



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTO-
PLÁSTICO CÍCLICO ESTABILIZADO: MODELO
DE GARUD**

Por,
Felipe Garcia Pereira

Brasília, 10 de Julho de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

PROJETO DE GRADUAÇÃO

DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTO- PLÁSTICO CÍCLICO ESTABILIZADO: MODELO DE GARUD

POR,

Felipe Garcia Pereira

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, UnB/ ENM (Orientador)

Prof. Fábio Comes de Castro UnB/ ENM

Prof. Lucival Malcher UnB/ ENM

Brasília, 10 de Julho de 2013

Agradecimento

Agradeço ao professor e orientador, Edgar Nobuo Mamiya, pelo incentivo, paciência e disponibilidade, bem como pela confiança depositada. Agradeço também aos meus pais por todo apoio e por não terem medido esforços para que eu chegasse a esta etapa da minha vida e à minha irmã por todo o estímulo e suporte.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o estudo de modelos mecânicos que descrevam o comportamento elasto-plástico sob carregamentos cíclicos multiaxiais proporcionais e não-proporcionais, visando produzir histórias de tensão e deformação necessárias para a construção de estimativas satisfatórias de vida à fadiga. Mais especificamente, o estudo concentra-se nos modelos de encruamento cinemático de Prager e de Garud. O relatório apresenta (i) a implementação computacional do modelo elasto-plástico com encruamentos cinemático linear e cinemático linear por partes, ambos no contexto uniaxial, assim como a validação destes modelos, (ii) a implementação computacional do modelo de Prager com múltiplas superfícies de escoamento no contexto de carregamentos normais-cisalhantes, (iii) a implementação computacional do modelo de Garud, (iv) a validação desta ferramenta e a simulação de carregamentos multiaxiais proporcionais e não-proporcionais do tipo tração-cisalhamento. Os resultados das simulações foram comparados com observações experimentais disponíveis na literatura.

ABSTRACT

The objective of this work is the study of mechanical models that describe the elastoplastic behavior under proportional and non-proportional multiaxial cyclic loadings, aiming to produce stress and strain histories needed for a satisfactory estimation of fatigue life. Specifically, the study is focused on the kinematic hardening models proposed by Prager and Garud. The report presents (i) the computational implementation of the elastoplastic model with linear kinematic hardening and piecewise linear kinematic hardening, both in the uniaxial context, as well as the validation of these models, (ii) the computational implementation of Prager's model with multiple yield surfaces in the context of normal and shear loadings, (iii) the computational implementation of Garud's model, (iv) the validation of this tool and the simulation of multiaxial proportional and non-proportional normal and shear loadings. The simulation results were compared with experimental observations available in literature.

SUMÁRIO

1. Introdução	1
2. Plasticidade unidimensional	4
2.1 Definições preliminares	4
2.1.1 Deslocamento e deformação	4
2.1.2 Tensão	4
2.1.3 Relações constitutivas	5
2.2 Modelo com encruamento cinemático linear	6
2.2.1 Modelo matemático	6
2.2.2 Modelo discretizado	9
2.2.3 Algoritmo de integração numérica	10
2.3 Modelo com encruamento cinemático linear por partes	12
2.3.1 Modelo matemático	13
2.3.2 Modelo discretizado	14
2.3.3 Algoritmo de integração numérica	15
2.4 Resultados	19
2.4.1 Modelo com encruamento cinemático linear	20
2.4.2 Modelo com encruamento cinemático linear por partes	21
3. Plasticidade sob carregamentos normais-cisalhantes	23
3.1 O estado de tensão normal-cisalhante	23
3.2 Relação tensão-deformação	24
3.3 Modelo matemático da descrição do comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear	26
3.4 Modelo matemático da descrição do comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear por partes	30
3.4.1 Modelo discretizado	32
3.4.2 Algoritmo de integração numérica	33
3.5 Resultados	36
3.5.1 Cisalhamento puro	36
3.5.2 Tração pura	36
3.5.3 Carregamento não-proporcional	37
4. Modelo de Garud para encruamento cinemático	39
4.1 Modelo matemático	40
4.1.1 Decomposição aditiva da deformação	40
4.1.2 Relação tensão-deformação	40
4.1.3 Domínios elástico e de encruamento: modelo de Mises	41
4.1.4 Evolução da deformação plástica	42
4.1.5 Condição de complementaridade de Kuhn-Tucker	42
4.1.6 Condição de consistência	43
4.1.7 Módulo plástico	43
4.1.8 Modelo de Garud para o encruamento cinemático	44
4.1.9 Multiplicador de encruamento cinemático	45
4.1.10 Expressão alternativa para o multiplicador plástico	45
4.1.11 Resumo do modelo	46
4.2 Modelo discretizado: regra de euler explícito	47
4.3 Integração do modelo discretizado	49
4.3.1 Estado tentativo	49
4.3.2 Passo plástico: modelo de Garud	49
4.3.3 Correção do passo	51
4.3.4 Empacotamento de superfícies de escoamento	52
4.3.5 Algoritmo	53
4.4 Estado de tensão normal-cisalhante	55
5. Estudo de casos	57
5.1 Simulação de carregamentos uniaxiais	57
5.1.1 Ensaio de tração	57

5.1.2	Ensaio de Torção	58
5.2	Simulação de carregamentos multiaxiais	60
5.2.1	SAE 1045.....	60
5.2.2	7075-T651	63
5.2.3	Efeito do número de superfícies de encruamento	66
6.	Conclusões e recomendações	68
6.1	Conclusões	68
6.2	Recomendações	69
	Referências Bibliográficas.....	70
	Anexos	72

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Ilustrações de falhas por fadiga com resultados catastróficos. (a) Navio da classe Liberty; (b) trem de alta velocidade ICE 884 e (c) aeronave Comet.	2
Figura 2.1 – Comportamento sob carregamento e descarregamento.	6
Figura 2.2 - Evolução do centro do domínio elástico.	8
Figura 2.3 - Evolução dos centros das superfícies de escoamento.	13
Figura 2.4 - Superfícies de escoamento.	14
Figura 2.5 - Correção do passo.	17
Figura 2.6 - Simulação de ensaio uniaxial de tração. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação. . .	20
Figura 2.7 - Simulação de ensaio de tração com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	21
Figura 2.8 - Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude constante. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	22
Figura 2.9 - Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	22
Figura 3.1- Estado de tensão normal-cisalhante.	23
Figura 3.2 - Evolução do centro do domínio elástico.	27
Figura 3.3 - Curva idealizada descrevendo a tensão σ_x em função da deformação plástica ϵ_{xp} em um ensaio de tração simples.	29
Figura 3.4 - Comportamento dos centros β_1 e β_2 das superfícies de escoamento com a evolução da tensão σ . 31	
Figura 3.5 - Simulação de ensaio de cisalhamento puro. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	36
Figura 3.6 - Simulação de ensaio de tração com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	37
Figura 3.7 - Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	37
Figura 3.8 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional do tipo normal-cisalhante (a) deformação normal em função da deformação cisalhante. Respostas da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante. Respostas da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.	38
Figura 4.1 - Comportamento da superfície de escoamento sob carregamento não-proporcional, pelo modelo de Prager.	39
Figura 4.2 – Superfícies múltiplas de encruamento.	41
Figura 4.3 - Evolução do centro da superfície de escoamento pelo modelo de Garud.	44
Figura 4.4 – Evolução do estado de tensão gerando intersecção espúria entre superfícies de encruamento.	51
Figura 4.5 – Ilustração de situação em que a superfície de encruamento ativa está associada a $f_2 = 0$, mas no passo seguinte estará associada a $f_5 = 0$	52
Figura 5.1 – Simulação de ensaio de tração com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	57
Figura 5.2 – Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	58
Figura 5.3 – Simulação de ensaio de torção com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	59
Figura 5.4 - Simulação de ensaio de torção com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.	59
Figura 5.5 – Simulação de ensaio com carregamento proporcional do tipo normal cisalhante. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.	61
Figura 5.6 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória elíptica. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.	62

<i>Figura 5.7 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória retangular. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.</i>	<i>63</i>
<i>Figura 5.8 - Simulação de ensaio com carregamento proporcional do tipo normal cisalhante. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.</i>	<i>64</i>
<i>Figura 5.9 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória elíptica. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.</i>	<i>65</i>
<i>Figura 5.10 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória em oito. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.</i>	<i>66</i>
<i>Figura 5.11 – Comparação entre simulações realizadas com diferentes quantidades de superfícies de encruamento e dados experimentais.</i>	<i>67</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

C	Matriz de elasticidade
C_l	Módulo plástico no estágio l
$dev(\cdot)$	Operador que transforma para o espaço desviador
E	Módulo de elasticidade
f	Função de escoamento
G	Módulo de elasticidade ao cisalhamento
H	Coefficiente de encruamento
H'	Coefficiente de encruamento cíclico
H_0	Módulo de encruamento cinemático
I	Tensor identidade
k	Módulo de elasticidade volumétrico
L	Identificador de estágio de encruamento
M	Último estágio de encruamento prescrito
n	Expoente de encruamento
n'	Expoente de encruamento cíclico
N_l	Vetor de fluxo plástico
P	Operador que projeta o estado de tensão no espaço das tensões desviadoras
\bar{P}	Operador que projeta o estado de tensão no espaço das tensões desviadoras
S	Tensão desviadora
t	Instante de tempo
tr	Operador do traço de um tensor
Y_l	Direção da evolução de centro da superfícies de escoamento no modelo de Garud

Símbolos Gregos

α	Fator de correção de passo
β	Centro da superfície de escoamento
$\Delta\varepsilon$	Incremento de deformação
ε	Deformação total
ε^e	Deformação elástica
ε^p	Deformação plástica
$\dot{\eta}_l$	Multiplicador de encruamento cinemático
γ	Multiplicador plástico
λ	Constante de Lamé
μ	Constante de Lamé
ν	Coefficiente de Poisson
σ	Tensão
σ_H	Tensão hidrostática
σ_y	Tensão de escoamento

1. INTRODUÇÃO

A Fadiga é um modo de falha experimentado em componentes mecânico/estruturais submetidos a solicitações variáveis no tempo, que levam eventualmente à nucleação e propagação de trincas. Essa degradação progressiva do material é ocasionada principalmente pela acumulação de deformações plásticas, que podem ocorrer em diferentes escalas. Quando o material é submetido a deformações plásticas macroscópicas sob carregamentos variáveis, diz-se que experimenta fadiga de baixo ciclo. Por outro lado, se a deformação plástica acumulada se dá apenas em um nível mesoscópico (do grão) e o comportamento macroscópico é elástico, então tem-se fadiga de alto ciclo.

Desde o final do século XIX, a fadiga de metais tem ocupado posição de destaque entre os desafios associados a projetos mecânicos. Por isso, as comunidades científica e industrial têm despendido grande esforço no sentido de produzir ferramentas que permitam quantificar este tipo de degradação material. Entretanto, por conta da complexidade do assunto há, ainda hoje, uma infinidade de questões em aberto relativas ao tema. Como consequência, a fadiga ainda é a causa mais frequente da falha de componentes mecânicos, gerando grandes prejuízos, tanto do ponto de vista econômico quanto em relação a vidas humanas. Uma quantidade significativa de cargueiros da classe Liberty (700 de um total de 2500), muito utilizado durante a segunda guerra mundial, foi vítima de fraturas no casco, sendo que em 145 casos a embarcação se partiu em dois (Broek, 1985), como mostrado na Fig. 1.1 (a). Em 1998, um trem de alta velocidade (ICE 884) descarrilou na Alemanha, conforme ilustra a Fig. 1.1 (b), em decorrência da fratura de uma das rodas, causando a morte de mais de cem pessoas (Esslinger, 2004). A Fig 1.1 (c) ilustra uma aeronave tipo Comet, primeira aeronave a jato a entrar em serviço regular de transporte de passageiros. Esta classe de aeronaves ficou marcada pelos acidentes ocorridos em operação que foram responsáveis pela morte de muitas pessoas. Estes acidentes estavam relacionados a falhas por fadiga na fuselagem associados a ciclos de pressurização e despressurização da cabine (withey, 1997).

O primeiro grande impacto de falhas relacionadas a cargas cíclicas envolveu a indústria ferroviária nos anos de 1840, onde observou-se uma grande quantidade de eixos que começaram a falhar após um pequeno período em serviço. Como essas falhas pareciam ser diferentes das rupturas associadas a testes de carregamentos monotônicos, o conceito de “cristalização” devido à vibração foi sugerido e posteriormente rejeitado. O nome “fadiga” foi introduzido nos anos de 1840 e 1850 para descrever falhas decorrentes de tensões cíclicas. O pesquisador August Wöhler conduziu investigações sistemáticas da falha por fadiga nos anos de 1850 e 1860. Estes experimentos eram voltados à falha em trilhos de ferrovias e envolviam cargas axiais de flexão e de torção em escala real. Seu trabalho levou à caracterização de comportamento de fadiga em termos das curvas de amplitude de tensão pela vida (S-N) e ao conceito de “limite de resistência à fadiga”.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.1 - Ilustrações de falhas por fadiga com resultados catastróficos. (a) Navio da classe Liberty; (b) trem de alta velocidade ICE 884 e (c) aeronave Comet.

Em seguida, Bauschinger (1886) provou que a tensão de escoamento, em tração ou compressão, é reduzida após a aplicação de uma carga de sinal oposto que causa deformações plásticas. Esta foi a primeira indicação de que uma única reversão de deformação plástica poderia mudar o comportamento de tensão-deformação de metais, tendo sido o primeiro passo no entendimento do amolecimento e endurecimento cíclico dos metais. Posteriormente, Basquin (1910) mostrou que a amplitude de tensão versus número de ciclos para falha (S-N) na região de vida finita pode ser representada por uma relação linear na escala log-log. Coffin (1962) e Manson (1964) iniciaram seus trabalhos nos anos 50 e estabeleceram quantitativamente as relações entre deformações plásticas e a vida à fadiga. Ambos foram motivados por problemas de fadiga em metais a altas temperaturas onde as deformações inelásticas não podem ser ignoradas. Ainda nos dias de hoje, o modelo de Coffin e Manson, e, portanto, a descrição do comportamento elasto-plástico, é ingrediente importante nos modelos de estimativa de vida à fadiga, seja no contexto de carregamento uniaxial ou no contexto multiaxial.

A comunidade científica tem apresentado um grande número de propostas para a descrição do comportamento elasto-plástico sob carregamentos cíclicos, destacando-se as contribuições de Prager e Ziegler (1956), Armstrong e Frederick (1966), Mróz (1967), Chaboche et al. (1979), Garud (1981), Jiang e Sehitoglu (1996), entre outros. É neste contexto que esta monografia se dedica à descrição do comportamento elasto-plástico sob carregamentos cíclicos: apresenta-se um estudo comparativo de

modelos mecânicos que descrevam o comportamento elasto-plástico sob carregamentos cíclicos multiaxiais proporcionais e não-proporcionais, visando produzir histórias de tensão e deformação necessárias para a construção de estimativas satisfatórias de vida à fadiga. Em particular, o estudo concentra-se numa análise comparativa entre os modelos de encruamento cinemático de Prager (1958) e de Garud (1981).

A monografia está organizada da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta, no contexto unidimensional, o modelo matemático, o modelo discretizado e o algoritmo de simulação da plasticidade com encruamento cinemático linear e encruamento cinemático linear por partes; o capítulo 3 estende o estudo para situações envolvendo carregamentos normais-cisalhantes, considerando-se encruamento cinemático de Prager com múltiplas superfícies de escoamento, incluindo resultados preliminares de simulação numérica; o capítulo 4, onde está localizado o principal objeto de estudo deste trabalho, considera a lei de encruamento de Garud para a descrição do comportamento elasto-plástico sob carregamentos normais-cisalhantes; o capítulo 5 apresenta os resultados das simulações relacionados ao modelo de Garud e, finalmente, o capítulo 6 apresenta as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

2. PLASTICIDADE UNIDIMENSIONAL

Como passo introdutório no desenvolvimento deste estudo, aborda-se a plasticidade no contexto unidimensional (uniaxial). Como se verá no capítulo seguinte, este modelo simples já contém grande parte dos ingredientes mais importantes para a descrição do comportamento elasto-plástico.

2.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

2.1.1 Deslocamento e deformação

Inicialmente, introduz-se o conceito de deslocamento no contexto unidimensional. Seja X_0 a coordenada original de um ponto material p e seja X a coordenada do mesmo ponto após um movimento qualquer do sólido em estudo. Diz-se que o deslocamento u do ponto p é a diferença entre suas posições final e inicial, isto é:

$$u(p) = X - X_0. \quad (2.1)$$

O conceito de deformação está associado à ideia de variação dimensional e de forma. Se uma barra é tracionada, então sua deformação longitudinal média é dada pela diferença entre os comprimentos final (após a tração) e inicial (antes do carregamento mecânico), dividida pelo comprimento inicial:

$$\varepsilon_{m\acute{e}dia} = \frac{L_{final} - L_{inicial}}{L_{inicial}}. \quad (2.2)$$

Localmente, a deformação da barra pode ser definida como:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}, \quad (2.3)$$

ou seja, a deformação local em uma coordenada x de uma barra pode ser descrita como sendo a variação do campo de deslocamentos u quando se varia a coordenada x .

2.1.2 Tensão

Para que se possa entender o conceito de tensão, é necessário que se introduza o conceito de esforço interno. Basicamente, um esforço é dito externo a um corpo se o esforço é aplicado sobre um corpo por algum agente externo. Por outro lado, os esforços que são exercidos por cada parte do corpo sobre as partes vizinhas, de modo a garantir o equilíbrio do corpo são ditos internos. Entretanto, a capacidade de exercer tais esforços internos é limitada, em função das propriedades mecânicas de cada material. Quando os esforços internos necessários para se manter a condição de equilíbrio são demasiadamente elevados, o material eventualmente se rompe. Assim, existe uma relação entre os níveis de esforços internos e a resistência do material a esforços mecânicos. A observação experimental mostra que a quantidade que determina se a integridade do material vai ou não ser

afetada é a tensão, que é o esforço interno por unidade de área. No contexto unidimensional, se N representa a força interna normal e A a área da seção transversal do componente mecânico, então:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.4)$$

onde σ é a tensão normal atuante sobre a mesma seção transversal.

2.1.3 Relações constitutivas

Materiais distintos podem estar sujeitos aos mesmos estados de tensão ou de deformação. Entretanto, dado um estado de deformação, a definição do estado de tensão correspondente depende diretamente do material de que o sólido é constituído. A relação entre o estado de tensão e o estado de deformação é denominada relação constitutiva.

2.1.3.1 Comportamento elástico

Diz-se que o comportamento do material é elástico quando a tensão é completamente determinada pelo estado de deformação, isto é, $\sigma = f(\varepsilon^e)$. Quando as deformações são suficientemente pequenas, a relação entre as tensões e as deformações pode ser escrita por meio de uma função linear, expressa no caso unidimensional como:

$$\sigma = E\varepsilon^e, \quad (2.5)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. A deformação elástica é caracterizada pela parcela da deformação ε que pode ser recuperada sob descarregamento.

2.1.3.2 Comportamento inelástico: plasticidade de materiais dúcteis

A parcela da deformação que não é recuperada após o descarregamento denomina-se deformação plástica. A Fig. 2.1 ilustra o comportamento de um material após ser carregado e posteriormente descarregado. Pode-se notar que uma vez que a deformação plástica se inicia, um pequeno aumento na tensão causa um aumento de deformação relativamente grande, que não pode ser recuperado totalmente quando a carga é eliminada. Este processo é chamado de escoamento plástico.

Materiais capazes de suportar grandes quantidades de deformações plásticas são chamados de dúcteis e aqueles que fraturam sem muita deformação plástica são chamados de frágeis. Este trabalho se concentrará no comportamento de materiais dúcteis.

Se a curva tensão-deformação é a mesma para taxas distintas, $\dot{\varepsilon}$, de deformação, então se diz que o comportamento é elasto-plástico. Caso a curva tensão-deformação dependa de $\dot{\varepsilon}$, então diz-se que o comportamento é visco-plástico.

