que essa empresa cresça cada vez mais e que ajude a UnB a formar engenheiros mecânicos cada vez melhores.*

*Gabriel Galvão*

---

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a análise de desempenho do modelo  $k-\omega$  de turbulência e de leis de parede utilizando o modelo  $k-\epsilon$  de turbulência. A metodologia adotada é direcionada para obtenção de massa de dados através de simulação de escoamentos turbulentos, via método dos elementos finitos, seguida de tratamento e análise desses dados. Os casos-teste em estudo são o escoamento turbulento de ar sobre o degrau não aquecido, proposto por Le et al. (1996), e o escoamento turbulento em um canal divergente, proposto por Driver e Seegmiller (1985). Neste trabalho são analisados de forma comparativa os resultados de simulação direta disponibilizados por Le et al. (1996), os dados experimentais de Jovic e Driver (1994), realizados para validação do modelo de Le et al. (1996), e os resultados obtidos nas simulações realizadas através de método dos elementos finitos para o primeiro caso-teste. Para o segundo caso-teste são analisados os dados experimentais de Driver e Seegmiller (1985) e os resultados obtidos nas simulações utilizando o método dos elementos finitos. Os resultados visualizados mostram campos de pressão, velocidade, energia cinética de turbulência, taxa de dissipação de energia cinética de turbulência e dissipação específica e perfis de velocidades tomados nas regiões de recirculação, recolamento e recuperação. A lei de parede de Nakayama e Koyama (1984) foi a que apresentou melhor custo-benefício para as simulações realizadas, com resultados próximos dos experimentais para os dois casos-teste, com baixo custo computacional. A lei de parede de Cruz e Silva Freire (1998) também apresentou excelentes resultados, mas com custo computacional variando de 10 a 100 vezes maior do que das outras leis de parede. O modelo  $k-\omega$  não apresentou bons resultados e, para que possa ser utilizado, a malha para o cálculo deve ser muito refinada nas regiões próximas à parede, aumentando o tempo de cálculo. Sendo assim, este modelo não apresentou bom custo-benefício.

**Palavras-chave:** simulação numérica, elementos finitos, simulação direta, escoamento turbulento, descolamento de camada limite, canal divergente, degrau, modelo  $k-\epsilon$ , modelo  $k-\omega$ .

---

## ABSTRACT

*The present work has the goal of analyzing the  $k$ - $\omega$  turbulence model and the performance of laws of the wall applied with the  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model. The methodology is applied to data acquisition through turbulent flow simulation, by finite element method, followed by data analysis. The cases in study are air turbulent flow over unheated backward-facing step, published by Le et al. (1996), and the divergent channel flow, by Driver and Seegmiller (1985). In this work, the results of direct simulation by Le et al. (1996), experimental data by Jovic and Driver (1994) and finite element method simulation data are compared for the first study and experimental data by Driver and Seegmiller (1985) and finite element method simulation data are compared for the second study. The results show pressure, velocity, turbulent kinetic energy, turbulent kinetic energy dissipation and specific dissipation fields and velocity profiles taken in the recirculation, reattachment and recovery regions of the boundary layer. The Nakayama and Koyama (1984) law presented the best cost-benefit ratio, with results close to the experimental ones for both cases studied, with low computational cost. The Cruz and Silva Freire (1998) law also presented good results, but with computational cost from 10 to 100 times higher than the other laws of the wall. The  $k$ - $\omega$  model did not present good results and, for it to be used, the mesh must be extremely refined near the walls, increasing calculation time. Therefore, this model did not present good cost-benefit ratio.*

**Key-words:** *numerical simulation, finite elements, direct simulation, turbulent flow, separation of boundary layer, divergent channel, backward-facing step.*

# SUMÁRIO

	Página
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA</b>	<b>4</b>
2.1 Equações governantes . . . . .	4
2.2 Adimensionalização do sistema de equações . . . . .	5
2.3 Tratamento estatístico da turbulência . . . . .	6
2.4 Formulando o problema de fechamento . . . . .	8
2.5 O modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência . . . . .	9
2.6 Leis de parede . . . . .	10
2.6.1 Lei logarítmica clássica . . . . .	11
2.6.2 Lei de Mellor (1966) . . . . .	13
2.6.3 Lei de Nakayama e Koyama (1984) . . . . .	14
2.6.4 Lei de Cruz e Silva Freire (1998) . . . . .	15
2.7 O modelo $\kappa - \omega$ de turbulência . . . . .	17
<b>3 METODOLOGIA</b>	<b>21</b>
3.1 Caso-teste do degrau de Le, Moin & Kim (1996) . . . . .	21
3.1.1 Simulação direta . . . . .	21
3.1.2 Experimental . . . . .	22
3.1.3 Simulação por elementos finitos . . . . .	23
3.2 Caso-teste do canal divergente de Driver & Seegmiller (1985) . . . . .	25
3.2.1 Experimental . . . . .	25
3.2.2 Simulação por elementos finitos . . . . .	26
3.3 Critérios de convergência . . . . .	28
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>30</b>
4.1 O degrau de Le, Moin e Kim (1996) . . . . .	30
4.1.1 Critérios de convergência . . . . .	30

4.1.2	Critérios de tempo . . . . .	34
4.1.3	Resultados dos campos . . . . .	35
4.1.4	Resultados quantitativos . . . . .	41
4.2	O canal divergente de Driver e Seegmiller (1985) . . . . .	47
4.2.1	Critérios de Convergência . . . . .	50
4.2.2	Criterios de tempo . . . . .	54
4.2.3	Resultados dos campos . . . . .	55
4.2.4	Resultados quantitativos . . . . .	62
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>69</b>



# LISTA DE TABELAS

	<b>Página</b>
2.1 Forma não dimensional das variáveis . . . . .	6
2.2 Valores para interpolação da constante de integração $\xi_{p+}$ . . . . .	14
4.1 Pontos de recolamento de camada limite . . . . .	45
4.2 Pontos de recolamento de camada limite . . . . .	68

# LISTA DE FIGURAS

	Página
2.1 Estrutura da camada limite turbulenta . . . . .	11
3.1 Desenho esquemático do degrau, por Le et al. (1996) . . . . .	22
3.2 Linhas de corrente obtidas por Le et al. (1996) . . . . .	22
3.3 Aparato experimental utilizado por Jovic e Driver (1994) . . . . .	23
3.4 Malha de cálculo P1-isoP2, amplificada na região do degrau . . . . .	23
3.5 Domínio do cálculo para simulação do degrau de Le, Moin & Kim . . . . .	25
3.6 Malha para simulação do desenvolvimento do escoamento de entrada . . . . .	26
3.7 Malha para simulação do canal divergente . . . . .	27
3.8 Domínio do cálculo para a simulação do canal divergente de Driver & Seegmiller . . . . .	28
4.1 Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logaritmica clássica . . . . .	31
4.2 Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966) . . . . .	31
4.3 Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984) . . . . .	31
4.4 Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998) . . . . .	32
4.5 Valores de $y^+$ . . . . .	32
4.6 Valores de erro . . . . .	33
4.7 Valores de norma . . . . .	33
4.8 Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU . . . . .	35
4.9 Campos de pressão para as quatro leis de parede . . . . .	36
4.10 Campos de velocidade para as quatro leis de parede . . . . .	37
4.11 Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede . . . . .	38
4.12 Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede . . . . .	39
4.13 Linhas de corrente na região do degrau para as quatro leis de parede . . . . .	40
4.14 Segunda bolha em ampliação na região do degrau para as quatro leis de parede . . . . .	41
4.15 Perfil de velocidade na entrada do domínio . . . . .	42

4.16	Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite . . . . .	43
4.17	Perfis de velocidade nas regiões de recuperação . . . . .	44
4.18	Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede, experimental e modelo DNS . . . . .	46
4.19	Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede, experimental e modelo DNS vistos em aproximação . . . . .	46
4.20	Perfis de velocidades a serem utilizados como condição de contorno na entrada do domínio do canal divergente de Driver e Seegmiller (1985) . . .	47
4.21	Campos de velocidade desenvolvidos no duto de entrada para o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência . . . . .	48
4.22	Campos de velocidade desenvolvidos no duto de entrada para o modelo $\kappa - \omega$ de turbulência . . . . .	49
4.23	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logaritmica clássica .	50
4.24	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966) . . .	50
4.25	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984) . . . . .	51
4.26	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998) . . . . .	51
4.27	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações do modelo $\kappa - \omega$ . . . . .	51
4.28	Valores de $y^+$ para o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência . . . . .	52
4.29	Valores de $y^+$ para o modelo $\kappa - \omega$ de turbulência . . . . .	52
4.30	Valores de erro para o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência . . . . .	53
4.31	Valores de norma para o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência . . . . .	53
4.32	Valores de erro e norma para o modelo $\kappa - \omega$ de turbulência . . . . .	54
4.33	Valores de tempo para o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência . . . . .	54
4.34	Valores de tempo para o modelo $\kappa - \omega$ de turbulência . . . . .	55
4.35	Campos de pressão para as quatro leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ e para o modelo $\kappa - \omega$ . . . . .	56
4.36	Campos de velocidade para as quatro leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ e para o modelo $\kappa - \omega$ . . . . .	57

4.37	Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ e para o modelo $\kappa - \omega$ . . . . .	58
4.38	Campos de taxa de dissipação de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ . . . . .	59
4.39	Campo de dissipação específica para o modelo $\kappa - \omega$ de turbulência . . . . .	60
4.40	Linhas de corrente das quatro leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ e do modelo $\kappa - \omega$ . . . . .	60
4.41	Bolha secundária em ampliação na região do degrau para as quatro leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ e do modelo $\kappa - \omega$ . . . . .	61
4.42	Perfis de velocidade em $x/h = -4$ . . . . .	62
4.43	Perfis de velocidade em $x/h = -2$ . . . . .	63
4.44	Perfis de velocidade em $x/h = 0$ . . . . .	63
4.45	Perfis de velocidade em $x/h = 2$ . . . . .	64
4.46	Perfis de velocidade em $x/h = 4$ . . . . .	64
4.47	Perfis de velocidade em $x/h = 6$ . . . . .	65
4.48	Perfis de velocidade em $x/h = 10$ . . . . .	65
4.49	Perfis de velocidade em $x/h = 20$ . . . . .	66
4.50	Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ , do modelo $\kappa - \omega$ e experimental . . . . .	67
4.51	Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede do modelo $\kappa - \varepsilon$ , do modelo $\kappa - \omega$ e experimental vistos em aproximação . . . . .	68
I.1	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logaritmica clássica . . . . .	74
I.2	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966) . . . . .	74
I.3	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984) . . . . .	75
I.4	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998) . . . . .	75
I.5	Valores de $y^+$ . . . . .	76
I.6	Valores de erro . . . . .	76
I.7	Valores de norma . . . . .	77
I.8	Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU . . . . .	77
I.9	Campos de pressão para as quatro leis de parede . . . . .	78

I.10	Campos de velocidade para as quatro leis de parede . . . . .	79
I.11	Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede . .	80
I.12	Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede	81
I.13	Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite . . . . .	82
I.14	Perfis de velocidade nas regiões de recuperação . . . . .	83
I.15	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logaritmica clássica .	84
I.16	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966) . . .	84
I.17	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984) . . . . .	85
I.18	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998) . . . . .	85
I.19	Valores de $y^+$ . . . . .	86
I.20	Valores de erro . . . . .	86
I.21	Valores de norma . . . . .	87
I.22	Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU . . . . .	87
I.23	Campos de pressão para as quatro leis de parede . . . . .	88
I.24	Campos de velocidade para as quatro leis de parede . . . . .	89
I.25	Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede . .	90
I.26	Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede	91
I.27	Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite . . . . .	92
I.28	Perfis de velocidade nas regiões de recuperação . . . . .	93
I.29	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logaritmica clássica .	94
I.30	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966) . . .	94
I.31	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984) . . . . .	95
I.32	Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998) . . . . .	95
I.33	Valores de $y^+$ . . . . .	96
I.34	Valores de erro . . . . .	96
I.35	Valores de norma . . . . .	97

I.36	Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU . . . . .	97
I.37	Campos de pressão para as quatro leis de parede . . . . .	98
I.38	Campos de velocidade para as quatro leis de parede . . . . .	99
I.39	Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede . .	100
I.40	Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede	101
I.41	Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite . . . . .	102
I.42	Perfis de velocidade nas regiões de recuperação . . . . .	103

# LISTA DE SÍMBOLOS

$t$	Variável temporal (tempo)
$t_0$	Escala de tempo de referência
$x_i$	Variável espacial (comprimento) - componente na direção $i$
$x$	Direção tangencial ao escoamento livre
$y$	Direção perpendicular ao escoamento livre
$L_0$	Escala de comprimento de referência
$\rho$	Massa específica do fluido
$\rho_0$	Massa específica de referência
$u_i$	Velocidade do fluido
$\bar{u}_i$	Valor médio da velocidade pela decomposição de Reynolds
$u'_i$	Flutuação do valor da velocidade
$U_0$	Velocidade de referência
$u_f$	Velocidade de fricção na parede
$T$	Temperatura do fluido
$T_0$	Temperatura de referência
$p$	Pressão estática do fluido
$\bar{p}$	Pressão estática média do fluido pela decomposição de Reynolds
$p_0$	Pressão estática de referência
$s_{ij}$	Tensor taxa de deformação
$\tau_{ij}$	Tensor de tensões de cisalhamento
$\tau_p$	Tensão de cisalhamento na parede

$\kappa$	Energia cinética de turbulência
$l$	Comprimento de mistura de Prandtl
$\varepsilon$	Taxa de dissipação de energia cinética de turbulência
$\omega$	Dissipação específica de energia cinética de turbulência
$\varsigma$	Tempo característico de emissão turbulenta
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\nu_t$	Viscosidade cinemática turbulenta
$\nu_0$	Viscosidade cinemática de referência
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\mu_t$	Viscosidade dinâmica turbulenta
$\mu_0$	Viscosidade dinâmica de referência
$g_i$	Vetor do campo gravitacional
$X_r$	Comprimento da bolha de recirculação
$\beta$	Coefficiente de expansão volumétrica
$\delta_{ij}$	Tensor identidade (operador Delta de Kronecker)
$\epsilon_{ijk}$	Operador permutação de Levi-Cevita
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada total
$K$	Constante de Von Kármán
$Re$	Número de Reynolds
$Re_t$	Número de Reynolds turbulento
$Fr$	Número de Froude



# 1 INTRODUÇÃO

A separação e o recolamento de camada limite turbulenta são fenômenos recorrentes em inúmeras situações de interesse para a engenharia, tanto em escoamentos internos quanto externos. A separação de camada limite pode ser classificada, segundo suas causas físicas, em dois grupos distintos: separações provocadas pela inércia do fluido que escoam sobre geometrias com descontinuidade e separações provocadas por gradientes adversos de pressão. Após o descolamento a estrutura característica da camada limite é rompida e o escoamento resultante pode passar por três etapas distintas. Inicialmente forma-se uma bolha de recirculação com dimensões proporcionais a intensidade das causas que provocaram a separação. Na região situada imediatamente após o fim da bolha de recirculação o escoamento recolado tende, gradativamente, a restabelecer a estrutura clássica da camada limite turbulenta. Nesta região de reestruturação, por não haver ainda uma camada limite bem formada, os perfis de velocidade não se encaixam nos moldes previstos pelas leis de parede. Finalmente, após esta região, a estrutura da camada limite turbulenta se restabelece integralmente. Esta sequência de transformações é muito bem definida no escoamento sobre degrau, sendo esta a principal razão da escolha frequente desta geometria para a análise de desempenho de algoritmos destinados a modelagem numérica do processo de descolamento-recolamento de camada limite turbulenta.

O conhecimento de natureza experimental existente sobre a camada limite turbulenta aponta para a existência de duas regiões estruturalmente distintas em seu interior. Na proximidade da parede, ocupando cerca de 20% de sua espessura - nos escoamentos sobre parede plana - existe a região interna que é fortemente dependente da natureza da parede e muito pouco influenciada pelo escoamento externo à camada limite. A parcela restante, denominada região externa, é pouco afetada pela natureza da parede e tem sua estrutura condicionada pelo escoamento externo à camada limite.

A região interna da camada limite turbulenta é formada por três estruturas superpostas. Em contato imediato com a parede existe uma região de escoamento laminar, seguido por uma região de transição na qual se estabelece gradativamente a turbulência e finalmente surge a região turbulenta, também denominada de região logarítmica, abrangendo mais de 90% da espessura da região interna.

A modelagem numérica da camada limite turbulenta é particularmente difícil em decorrência da complexidade física deste tipo de escoamento, bastante agravada pela inten-

sidade das variações das condições do escoamento, sempre presentes devido a diminuta espessura da camada limite turbulenta  $\delta$ , cuja ordem de grandeza escala com a raiz quadrada da viscosidade cinemática do fluido  $\nu$ .

$$\delta \sim \sqrt{\nu} \quad (1.1)$$

Dentre os modelos de turbulência empregados em simulações de interesse industrial, ou seja, simulação de escoamentos turbulentos com altos números de Reynolds que se estabelecem em geometrias complexas, os modelos a duas equações do tipo  $\kappa - \varepsilon$  apresentam ótima relação custo-benefício. Entretanto estes modelos são incapazes de modelar as subcamadas laminar e de transição da região interna da camada limite, pois sua calibração é feita com base em turbulência plenamente estabelecida. Para contornar esta limitação é adotado um procedimento baseado no emprego de funções matemáticas denominadas leis de parede de velocidade, capazes de representar o perfil de velocidade no interior da região interna da camada limite turbulenta.

No emprego de modelos de turbulência do tipo  $\kappa - \varepsilon$  as leis de parede têm como função o cálculo das condições de contorno de velocidade, a serem impostas ao modelo de turbulência, a uma distância suficientemente afastada da parede de modo a deixar de fora da modelagem numérica as regiões onde prevalece o regime laminar. Este procedimento tem uma característica conveniente que é evitar a simulação numérica da região dos gradientes mais intensos, na proximidade imediata da parede, onde são necessárias malhas de cálculo muito refinadas.

Neste trabalho a modelagem numérica da camada limite turbulenta é feita a partir de dois modelos de turbulência distintos. Inicialmente a simulação é feita com um modelo  $\kappa - \varepsilon$ , cujo algoritmo de cálculo permite seu emprego com opção de escolha entre quatro leis de parede de velocidade disponíveis, sendo três delas capazes de simular o efeito dos gradientes de pressão existentes. Posteriormente a simulação é refeita com o emprego de um modelo de turbulência de tipo  $\kappa - \omega$  que, tendo capacidade de modelar numericamente toda a região interna, dispensa o uso de leis de parede. A contrapartida associada a este tipo de modelo de turbulência é a necessidade de emprego de malhas de cálculo muito mais refinadas para a discretização espacial da região interna da camada limite.

O modelo  $\kappa - \varepsilon$  adotado é o de Jones e Launder (1972). Este é um modelo RANS (Reynolds Average Navier Stokes) no qual a viscosidade turbulenta de Boussinesq (1877)

é modelada a partir da energia cinética de turbulência  $\kappa$  e de sua taxa de dissipação  $\varepsilon$ . O comportamento de cada uma destas variáveis é representado por uma equação evolutiva de transporte.

O modelo  $\kappa - \omega$  adotado é a versão de Bredberg (2002), sendo também um modelo de tipo RANS no qual a viscosidade turbulenta de Boussinesq (1877) é modelada a partir da energia cinética de turbulência  $\kappa$  e de sua dissipação específica  $\omega$ . O comportamento de cada uma destas variáveis é representado por uma equação evolutiva de transporte.

As leis de parede de velocidade implementadas no algoritmo de cálculo são: lei de parede logarítmica clássica, lei de parede de Mellor (1966), lei de parede de Nakayama e Koyama (1984) e lei de parede de Cruz e Silva Freire (1998).

O objetivo deste trabalho é uma análise comparativa de desempenho entre dois modelos de turbulência e, também, entre quatro diferentes leis de parede. Para tanto foram selecionados dois casos teste: o escoamento sobre o degrau de Le, Moin & Kim (1996) e o escoamento sobre parede inclinada divergente de Driver e Seegmiller (1985). A geometria do primeiro caso-teste é referência para separação de camada limite turbulenta provocada apenas pela inércia do escoamento. A geometria do segundo caso-teste induz o descolamento de camada limite por ação exclusiva do gradiente adverso de pressão.

Os resultados obtidos neste trabalho por análise numérica são confrontados com resultados experimentais e com resultados gerados por simulação numérica direta - DNS (Direct Numerical Simulation). No primeiro caso-teste, a base de comparação é constituída pelos resultados obtidos por um experimento conduzido na NASA por Jovic e Driver (1994) e por DNS de Le, Moin & Kim (1996). No segundo caso-teste, a base de comparação é constituída pelos resultados obtidos por experimentação de Driver & Seegmiller (1985).

## 2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA

O fenômeno físico em estudo é um escoamento monofásico, isotérmico e incompressível de um fluido newtoniano que escoar sob regime de turbulência estacionária. Seu equacionamento, baseado no princípio de conservação da massa, na segunda lei da Mecânica Newtoniana e na equação constitutiva dos fluidos newtonianos é formalizado sob notação indicial correspondente a sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

Na sequência é apresentado o tratamento estatístico da turbulência, fundamentado na decomposição de Reynolds (1895) e na hipótese da viscosidade turbulenta de Boussinesq (1877). O enfoque estatístico da turbulência produz um sistema aberto de equações médias e, considerando os objetivos pretendidos neste trabalho, para a resolução do problema de fechamento, criado pela formulação estatística, são empregados os modelos de turbulência  $\kappa - \varepsilon$ , de Jones e Launder (1972) e o  $\kappa - \omega$ , proposto por Wilcox (1983) e aperfeiçoado por Bredberg (2002).

Finalmente são apresentadas as leis de parede, responsáveis pela representação do escoamento na região interna da camada limite, imprescindíveis para a implementação do modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência.

### 2.1 Equações governantes

A equação da conservação da massa, também conhecida como equação da continuidade, sob notação indicial, para um sistema de referência cartesiano ortogonal é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $t$  é a coordenada temporal,  $u_i$  é o vetor velocidade e  $x_i$  representa a coordenada espacial. A equação da quantidade de movimento, ou equação de Cauchy, é dada por

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.2)$$

onde o termo  $f_i$  representa as forças de campo e  $\Pi_{ij}$  representa a ação das forças de contato. Para um fluido newtoniano, o tensor  $\Pi_{ij}$  é definido como

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\epsilon_{ll}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (2.3)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\delta_{ij}$  é o operador delta de Kronecker,  $\epsilon_{ij}$  representa o tensor taxa de deformação e  $\lambda$  é o coeficiente de viscosidade volumétrica, sendo

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.4)$$

e

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação constitutiva do meio fluido (2.3) na equação de Cauchy (2.2), obtém-se as equações de Navier-Stokes, onde se considera como única força de campo relevante a ação do campo gravitacional cuja aceleração é representada por  $g_i$ :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] \right\} + \rho g_i. \quad (2.6)$$

Como todos os casos-teste estudados neste trabalho são de escoamentos incompressíveis, as equações governantes podem ser simplificadas e representadas por

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.7)$$

e

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + g_i. \quad (2.8)$$

Sendo assim, o sistema fechado de equações que representa o escoamento a ser modelado é composto pelas equações de continuidade (2.7) e de Navier-Stokes (2.8).

## 2.2 Adimensionalização do sistema de equações

A adimensionalização das variáveis segue a forma convencional, conservando a mesma notação das variáveis dimensionais por questão de simplificação da notação. As variáveis que apresentam subíndice 0 representam os valores de referência adotados. A adimensionalização pode ser observada na Tabela (2.1).

Tabela 2.1: Forma não dimensional das variáveis

	Variável adimensional	Adimensionalização
Velocidade	$u_i^+$	$\frac{u_i}{U_0}$
Comprimento	$x_i^+$	$\frac{x_i}{L_0}$
Massa específica	$\rho^+$	$\frac{\rho}{\rho_0}$
Pressão	$p^+$	$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho_0 u_0^2}$
Viscosidade dinâmica	$\mu^+$	$\frac{\mu}{\mu_0}$

A adimensionalização das equações da continuidade (2.7) e de Navier-Stokes (2.8), feita de forma convencional, resulta respectivamente nas formulações

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.9)$$

e

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{Fr} g_i, \quad (2.10)$$

onde,

$$\tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (2.11)$$

sendo os números de Reynolds (Re) e de Froude (Fr) dados respectivamente por

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu_0}, \quad (2.12)$$

e

$$Fr = \frac{u_0^2}{g_0 L_0}. \quad (2.13)$$

### 2.3 Tratamento estatístico da turbulência

Os escoamentos turbulentos podem ser modelados numericamente via resolução do seu sistema de equações sem recorrer a modelagem estatística, ou seja, estudando seu vasto espectro de energia associado a seus comprimentos característicos. Esse método de solução denominado de resolução direta, cujo acrônimo DNS é derivado de sua representação em língua inglesa (Direct Numerical Simulation), apesar de ser tecnicamente possível ainda não é viável devido ao custo computacional para aplicações com requisitos industriais.

Em oposição a este procedimento existe a possibilidade da formulação estatística da turbulência focada na manipulação de valores médios do escoamento turbulento.

O tratamento estatístico parte do princípio de que todas as variáveis instantâneas podem ser consideradas como funções randômicas do espaço e do tempo, podendo ser representadas por duas componentes, uma representando o valor médio da variável e a outra quantificando o valor da flutuação sobre o valor médio. Em casos onde não existe variação significativa da massa específica, como acontece neste trabalho, utiliza-se apenas a decomposição de Reynolds, onde uma variável aleatória genérica  $\varphi$  pode ser representada de tal forma que

$$\varphi(\vec{x}, t) = \bar{\varphi}(\vec{x}) + \varphi'(\vec{x}, t), \quad (2.14)$$

sendo a média temporal definida por

$$\bar{\varphi}(\vec{x}) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \varphi(\vec{x}, t) dt, \quad (2.15)$$

onde  $\varphi$  é uma variável qualquer do escoamento, o termo  $\bar{\varphi}$  é o valor médio da variável e  $\varphi'$  corresponde à sua flutuação. O valor médio é definido como a média temporal dessa variável em um período de tempo suficientemente grande de modo a caracterizar um valor médio independente do tempo, enquanto a flutuação é uma variável aleatória centrada, caracterizada por ter sua média temporal nula.

No caso de escoamentos com variação considerável da massa específica, não se pode utilizar somente a decomposição de Reynolds, já que o número de correlações não conhecidas resultante é suficiente para inviabilizar a resolução do sistema de equações resultante. Dessa forma, foi proposta uma solução alternativa por Favre (1965), aplicando a decomposição de Reynolds apenas para a massa específica e para a pressão e utilizando um valor médio ponderado pela massa específica para a velocidade e para a temperatura. Como as variações de massa específica e de temperatura nos casos-teste simulados neste trabalho são desprezadas, não será desenvolvida a decomposição de Favre (1965), já que a decomposição de Reynolds é suficiente para modelar o problema. Sendo assim, as variáveis decompostas por esta metodologia resultam nas seguintes relações:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (2.16)$$

$$p = \bar{p} + p'. \quad (2.17)$$

Substituindo as variáveis instantâneas nas equações da continuidade (2.9) e de Navier-Stokes (2.10) por suas decomposições estatísticas e tomando os valores médios destas equações obtém-se as equações médias do escoamento, respectivamente equação média da continuidade (2.18) e equação média de Navier-Stokes, doravante denominada equação de Reynolds (2.19). Como nas aplicações pretendidas neste trabalho a força de campo gravitacional não é significativa, o termo correspondente é omitido na equação de Reynolds (2.19).

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{Re} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i'' u_j''} \right] \right\}. \quad (2.19)$$

O sistema obtido por tal procedimento é aberto pois, em seu processo de formação, é gerada uma incógnita suplementar. Essa nova variável aparece na equação (2.19) como o tensor das tensões de Reynolds  $\overline{u_i'' u_j''}$ , constituído pela correlação entre as flutuações turbulentas de velocidade e representando as tensões geradas por estas flutuações.

## 2.4 Formulando o problema de fechamento

Como foi citado anteriormente, a abordagem estatística da turbulência utilizando a decomposição de Reynolds acaba por gerar uma variável adicional ao problema. Esse problema pode ser solucionado de duas formas: pela proposição de uma formulação constitutiva capaz de modelar esta variável a partir de valores conhecidos, ou pelo emprego de formulação evolutiva para o tensor de Reynolds baseada em equações fenomenológicas de transporte propostas para a variável.

A modelagem do tensor de Reynolds aqui considerada advém da hipótese da viscosidade turbulenta de Boussinesq (1877), onde o tensor de Reynolds, que é o tensor de correlação das flutuações de velocidade, para o caso de escoamento incompressível, é representado por



$$\overline{u_i'' u_j''} = \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.20)$$

onde  $\nu_t$  representa uma viscosidade turbulenta e  $\kappa$  representa a energia cinética de turbulência, definida por:

$$\kappa = \frac{1}{2} \overline{(u_i'' u_i'')} \quad (2.21)$$

## 2.5 O modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência

O modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência, proposto por Harlow e Nakayama (1968), implementado por Jones e Launder (1972) e complementado por Launder e Spalding (1974), utiliza a relação de Prandtl - Kolmogorov para realização do cálculo da viscosidade turbulenta, que é dada por:

$$\nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} = \frac{1}{Re_t} \quad (2.22)$$

onde  $C_\mu$  é uma constante de calibração do modelo, com valor de 0,09,  $\kappa$  representa a energia cinética de turbulência e  $\varepsilon$  é a taxa de dissipação de energia cinética de turbulência. Como aparecem duas novas incógnitas,  $\kappa$  e  $\varepsilon$ , são necessárias mais duas equações ao sistema de equações representativo do escoamento para garantir o funcionamento do modelo. As duas equações de transporte relativas às variáveis  $\kappa$  e  $\varepsilon$  estão representadas na sequência pelas equações (2.25) e (2.26). Tomando as equações médias (2.18) e (2.19) e aplicando o conceito de viscosidade turbulenta, o sistema fechado de equações para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  passa a ser constituído pelas relações

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - \varepsilon, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + \frac{\varepsilon}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} \Pi - C_{\varepsilon 2} \varepsilon), \quad (2.26)$$

onde

$$\Pi = \left[ \left( \frac{1}{Re_t} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{Re_t} = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (2.28)$$

$$p^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho \kappa. \quad (2.29)$$

As variáveis  $\sigma_\kappa$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  e  $C_{\varepsilon 2}$  representam constantes de calibração e o termo  $\Pi$  representa o termo de produção de cisalhamento devido à turbulência. As constantes de calibração do modelo possuem os seguintes valores:

$$C_\mu = 0,09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92, \quad \sigma_\kappa = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

Neste trabalho, foi utilizado o modelo  $\kappa - \varepsilon$  para quantificação da viscosidade turbulenta através do código TURBO-2D, com discretização temporal baseada em um algoritmo semi-implícito sequencial de diferenças finitas e discretização espacial via elementos finitos.

## 2.6 Leis de parede

Como citado anteriormente, o modelo  $\kappa - \varepsilon$  é incapaz de reproduzir os fenômenos que acontecem na região interna da camada limite turbulenta, por isso necessita de equações suplementares denominadas leis de parede de velocidade. Essas funções são capazes de modelar o comportamento do campo de velocidade nesta região, utilizando uma expressão analítica explícita para o cálculo da velocidade tangencial a parede na vizinhança do contorno sólido do escoamento estudado. A condição de impenetrabilidade é assumida para a direção perpendicular à parede.

É possível observar na Figura 2.1 as diferentes regiões da camada limite turbulenta, típicas de um escoamento incompressível sobre placa plana. O emprego de leis de parede tem como benefício complementar a diminuição do custo computacional uma vez que

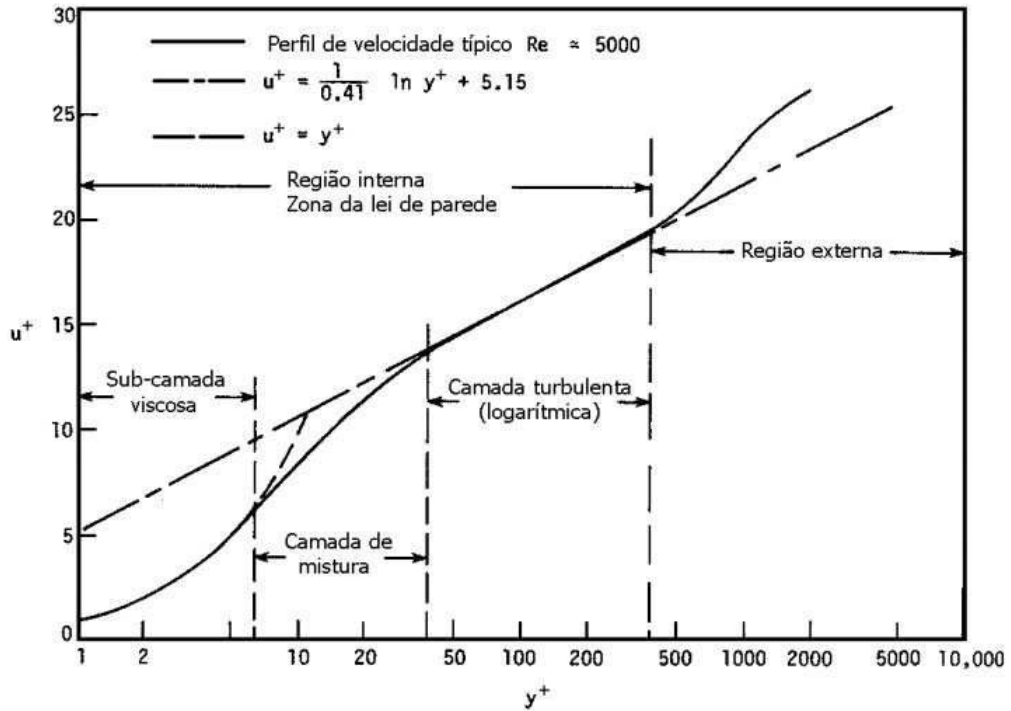


Figura 2.1: Estrutura da camada limite turbulenta

evitam a discretização espacial da vizinhança imediata das paredes, onde sempre são necessárias malhas de cálculo muito refinadas.

### 2.6.1 Lei logarítmica clássica

Partindo da equação média de quantidade de movimento (2.19), obtém-se por análise de escala a equação média de Prandtl (2.30) para a camada limite turbulenta bidimensional, mostrada em notação cartesiana ortogonal como:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \overline{u_x'' u_y''} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad (2.30)$$

onde  $x$  é a direção principal do escoamento e  $y$  é a direção perpendicular ao fluxo. Se integrada ao longo da espessura da camada limite, considerando o gradiente de pressão nulo, chega-se à relação

$$\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \overline{u_x'' u_y''} = u_f^2, \quad (2.31)$$

onde a constante de integração,  $u_f^2$ , representa uma medida da tensão de cisalhamento na parede, chamada de velocidade de atrito, devido a sua natureza dimensional, e definida

como

$$u_f^2 = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (2.32)$$

A integração desse resultado depende da natureza física da região interna da camada limite. Para a sub-camada laminar, onde os efeitos de dissipação viscosa são predominantes, pode-se desconsiderar o tensor de Reynolds, resultando em uma lei de parede do tipo

$$y^+ = u^+, \quad (2.33)$$

onde

$$y^+ = \frac{u_f y \delta}{\nu}, \quad (2.34)$$

e

$$u^+ = \frac{\bar{u}_x}{u_f}. \quad (2.35)$$

Para a região turbulenta da camada limite, os efeitos de dissipação viscosa são muito inferiores aos efeitos da dissipação turbulenta. Modelando o tensor de Reynolds através da hipótese de Boussinesq (1877), com a viscosidade turbulenta dada pela hipótese do comprimento de mistura de Prandtl, tem-se que

$$\overline{u''_x u''_y} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}, \quad (2.36)$$

e

$$\nu_t = K^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|, \quad (2.37)$$

resultando na relação

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln(y^+) + C_{ln}, \quad (2.38)$$

em que  $K$  é a constante de Von Kármán, que vale 0,419, e  $C_{ln}$  é uma constante de calibração, que vale 5,445.

Para a região de transição entre a sub-camada laminar e a região completamente turbulenta, a representação é feita adotando o ponto de intersecção entre as equações (2.33) e (2.38), no valor de  $y^+ = 11,64$ , aplicando a relação (2.33) para valores de  $y^+$  inferiores a 11,64 e a relação (2.38) para valores superiores.

### 2.6.2 Lei de Mellor (1966)

A integração da equação (2.30) ao longo da espessura da camada limite, incluindo o termo do gradiente de pressão, resulta em:

$$\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \overline{u_x'' u_y''} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y = u_f^2. \quad (2.39)$$

Utilizando um procedimento semelhante ao realizado para a obtenção da lei logarítmica clássica, é obtida uma equação para a sub-camada viscosa que considera os efeitos da presença de um gradiente de pressão na forma

$$u^+ = y^+ + \frac{1}{2} p^+ y^{+2}, \quad (2.40)$$

onde  $p^+$  representa o gradiente de pressão adimensional na região, dado pela relação

$$p^+ = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{\nu}{u_f^3}. \quad (2.41)$$

Para a região totalmente turbulenta, temos a seguinte relação, obtida da mesma forma que levou à obtenção da equação (2.38)

$$u^+ = \frac{2}{K} \left( \sqrt{1 + p^+ y^+} - 1 \right) + \frac{1}{K} \left( \frac{4y^+}{2 + p^+ y^+ + 2\sqrt{1 + p^+ y^+}} \right) + \xi_{p^+}, \quad (2.42)$$

onde  $\xi_{p^+}$  é uma constante de integração, função do gradiente adimensional de pressão. As relações (2.40) e (2.42) foram obtidas por Patankar e Spalding (1967). Levando em conta a variação de  $\xi_{p^+}$  com o gradiente de pressão, Mellor (1966) determinou experimentalmente os valores da constante de integração em função de  $p^+$ , que podem ser interpolados da Tabela (2.2).

Tabela 2.2: Valores para interpolação da constante de integração  $\xi_{p^+}$

$p^+$	-0,01	0,00	0,02	0,05	0,10	0,20	0,25	0,33	0,50	1,00	2,00	10,00
$\xi_{p^+}$	4,92	4,90	4,94	5,06	5,26	5,63	5,78	6,03	6,44	7,34	8,49	12,13

Mellor propôs ainda uma relação para calcular o valor de  $\xi_{p^+}$  para gradientes de pressão muito fortes, com  $p^+ \geq 8$ , dada por

$$\xi_{p^+} = \frac{2}{K} + 1,33(p^+)^{\frac{1}{3}} + 4,38(p^+)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{K} \ln \left( \frac{4}{p^+} \right). \quad (2.43)$$

### 2.6.3 Lei de Nakayama e Koyama (1984)

Como uma forma alternativa de obter uma relação para calcular as condições de contorno de velocidade, Nakayama e Koyama (1984) apresentaram uma lei de parede deduzida a partir da equação média da energia cinética de turbulência (2.25), que, para a camada limite, pode ser representada sob a forma

$$\frac{dJ}{dy} + \tau \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \bar{\rho}\varepsilon = 0, \quad (2.44)$$

onde  $J$  representa o fluxo difusivo de energia e  $\tau$  é a tensão de cisalhamento, dados por

$$J = \bar{\rho} \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial y}, \quad (2.45)$$

e

$$\tau = \bar{\rho}\nu_t \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \quad (2.46)$$

tornando possível modelar o fluxo difusivo de energia cinética por

$$J = -\frac{1}{\bar{\rho}\sigma_\kappa\sqrt{C_\mu}}\tau \frac{d\tau}{d\bar{u}_x}. \quad (2.47)$$

Compatibilizando métodos analíticos com os resultados experimentais de Stratford (1966), que descrevem detalhadamente a camada limite turbulenta sobre placa plana, desde seu início até o colapso devido ao descolamento provocado pelo surgimento de gradientes adversos de pressão, Nakayama e Koyama propuseram a seguinte relação para  $u^+$ :

$$u^+ = \frac{1}{K^+} \left[ 3(t - t_s) + \ln \left( \frac{t_s + 1}{t_s - 1} \frac{t - 1}{t + 1} \right) \right], \quad (2.48)$$

com

$$t = \sqrt{\frac{1 + 2\tau^+}{3}}, \quad (2.49)$$

$$\tau^+ = 1 + p^+ y^+, \quad (2.50)$$

e

$$K^+ = \frac{0,419 + 0,539p^+}{1 + p^+}, \quad (2.51)$$

sendo  $t_s$  um valor de  $t$  correspondente a uma posição  $y_s^+$  onde a velocidade é pequena se comparada a  $u^+$ . A determinação de  $y_s^+$  é feita com a relação de Chen (1986), representada por

$$y_s^+ = \frac{e^{K \cdot C}}{1 + p^{+0,34}}, \quad (2.52)$$

onde as constantes  $K$  e  $C$  são as mesmas da lei de parede logarítmica clássica. É importante notar que essa lei é a única baseada no campo de energia cinética de turbulência. Sendo assim, essa lei é capaz de prever o comportamento do escoamento quando submetido a gradientes adversos de pressão, melhorando o desempenho do modelo  $\kappa-\varepsilon$  em escoamentos recirculantes, ao custo de elevar a demanda computacional e a instabilidade numérica, se comparada à lei logarítmica clássica e a lei de Mellor.

#### 2.6.4 Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Através da análise da estrutura assintótica da camada limite, Cruz e Silva Freire (1998) deduziram um novo sistema de equações para a camada limite turbulenta, tomando como base para a análise assintótica uma região de descolamento e posterior recolamento da camada limite. As expansões assintóticas são:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + \varepsilon u_2(x, y), \quad (2.53)$$

$$\nu(x, y) = \frac{\eta}{\Delta} [\nu_1(x, y) + \varepsilon \nu_2(x, y)], \quad (2.54)$$

$$p(x, y) = p_1(x, y) + \varepsilon p_2(x, y), \quad (2.55)$$

$$u'_i(x, y) = \varepsilon u'_{i1}(x, y) + \varepsilon^2 u'_{i2}(x, y), \quad (2.56)$$

e com as transformações de espaço:

$$x_\Delta = \frac{x}{\Delta(\varepsilon)}, \quad (2.57)$$

$$y_\eta = \frac{y}{\eta(\varepsilon)}, \quad (2.58)$$

$$\hat{u}_i(x_\Delta, y_\eta) = u_i(x, y). \quad (2.59)$$

Estas expansões são então aplicadas às equações de quantidade de movimento e da continuidade, juntamente com as condições de contorno de tensão na parede e balanço entre as tensões turbulentas e viscosas:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_p, \quad (2.60)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} (\overline{-\rho u'_i u'_j}) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.61)$$

Próximo ao ponto de descolamento, a velocidade de atrito,  $u_f$ , tende a zero, portanto não é um bom parâmetro de referência. Através da análise assintótica, Cruz e Silva Freire (1998) determinaram uma velocidade de referência a ser utilizada nesses casos, definida como a maior raiz real da equação algébrica:

$$u_R^3 - \frac{\tau_p}{\rho} u_R - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.62)$$

que no limite  $\Delta \rightarrow 0$  fornece:



$$u_R \rightarrow \left( \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.63)$$

recuperando a expressão proposta por Stratford (1959) e Townsend (1961), que estudaram experimentalmente e analiticamente a estrutura da camada limite turbulenta em regiões de baixas velocidades. A solução proposta para essa análise assintótica é

$$u = \frac{\tau_p}{|\tau_p|} \frac{2}{K} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_p}{dx}} y + \frac{\tau_p}{|\tau_p|} \frac{u_f}{K} \ln \left( \frac{y}{L_c} \right), \quad (2.64)$$

em que o sub-índice  $p$  denota o valor da variável na parede e  $L_c$  representa uma escala característica de comprimento, definida pela relação

$$L_c = \frac{\sqrt{\left( \frac{\tau_p}{\rho} \right)^2 + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{dp_p}{dx} u_R - \frac{\tau_p}{\rho} \frac{dp_p}{dx}}}{\frac{1}{\rho}}, \quad (2.65)$$

onde  $K$  é a constante de Von Kármán e vale 0,4. Esta lei de parede recai na lei logarítmica em regiões afastadas do descolamento e, perto do ponto de separação, recai em uma equação similar à de Stratford (1959). Assim como a lei de Nakayama e Koyama (1984), a lei de Cruz e Silva Freire (1998) é bem mais sofisticada que a lei logarítmica clássica, por também ser sensível aos efeitos de gradientes adversos de pressão. Por outro lado, também apresenta as desvantagens de tornar o cálculo mais instável numericamente e aumentar a demanda computacional.

## 2.7 O modelo $\kappa - \omega$ de turbulência

O modelo  $\kappa - \omega$  utilizado neste trabalho é a versão proposta por Bredberg (2002). Esse modelo, idealizado por Wilcox (1983), é baseado na utilização da energia cinética de turbulência  $\kappa$  e na taxa de dissipação específica,  $\omega$ , como parâmetros de definição das escalas turbulentas de tempo e de comprimento para cálculo da viscosidade turbulenta.

Wilcox (1983), em seu modelo original, utilizou uma equação de transporte para  $\omega$  nos mesmos moldes da equação clássica para  $\varepsilon$ , propondo novas constantes e números de Schmidt para  $\kappa$  e  $\omega$  ( $\sigma_\kappa = \sigma_\omega = 2$ ). Essa proposição é suficiente para escoamento de canal, mas em escoamentos recirculantes os cálculos não são adequados, pois o tamanho das zonas de recirculação são superestimados.

Sendo assim, Bredberg (2002) propôs um modelo deduzido a partir de equações de

$\kappa$  e  $\varepsilon$  para escoamentos não influenciados por gradientes de pressão. A metodologia de Bredberg (2002), com base no modelo  $\kappa - \varepsilon$ , começa com a definição de  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu \kappa}. \quad (2.66)$$

A equação (2.25), que representa a equação de transporte da energia cinética de turbulência do modelo  $\kappa - \varepsilon$ , pode ser reescrita com o termo de dissipação de turbulência expresso em função de  $\omega$ , resultando em:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - C_\mu \omega \kappa. \quad (2.67)$$

A partir da definição (2.66), e aplicando o operador derivada total, temos:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\varepsilon}{C_\mu \kappa} \right) = \frac{1}{C_\mu \kappa} \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\omega}{\kappa} \frac{D\kappa}{Dt}. \quad (2.68)$$

Ainda utilizando o conceito representado pela equação (2.66), a viscosidade turbulenta, dada pelo inverso do número de Reynolds turbulento,  $Re_t$ , também é redefinida como:

$$\frac{1}{Re_t} = f_\mu \frac{\kappa}{\omega}, \quad (2.69)$$

onde  $f_\mu$  é uma função de amortecimento, no caso do modelo ser implementado sobre a metodologia de baixo número de Reynolds. Utilizando as equações (2.26), (2.67), (2.66) e (2.69) na relação (2.68), a equação para  $\omega$  é obtida, ainda em termos das constantes do modelo  $\kappa - \varepsilon$  utilizado como base:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \frac{\omega}{\kappa} (C_{\omega 1} - 1) \Pi \\ &+ \frac{\omega}{\kappa} \left[ -(C_{\omega 2} - 1) C_\mu \omega \kappa + \frac{\omega}{\kappa} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{Re_t} \left( \frac{1}{\sigma_\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] \\ &+ \frac{2}{\kappa} \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

O modelo de Bredberg (2002) apresenta dois termos adicionais em relação ao de Wilcox (1983), dados nas duas últimas linhas da equação (2.70) : o primeiro, proporcional a  $\lambda^2 \kappa$ , representa uma difusão turbulenta adicional, e o segundo, proporcional à derivada cruzada  $\frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$  representa o que Bredberg (2002) denominou como difusão cruzada.

Ainda vale ressaltar que este modelo é de baixo-Reynolds, portanto as condições de contorno são especificadas, a menos da condição de contorno de  $\omega$ , dada por uma relação obtida diretamente da equação de transporte. Sendo assim, é necessária a utilização de pelo menos uma função de amortecimento na viscosidade turbulenta. Naturalmente, a adoção de várias funções de amortecimento torna o cálculo mais instável, sendo desejável o menor número possível dessas funções quando o objetivo é um modelo numericamente robusto. Dessa forma, foi adotada apenas uma função de amortecimento, que é a proposta por Bredberg (2002), obtida a partir de dados de DNS. Finalmente, o sistema fechado em sua forma final do modelo  $\kappa - \omega$  proposto é:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^+}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - C_\mu \omega \kappa, \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \frac{\omega}{\kappa} (C_{\omega 1} - 1) \Pi \\ &+ \frac{\omega}{\kappa} \left[ -(C_{\omega 2} - 1) C_\mu \omega \kappa + \frac{\omega}{\kappa} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{Re_t} \left( \frac{1}{\sigma_\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] \\ &+ \frac{2}{\kappa} \left( \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde

$$\frac{1}{Re_t} = f_\mu \frac{\kappa}{\omega}, \quad (2.75)$$

$$\Pi = \left[ \left( \frac{1}{Re_t} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.76)$$

$$p^+ = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho \kappa, \quad (2.77)$$

$$f_{\mu} = 0,09 + \left(0,91 + \frac{1}{(\kappa/(\omega\nu))^3}\right) \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{(\kappa/(\omega\nu))}{25}\right)^{2,75}\right]\right\}, \quad (2.78)$$

com as constantes dadas por

$$C_{\mu} = 0,09, \quad C_{\omega_1} = 0,49, \quad C_{\omega_2} = 0,072, \quad \sigma_{\kappa} = 1, \quad \sigma_{\omega} = 1,8$$

## 3 METODOLOGIA

Para todas as simulações realizadas neste trabalho, foi utilizado o Turbo2D, que consiste em um código acadêmico utilizado para simulações de escoamentos turbulentos parietais utilizando os modelos  $\kappa - \varepsilon$  e  $\kappa - \omega$  de turbulência e capaz de implementar leis de parede no cálculo. A técnica de resolução adotada, embora baseada em um algoritmo *RANS* (do inglês, *Reynolds Average Navier-Stokes*) trabalhando, portanto, com valores médios ao longo do tempo, adota uma integração temporal destinada a eliminar a influência das condições iniciais. O pseudo-transiente assim criado permite a convergência dos valores calculados aos padrões característicos do regime permanente.

O acoplamento pressão-velocidade foi resolvido por meio do algoritmo de Uzawa. A filtragem de ruídos numéricos decorrentes do tratamento simétrico dado pelo método de Galerkin dos fluxos convectivos foi feita via método de dissipação balanceada, proposto por Huges e Brookes (1979) e Kelly et al. (1976). As não linearidades associadas ao emprego explícito de leis de parede no cálculo de condições de contorno são tratadas com o método de minimização de erro proposto por Fontoura Rodrigues (1990).

### 3.1 Caso-teste do degrau de Le, Moin & Kim (1996)

#### 3.1.1 Simulação direta

Na figura 1 é mostrada uma imagem esquemática do domínio do escoamento utilizado para a simulação direta por Le et al. (1996). O comprimento do domínio do escoamento é de  $L_x = 30h$ , onde a região anterior ao degrau  $L_i = 10h$ , a altura  $L_y = 6h$  e espessura  $L_z = 4h$ , onde  $h$  é a altura do degrau. A velocidade,  $U(y)$  apresenta perfil de escoamento entre placas planas com camada limite turbulenta (Spalart 1988), onde  $U_0$  é a velocidade máxima. O número de Reynolds no degrau é dado por  $Re_h = U_0h/\nu$  e a razão de expansão é  $E_R = L_y/(L_y - h)$ .

O escoamento foi considerado homogêneo na direção (x) e condições de contorno periódicas foram utilizadas. Condições de contorno de não deslizamento foram utilizadas nas outras paredes. O perfil de velocidade,  $U(y)$  foi obtido da simulação de camada limite de Spalart (1988) em  $Re_\theta = 670$ , onde  $\theta$  é a espessura de momento. A espessura da camada limite é  $\delta_{99} = 1.2h$  e o número de Reynolds no degrau é  $Re_h = 5100$ .

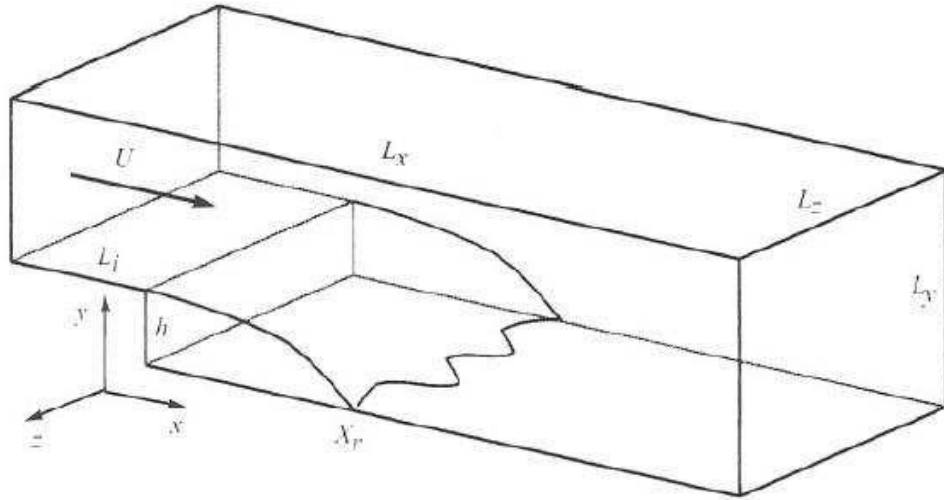


Figura 3.1: Desenho esquemático do degrau, por Le et al. (1996)

Uma das condições de contorno da simulação direta escolhida foi que as tensões cisalhantes no limite superior do domínio computacional foram consideradas nulas. Sendo assim, as velocidades nessa parede são:

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

As linhas de corrente do escoamento obtidas por simulação direta podem ser observadas na Figura (3.2).

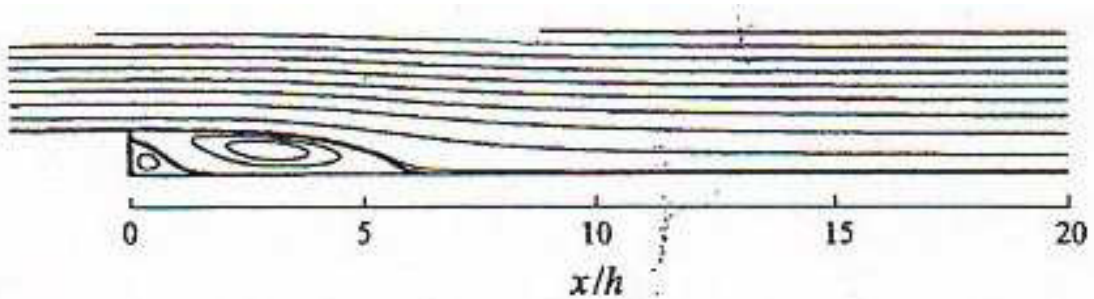


Figura 3.2: Linhas de corrente obtidas por Le et al. (1996)

### 3.1.2 Experimental

O experimento conduzido na NASA por Jovic e Driver (1994) para validar os dados de simulação direta possuía razão de expansão  $E_R = 1.2$ , espessura de camada limite no degrau  $\delta_{99}/h = 1.2$  e número de Reynolds no degrau  $Re_h = 5000$ , com altura do degrau de 9,6 mm. A velocidade de referência,  $U_0$ , tem o valor de 7,72m/s

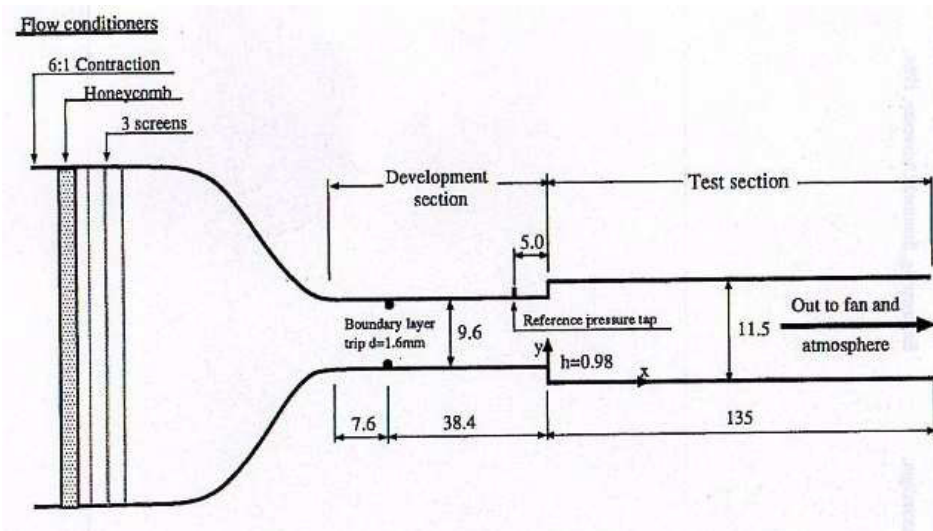


Figura 3.3: Aparato experimental utilizado por Jovic e Driver (1994)

### 3.1.3 Simulação por elementos finitos

Existe uma diferença fundamental entre a simulação apresentada neste trabalho e a simulação direta feita por Le et al. (1996). No caso deste trabalho, o modelo utilizado é bidimensional, assim como várias outras simulações feitas anteriormente (Armaly et al. 1983; Durst e Pereira 1988; Kaiktsis, Karniadakis e Orszag 1991), enquanto no caso da simulação direta foi considerado o modelo 3-D.

Foram usadas duas malhas de cálculo para discretização espacial do domínio. Uma do tipo P1 para o cálculo dos campos de pressão, composta por 1094 nós e 2004 elementos, e outra para os demais campos, de tipo P1-isoP2, constituída por 4191 nós e 8016 elementos.

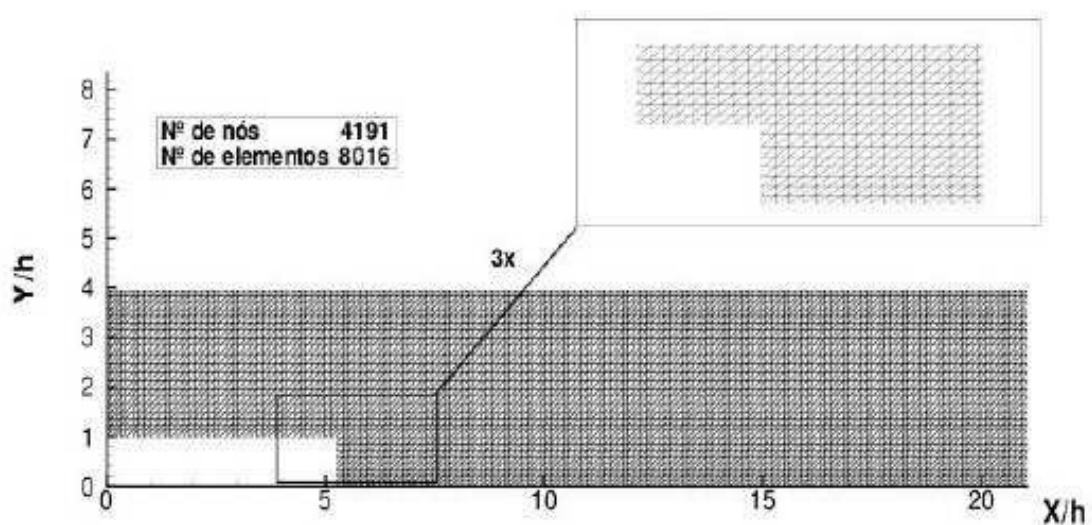


Figura 3.4: Malha de cálculo P1-isoP2, amplificada na região do degrau

Para facilitar as atividades de análise de pós processamento e visualização dos resultados, foram utilizados algoritmos computacionais direcionados a caracterização gráfica e digital do nível de erro numérico das principais variáveis calculadas e para visualização da evolução dos parâmetros de controle da convergência do cálculo ao longo do processo de integração temporal.

A metodologia utilizada para o estudo comparativo consistiu primeiramente da obtenção de uma massa de dados para cada uma das leis de parede através de simulação por elementos finitos. Para cada 1000 iterações feitas, um arquivo de dados era salvo. Esses dados incluem valores de posição, tempo, velocidade, energia cinética de turbulência, temperatura e massa específica. Para chegar a valores satisfatórios, variou-se os parâmetros “passos de tempo” e “distância da parede” a cada 5000 iterações, até que se fosse observada a convergência dos resultados. Os critérios de convergência serão abordados mais adiante.

Uma partícula fluida demora, em média,  $3,88h$  segundos para atravessar o domínio do escoamento, onde  $h$  é a altura do degrau e este tempo é calculado pela relação  $\frac{L_0}{U_0}$ , onde o comprimento do domínio tem relação direta com a altura do degrau. Na Figura (3.5), pode ser observado o domínio do cálculo.

Um dos pontos críticos dessa simulação é a determinação das condições de contorno, já que elas influenciam diretamente nos dados obtidos. Foram feitos vários testes para determinação das condições de contorno ideais para o caso estudado e, para esse caso-teste, elas foram determinadas através de tentativa e erro. Foram testados diferentes perfis de velocidade na entrada do domínio e diferentes velocidades de referência, sempre mantendo o número de Reynolds constante. Só após a determinação dessas condições é que foi possível a continuação do estudo.

Feito isso, foram plotados os perfis de velocidade de cada lei de parede e comparados com os dados de simulação direta e experimentais. Os pontos nos quais foram fornecidos dados de perfis de velocidades foram em  $x/h = [0, 5, 1, 0, 2, 5, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 5, 10, 0, 12, 5, 15, 0, 17, 5, 19, 0]$ , para simulação direta, e  $x/h = [-3, 0, 4, 0, 6, 0, 10, 0, 15, 0, 19, 0]$ , para dados experimentais, onde  $x/h = 0$  é a posição do degrau. Sendo assim, decidiu-se por plotar os gráficos comparativos para as posições  $x/h = [4, 0, 6, 0, 10, 0, 19, 0]$ , porque esses pontos já cobrem as zonas de recirculação e recolamento –  $x/h = [4, 0, 6, 0]$  – e de recuperação –  $x/h = [10, 0, 19, 0]$ , já que o ponto de recolamento de camada limite,  $X_r$ ,



para a simulação direta foi de  $6,28$  e para o experimento conduzido por Javic e Driver (1994) foi de  $6,0 \pm 0,15$ .



Figura 3.5: Domínio do cálculo para simulação do degrau de Le, Moin & Kim

Além disso, foram também plotados os campos de velocidade, de pressão, de energia cinética de turbulência e de dissipação de turbulência, para análise qualitativa do escoamento.

Em seguida, foram tiradas imagens com as linhas de corrente no degrau para determinar o ponto exato de recolamento da camada limite, para melhor visualização da bolha de recirculação e para comparação com as linhas de corrente obtidas experimentalmente.

## 3.2 Caso-teste do canal divergente de Driver & Seigmiller (1985)

### 3.2.1 Experimental

O caso-teste do canal divergente é um caso de escoamento turbulento incompressível em um duto de perfil retangular, com razão de expansão 9:8, com a parede superior (oposta ao degrau) inclinável a partir do ponto do degrau. Foi utilizado um tunel para desenvolvimento do escoamento, com comprimento de 110 vezes a altura da seção de entrada, e a região do teste do degrau, feita com expansão de 9:8 a fim de reduzir a influência de variações no gradiente de pressão externo devido à expansão súbita, e largura doze vezes o tamanho da altura do degrau, para diminuir os efeitos de tridimensionalidade.

O escoamento possui número de Reynolds de 36400, com altura do degrau de 12,7 mm, velocidade de 44,2 m/s e o fluido de trabalho utilizado foi o ar.

Os dados experimentais encontram-se disponíveis no site da comunidade europeia ERCOFTAC (do inglês, *European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion*)

### 3.2.2 Simulação por elementos finitos

Para a obtenção das condições de contorno ideais para a simulação por elementos finitos utilizando o Turbo2D, foi utilizado um duto de entrada para simulação do escoamento a ser desenvolvido. Como no caso experimental existia um túnel com 110 vezes a altura da seção de entrada, foi criada uma malha com comprimento de  $10h$  e altura  $h$  e simulada 11 vezes, para que fosse possível a obtenção do perfil do escoamento totalmente desenvolvido ao longo do duto de entrada. Foram inseridas as seguintes condições de contorno na entrada do duto: perfil uniforme com  $u = 44,2 \text{ m/s}$ ,  $v = 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  e  $\omega = 0$ .

A cada convergência de simulação, foram retirados, na saída do domínio, os perfis de velocidade, energia cinética de turbulência e dissipação de energia cinética de turbulência ( $\varepsilon$ ) ou dissipação específica ( $\omega$ ), dependendo do modelo de turbulência utilizado. Esses perfis foram utilizados como entrada na próxima simulação e isso foi feito sucessivamente até que fossem finalizadas as 11 convergências. O perfil final foi retirado e colocado como entrada da simulação para o degrau divergente.

Foram utilizadas duas malhas para a simulação do duto de entrada, sendo de 2525 nós e 4800 elementos para os campos de pressão e 9849 nós e 19200 elementos para os demais campos. Ambos os modelos foram simulados com a mesma malha.

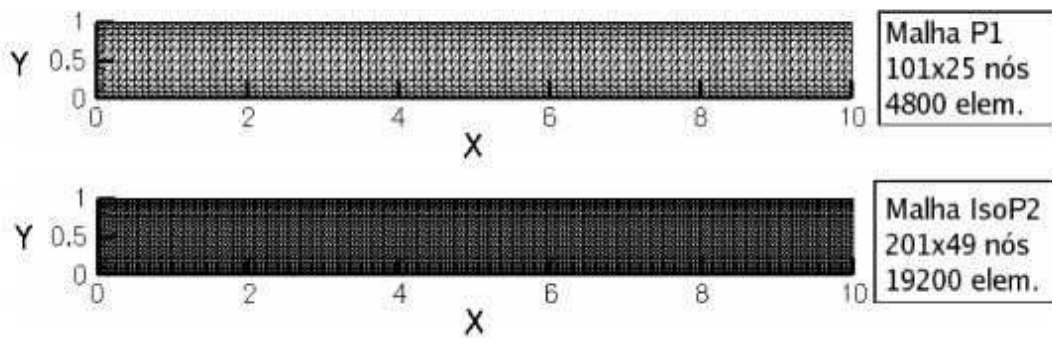


Figura 3.6: Malha para simulação do desenvolvimento do escoamento de entrada

Foi plotado o desenvolvimento do campo de velocidades, para que fosse possível observar o efeito da parede no perfil de velocidade do escoamento. A massa específica e a viscosidade do fluido foram tomadas como constantes, com valores tomados à temperatura de referência de 293K.

Para o degrau divergente, também foram utilizadas duas malhas, uma de 3272 nós e 6267 elementos para os campos de pressão e outra 12810 nós e 25068 elementos para os

demais campos. O canal possui este nome, pois é possível angular a parede superior do domínio, para provocar grandes gradientes de pressão, mas neste trabalho foi estudado apenas o caso de ângulo de divergência nulo.

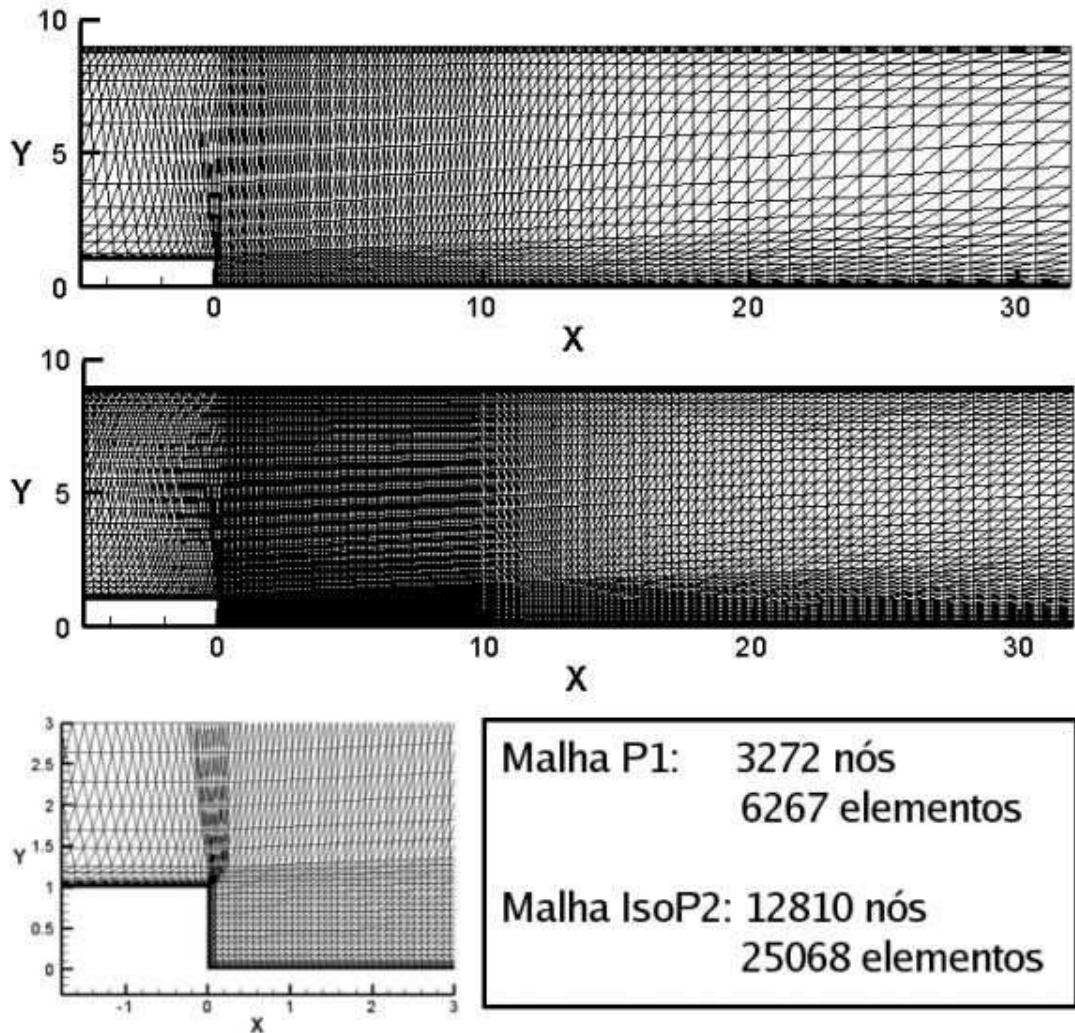


Figura 3.7: Malha para simulação do canal divergente

Assim como no caso-teste do degrau de Le, Moin & Kim, foram plotados os campos de  $P$ ,  $U$ ,  $k$  e  $\omega$  ou  $\varepsilon$  para cada uma das simulações, a fim de analisar os resultados qualitativos. Para os resultados quantitativos, foram plotados os perfis de velocidades nos pontos  $x/h = [-4, 0, -2, 0, 0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 10, 0, 20, 0]$  e comparados com os dados experimentais. Novamente, assim como no caso-teste anterior, esses pontos escolhidos englobam as regiões de recirculação, recolamento e recuperação de camada limite, além de uma região a montante do degrau. Finalmente, foram tiradas imagens das linhas de corrente de cada uma das leis de parede utilizadas na simulação do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e linhas de corrente do modelo  $\kappa - \omega$ .

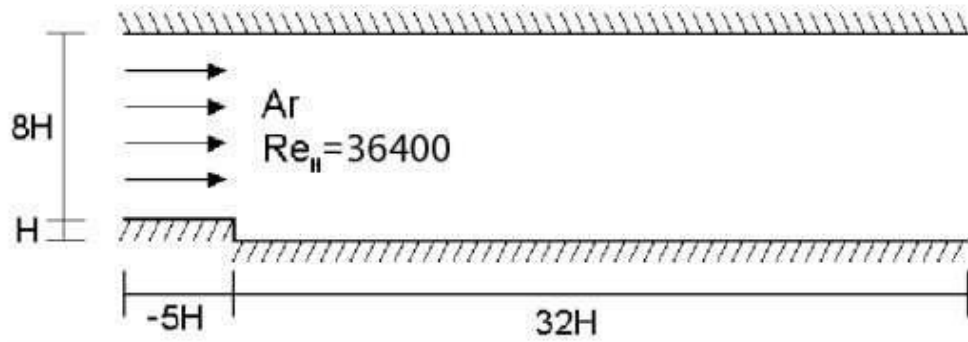


Figura 3.8: Domínio do cálculo para a simulação do canal divergente de Driver & Seegmiller

### 3.3 Critérios de convergência

Os critérios de convergência foram escolhidos de tal forma que foi possível observar que o pseudo-transiente havia de fato atingido regime permanente e fosse possível confirmar que, na faixa de operação calculada, a lei de parede escolhida seria capaz de se comportar corretamente, sem apresentar erros grosseiros.

A melhor forma de determinar a convergência do campo é através da análise dos perfis de velocidade. Quando um perfil não apresentasse alteração aos perfis anteriores, o campo estava completamente convergido. Foram plotados dados de 5000 iterações para garantir essa convergência, nas posições de  $x/h = 4$  e  $x/h = 6$ , que compreendem as regiões de recirculação e recolamento de camada limite, tanto no caso-teste do degrau de Le, Moin & Kim (1996), quanto no caso-teste do canal divergente de Driver & Seegmiller (1985).

Ainda assim, existem parâmetros que colaboram para essa análise. O primeiro deles é o parâmetro  $y^+$ , que é a coordenada da parede, ou seja, a distância  $y$  da parede, adimensionalizada pela velocidade de fricção,  $u_\tau$ , e pela viscosidade cinemática,  $\nu$ . O  $y^+$  é um parâmetro adimensional similar com o número de Reynolds local e indica a região da camada limite turbulenta.

As regiões cobertas pelos valores de  $y^+$  são as seguintes:

$y^+ < 5$ : subcamada laminar ou viscosa;

$5 < y^+ < 30$ : região de transição;

$30 < y^+ < 300$ : região completamente turbulenta.

Para qualquer uma das leis de parede, buscou-se um valor de  $y^+$  entre 1 e 5, que compreende a região laminar da camada limite turbulenta. Existe também a possibilidade

de obter  $y^+$  próximo de 30, na região completamente turbulenta, mas isso só é possível com a lei logarítmica clássica, que é mais fácil de controlar com a variação da distância da parede.

O segundo parâmetro é o erro. É recomendado que a norma do erro não ultrapasse valores da ordem de  $10^{-3}$ . Naturalmente, quanto menor o erro, melhor o resultado da simulação em questão.

Finalmente, o último parâmetro é a norma, que é um parâmetro que analisa se ainda existe mudanças nos valores das variáveis.

Além disso, serão plotados os dados de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU utilizado para a simulação. Esses dados são extremamente importantes para a análise de desempenho das leis de parede, pois eles que determinam quão caras, do ponto de vista de custo computacional, as leis de parede serão.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 O degrau de Le, Moin e Kim (1996)

Inicialmente foram realizadas várias simulações, com diferentes condições de contorno, pois a falta de informações detalhadas na publicação de Le, Moin e Kim (1996) tornou necessário um estudo preliminar sobre os valores a serem empregados para a velocidade de referência  $U_0$ , comprimento de referência  $L_0$  e perfil de velocidade na entrada do domínio. A única informação existente, usada para a determinação adequada das condições de contorno, foi o número de Reynolds do escoamento baseado na altura do degrau  $Re_h = 5100$ .

São apresentados nesta seção apenas os resultados finais relativos às condições de contorno adotadas. O detalhamento deste estudo está apresentado no Anexo I. As condições de contorno resultantes deste estudo são:  $U_0 = 7,72 \text{ m/s}$ ;  $L_0 = 9,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\nu = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ; perfil de velocidade turbulento na entrada do domínio do escoamento. Fizeram parte deste estudo de condições de contorno tanto perfis de velocidade uniforme como também perfis turbulentos. Os resultados do estudo sobre perfis de velocidade na entrada do domínio de cálculo também podem ser vistos no Anexo I.

#### 4.1.1 Critérios de convergência

O critério de convergência adotado, bastante conservador, foi a invariabilidade dos perfis de velocidade durante pelo menos 5000 iterações, calculados nas seções onde são conhecidos os valores experimentais medidos por Le, Moin e Kim (1996). Os resultados apresentados nas Figuras (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), documentam os perfis de velocidade convergidos, em duas seções, obtidos com as quatro leis de parede. Considerando o passo de tempo adotado e a velocidade média do escoamento, as 5000 iterações escolhidas como critério de convergência, correspondem a um comprimento percorrido pelo escoamento equivalente a aproximadamente 6,5 vezes o comprimento total do domínio de cálculo. Os resultados ilustrados pelas Figuras (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) indicam que o critério de convergência adotado nesta simulação é consistente.

Foram também calculados, como dados importantes para o desenvolvimento da simulação numérica, os valores de  $y^+$ , apresentados na Figura (4.5), o erro numérico definido pela diferença entre valores calculados em duas iterações sucessivas, para todas as

variáveis, é apresentado na Figura (4.6) e a norma  $L_2$  de todos os campos é apresentada pela Figura (4.7).

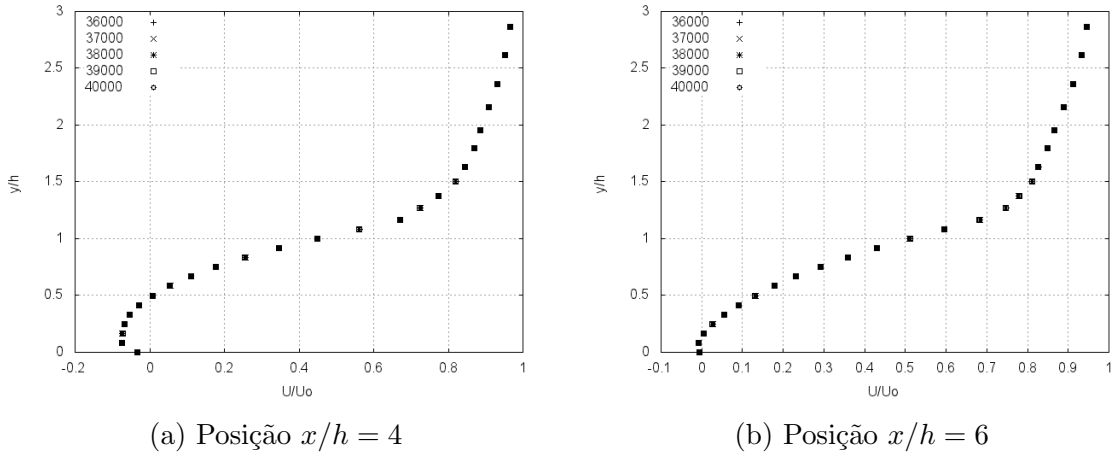


Figura 4.1: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logaritmica clássica

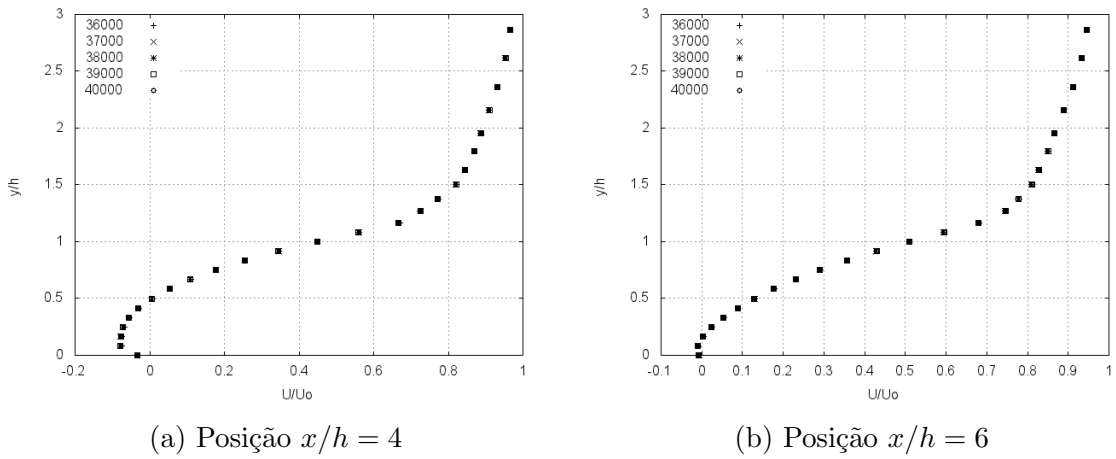


Figura 4.2: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966)

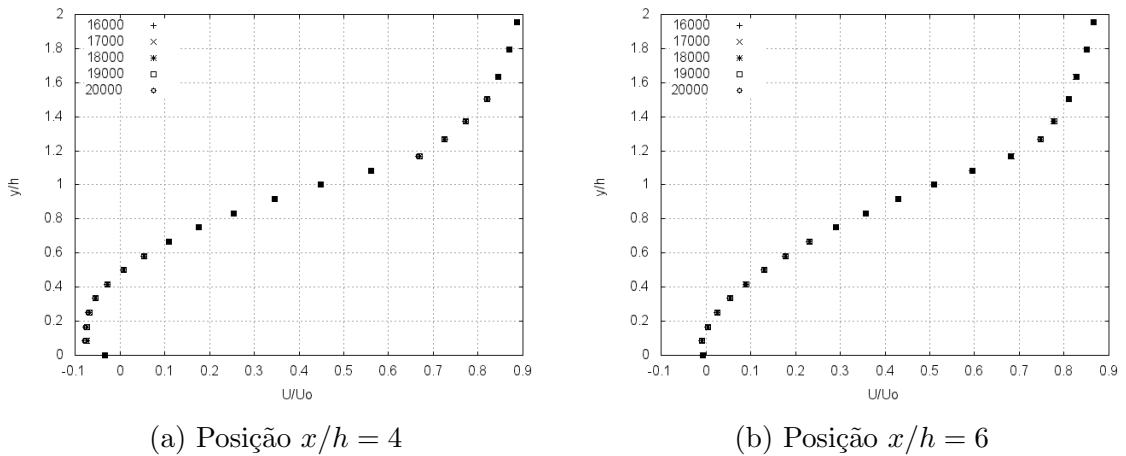
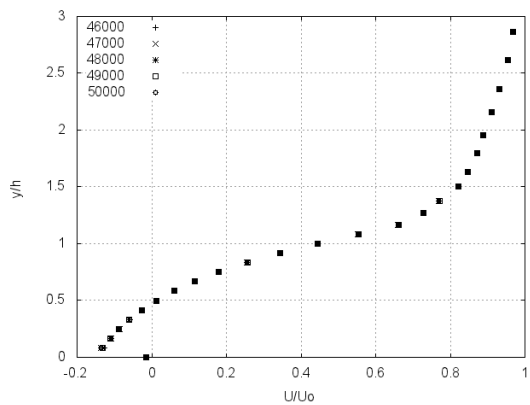
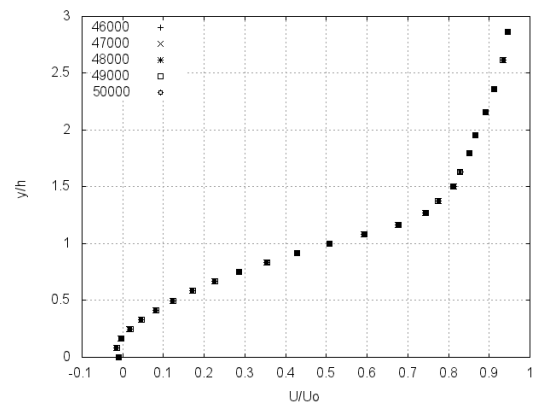


Figura 4.3: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984)



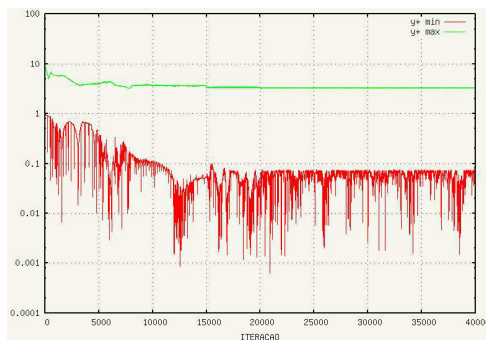
(a) Posição  $x/h = 4$



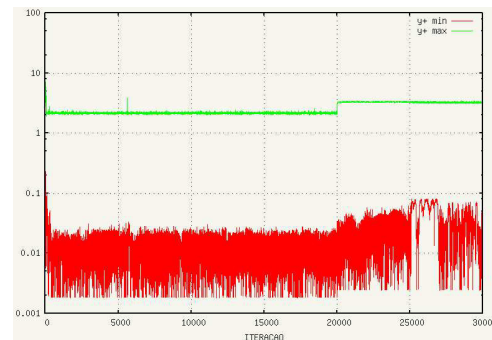
(b) Posição  $x/h = 6$

Figura 4.4: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998)

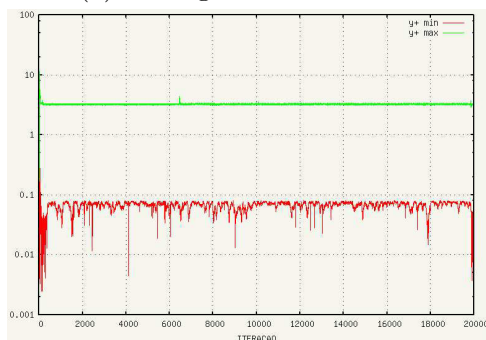
Os resultados obtidos para o valor máximo de  $y^+$ , apresentados na Figura (4.5), variam entre 1 e 5, indicando que os cálculos de velocidade feitos pelas leis de parede correspondem a fronteira do domínio de cálculo localizada na subcamada laminar. Este resultado é coerente com a existência de descolamento da camada limite turbulenta. Para que a simulação numérica possa capturar o descolamento de camada limite é necessário modelar a região de proximidade imediata da parede, onde se inicia o processo de descolamento.



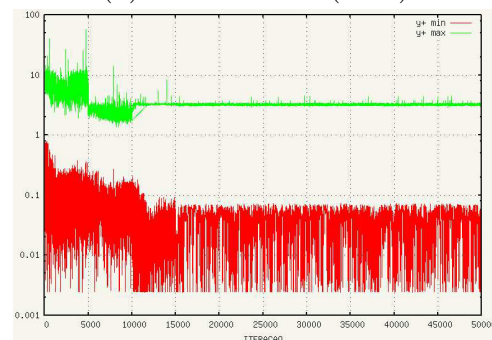
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



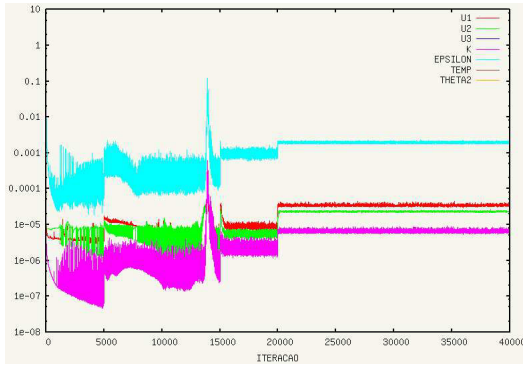
(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



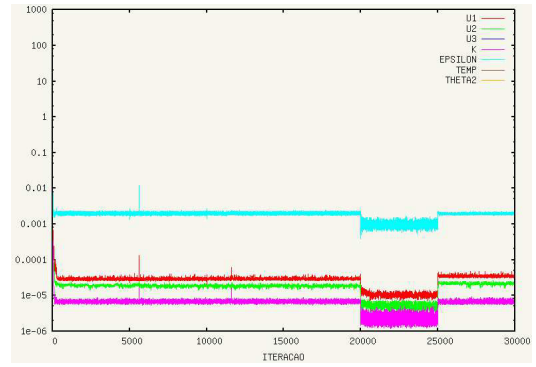
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.5: Valores de  $y^+$

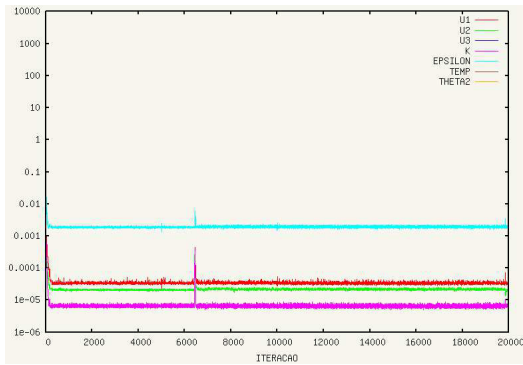




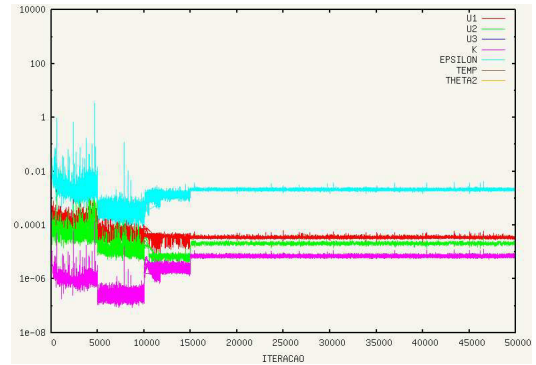
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

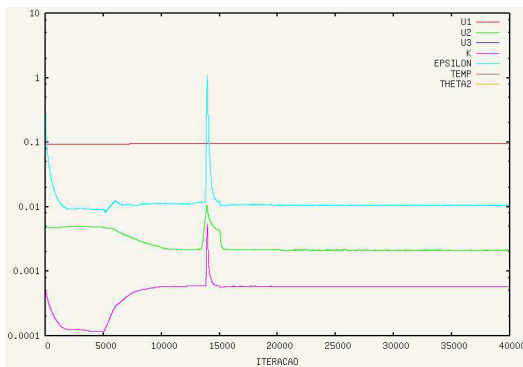


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

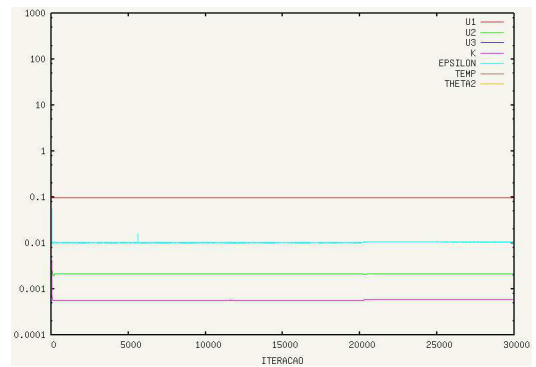


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

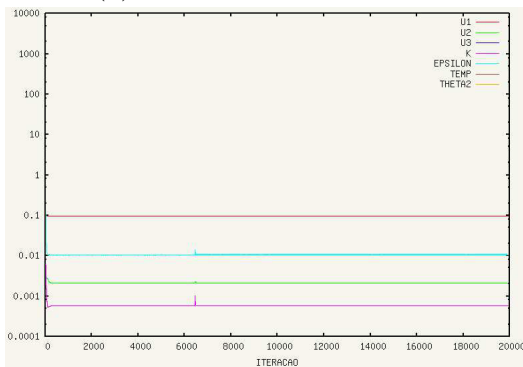
Figura 4.6: Valores de erro



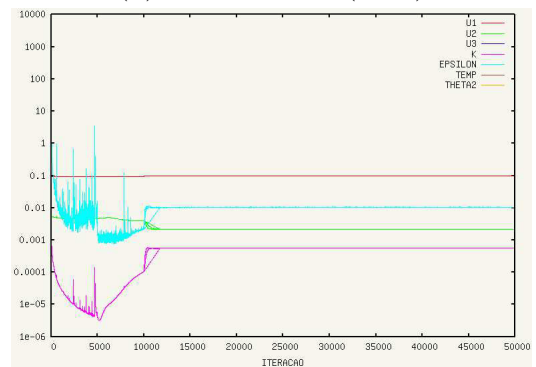
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.7: Valores de norma

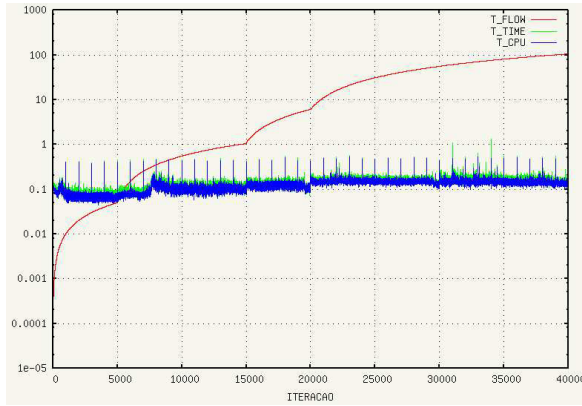
Os valores de  $y^+$  não são escolhidos de forma automática pelo algoritmo de cálculo. Estes valores são impostos pelo analista que controla o trabalho de processamento, por meio de um parâmetro que regula a distância entre a parede física e o início da malha de cálculo. Em princípio, na ausência de descolamento, a região ideal para o emprego das leis de parede é o início da parcela turbulenta da região interna da camada limite ( $30 < y^+ < 50$ ). Na presença de descolamento a simulação só converge se o emprego das leis de parede ficar restrito a sub-camada laminar. As variações bruscas nestes gráficos correspondem a alterações da distância entre a parede física e o início da malha de cálculo, impostas pelo analista para evitar a divergência numérica da simulação.

#### 4.1.2 Critérios de tempo

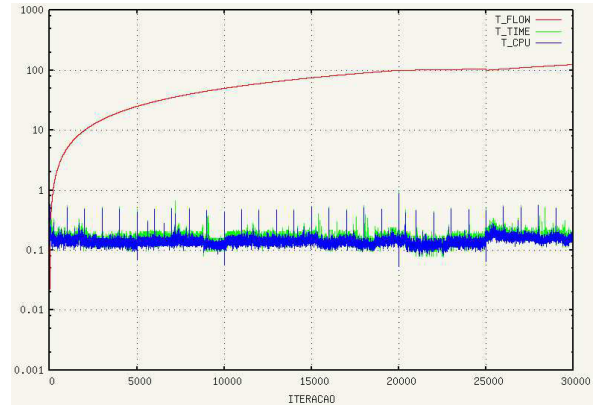
Para cada simulação feita com o emprego das quatro leis de paredes disponibilizadas pelo algoritmo Turbo2D, estão representados na Figura (4.8) três valores diferentes para a passagem do tempo. O tempo total de escoamento simulado é representado pelas linhas vermelhas. As linhas verdes representam o tempo de duração do cálculo para cada instante simulado. As linhas azuis representam o tempo de CPU necessário para cada iteração. A diferença entre os valores representados pelas linhas verde e azul é devido ao fato de que algumas das atividades representadas pelas linhas azuis não são devidas a simulação numérica. Podem ser observado nos gráficos contidos na Figura (4.8) picos de tempo de CPU, que se repetem periodicamente, correspondente ao armazenamento dos campos calculados nos arquivos de resultado.

Outra característica importante dos gráficos apresentados na Figura (4.8) são as variações bruscas no tempo total de escoamento, representadas pelas linhas vermelhas. Como o processo completo de simulação numérica é necessariamente composto por diversas etapas, cada qual caracterizada por diferentes passos de tempo e/ou diferentes distâncias entre a parede física e o início da malha de cálculo, toda variação brusca na inclinação da linha vermelha corresponde a um determinado passo de tempo, sendo esta inclinação diretamente proporcional ao tamanho do passo de tempo imposto pelo analista. O início da simulação é sempre uma etapa difícil, exigindo valores muito pequenos dos passos de tempo e da distâncias entre a parede física e o início da malha de cálculo. Esta condição é resultante da incompatibilidade entre as condições iniciais, sempre compostas por valores mais ou menos arbitrários, e as condições do escoamento capazes de atender as

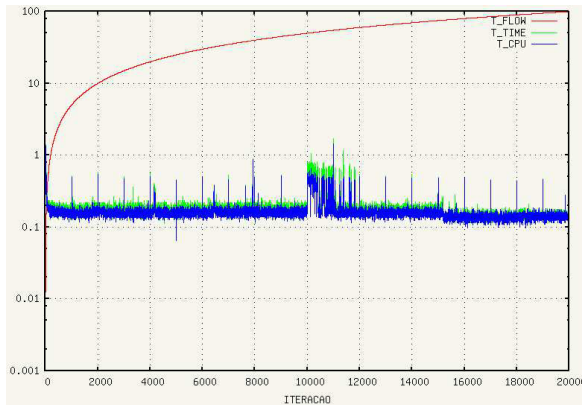
imposições da formulação analítica. A medida que a simulação avança no tempo, se reduz a diferença entre os valores calculados e os valores de equilíbrio para todas as variáveis, permitindo que o analista aumente gradativamente o tamanho do passo de tempo.