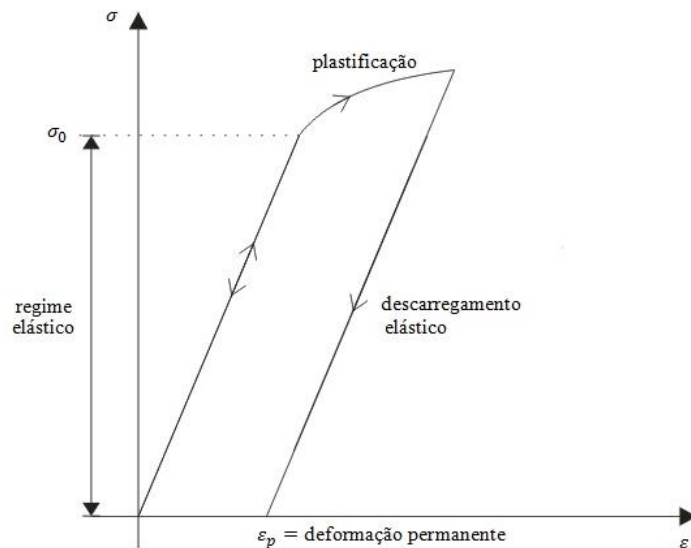


Figura 2.1 – Comportamento sob carregamento e descarregamento.

2.2 MODELO COM ENCRUAMENTO CINEMÁTICO LINEAR

Do ponto de vista quantitativo, o modelo elasto-plástico com encruamento cinemático linear não consegue reproduzir adequadamente as curvas tensão-deformação cíclicas observadas experimentalmente. Entretanto, tal modelo é apresentado nesta seção com o objetivo de introduzir os conceitos básicos das formulações incrementais do comportamento elasto-plástico.

2.2.1 Modelo matemático

Nesta seção, considera-se o modelo elasto-plástico constituído pelos seguintes ingredientes:

(i) *Decomposição aditiva da deformação:*

Assume-se que a deformação total ε possa ser decomposta aditivamente em uma parcela elástica, denotada por ε^e , e uma parcela plástica, denotada por ε^p :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (2.6)$$

(ii) *Relação tensão-deformação:*

A relação tensão-deformação é expressa como:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad (2.7)$$

onde σ é a tensão e E o módulo de elasticidade do material.

(iii) *Domínio elástico:*

O domínio elástico é dado pelo conjunto:

$$\mathbb{E} = \{\sigma \in \mathbb{R}; f(\sigma, \beta) = |\sigma - \beta| - \sigma_y \leq 0\}, \quad (2.8)$$

onde σ_y é a tensão de escoamento plástico enquanto β representa o centro do domínio elástico. No contexto da plasticidade não viscosa, independente da taxa de carregamento, a tensão σ está necessariamente confinada no interior ou no contorno do domínio elástico. Isto quer dizer que a desigualdade:

$$f(\sigma, \beta) = |\sigma - \beta| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.9)$$

deve ser satisfeita necessariamente ao longo de toda a história de carregamento.

(iv) *Lei de evolução da deformação plástica*

Na expressão (2.7), um aumento gradativo da deformação ε pode levar, eventualmente, a níveis de tensão σ que violem a desigualdade (2.9), a menos que a deformação plástica ε^p e o centro β do domínio elástico evoluam com o carregamento. Considera-se que a deformação plástica evolui de acordo com a lei:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (2.10)$$

onde $\dot{\varepsilon}^p = \frac{d}{dt} \varepsilon^p$ e $\dot{\gamma} \geq 0$ é o multiplicador plástico.

Observe-se que, na expressão (2.10) e em todas as demais envolvendo taxas, o parâmetro t não representa necessariamente o tempo, mas simplesmente uma parametrização dos eventos. Assim, por abuso de linguagem, a palavra *instante* será empregada ao longo do presente texto para se referir a um valor específico na parametrização dos eventos.

Levando-se em conta a expressão (2.9), a lei de fluxo plástico (2.10) passa a ser escrita como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\sigma - \beta}{|\sigma - \beta|}. \quad (2.11)$$

Assim, no contexto unidimensional, o termo $\frac{df}{d\sigma}$ fornece o sinal da taxa de evolução $\dot{\varepsilon}^p$ da deformação plástica. O significado do multiplicador $\dot{\gamma}$ ficará claro quando a condição de consistência for apresentada, na sequência do texto.

(v) *Lei de encruamento*

O encruamento do material pode ser representado por meio da translação do domínio elástico (encruamento cinemático), de sua expansão (encruamento isotrópico) ou por uma combinação de ambos. O presente estudo está focado na descrição do comportamento elasto-plástico sob condições de carregamentos cíclicos estabilizados, usualmente considerados nas estimativas de vida à fadiga. Nestas condições, o encruamento observado é essencialmente de natureza cinemática, representando o efeito Bauschinger (1886). O modelo mais simples que descreve tal encruamento tem a forma:

$$\dot{\beta} = H \dot{\varepsilon}^p = H \dot{\gamma} \frac{\sigma - \beta}{|\sigma - \beta|}, \quad (2.12)$$

onde H representa o módulo de endurecimento cinemático. A Fig. 2.2 ilustra a evolução do centro do domínio elástico de β para β' , quando a tensão evolui a partir da origem, ultrapassa o limite de escoamento σ_y , e atinge seu valor máximo $\sigma_y + \beta'$.

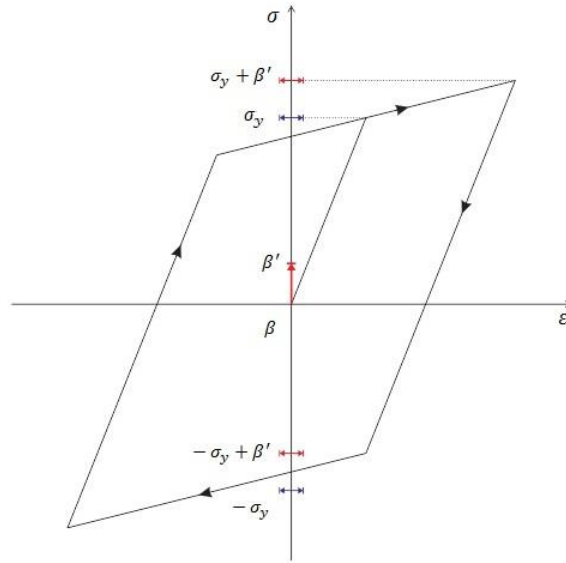


Figura 2.2 - Evolução do centro do domínio elástico.

(vi) Relações de complementaridade

Se a função f definida em (2.9) assumir valor negativo, diz-se que a tensão está dentro do regime elástico, isto é, não há evolução da deformação plástica $\dot{\varepsilon}^p$, o que implica em $\dot{\gamma} = 0$. Entretanto, se o valor de f for igual a zero, a tensão se encontra no contorno do domínio elástico, então pode-se observar evolução da deformação plástica, o que corresponde a situação $\dot{\gamma} \geq 0$ em (2.11). Isto quer dizer que $\dot{\gamma}$ e f não podem ser simultaneamente diferentes de zero, o que é expresso pela condição de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$f(\sigma, \beta) \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \dot{\gamma} f(\sigma, \beta) = 0. \quad (2.13)$$

(vii) Condição de persistência

É imposta mais uma condição, conhecida como condição de persistência (ou consistência), que está relacionada à imposição do estado de tensão “persistir” no contorno do domínio elástico sempre que houver evolução da deformação plástica ($\dot{\gamma} > 0$). Tal condição é expressa por:

$$\dot{f}(\sigma, \beta) \leq 0, \dot{\gamma} \geq 0, \dot{\gamma} \dot{f}(\sigma, \beta) = 0. \quad (2.14)$$

Em resumo, o modelo matemático que descreve o comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear, no contexto unidimensional, é dado por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.15)$$

2. Relação tensão-deformação elástica:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.16)$$

3. Função de escoamento:

$$f(\sigma, \beta) = |\sigma - \beta| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.17)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\sigma - \beta}{|\sigma - \beta|} \quad (2.18)$$

$$\dot{\beta} = H \dot{\gamma} \frac{\sigma - \beta}{|\sigma - \beta|} \quad (2.19)$$

5. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\gamma} \geq 0, f(\sigma, \beta) \leq 0, \dot{\gamma} f(\sigma, \beta) = 0 \quad (2.20)$$

6. Condição de consistência:

$$\dot{\gamma} \dot{f}(\sigma, \beta) = 0, \text{ se } f(\sigma, \beta) = 0 \quad (2.21)$$

2.2.2 Modelo discretizado

A partir dos valores das variáveis $\varepsilon_n(t_n)$, $\varepsilon_n^p(t_n)$ e $\beta_n(t_n)$ do instante t_n , e do incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$, considera-se o problema de determinação das variáveis de estado $\varepsilon_{n+1}^p(t_{n+1})$, $\beta_{n+1}(t_{n+1})$ e $\sigma_{n+1}(t_{n+1})$ do instante t_{n+1} . Isto pode ser determinado a partir da discretização do problema descrito anteriormente, onde as derivadas parciais são aproximadas por um esquema de diferenças finitas do tipo Euler implícito.

Neste contexto, a lei de evolução da deformação plástica pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p}{\Delta t} &= \dot{\gamma}_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} \\ \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p &= \Delta t \dot{\gamma}_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta \gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $\Delta \gamma_{n+1} = \Delta t \dot{\gamma}_{n+1}$. Do mesmo modo, a evolução do centro do domínio elástico será aproximada por:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\Delta t} &= H \dot{\gamma}_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} \\ \beta_{n+1} &= \beta_n + H \Delta \gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Por conseguinte, a condição de consistência será aproximada por:

$$\text{Se } f_n = 0, \text{ então } \Delta \gamma_{n+1} \geq 0, f_{n+1} \leq f_n, \Delta \gamma_{n+1} (f_{n+1} - f_n) = 0. \quad (2.24)$$

Assim, o modelo pode ser aproximado, no instante t_{n+1} , por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^p \quad (2.25)$$

2. Relação tensão-deformação elástica:

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (2.26)$$

3. Função de escoamento:

$$f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, \beta_{n+1}) = |\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.27)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} \quad (2.28)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + H\Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} \quad (2.29)$$

5. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\gamma_{n+1} \geq 0, f_{n+1} \leq 0, \gamma_{n+1}f_{n+1} = 0 \quad (2.30)$$

6. Condição de consistência:

$$\text{Se } f_n = 0, \text{ então } \Delta\gamma_{n+1} \geq 0, f_{n+1} \leq f_n, \Delta\gamma_{n+1}(f_{n+1} - f_n) = 0. \quad (2.31)$$

2.2.3 Algoritmo de integração numérica

O algoritmo de integração numérica consiste na determinação das variáveis de estado $\varepsilon_{n+1}^p(t_{n+1})$, $\beta_{n+1}(t_{n+1})$ e $\sigma_{n+1}(t_{n+1})$, do instante t_{n+1} , supondo-as conhecidas no instante t_n , a partir de um incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ prescrito. No presente estudo a integração numérica é efetuada no contexto de Algoritmos de Mapeamento de Retorno – originalmente proposto por Mendelson (1968) e posteriormente consolidado por autores que incluem Simo e Taylor (1985), Ortiz e Simo (1986), entre outros. Tais algoritmos se encaixam no formalismo de *decomposição de operadores*, tal como apresentado por Simo e Hughes (1987).

2.2.3.1 Estado tentativo elástico

O algoritmo de integração considera inicialmente um estado auxiliar, chamado de estado tentativo. Este estado considera que a evolução de deformação entre os instantes t_n e t_{n+1} é inteiramente elástica, isto é, não ocorre evolução de deformação plástica. Sendo assim, o estado tentativo será definido por:

$$\varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}} = \varepsilon_n^p, \quad (2.32)$$

$$\beta_{n+1}^{\text{trial}} = \beta_n, \quad (2.33)$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}}). \quad (2.34)$$

E a função de escoamento no estado tentativo será dada por:

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}^{\text{trial}}| - \sigma_y. \quad (2.35)$$

É observado que o estado tentativo é determinado somente em termos das condições iniciais (ε_n^p , β_n e ε_n) e do incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n$. Portanto, este estado não deve corresponder a um estado fisicamente admissível, a menos que o incremento de deformação seja inteiramente elástico. Se esta hipótese estiver correta, então se verifica a desigualdade:

$$f_{n+1}^{trial} \leq 0,$$

e as variáveis de estado no instante t_{n+1} podem ser atualizadas por:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^{p\ trial}, \quad (2.36)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{trial}, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}. \quad (2.38)$$

2.2.3.2 Corretor plástico

Se a hipótese elástica não se verificar ($f_{n+1}^{trial} > 0$), então o incremento de deformação possui uma parcela plástica. Logo, será necessário corrigir as variáveis de estado, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|}) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} - E\Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A partir da condição de complementaridade de Kuhn-Tucker ($\gamma_{n+1} f_{n+1} = 0$), tem-se que quando há deformação plástica, a função de escoamento (f_{n+1}) deve se igualar a zero, para que o multiplicador plástico (γ_{n+1}) possa ser maior que zero. Logo:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}| - \sigma_y = 0. \quad (2.40)$$

Considerando-se as expressões (2.39) e (2.29), a diferença ente σ_{n+1} e β_{n+1} pode ser escrita como:

$$\sigma_{n+1} - \beta_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E\Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} - \beta_n - H\Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|}, \quad (2.41)$$

ou:

$$(|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}| + (E + H)\Delta\gamma_{n+1}) \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} = |\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_n| \frac{\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}|}, \quad (2.42)$$

de onde obtém-se as igualdades:

$$\frac{\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}|} = \frac{\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}|}, \quad (2.43)$$

$$|\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}| + (E + H)\Delta\gamma_{n+1} = |\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_n|. \quad (2.44)$$

Substituindo-se (2.44) na função de escoamento (2.40), pode-se escrever:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_n| - \sigma_y - (E + H)\Delta\gamma_{n+1} = 0,$$

ou, considerando-se a expressão (2.35) para f_{n+1}^{trial} , obtém-se:

$$f_{n+1}^{trial} - (E + H)\Delta\gamma_{n+1} = 0. \quad (2.45)$$

Logo, $\Delta\gamma_{n+1}$ pode ser calculado, no caso de encruamento cinemático linear, por:

$$\Delta\gamma_{n+1} = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E+H}. \quad (2.46)$$

Assim, o algoritmo de integração numérica para o cálculo da evolução elasto-plástica com encruamento cinemático linear, no contexto unidimensional, é dado por:

Conhecidos os valores de ε_n^p , β_n e ε_n do instante t_n , e prescrito o incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n$:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n.$$

1. Estado tentativo:

$$\varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}} = \varepsilon_n^p, \quad (2.47)$$

$$\beta_{n+1}^{\text{trial}} = \beta_n, \quad (2.48)$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}}), \quad (2.49)$$

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}^{\text{trial}}| - \sigma_y. \quad (2.50)$$

2. Se $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$, então o passo é elástico:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^{p \text{ trial}}, \quad (2.51)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{\text{trial}}, \quad (2.52)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}}. \quad (2.53)$$

3. Caso contrário ($f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$), o passo é plástico, então deve-se aplicar o corretor plástico:

$$\Delta\gamma_{n+1} = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E+H}, \quad (2.54)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - E\Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}|}, \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}|}, \quad (2.56)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + H\Delta\gamma_{n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}}{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{n+1}|}. \quad (2.57)$$

4. Fim (calcular próximo passo)

2.3 MODELO COM ENCRUAMENTO CINEMÁTICO LINEAR POR PARTES

Observa-se experimentalmente que o comportamento de encruamento da maioria dos materiais é não-linear (Lemaitre & Chaboche, 1990). Portanto, o modelo com encruamento cinemático linear apresentado não representa uma boa alternativa para a aproximação do comportamento elasto-plástico de materiais. Alternativamente, sugere-se que seja usado uma lei de encruamento não-linear, ou um modelo de encruamento linear por partes.

Este modelo, define um conjunto de múltiplas superfícies de escoamento, concêntricas quando associadas a situações sem deformações plásticas. No primeiro modelo de múltiplas superfícies, proposto por Mróz (1967), a relação tensão-deformação não-linear é representada por um número de segmentos retos. A Fig. 2.3 ilustra a translação do centro da primeira superfície de escoamento β_1 de

β_{1n} para β_{1n+1} quando a tensão vai de σ_n para σ_{n+1} , depois de β_{1n+1} para β_{1n+2} quando a tensão vai de σ_{n+1} para σ_{n+2} , e assim sucessivamente.

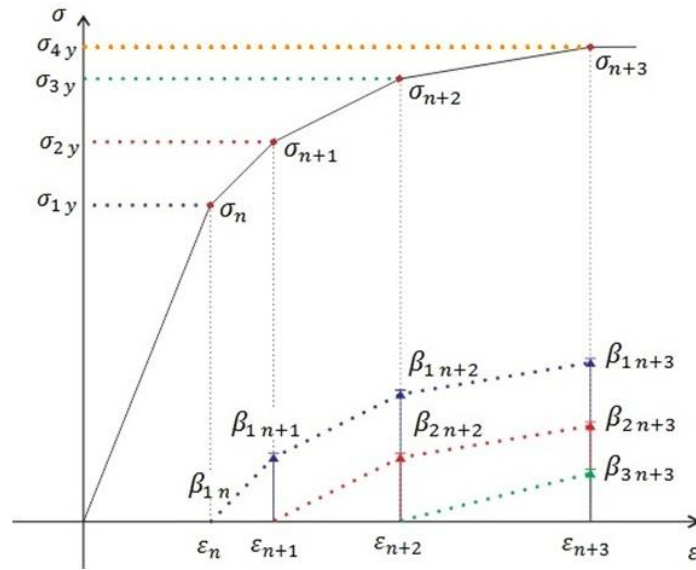


Figura 2.3 - Evolução dos centros das superfícies de escoamento.

2.3.1 Modelo matemático

A base do modelo matemático do encruamento cinemático linear por partes é a mesma do modelo matemático mostrado anteriormente. Portanto, se apresentam as mesmas expressões para a relação tensão-deformação elástica e a decomposição aditiva da deformação. Entretanto, a função de escoamento passará a ser expressa por:

$$f_l(\sigma, \beta_l) = |\sigma - \beta_l| - \sigma_{yl} \leq 0, l = 1 \dots M, \quad (2.58)$$

onde l representa a superfície de escoamento. A Fig. 2.4 ilustra as superfícies de escoamento para o caso de carregamentos uniaxiais. A equação da evolução da deformação plástica, e a equação de evolução do centro do domínio elástico serão dadas por:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}(L) \text{sign}(\sigma - \beta(L)), \quad (2.59)$$

$$\dot{\beta}_l = H(L) \dot{\varepsilon}^p = H(L) \dot{\gamma}(L) \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{Ln+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{Ln+1}|}, l = 1, \dots, L, \quad (2.60)$$

$$\dot{\beta}_m = 0, m = L + 1, \dots, M, \quad (2.61)$$

sendo L a última superfície de escoamento alcançada pela tensão aplicada, e M a última superfície de escoamento prescrita.

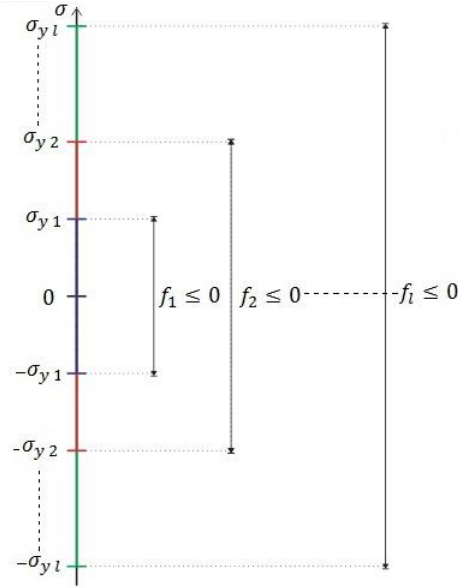


Figura 2.4 - Superfícies de escoamento.

O modelo matemático que descreve o comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear por partes, no contexto unidimensional, é dado por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.62)$$

2. Relação tensão-deformação elástica:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.63)$$

3. Função de escoamento:

$$f_l(\sigma, \beta_l) = |\sigma - \beta_l| - \sigma_{yl} \leq 0, \quad l = 1 \dots M \quad (2.64)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma}(L) \text{sign}(\sigma - \beta(L)) \quad (2.65)$$

$$\dot{\beta}_l = H(L) \dot{\varepsilon}^p = H(L) \dot{\gamma}(L) \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{Ln+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{Ln+1}|}, \quad l = 1, \dots, L \quad (2.66)$$

$$\dot{\beta}_m = 0, \quad m = L + 1, \dots, M \quad (2.67)$$

5. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\gamma(l) \geq 0, \quad f_{(l)}(\sigma, \beta(l)) \leq 0, \quad \gamma(l) f_{(l)}(\sigma, \beta(l)) = 0 \quad (2.68)$$

6. Condição de consistência:

$$\gamma(l) \dot{f}_{(l)}(\sigma, \beta(l)) = 0, \quad \text{se } f_{(l)}(\sigma, \beta(l)) = 0 \quad (2.69)$$

2.3.2 Modelo discretizado

Assim como no modelo discretizado para o encruamento cinemático linear, este modelo necessita que se conheçam os valores das variáveis de estado $\varepsilon_n(t_n)$, $\varepsilon_n^p(t_n)$ e $\beta_n(t_n)$ do instante t_n , e do incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$, para se determinar os valores das variáveis de estado

$\varepsilon_{n+1}^p(t_{n+1})$, $\beta_{n+1}(t_{n+1})$ e $\sigma_{n+1}(t_{n+1})$ do instante t_{n+1} . Deste modo, as equações do modelo discretizado são basicamente as mesmas apresentadas na seção 2.1.2, com a diferença de que o limite de escoamento σ_y , a função de escoamento $f_{(l)}$, $H(l)$ e $\dot{\beta}(l)$ são funções de l .