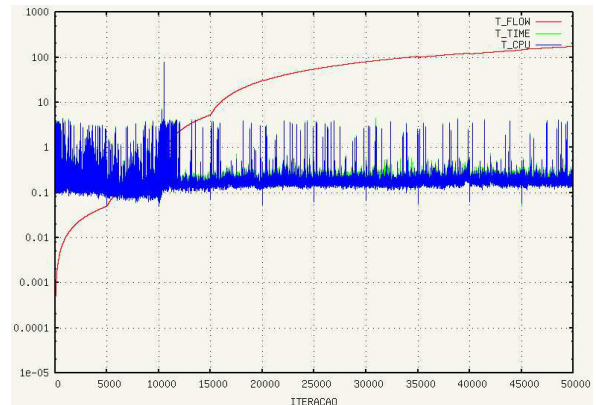
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

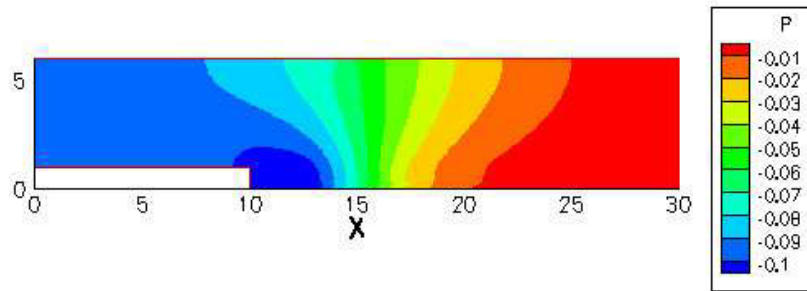
Figura 4.8: Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU

### 4.1.3 Resultados dos campos

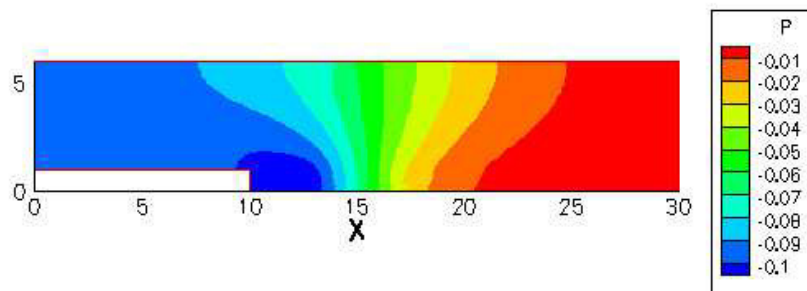
São apresentados inicialmente os resultados qualitativos obtidos com o modelo de turbulência  $\kappa - \varepsilon$  e com as quatro leis de parede, sempre obedecendo à mesma sequência: lei de parede Logarítmica Clássica, Mellor (1966), Nakayama e Koyama (1984) e Cruz e Silva Freire (1998). Os resultados apresentados correspondem aos campos de velocidade, pressão, energia cinética de turbulência e dissipação de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede. Em geral os resultados finais obtidos com as quatro leis de parede são muito semelhantes, sendo observadas diferenças sensíveis apenas durante o pseudo-transiente numérico necessário à convergência dos resultados.

Os resultados da Figura (4.9) correspondem aos campos de pressão. Em todos eles observam-se variações contínuas e uniformes do campo, sendo o valor de maior depressão

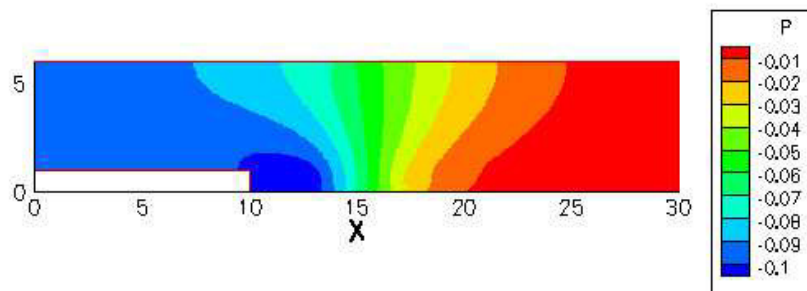
localizado na região da bolha de recirculação, como esperado.



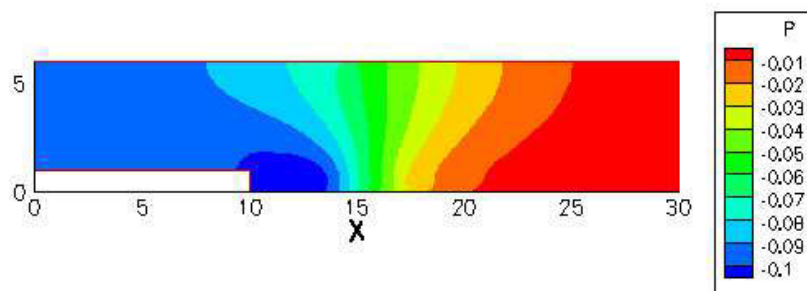
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

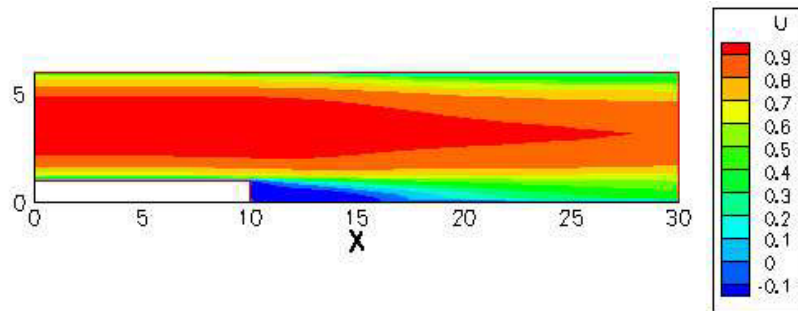


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

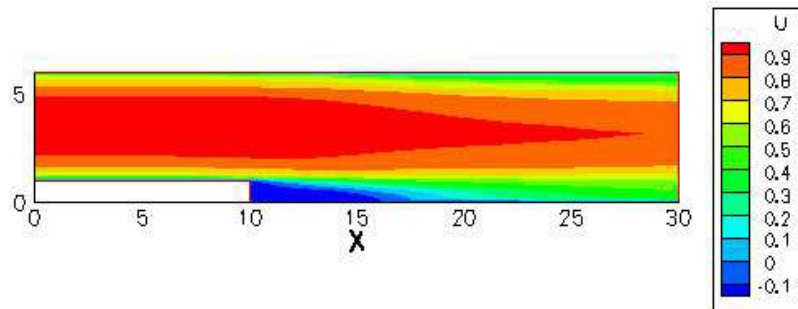
Figura 4.9: Campos de pressão para as quatro leis de parede

Em seguida são apresentados os campos de velocidade na Figura (4.10). A principal discrepância observada nestes resultados são os diferentes comprimentos da bolha de

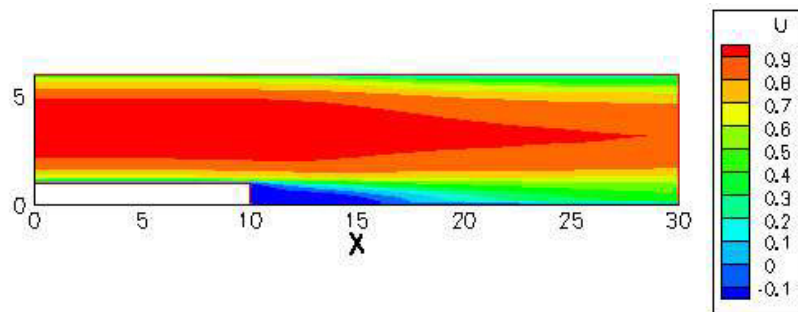
recirculação que se estabelece imediatamente após o degrau. Como esperado, a lei de parede Logarítmica Clássica, por ser a única incapaz de considerar o efeito dos gradientes de pressão, apresenta a menor região de recirculação, como pode ser observado na Tabela (4.1).



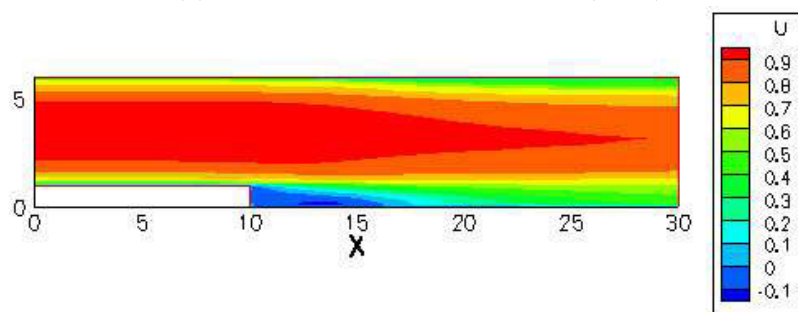
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



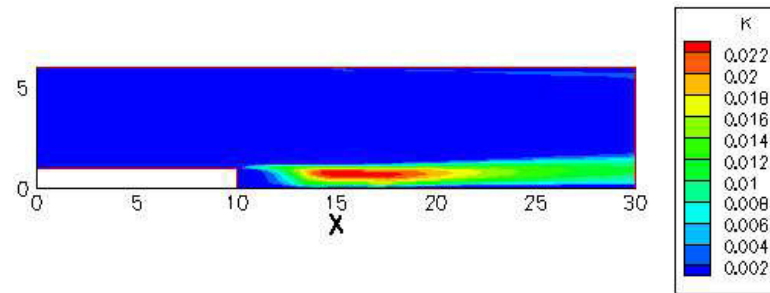
(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



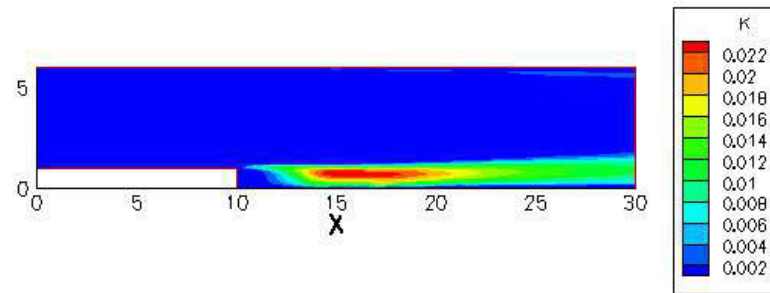
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.10: Campos de velocidade para as quatro leis de parede

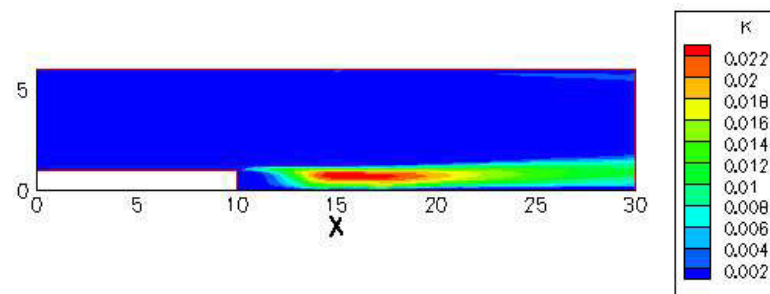
Os campos de energia cinética de turbulência,  $\kappa$ , estão apresentados na Figura (4.11). A pouca intensidade da energia cinética de turbulência calculada é coerente com o baixo número de Reynolds do escoamento. Os valores mais elevados de  $\kappa$  estão localizados na região da bolha de recirculação como esperado, já que esta região apresenta maior turbulência e, portanto, maior produção de energia cinética.



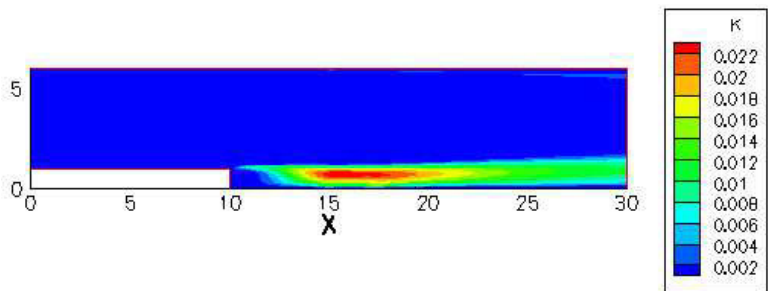
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



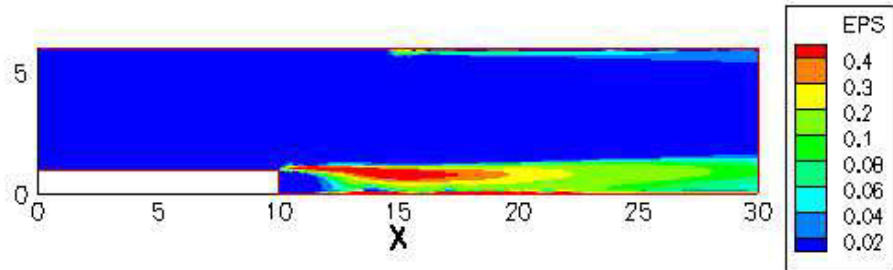
(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



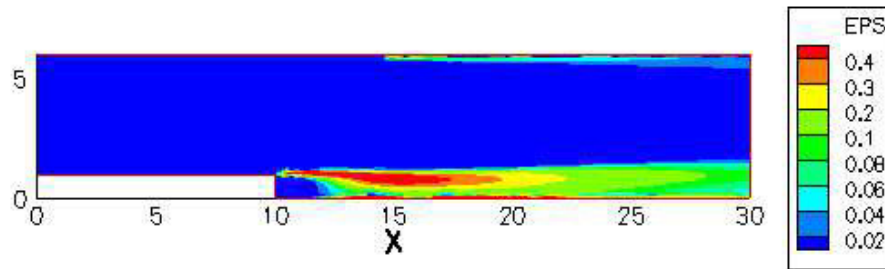
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.11: Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede

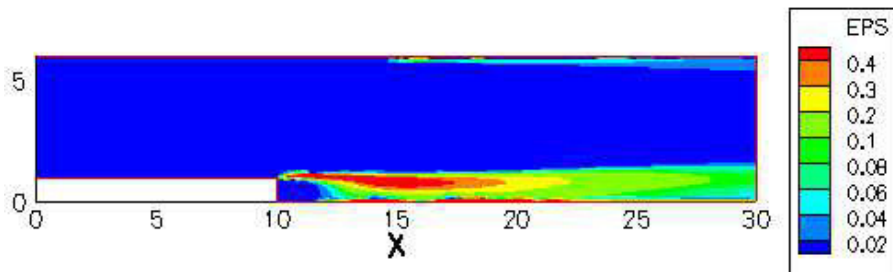
Os campos da taxa de dissipação de turbulência,  $\varepsilon$ , estão apresentados na Figura (4.12) e são muito similares aos valores de  $\kappa$  uma vez que a equilíbrio entre produção e dissipação é condição necessária ao escoamento para que possa ser representado pelo modelo de turbulência  $\kappa - \varepsilon$ .



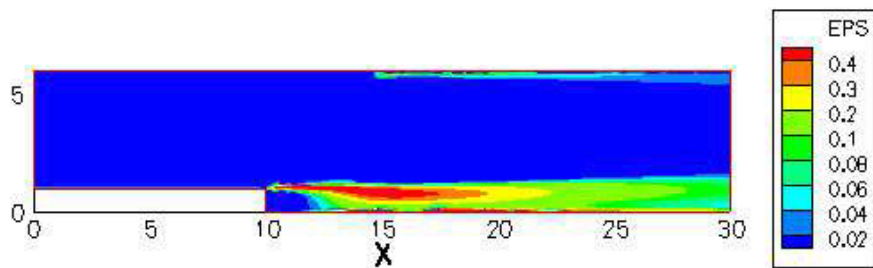
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.12: Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede

Por fim, é possível visualizar na Figura (4.13) as linhas de corrente do escoamento correspondentes a região de recirculação. Estes resultados mostram de forma mais nítida

as diferenças de tamanho e de forma das bolhas de recirculação bem como a localização aproximada do ponto de recolamento  $X_r$  da camada limite. Outro detalhe importante é a captura, pelas quatro leis de parede, da bolha de recirculação secundária que se estabelece na base do degrau. Todos os levantamentos experimentais, inclusive o de Le, Moin e Kim (1996), comprovam a existência desta estrutura. A detecção numérica desta particularidade do escoamento sobre o degrau não é tarefa trivial.

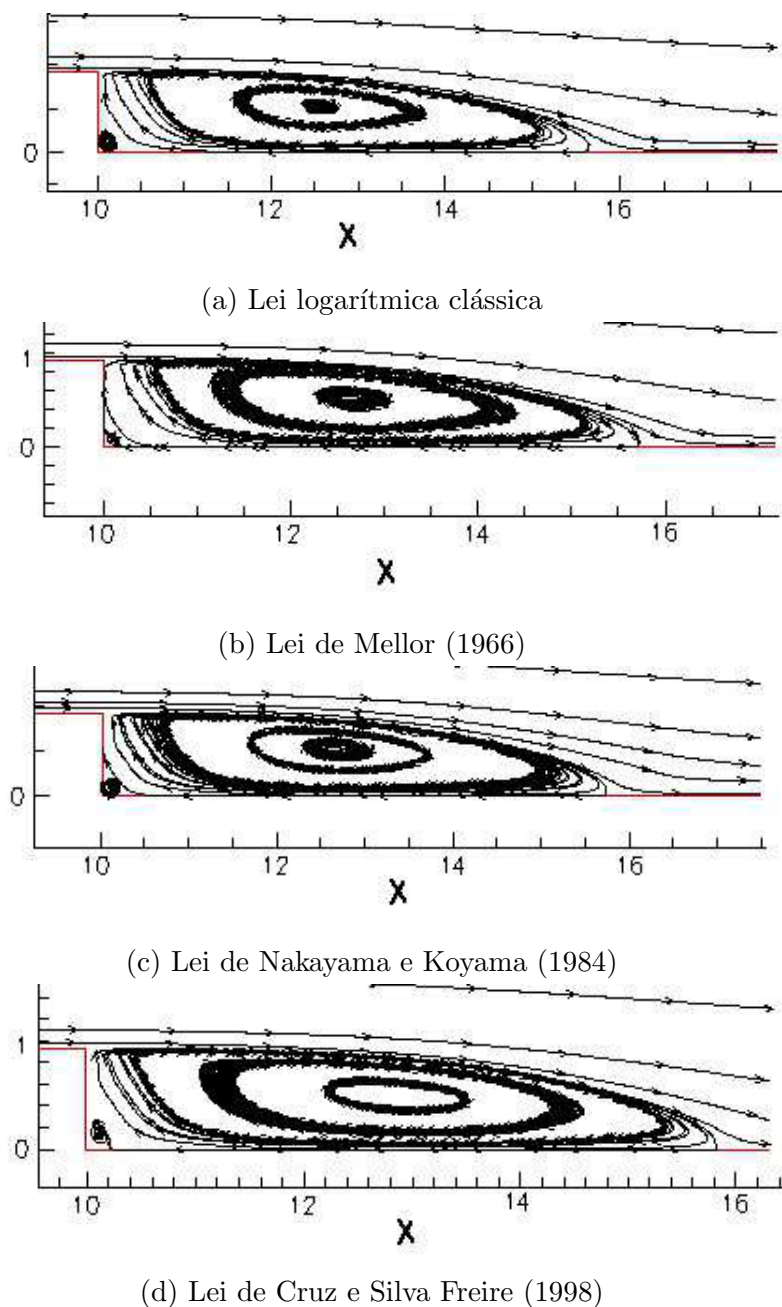
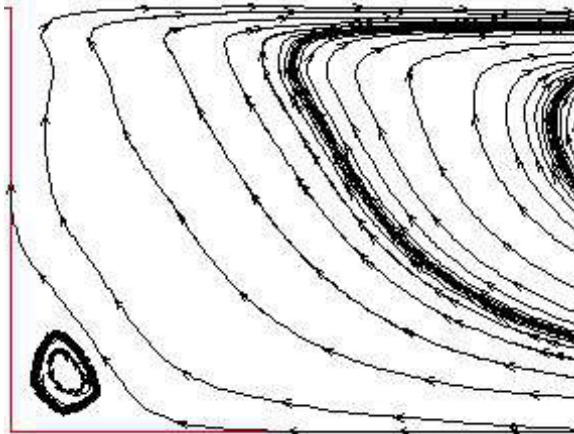


Figura 4.13: Linhas de corrente na região do degrau para as quatro leis de parede

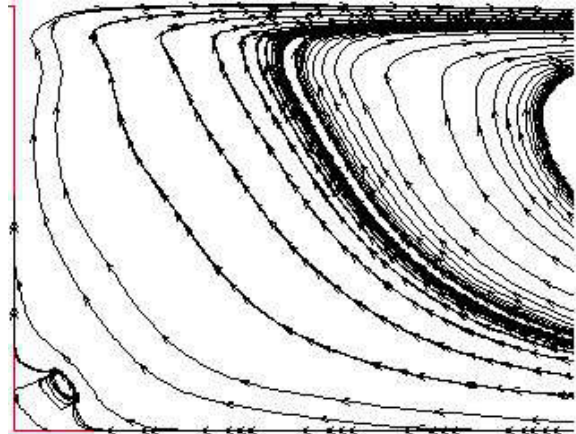
A Figura (4.14) mostra, em detalhe, a estrutura da bolha de recirculação secundária que se forma junto à base do degrau. Dentre os todos os resultados obtidos, a bolha



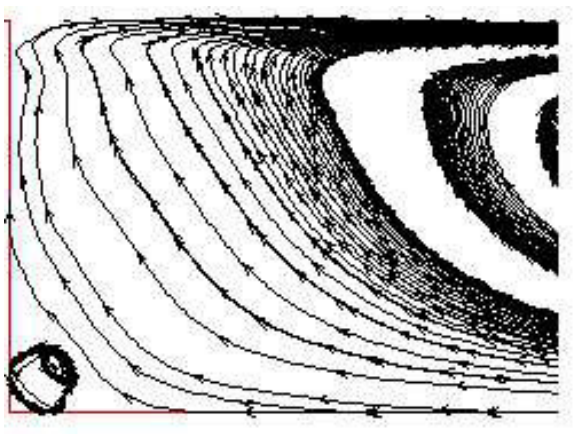
secundária modelada com lei de parede de Cruz e Silva Freire (1998) é a que apresenta maior tamanho e definição. No extremo oposto a menor estrutura secundária resulta do emprego da lei de Mellor (1966). Apesar da existência de inúmeras referências bibliográficas qualitativas, não foram encontrados referências numéricas e/ou experimentais com resultados quantitativos sobre esta estrutura característica dos escoamentos sobre degrau.



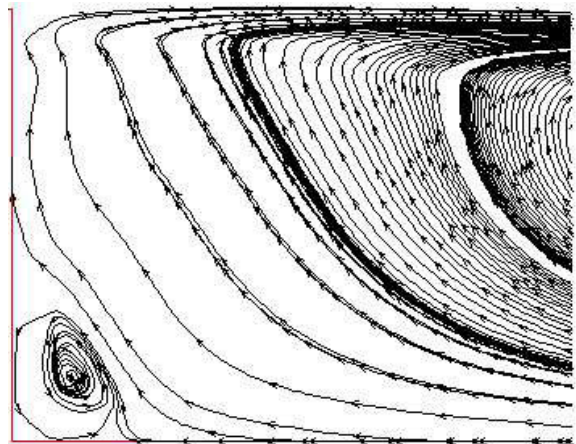
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.14: Segunda bolha em ampliação na região do degrau para as quatro leis de parede

#### 4.1.4 Resultados quantitativos

Como o perfil de velocidade do escoamento na entrada do canal não é fornecido pelos autores do experimento, foi necessário estimar um perfil de velocidade correspondente a um escoamento turbulento totalmente desenvolvido. O perfil usado está apresentado na Figura (4.15).

Os resultados numéricos quantitativos apresentados são os perfis de velocidade obtidos com cada uma das leis de parede, mostrados nas Figuras (4.16) e (4.17), e os comprimentos da região de recirculação  $X_r$  obtidos com as quatro leis de parede, mostrados nas Figuras (4.18) e (4.19). Os resultados numéricos apresentados estão confrontados, em todas as figuras, com os resultados experimentais de Jovic e Driver (1994) e com os resultados de de Le, Moin e Kim (1996), obtidos por simulação numérica direta - DNS.

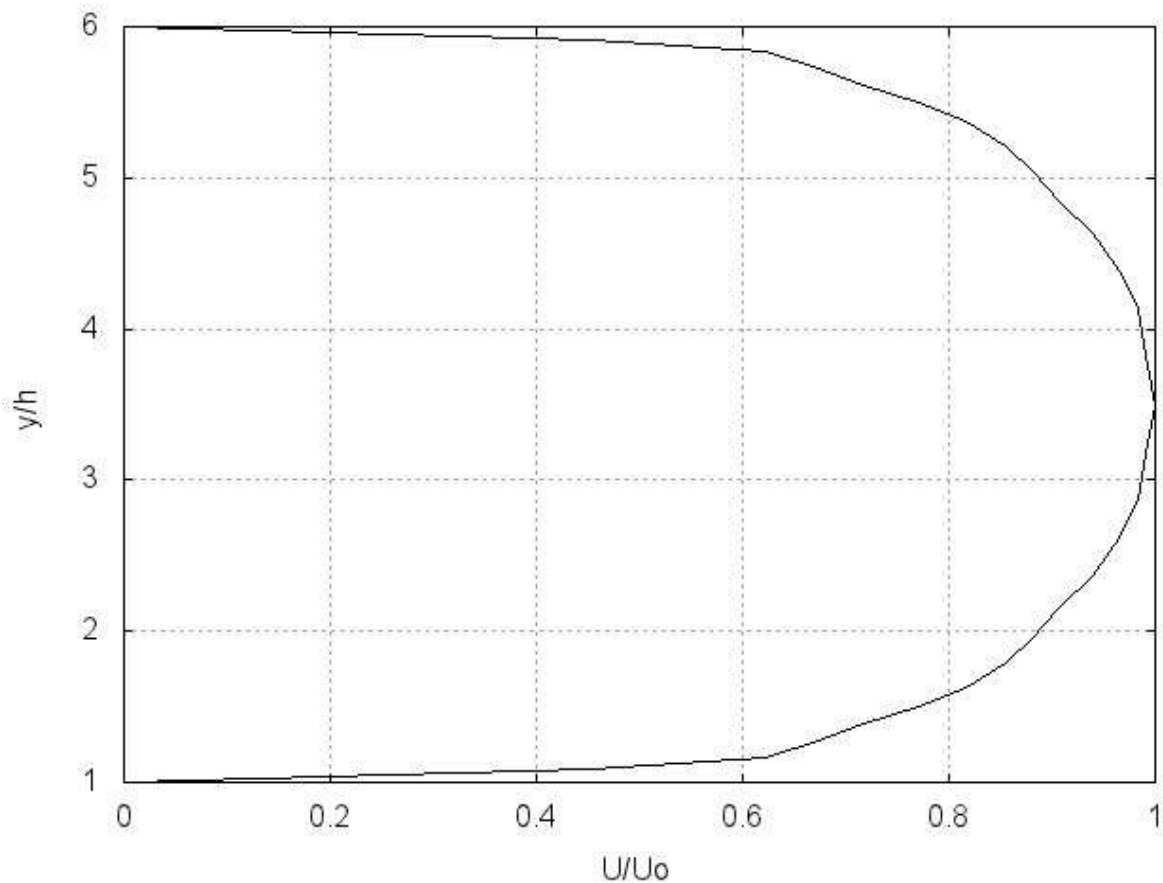
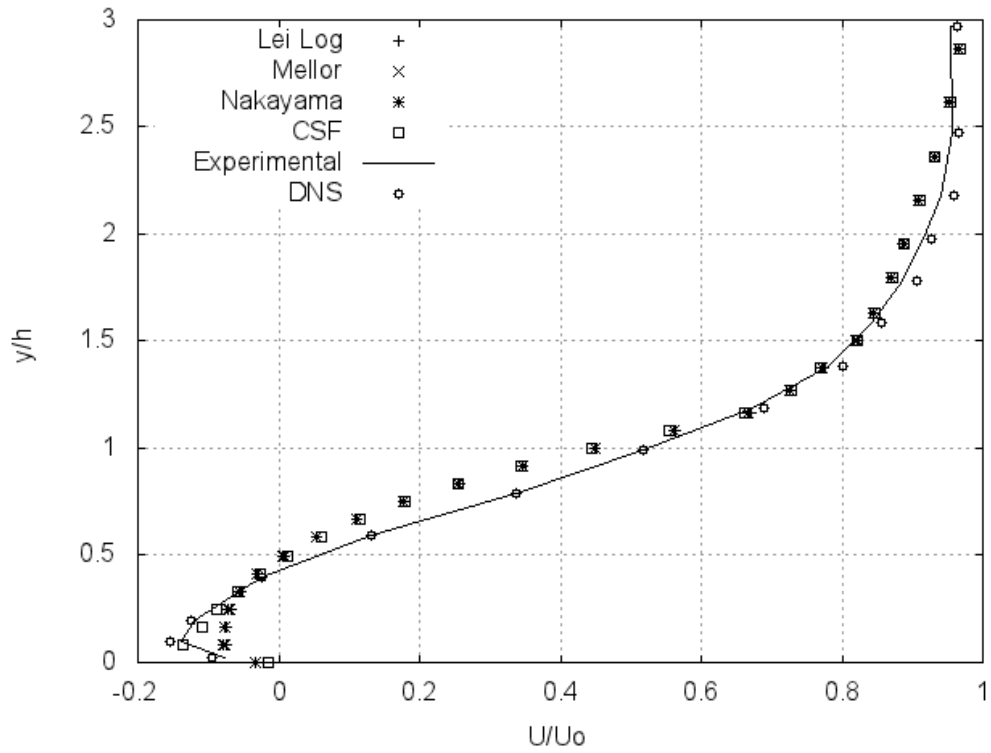


Figura 4.15: Perfil de velocidade na entrada do domínio

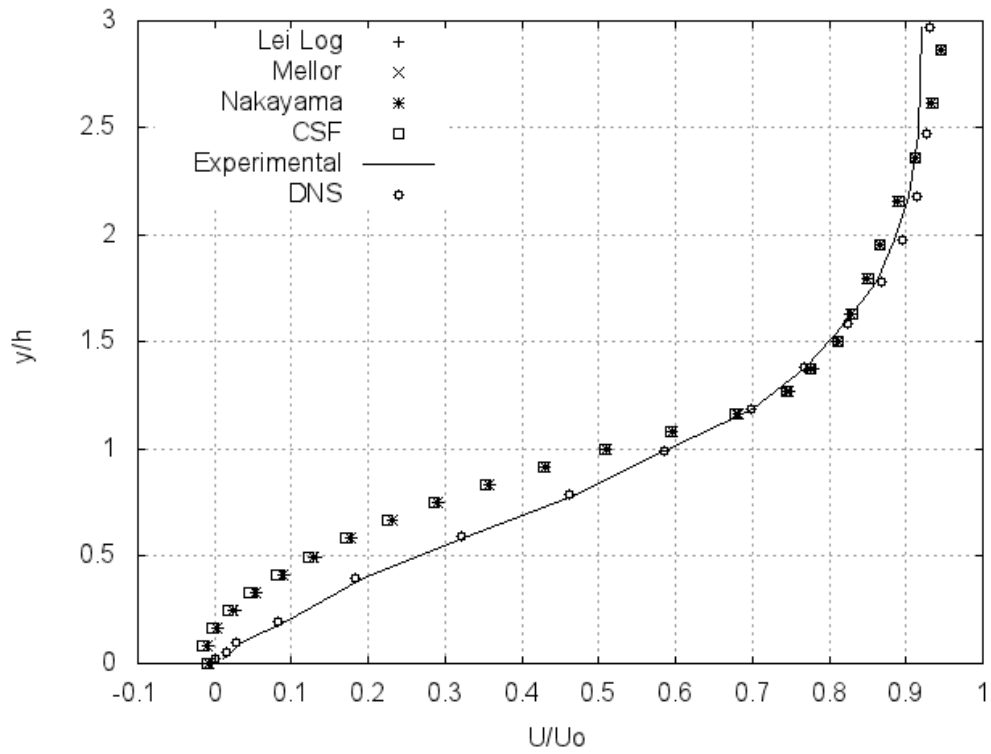
A representação gráfica dos resultados quantitativos usa como domínio a região do escoamento coberta pelos dados numéricos e experimentais de Le, Moin e Kim (1996) e Jovic e Driver (1994), definida por eixos longitudinal e vertical medindo  $6h$  e  $3h$ , respectivamente.

Os resultados dos perfis de velocidade cobrem a bolha de recirculação, gráficos (a) e (b) da Figura (4.16), e a região de reestruturação da camada limite turbulenta, gráficos (a) e (b) da Figura (4.17). O início da bolha de recirculação corresponde à coordenada longitudinal  $x/h = 0$  e seu fim, segundo os dados experimentais de Jovic e Driver (1994)

e os dados numéricos de Le, Moin e Kim (1996), situa-se no entorno do ponto  $x/h = 6$ .

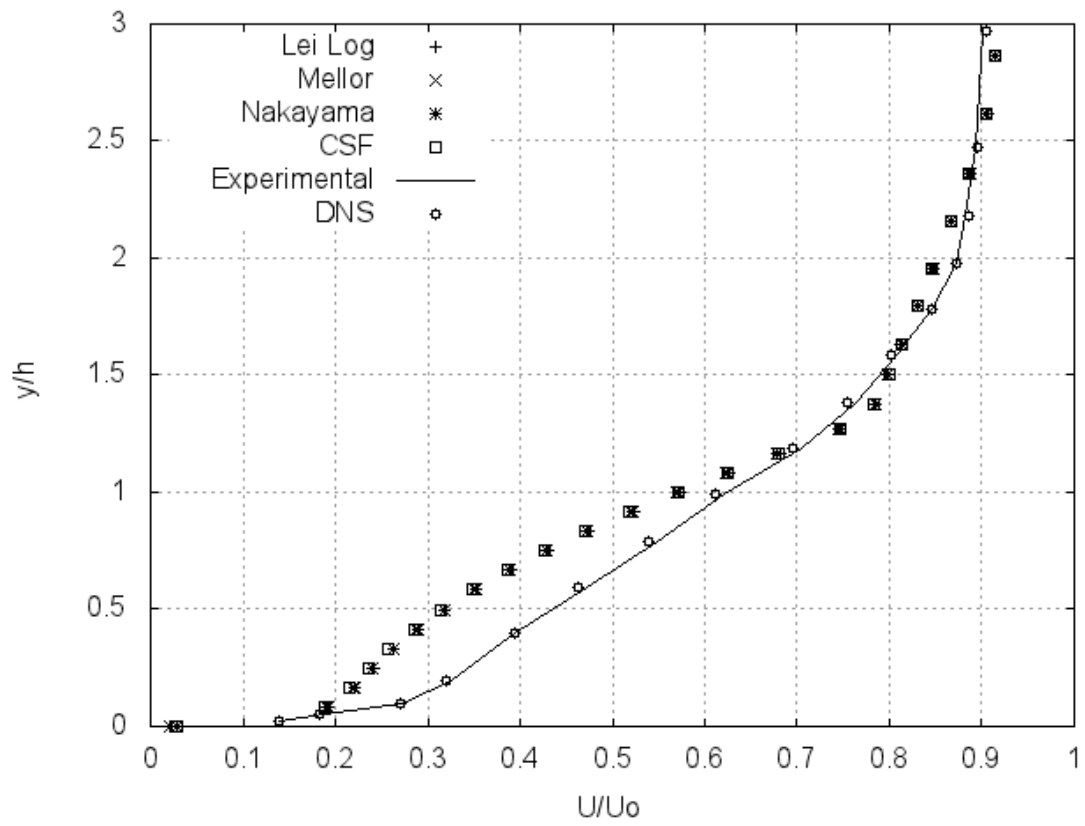


(a)  $x/h = 4$

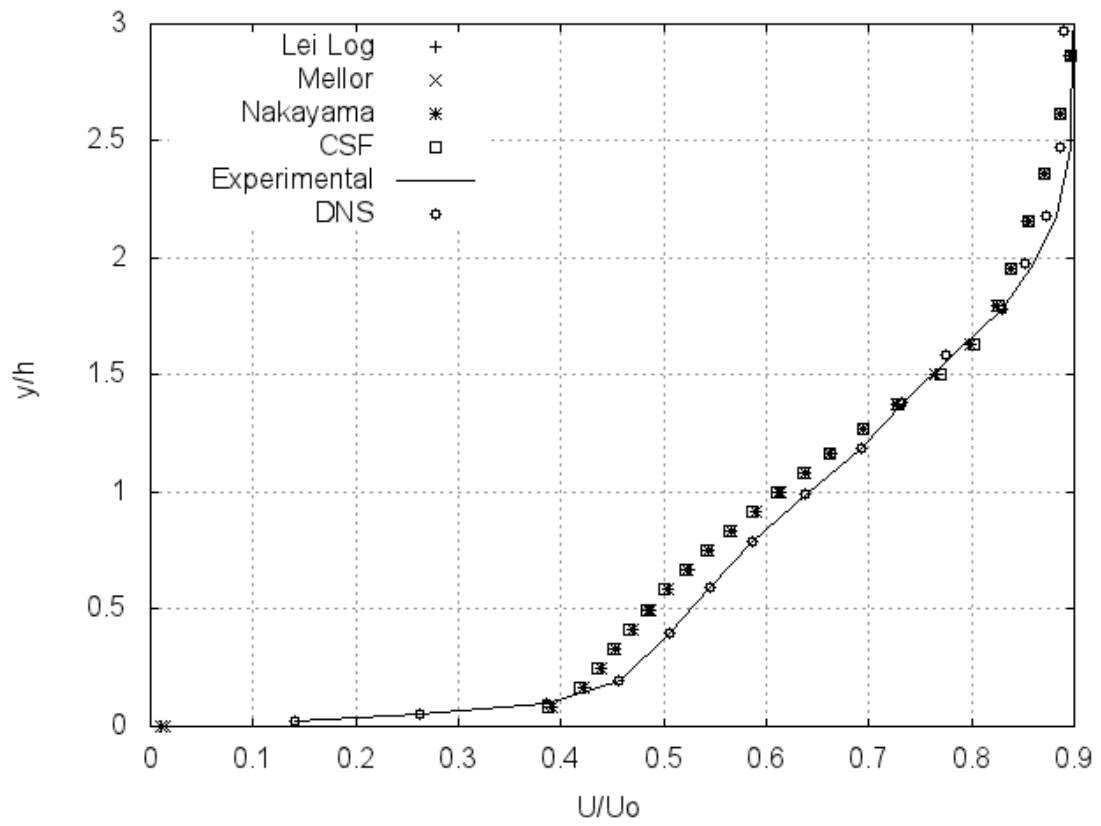


(b)  $x/h = 6$

Figura 4.16: Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite



(a)  $x/h = 10$



(b)  $x/h = 19$

Figura 4.17: Perfis de velocidade nas regiões de recuperação

São pequenas as diferenças entre os resultados obtidos com leis de parede e os com dados experimentais e de DNS. O gráfico (a) da Figura (4.16) mostra uma vantagem discreta mas sensível da lei de parede de Cruz e Silva Freire. Nos demais resultados não são perceptíveis diferenças entre as leis de parede.

Nos gráficos (a) e (b) da Figura (4.17), que representam a região de reestruturação da camada limite turbulenta, aparecem os pontos de maior discrepância, ainda que pequena, entre as leis de parede e os resultados de referência numérica e experimental. Esta diferença pode ser entendida como consequência da destruição da estrutura da camada limite provocada, pela região de recirculação. Como os modelos de turbulência são baseados na auto-similaridade dos perfis de velocidade da camada limite, é previsível a dificuldade destes modelos em modelar a região de reestruturação da camada limite turbulenta. A aproximação entre os resultados obtidos com as leis de parede e os resultados de referência se acentua a medida que a camada limite se reestrutura como indicam os resultados (a) e (b) da Figura (4.16) e (a) da Figura (4.16).

Para caracterizar de forma precisa o comprimento  $X_r$  da da região de recirculação as Figuras (4.18) e (4.19) mostram a variação do sentido do escoamento na região de proximidade imediata da parede inferior do degrau. Valores de velocidade positivos indicam escoamento externo à bolha e valores negativos representam o contra-fluxo no interior da bolha de recirculação. Como o início do domínio coincide com o início do degrau, somente após o fim da bolha surgem valores positivos de velocidade, sendo o ponto de recolamento da camada limite caracterizado por velocidade nula.

Os valores do ponto de recolamento da camada limite mostrados pelas Figuras (4.18) e (4.19) são apresentados na Tabela (4.1).

Tabela 4.1: Pontos de recolamento de camada limite

Leis de parede	$X_r$
Lei logarítmica clássica	$X_r = 6,09$
Lei de Mellor (1966)	$X_r = 6,19$
Lei de Nakayama e Koyama (1984)	$X_r = 6,19$
Lei de Cruz e Silva Freire (1998)	$X_r = 6,29$
Experimental por Jovic e Driver (1994)	$X_r = 6,0 \pm 0,15$
Numérico por Le et. al (1996)	$X_r = 6,28$

Nas Figuras (4.18) e (4.19) a linha em azul se refere ao ponto de recolamento da simulação pelo método DNS e a linha em vermelha se refere ao ponto de recolamento

obtido experimentalmente. Para melhor visualização, foi feita uma aproximação da região de recolamento de camada limite, apresentada pela Figura (4.19).

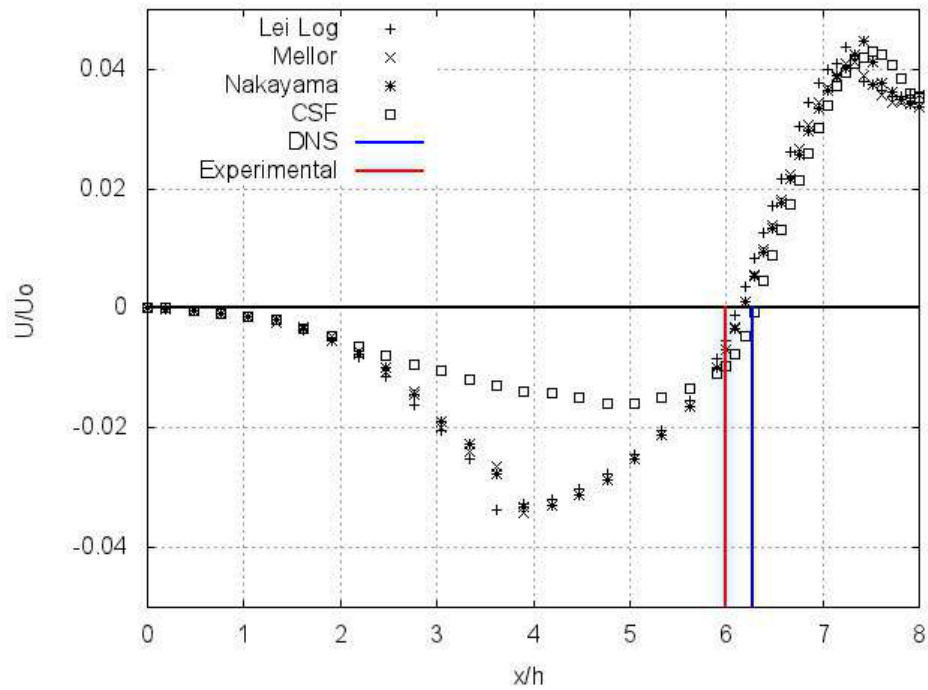


Figura 4.18: Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede, experimental e modelo DNS

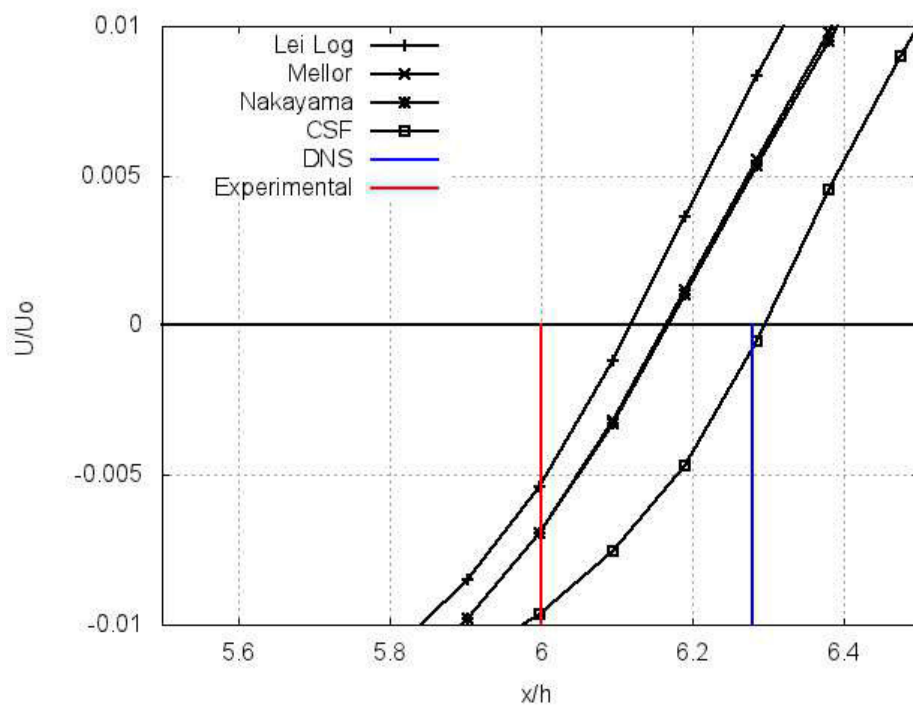


Figura 4.19: Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede, experimental e modelo DNS vistos em aproximação

## 4.2 O canal divergente de Driver e Seigmiller (1985)

Para a determinação das condições de contorno ideais para a simulação do escoamento turbulento pelo canal divergente, realizou-se simulações em um duto para que pudesse se observar o desenvolvimento do perfil de velocidades. Iniciou-se com um perfil constante e simulou-se uma extensão de 110h, onde cada simulação realizada tinha o comprimento de 10h. Logo, foram realizadas 11 simulações. A cada convergência obtida, o perfil era inserido como condição de entrada na próxima simulação. Esse procedimento foi realizado tanto para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  quanto para o modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência. No caso do modelo  $\kappa - \varepsilon$ , escolheu-se a lei logarítmica clássica para cálculo do campo de velocidades na parede, mas por não ser um escoamento recirculante, é esperado que todas as leis obtenham o mesmo resultado.

Os perfis de velocidades finais obtidos podem ser observados na Figura (4.20). Estes resultados foram utilizados como perfis de entrada do escoamento no canal divergente.

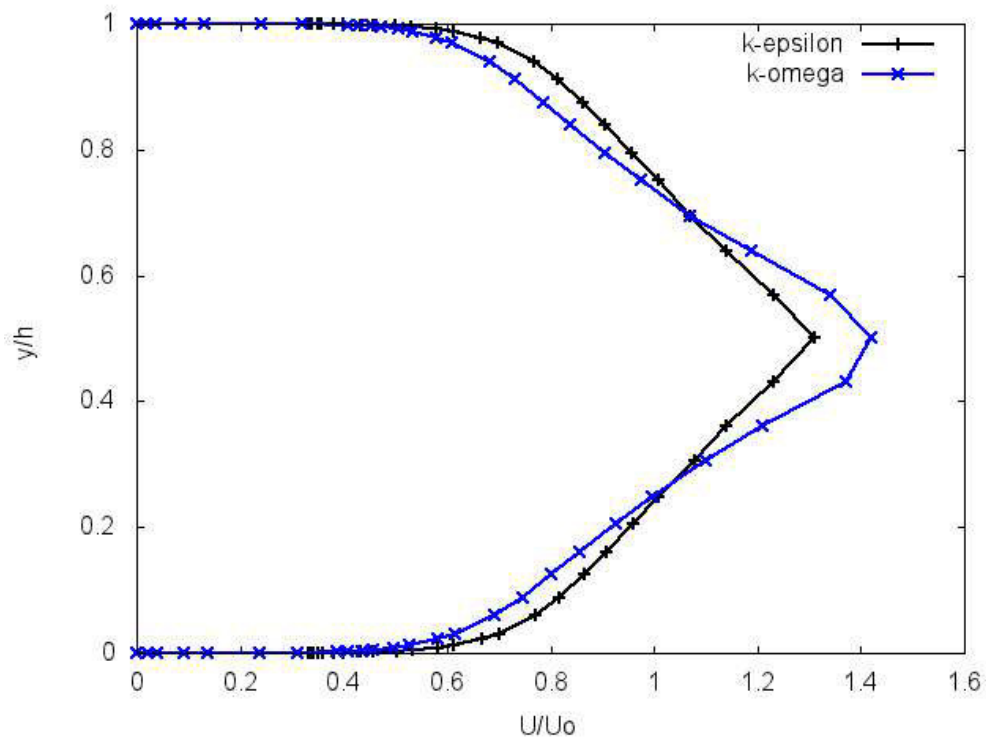
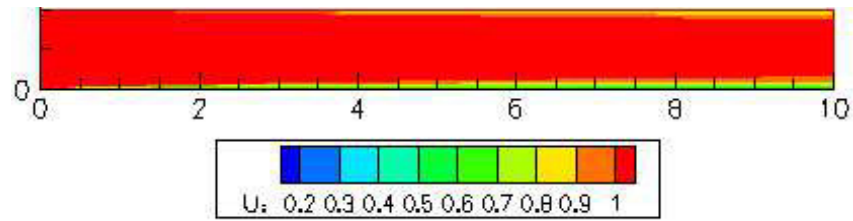


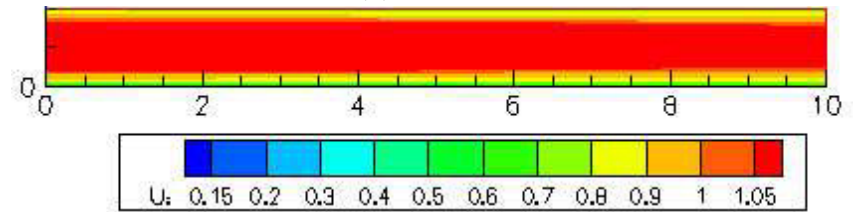
Figura 4.20: Perfis de velocidades a serem utilizados como condição de contorno na entrada do domínio do canal divergente de Driver e Seigmiller (1985)

As simulações do canal divergente foram realizadas com condições de contorno de perfil de  $u$ ,  $v$ ,  $\kappa$  e  $\omega$  ou  $\varepsilon$  já determinadas. A velocidade de referência utilizada foi de 0,56134 m/s e o comprimento de referência utilizado foi unitário, resultando em número

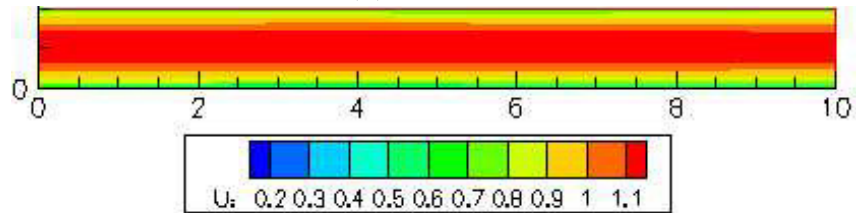
de Reynolds de 36400.