Finalmente, o modelo pode ser aproximado, no instante t_{n+1} , por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^p \quad (2.70)$$

2. Relação tensão-deformação elástica:

$$\sigma_{n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (2.71)$$

3. Função de escoamento:

$$f_{(l) n+1} = |\sigma_{n+1} - \beta_{(l) n+1}| - \sigma_y(l) \leq 0 \quad (2.72)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{(l)n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{L n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{L n+1}|} \quad (2.73)$$

$$\beta_{(l) n+1} = \beta_{(l) n} + H(l)\Delta\gamma_{(l) n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{L n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{L n+1}|}, l = 1, \dots, L, \quad (2.74)$$

$$\beta_{(m) n+1} = \beta_{(m) n}, m = L + 1, \dots, M \quad (2.75)$$

5. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\gamma_{n+1} \geq 0, f_{n+1} \leq 0, \gamma_{n+1} f_{n+1} = 0 \quad (2.76)$$

6. Condição de consistência:

$$\text{Se } f_n = 0, \text{ então } \Delta\gamma_{n+1} \geq 0, f_{n+1} \leq f_n, \Delta\gamma_{n+1}(f_{n+1} - f_n) = 0. \quad (2.77)$$

2.3.3 Algoritmo de integração numérica

Assim como mencionado na seção 2.2.3, o algoritmo de integração numérica consiste na determinação das variáveis de estado $\varepsilon_{n+1}^p(t_{n+1})$, $\beta_{n+1}(t_{n+1})$ e $\sigma_{n+1}(t_{n+1})$, do instante t_{n+1} , supondo-as conhecidas no instante t_n , a partir de um incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ prescrito.

2.3.3.1 Estado tentativo elástico

O estado tentativo elástico do modelo com encruamento cinemático linear por partes possui basicamente as mesmas equações do modelo linear simples. Entretanto, se faz necessário o cálculo de mais de uma função de escoamento já que há um limite de escoamento para cada superfície de escoamento imposta. Contudo, é suficiente que se calcule apenas a função de escoamento para a primeira superfície, verificando, assim, a admissibilidade plástica, e para a superfície L, última superfície alcançada pela tensão, para que se faça o cálculo de $\Delta\gamma_{n+1}$. As equações do estado tentativo podem ser expressas por:

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ trial} = \varepsilon_n^p, \quad (2.78)$$

$$\beta_{(l)\ n+1}^{trial} = \beta_{(l)\ n}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.79)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ trial}), \quad (2.80)$$

$$f_{(1)\ n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(1)\ n+1}^{trial}| - \sigma_{(1)y}, \quad (2.81)$$

$$f_{(L)\ n+1}^{trial} = |\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)\ n+1}^{trial}| - \sigma_{(L)y}. \quad (2.82)$$

Se a hipótese elástica estiver correta, então se verifica a desigualdade:

$$f_{(1)\ n+1}^{trial} \leq 0,$$

e as variáveis de estado do instante t_{n+1} podem ser atualizadas por:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^{p\ trial}, \quad (2.83)$$

$$\beta_{(l)\ n+1} = \beta_{(l)\ n+1}^{trial}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.84)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}, \quad (2.85)$$

$$L = 1. \quad (2.86)$$

A imposição do valor de L ser igual a um indica que a tensão se encontra no regime elástico, ou na primeira superfície de escoamento.

2.3.3.2 Corretor plástico

Se a hipótese elástica não se verificar ($f_{(1)\ n+1}^{trial} > 0$), deve-se aplicar o corretor plástico para corrigir as variáveis de estado, cujos cálculos foram detalhados na seção 2.2.3.2, como mostrado a seguir:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta \gamma_{(L)\ n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}|}, \quad (2.87)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \gamma_{(L)\ n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}|}, \quad (2.88)$$

$$\beta_{(l)\ n+1} = \beta_{(l)\ n} + H(L) \Delta \gamma_{(L)\ n+1} \frac{\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}|}, \quad l = 1, \dots, L, \quad (2.89)$$

$$\beta_{(m)\ n+1} = \beta_{(m)\ n}, \quad m = L + 1, \dots, M. \quad (2.90)$$

Deve ser observado que para a correção das variáveis de estado, se faz necessário apenas o cálculo do $\Delta \gamma_{(L)\ n+1}$ da superfície L , que pode ser obtido pela seguinte equação:

$$\Delta \gamma_{(L)\ n+1} = \frac{f_{(L)\ n+1}^{trial}}{E + H}. \quad (2.91)$$

Deve-se levar em conta, também, a igualdade demonstrada na seção 2.2.2.2:

$$\frac{\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}}{|\sigma_{n+1} - \beta_{L\ n+1}|} = \frac{\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{L\ n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{L\ n+1}|}. \quad (2.92)$$

2.3.3.3 Corretor de passo

Os cálculos descritos na seção anterior estabelecem a evolução elasto-plástica associada a um estágio de encruamento L , com módulo de encruamento cinemático $H(L)$. Entretanto, quando o passo de deformação $\Delta\varepsilon_n$ corresponder a uma transição de estágios de encruamento, é necessário que se corrija o passo de deformação, para que a tensão aplicada alcance, mas não ultrapasse o limite de escoamento seguinte, como é ilustrado na Fig.4. Caso a correção não seja feita, a tensão será calculada através do módulo de encruamento cinemático do estágio anterior, o que não é o esperado. Para que a correção seja possível, é necessário o cálculo de um fator $\alpha \in]0,1[$, tal que:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \alpha\Delta\varepsilon_n,$$

de modo que a distância entre a tensão σ_{n+1} e o centro $\beta_{(L)n+1}$ do domínio (L) não ultrapasse o valor $\sigma_{(L+1)y}$.

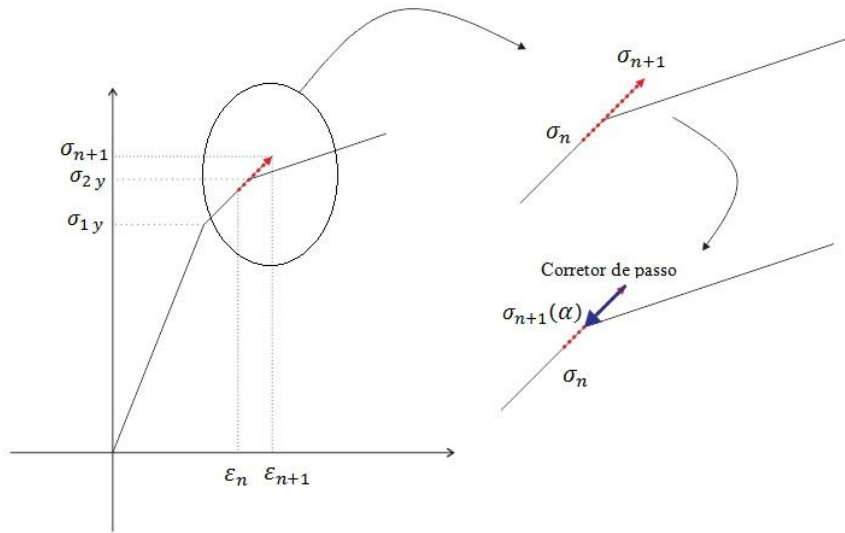


Figura 2.5 - Correção do passo.

Considerando-se o novo valor de ε_{n+1} , o passo plástico deve ser calculado novamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) &= E(\varepsilon_n + \alpha\Delta\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}^{p\ trial}) \\ &= \sigma_n + \alpha E\Delta\varepsilon_n, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} f_{(L)n+1}^{trial}(\alpha) &= |\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{(L)n+1}^{trial}| - \sigma_{(L)y} \\ &= |\sigma_n + \alpha E\Delta\varepsilon_n - \beta_{(L)n+1}^{trial}| - \sigma_{(L)y}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{(L)n+1}(\alpha) &= \frac{f_{(L)n+1}^{trial}(\alpha)}{E+H(L)} \\ &= \frac{1}{E+H(L)} [|\sigma_n + \alpha E\Delta\varepsilon_n - \beta_{(L)n+1}^{trial}| - \sigma_{(L)y}], \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p(\alpha) = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{(L)n+1}(\alpha) \frac{\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L\ n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L\ n+1}|}$$

$$= \varepsilon_n^p + \frac{1}{E+H(L)} \left[\left| \sigma_n + \alpha E \Delta \varepsilon_n - \beta_{(L)n+1}^{trial} \right| - \sigma_{(L)y} \right] \frac{\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{Ln+1}}{\left| \sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{Ln+1} \right|}, \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}(\alpha) &= E(\varepsilon_{n+1}(\alpha) - \varepsilon_{n+1}^p(\alpha)) \\ &= E \left\{ \varepsilon_n + \alpha \Delta \varepsilon_n - \varepsilon_n^p - \frac{1}{E+H(L)} \left[\left| \sigma_n + \alpha E \Delta \varepsilon_n - \beta_{(L)n+1}^{trial} \right| - \sigma_{(L)y} \right] \frac{\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{Ln+1}}{\left| \sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{Ln+1} \right|} \right\}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

O fator α deve ser tal que a igualdade:

$$\left| \sigma_{n+1}(\alpha) - \beta_{(L+1)n+1} \right| - \sigma_{(L+1)y} = 0, \quad (2.98)$$

seja observada, onde $\beta_{(L+1)n+1} = \beta_{(L+1)n}$, uma vez que o domínio (L+1) não deve se movimentar durante a evolução do domínio (L).

Assim, o algoritmo de integração numérica para o cálculo da evolução elasto-plástica com encruamento cinemático linear por partes, no contexto unidimensional, é dado por:

Conhecidos os valores de ε_n^p , β_n e ε_n do instante t_n , e prescrito o incremento de deformação $\Delta \varepsilon_n$:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_n.$$

1. Estado tentativo:

$$\varepsilon_{n+1}^{p\ trial} = \varepsilon_n^p, \quad (2.99)$$

$$\beta_{(l)n+1}^{trial} = \beta_{(l)n}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.100)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\ trial}), \quad (2.101)$$

$$f_{(1)n+1}^{trial} = \left| \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(1)n+1}^{trial} \right| - \sigma_{(1)y}, \quad (2.102)$$

$$f_{(L)n+1}^{trial} = \left| \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial} \right| - \sigma_{(L)y}. \quad (2.103)$$

2. Se $f_{(1)n+1}^{trial} \leq 0$, então: (passo elástico)

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^{p\ trial}, \quad (2.104)$$

$$\beta_{(l)n+1} = \beta_{(l)n+1}^{trial}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.105)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}, \quad (2.106)$$

$$L = 1. \quad (2.107)$$

3. Senão: (corretor plástico)

$$\Delta \gamma_{(L)n+1} = \frac{f_{(L)n+1}^{trial}}{E+H(L)}, \quad (2.108)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - E \Delta \gamma_{(L)n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{Ln+1}}{\left| \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{Ln+1} \right|}, \quad (2.109)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \gamma_{(L)n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{Ln+1}}{\left| \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{Ln+1} \right|}, \quad (2.110)$$

$$\beta_{(l) n+1} = \beta_{(l) n} + H(L)\Delta\gamma_{(L) n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{L n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{L n+1}|}, l = 1, \dots, L, \quad (2.111)$$

$$\beta_{(m) n+1} = \beta_{(m) n}, m = L + 1, \dots, M. \quad (2.112)$$

4. Se $|\sigma_{n+1}(\alpha) - \beta_{(L+1) n+1}| > \sigma_{(L+1)y}$, então: (transição entre estágios (L) e $(L + 1)$)

4.1. Deve-se usar algum método de aproximação numérica para calcular a raiz α da equação não linear:

$$|\sigma_{n+1}(\alpha) - \beta_{(L+1) n+1}| - \sigma_{(L+1)y} = 0, \quad (2.113)$$

onde:

$$\sigma_{n+1}(\alpha) = E \left\{ \varepsilon_n + \alpha \Delta \varepsilon_n - \varepsilon_n^p - \frac{f_{(L) n+1}^{trial}(\alpha) \frac{\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L n+1}|}}{E + H(L)} \right\}, \quad (2.114)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) = E(\varepsilon_n + \alpha \Delta \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}^{p trial}), \quad (2.115)$$

$$\beta_{(L) n+1}^{trial} = \beta_{(L) n}, \quad (2.116)$$

$$f_{(L) n+1}^{trial}(\alpha) = |\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{(L) n+1}^{trial}| - \sigma_{(L)y}, \quad (2.117)$$

$$\beta_{(L+1) n+1} = \beta_{(L+1) n}. \quad (2.118)$$

4.2. Após a determinação do fator α , deve-se calcular a deformação total corrigida, e os valores correspondentes das variáveis de estado:

$$\varepsilon_{n+1}(\alpha) = \varepsilon_n + \alpha \Delta \varepsilon_n, \quad (2.119)$$

$$\Delta\gamma_{(L) n+1}(\alpha) = \frac{f_{(L) n+1}^{trial}(\alpha)}{E + H(L)}, \quad (2.120)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p(\alpha) = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{(L) n+1}(\alpha) \frac{\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L n+1}|}, \quad (2.121)$$

$$\beta_{(l) n+1} = \beta_{(l) n} + H(L)\Delta\gamma_{(L) n+1}(\alpha) \frac{\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L n+1}}{|\sigma_{n+1}^{trial}(\alpha) - \beta_{L n+1}|}, l = 1, \dots, L, \quad (2.122)$$

$$\beta_{(m) n+1} = \beta_{(m) n}, m = L + 1, \dots, M, \quad (2.123)$$

$$\sigma_{n+1}(\alpha) = E(\varepsilon_{n+1}(\alpha) - \varepsilon_{n+1}^p(\alpha)). \quad (2.124)$$

4.3. Finalmente, deve-se atualizar o identificador de estágio de encruamento:

$$L = L + 1. \quad (2.125)$$

5. Fim (calcular próximo passo).

2.4 RESULTADOS

Após o desenvolvimento da ferramenta de descrição do comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear e linear por partes, foram realizados testes com o objetivo de validar e medir o nível de aproximação das ferramentas.

Para isso, foi tomada como base a relação de Ramberg-Osgood (1943), que apresenta bons resultados na descrição do comportamento elasto-plástico, para vários materiais. Esta relação considera a adição da deformação elástica e da deformação plástica, a qual é obtida a partir de uma relação de potência. A relação de Ramberg-Osgood pode ser representada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2.126)$$

onde H é o coeficiente e n o expoente de encruamento do material. Quando o carregamento em questão é cíclico, são usados H' e n' na relação

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H'}\right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (2.127)$$

que são conhecidos como o coeficiente e o expoente de encruamento cíclico do material. Para desenhar os laços de histerese foi usada a regra de Masing (1926), que considera a curva tensão-deformação cíclica do material (2.121) amplificada por um fator 2, como mostrado a seguir:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma}{2H'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2.128)$$

2.4.1 Modelo com encruamento cinemático linear

Considera-se uma história de carregamento uniaxial de tração descrita pela história de deformação prescrita:

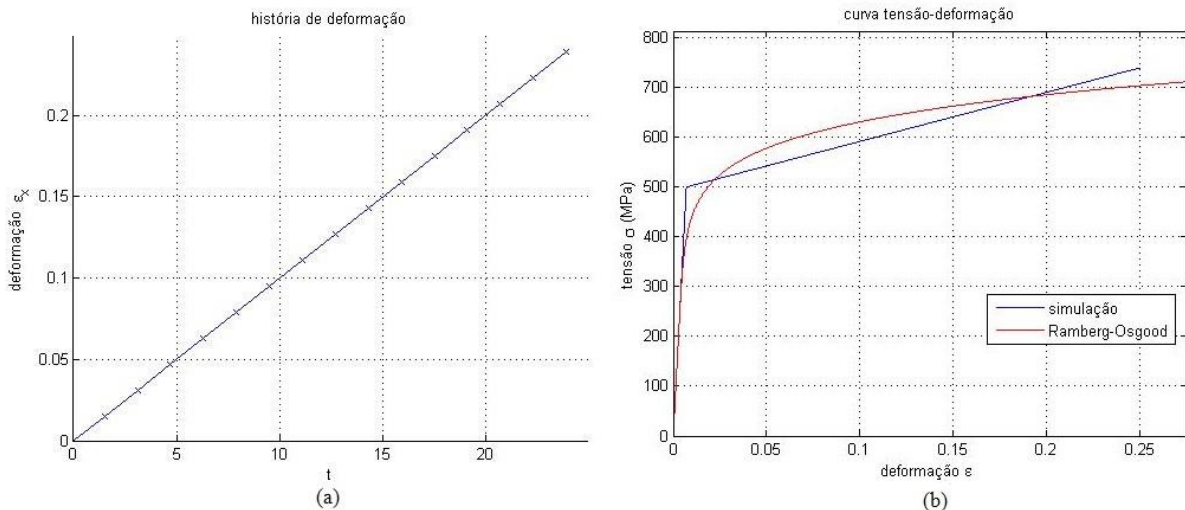


Figura 2.6 - Simulação de ensaio uniaxial de tração. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação .

O gráfico da Fig.5(a) ilustra a história de deformação de ensaio de tração que atinge $\varepsilon = 25\%$. Esta simulação foi realizada com base nos parâmetros materiais monotônicos da liga de alumínio 7075-T6 $E = 71 \text{ GPa}$, $H = 827 \text{ MPa}$, $n = 0,113$ (Conle, 1984). O resultado obtido na simulação é mostrado na Fig.5(b), onde a curva azul é a curva tensão-deformação gerada pela ferramenta, e a vermelha a curva gerada pela relação de Ramberg-Osgood. Pode-se observar que a curva gerada pelo modelo com encruamento cinemático linear não representa o comportamento elasto-plástico do material.

2.4.2 Modelo com encruamento cinemático linear por partes

2.4.2.1 Carregamento monotônico

Considera-se uma história de carregamento uniaxial de tração descrita pela história de deformação prescrita:

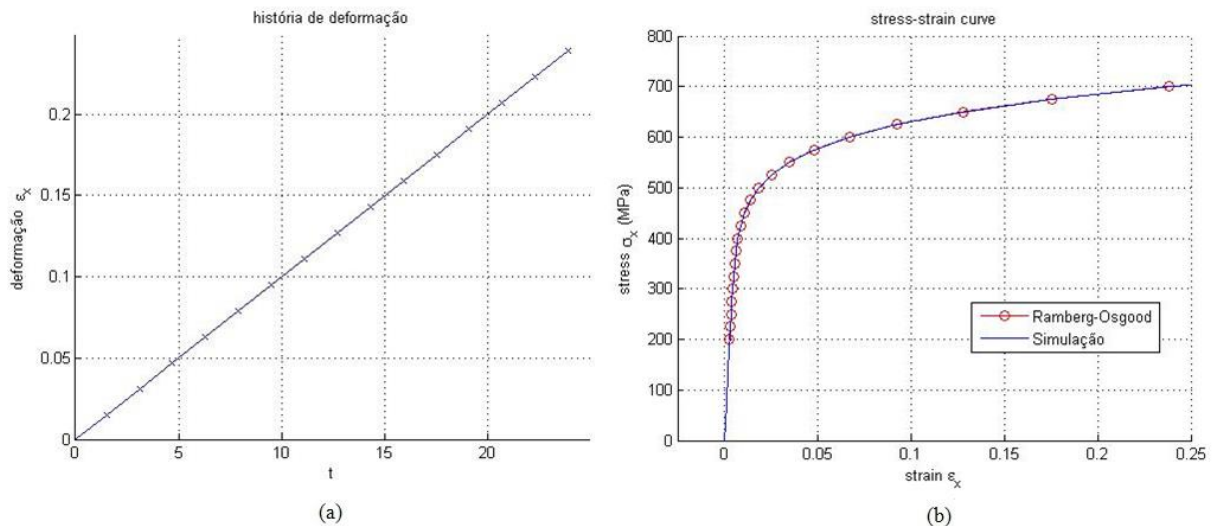


Figura 2.7 - Simulação de ensaio de tração com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

O gráfico da figura Fig.6(a), assim como na simulação anterior, ilustra a história de deformação de tração pura que atinge $\epsilon = 25\%$. Esta simulação foi realizada com base nos mesmos parâmetros materiais monotônicos da liga de alumínio 7075-T6, utilizados na simulação anterior. Os resultados obtidos na simulação são mostrados na Fig.6(b), onde os círculos vermelhos representam pontos da curva de Ramberg-Osgood, e a curva azul representa a curva tensão-deformação gerada pela ferramenta desenvolvida.

2.4.2.2 Carregamento cíclico totalmente alternado de amplitude constante

Considera-se uma história de carregamento uniaxial do tipo tração-compressão descrita pela história de deformação prescrita.

O gráfico da figura Fig.7(a) ilustra a história de deformação, que representa um carregamento cíclico com amplitude $\epsilon_a = 0,025$. Esta simulação foi realizada com base nos parâmetros materiais cíclicos do aço AISI 4340, $E = 207 \text{ GPa}$, $H' = 1655 \text{ MPa}$, $n' = 0,131$ (Dowling, 1973). Os resultados obtidos na simulação são mostrados na Fig.7(b), onde os círculos vermelhos representam pontos da curva de Ramberg-Osgood, e a curva azul representa a curva tensão-deformação gerada pela ferramenta de descrição do comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear por partes.

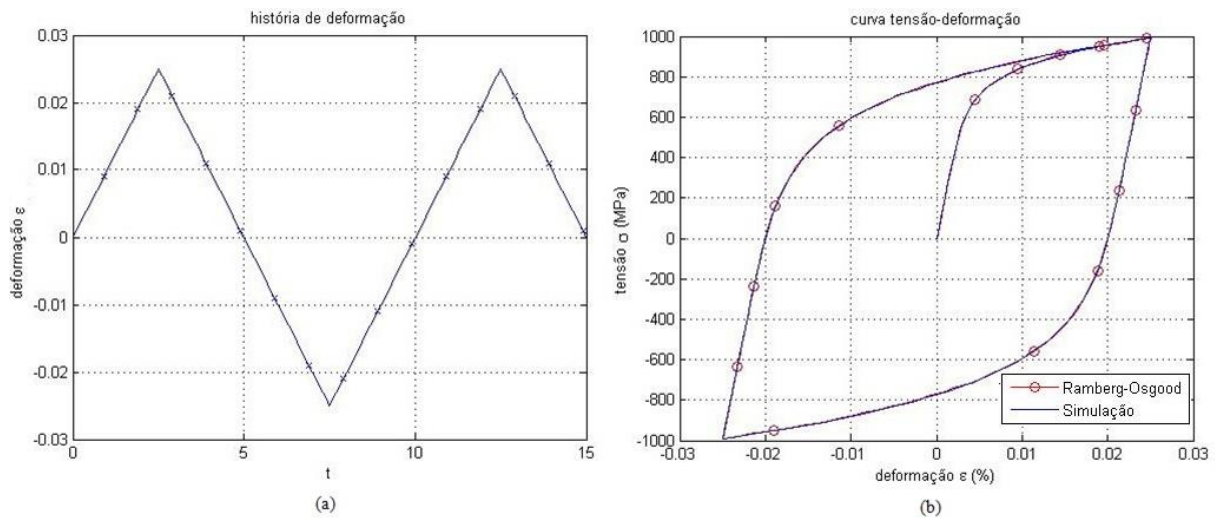


Figura 2.8 - Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude constante. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

2.4.2.3 Carregamento cíclico de amplitude variável

Considera-se uma história de carregamento uniaxial do tipo tração-cisalhamento descrita pela história de deformação prescrita:

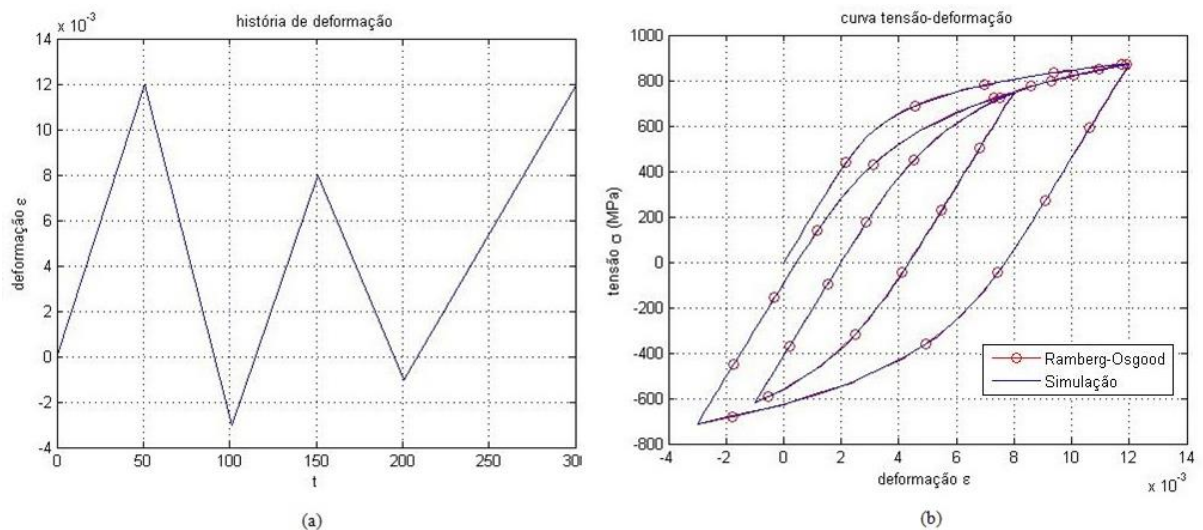


Figura 2.9 - Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig.8(a) ilustra a história de deformação que representa um carregamento cíclico de amplitude variável. Esta simulação foi realizada com base nos mesmos parâmetros materiais cíclicos do aço AISI 4340, utilizados na simulação anterior. Os resultados obtidos na simulação são mostrados na Fig.8(b), onde os círculos vermelhos representam pontos da curva de Ramberg-Osgood, e a curva azul representa a curva tensão-deformação gerada pela ferramenta desenvolvida.

3. PLASTICIDADE SOB CARREGAMENTOS NORMAIS-CISALHANTES

Neste capítulo, é apresentado o modelo elasto-plástico sob solicitações normais-cisalhantes com encruamento cinemático linear e cinemático linear por partes, o método de aproximação numérica do modelo linear por partes e alguns resultados obtidos em simulações deste modelo.

A extensão do modelo elasto-plástico para o contexto de solicitações normais-cisalhantes foi motivada por sua simplicidade e também pela quantidade de situações práticas em que este tipo de carregamento se observa, como no caso de eixos-árvore, por exemplo.

3.1 O ESTADO DE TENSÃO NORMAL-CISALHANTE

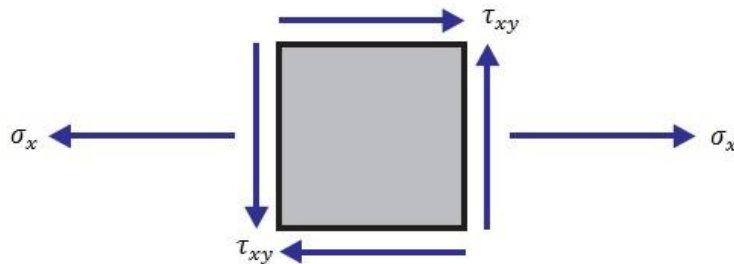


Figura 3.1- Estado de tensão normal-cisalhante.

Sob carregamentos normais-cisalhantes, o estado de tensão, ilustrado na Fig. 3.1, pode ser representado pelo tensor tensão de Cauchy, na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

e o tensor desviador pode ser representado por:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}, \quad (3.2)$$

onde $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ representa o traço do tensor tensão, e \boldsymbol{I} representa o tensor identidade de segunda ordem.

Logo, o tensor desviador para carregamentos normais-cisalhantes pode ser representado por:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\frac{1}{3}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Entretanto, deve ser observado que o tensor tensão desviador \boldsymbol{S} é função apenas de σ_x e τ_{xy} . Por isso, a relação entre este tensor e o tensor tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser reescrito na forma vetorial por:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Deve-se notar que a representação dos termos S_y e S_z não é necessária, uma vez que ambos podem ser descritos como funções de S_x :

$$S_y = S_z = -\frac{S_x}{2}. \quad (3.5)$$

A relação entre a representação vetorial S , do tensor S , e a representação vetorial $\sigma = [\sigma_x \ \tau_{xy}]^T$, do tensor σ , pode ser escrita da como:

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix},$$

ou

$$\mathbf{S} = \bar{P}\boldsymbol{\sigma}, \quad (3.6)$$

onde

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

O operador \bar{P} projeta o estado de tensão σ no espaço das tensões desviadoras.

3.2 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

A relação tensão-deformação elástica, considerando-se o modelo de elasticidade linear isotrópica, é descrita pela relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)I + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (3.8)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ representa o tensor das deformações elásticas, e λ e μ são as constantes de Lamé que, em termos do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν , são definidos como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (3.9)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.10)$$

A constante μ , também conhecida como G , é o módulo de elasticidade ao cisalhamento.

Substituindo-se o valor de $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ na relação tensão-deformação elástica, tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e & \varepsilon_{xy}^e & \varepsilon_{xz}^e \\ \varepsilon_{xy}^e & \varepsilon_y^e & \varepsilon_{yz}^e \\ \varepsilon_{xz}^e & \varepsilon_{yz}^e & \varepsilon_z^e \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 2\mu\varepsilon_x^e + \lambda(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) & 2\mu\varepsilon_{xy}^e & 2\mu\varepsilon_{xz}^e \\ 2\mu\varepsilon_{xy}^e & 2\mu\varepsilon_y^e + \lambda(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) & 2\mu\varepsilon_{yz}^e \\ 2\mu\varepsilon_{xz}^e & 2\mu\varepsilon_{yz}^e & 2\mu\varepsilon_z^e + \lambda(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) \end{pmatrix}.$$

Para o caso de carregamentos normais-cisalhantes, tem-se que:

$$\tau_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz}^e = 0, \quad (3.12)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}^e = 0. \quad (3.13)$$

Logo, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. A relação tensão-deformação fica reduzida a:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_x^e + \lambda(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e), \quad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}^e. \quad (3.15)$$

Além disso, as condições $\sigma_y = \sigma_z = 0$ implicam em:

$$\sigma_y = 2\mu\varepsilon_y^e + \lambda(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) = 0, \quad (3.16)$$

$$\sigma_z = 2\mu\varepsilon_z^e + \lambda(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) = 0. \quad (3.17)$$

Estas expressões constituem um sistema de equações lineares em ε_y e ε_z com solução:

$$\varepsilon_y^e = \varepsilon_z^e = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon_x^e. \quad (3.18)$$

A substituição desta relação de $\varepsilon_y(\varepsilon_x)$ e $\varepsilon_z(\varepsilon_x)$ na primeira relação constitutiva fornece:

$$\sigma_x = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varepsilon_x^e, \quad (3.19)$$

ou, substituindo-se os valores das constantes de Lamé μ e λ em termos do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν , obtêm-se simplesmente a relação constitutiva para sollicitações uniaxiais:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x^e. \quad (3.20)$$

Portanto, em sollicitações do tipo normal-cisalhante, o modelo elástico linear fornece a relação tensão deformação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_{xy}^e \end{pmatrix},$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (3.21)$$

onde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 2G \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_{xy}^e \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Portanto, mesmo que as deformações ε_y^e e ε_z^e sejam não nulas, o estado de tensão está totalmente definido em função das componentes de deformação ε_x^e e ε_{xy}^e . Assim, no que se segue, apenas as componentes $(*)_x$ e $(*)_{xy}$ serão consideradas para as diversas grandezas tensoriais.

3.3 MODELO MATEMÁTICO DA DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO CINEMÁTICO LINEAR

Para simular o comportamento elasto-plástico de materiais, no contexto multiaxial, foi considerada a lei de encruamento de Prager (1956). Entretanto, por ser um problema multiaxial, o centro do domínio elástico, a tensão e a deformação deixam de ser escalares e passam a ser tensores. Contudo, para o caso de carregamentos normais-cisalhantes, pode-se definir o problema com apenas duas componentes de tensão, deformação e, conseqüentemente, do centro do domínio elástico. Logo, os tensores podem ser representados por vetores.

Para a descrição do comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear, será considerada a decomposição aditiva da deformação, que é representada pela soma de vetores:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (3.24)$$

Logo, a relação tensão deformação pode ser representada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (3.25)$$

A função de escoamento foi determinada de acordo com o modelo de Mises (1913), que afirma que a região elástica pode ser determinada limitando-se à magnitude de tensão desviadora:

$$\|\mathbf{S}\| \leq S_0, \quad (3.26)$$

onde S_0 é um parâmetro material que pode ser determinado, por exemplo, por meio de um ensaio de tração simples. Neste caso, o estado de tensão pode ser representado pelo tensor tensão:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

onde a componente de tensão σ_x é limitada pela tensão de escoamento plástico σ_0 :

$$|\sigma_x| \leq \sigma_0. \quad (3.28)$$

O tensor desviador \mathbf{S} correspondente ao estado de tensão é dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

e a magnitude de tensão desviadora será dada por:

$$\|\mathbf{S}\| = (\mathbf{S}, \mathbf{S})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9}\sigma_x^2 + \frac{1}{9}\sigma_x^2 + \frac{1}{9}\sigma_x^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_x \leq S_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0. \quad (3.30)$$

Logo,

$$f(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \leq 0. \quad (3.31)$$

Para o caso de carregamentos normais-cisalhantes, a norma do tensor tensão desviadora é dada por:

$$\|\mathbf{S}\|^2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}) = \left(\frac{6}{9}\sigma_x^2 + 2\tau_{xy}^2\right) = (\sigma_x \quad \tau_{xy}) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}^T P \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.32)$$

onde

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Portanto, a função de escoamento correspondente ao modelo de Mises, para carregamentos normais-cisalhantes, é caracterizada pela desigualdade:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^T P \boldsymbol{\sigma}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \leq 0. \quad (3.34)$$

O centro do domínio elástico definido no espaço gerado por σ_x e τ_{xy} , cujo comportamento é ilustrado na Fig. 3.2, agora é representado pelo vetor:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_{xy} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

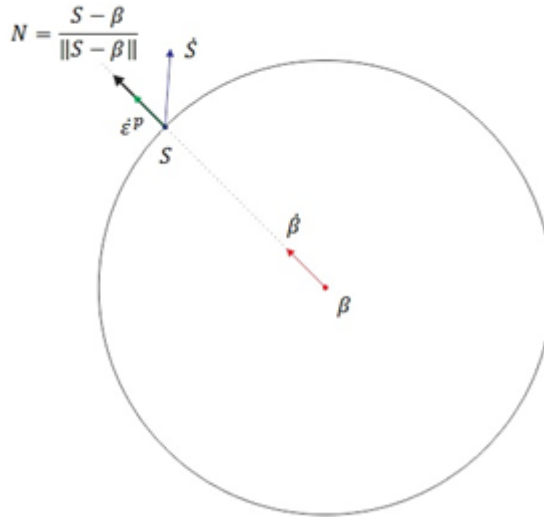


Figura 3.2 - Evolução do centro do domínio elástico.

assim, considerando o encruamento cinemático, a desigualdade que representa a função de escoamento do material passa a ser escrita como:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})^T P (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \leq 0. \quad (3.36)$$

Considerando-se a lei associativa para a evolução da deformação plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.37)$$

onde $\dot{\gamma} \geq 0$ é o multiplicador plástico. Para o caso específico do modelo de Mises para carregamentos normais-cisalhantes, tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})^T P (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})}} P (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}). \quad (3.38)$$

Se $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) < 0$, a tensão aplicada está no interior do regime elástico, isto é, não haverá deformação plástica, o que implica em $\dot{\bar{\gamma}} = 0$. Entretanto, quando há deformação plástica, pode-se afirmar que $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, o que indica que a tensão está no contorno do regime elástico e $\dot{\bar{\gamma}} \geq 0$. Tal situação impõe a condição de complementaridade de Kuhn-Tucker, que pode ser expressa por:

$$\dot{\bar{\gamma}} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = 0. \quad (3.39)$$

Logo, quando $\dot{\bar{\gamma}} \neq 0$, $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = 0$ e, então:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})^T P (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0, \quad (3.40)$$

Portanto, pode-se escrever que:

$$\gamma = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})^T P (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})}} = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0}. \quad (3.41)$$

Finalmente, a evolução da deformação plástica pode ser escrita na forma:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} P (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}). \quad (3.42)$$

De acordo com a lei linear de Prager, a evolução do centro do domínio elástico pode ser representada, no contexto tridimensional, por:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = C_l \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p. \quad (3.43)$$

No contexto dos carregamento normais-cisalhantes, pode-se descrever $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ em termos da projeção $\bar{P} \dot{\boldsymbol{\beta}}$ do centro do domínio elástico $\boldsymbol{\beta}$ no espaço desviador. A forma específica da lei de encruamento é dada por:

$$dev(\dot{\boldsymbol{\beta}}) = \bar{P} \dot{\boldsymbol{\beta}} = C_l \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \quad (3.44)$$

onde

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x^p \\ \dot{\epsilon}_{xy}^p \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

ou, multiplicando-se ambos os lados por \bar{P}^{-1} :

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = C_l \bar{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \quad (3.46)$$

onde

$$\bar{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Substituindo-se a expressão (3.42) em (3.47), tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \gamma C_l \bar{P}^{-1} P (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) = \gamma C_l P' (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}), \quad (3.48)$$

onde

$$P' = \bar{P}^{-1} P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Tendo a expressão para a evolução do centro do domínio elástico, resta definir o parâmetro material C_l , que pode ser obtido, por exemplo, considerando-se um ensaio de tração. A Fig. 3.3 ilustra uma curva idealizada de σ_x por ε_x^p , onde sua inclinação define o parâmetro H_0 de encruamento cinemático linear.

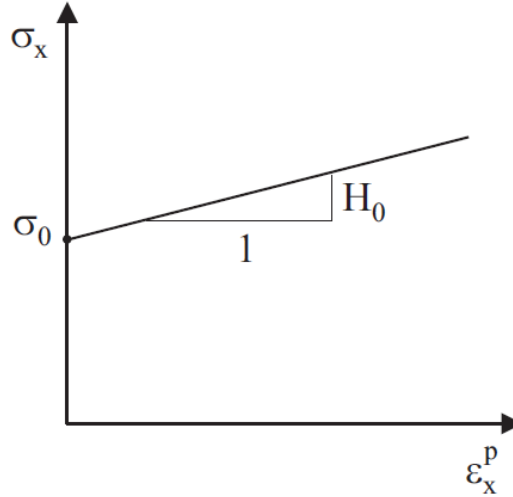


Figura 3.3 - Curva idealizada descrevendo a tensão σ_x em função da deformação plástica ε_x^p em um ensaio de tração simples.

Isolando-se $\dot{\varepsilon}^p$ a partir da equação (3.47), tem-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{c_l} A^{-1} \bar{P} \dot{\beta}, \quad (3.50)$$

que, no caso do ensaio de tração simples, fornece:

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x^p \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_l} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

logo,

$$\dot{\varepsilon}_x^p = \frac{1}{c_l} \frac{2}{3} \dot{\beta}_x. \quad (3.52)$$

Para o caso de tração simples, tem-se que $\dot{\sigma}_x = \dot{\beta}_x$, o que permite escrever:

$$\dot{\beta}_x = \frac{3}{2} C_l \dot{\varepsilon}_x^p = H_0 \dot{\varepsilon}_x^p, \quad (3.53)$$

consequentemente:

$$C_l = \frac{2}{3} H_0. \quad (3.54)$$

Portanto, a forma final da evolução do centro do domínio elástico, pelo modelo linear de Prager, no caso de carregamentos normais-cisalhantes, é dada por:

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H_0 \gamma (\sigma - \beta). \quad (3.55)$$

O modelo matemático que descreve o comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear, sob carregamentos normais-cisalhantes, é dado, resumidamente, por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.56)$$

2. Relação tensão-deformação elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.57)$$

3. Função de escoamento:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \leq 0 \quad (3.58)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) \quad (3.59)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H_0 \dot{\gamma} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) \quad (3.60)$$

5. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) \leq 0, \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (3.61)$$

6. Condição de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \text{ se } f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = 0 \quad (3.62)$$

3.4 MODELO MATEMÁTICO DA DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO CINEMÁTICO LINEAR POR PARTES

Assim como no contexto unidimensional, foi estudada a possibilidade de se inserir mais de uma superfície de escoamento no modelo de encruamento cinemático linear, afim de aproximar os resultados obtidos numericamente aos resultados experimentais. Para isso, foram feitas algumas mudanças no modelo apresentado na sessão anterior, como é mostrado a seguir.