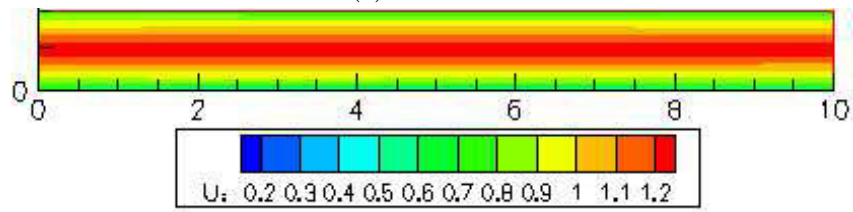
(a) 0h a 10h



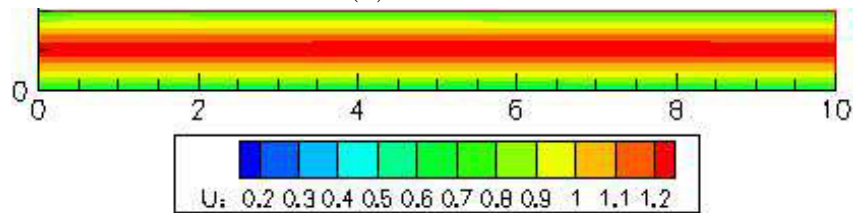
(b) 20h a 30h



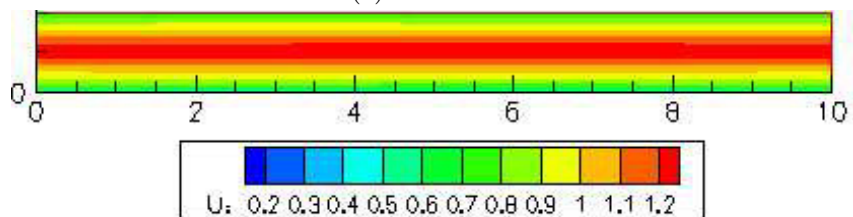
(c) 40h a 50h



(d) 60h a 70h



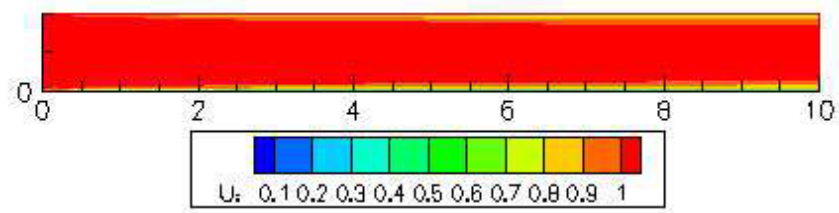
(e) 80h a 90h



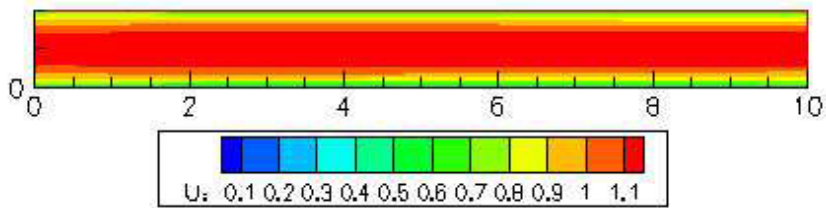
(f) 100h a 110h

Figura 4.21: Campos de velocidade desenvolvidos no duto de entrada para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência

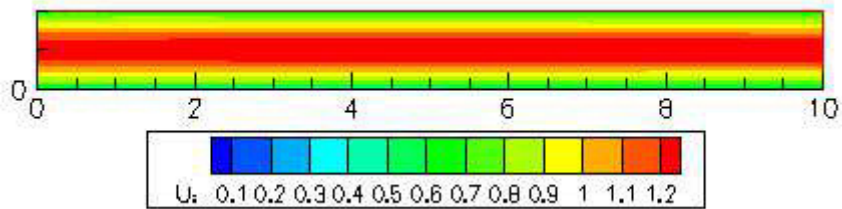




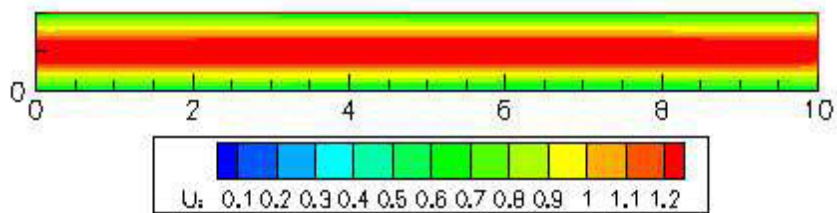
(a) 0h a 10h



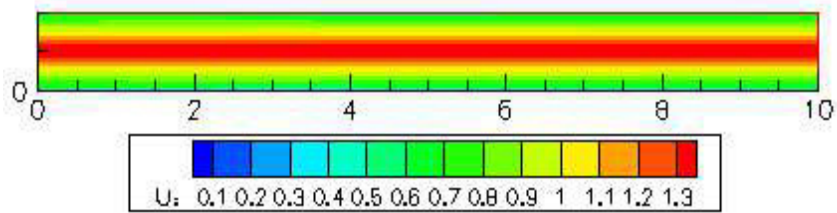
(b) 20h a 30h



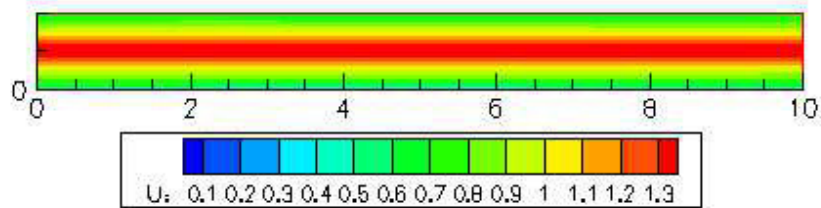
(c) 40h a 50h



(d) 60h a 70h



(e) 80h a 90h



(f) 100h a 110h

Figura 4.22: Campos de velocidade desenvolvidos no duto de entrada para o modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência

É possível observar, na Figura (4.21), o desenvolvimento do campo de velocidades para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  e, na Figura (4.22), o desenvolvimento do campo de velocidades para o modelo  $\kappa - \omega$ . Os campos de velocidades representados compreendem as regiões de 0h a 10h, 20h a 30h, 40h a 50h, 60h a 70h, 80h a 90h e 100h a 110h. Portanto, foram plotados seis campos de velocidades para que fosse possível observar o comportamento do perfil e seu desenvolvimento ao longo do tempo.

#### 4.2.1 Critérios de Convergência

Assim como foi feito para o degrau de Le et. al (1996), foram plotados dados de 5000 iterações, para determinar a convergência total das simulações. Considerando o passo de tempo adotado e a velocidade média do escoamento, as 5000 iterações correspondem a um comprimento de 1 vez o domínio total do cálculo. É possível observar que os perfis não apresentam variações, apontando para a convergência dos modelos  $\kappa - \varepsilon$  e  $\kappa - \omega$ .

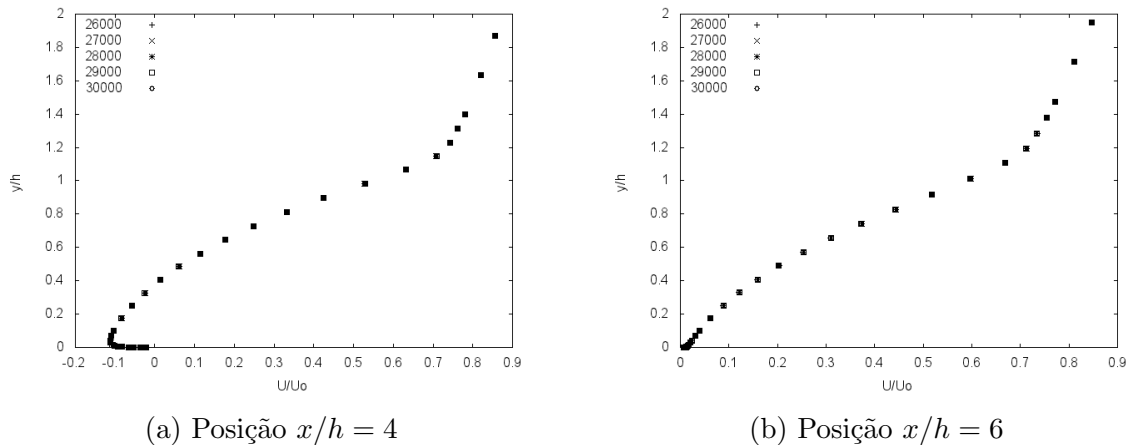


Figura 4.23: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logarítmica clássica

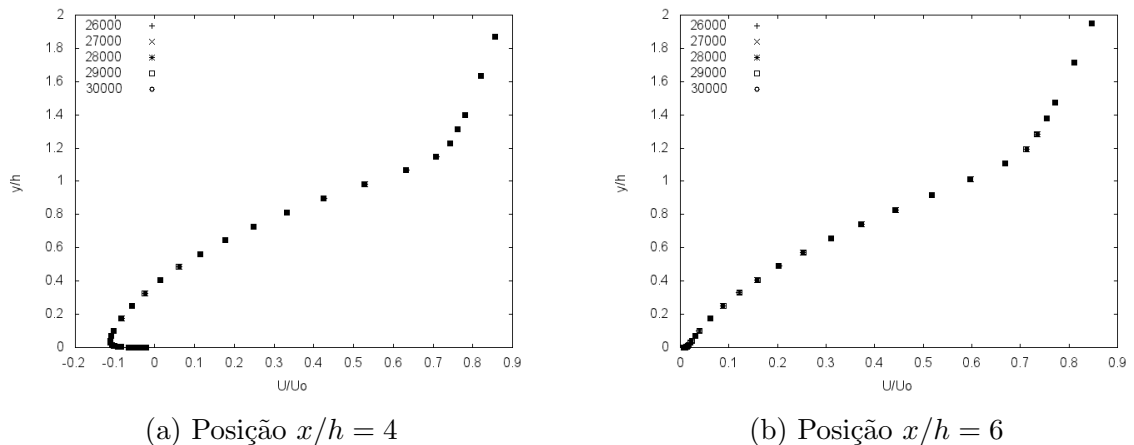
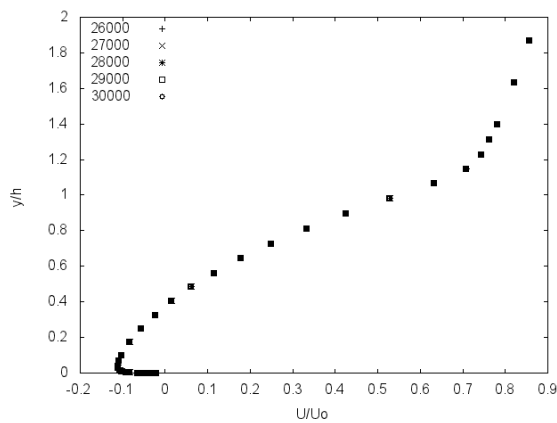
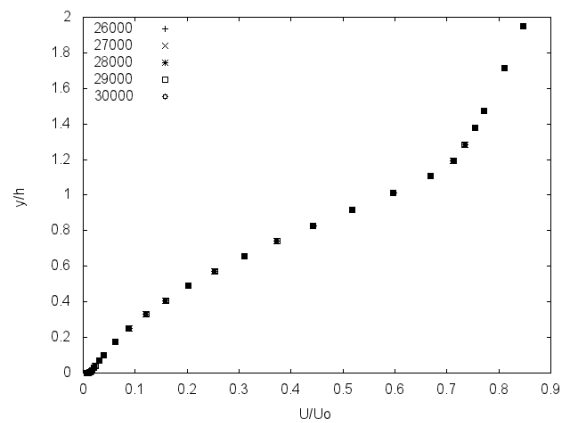


Figura 4.24: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966)

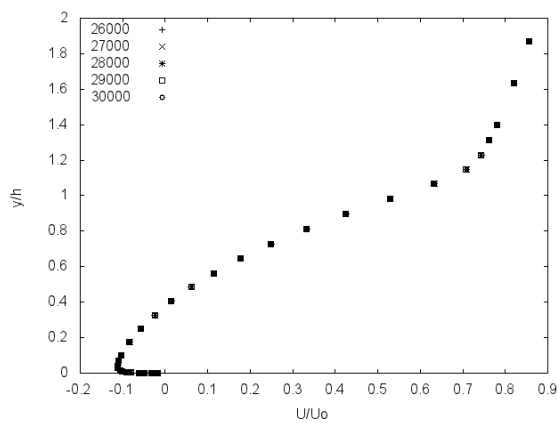


(a) Posição  $x/h = 4$

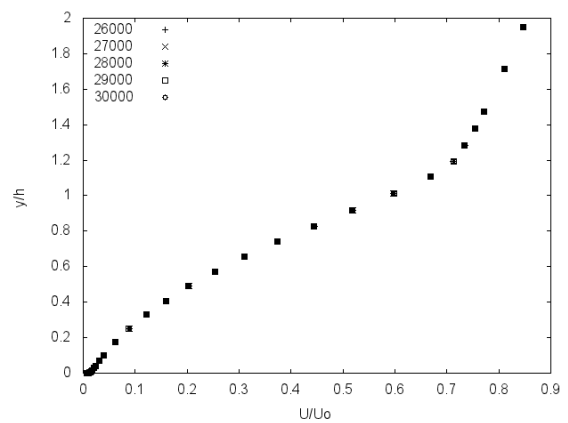


(b) Posição  $x/h = 6$

Figura 4.25: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984)

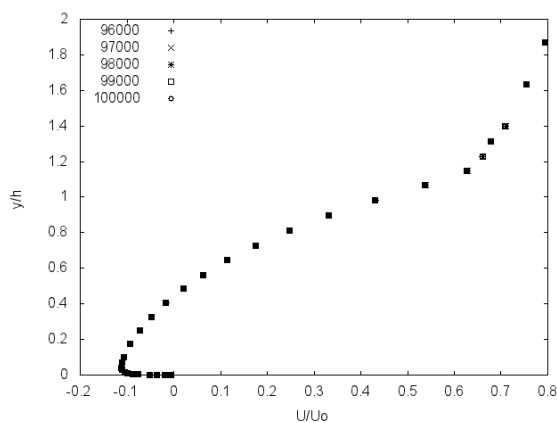


(a) Posição  $x/h = 4$

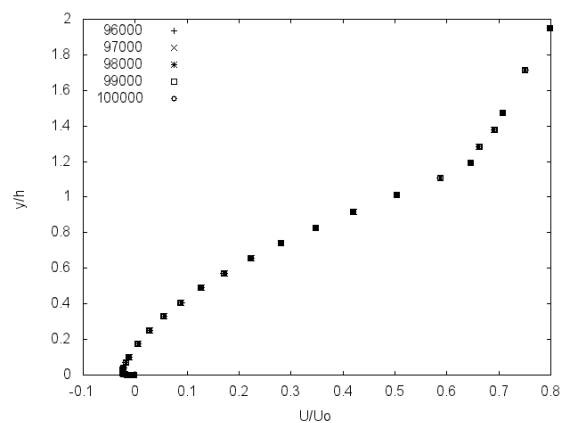


(b) Posição  $x/h = 6$

Figura 4.26: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998)



(a) Posição  $x/h = 4$



(b) Posição  $x/h = 6$

Figura 4.27: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações do modelo  $\kappa - \omega$

Os resultados obtidos para o valor máximo de  $y^+$  para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência, apresentados nas Figuras (4.28), variam entre 1 e 5, indicando que os cálculos de velocidade feitos pelas leis de parede correspondem a fronteira do domínio de cálculo localizada na subcamada laminar. No caso do  $y^+$  do modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência, apresentado na Figura (4.34), o valor máximo obtido foi menor que 1. Assim como apresentado no caso-teste do degrau de Le, Moin e Kim (1996), este resultado é coerente com a existência de descolamento da camada limite turbulenta.

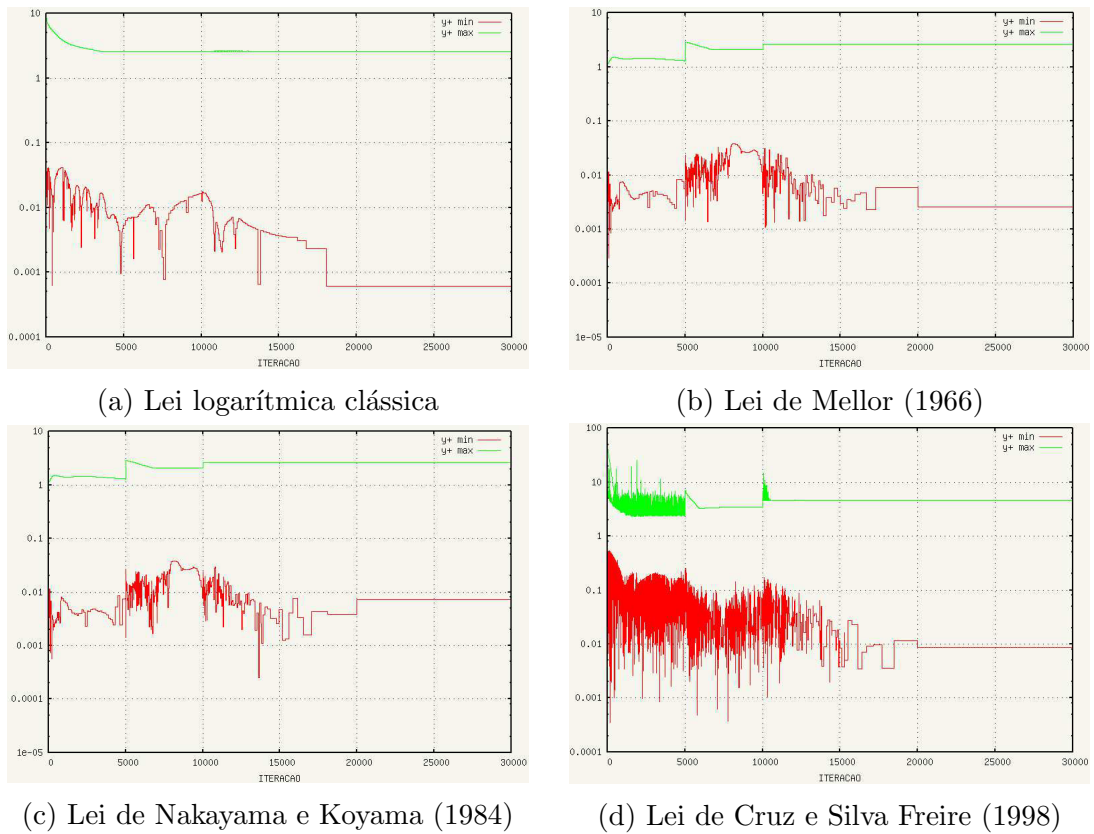


Figura 4.28: Valores de  $y^+$  para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência

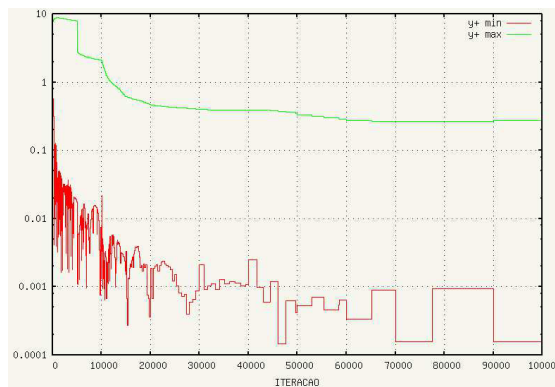
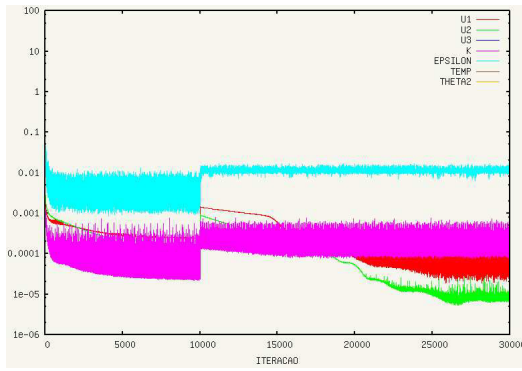
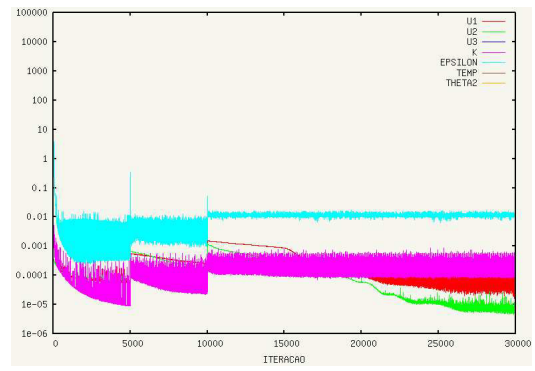


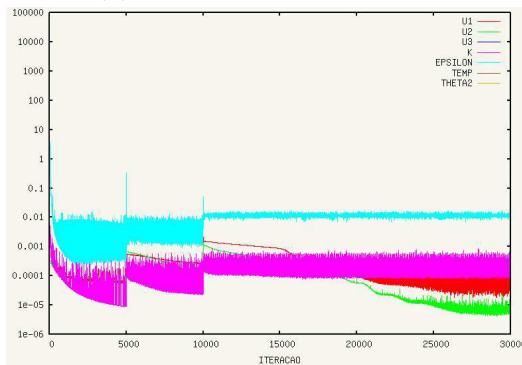
Figura 4.29: Valores de  $y^+$  para o modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência



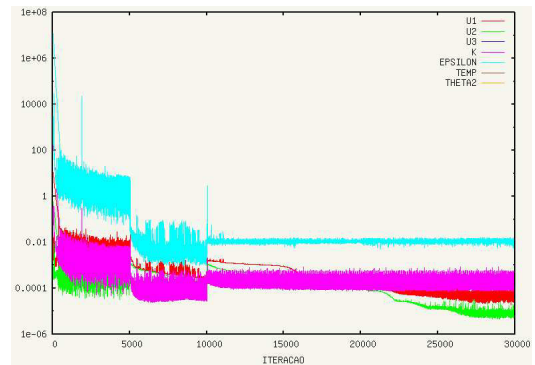
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

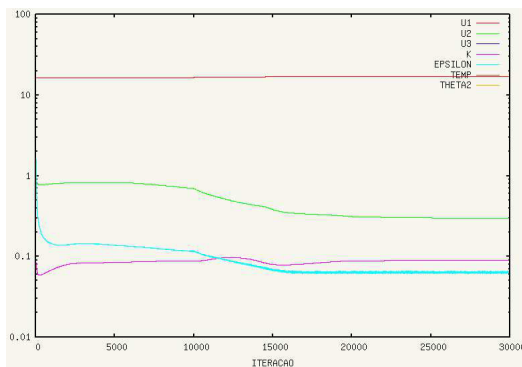


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

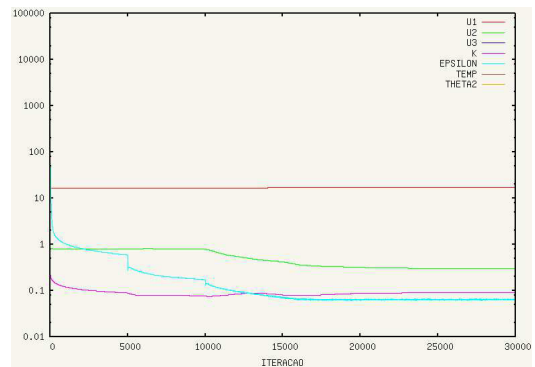


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

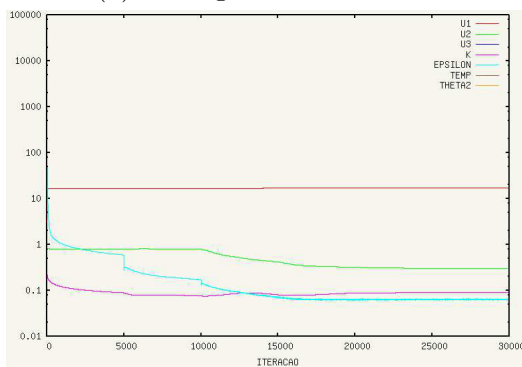
Figura 4.30: Valores de erro para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência



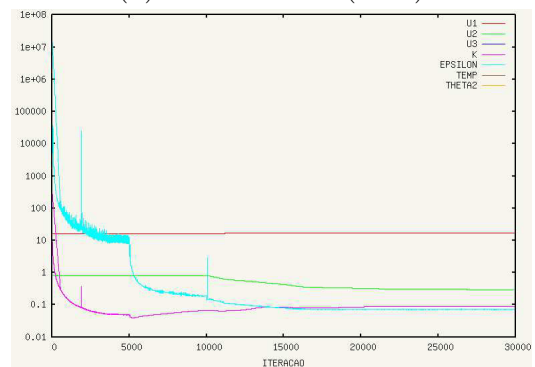
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.31: Valores de norma para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência

Assim como apresentado anteriormente, as variações no parâmetro  $y^+$  correspondem às alterações da distância entre a parede física e o início da malha de cálculo, impostas para evitar a divergência numérica da simulação.

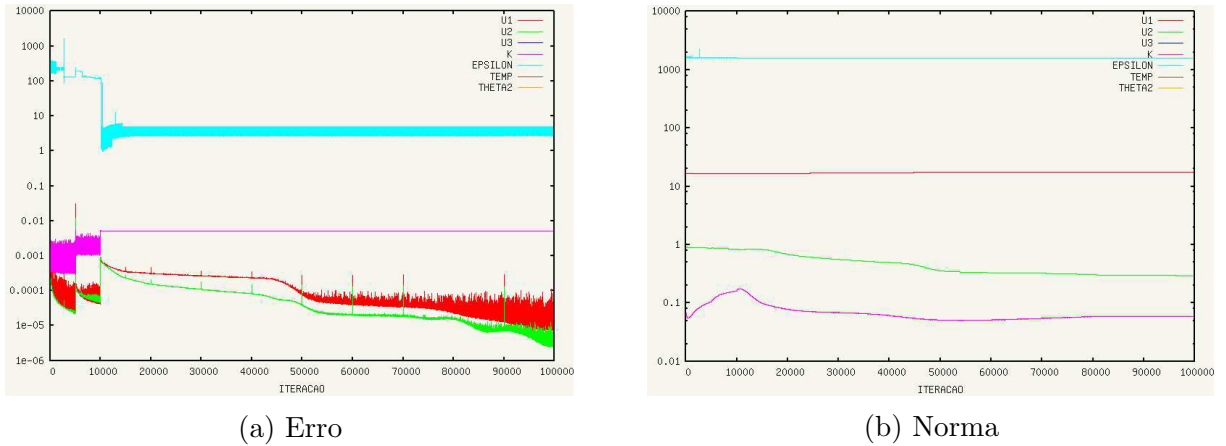


Figura 4.32: Valores de erro e norma para o modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência

#### 4.2.2 Critérios de tempo

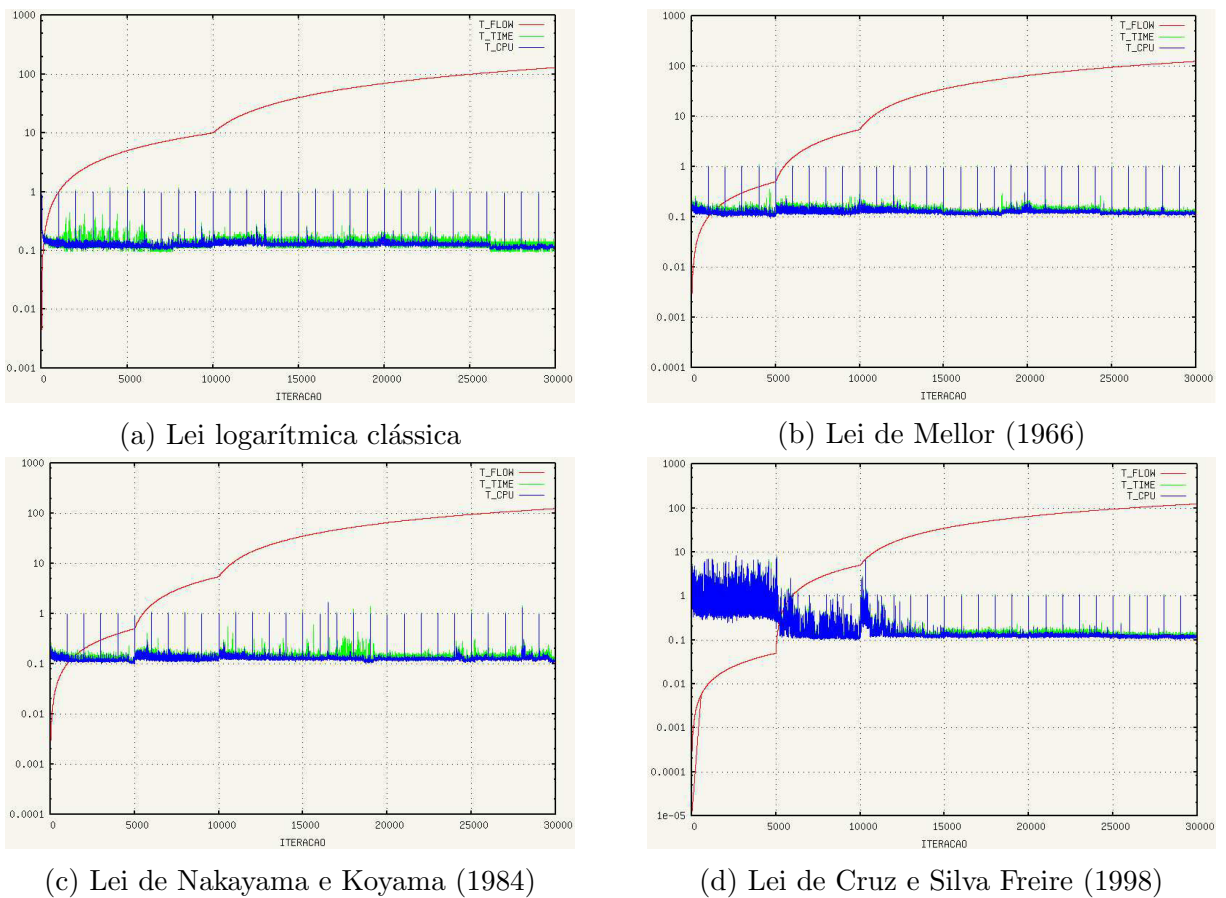


Figura 4.33: Valores de tempo para o modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência

Novamente, assim como para o caso-teste anterior, são apresentadas os três valores diferentes para a passagem do tempo, representando o tempo total de escoamento simulado nas linhas vermelhas, o tempo de duração do cálculo para cada instante simulado nas linhas verdes e o tempo de CPU necessário para cada iteração nas linhas azuis. Como apresentado anteriormente, as variações nas linhas vermelhas representam variações nos passos de tempo, alterados buscando a convergência das simulações.

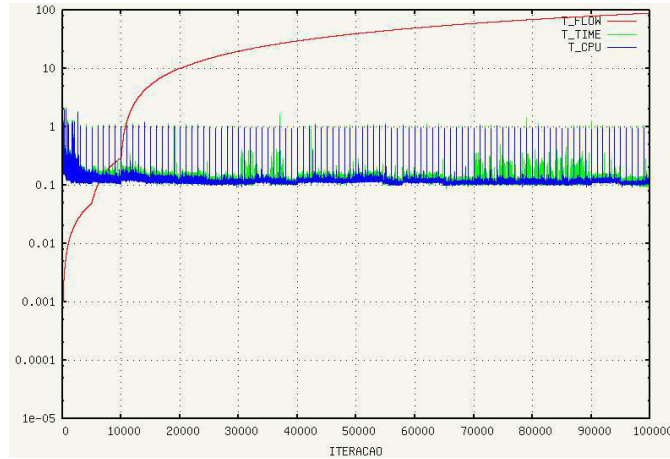


Figura 4.34: Valores de tempo para o modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência

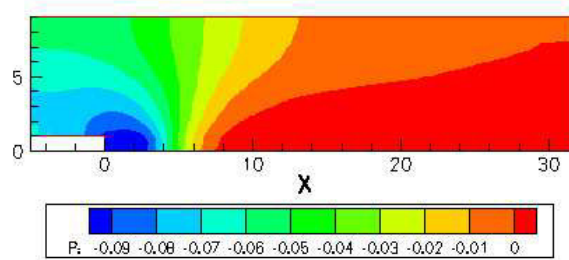
### 4.2.3 Resultados dos campos

São apresentados nesta subseção os resultados qualitativos obtidos com os modelos  $\kappa - \varepsilon$  e  $\kappa - \omega$  de turbulência, ainda seguindo a ordem de apresentação das leis de parede estabelecida anteriormente, adicionando ao final os resultados do modelo  $\kappa - \omega$ . Novamente, são apresentados resultados relativos aos campos de velocidade, pressão, energia cinética de turbulência e dissipação de energia cinética de turbulência, para o modelo  $\kappa - \varepsilon$ , ou dissipação específica, para o modelo  $\kappa - \omega$ . Como no caso-teste anterior, os resultados apresentados são similares, apresentando diferenças sensíveis apenas durante o pseudo-transiente numérico.

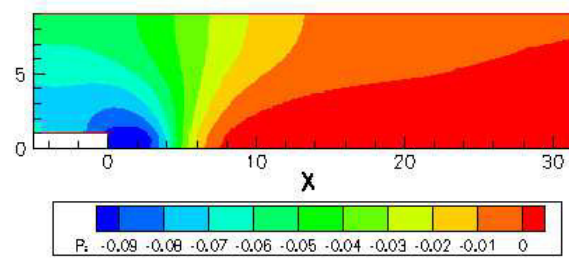
A Figura (4.35) corresponde aos campos de pressão, apresentando variação contínua do campo, com região de maior depressão na bolha de recirculação, onde existe um gradiente de pressão adverso que irá provocar o descolamento da camada limite. Nota-se que os cinco campos são similares, com o campo do modelo  $\kappa - \omega$  apresentando uma pequena diferença, com uma região de depressão um pouco maior do que as da quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$ .

Nos campos de velocidade apresentados na Figura (4.36), pode ser observada a dis-

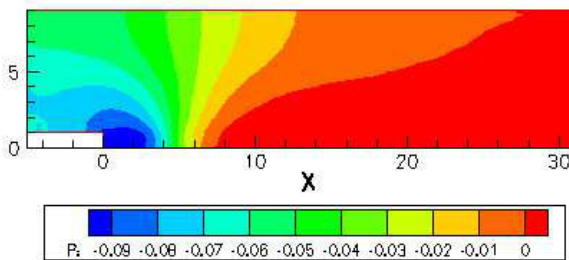
crepância dos comprimentos da bolha de recirculação, assim como ocorreu no caso-teste do degrau de Le, Moin e Kim (1996).



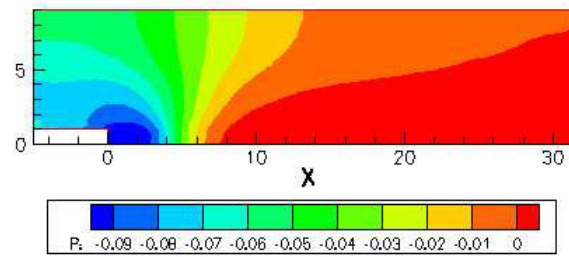
(a) Lei logarítmica clássica



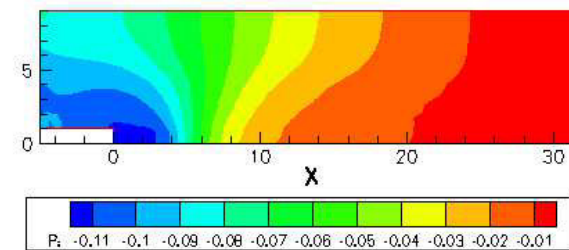
(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



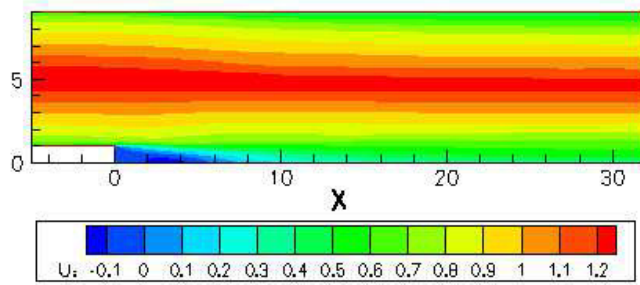
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)



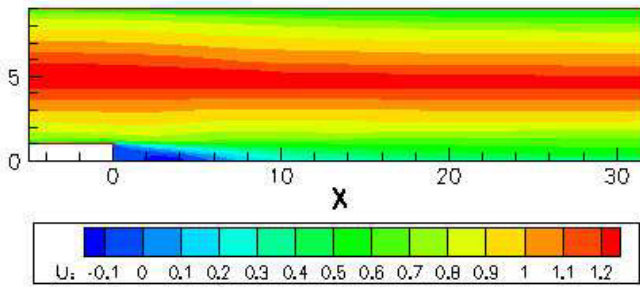
(e) Modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência

Figura 4.35: Campos de pressão para as quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e para o modelo  $\kappa - \omega$

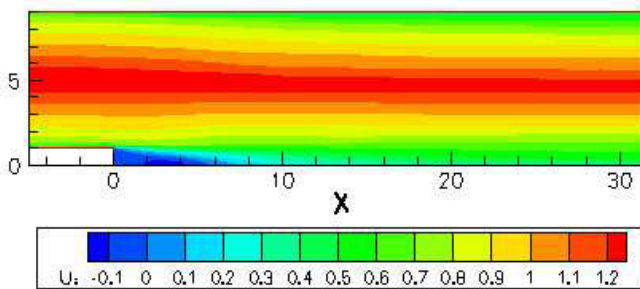




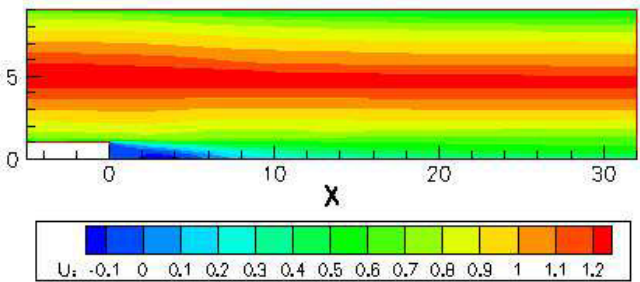
(a) Lei logarítmica clássica



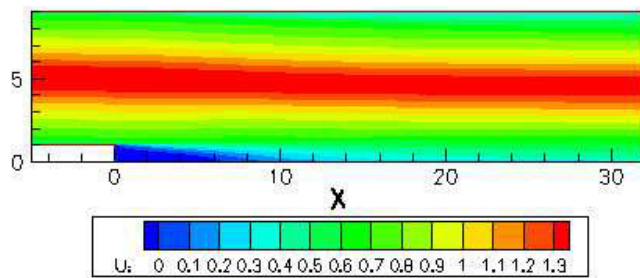
(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

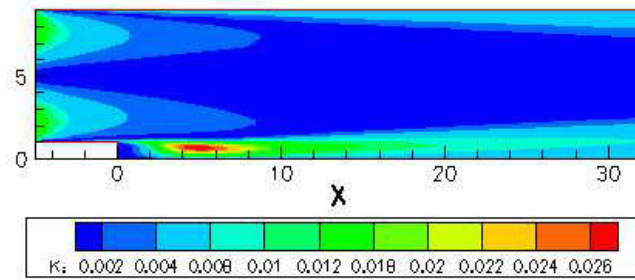


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

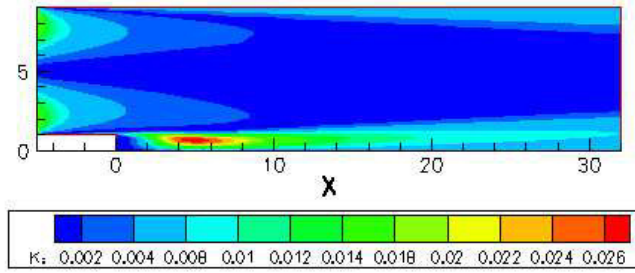


(e) Modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência

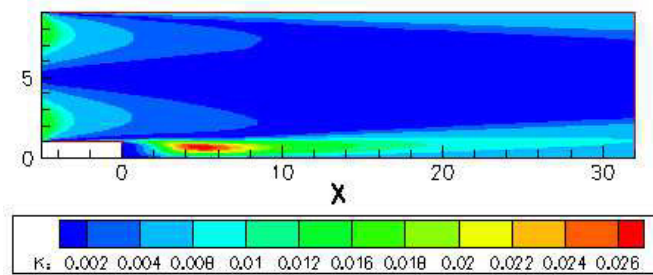
Figura 4.36: Campos de velocidade para as quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e para o modelo  $\kappa - \omega$



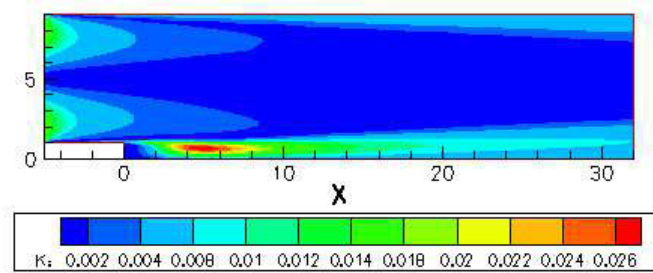
(a) Lei logarítmica clássica



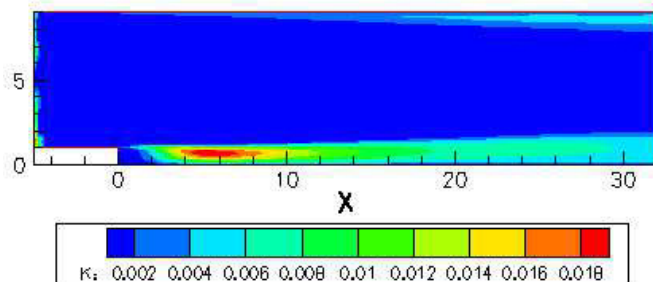
(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



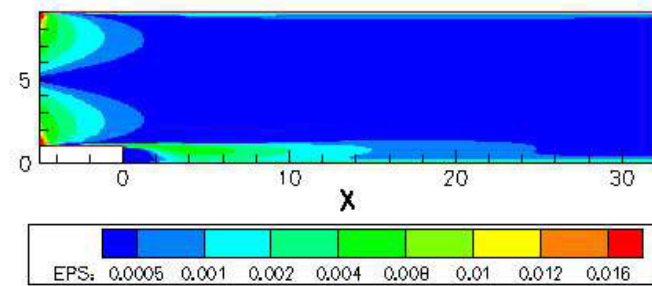
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)



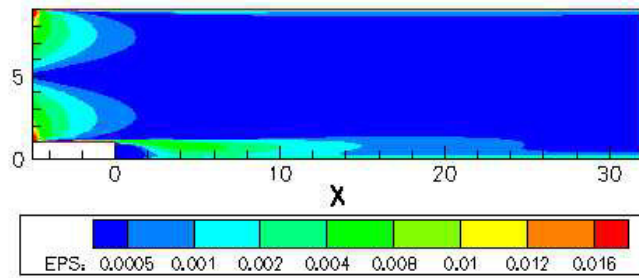
(e) Modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência

Figura 4.37: Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e para o modelo  $\kappa - \omega$

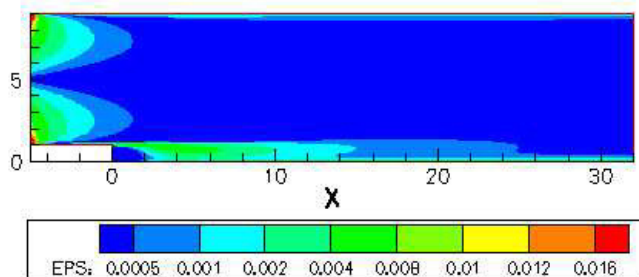
Os campos de energia cinética de turbulência,  $\kappa$ , estão apresentados na Figura (4.37). Nota-se uma diferença entre os campos do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e o campo do modelo  $\kappa - \omega$ , já que no modelo  $\kappa - \varepsilon$  existe um valor mais elevado de energia cinética de turbulência na entrada do domínio, algo não observado no campo do modelo  $\kappa - \omega$ . Ainda assim, para todos os campos, os valores mais elevados de  $\kappa$  estão localizados na região da bolha de recirculação como esperado.



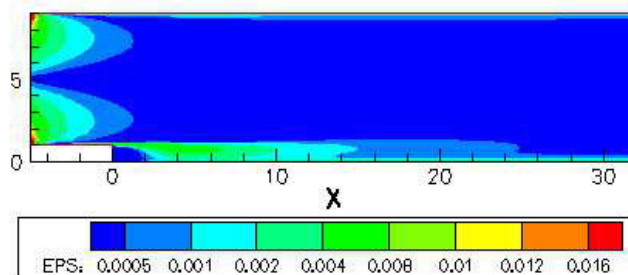
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura 4.38: Campos de taxa de dissipação de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$

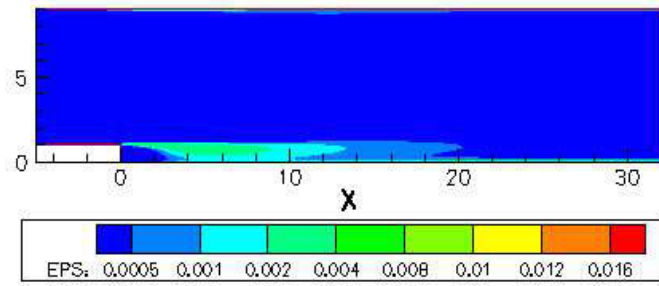


Figura 4.39: Campo de dissipação específica para o modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência

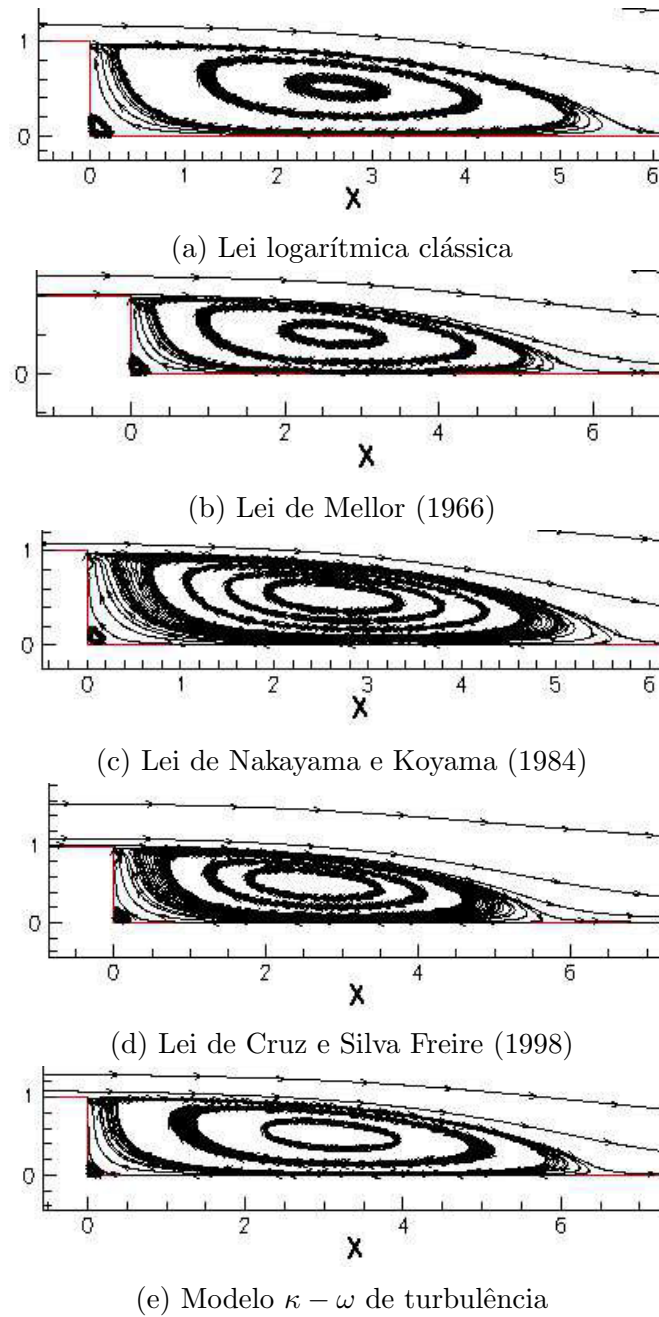


Figura 4.40: Linhas de corrente das quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e do modelo  $\kappa - \omega$

Os campos da taxa de dissipação de turbulência,  $\varepsilon$ , estão apresentados na Figura (4.38) e o campo de dissipação específica,  $\omega$ , está representado na Figura (4.39).

Por fim, é possível observar na Figura (4.40) as linhas de corrente correspondentes a região de recirculação. A diferença do tamanho das bolhas de recirculação para as quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e para o modelo  $\kappa - \omega$  é nítida. Além disso, é possível observar a segunda bolha de recirculação na base do degrau, assim como no caso-teste anterior.

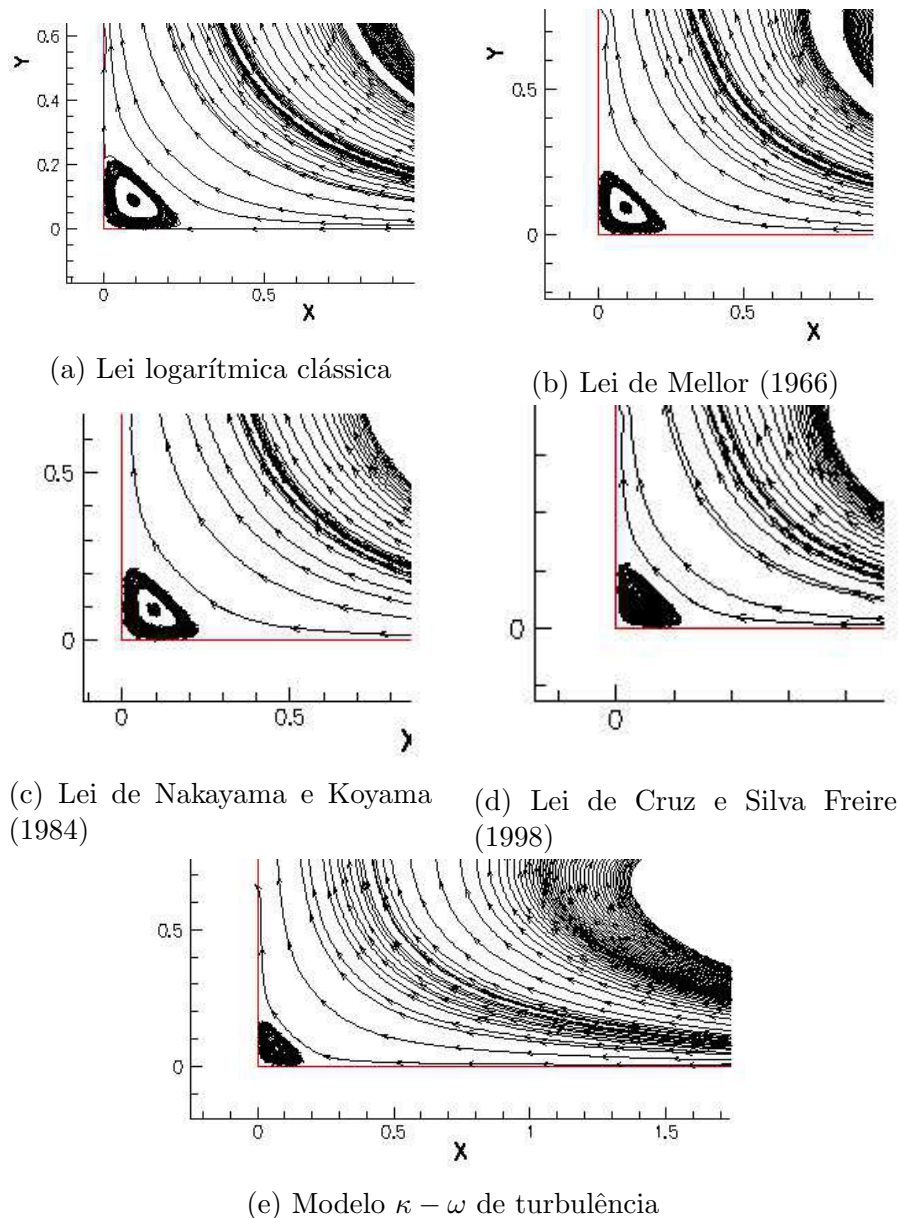


Figura 4.41: Bolha secundária em ampliação na região do degrau para as quatro leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e do modelo  $\kappa - \omega$

A Figura (4.41) mostra, em detalhe, a estrutura da bolha de recirculação secundária

que se forma junto à base do degrau. Dentre os todos os resultados obtidos, a bolha secundária modelada com lei de parede logarítmica clássica é a que apresenta maior tamanho. Por outro lado, a menor estrutura secundária resulta do emprego da lei de Cruz e Silva Freire (1998). A bolha secundária do modelo  $\kappa - \omega$  também se apresentou bem reduzida, sendo a segunda menor estrutura observada dentre as cinco obtidas.

#### 4.2.4 Resultados quantitativos

Os resultados quantitativos mostrados são os perfis de velocidade obtidos com cada uma das leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  e com o modelo  $\kappa - \omega$  de turbulência e os comprimentos da região de recirculação,  $X_r$ . Os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados experimentais de Driver e Seegmiller (1985).

Os resultados dos perfis de velocidade cobrem a região não perturbada, localizada a montante do degrau, a bolha de recirculação e a região de reestruturação de camada limite turbulenta. A bolha de recirculação se inicia no ponto  $x/h = 0$  e tem seu fim, segundo dados experimentais de Driver e Seegmiller (1985), no ponto  $x/h = 6,26$ .

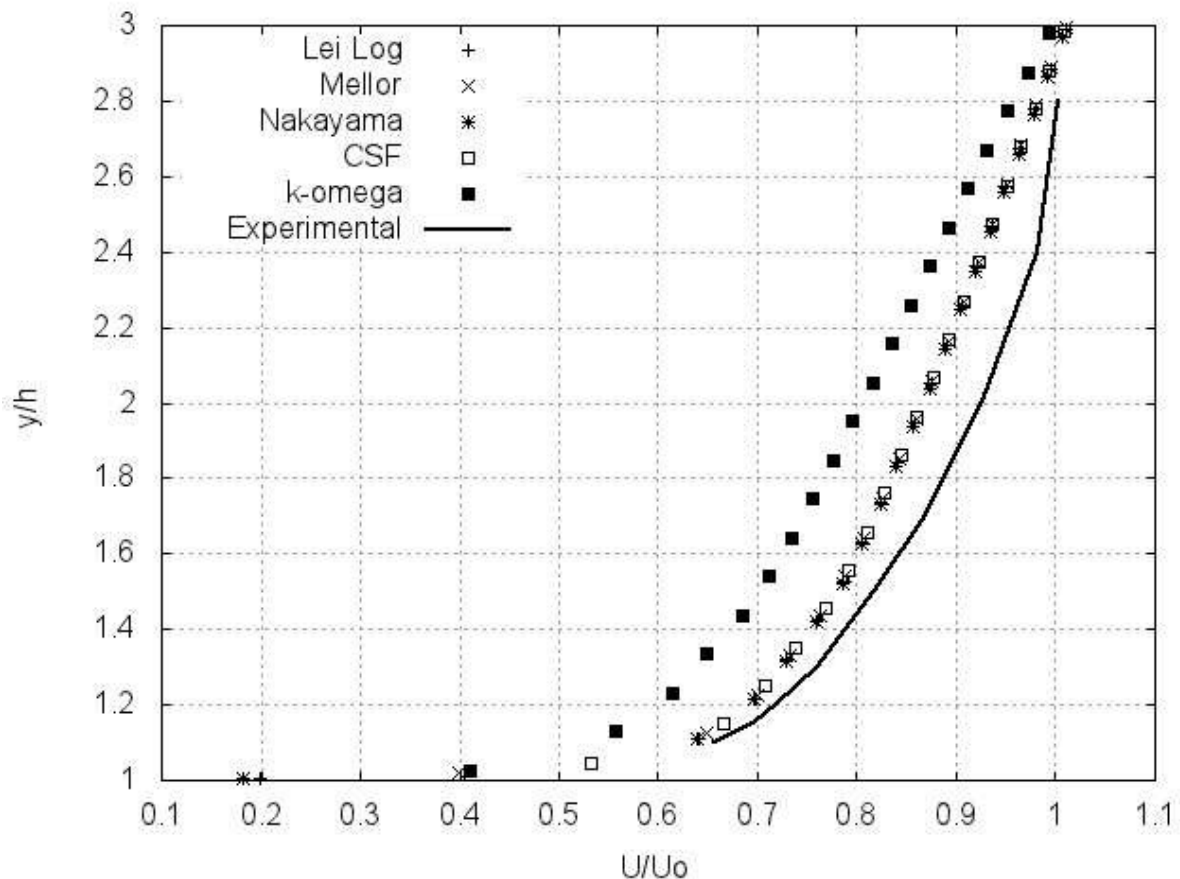


Figura 4.42: Perfis de velocidade em  $x/h = -4$

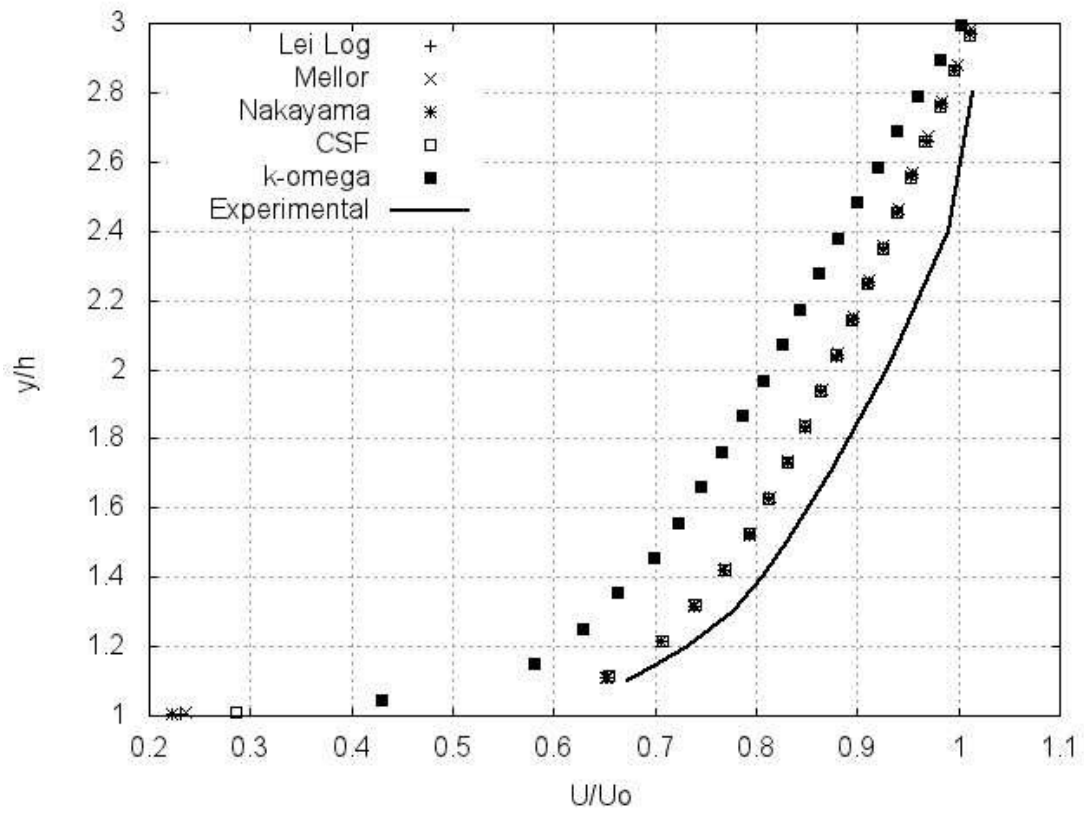


Figura 4.43: Perfis de velocidade em  $x/h = -2$

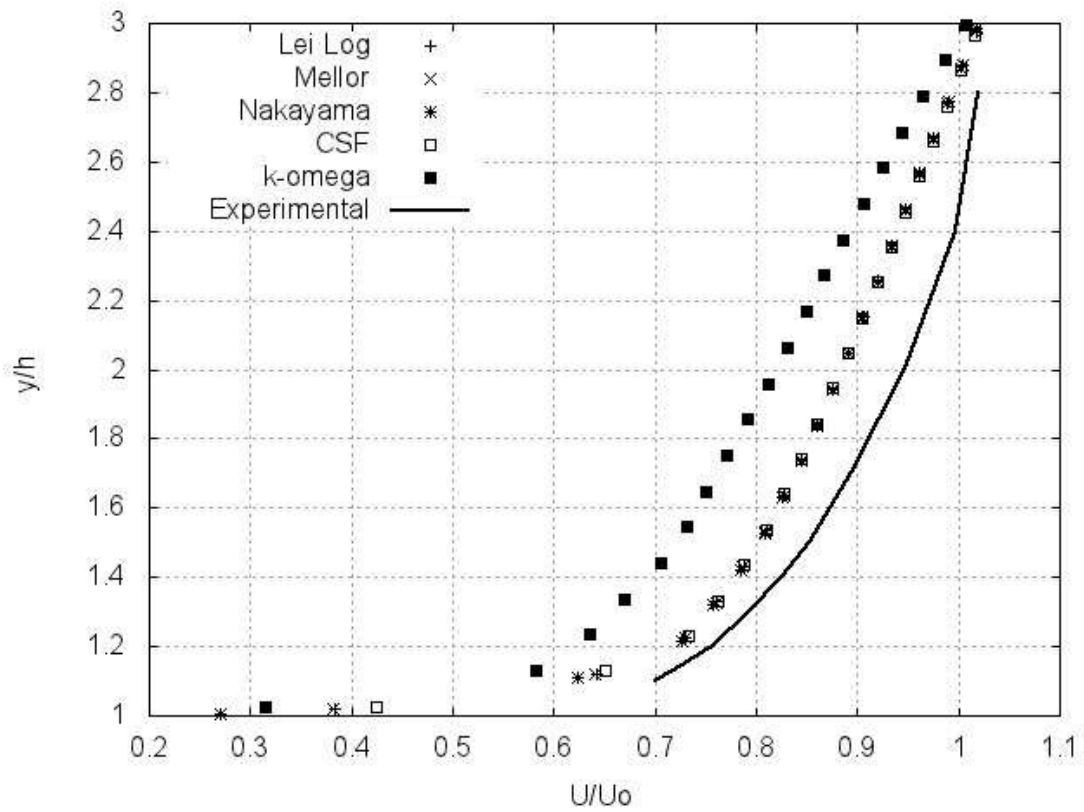


Figura 4.44: Perfis de velocidade em  $x/h = 0$

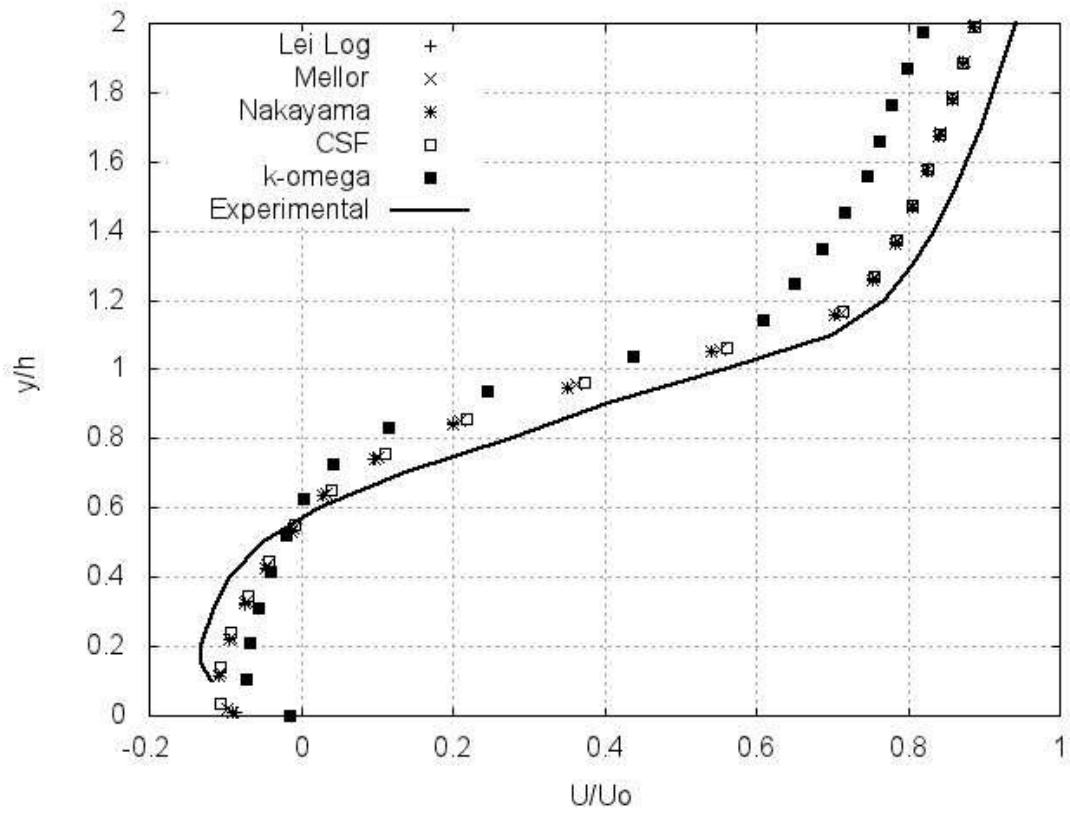


Figura 4.45: Perfis de velocidade em  $x/h = 2$

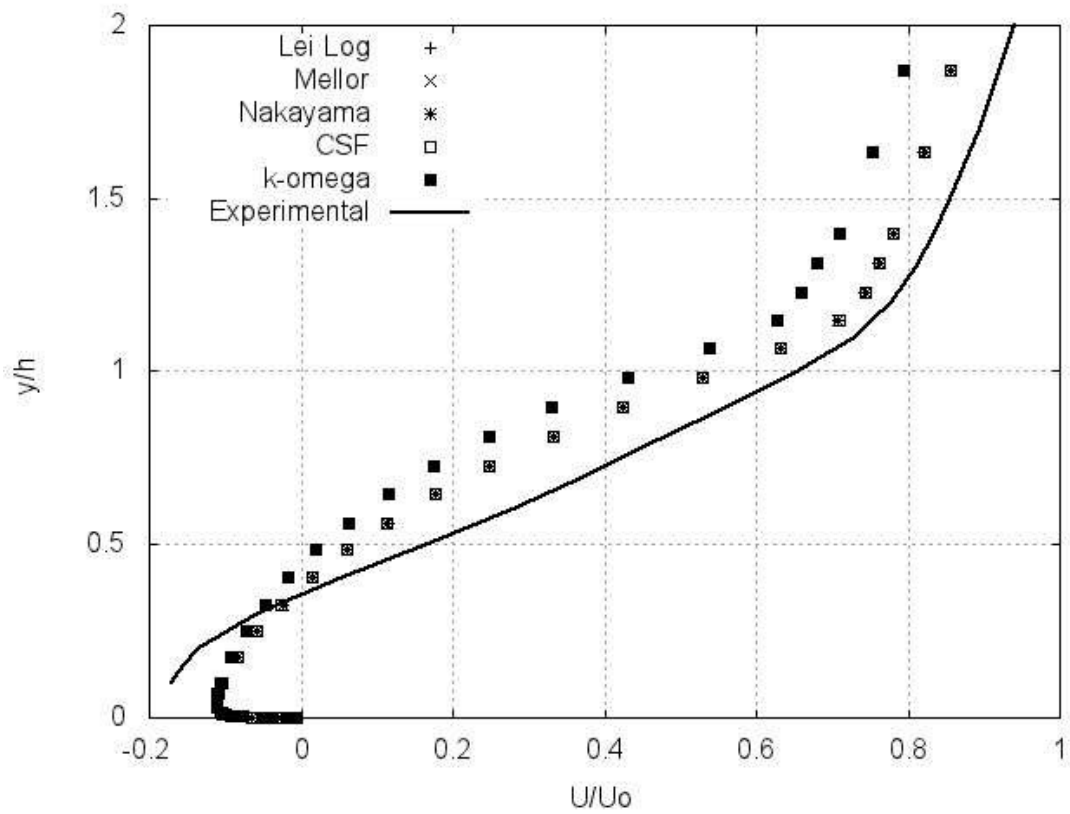


Figura 4.46: Perfis de velocidade em  $x/h = 4$



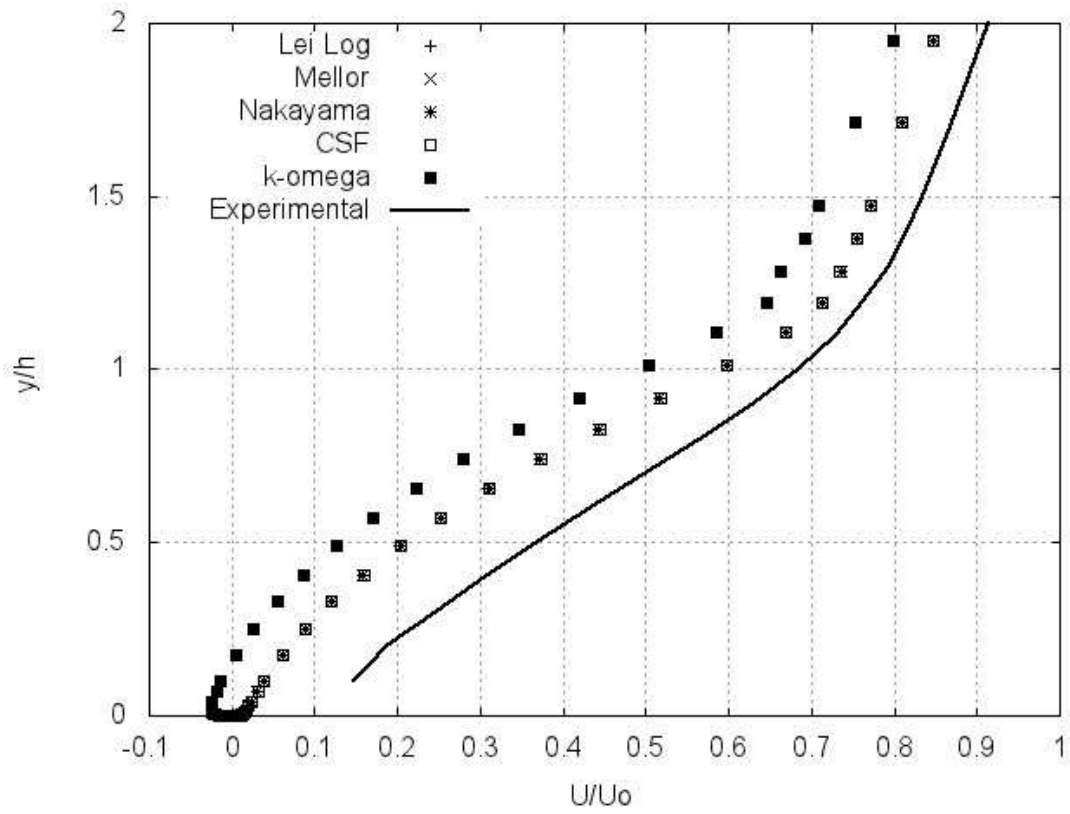


Figura 4.47: Perfis de velocidade em  $x/h = 6$

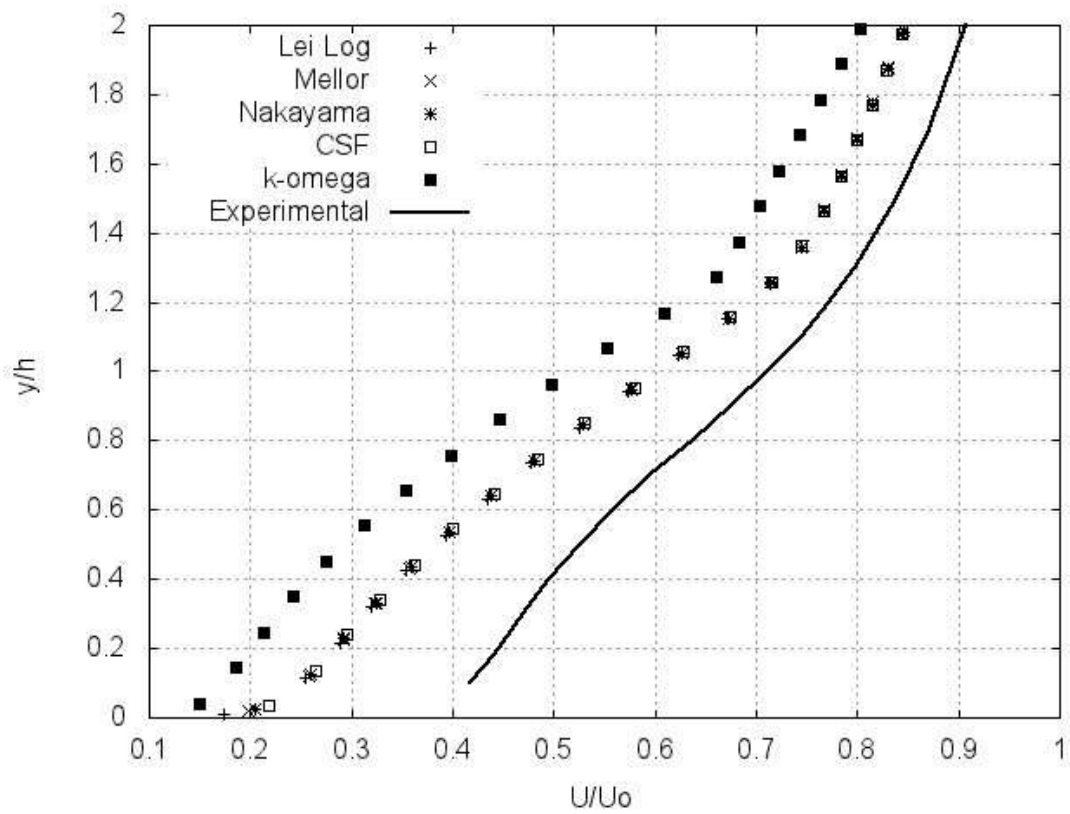


Figura 4.48: Perfis de velocidade em  $x/h = 10$

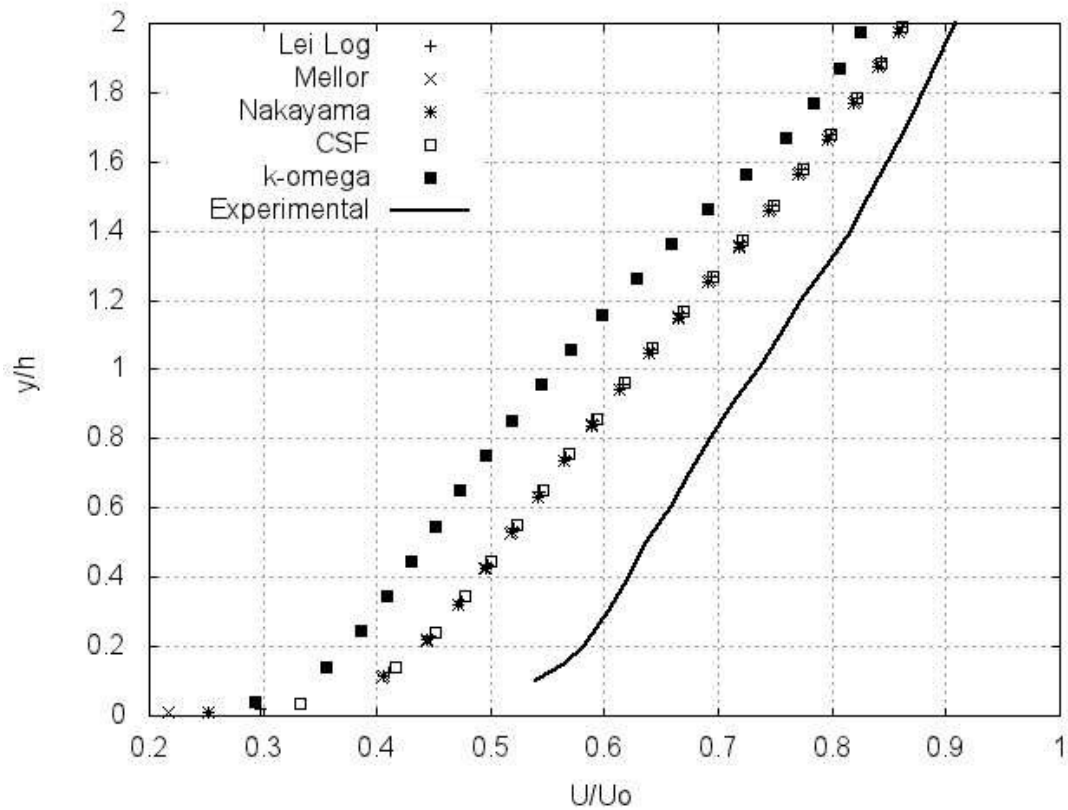


Figura 4.49: Perfis de velocidade em  $x/h = 20$

É sensível a diferença entre os dois modelos de turbulência. As curvas do modelo  $\kappa - \omega$ , apesar de apresentarem o mesmo desenho das curvas do modelo  $\kappa - \varepsilon$ , pode ser notada diferença considerável dos dados. Como foram inseridos perfis diferentes para cada um dos modelos, já que foram os perfis desenvolvidos nos dutos anteriores ao canal divergente, essa pode ser a explicação para essa diferença. Nota-se também que diferenças entre os resultados das leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  são imperceptíveis. Na região do escoamento a montante do degrau, as quatro leis de parede apresentam resultados próximos aos experimentais, apresentando mesmo desenho de curva. Já o modelo  $\kappa - \omega$ , apesar de também apresentar o mesmo desenho de curva, apresenta resultados um pouco mais discrepantes dos experimentais, sendo observado uma discordância da ordem de 10

Na região da bolha de recirculação, ambos os modelos apresentam dados satisfatórios, próximos aos experimentais, mas ainda apontando para uma leve vantagem do modelo  $\kappa - \varepsilon$ . Na região de recolamento de camada limite, em  $x/h = 6$ , ocorre o mesmo problema observado no caso-teste anterior. A camada limite é destruída na região de recirculação e os modelos de turbulência têm dificuldade de modelar a região de reestruturação, por se basearem na auto-similaridade dos perfis de velocidade na camada limite. Porém, diferen-

temente do caso anterior, a reestruturação da camada limite não aproxima os resultados numéricos dos experimentais. Ambos os modelos de turbulência apresentam uma demora maior para a recuperação, quando comparados aos dados experimentais.

Para caracterizar de forma precisa o comprimento  $X_r$  da região de recirculação, novamente mostra-se a variação do sentido do escoamento na região de proximidade imediata da parede inferior do degrau. Valores positivos indicam escoamento externo à bolha e valores negativos representam o contra-fluxo no interior da bolha de recirculação. Dessa forma, determina-se o ponto de recolamento de camada limite como o ponto onde a velocidade deixa de ser negativa e, exatamente neste ponto, é nula.

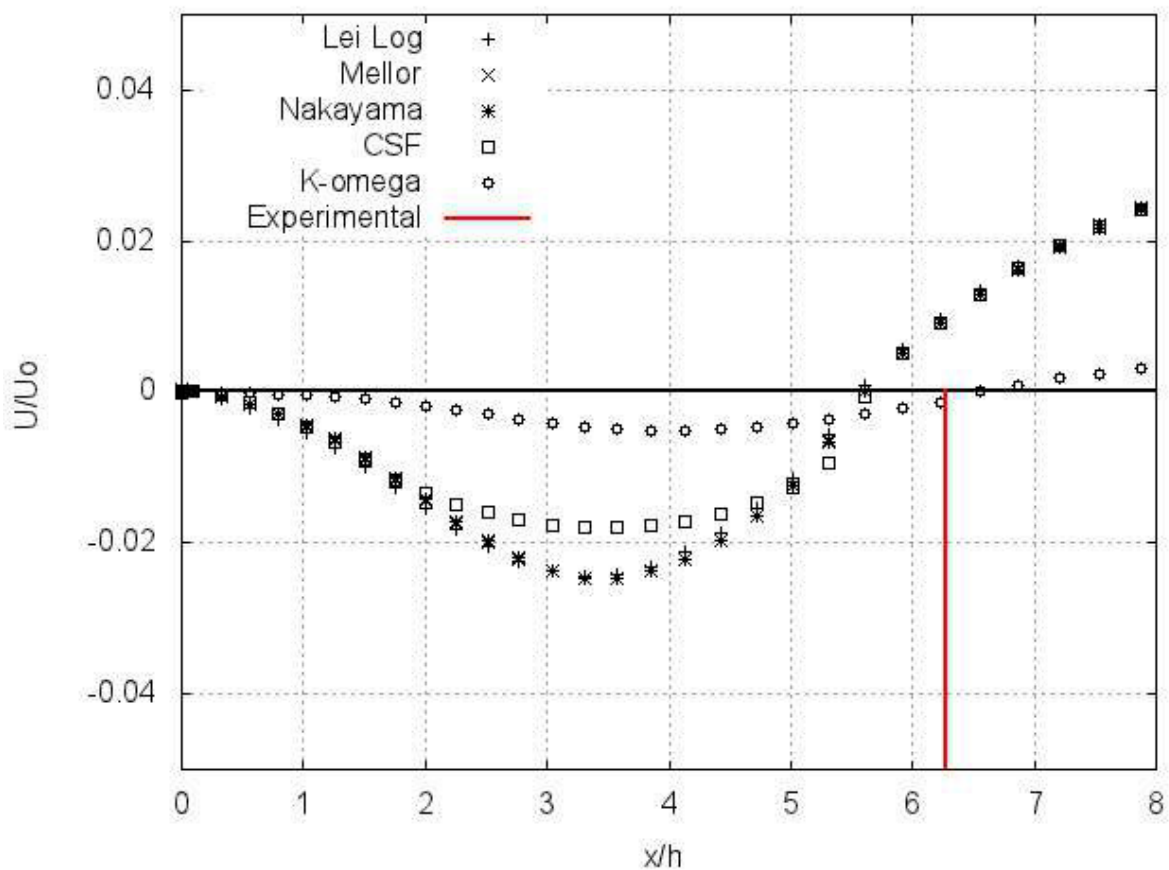


Figura 4.50: Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$ , do modelo  $\kappa - \omega$  e experimental

Nas Figuras (4.50) e (4.51), a linha em vermelho se refere ao ponto de recolamento obtido experimentalmente. A região foi ampliada na Figura (4.51) para melhor visualização.

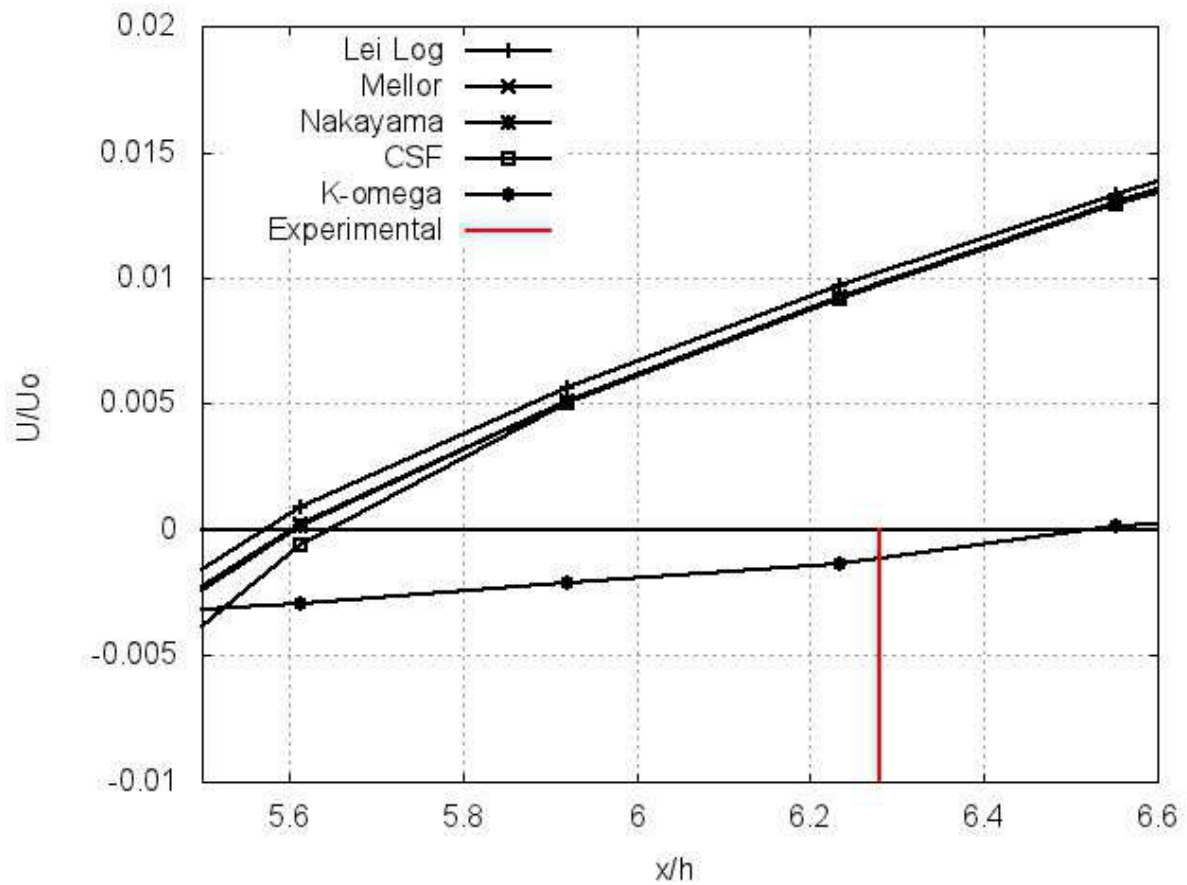


Figura 4.51: Pontos de recolamento de camada limite das leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$ , do modelo  $\kappa - \omega$  e experimental vistos em aproximação

Os valores do ponto de recolamento da camada limite são apresentados na Tabela (4.2):

Tabela 4.2: Pontos de recolamento de camada limite

Leis de parede	$X_r$
Lei logarítmica clássica	$X_r = 5,58$
Lei de Mellor (1966)	$X_r = 5,60$
Lei de Nakayama e Koyama (1984)	$X_r = 5,60$
Lei de Cruz e Silva Freire (1998)	$X_r = 5,63$
Modelo $\kappa - \omega$	$X_r = 6,50$
Experimental por Driver e Seegmiller (1985)	$X_r = 6,28$

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho consistiu na simulação de dois casos-teste clássicos para o estudo de turbulência parietal. Primeiramente, utilizou-se o modelo  $\kappa - \varepsilon$  de turbulência para simular um escoamento em um domínio com um degrau não aquecido, que provoca descolamento de camada limite por inércia e, posteriormente, recolamento. Para o primeiro caso-teste, foi utilizado o modelo de turbulência com o auxílio de leis de parede para cálculos na região interna da camada limite turbulenta. Foram utilizadas as leis de parede logarítmica clássica, Mellor (1966), Nakayama e Koyama (1984) e Cruz e Silva Freire (1998).

Através da análise de convergência foi possível determinar que os “passos de tempo” são fundamentais, já que, se a simulação for iniciada com valores muito elevados de passos de tempo, o procedimento computacional apresenta grande instabilidade numérica e não é possível o cálculo. É fortemente recomendado que se inicie as simulações com valores pequenos de passos de tempo, até que o pseudo-transiente se aproxime da convergência, e ir gradativamente aumentando esses valores. O outro parâmetro fundamental para a convergência, a “distância da parede”, têm relação direta com o valor de  $y^+$ . Quanto maior a distância da parede, maior o valor desse parâmetro. Para escoamentos recirculantes simulados com o modelo  $\kappa - \varepsilon$ , recomenda-se que esse parâmetro possua valor entre 1 e 5, compreendendo a região da subcamada laminar.

Foi possível perceber que as condições de contorno devem ser minuciosamente escolhidas, já que a convergência correta do problema depende de vários parâmetros de entrada. As condições que apresentaram melhores resultados foram as de velocidade de referência,  $U_0 = 7,72 \text{ m/s}$ , e comprimento de referência,  $L_0 = 9,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . O perfil turbulento de velocidade na entrada do domínio foi o que apresentou os resultados mais próximos dos experimentais e por simulação DNS. O perfil constante apresentou bons resultados, mas ficou evidente a discrepância na região acima do degrau na análise quantitativa dos resultados.

Um detalhe importante foi a captura da bolha de recirculação secundária que se estabelece na base do degrau. A detecção desta estrutura não é trivial, mas pode ser captada por todas as leis de parede. A lei de Cruz e Silva Freire (1998) foi a que apresentou o maior tamanho desta bolha secundária, enquanto a lei de Mellor (1966) apresentou o menor.

A lei de Cruz e Silva Freire (1998) foi a que apresentou o maior custo computacional dentre as quatro, chegando a demandar de 10 a 100 vezes mais de tempo de CPU para realizar as simulações do que as outras três leis, que apresentam tempos de CPU muito similares, com uma ligeira vantagem da lei logarítmica clássica, que foi a que apresentou o menor custo computacional dentre as leis estudadas. Esse aumento do custo computacional se deve ao número extra de iterações do algoritmo de minimização de erro de Fontoura Rodrigues (1990) para estabilizar o cálculo com leis mais complexas.

Os resultados obtidos para o primeiro caso-teste foram muito satisfatórios, já que foram obtidos campos de pressão, velocidade, energia cinética de turbulência e dissipação de energia cinética de turbulência coerentes, além de excelentes resultados quantitativos, como os perfis de velocidade nos pontos de recirculação, recolamento e recuperação de camada limite e o comprimento da bolha de recirculação.

No primeiro caso-teste, a lei de Nakayama e Koyama (1984) foi a que apresentou o melhor desempenho, já que, além de apresentar bons resultados qualitativos e quantitativos, foi capaz de fazê-lo com baixo custo computacional. Algo importante a ser colocado é que esta lei foi capaz de obter o comprimento da bolha de recirculação muito próximo do experimental e do modelo DNS.

Para o segundo caso-teste, utilizou-se, além do modelo  $\kappa - \varepsilon$ , o modelo  $\kappa - \omega$ . Foi realizada a simulação de um escoamento em um domínio de um canal divergente com ângulo de divergência nulo. As condições de contorno da simulação foram determinadas utilizando um domínio para desenvolvimento dos perfis de velocidade, energia cinética de turbulência, dissipação de energia cinética de turbulência e dissipação específica.

Nesse segundo caso-teste os resultados foram mais discrepantes dos experimentais do que no primeiro caso-teste. Ainda assim, as leis de parede do modelo  $\kappa - \varepsilon$  apresentaram bons resultados qualitativos e quantitativos, sendo capazes de captar a região do descolamento de camada limite por gradiente adverso de pressão. Os resultados qualitativos apresentados pelo modelo  $\kappa - \omega$  foram bons, com campos coerentes, mas os resultados quantitativos apresentaram grande discrepância dos experimentais, com diferenças de até 20

Assim como no caso-teste anterior, todas as cinco simulações foram capazes de captar a bolha secundária, onde a lei de Cruz e Silva Freire (1998) foi a que apresentou o menor tamanho desta bolha, enquanto a lei logarítmica clássica apresentou o maior.

Ficou clara a dificuldade de simulação com o modelo  $\kappa - \omega$ , já que pequenas variações nos parâmetros do código provocam divergência da simulação numérica. Além disso, é um modelo que demanda uma malha extremamente refinada, já que não utiliza auxílio de leis de parede para os cálculos. O tempo de CPU utilizado foi apenas ligeiramente superior ao dos outros modelos, mas a dificuldade de convergência da simulação encontrada e os resultados discrepantes apontaram para a não recomendação de utilização do modelo para o caso-teste em estudo. Sobre o modelo  $\kappa - \varepsilon$ , a lei de parede logarítmica clássica continuou apresentando leve vantagem sobre as outras em relação ao custo computacional, apresentando bons resultados qualitativos e quantitativos, pecando apenas na determinação do comprimento da região de recirculação, o que era esperado, já que é a única lei incapaz de considerar o efeito dos gradientes de pressão.

Novamente, através de análise dos resultados quantitativos e qualitativos para este segundo caso-teste, pôde-se determinar que a lei de Nakayama e Koyama (1984) foi a que apresentou o melhor desempenho, já que, a um baixo custo computacional, foi capaz de gerar bons resultados, com pouca discrepância dos dados experimentais.

Este estudo é de grande importância para a área de turbulência parietal, pois a utilização de modelos de turbulência torna os procedimentos computacionais bem mais baratos do que a utilização da simulação numérica direta (DNS). Sendo assim, com resultados condizentes através obtidos com os modelos, é possível baratear o custo das simulações numéricas e o tempo destas simulações.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AFOSR-HTTM, 1980-1981**, “Stanford Conference on Complex Fluid Flow”, Stanford, USA
- Ataídes R. S. C., Fontoura Rodrigues, J. L. A., 2002**, "Estudo computacional de escoamentos turbulentos com descolamento de camada limite", 9th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, vol 1.,p. CIT02-0740.
- Ariff, M., Salim, S. M., Cheah, S. C., 2009**, “Wall  $y^+$  approach for dealing with turbulent flow over a surface mounted cube: part 2 – high Reynolds Number”, Seventh International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries, Melbourne, Australia.
- Boussinesq, J., 1877**, Théorie de l'Écoulement Tourbillant, Mem. Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr., vol. 23, pp. 46-50
- Boussinesq, J., 1904**, “Recherches theoretique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le debit des sources.”. J. Math. Pure Appl., 10 (5): 5-78.
- Bredberg, J., Peng, S. H., 2002**, “An improved  $\kappa - \omega$  turbulence model applied to recirculating flows”, International Journal of Heat and Fluid Flow, pp. 731-743.
- Brun, G., 1988**, “Developpement et application d'une methode d'elements finis pour le calcul des écoulements turbulents fortement chauffés”. Tese de Doutorado, Laboratoire de Mécanique des Fluides, Escola Central de Lyon.
- Buarque, D. C., 2002**, “Simulação numérica direta de um escoamento turbulento em um canal com fundo ondulado”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul.
- Driver, D. M., Seegmiller, H. L., 1985**, “Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow”. AIAA Journal, vol. 23, pp. 163-171.
- Drain, L. D., Martin, S., 1985**, “Two-component velocity measurements of turbulent flow in a ribbed-wall flow channel”, International conference on Laser Anemometry – Advances and Application.
- Farias, A. S., 2002**, “Modelagem numérica de escoamentos turbulentos parietais sob gradientes adversos de pressão”, 16° POSMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia
- Favre, A., 1965**, "Equations de gaz turbulents compressibles. Formes générales", Journal de Mécanique, Vol. 4, n° 3, pp. 361-390.
- Fontoura Rodrigues, J. L. A., 1990**, "Méthode de minimisation adaptée à la technique des éléments finis pour la simulation des écoulements turbulents avec conditions aux limites non lenéaires de proche paroi", Tese de Doutorado, Escola Central de Lyon. Lyon.
- Gatski, T. B., Speziale, C. G., 1993**, "On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows", J. Fluid Mech., vol. 254, pp. 59-78.
- Gontijo, R. G., 2009**, “Um Estudo Numérico Sobre Transferência de Calor na Camada Limite Turbulenta”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília.