O modelo matemático da descrição do comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear por partes, para carregamentos normais-cisalhantes, é similar ao modelo matemático do encruamento cinemático simples, porém, com o acréscimo de pelo menos uma superfície de escoamento. O comportamento das superfícies de escoamento, com a evolução da tensão, é ilustrado na Fig. 3.4.

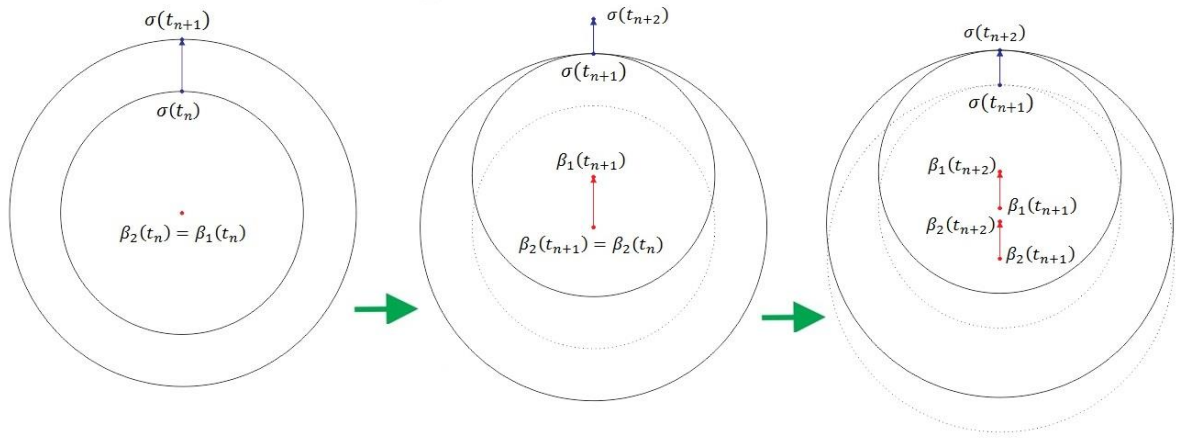


Figura 3.4 - Comportamento dos centros β_1 e β_2 das superfícies de escoamento com a evolução da tensão σ .

A equação da relação tensão-deformação elástica, e da decomposição aditiva da deformação permanecem as mesmas. Porém, a função de escoamento pode ser calculada para cada superfície de escoamento:

$$f_{(l)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}_{(l)}) = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)})^T P(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)})} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_l \leq 0, l = 1, \dots, M \quad (3.63)$$

As equações da evolução da deformação plástica, e da evolução do centro do domínio elástico, passam a ser expressas por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma_{(l)} P(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)}), \quad (3.64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_{(l)} = \frac{2}{3} H_{0(l)} \gamma_{(l)} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)}), l = 1, \dots, L, \quad (3.65)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} = 0, m = L + 1, \dots, M, \quad (3.66)$$

onde M representa a última superfície de escoamento prescrita.

Em resumo, este modelo é dado por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.67)$$

2. Relação tensão-deformação elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.68)$$

3. Função de escoamento:

$$f_{(l)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}_{(l)}) = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)})^T P(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)})} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_l \leq 0, l = 1, \dots, M \quad (3.69)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_{(l)} P(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)}) \quad (3.70)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_{(l)} = \frac{2}{3} H_{0(l)} \dot{\gamma}_{(l)} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}_{(l)}), l = 1, \dots, L \quad (3.71)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_{(m)} = 0, m = L + 1, \dots, M \quad (3.72)$$

5. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\gamma}^{(l)} \geq 0, f_{(l)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}^{(l)}) \leq 0, \dot{\gamma}^{(l)} f_{(l)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}^{(l)}) = 0 \quad (3.73)$$

6. Condição de consistência:

$$\dot{\gamma}^{(l)} f_{(l)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}^{(l)}) = 0, \text{ se } f_{(l)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}^{(l)}) = 0 \quad (3.74)$$

3.4.1 Modelo discretizado

O problema em estudo deve ser discretizado, de modo que as variáveis parciais sejam aproximadas por um esquema de diferenças finitas do tipo Euler implícito, para que possam ser calculados os valores das variáveis $\varepsilon_{n+1}^p(t_{n+1})$, $\beta_{(l)n+1}(t_{n+1})$ e $\sigma_{n+1}(t_{n+1})$ do instante t_{n+1} , a partir dos valores das variáveis $\varepsilon_n(t_n)$, $\varepsilon_n^p(t_n)$ e $\beta_{(l)n}(t_n)$ do instante t_n , e do incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$.

Neste contexto, tem-se que a evolução da deformação plástica será dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p}{\Delta t} &= \gamma_{(L)n+1} P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), \\ \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p &= \Delta t \gamma_{(L)n+1} P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta \gamma_{(L)n+1} P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde $\Delta\gamma_{n+1} = \Delta t \gamma_{n+1}$. Do mesmo modo, a evolução do centro do domínio elástico será aproximada por:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{(l)n+1} - \beta_{(l)n}}{\Delta t} &= \frac{2}{3} \gamma_{(L)n+1} H_0(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), l = 1, \dots, L, \\ \beta_{(l)n+1} &= \beta_{(l)n} + \frac{2}{3} \Delta \gamma_{(L)n+1} H_0(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), l = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\beta_{(m)n+1} = \beta_{(m)n}, m = L + 1, \dots, M. \quad (3.77)$$

O modelo para a descrição de comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear por partes pode ser aproximado por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^p \quad (3.78)$$

2. Relação tensão-deformação elástica:

$$\sigma_{n+1} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (3.79)$$

3. Função de escoamento:

$$f_{(l)n+1} = f(\sigma_{n+1}, \beta_{(l)n+1}) = \sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{(l)n+1})^T P(\sigma_{n+1} - \beta_{(l)n+1})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_l \leq 0, \quad l = 1, \dots, M \quad (3.80)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \gamma_{(L)n+1} P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}) \quad (3.81)$$

$$\beta_{(l)n+1} = \beta_{(l)n} + \frac{2}{3} \Delta \gamma_{(L)n+1} H_{(L)0} P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), \quad l = 1, \dots, L \quad (3.82)$$

$$\beta_{(m)n+1} = \beta_{(m)n}, \quad m = L + 1, \dots, M \quad (3.83)$$

5. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\gamma_{n+1} \geq 0, \quad f_{n+1} \leq 0, \quad \gamma_{n+1} f_{n+1} = 0 \quad (3.84)$$

6. Condição de consistência:

$$\text{Se } f_n = 0, \text{ então } \Delta \gamma_{n+1} \geq 0, \quad f_{n+1} \leq f_n, \quad \Delta \gamma_{n+1} (f_{n+1} - f_n) = 0. \quad (3.85)$$

3.4.2 Algoritmo de integração numérica

O algoritmo de integração numérica consiste na determinação das variáveis de estado $\varepsilon_{n+1}^p(t_{n+1})$, $\beta_{(l)n+1}(t_{n+1})$ e $\sigma_{n+1}(t_{n+1})$, do instante t_{n+1} , supondo-as conhecidas no instante t_n , a partir de um incremento de deformação $\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ prescrito.

3.4.2.1 Estado tentativo

O estado tentativo, onde se considera o passo inteiramente elástico, no contexto de carregamentos normais-cisalhantes, pode ser representado por:

$$\varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}} = \varepsilon_n^p, \quad (3.86)$$

$$\beta_{(l)n+1}^{\text{trial}} = \beta_{(l)n}, \quad l = 1, \dots, M, \quad (3.87)$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}}). \quad (3.88)$$

Como há várias superfícies de escoamento, é possível calcular uma função de escoamento para cada superfície. Entretanto, é suficiente que se calcule apenas a função para a primeira superfície, e para a superfície L , que representa o estágio de encruamento em que a tensão se encontra, assim como mostrado anteriormente para o caso uniaxial. Portanto, as funções de escoamento podem ser expressas por:

$$f_{(1)n+1}^{\text{trial}} = \sqrt{(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{(1)n+1}^{\text{trial}})^T P(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{(1)n+1}^{\text{trial}})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1, \quad (3.89)$$

$$f_{(L)n+1}^{\text{trial}} = \sqrt{(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{(L)n+1}^{\text{trial}})^T P(\sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \beta_{(L)n+1}^{\text{trial}})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_L. \quad (3.90)$$

Se a hipótese elástica estiver correta, então se verifica a desigualdade:

$$f_{(1)n+1}^{\text{trial}} \leq 0,$$

e as variáveis de estado podem ser atualizadas por:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^{p \text{ trial}}, \quad (3.91)$$

$$\beta_{(l)n+1} = \beta_{n+1}^{\text{trial}} \quad l = 1, \dots, M, \quad (3.92)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}}. \quad (3.93)$$

3.4.2.2 Corretor plástico

Caso a hipótese elástica não se verifique ($f_{(1)n+1}^{trial} > 0$), tem-se que uma parcela do incremento de deformação é plástica. Logo, deve-se corrigir o estado tentativo, considerando-se esta parcela plástica. Neste contexto, tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) + C\varepsilon_n^p - C\varepsilon_n^p \\ &= C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - C(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} - C\Delta\gamma_{(L)n+1}P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}),\end{aligned}\quad (3.94)$$

subtraindo-se $\beta_{(L)n+1}$ de ambos os lados, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1} &= \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial} - C\Delta\gamma_{(L)n+1}P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}) - \\ &\frac{2}{3}\Delta\gamma_{(L)n+1}H_{(L)0}(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}) \\ \sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1} &= \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial} - \Delta\gamma_{(L)n+1}(CP + \frac{2}{3}H_{(L)0}I)(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}) \\ (\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}) &\left(I + \Delta\gamma_{(L)n+1}\left(CP + \frac{2}{3}H_{(L)0}I\right)\right) = \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial}\end{aligned}\quad (3.95)$$

Neste sistema de equações lineares, $\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}$ é função de $\Delta\gamma_{(L)n+1}$, que deve ser calculado de forma que:

$$f_{(L)n+1} = \sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})^T P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_L = 0, \quad (3.96)$$

de acordo com a condição de complementaridade de Kuhn-Tucker ($\gamma_{n+1}f_{n+1} = 0$). Assim, define-se o problema não-linear:

“Determine $\Delta\gamma_{n+1}$ de modo que:

$$f_{(L)n+1}(\Delta\gamma_{(L)n+1}) = \sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})^T P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_L = 0,$$

onde $\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}$ é a solução do sistema de equações lineares:

$$(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})\left(I + \Delta\gamma_{(L)n+1}\left(CP + \frac{2}{3}H_{(L)0}I\right)\right) = \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial}.”$$

A solução do problema não-linear pode ser obtida empregando-se algum método de aproximação numérica, como por exemplo o método de Newton-Raphson.

Uma vez determinado o valor de $\Delta\gamma_{(L)n+1}$ e $\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}$, deve-se atualizar os valores das variáveis de estado:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{(L)n+1}P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), \quad (3.97)$$

$$\beta_{(l)n+1} = \beta_{(l)n} + \frac{2}{3}\Delta\gamma_{(L)n+1}H_{(L)0}P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), l = 1, \dots, L, \quad (3.98)$$

$$\beta_{(m)n+1} = \beta_{(m)n}, m = L + 1, \dots, M, \quad (3.99)$$

$$\sigma_{n+1} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p). \quad (3.100)$$

Assim, o algoritmo de integração numérica para o cálculo da evolução elasto-plástica com encruamento cinemático linear por partes, para carregamentos normais-cisalhantes, é dado por:

Conhecidos os valores de ε_n^p , β_n e ε_n do instante t_n , e prescrito o incremento de deformação $\Delta\varepsilon_n$:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n.$$

1. Estado tentativo:

$$\varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}} = \varepsilon_n^p, \quad (3.101)$$

$$\beta_{(l)n+1}^{trial} = \beta_{(l)n}, l = 1, \dots, M, \quad (3.102)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}}), \quad (3.103)$$

$$f_{(1)n+1}^{trial} = \sqrt{(\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(1)n+1}^{trial})^T P(\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(1)n+1}^{trial})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1, \quad (3.104)$$

$$f_{(L)n+1}^{trial} = \sqrt{(\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial})^T P(\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_L. \quad (3.105)$$

2. Se $f_{(1)n+1}^{trial} \leq 0$, então o passo é elástico:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^{p \text{ trial}}, \quad (3.106)$$

$$\beta_{(l)n+1} = \beta_{n+1}^{trial} \quad l = 1, \dots, M, \quad (3.107)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}. \quad (3.108)$$

3. Caso contrário ($f_{(1)n+1}^{trial} > 0$), o passo é plástico, então deve-se aplicar o corretor plástico:

3.1. Calcule $\Delta\gamma_{n+1}$ como raiz da função:

$$f_{(L)n+1} = \sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})^T P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_L = 0, \quad (3.109)$$

onde $(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1})$ é a solução do sistema de equações lineares:

$$(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}) \left(I + \Delta\gamma_{(L)n+1} \left(CP + \frac{2}{3} H_{(L)0} I \right) \right) = \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{(L)n+1}^{trial}. \quad (3.110)$$

3.2. Atualize as variáveis de estado

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma_{(L)n+1} P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), \quad (3.111)$$

$$\beta_{(l)n+1} = \beta_{(l)n} + \frac{2}{3} \Delta\gamma_{(L)n+1} H_{(L)0} P(\sigma_{n+1} - \beta_{(L)n+1}), l = 1, \dots, L, \quad (3.112)$$

$$\beta_{(m)n+1} = \beta_{(m)n}, m = L + 1, \dots, M, \quad (3.113)$$

$$\sigma_{n+1} = C(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p). \quad (3.114)$$

4. Fim (calcular próximo passo)

3.5 RESULTADOS

Com o objetivo de validar a ferramenta de descrição do comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático linear por partes no contexto de carregamentos normais-cisalhantes, foram realizadas simulações, e, no caso de tração e cisalhamento puros, os resultados foram comparados à curva de Ramberg-Osgood, assim como no capítulo anterior.

3.5.1 Cisalhamento puro

Considera-se uma história de carregamento de cisalhamento descrita pela história de deformação prescrita:

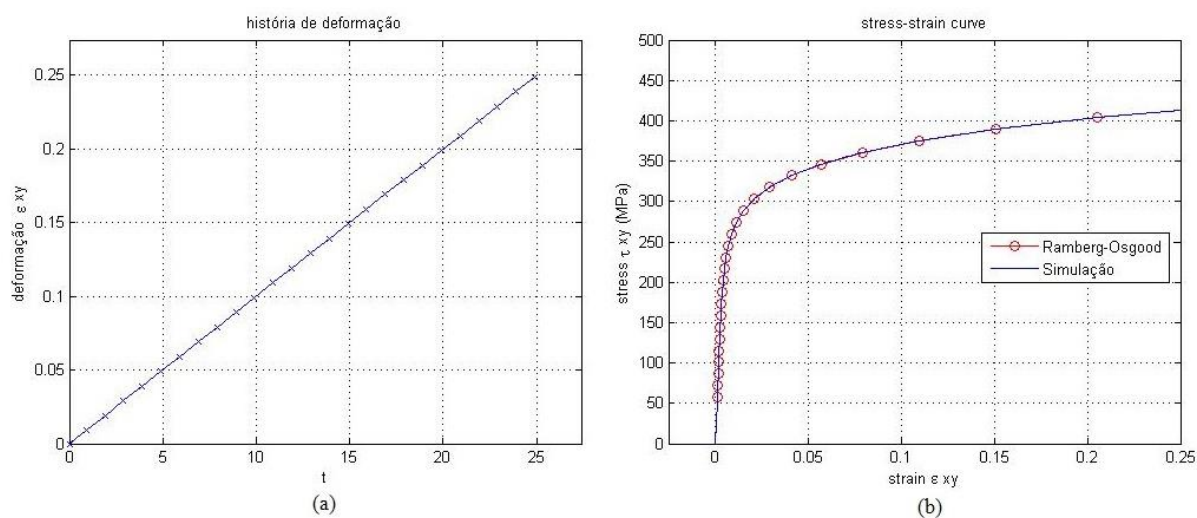


Figura 3.5 - Simulação de ensaio de cisalhamento puro. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig. 3.5 (a) ilustra a história de deformação. Esta simulação foi realizada com base nos parâmetros materiais monotônicos da liga de alumínio 7075-T6, mostrados no capítulo anterior. Os resultados obtidos na simulação são mostrados na Fig. 3.5 (b), onde os círculos vermelhos representam pontos na curva de Ramberg-Osgood, e a curva azul representa a curva tensão deformação gerada pela ferramenta desenvolvida.

3.5.2 Tração pura

Foram realizadas duas simulações de ensaio de tração, idênticas às realizadas no capítulo 2, uma para carregamento monotônico e outra para carregamento cíclico de amplitude variável. Assim como nas seções 2.4.2.1 e 2.4.2.3, as curvas tensão-deformação geradas pela ferramenta foram comparadas às curvas de Ramberg-Osgood, com o objetivo de validação da ferramenta. Os resultados obtidos são ilustrados na Fig. 3.6 e na Fig. 3.7.

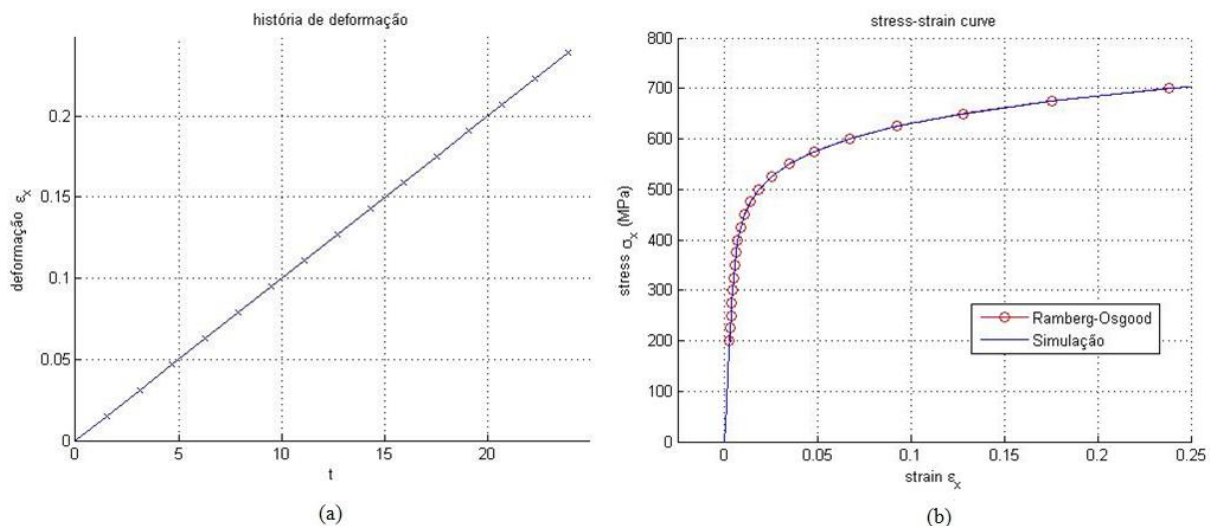


Figura 3.6 - Simulação de ensaio de tração com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

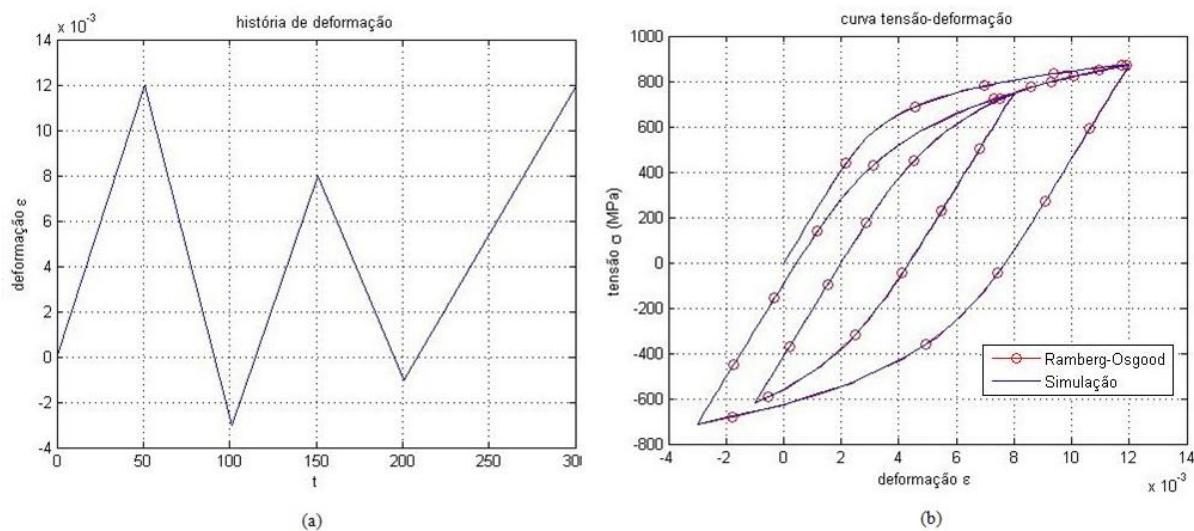


Figura 3.7 - Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

3.5.3 Carregamento não-proporcional

Considera-se uma história de carregamento não proporcional do tipo normal-cisalhante descrita pelos componentes de deformação prescrita.

O gráfico da Fig. 3.8 (a) ilustra a história de carregamento biaxial não-proporcional com amplitudes de deformação $\epsilon_{x a} = 0,02$ e $\epsilon_{xy a} = 0,005$. Para efeito de ilustração do modelo elasto-plástico com encruamento cinemático linear por partes, a simulação foi realizada com base nos parâmetros materiais da liga de alumínio 7075-T6, $E = 71 \text{ GPa}$, $H = 977 \text{ MPa}$ e $n = 0,106$ (Endo, 1969). Os resultados obtidos na simulação são as histórias de tensão σ_x e τ_{xy} , que são ilustrados na Fig. 3.8 (b), Fig. 3.8 (c) e Fig 3.8 (d).

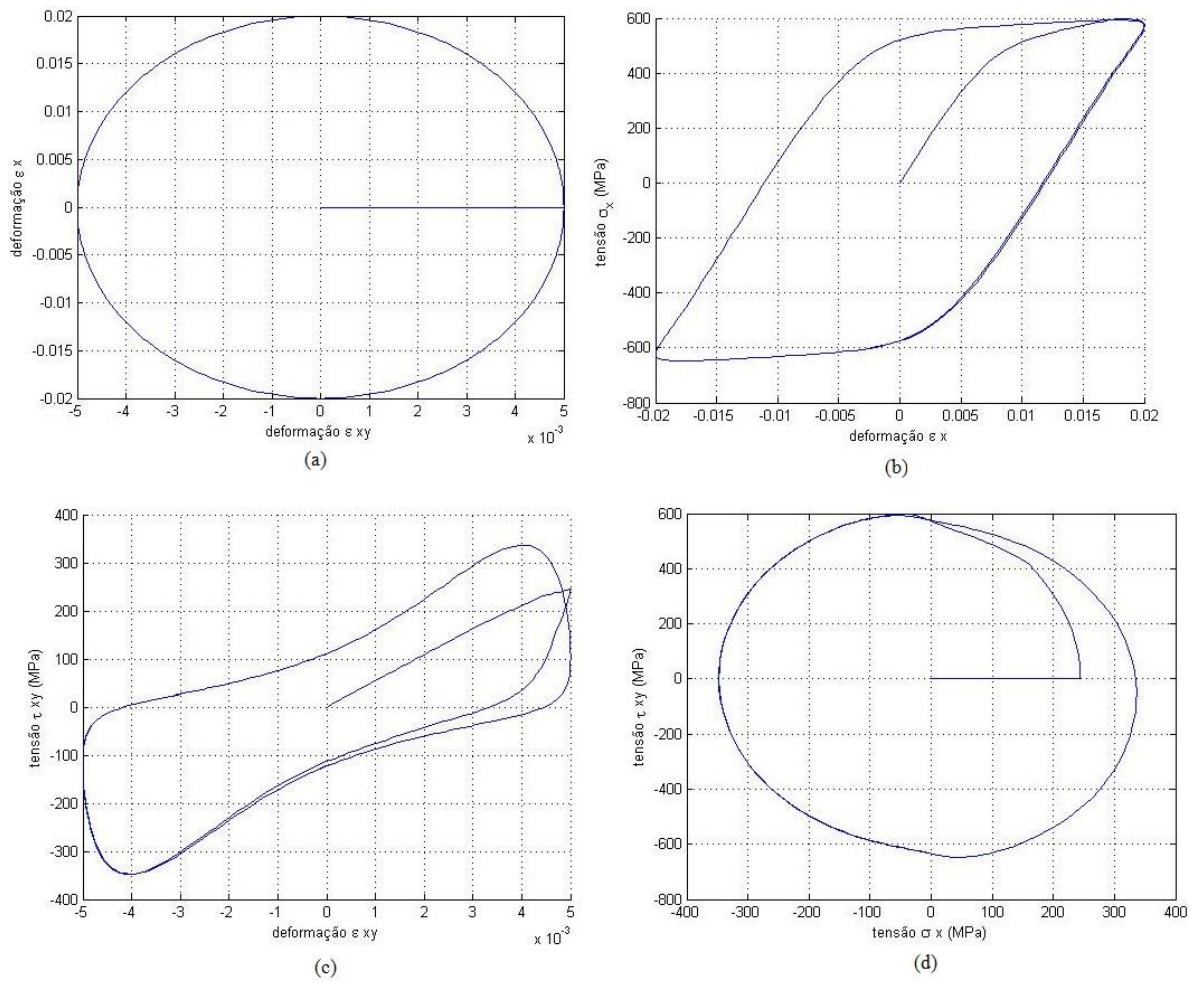


Figura 3.8 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional do tipo normal-cisalhante (a) deformação normal em função da deformação cisalhante. Respostas da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante. Respostas da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

4. MODELO DE GARUD PARA ENCRUAMENTO CINEMÁTICO

Foram descritos e testados modelos para a simulação do comportamento elasto-plástico uniaxial e multiaxial considerando a regra de encruamento de Prager. Cabe observar que este modelo foi concebido no contexto de carregamentos proporcionais e, nestas condições, produz resultados satisfatórios. Entretanto, para carregamentos não proporcionais, tal regra leva a situações mecanicamente inconcebíveis.

A Fig. 4.1 ilustra o comportamento da superfície de escoamento sob carregamento não proporcional (quando a direção do carregamento não é colinear com o centro do domínio elástico). Nota-se que neste, ao invés da superfície menor tangenciar a maior, há a intersecção entre as duas superfícies de escoamento, o que é inconcebível.

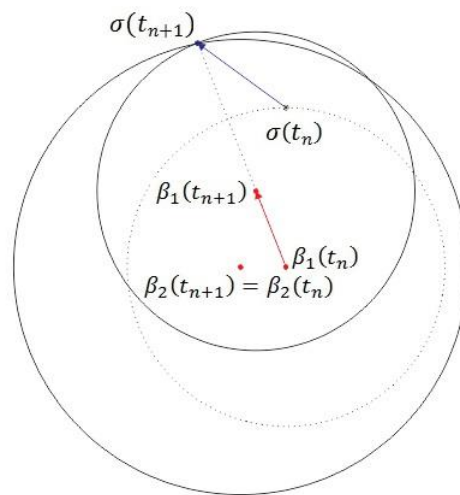


Figura 4.1 - Comportamento da superfície de escoamento sob carregamento não-proporcional, pelo modelo de Prager.

Assim, quando se consideram carregamentos não proporcionais, outros modelos devem ser considerados.

Na segunda etapa dos trabalhos, tem-se, como objetivo, o estudo, a implementação numérica e a validação do modelo de Garud. Tal modelo tem como características básicas:

- i) Superfícies múltiplas de escoamento plástico
- ii) Uma lei de encruamento cinemático que evita a intersecção entre superfícies de escoamento.

4.1 MODELO MATEMÁTICO

4.1.1 Decomposição aditiva da deformação

Assim como no modelo apresentado anteriormente, foi considerada a decomposição aditiva da deformação, que no caso multiaxial, é representada pela soma de tensores:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (4.1)$$

Como o presente estudo está focado na plasticidade de metais, considera-se que as deformações plásticas evoluam a volume constante. Nessas condições, o tensor de deformações plásticas tem sempre traço nulo, de modo que a deformação plástica coincide com seu componente desviador:

$$\boldsymbol{e}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^p)\boldsymbol{I} = \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (4.2)$$

4.1.2 Relação tensão-deformação

Supõe-se que a relação tensão-deformação elástica seja dada pelo modelo de elasticidade isotrópica, que é descrito pela relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.3)$$

onde os parâmetros materiais λ e μ são as constantes de Lamé, que podem ser escritas em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν , como é mostrado em (3.9) e (3.10). Esta relação pode ser reescrita em termos do tensor tensão desviadora

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I} \quad (4.4)$$

e do componente desviador do tensor de deformações linear elástica

$$\boldsymbol{e}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e)\boldsymbol{I} \quad (4.5)$$

como

$$\boldsymbol{S} = 2\mu\boldsymbol{e}^e. \quad (4.6)$$

Finalmente, pode-se recuperar o tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ a partir do tensor tensão desviadora \boldsymbol{S} e do tensor deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$ por meio da relação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + \sigma_H\boldsymbol{I}, \quad (4.7)$$

onde

$$\sigma_H = k \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.8)$$

e

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.9)$$

é o módulo de elasticidade volumétrico.

4.1.3 Domínios elástico e de encruamento: modelo de Mises

Assim como no modelo apresentado no capítulo anterior, a função de escoamento foi determinada de acordo com o modelo de Mises (1913). Neste modelo, o domínio elástico é definido pela região do espaço das tensões desviadoras limitada por uma hipersfera de raio \bar{S}_1 e centro β_1 , onde $\bar{S}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_1$, como mostrado no capítulo anterior. Qualquer estado de tensão deve obedecer à desigualdade:

$$f_1(\mathbf{S}, \beta_1) = \|\mathbf{S} - \beta_1\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_1 \leq 0. \quad (4.10)$$

O modelo de Prager com múltiplas superfícies e o modelo de Garud, definem adicionalmente um conjunto de domínio de encruamento, caracterizados pelas desigualdades:

$$f_l(\mathbf{S}, \beta_l) = \|\mathbf{S} - \beta_l\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_l \leq 0, l = 2, \dots, M \quad (4.11)$$

representando uma coleção de M regiões convexas no espaço desviador, semelhantes entre si e concêntricas em um estado originalmente isotrópico e livre de tensões e de deformações plásticas, conforme ilustrado na Fig. 4.2. Como essas duas restrições apresentadas devem ser satisfeitas simultaneamente, não é possível se observar intersecções entre os contornos destas regiões, podendo no máximo se observar pontos de tangência entre os mesmos.

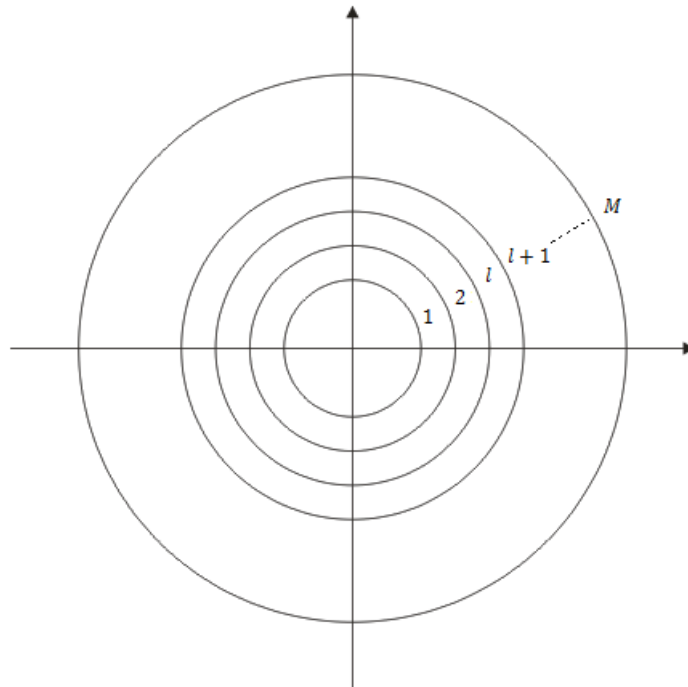


Figura 4.2 – Superfícies múltiplas de encruamento.

4.1.4 Evolução da deformação plástica

A lei associativa foi adotada, novamente, para a evolução da deformação plástica. O modelo de plasticidade se diz associativo se a evolução $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ da deformação plástica é normal à superfície de escoamento ativa, $f_l = 0$, isto é:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_l \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.12)$$

onde $\dot{\gamma}_l$ é o multiplicador plástico. Deve-se observar que a definição de plasticidade associativa expressa acima é bastante geral e aplica-se a uma classe ampla de materiais. Para o caso específico de superfícies de escoamento baseadas no modelo de Mises, a derivada direcional de f_l em relação a $\boldsymbol{\sigma}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{H} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1 \right) : \mathbf{H} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left(\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1 \right) : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{H} \\ &= \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1\|} : \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \mathbf{H} \\ &= \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)^T \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1\|} : \mathbf{H} \\ &= \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1\|} : \mathbf{H} \quad \forall \mathbf{H} \text{ simétrico,} \end{aligned} \quad (4.13)$$

de modo que

$$\frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1\|}. \quad (4.14)$$

Portanto, a expressão da evolução da deformação plástica será dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_l \mathbf{N}_l, \quad (4.15)$$

onde

$$\mathbf{N}_l = \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_1\|}. \quad (4.16)$$

4.1.5 Condição de complementaridade de Kuhn-Tucker

Novamente, a condição de complementaridade de Kuhn-Tucker é parte essencial da modelagem do comportamento elasto-plástico e, essencialmente, estabelece que a evolução da deformação plástica somente pode ocorrer se o estado de tensão estiver definido sobre a superfície de escoamento $f_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = 0$. Formalmente, essa relação é expressa como:

$$\dot{\gamma}_l \geq 0, f_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) \leq 0, \dot{\gamma}_l f_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = 0. \quad (4.17)$$

Assim, se $f_l < 0$, o produto $\dot{\gamma}_l f_l = 0$ impõe $\dot{\gamma}_l = 0$, isto é, não se observa evolução da deformação plástica no estágio l . Por outro lado, o mesmo produto impõe que se $\dot{\gamma}_l > 0$, isto é, se há evolução da deformação plástica, então necessariamente $f_l = 0$, isto é, o estado de tensão está definido sobre a superfície de escoamento l .

4.1.6 Condição de consistência

A condição de consistência, como mostrado anteriormente, estabelece a evolução dos valores da função $f_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l)$ durante o processo de plastificação. Esta condição estabelece que, se o estado de tensão está definido sobre a superfície de escoamento ($f_l = 0$), então (i) há evolução da deformação plástica ($\dot{\gamma}_l > 0$) e então o estado de tensão pode evoluir, mas deve ser tal que $f_l = 0$, isto é, permanecendo sobre a superfície de escoamento ou (ii) não há evolução da deformação plástica ($\dot{\gamma}_l = 0$) e eventualmente se observa descarregamento elástico, $\dot{f}_l \leq 0$. Formalmente, a condição de consistência é expressa como:

$$\text{Se } f_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = 0, \text{ então: } \dot{\gamma}_l \geq 0, \dot{f}_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) \leq 0, \dot{\gamma}_l \dot{f}_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = 0. \quad (4.18)$$

4.1.7 Módulo plástico

Seja $C_l \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ a projeção de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ na direção $\frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ da superfície de escoamento $f_l = 0$. O parâmetro C_l é denominado módulo plástico no estágio l e estabelece uma relação entre as evoluções da deformação plástica e da tensão. Por definição, a diferença entre $C_l \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ e $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ é ortogonal a $\frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, ou seja:

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - C_l \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) : \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0. \quad (4.19)$$

Considerando-se a lei associativa do escoamento plástico, pode-se reescrever esta relação como:

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - C_l \dot{\gamma}_l \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) : \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad (4.20)$$

de modo que o multiplicador plástico $\dot{\gamma}_l$ pode ser calculado como:

$$\dot{\gamma}_l = \frac{1}{C_l} \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} = \frac{1}{C_l} \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{N}_l}{\mathbf{N}_l : \mathbf{N}_l}, \quad (4.21)$$

ou seja, esta expressão assume a forma específica:

$$\dot{\gamma}_l = \frac{1}{C_l} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{N}_l = \frac{1}{C_l} \dot{\mathbf{S}} : \mathbf{N}_l. \quad (4.22)$$

Com uma relação análoga à usada para determinar a expressão (3.54), pode-se definir:

$$C_l = \frac{2}{3} H_l. \quad (4.23)$$

4.1.8 Modelo de Garud para o encruamento cinemático

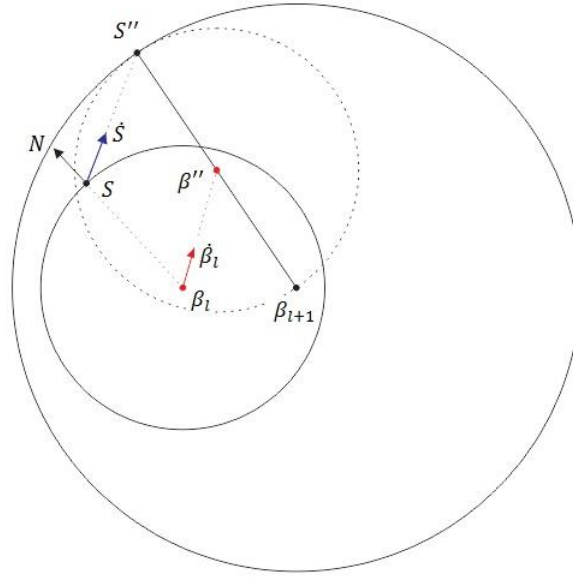


Figura 4.3 - Evolução do centro da superfície de escoamento pelo modelo de Garud.

A Fig. 4.3 ilustra, no espaço desviador, o estado de tensão \mathbf{S} definido no contorno da superfície de escoamento $f_l = 0$ e a taxa de evolução da tensão $\dot{\mathbf{S}}$ com direção externa a este contorno, representando assim uma evolução da deformação plástica. O modelo de Garud consiste nos seguintes passos:

- i) Determinar o ponto em que a tensão alcançaria o contorno da próxima superfície de escoamento ($l + 1$) se seguisse na direção $\dot{\mathbf{S}}$, denotado na figura por \mathbf{S}'' , que pode ser determinado adotando-se a parametrização $\mathbf{S}'' = \mathbf{S} + \alpha \dot{\mathbf{S}}$ e pesquisando-se o valor de α tal que a restrição:

$$\|\mathbf{S}''(\alpha) - \boldsymbol{\beta}_{l+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{l+1} = 0 \quad (4.24)$$

seja satisfeita.

- ii) Se S evoluir até S'' , então a superfície de escoamento l , com centro

$$\boldsymbol{\beta}'' = \mathbf{S}'' - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_l \frac{\mathbf{S}'' - \boldsymbol{\beta}_{l+1}}{\|\mathbf{S}'' - \boldsymbol{\beta}_{l+1}\|} \quad (4.25)$$

sobre o segmento que une $\boldsymbol{\beta}_{l+1}$ e \mathbf{S}'' , será tangente à superfície ($l + 1$). Nestas condições, Garud observa que o centro $\boldsymbol{\beta}_l$ da superfície l deve evoluir com taxa $\dot{\boldsymbol{\beta}}_l$ na direção:

$$\mathbf{Y}_l = \boldsymbol{\beta}'' - \boldsymbol{\beta}_l, \quad (4.26)$$

ou seja,

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_l = \dot{\eta}_l \mathbf{Y}_l, \quad (4.27)$$

onde $\dot{\eta}_l$ é o multiplicador de encruamento cinemático.