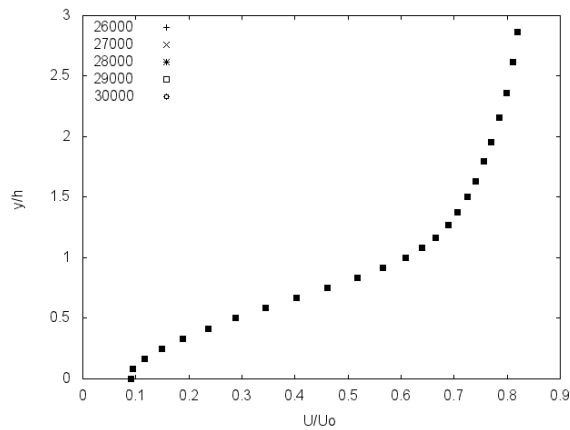


- Girimaji, S. S., 1995**, Fully-explicit and self-consistent algebraic Reynolds stress model, Relatório NASA-ICASE 95-82, Contrato NAS1-19480.
- Jones, W. P., Launder, B. E., 1972**, "The Prediction of Laminarisation with a Two-equation Model of Turbulence ", Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 15, pp. 301-314.
- Jovic, S., Driver, D. M., 1994**, "Backward-facing step measurement at low Reynolds number,  $Re_h = 5000$ ", NASA, *Tech. Mem.* 108807.
- Lima, C.H.R., Fontoura Rodrigues, J. L. A., 2002**, "Desempenho de modelos de turbulência não lineares na simulação de escoamentos parietais", 9th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, vol 1.,p. CIT02-0739.
- Le, H., Moin, P., Kim, J., 1996**, "Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step", J. Fluid Mech., vol. 330, pp. 349-374.
- Lino, R. C., Ramos, D.M., Fontoura Rodrigues, J. L. A., 2003**, "Natural convection on vertical flat plates: a numerical and experimental study", Proceedings of 17th International Congress of Mechanical Engineering. ID0663.
- Ramos, D. M., Cunha, F. R., Sobral, Y. D., Fontoura Rodrigues, J. L. A., 2005**, "Computer simulations of magnetic fluids in laminar flows", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 1, pp. 238 – 241.
- Soares, D.V., Fontoura Rodrigues, J. L. A., 2004**, "Complex near-wall turbulent flows: a performance analysis of velocity and temperature laws of the wall", IV Escola de Primavera de Transição e Turbulência, P37, sessão D.
- Soares, D. V., 2006**, "Um modelo  $\kappa - \omega$  para escoamentos turbulentos parietais dilatáveis. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM – 103 A/06, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 138p.
- Spalart, P. R., 1987**, "Hybrid RKW3 + Crank-Nicolson scheme", Private communication, NASA-Ames Research Center, Moffett Field, CA
- Wilcox, D. C., 1988**, "Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models." AIAA Journal, 26:1299-1310, 1988.
- Wilcox, D. C., 1993**, "Comparison of two-equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient.", AIAA Journal, 31:1414-1421, 1993.
- Wilcox, D.C., 1998**, "Turbulence modeling for CFD Second Edition", DCW Industries Inc, USA.
- Zandonade, P. S. K., Fontoura Rodrigues, J. L. A., 2000**, "Nonlinear models for the Reynolds tensor in the simulation of wall-bounded flows", 8th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, vol 1., pp. s35 – p20.

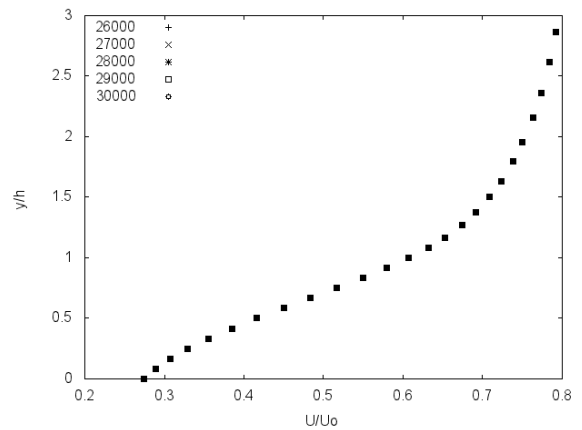
# ANEXOS

## I – Resultados relativos ao estudo das condições de contorno ideais para o caso-teste do degrau de Le, Moin e Kim (1996)

Resultados obtidos com as seguintes condições de contorno: perfil turbulento na entrada do domínio;  $u_0 = 0,0714 \text{ m/s}$ ;  $L_0 = 1 \text{ m}$ .

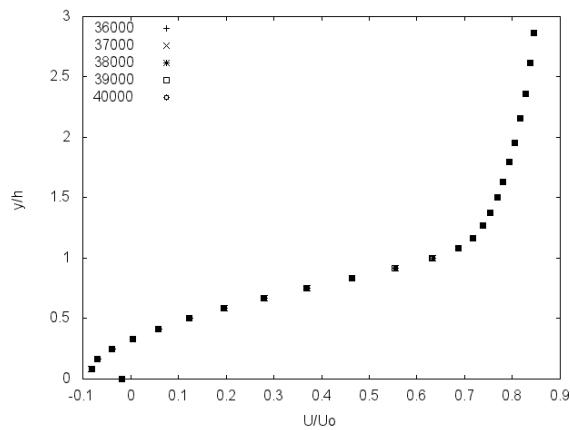


(a) Posição  $x/h = 4$

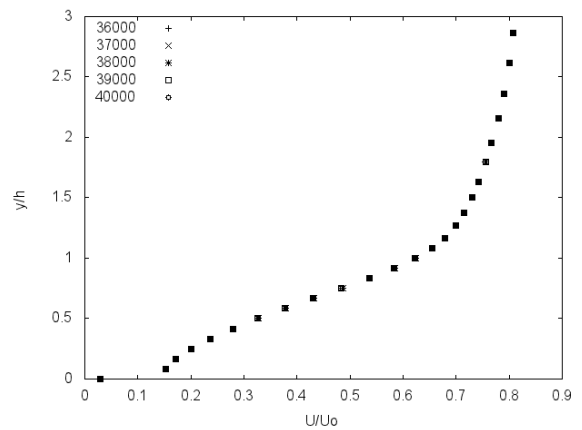


(b) Posição  $x/h = 6$

Figura I.1: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logaritmica clássica

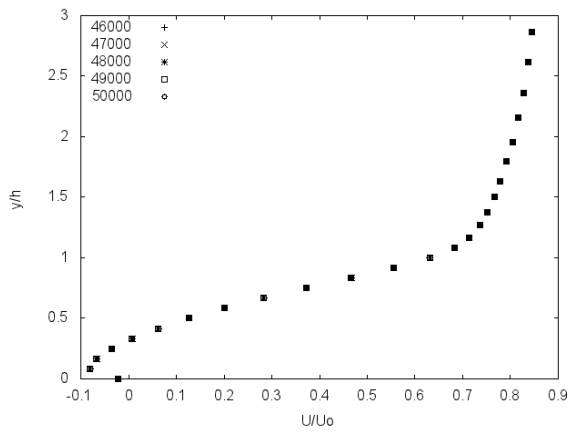


(a) Posição  $x/h = 4$

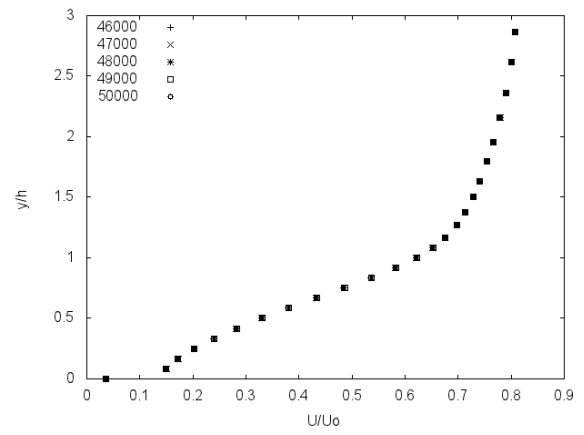


(b) Posição  $x/h = 6$

Figura I.2: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966)

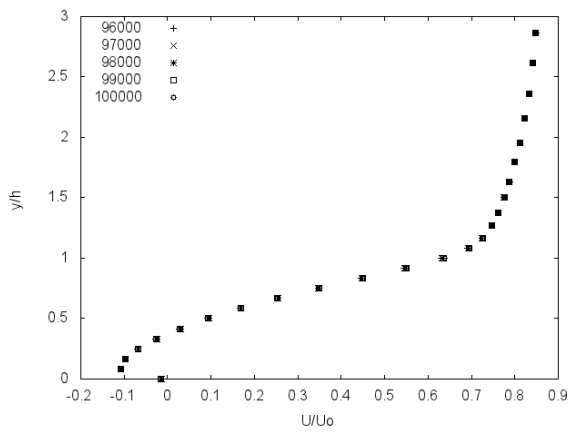


(a) Posição  $x/h = 4$

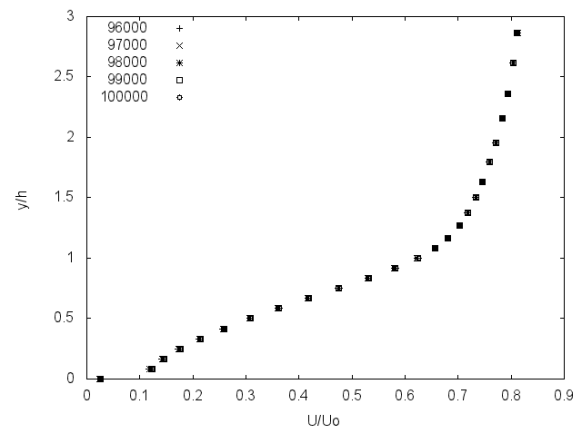


(b) Posição  $x/h = 6$

Figura I.3: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984)

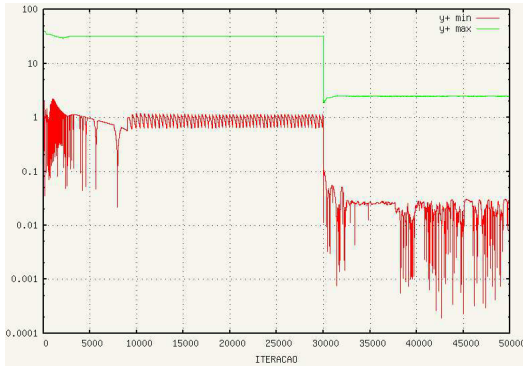


(a) Posição  $x/h = 4$

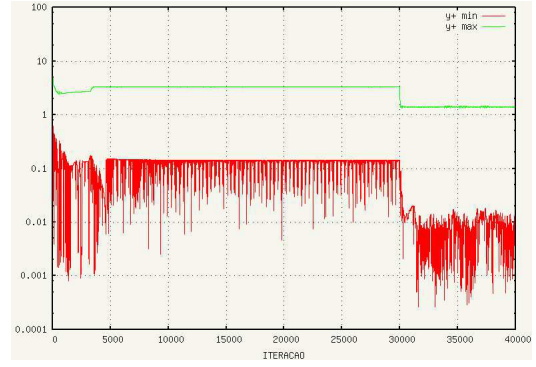


(b) Posição  $x/h = 6$

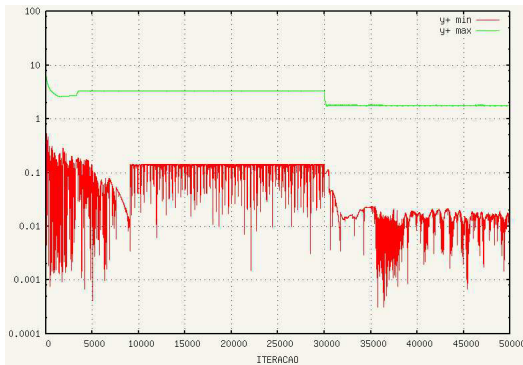
Figura I.4: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998)



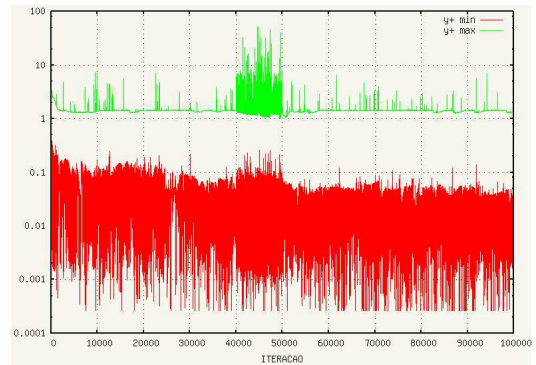
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

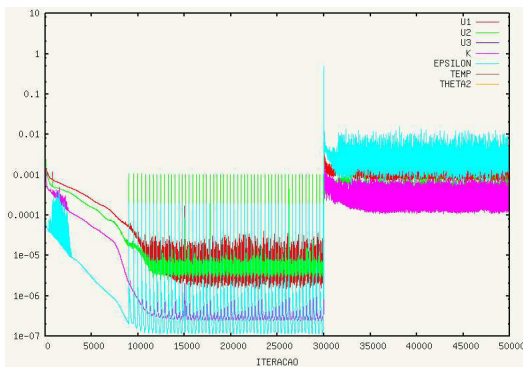


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

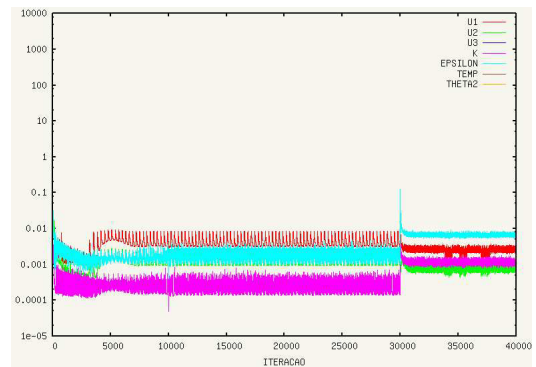


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

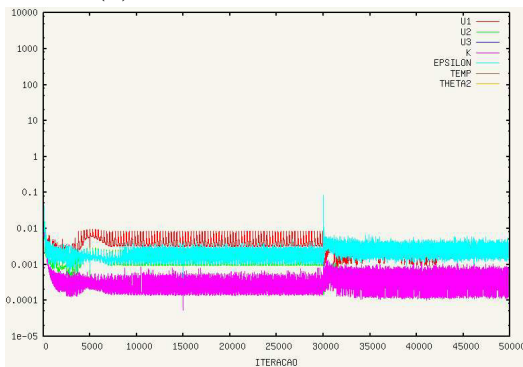
Figura I.5: Valores de  $y^+$



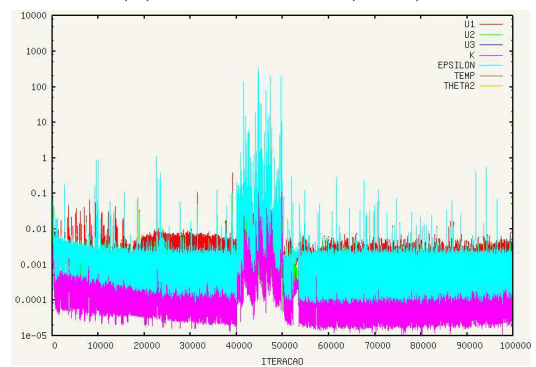
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

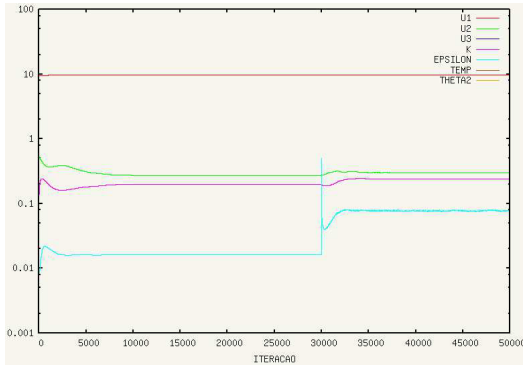


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

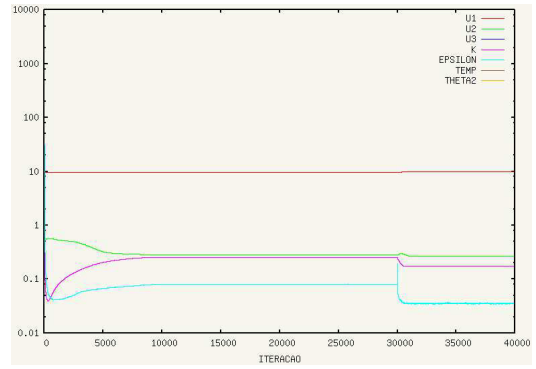


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

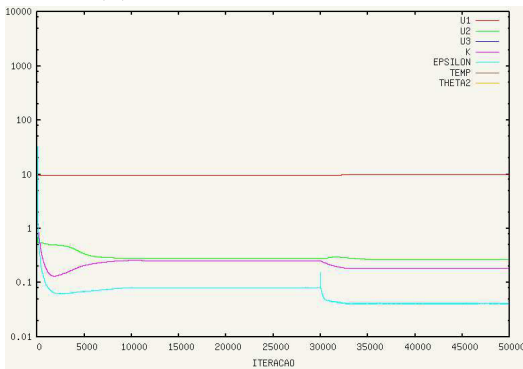
Figura I.6: Valores de erro



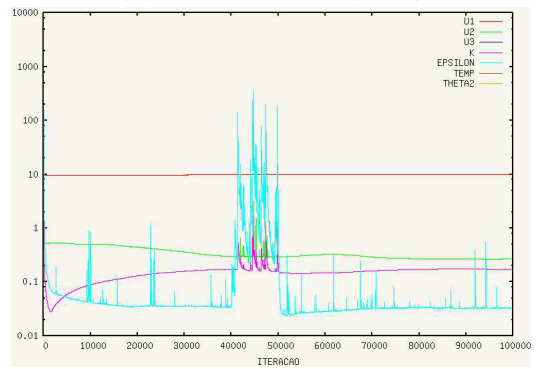
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

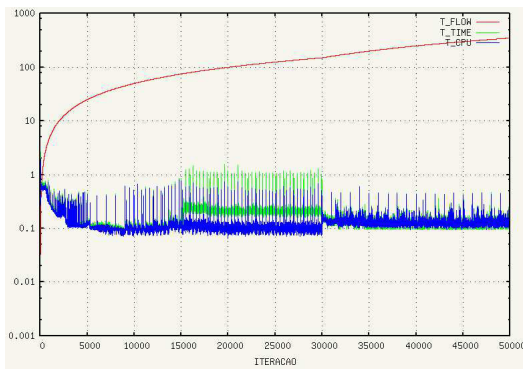


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

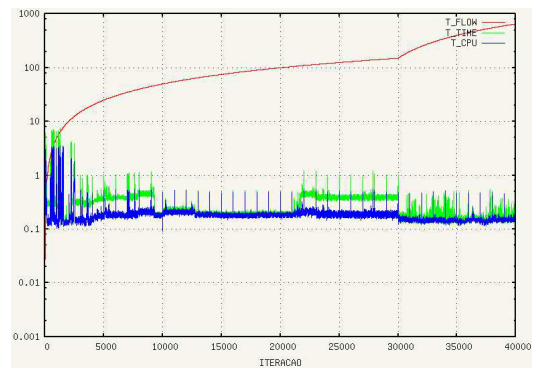


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

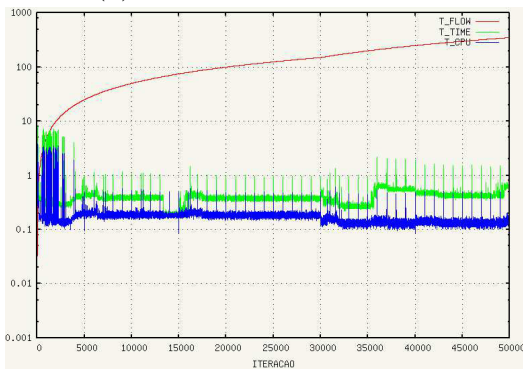
Figura I.7: Valores de norma



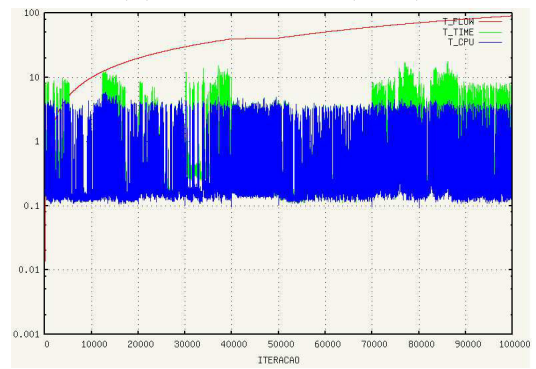
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

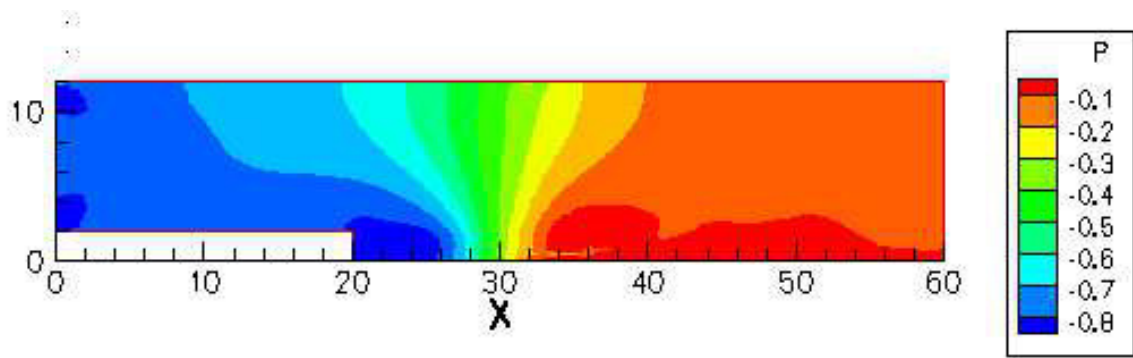


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

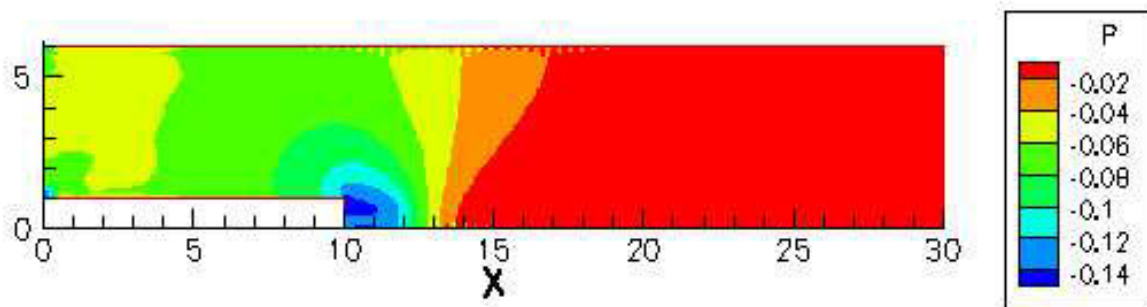


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

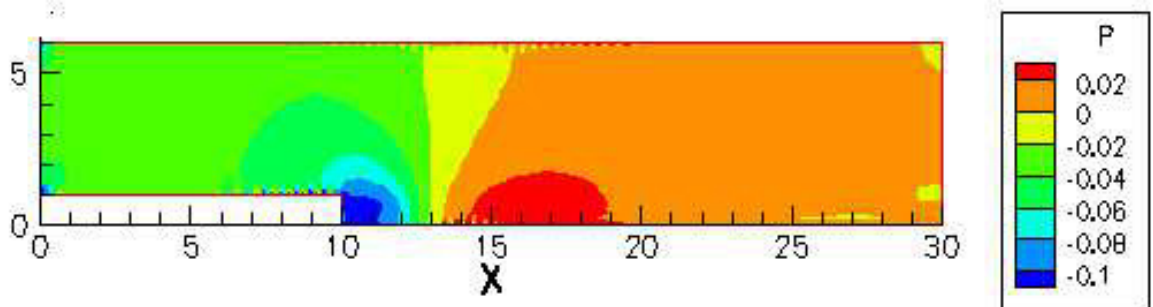
Figura I.8: Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU



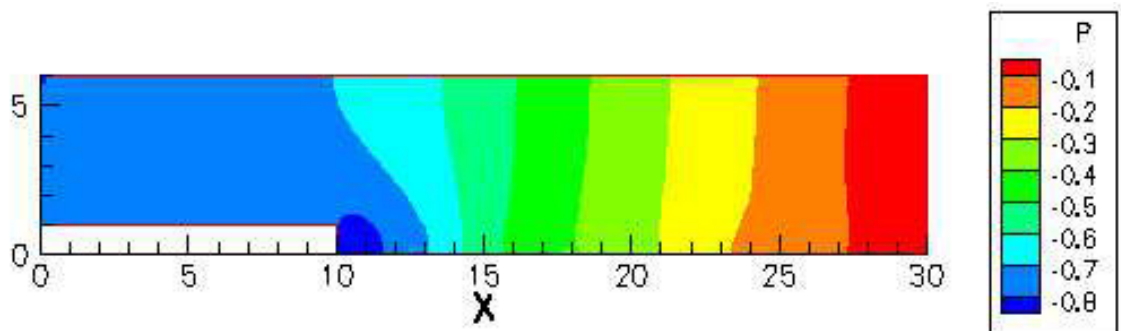
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

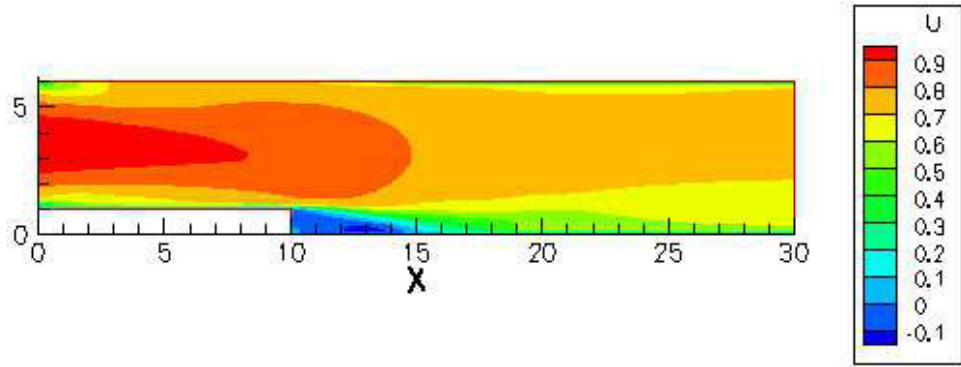


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

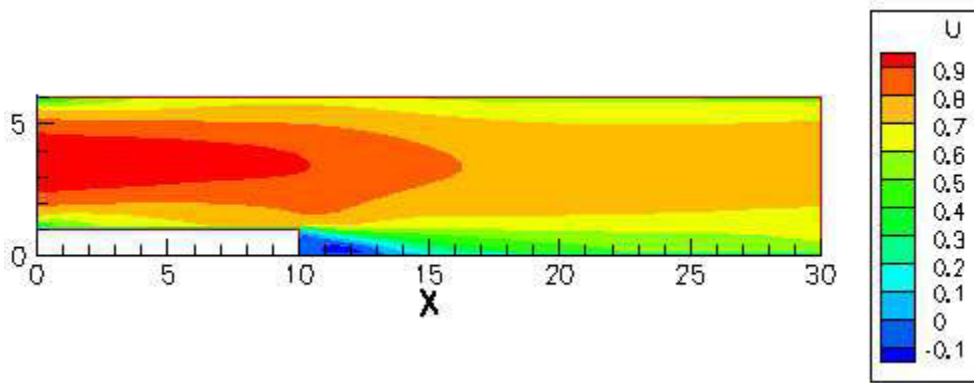


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

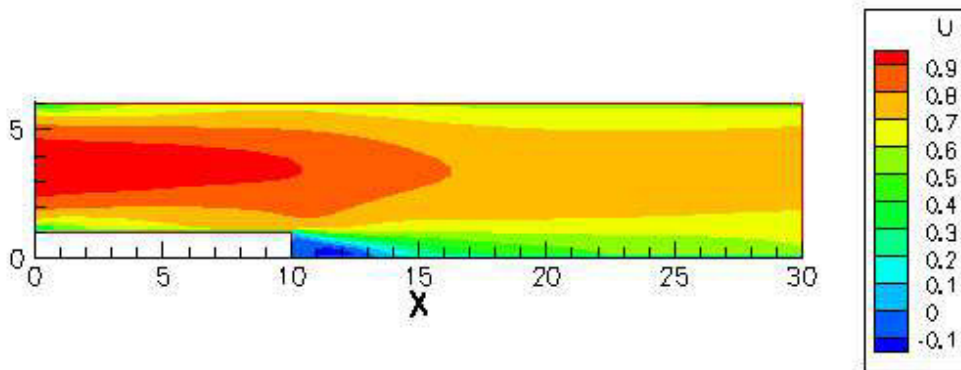
Figura I.9: Campos de pressão para as quatro leis de parede



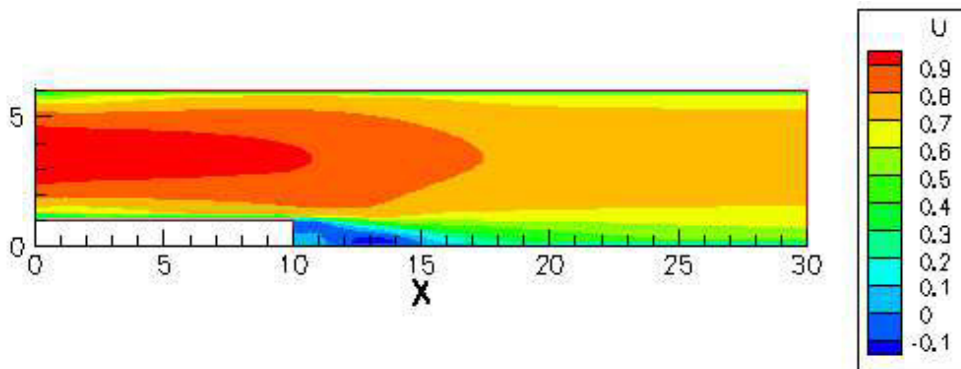
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

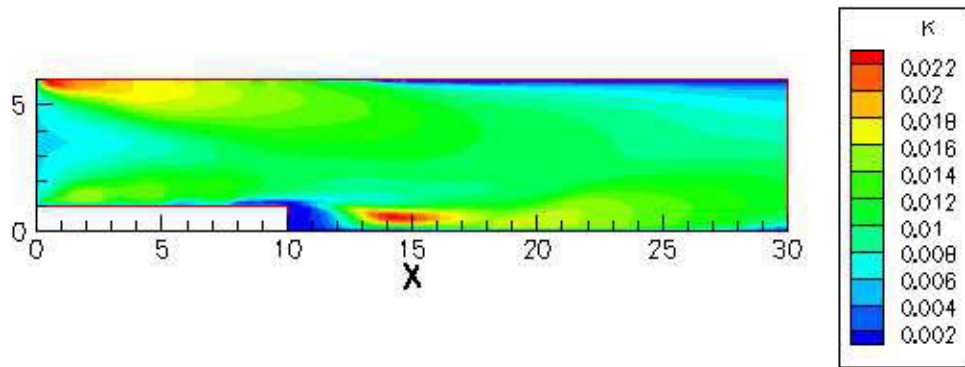


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

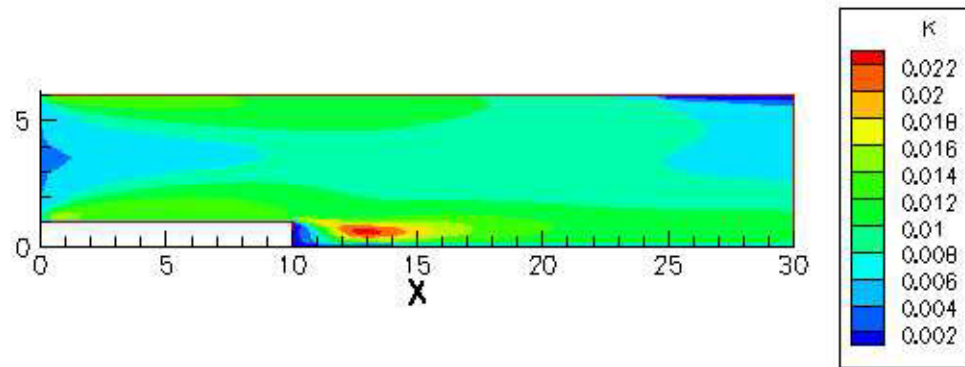


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

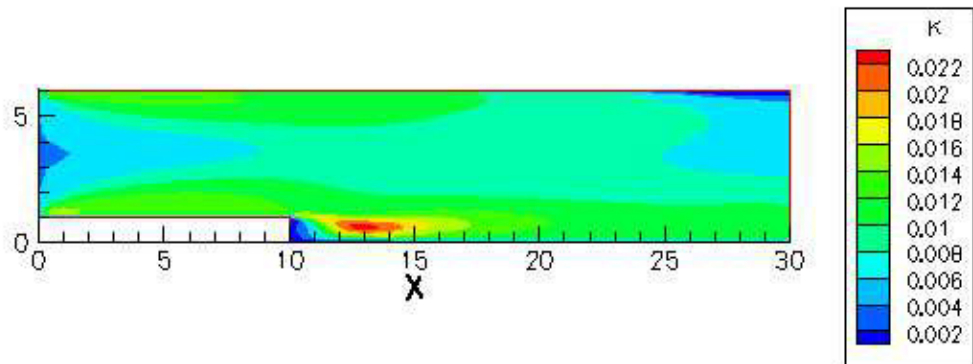
Figura I.10: Campos de velocidade para as quatro leis de parede



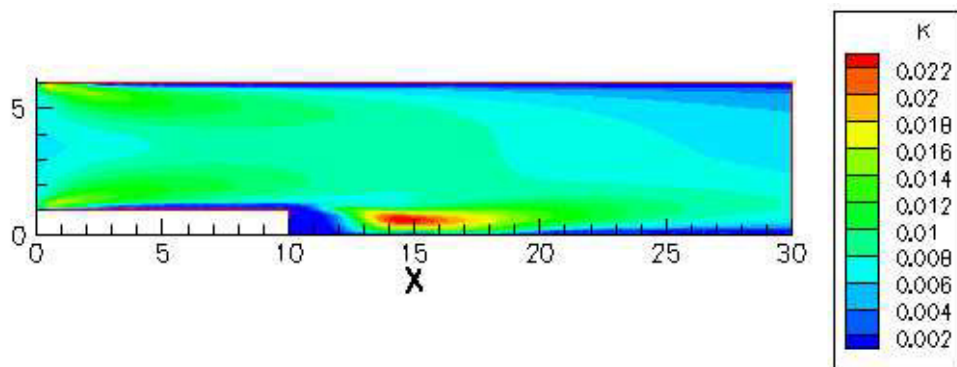
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



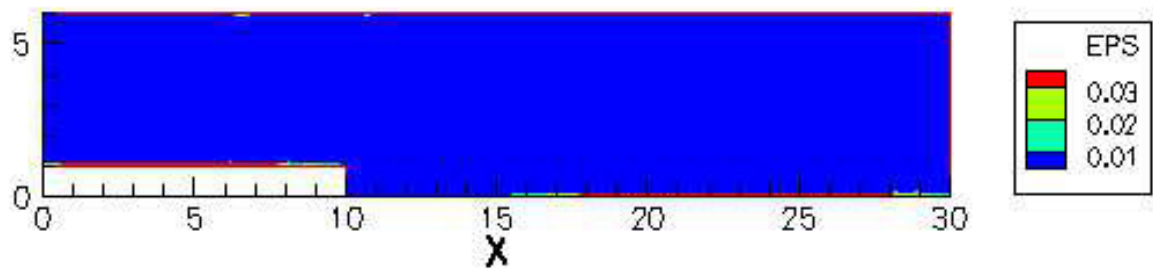
(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



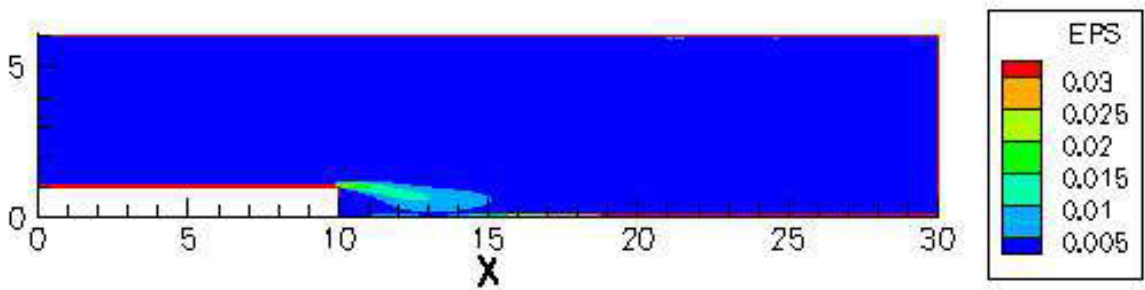
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura I.11: Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede

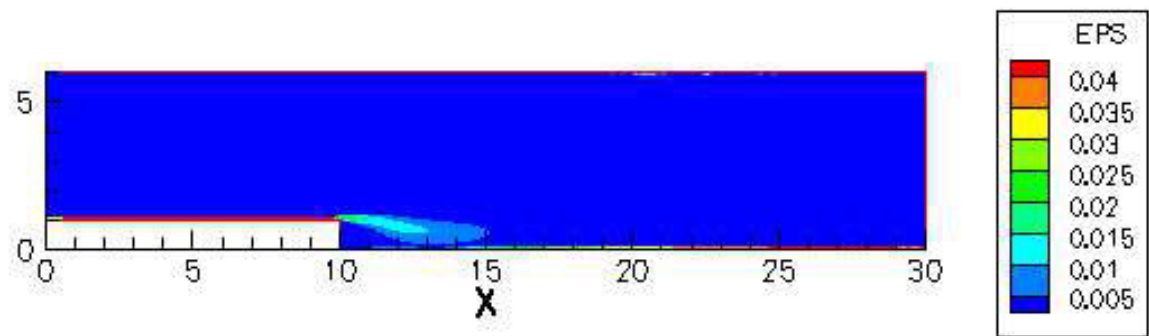




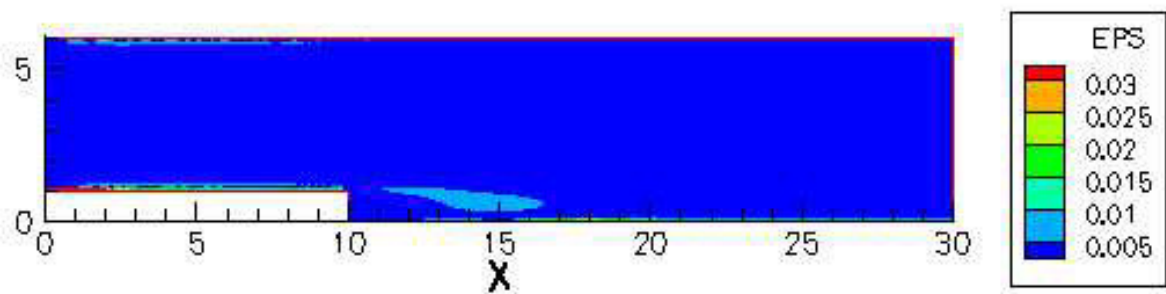
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

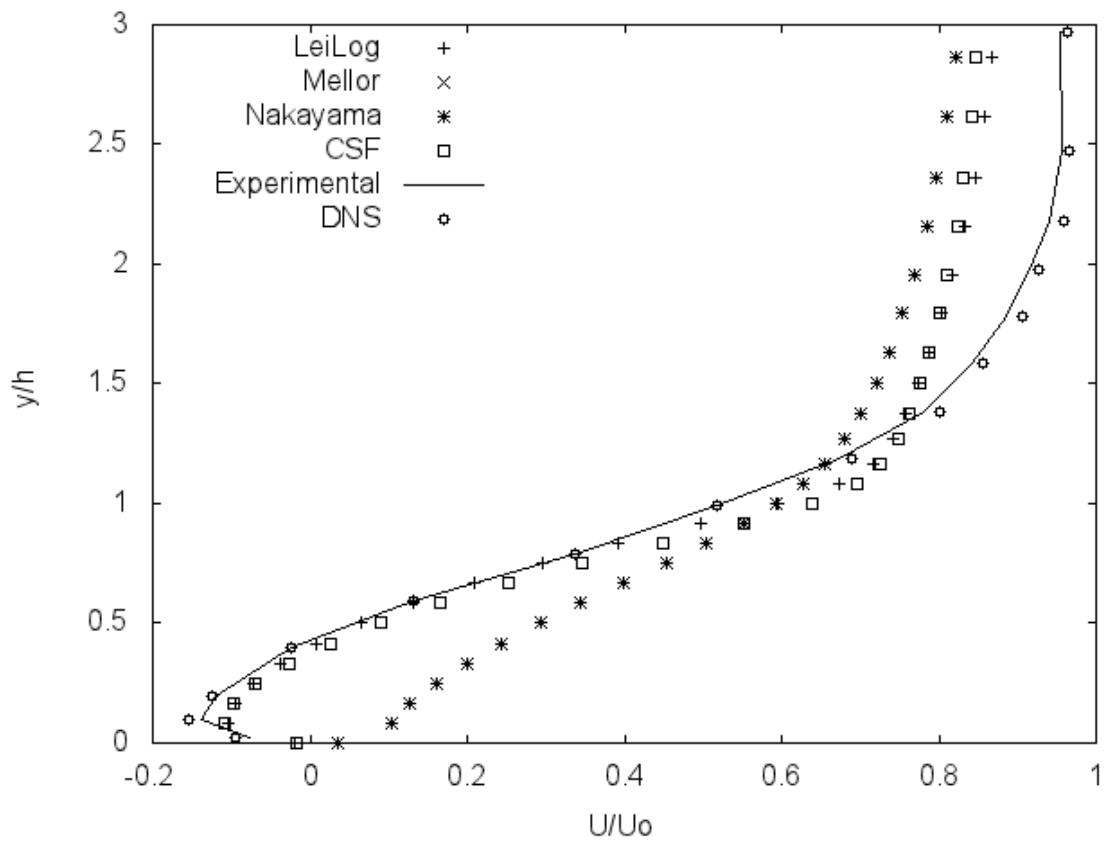


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

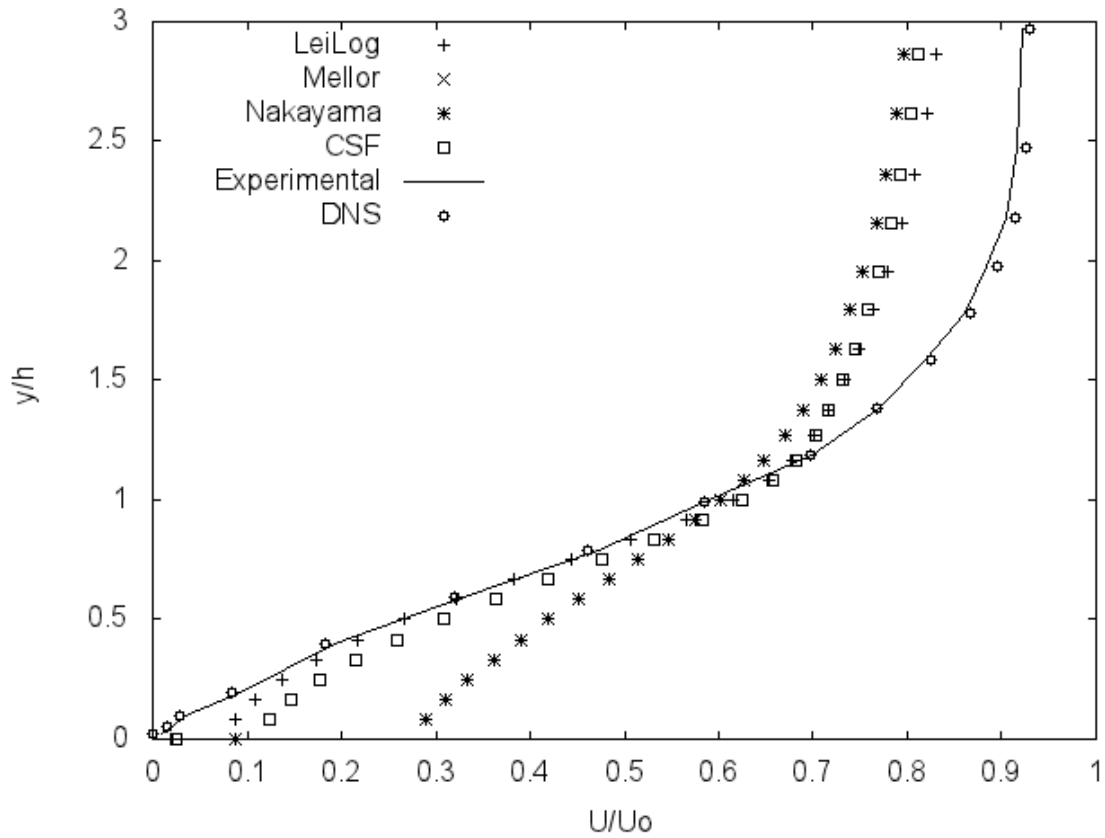


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura I.12: Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede

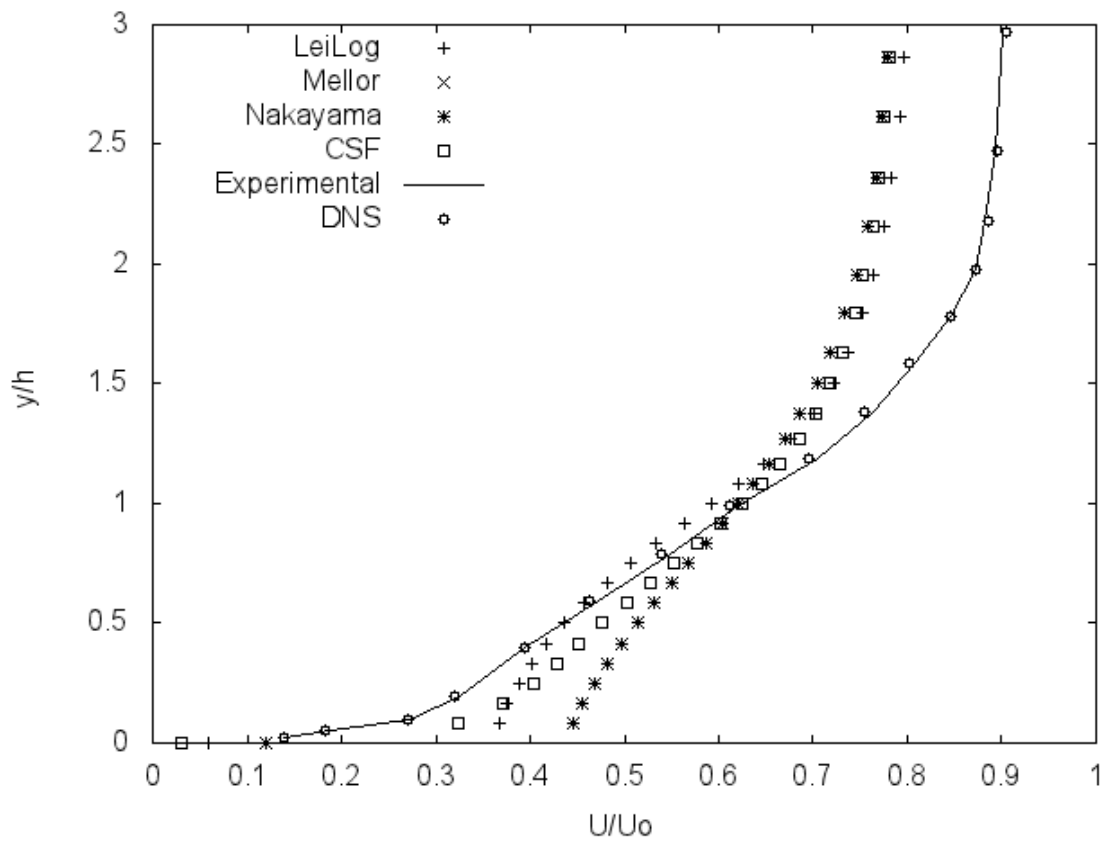


(a)  $x/h = 4$

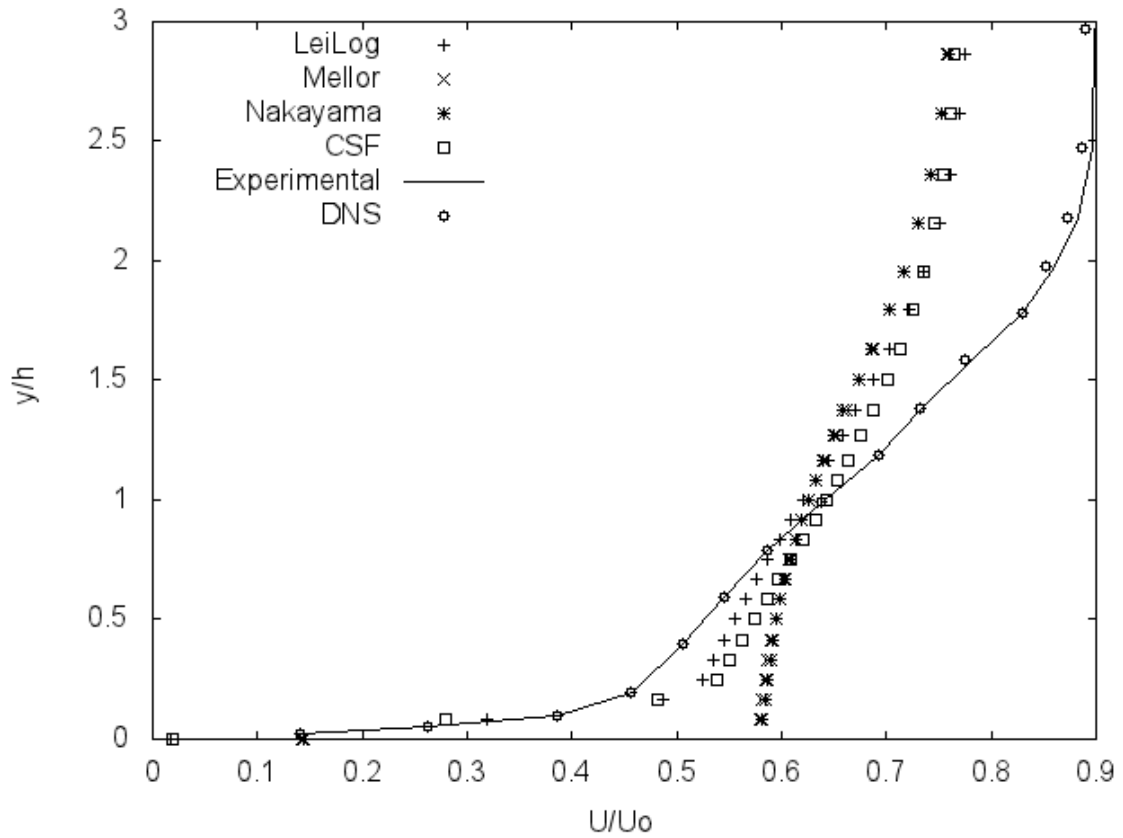


(b)  $x/h = 6$

Figura I.13: Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite



(a)  $x/h = 10$



(b)  $x/h = 19$

Figura I.14: Perfis de velocidade nas regiões de recuperação

Resultados obtidos com as seguintes condições de contorno: perfil turbulento na entrada do domínio (diferente do perfil que apresentou os melhores resultados);  $u_0 = 7,72$  m/s;  $L_0 = 9,5 \cdot 10^{-3}$  m.