4.1.9 Multiplicador de encruamento cinemático

O multiplicador de encruamento cinemático pode ser obtido impondo-se a condição de consistência:

$$\dot{f}_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = 0. \quad (4.28)$$

De fato, para

$$f_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = \|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_l\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_l \leq 0, l = 1, \dots, M, \quad (4.29)$$

tem-se que:

$$\dot{f}_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = \frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} + \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\beta}_l} : \dot{\boldsymbol{\beta}}_l = 0, \quad (4.30)$$

onde

$$\frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{N}_l, \quad \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\beta}_l} = -\mathbf{N}_l, \quad (4.31)$$

de modo que:

$$\dot{f}_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = \mathbf{N}_l : (\dot{\mathbf{S}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}_l) = \mathbf{N}_l : (\dot{\mathbf{S}} - \dot{\eta}_l \mathbf{Y}_l) = 0, \quad (4.32)$$

de onde se obtém:

$$\dot{\eta}_l = \frac{\dot{\mathbf{S}} : \mathbf{N}_l}{\mathbf{Y}_l : \mathbf{N}_l}. \quad (4.33)$$

Assim, pode-se escrever a lei de Garud para encruamento cinemático como:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_l = \frac{\dot{\mathbf{S}} : \mathbf{N}_l}{\mathbf{Y}_l : \mathbf{N}_l} \mathbf{Y}_l. \quad (4.34)$$

Por outro lado, a partir da expressão (4.22) para o multiplicador plástico $\dot{\gamma}$,

$$\dot{\gamma}_l C_l = \dot{\mathbf{S}} : \mathbf{N}_l,$$

e considerando-se a relação entre C_l e H_l estabelecida pela expressão (4.23), chega-se a:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_l = \frac{2}{3} H_l \dot{\gamma}_l \frac{\mathbf{Y}_l}{\mathbf{Y}_l : \mathbf{N}_l}. \quad (4.35)$$

4.1.10 Expressão alternativa para o multiplicador plástico

A evolução da deformação plástica e do encruamento cinemático são quantitativamente determinados pelo multiplicador plástico $\dot{\gamma}_l$, expresso em função da taxa $\dot{\mathbf{S}}$ da tensão desviadora por meio da expressão (4.22):

$$\dot{\gamma}_l = \frac{1}{C_l} \dot{\mathbf{S}} : \mathbf{N}_l$$

O objetivo desta subseção é apresentar uma fórmula alternativa para o multiplicador plástico, escrito em função da taxa de deformação total $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Isto pode ser conseguido a partir da relação de consistência (4.32):

$$\dot{f}_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = \mathbf{N}_l : (\dot{\mathbf{S}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}_l) = 0. \quad (4.36)$$

A relação constitutiva e a fórmula associativa para a evolução da deformação plástica permitem escrever:

$$\dot{\mathbf{S}} = 2G(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma}_l \mathbf{N}_l). \quad (4.37)$$

Assim, considerando-se a lei (4.35) de encruamento de Garud, a relação de consistência pode ser reescrita como:

$$\dot{f}_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = \left(2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G\dot{\gamma}_l \mathbf{N}_l - \frac{2}{3} H_l \dot{\gamma}_l \frac{\mathbf{Y}_l}{\mathbf{Y}_l : \mathbf{N}_l} \right) : \mathbf{N}_l = 0, \quad (4.38)$$

de modo que

$$G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}_l - \dot{\gamma}_l \left(G + \frac{H_l}{3} \right) = 0, \quad (4.39)$$

e portanto, pode-se escrever o multiplicador plástico $\dot{\gamma}_l$ em função da taxa de deformação total $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ como:

$$\dot{\gamma}_l = \frac{3G}{3G+H_l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}_l, \quad (4.40)$$

onde se levou em conta que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}_l = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}_l$.

Adicionalmente, pode-se calcular a evolução do tensor tensão desviadora \mathbf{S} em função da evolução da deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$ a partir das expressões (4.37) e (4.40). Assim, se $\dot{\gamma}_l > 0$ e $\dot{f}_l = 0$, então:

$$\dot{\mathbf{S}} = 2G \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3G}{3G+H_l} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}_l) \mathbf{N}_l \right]. \quad (4.41)$$

Esta expressão apresenta como característica o fato de que não necessita calcular explicitamente a evolução da deformação plástica para que se determine a evolução da tensão.

4.1.11 Resumo do modelo

Em resumo, o modelo para o comportamento elasto-plástico associativo, com superfícies de escoamento de Mises e encruamento cinemático de Garud, pode ser expresso pelas relações:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (4.42)$$

2. Relação tensão-deformação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{S} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (4.44)$$

3. Domínios elástico e de encruamento:

$$f_l(\mathbf{S}, \boldsymbol{\beta}_l) = \|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_l\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_l \leq 0, l = 1, \dots, M \quad (4.45)$$

4. Leis de escoamento plástico (plasticidade associativa):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_l \mathbf{N}_l, \mathbf{N}_l = \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_l}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\beta}_l\|}. \quad (4.46)$$

5. Evolução da tensão: se há evolução da deformação plástica, então:

$$\dot{\mathbf{S}} = 2G \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3G}{3G+H_l} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}_l) \mathbf{N}_l \right]. \quad (4.47)$$

6. Lei de encruamento cinemático

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_l = \frac{2}{3} H_l \dot{\gamma}_l \frac{\mathbf{Y}_l}{\mathbf{Y}_l : \mathbf{N}_l} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{Y}_l = \boldsymbol{\beta}'' - \boldsymbol{\beta}_l \quad (4.49)$$

$$\boldsymbol{\beta}'' = \mathbf{S}'' - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{0l} \frac{\mathbf{S}'' - \boldsymbol{\beta}_{l+1}}{\|\mathbf{S}'' - \boldsymbol{\beta}_{l+1}\|} \quad (4.50)$$

onde $\mathbf{S}'' = \mathbf{S} + \alpha \dot{\mathbf{S}}$ e α é a raiz de:

$$\|\mathbf{S} + \alpha \dot{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\beta}_{l+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{l+1} = 0. \quad (4.51)$$

7. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\gamma}_l \geq 0, f_l \leq 0, \dot{\gamma}_l f_l = 0. \quad (4.52)$$

8. Condição de consistência: Se $f_l = 0$, então:

$$\dot{\gamma}_l \geq 0, \dot{f}_l \leq 0, \dot{\gamma}_l \dot{f}_l = 0. \quad (4.53)$$

4.2 MODELO DISCRETIZADO: REGRA DE EULER EXPLÍCITO

A discretização adotada nesta etapa considera a integração aproximada das leis de escoamento plástico e de encruamento cinemático por meio de uma regra de Euler explícito: a integração de equações diferenciais do tipo:

$$\dot{y}(t) = \phi(t, y) \quad (4.54)$$

é aproximada como:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \phi(t_n, y_n), \quad (4.55)$$

onde y_n e y_{n+1} representam os valores aproximados da função $y(t)$ respectivamente no instantes $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$, enquanto $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. A regra de Euler explícito se caracteriza pela simplicidade de sua implementação, embora possa eventualmente exibir instabilidade do algoritmo resultante.

Supondo conhecidas as variáveis de estado $\varepsilon_n, \varepsilon_n^p$ e β_{ln} do instante t_n , o problema discretizado consiste em se determinar os novos valores ε_{n+1}^p e $\beta_{l,n+1}$ associados ao estado de deformação ε_{n+1} no instante t_{n+1} tais que:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^p. \quad (4.56)$$

2. Relação tensão-deformação:

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon_{n+1}^e) I + 2\mu \varepsilon_{n+1}^e, \quad (4.57)$$

$$S = 2\mu e_{n+1}^e. \quad (4.58)$$

3. Domínios elástico e de encruamento:

$$f_{ln+1} = \|S_{n+1} - \beta_{ln+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_l \leq 0, l = 1, \dots, M \quad (4.59)$$

4. Leis de escoamento plástico:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\gamma_l N_{ln}, \quad (4.60)$$

onde

$$\Delta\varepsilon^p = \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p, \quad (4.61)$$

$$\Delta\gamma_l = \gamma_l \Delta t, \quad (4.62)$$

$$N_{ln} = \frac{S_n - \beta_{ln}}{\|S_n - \beta_{ln}\|}. \quad (4.63)$$

5. Evolução da tensão: se há evolução da deformação plástica, então:

$$\Delta S = 2G \left[\Delta e - \frac{3G}{3G+H_l} (\Delta\varepsilon : N_{ln}) N_{ln} \right], \quad (4.64)$$

onde

$$\Delta S = S_{n+1} - S_n, \quad (4.65)$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n, \quad (4.66)$$

$$\Delta e = \Delta\varepsilon - \frac{1}{3}(\text{tr } \Delta\varepsilon)I. \quad (4.67)$$

6. Lei de encruamento cinemático

$$\Delta\beta_l = \frac{2}{3}H_l \Delta\gamma_l \frac{Y_{ln}}{Y_{ln} : N_{ln}} \quad (4.68)$$

onde

$$\Delta\beta_l = \beta_{ln+1} - \beta_{ln}, \quad (4.69)$$

$$Y_{ln} = \beta_n'' - \beta_{ln}, \quad (4.70)$$

$$\beta_n'' = S'' - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_l \frac{S'' - \beta_{l+1n}}{\|S'' - \beta_{l+1n}\|}, \quad (4.71)$$

$$S'' = S_{n+1} + \alpha\Delta S, \quad (4.72)$$

e α é a raiz de:

$$\|S_{n+1} + \alpha\Delta S - \beta_{l+1n}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{l+1} = 0. \quad (4.73)$$

7. Condições de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\Delta\gamma_l \geq 0, f_{ln+1} \leq 0, \Delta\gamma_l f_{ln+1} = 0. \quad (4.74)$$

8. Condição de consistência: Se $f_{ln} = 0$, então:

$$\Delta\gamma_l \geq 0, f_{ln+1} \geq f_{ln}, \Delta\gamma_l (f_{ln+1} - f_{ln}) = 0. \quad (4.75)$$

4.3 INTEGRAÇÃO DO MODELO DISCRETIZADO

O algoritmo de integração explícita considerado nesta seção calcula as variáveis de estado ε_{n+1}^p e $\beta_{l\ n+1}$ no instante t_{n+1} a partir da prescrição do incremento de deformação total $\Delta\varepsilon$ e supondo-se conhecidas as mesmas variáveis de estado, assim como a deformação total, no instante t_n .

4.3.1 Estado tentativo

O primeiro passo deste algoritmo consiste no cálculo do estado tentativo, supondo-se tentativamente que o passo de carregamento seja elástico, isto é, sem evolução da deformação plástica ε^p ou dos centros β_l dos domínios elásticos e de encruamento. Nestas condições:

$$e_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3}(\text{tr } \varepsilon_{n+1})\mathbf{I}, \quad (4.76)$$

$$S_{n+1}^{trial} = 2G(e_{n+1} - \varepsilon_n^p), \quad (4.77)$$

$$f_{1\ n+1}^{trial} = \|S_{n+1}^{trial} - \beta_{1\ n}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_1. \quad (4.78)$$

Se $f_{1\ n+1}^{trial} \leq 0$, então conclui-se que o passo é elástico e, conseqüentemente:

$$S_{n+1} = S_{n+1}^{trial}, \quad (4.79)$$

$$\beta_{j\ n+1} = \beta_{j\ n}, j = 1, \dots, M, \quad (4.80)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \quad (4.81)$$

$$\sigma_{n+1} = \lambda \text{tr} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)\mathbf{I} + 2G(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p), \quad (4.82)$$

$$l = 1. \quad (4.83)$$

4.3.2 Passo plástico: modelo de Garud

Caso contrário, o passo é plástico. Admitindo-se que a superfície ativa de escoamento plástico esteja associada ao índice l , o incremento da tensão desviadora pode ser calculado diretamente a partir de:

$$\Delta S = 2G \left[\Delta e - \frac{3G}{3G+H_l} (\Delta\varepsilon : N_{l\ n}) N_{l\ n} \right], \quad (4.84)$$

$$S_{n+1} = S_n + \Delta S, \quad (4.85)$$

onde Δe e $N_{l\ n}$ são definidos respectivamente por (4.67) e (4.63):

$$\Delta e = \Delta\varepsilon - \frac{1}{3}(\text{tr } \Delta\varepsilon)\mathbf{I}, N_{l\ n} = \frac{S_n - \beta_{l\ n}}{\|S_n - \beta_{l\ n}\|}.$$

O próximo passo consiste na atualização dos centros β_j dos domínios elásticos e de encruamento, $j = 1, \dots, M$. Tal atualização é obtida a partir dos seguintes passos:

- i. Determinação de S'' :

A partir de (4.73), tem-se:

$$\|S_{n+1} + \alpha\Delta S - \beta_{l+1\ n}\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_{l+1}^2 = 0, \quad (4.86)$$

De modo que

$$\|\Delta S\|^2 \alpha^2 + 2\Delta S: (S_{n+1} - \beta_{l+1n})\alpha + \|S_{n+1} - \beta_{l+1n}\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_{l+1}^2 = 0, \quad (4.87)$$

definindo

$$A = \|\Delta S\|^2, \quad (4.88)$$

$$B = \Delta S: (S_{n+1} - \beta_{l+1n}), \quad (4.89)$$

$$C = \frac{2}{3}\sigma_{l+1}^2 - \|S_{n+1} - \beta_{l+1n}\|^2 \quad (> 0), \quad (4.90)$$

o fator α é a raiz positiva de:

$$A\alpha^2 + 2B\alpha - C = 0, \quad (4.91)$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A}. \quad (4.92)$$

O ponto S'' no contorno de $f_{l+1} = 0$ é calculado então como:

$$S'' = S_n + \alpha\Delta S. \quad (4.93)$$

ii. Direção para a evolução do encruamento:

$$Y_{ln} = \beta_{l''}'' - \beta_{ln}, \quad (4.94)$$

onde

$$\beta_{l''}'' = S'' - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_l \frac{S'' - \beta_{l+1n}}{\|S'' - \beta_{l+1n}\|}. \quad (4.95)$$

iii. Evolução do encruamento

Para o cálculo de $\beta_{l\ n+1}$, o procedimento natura seria empregar a expressão:

$$\Delta\beta_l = \frac{2}{3}H_l\Delta\gamma_l \frac{Y_{ln}}{Y_{ln}:N_{ln}}. \quad (4.96)$$

Entretanto, Garud optou por um procedimento diferente, de modo a garantir de maneira exata a relação de consistência discretizada, isto é, $f_{l\ n+1} = 0$: o incremento $\Delta\beta_l$ tem direção Y_{ln} , tal como proposto nesta fórmula, mas a magnitude do incremento deve ser tal que S_{n+1} esteja definida exatamente sobre a superfície $f_l = 0$. Como S_{n+1} já foi calculado, impõe-se o problema inverso, ou seja, de determinar o incremento $\Delta\beta_l = \rho Y_{ln}$ tal que:

$$f_{l\ n+1} = \|S_{n+1} - (\beta_{ln} + \rho Y_{ln})\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_l^2 = 0. \quad (4.97)$$

O desenvolvimento desta expressão fornece:

$$\|Y_{ln}\|^2 \rho^2 - 2(S_{n+1} - \beta_{ln}):Y_{ln}\rho + \|S_{n+1} - \beta_{ln}\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_l^2 = 0, \quad (4.98)$$

de modo que, fazendo

$$a = \|Y_{ln}\|^2, \quad (4.99)$$

$$b = (S_{n+1} - \beta_{ln}):Y_{ln} \quad (> 0), \quad (4.100)$$

$$c = \|S_{n+1} - \beta_{ln}\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_l^2 (> 0), \quad (4.101)$$

a equação pode ser reescrita como:

$$a\rho^2 - 2b\rho + c = 0, \quad (4.102)$$

cuja menor raiz é dada por:

$$\rho = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (4.103)$$

Assim, calcula-se

$$\Delta\beta_l = \rho Y_{ln}. \quad (4.104)$$

Se o índice l identifica a superfície ativa de encruamento, então as superfícies $f_{jn+1}, j = 1, \dots, l$ devem ser tangentes entre si em S_{n+1} . Como consequência, os centros $\beta_{jn+1}, j = 1, \dots, l-1$ devem estar definidos sobre o segmento entre β_{ln+1} e S_{n+1} , ou seja:

$$\beta_{jn+1} = S_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_j N_{ln+1}, j = 1, \dots, l-1, \quad (4.105)$$

onde

$$N_{ln+1} = \frac{S_{n+1} - \beta_{ln+1}}{\|S_{n+1} - \beta_{ln+1}\|}. \quad (4.106)$$

Finalmente, as superfícies de encruamento para $j > l$ permanecem inalteradas:

$$\beta_{jn+1} = \beta_{jn}, j = l+1, \dots, M. \quad (4.107)$$

4.3.3 Correção do passo

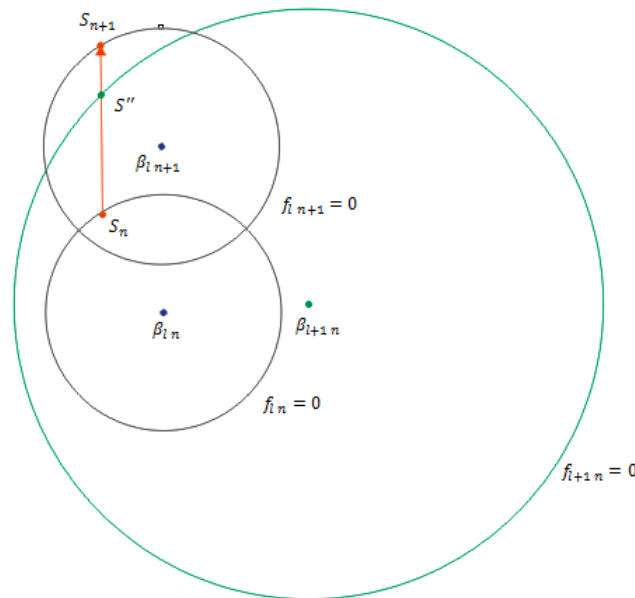


Figura 4.4 – Evolução do estado de tensão gerando intersecção espúria entre superfícies de encruamento.

Eventualmente, o incremento de deformação $\Delta\varepsilon$ pode produzir, a partir da expressão (4.84), um estado de tensão S_{n+1} que, de maneira espúria, não esteja contido no domínio de encruamento $f_{l+1} \leq 0$, conforme está ilustrado na figura 4.4. Tal situação é caracterizado pela desigualdade:

$$\|S_{n+1} - S_n\| > \|S'' - S_n\|, \quad (4.108)$$

significando que, para o passo $\Delta\varepsilon$ considerado, parte da evolução plástica ocorre no estágio l de encruamento, e parte no estágio $l + 1$. Entretanto, a fórmula (4.84) calcula a evolução do estado de tensão com encruamento H_l . Assim, quando a desigualdade (4.108) é observada, o passo $\Delta\varepsilon$ deve ser corrigido para $\varphi\Delta\varepsilon$, $0 < \varphi < 1$, de tal forma que se restrinja a evolução de tensão até o limiar do encruamento no estágio $l + 1$, isto é, $S_{n+1} = S''$. O fator de correção pode ser calculado por:

$$\varphi = \frac{\|S'' - S_n\|}{\|\Delta S\|}. \quad (4.109)$$

Feito isso, o passo deve ser recalculado considerando-se $\varphi\Delta\varepsilon$ e o domínio de encruamento $f_{l+1} \leq 0$.

4.3.4 Empacotamento de superfícies de escoamento

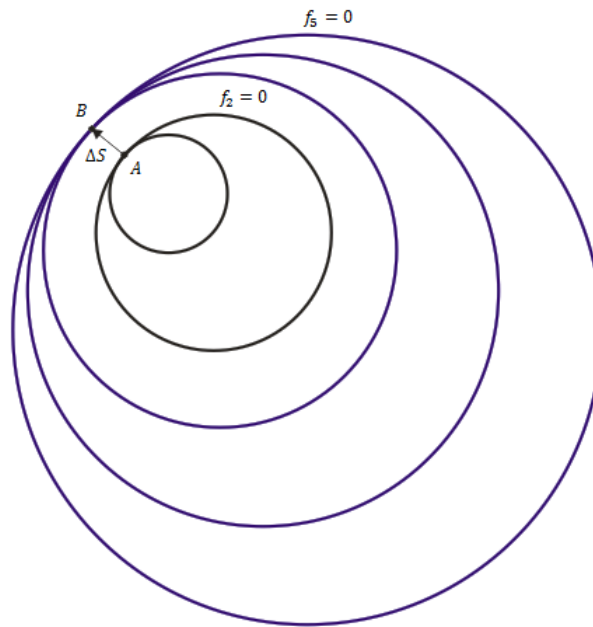


Figura 4.5 – Ilustração de situação em que a superfície de encruamento ativa está associada a $f_2 = 0$, mas no passo seguinte estará associada a $f_5 = 0$.