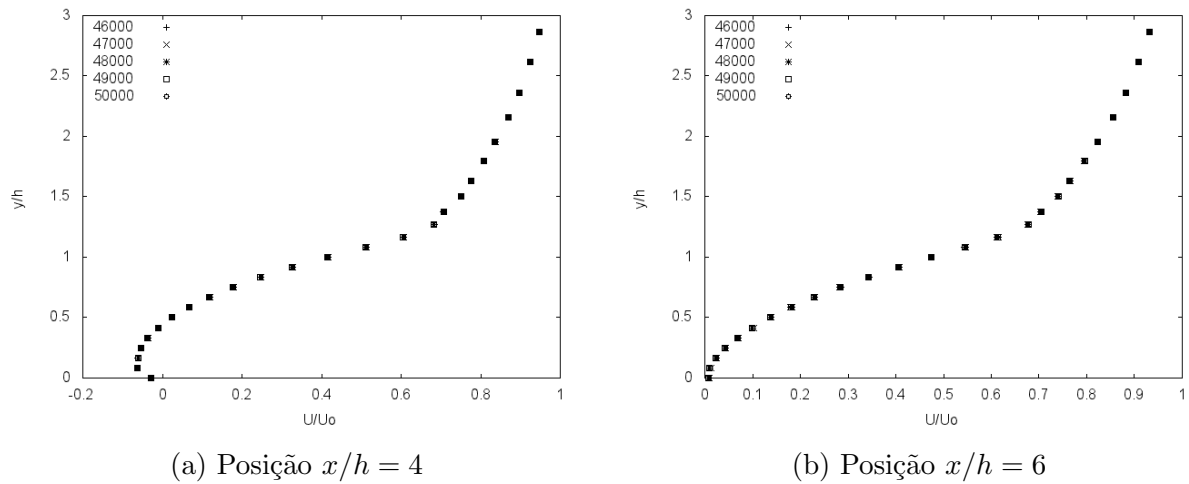


Figura I.15: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logarítmica clássica

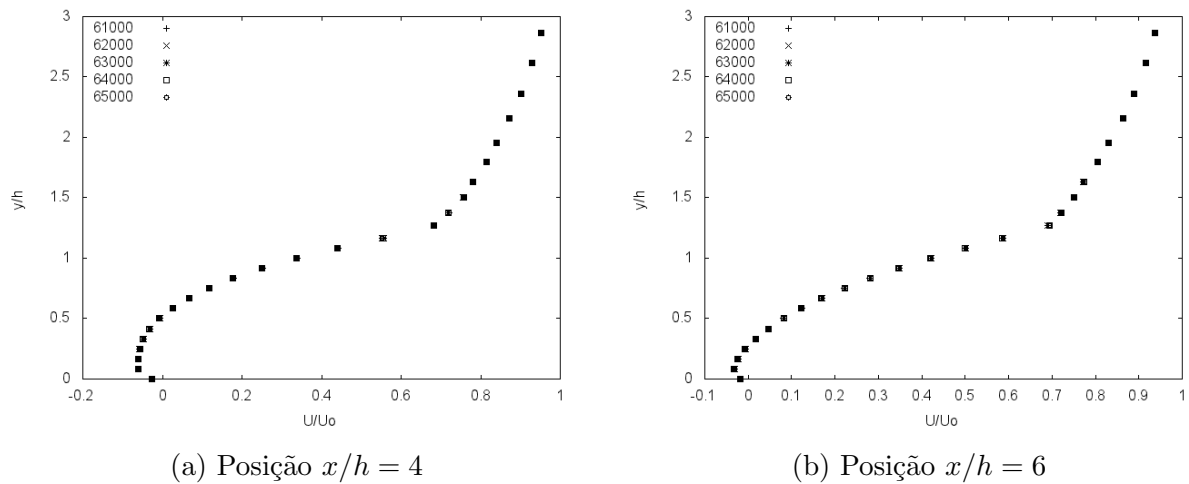
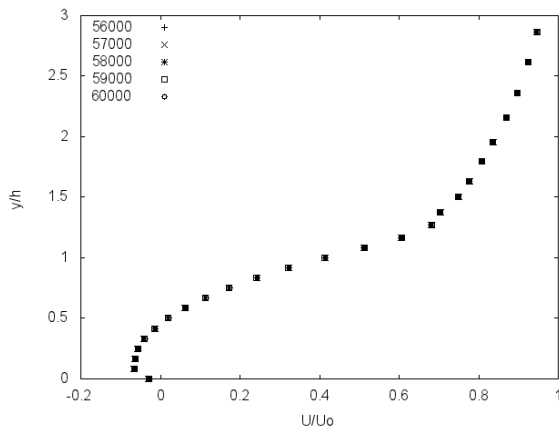
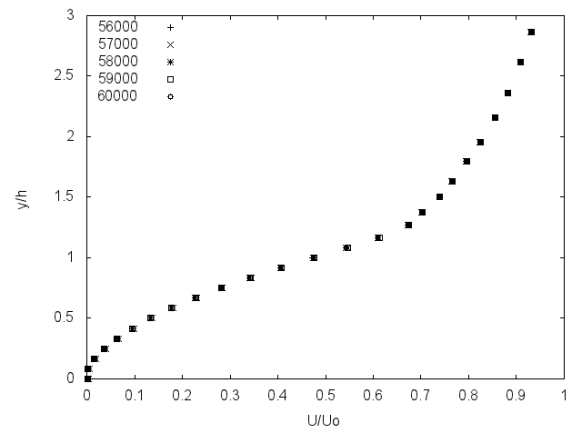


Figura I.16: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966)

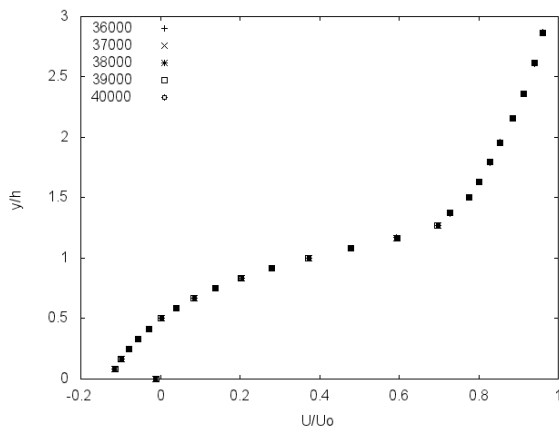


(a) Posição  $x/h = 4$

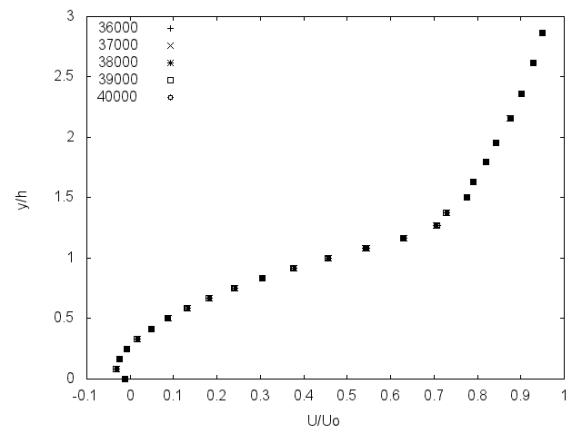


(b) Posição  $x/h = 6$

Figura I.17: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984)

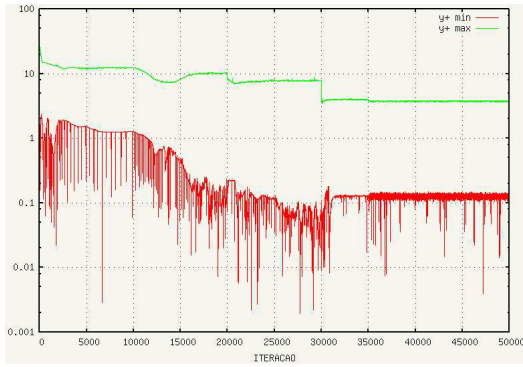


(a) Posição  $x/h = 4$

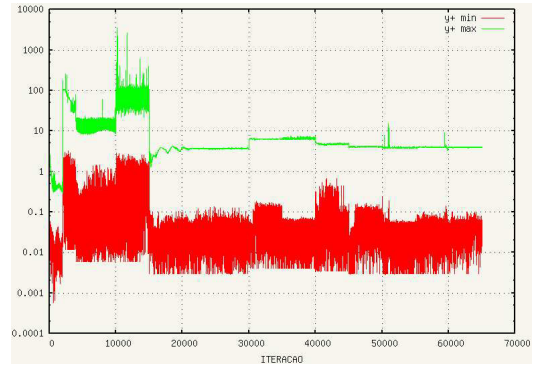


(b) Posição  $x/h = 6$

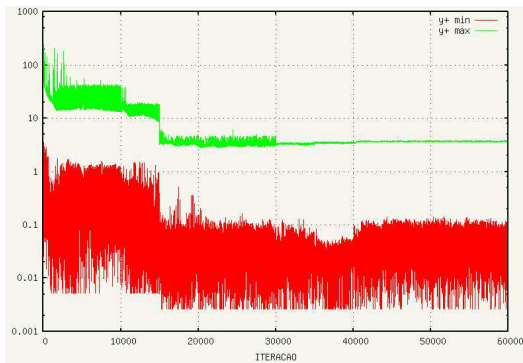
Figura I.18: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998)



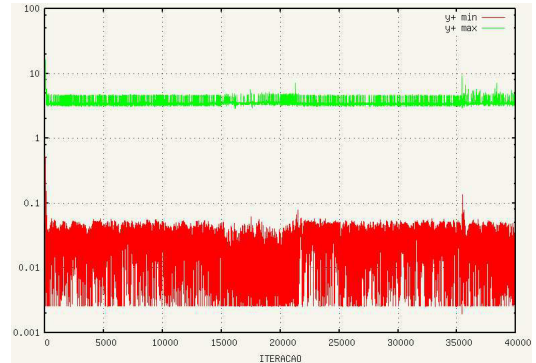
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

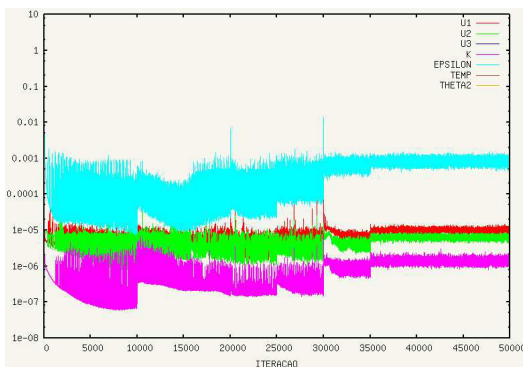


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

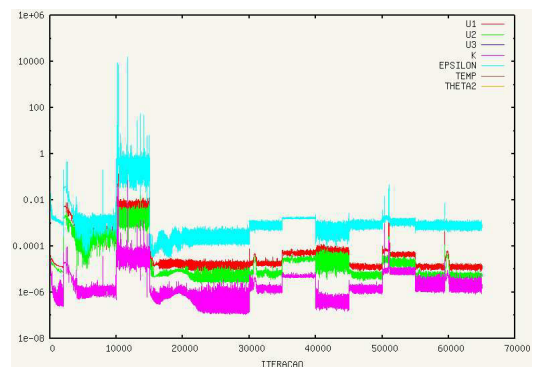


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

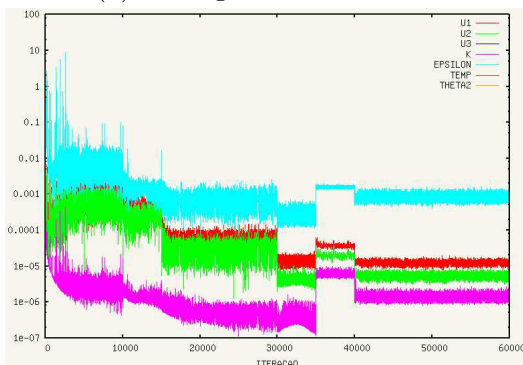
Figura I.19: Valores de  $y^+$



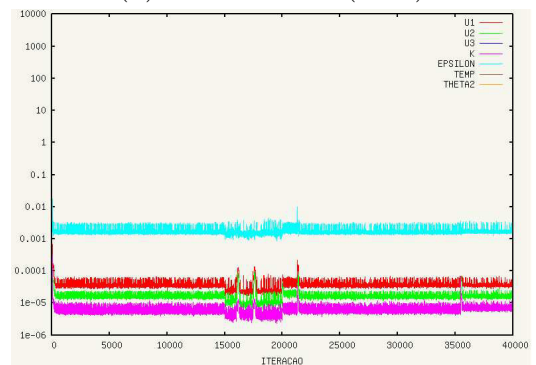
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

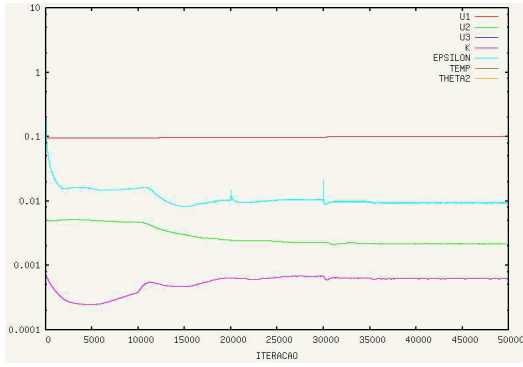


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

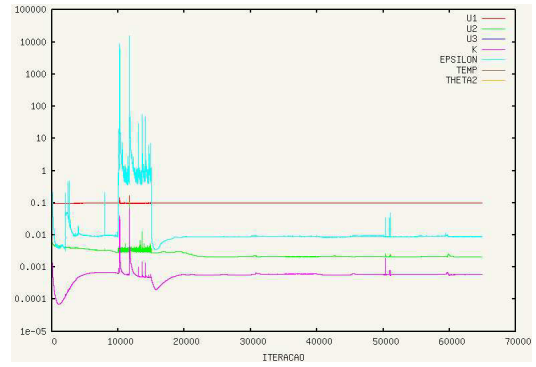


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

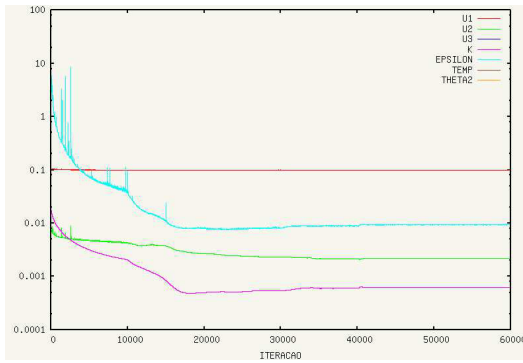
Figura I.20: Valores de erro



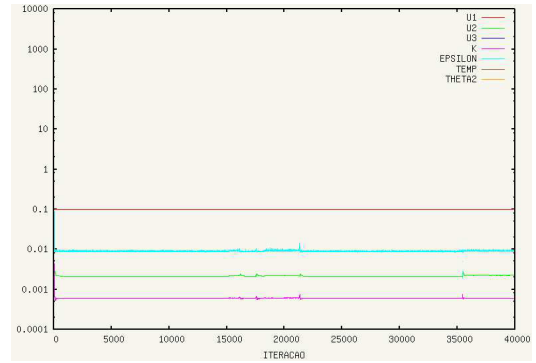
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

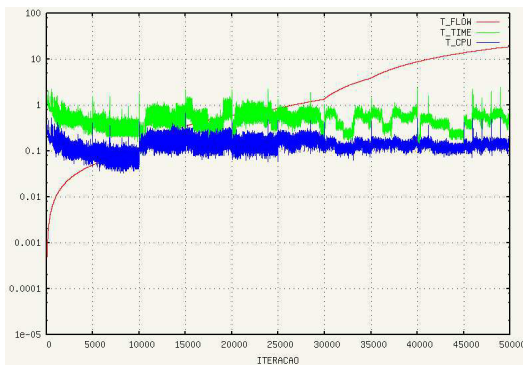


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

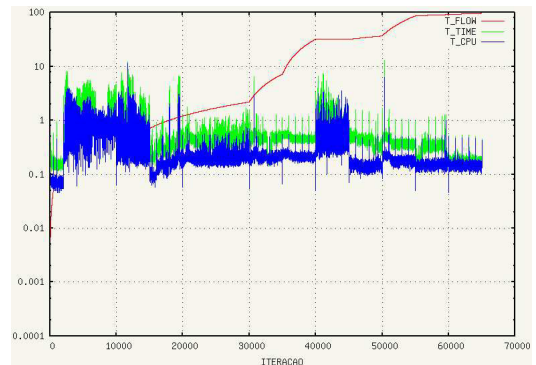


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

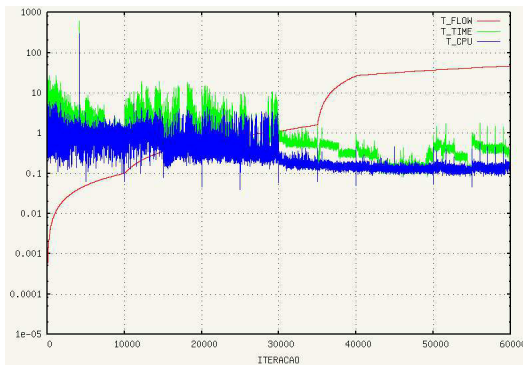
Figura I.21: Valores de norma



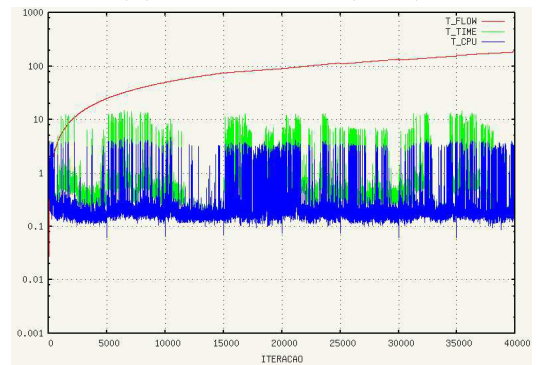
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

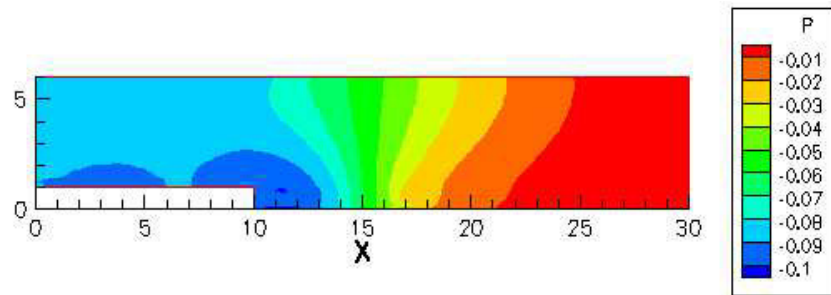


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

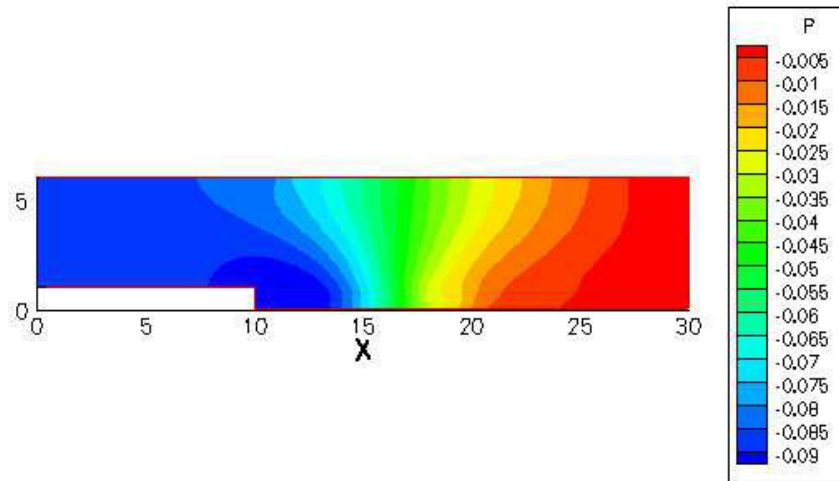


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

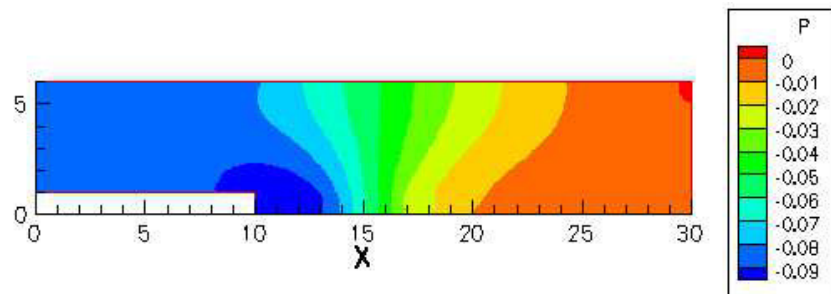
Figura I.22: Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU



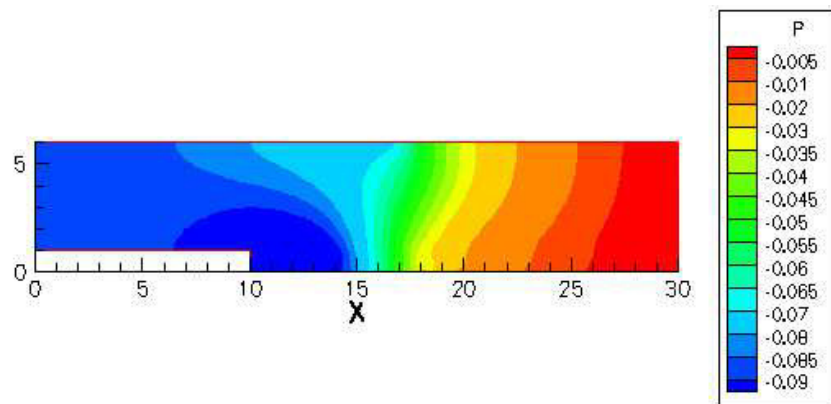
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



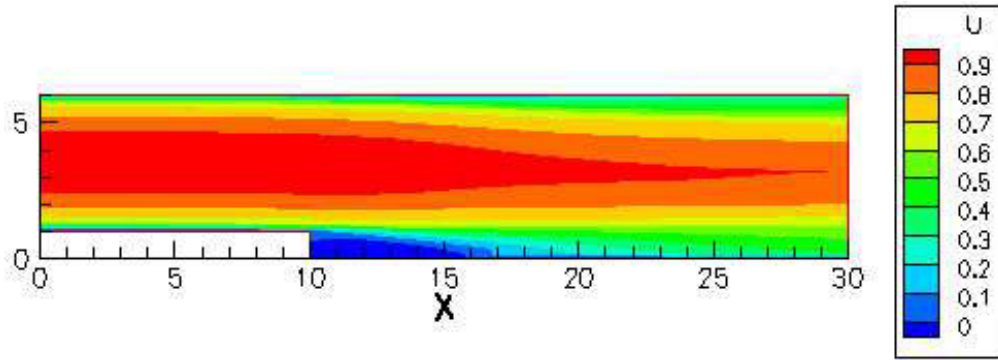
(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



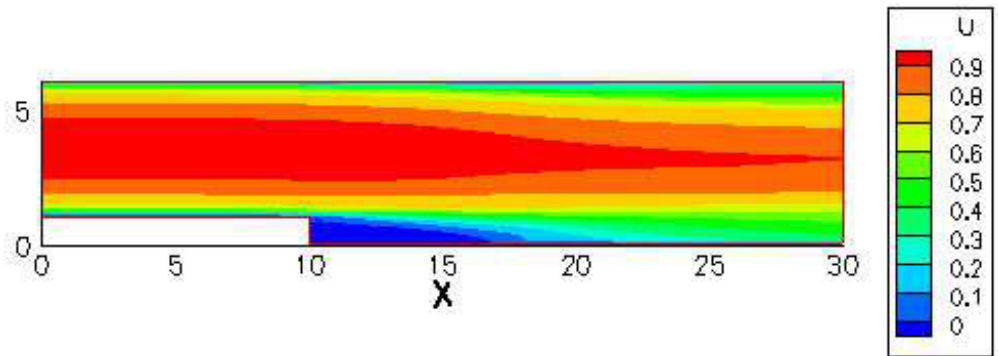
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura I.23: Campos de pressão para as quatro leis de parede

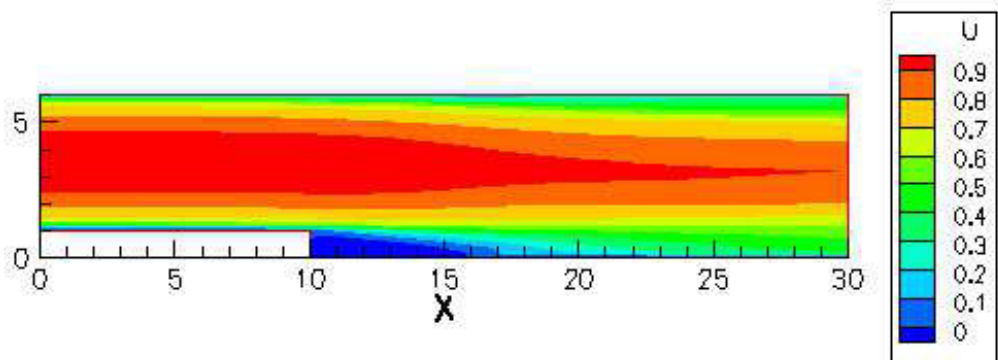




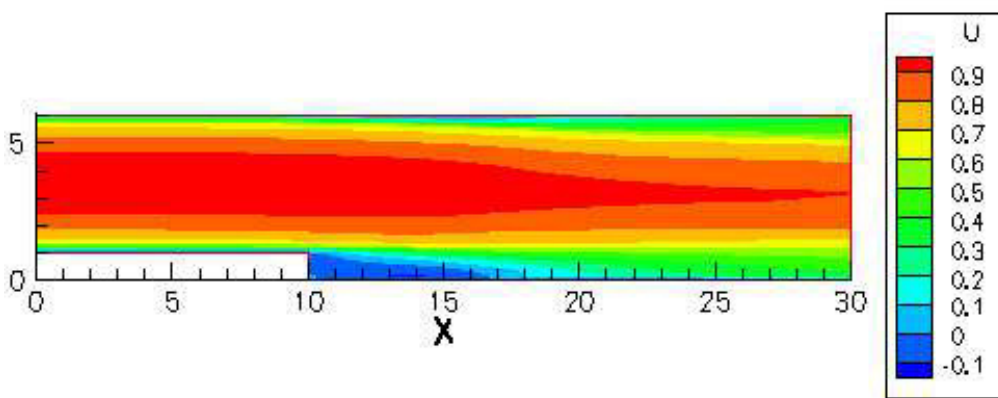
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

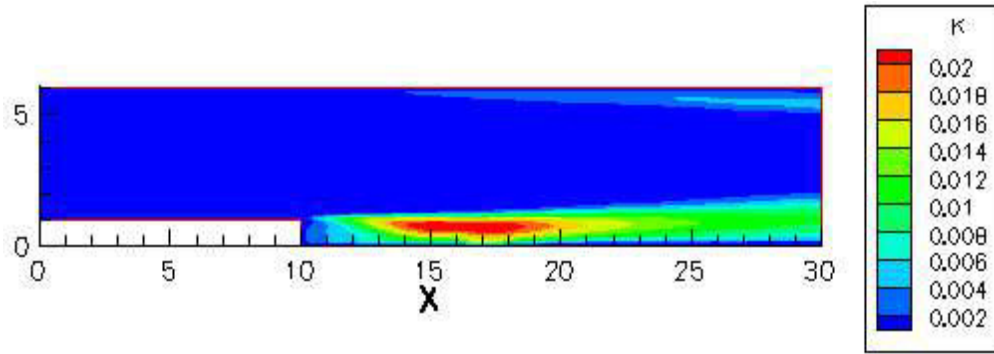


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

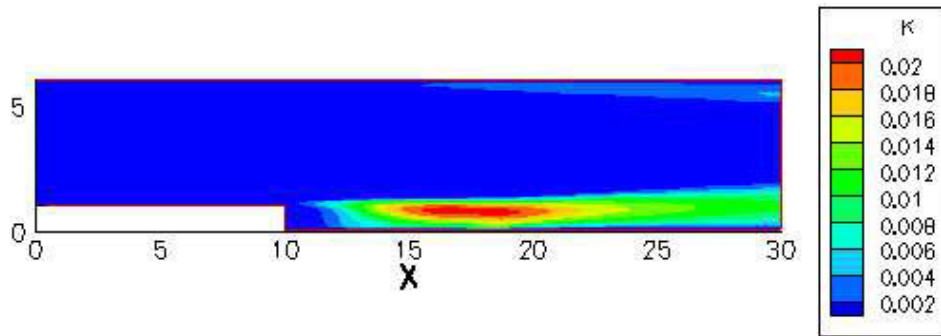


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

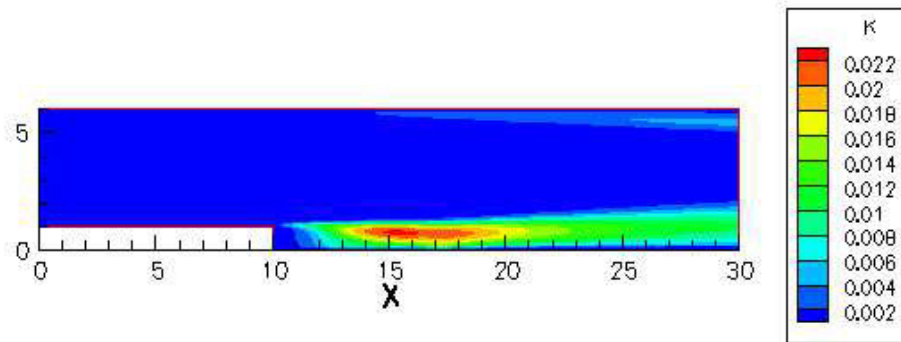
Figura I.24: Campos de velocidade para as quatro leis de parede



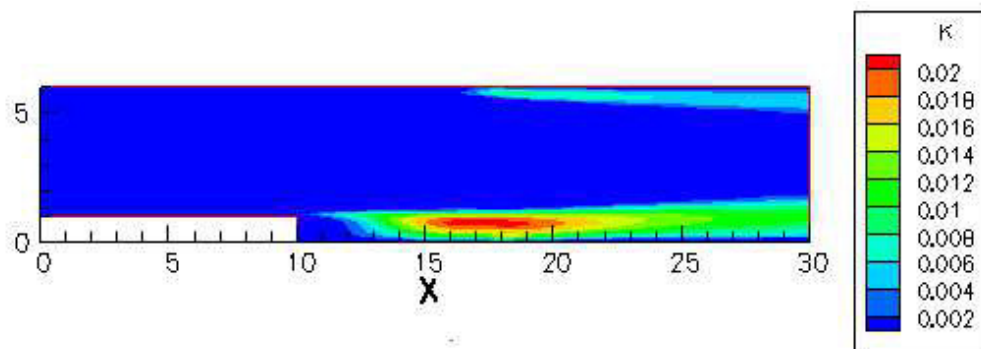
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

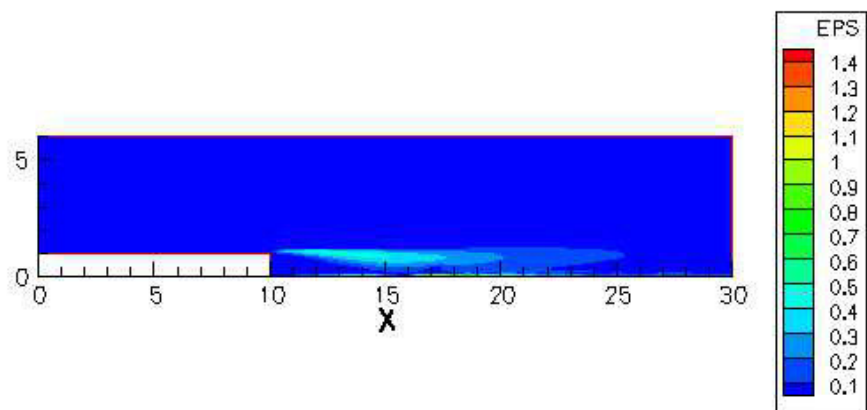


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

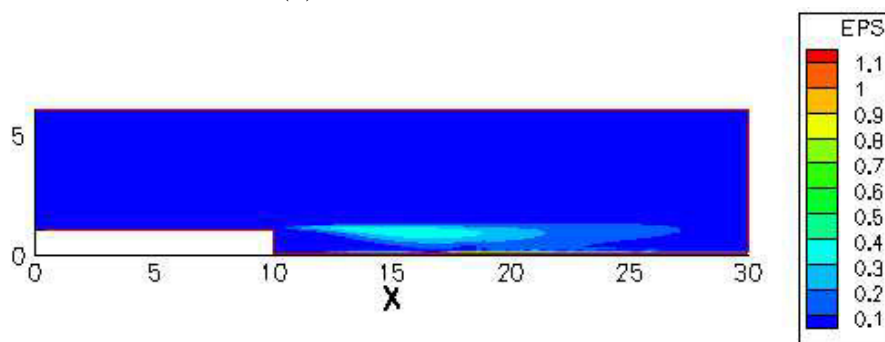


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

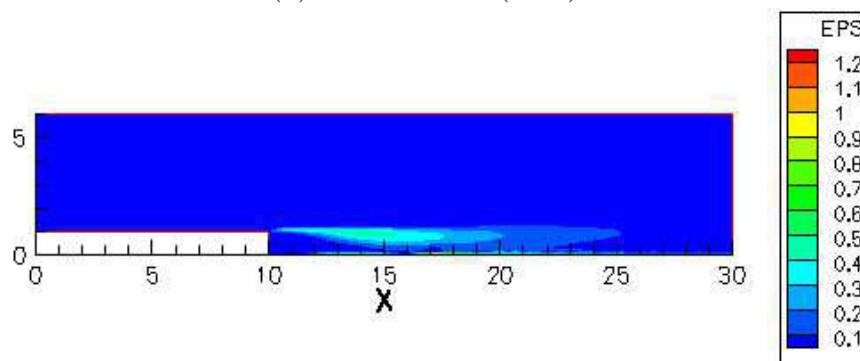
Figura I.25: Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede



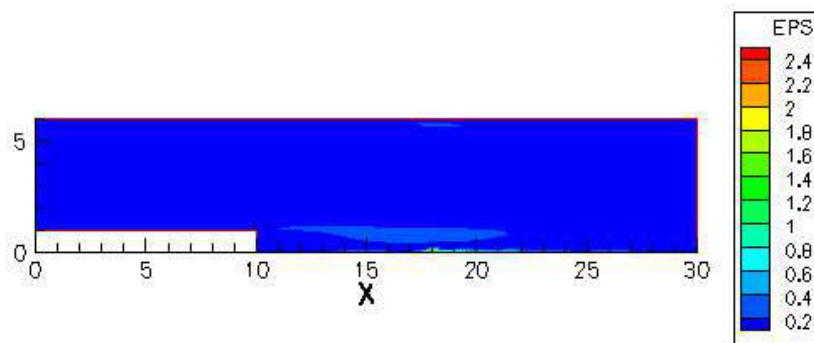
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

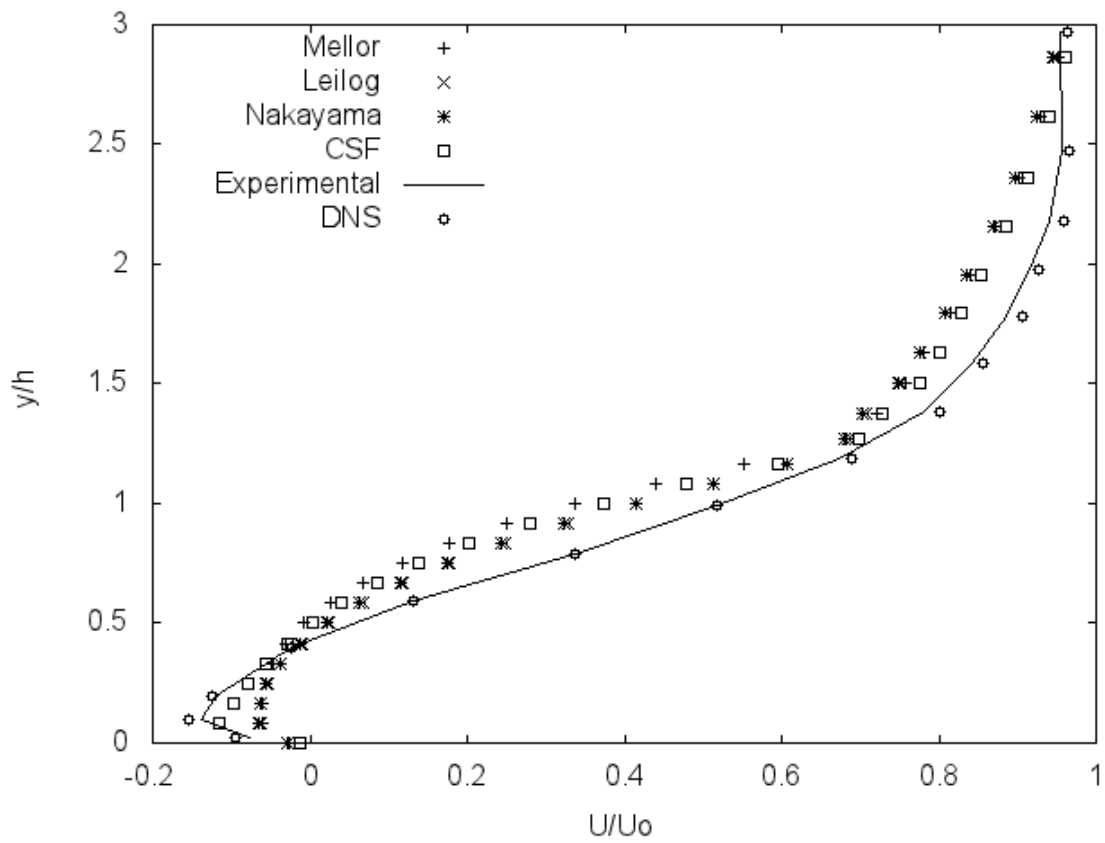


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

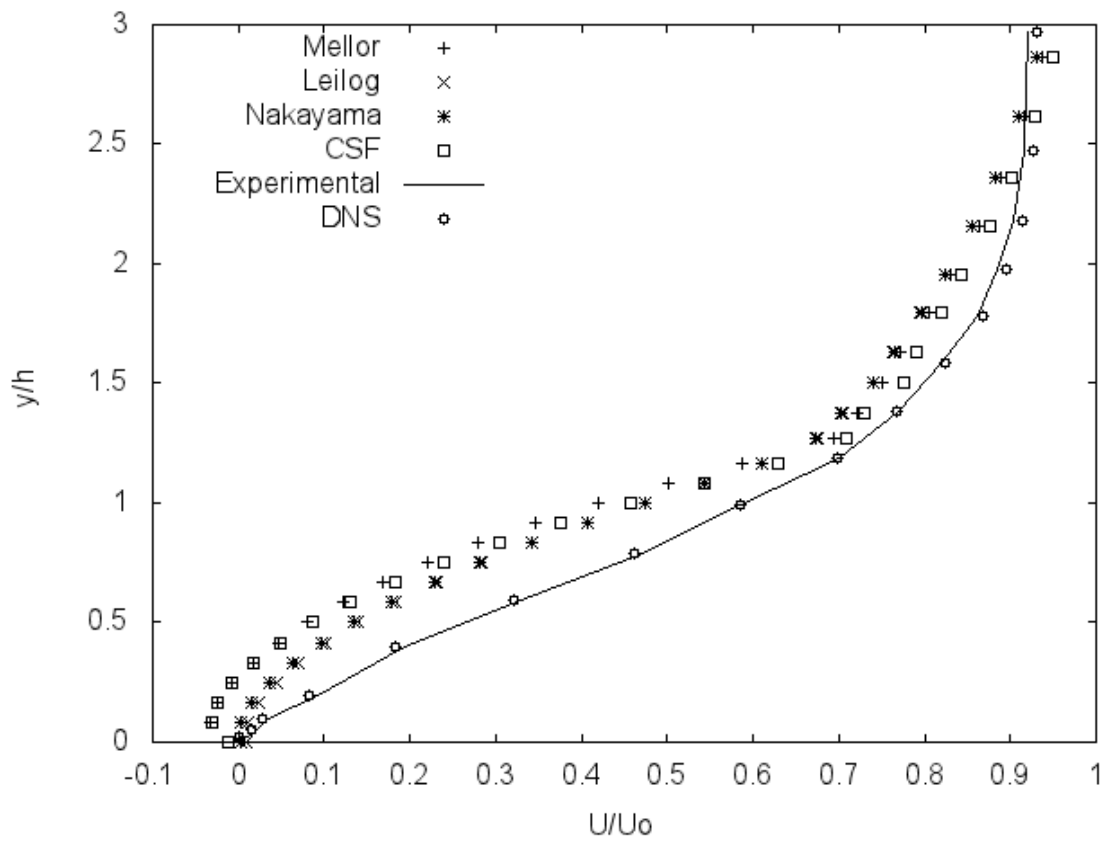


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura I.26: Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede

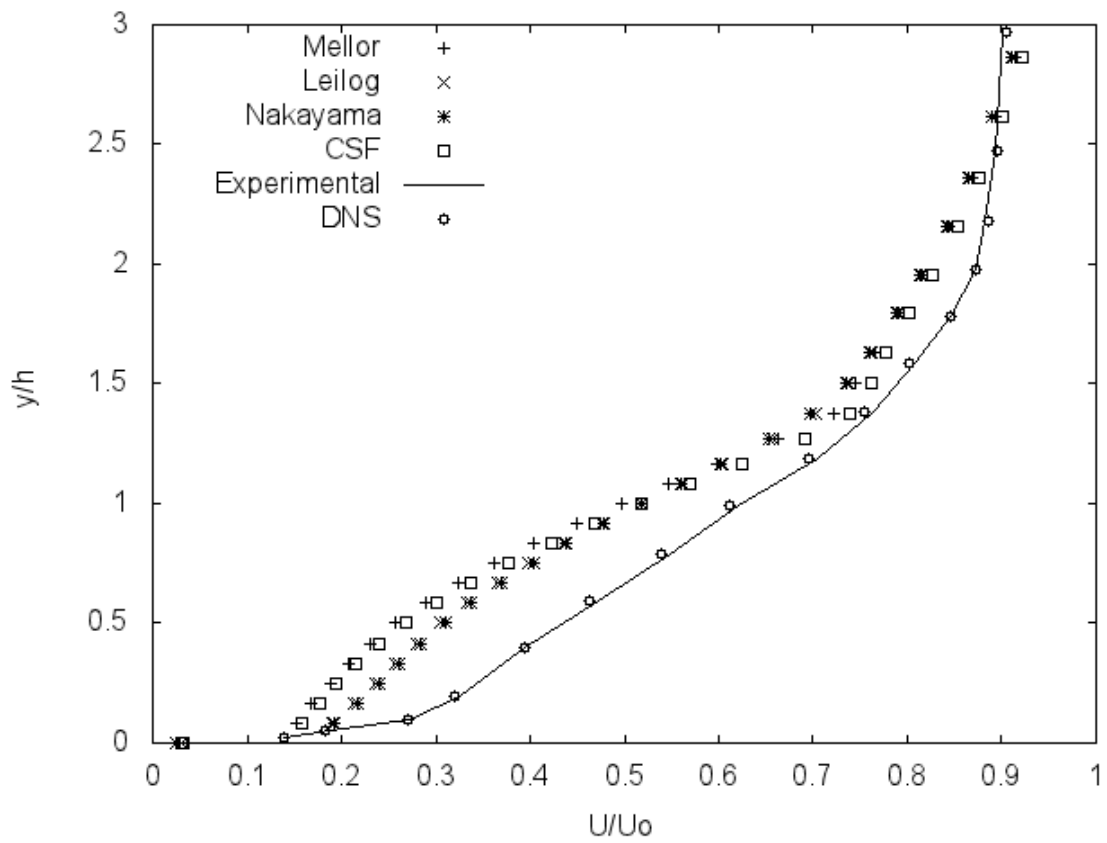


(a)  $x/h = 4$

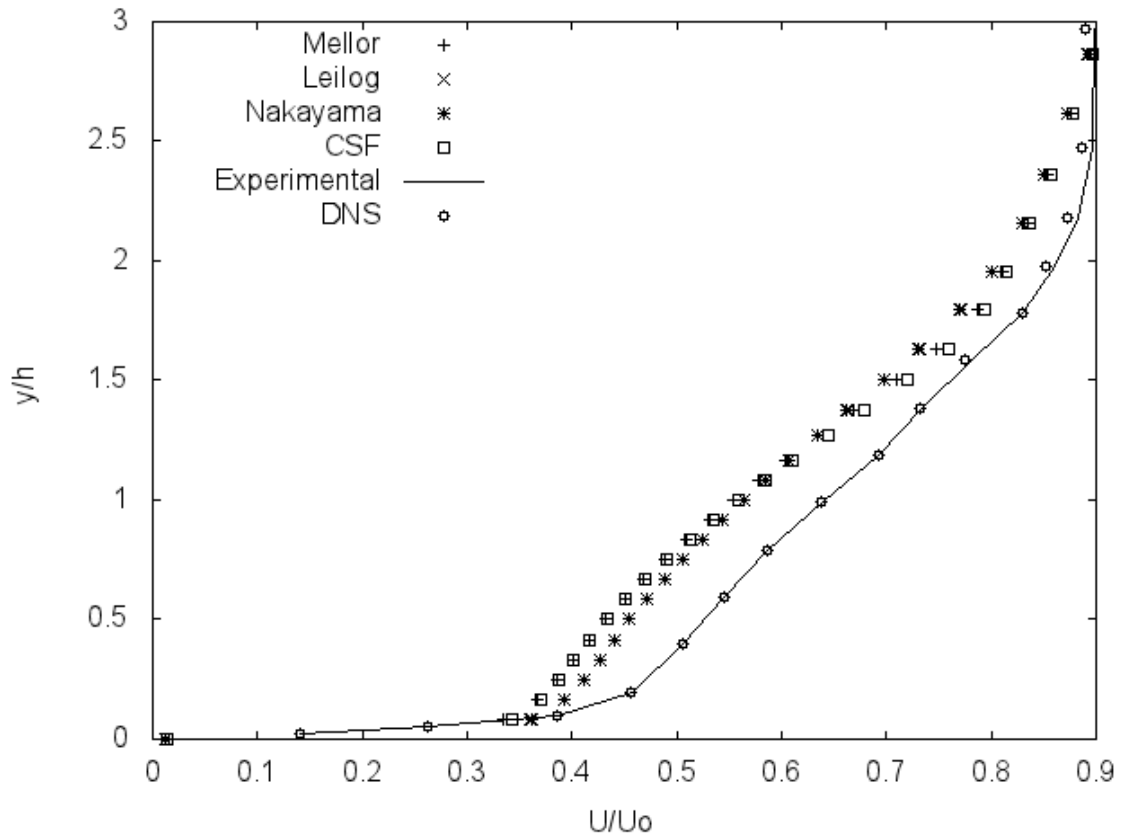


(b)  $x/h = 6$

Figura I.27: Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite



(a)  $x/h = 10$



(b)  $x/h = 19$

Figura I.28: Perfis de velocidade nas regiões de recuperação

Resultados obtidos com as seguintes condições de contorno: perfil turbulento na entrada do domínio;  $u_0 = 0,0714 \text{ m/s}$ ;  $L_0 = 1 \text{ m}$ .

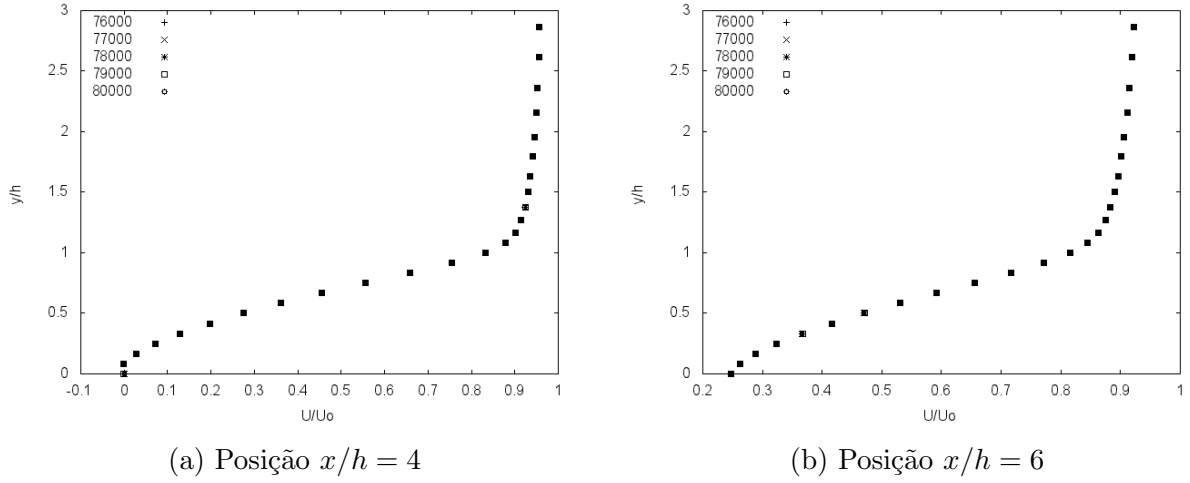


Figura I.29: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei logarítmica clássica

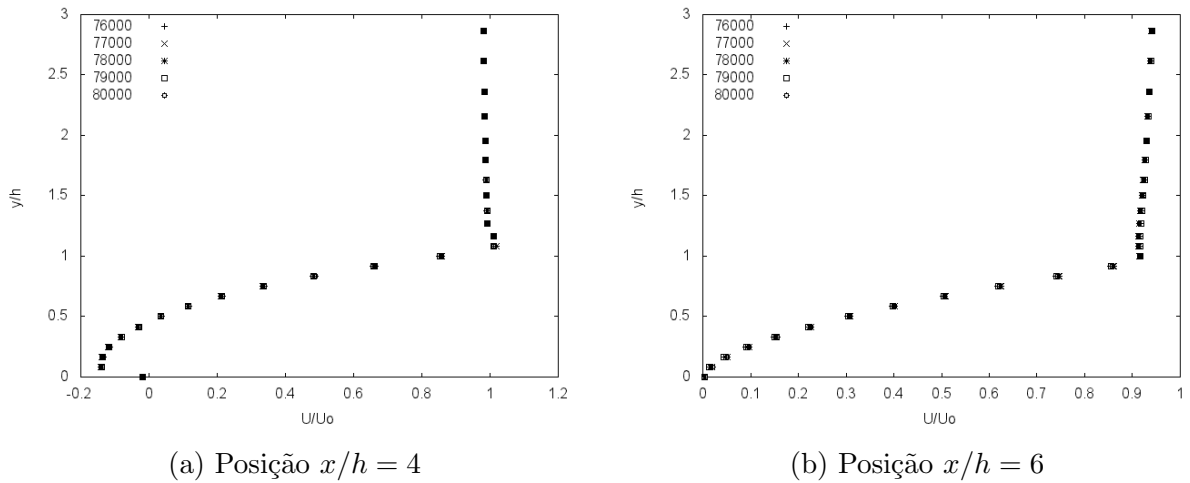
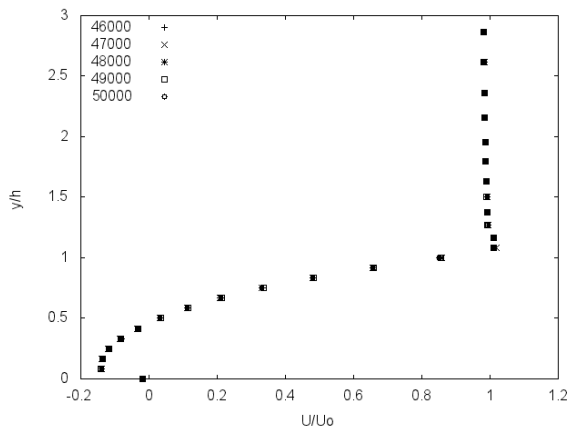
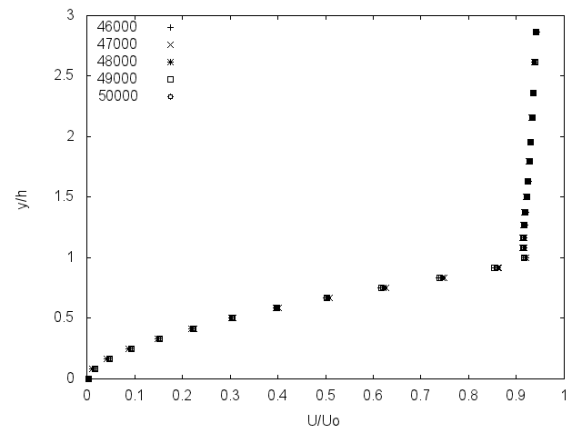


Figura I.30: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Mellor (1966)

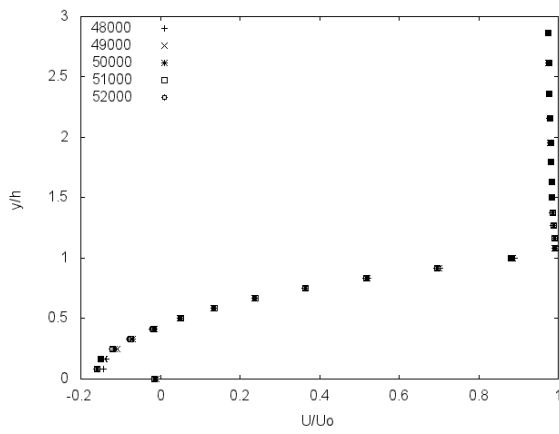


(a) Posição  $x/h = 4$

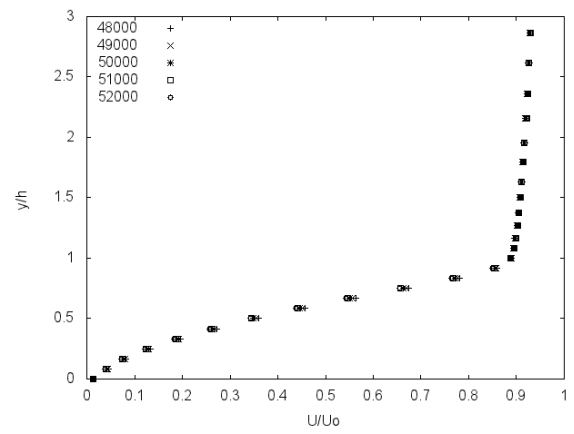


(b) Posição  $x/h = 6$

Figura I.31: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Nakayama e Koyama (1984)

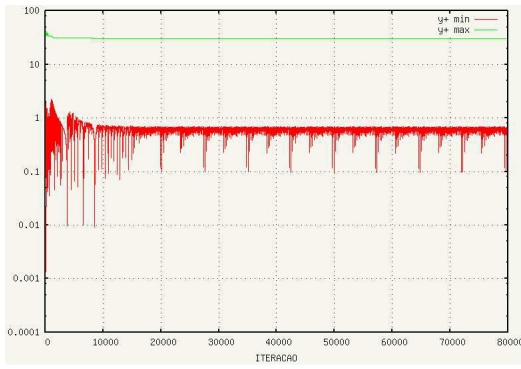


(a) Posição  $x/h = 4$

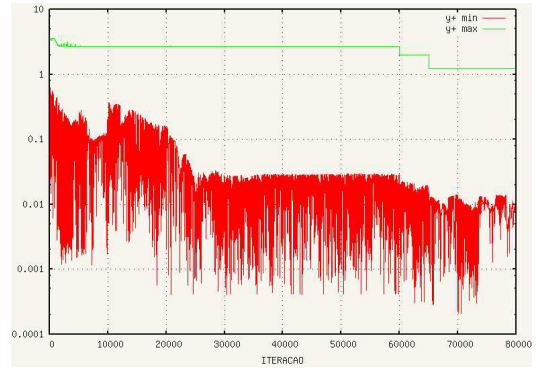


(b) Posição  $x/h = 6$

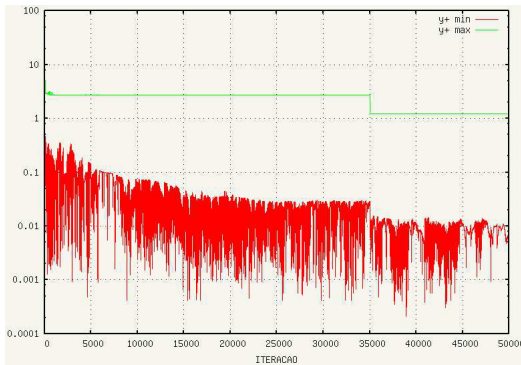
Figura I.32: Perfis de velocidade das últimas 5000 iterações da lei de Cruz e Silva Freire (1998)



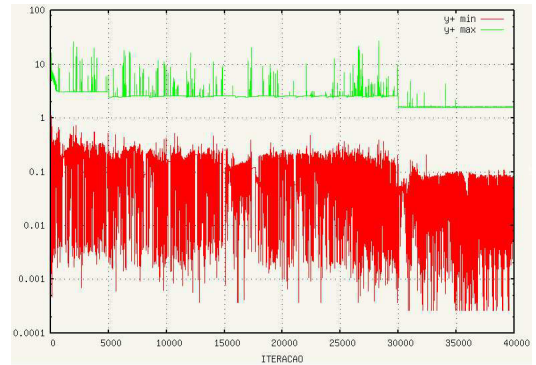
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

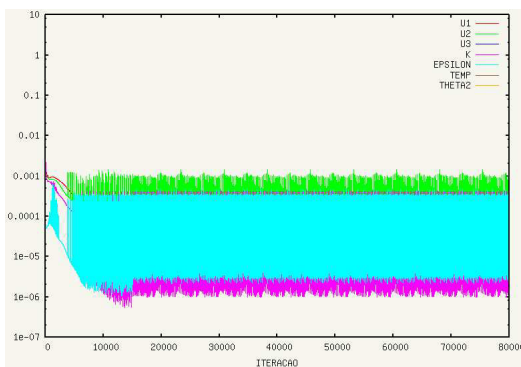


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

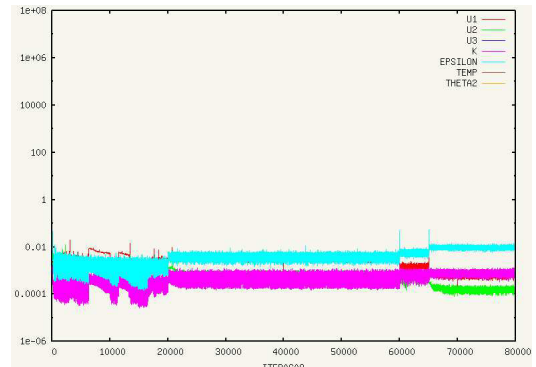


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

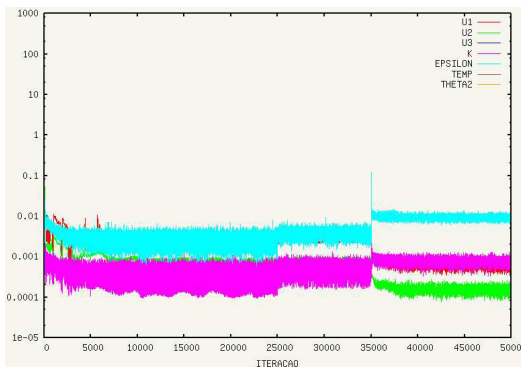
Figura I.33: Valores de  $y^+$



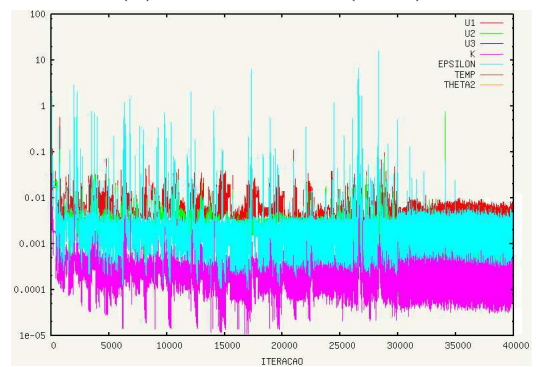
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)



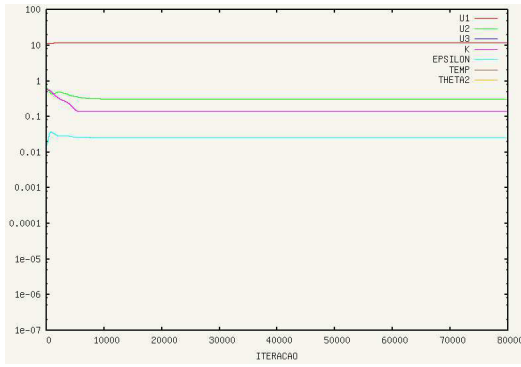
(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)



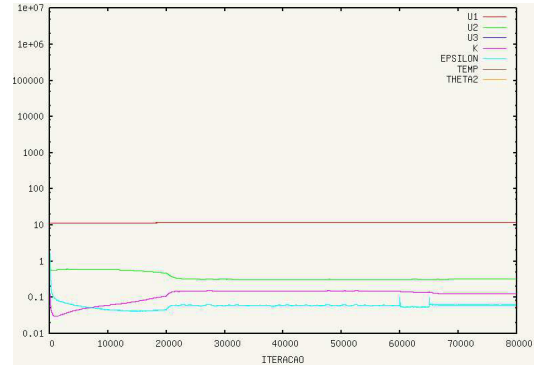
(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura I.34: Valores de erro

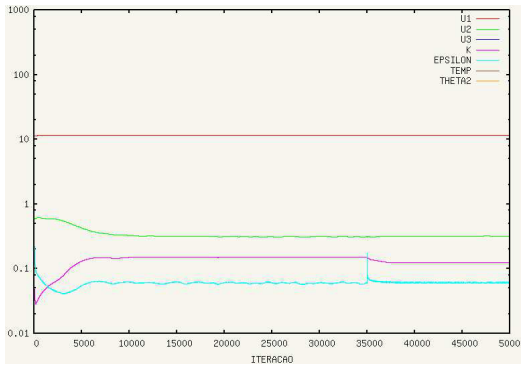




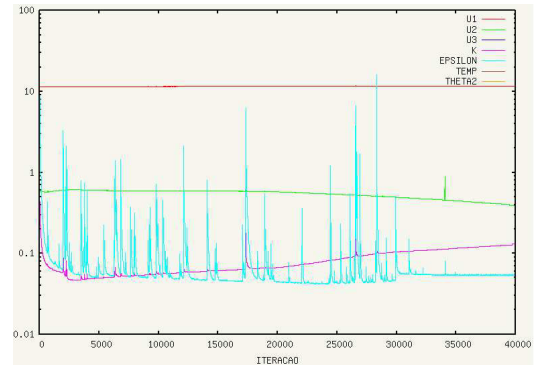
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

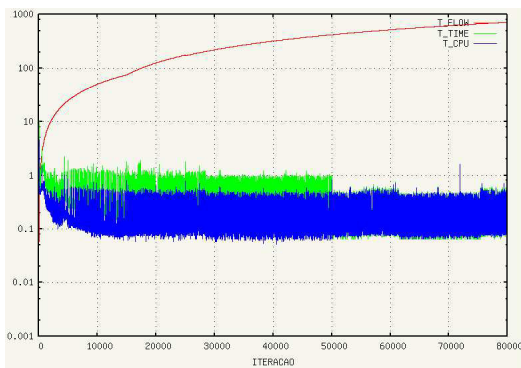


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

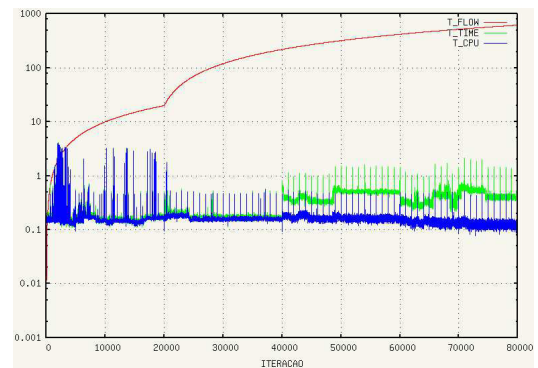


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

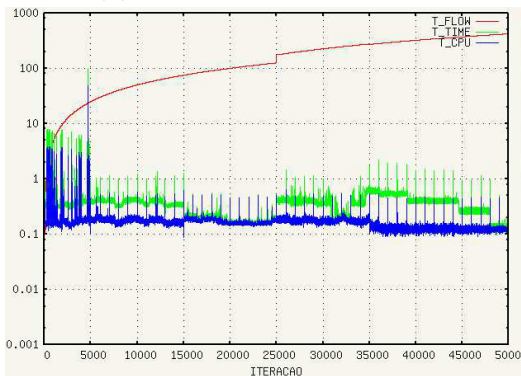
Figura I.35: Valores de norma



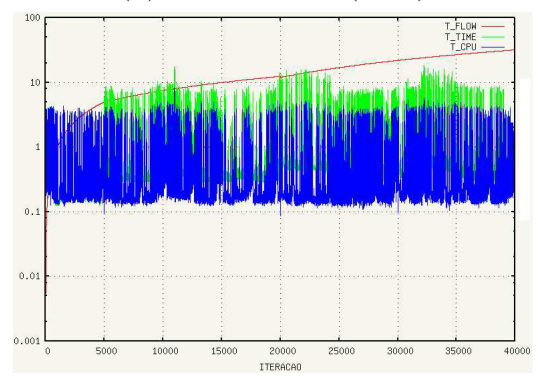
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

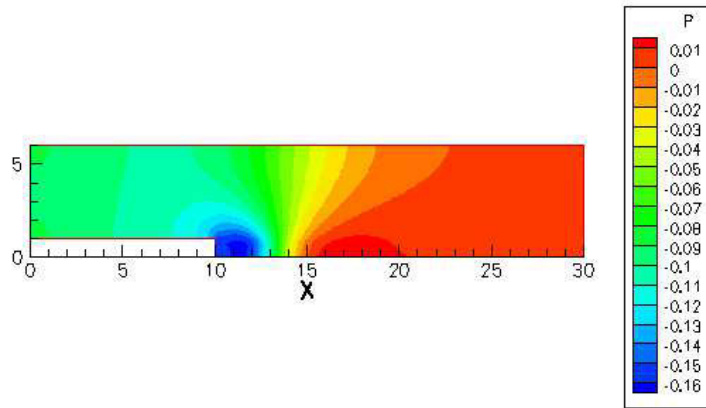


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

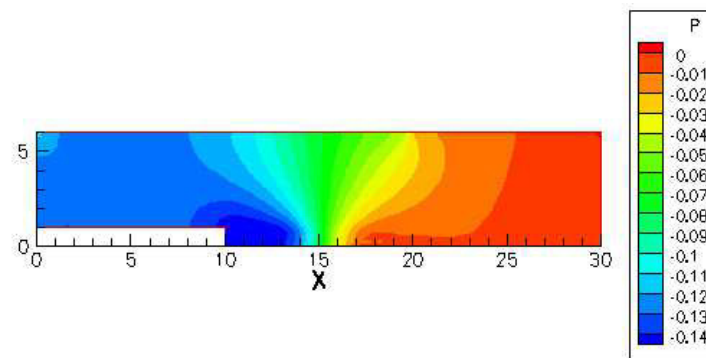


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

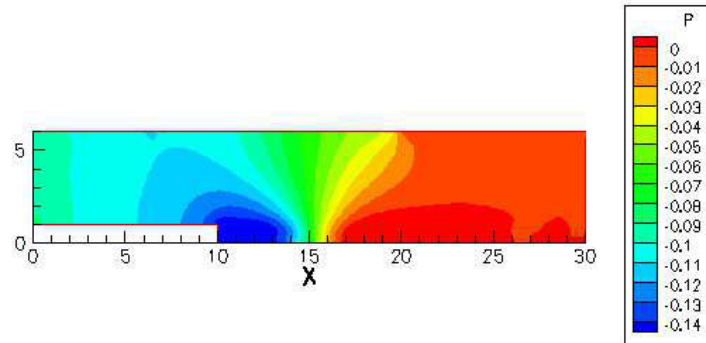
Figura I.36: Valores de tempo de escoamento simulado e tempo de CPU



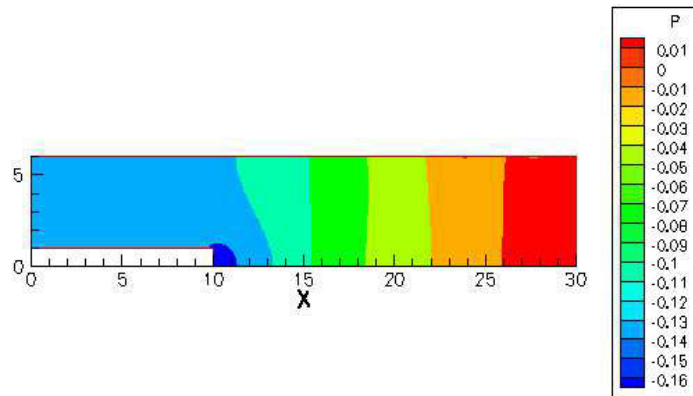
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

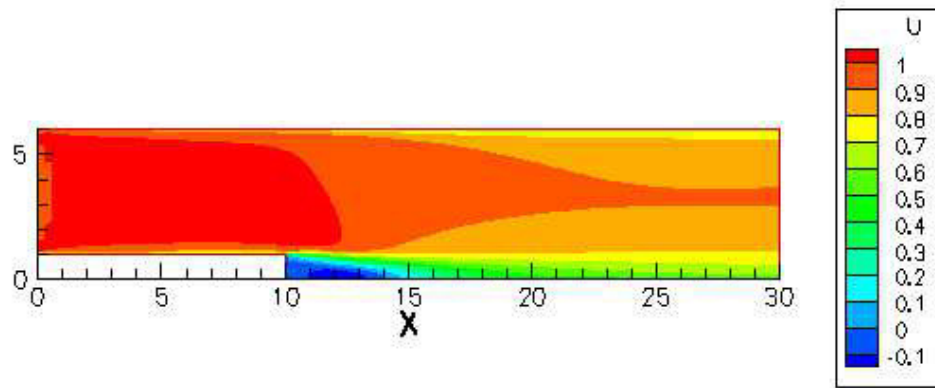


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

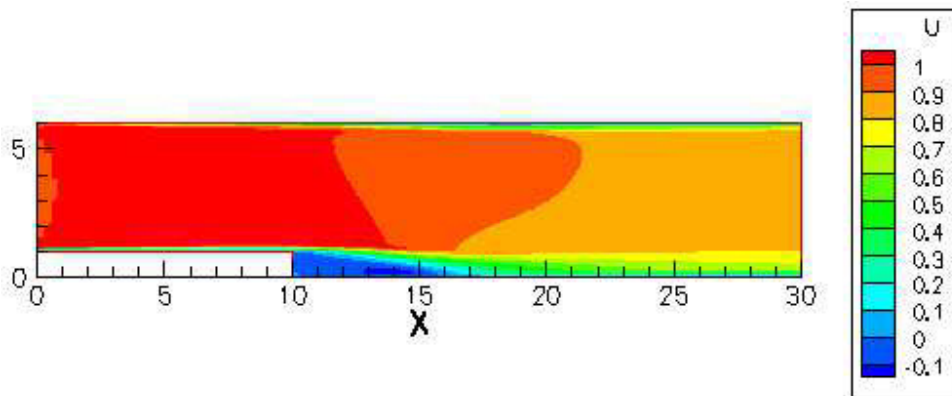


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

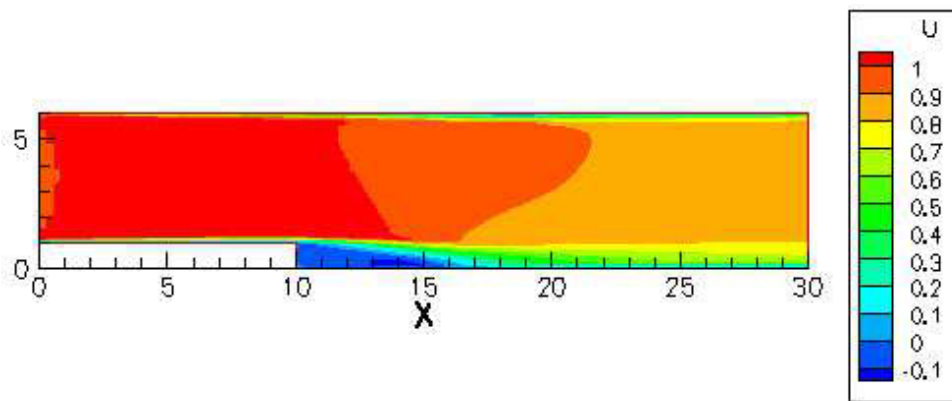
Figura I.37: Campos de pressão para as quatro leis de parede



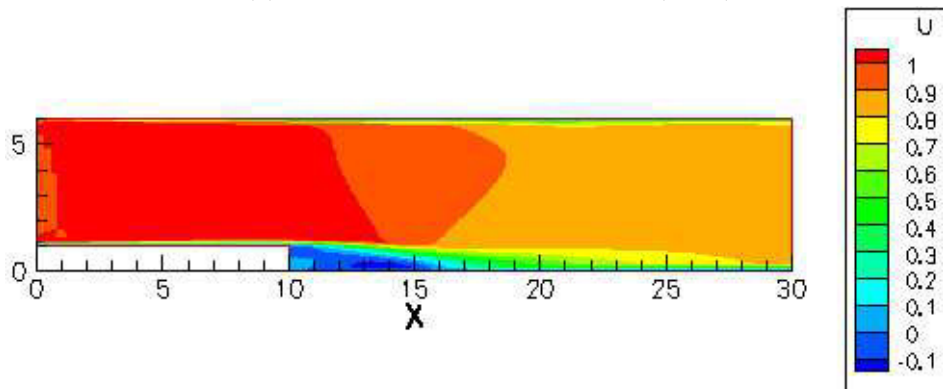
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

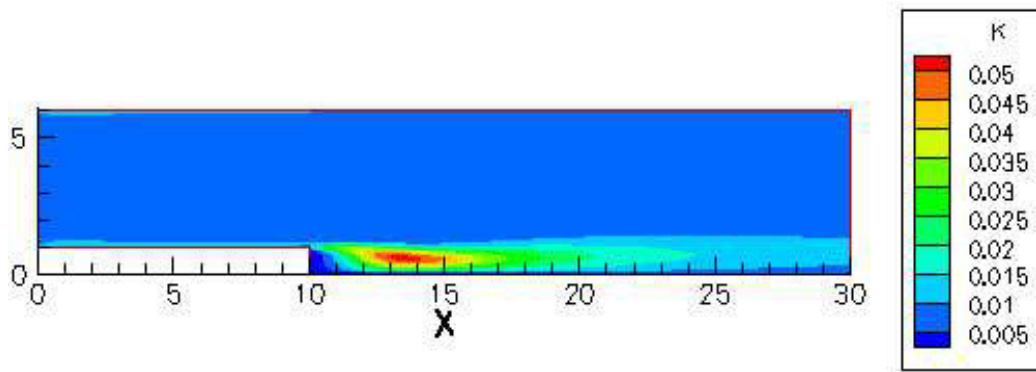


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

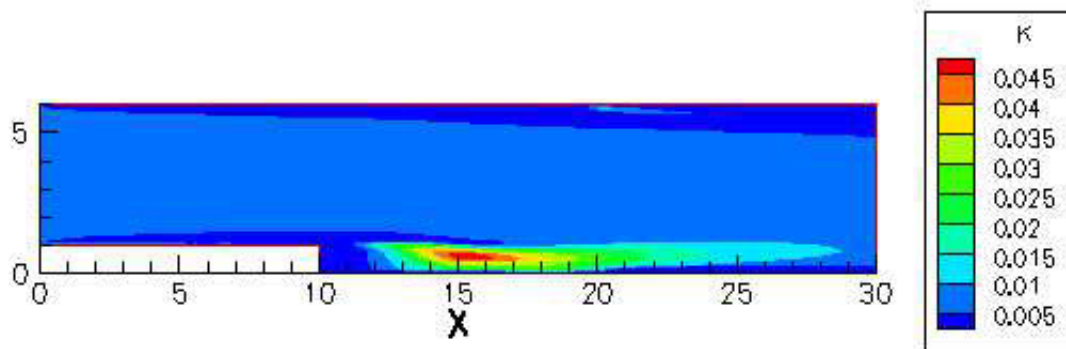


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

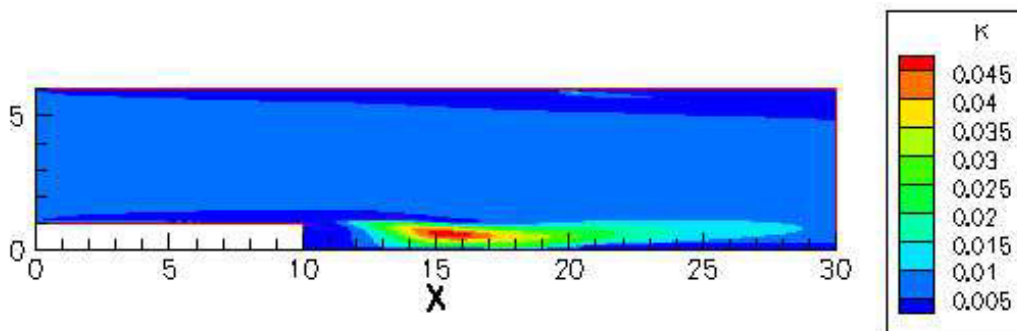
Figura I.38: Campos de velocidade para as quatro leis de parede



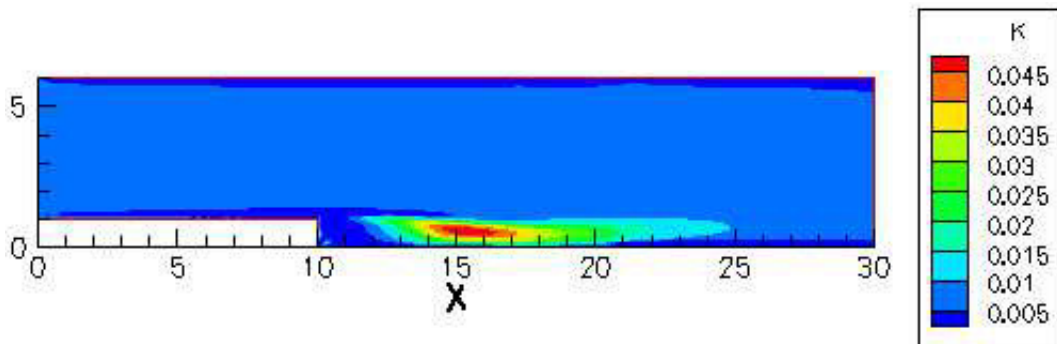
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

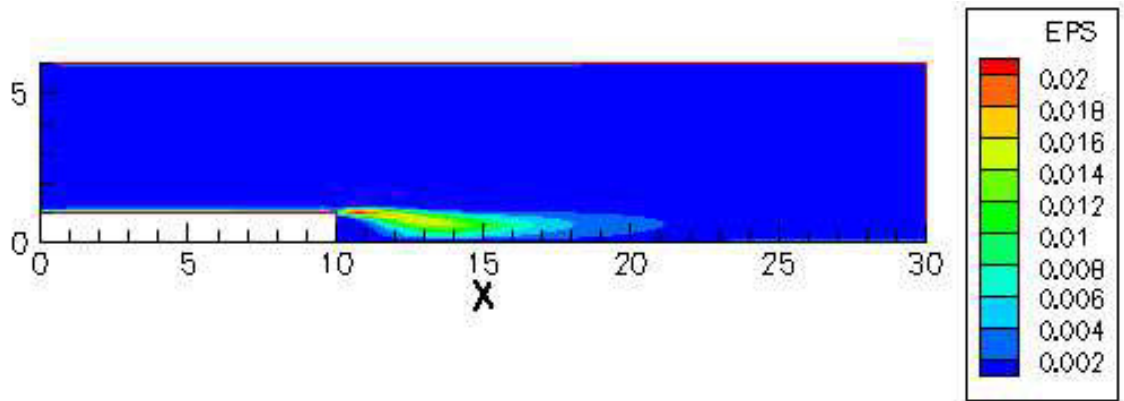


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

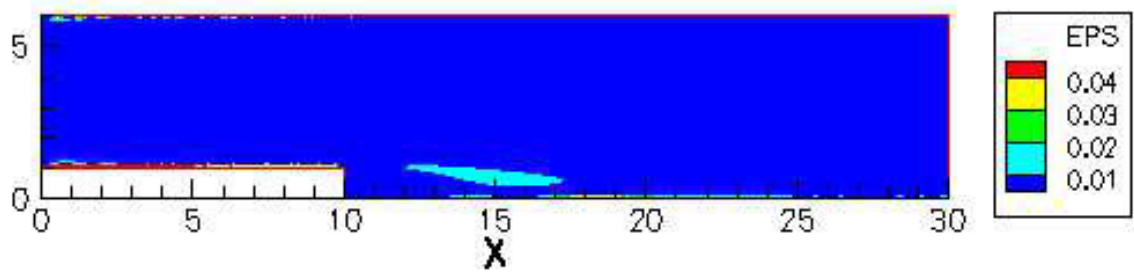


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

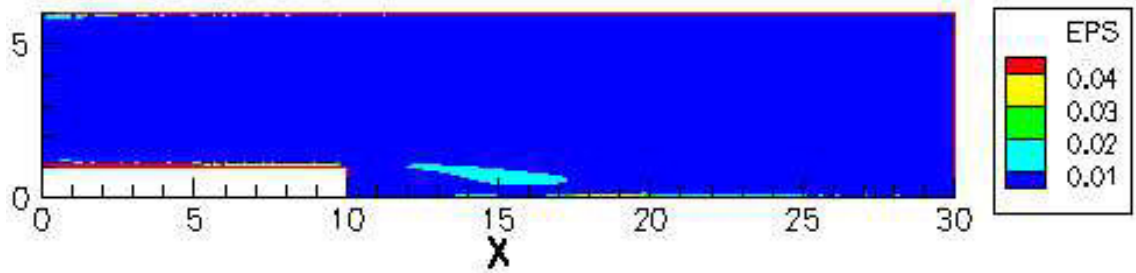
Figura I.39: Campos de energia cinética de turbulência para as quatro leis de parede



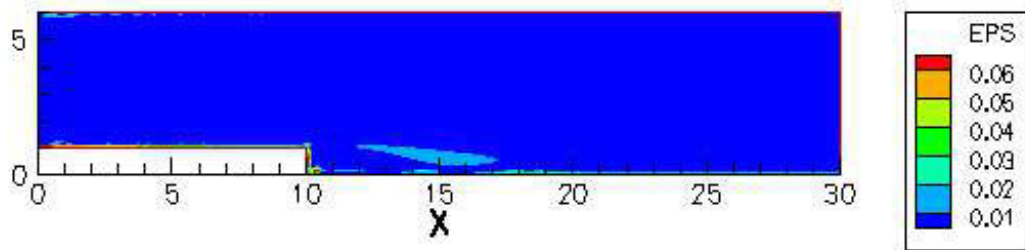
(a) Lei logarítmica clássica



(b) Lei de Mellor (1966)

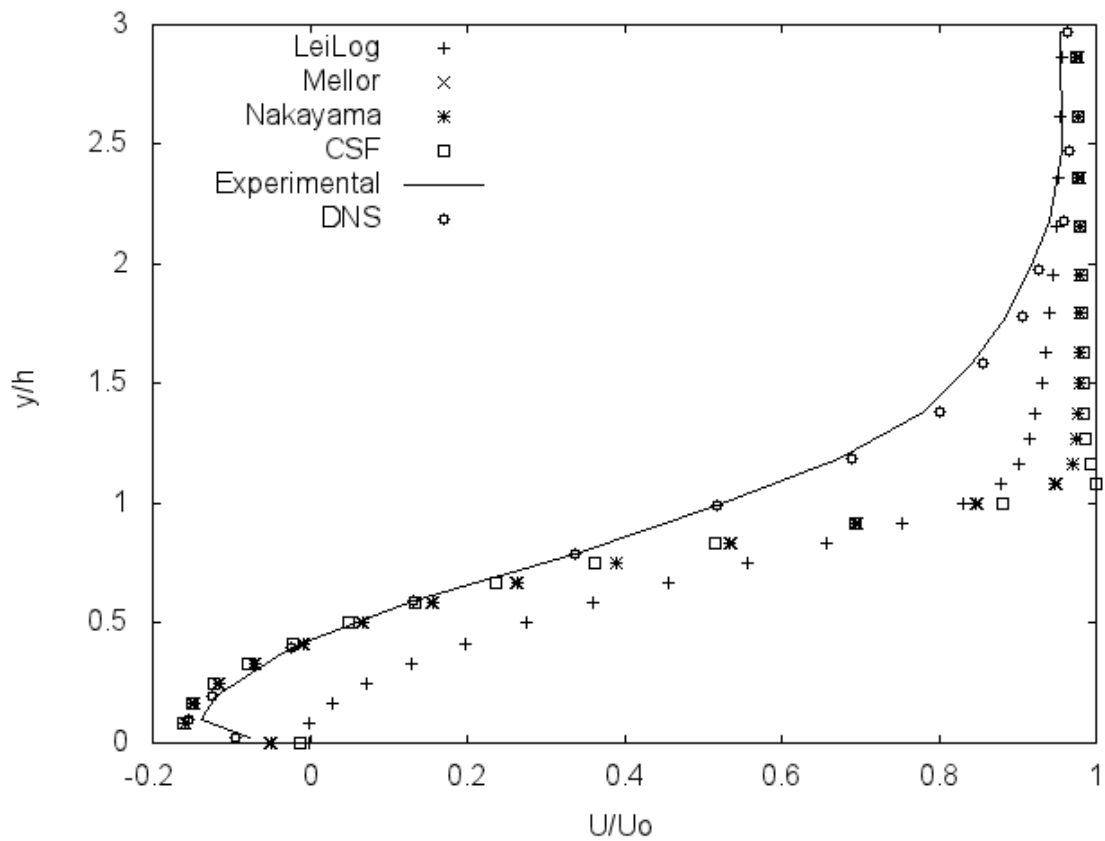


(c) Lei de Nakayama e Koyama (1984)

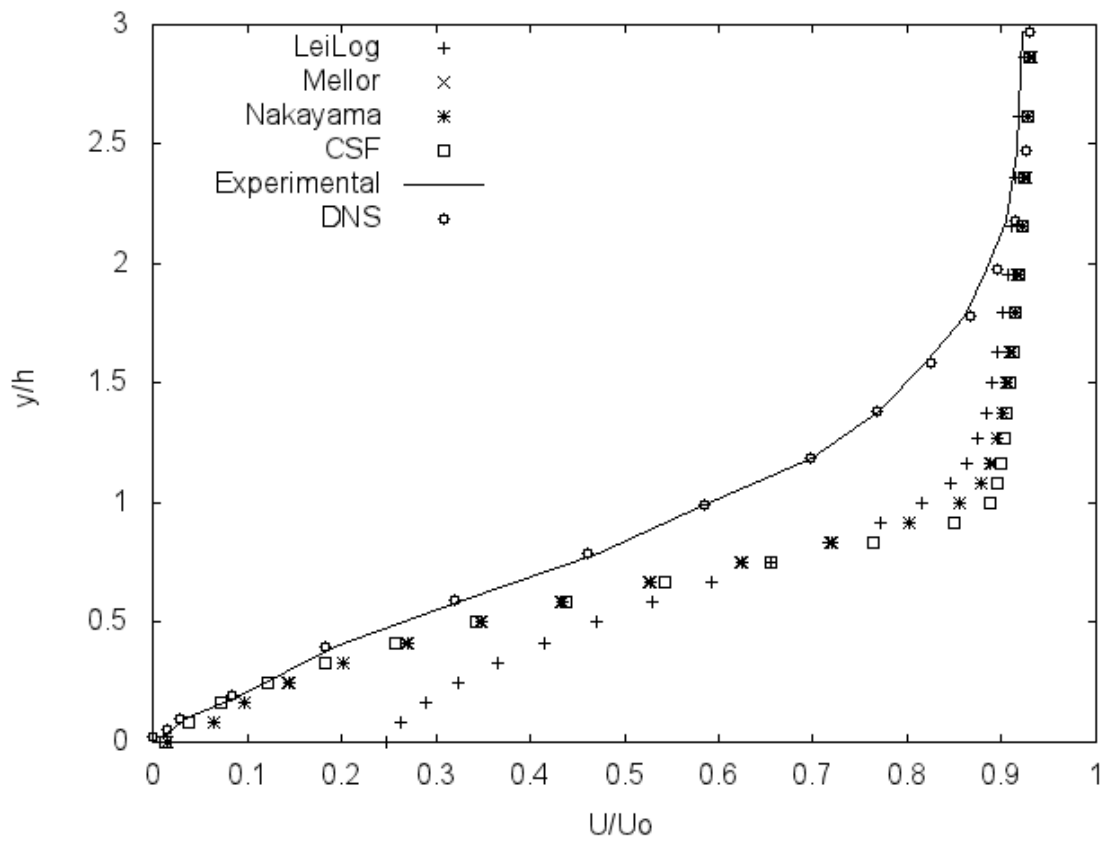


(d) Lei de Cruz e Silva Freire (1998)

Figura I.40: Campos de taxa de dissipação de turbulência para as quatro leis de parede

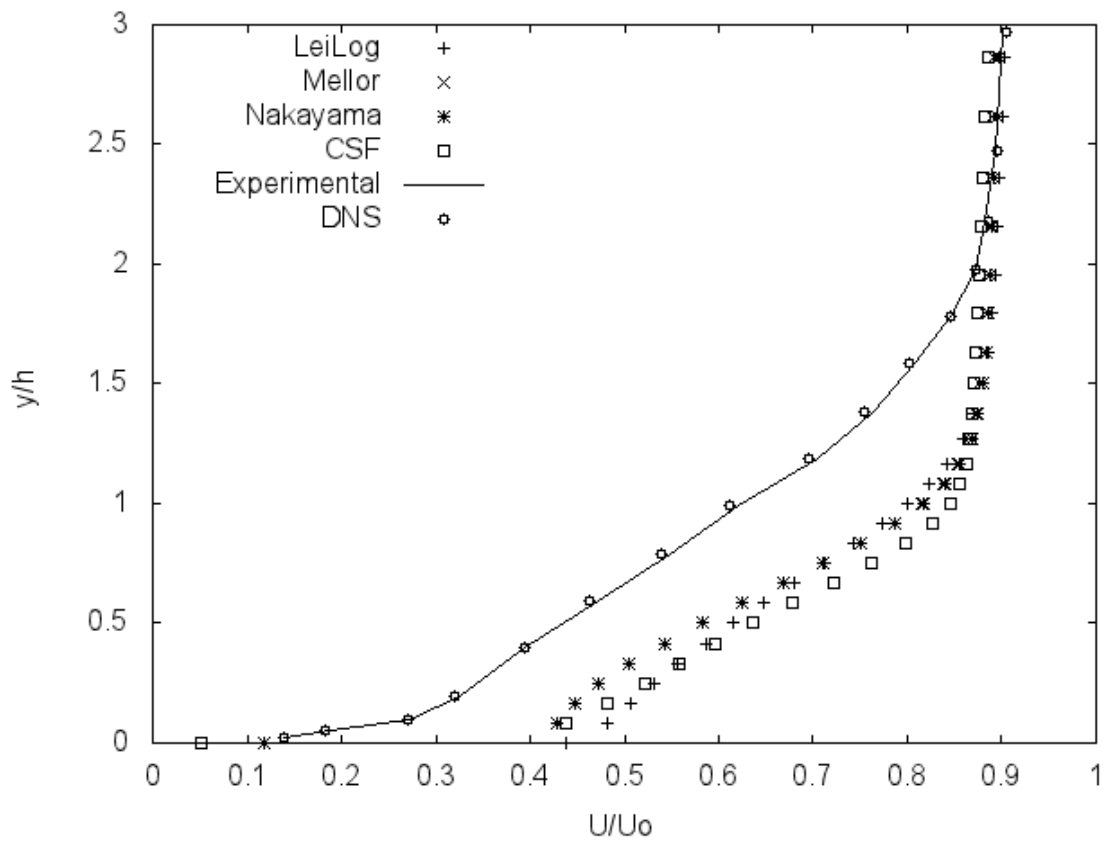


(a)  $x/h = 4$

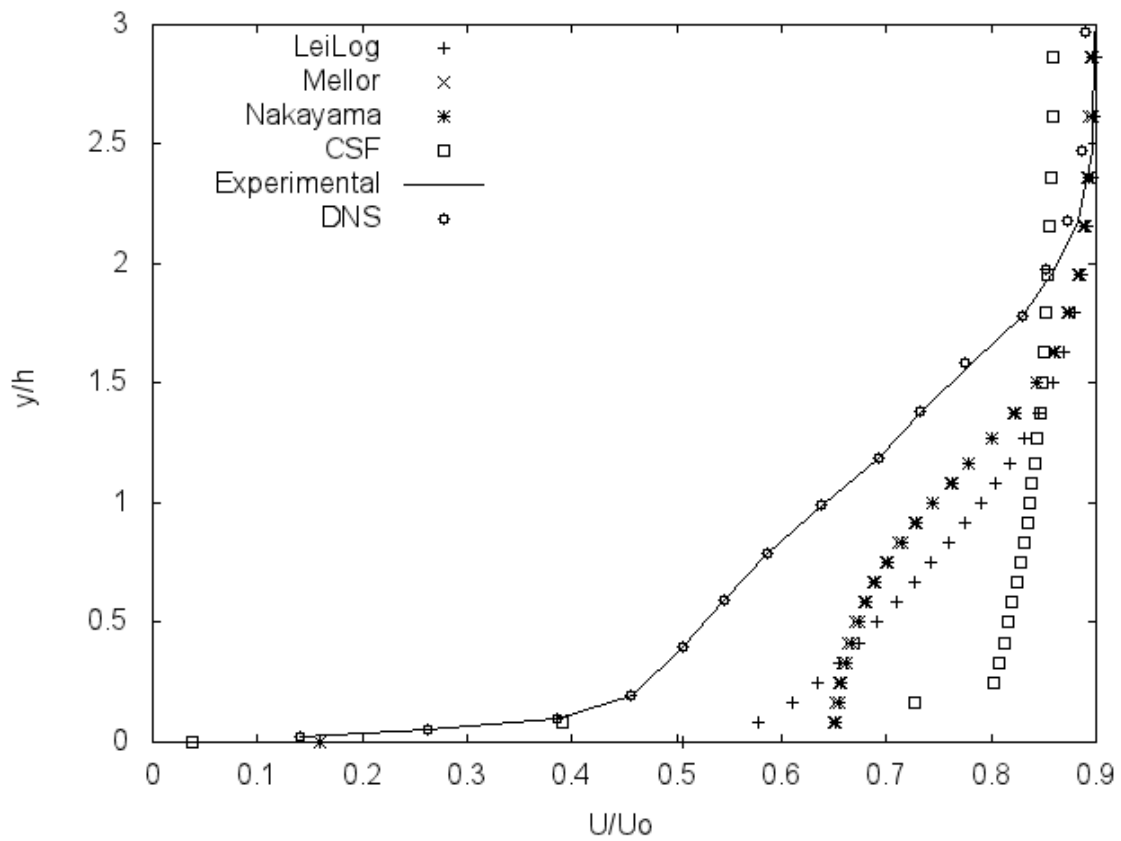


(b)  $x/h = 6$

Figura I.41: Perfis de velocidade nas regiões de recirculação e recolamento de camada limite



(a)  $x/h = 10$



(b)  $x/h = 19$

Figura I.42: Perfis de velocidade nas regiões de recuperação