Sob condições de carregamento não monótonos, é possível se observar as situações de encruamento como aquelas ilustradas na figura 4.5: no instante t_n , as superfícies $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ são tangente entre si no ponto A, enquanto as superfícies $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ e $f_5 = 0$ são tangentes entre si em B. Assim, a superfície ativa de encruamento está associada ao índice $l = 2$. Observa-se que, se o passo ΔS levar o estado de tensão do ponto A ao ponto B, no passo seguinte a superfície ativa de encruamento será aquela associada ao índice $l = 5$. Isto exige uma adaptação no algoritmo de integração, descrita no algoritmo da próxima subseção.

4.3.5 Algoritmo

O algoritmo de integração do modelo incremental do comportamento mecânico elasto-plástico, considerando-se a regra de Euler explícito (com imposição exata na condição de consistência) é dado por: Sejam conhecidos ε_n e $\beta_{jn}, j = 1, \dots, M$. Seja imposto o incremento de deformação total $\Delta\varepsilon$.

1. Calcule o estado tentativo:

$$e_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \frac{1}{3}(tr \varepsilon_{n+1})I, \quad (4.110)$$

$$S_{n+1}^{trial} = 2G(e_{n+1} - \varepsilon_n^p), \quad (4.111)$$

$$f_{1n+1}^{trial} = \|S_{n+1}^{trial} - \beta_{1n}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_1. \quad (4.112)$$

2. Se $f_{1n+1}^{trial} \leq 0$, então o passo é elástico:

$$S_{n+1} = S_{n+1}^{trial}, \quad (4.113)$$

$$\beta_{jn+1} = \beta_{jn}, j = 1, \dots, M, \quad (4.114)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \quad (4.115)$$

$$\sigma_{n+1} = \lambda tr(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)I + 2G(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p), \quad (4.116)$$

$$l = 1. \quad (4.117)$$

3. Caso contrário, o passo é plástico:

(a) Calcule os incrementos $\Delta S, \Delta\beta_j, j = 1, \dots, M$ e o fator de correção φ ;

(b) Enquanto $\varphi = 0$ (empacotamento de superfícies de escoamento):

$$i. \quad l = l + 1; \quad (4.118)$$

ii. Recalcule o fator de correção φ ;

(c) Se $0 < \varphi < 1$:

$$i. \quad \Delta\varepsilon = \varphi\Delta\varepsilon; \quad (4.119)$$

ii. Recalcule os incrementos $\Delta S, \Delta\beta_j, j = 1, \dots, M$ e o fator de correção φ ;

$$iii. \quad l = l + 1; \quad (4.120)$$

(d) Calcule o estado de tensão, o estado de deformação e os centros das superfícies de encruamento atualizados:

$$S_{n+1} = S_n + \Delta S; \quad (4.121)$$

$$\beta_{jn+1} = \beta_{jn} + \Delta\beta_j, j = 1, \dots, M; \quad (4.122)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon; \quad (4.123)$$

Cálculo dos incrementos $\Delta S, \Delta\beta_j, j = 1, \dots, M$ e do fator de correção φ :

1. Calcule o incremento de tensão:

$$\Delta e = \Delta\varepsilon - \frac{1}{3}(tr \Delta\varepsilon)I, \quad (4.124)$$

$$N_{ln} = \frac{S_n - \beta_{ln}}{\|S_n - \beta_{ln}\|}, \quad (4.125)$$

$$\Delta S = 2G \left[\Delta e - \frac{3G}{3G+H_l} (\Delta \varepsilon: N_{ln}) N_{ln} \right]. \quad (4.126)$$

2. Determine a direção de encruamento:

$$A = \|\Delta S\|^2, \quad (4.127)$$

$$B = \Delta S: (S_{n+1} - \beta_{l+1n}), \quad (4.128)$$

$$C = \frac{2}{3} \sigma_{l+1}^2 - \|S_{n+1} - \beta_{l+1n}\|^2, \quad (4.129)$$

$$\alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A}, \quad (4.131)$$

$$S'' = S_n + \alpha \Delta S, \quad (4.132)$$

$$\beta_l'' = S'' - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_l \frac{S'' - \beta_{l+1n}}{\|S'' - \beta_{l+1n}\|}, \quad (4.133)$$

$$Y_{ln} = \beta_l'' - \beta_{ln}. \quad (4.134)$$

3. Atualize a variável de encruamento para o estágio l :

$$a = \|Y_{ln}\|^2, \quad (4.135)$$

$$b = (S_{n+1} - \beta_{ln}): Y_{ln}, \quad (4.136)$$

$$c = \|S_{n+1} - \beta_{ln}\|^2 - \frac{2}{3} \sigma_l^2, \quad (4.137)$$

$$\rho = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (4.138)$$

$$\Delta \beta_l = \rho Y_{ln}. \quad (4.139)$$

4. Atualize as variáveis de encruamento para os demais estágios:

$$N_{ln+1} = N_{ln} = \frac{S_{n+1} - \beta_{ln+1}}{\|S_{n+1} - \beta_{ln+1}\|}, \quad (4.140)$$

$$\beta_{jn+1} = S_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_j N_{ln+1}, j = 1, \dots, l-1, \quad (4.141)$$

$$\beta_{jn+1} = \beta_{jn}, j = l+1, \dots, M. \quad (4.142)$$

$$5. \text{ Se } \|S_n + \Delta S - \beta_{l+1n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{l+1} \leq 0, \quad (4.140)$$

$$\varphi = 1; \quad (4.143)$$

senão:

$$\varphi = \frac{\|S'' - S_n\|}{\|\Delta S\|}. \quad (4.144)$$

4.4 ESTADO DE TENSÃO NORMAL-CISALHANTE

Para a simulação do comportamento elasto-plástico pelo modelo de Garud, também foram considerados carregamentos normais-cisalhantes, assim como no capítulo anterior. Porém, desta vez, ao invés de adaptar o algoritmo ao caso específico de carregamentos normais-cisalhantes, decidiu-se adaptar somente a história de deformações para que esta fosse capaz de gerar histórias de tensões σ_x e τ_{xy} somente. Isto foi possível a partir da eliminação da deformação plástica na formulação das leis de evolução, como será mostrado a seguir.

No caso de carregamentos normais-cisalhantes, a taxa de deformação total é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\varepsilon}_{xy} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\varepsilon}_{xy} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{xy} & -\nu_{eff}\dot{\varepsilon}_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{eff}\dot{\varepsilon}_x \end{pmatrix}. \quad (4.145)$$

Assim, no problema discretizado, o incremento de deformação imposto para a deformação total tem forma:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_x & \Delta\varepsilon_{xy} & 0 \\ \Delta\varepsilon_x & -\nu_{eff}\Delta\varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{eff}\Delta\varepsilon_x \end{pmatrix}. \quad (4.146)$$

Entretanto, esta expressão apresenta o inconveniente de necessitar do cálculo de $-\nu_{eff}$:

$$-\nu_{eff} = \frac{\nu_e \varepsilon_x^e + \nu_p \varepsilon_x^p}{\varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p}, \quad (4.147)$$

onde o conhecimento de ε^p (nos instantes t_n e t_{n+1}) se faz necessário. Os cálculos que se seguem são desenvolvidos com o objetivo de eliminar a deformação plástica na descrição de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, e portanto de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

A decomposição aditiva da deformação fornece:

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_y^e + \dot{\varepsilon}_y^p. \quad (4.148)$$

1. Parcela elástica:

$$\dot{\varepsilon}_y^e = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_x = -\frac{\nu}{E} E (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_x^p) = -\nu (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_x^p). \quad (4.149)$$

2. Parcela plástica:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3G}{3G+H} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N}) \mathbf{N}, \quad (4.150)$$

onde

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\varepsilon}_{xy} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N_x & N_{xy} & 0 \\ N_{xy} & -N_x/2 & 0 \\ 0 & 0 & -N_x/2 \end{pmatrix} = \dot{\varepsilon}_x N_x - \dot{\varepsilon}_y N_x + 2\dot{\varepsilon}_{xy} N_{xy}. \quad (4.151)$$

Assim:

$$\dot{\varepsilon}_x^p = \frac{3G}{3G+H} (\dot{\varepsilon}_x N_x - \dot{\varepsilon}_y N_x + 2\dot{\varepsilon}_{xy} N_{xy}) N_x, \quad (4.152)$$

$$\dot{\varepsilon}_y^p = \dot{\varepsilon}_z^p = \frac{3G}{3G+H} (\dot{\varepsilon}_x N_x - \dot{\varepsilon}_y N_x + 2\dot{\varepsilon}_{xy} N_{xy}) \left(-\frac{N_x}{2}\right). \quad (4.153)$$

Portanto, $\dot{\varepsilon}_y^e$ pode ser expresso por:

$$\dot{\varepsilon}_y^e = -v(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_x^p) = -v\dot{\varepsilon}_x + v\frac{3G}{3G+H}(\dot{\varepsilon}_x N_x - \dot{\varepsilon}_y N_x + 2\dot{\varepsilon}_{xy} N_{xy})N_x. \quad (4.154)$$

A partir das expressões (4.148), (4.153) e (4.154):

$$\dot{\varepsilon}_y = -v\dot{\varepsilon}_x + v\frac{3G}{3G+H}(\dot{\varepsilon}_x N_x - \dot{\varepsilon}_y N_x + 2\dot{\varepsilon}_{xy} N_{xy})N_x - \frac{1}{2}\frac{3G}{3G+H}(\dot{\varepsilon}_x N_x - \dot{\varepsilon}_y N_x + 2\dot{\varepsilon}_{xy} N_{xy})N_x. \quad (4.155)$$

Isolando os termos em $\dot{\varepsilon}_y$:

$$\begin{aligned} \left(1 + v\frac{3G}{3G+H}N_x^2 - \frac{1}{2}\frac{3G}{3G+H}N_x^2\right)\dot{\varepsilon}_y &= \left(-v + v\frac{3G}{3G+H}N_x^2 - \frac{1}{2}\frac{3G}{3G+H}N_x^2\right)\dot{\varepsilon}_x + \\ &\left(2v\frac{3G}{3G+H}N_x N_{xy} - \frac{3G}{3G+H}N_x N_{xy}\right)\dot{\varepsilon}_{xy}, \\ \left[1 - \left(\frac{1}{2} - v\right)\frac{3G}{3G+H}N_x^2\right]\dot{\varepsilon}_y &= \left[-v - \left(\frac{1}{2} - v\right)\frac{3G}{3G+H}N_x^2\right]\dot{\varepsilon}_x - 2\left(\frac{1}{2} - v\right)\frac{3G}{3G+H}N_x N_{xy}\dot{\varepsilon}_{xy}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Fazendo $\theta = \left(\frac{1}{2} - v\right)\frac{3G}{3G+H}$, tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_z = -\frac{v+\theta N_x^2}{1-\theta N_x^2}\dot{\varepsilon}_x - 2\frac{\theta N_x N_{xy}}{1-\theta N_x^2}\dot{\varepsilon}_{xy}. \quad (4.157)$$

Na forma discretizada tem-se:

$$\Delta\varepsilon_y = \Delta\varepsilon_z = -\frac{v+\theta N_x^2}{1-\theta N_x^2}\Delta\varepsilon_x - 2\frac{\theta N_x N_{xy}}{1-\theta N_x^2}\Delta\varepsilon_{xy}. \quad (4.158)$$

5. ESTUDO DE CASOS

O objetivo do presente trabalho é o estudo crítico do método de Garud para a descrição do comportamento elasto-plástico em carregamentos multiaxiais não-proporcionais. Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações, primeiramente uniaxiais, visando validar o código e, posteriormente as simulações de carregamentos normais-cisalhantes comparando os resultados obtidos com os resultados encontrados na literatura.

5.1 SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTOS UNIAXIAIS

Nesta seção serão mostrados os resultados de simulações uniaxiais, tração pura e torção pura, realizadas com o objetivo de validar o código implementado. Para isso, os resultados foram comparados à curva de Ramberg-Osgood, como mostrado a seguir.

5.1.1 Ensaio de tração

5.1.1.1 Carregamento monotônico

Considera-se um história de carregamento uniaxial de tração descrita pela história de deformação prescrita:

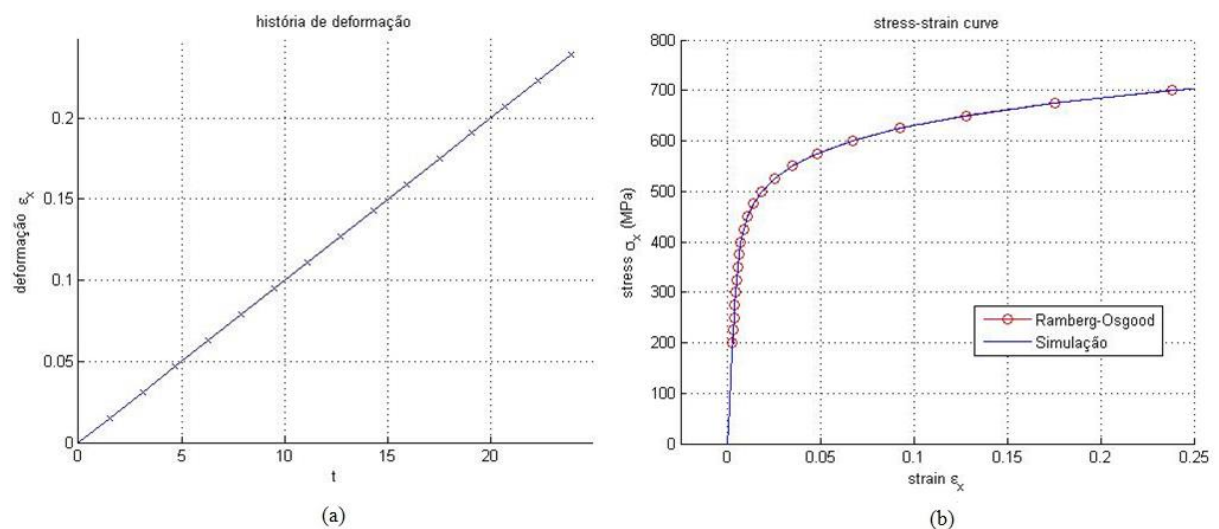


Figura 5.1 – Simulação de ensaio de tração com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig. 5.1(a) ilustra a história de deformação, que se inicia em um estado sem deformações, e atinge uma deformação máxima $\epsilon_x = 0,25$. Esta simulação foi realizada com base nos parâmetros materiais da liga de alumínio 7075-T6, onde seu módulo de elasticidade $E = 71 \text{ GPa}$, seu coeficiente de encruamento $H = 827 \text{ MPa}$ e o seu expoente de encruamento $n = 0,113$ (Conle, 1984). O resultado obtido na simulação é mostrado na Fig. 5.1(b), onde, neste caso, os círculos

vermelhos representam os limites das superfícies de encruamento. Esta simulação foi gerada com um passo $\Delta\varepsilon = 0,001$. A relação de Ramberg-Osgood utilizada para comparação é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

5.1.1.2 Carregamento cíclico

Considera-se uma história de carregamento uniaxial do tipo tração-compressão descrita pela história de deformação prescrita:

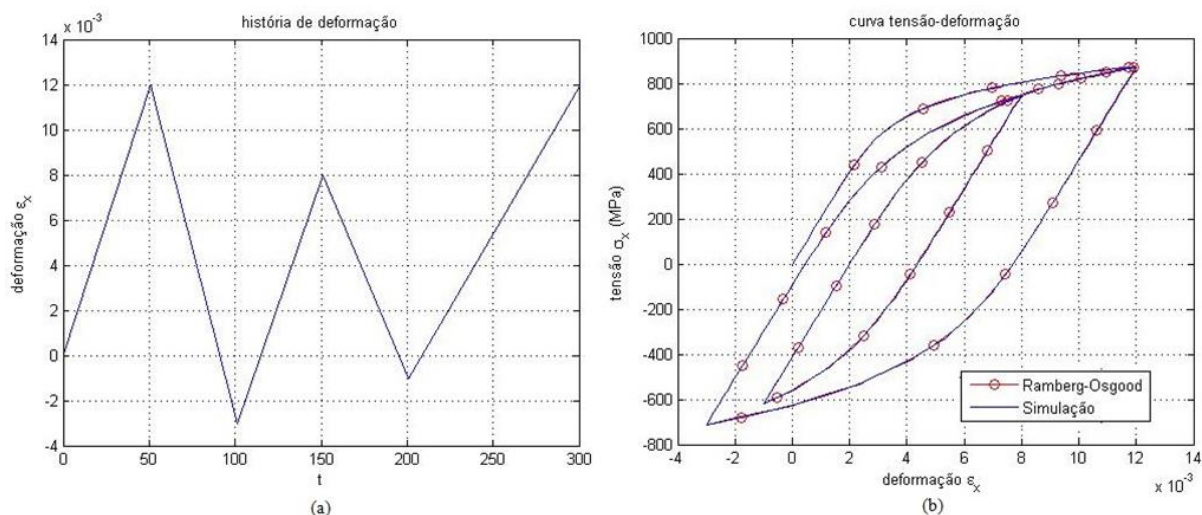


Figura 5.2 – Simulação de ensaio de tração com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig. 5.2(a) ilustra a história de deformação que representa um carregamento cíclico de amplitude variável. Neste caso, a simulação foi feita com os parâmetros da liga de aço AISI 4340, onde seu módulo de elasticidade $E = 207 \text{ GPa}$, seu coeficiente de encruamento cíclico $H' = 1655 \text{ MPa}$ e o seu expoente de encruamento cíclico $n' = 0,131$ (Dowling, 1973). Esta simulação foi gerada com um passo máximo $\Delta\varepsilon = 0,0004$. O resultado da simulação é mostrado na Fig. 5.2(b). Para desenhar os laços de histerese foi usada a regra de Masing (1926), como nos capítulos anteriores, que é dada por:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \left(\frac{\Delta\sigma}{2H'}\right)^{\frac{1}{n'}}.$$

5.1.2 Ensaio de Torção

5.1.2.1 Carregamento monotônico

Considera-se uma história de carregamento de cisalhamento descrita pela história de deformação prescrita:

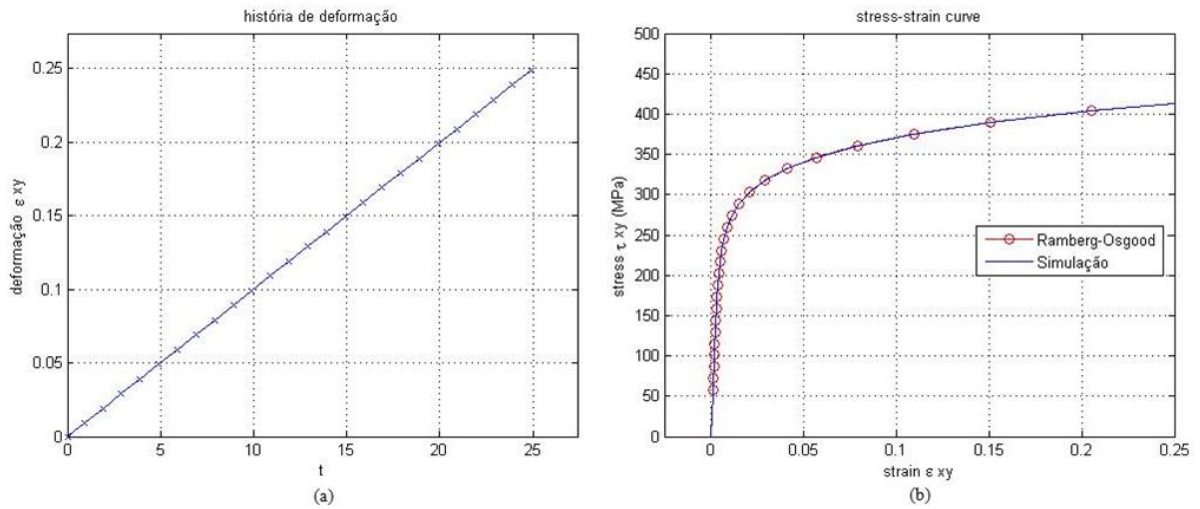


Figura 5.3 – Simulação de ensaio de torção com carregamento monotônico. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig. 5.3(a) ilustra a história de deformação, que se inicia em um estado sem deformações, e atinge uma deformação máxima $\epsilon_{xy} = 0,25$. Esta simulação, assim como a de tração pura com carregamento monotônico, foi realizada com base nos parâmetros materiais da liga de alumínio 7075-T6, e também com um passo de deformação $\Delta\epsilon = 0,001$. Os resultados obtidos na simulação são mostrados na Fig. 5.3(b), onde os círculos vermelhos, neste caso, representam os limites das superfícies de encruamento. A relação utilizada para gerar a curva de Ramber-Osgood, no caso de cisalhamento puro, é dada por:

$$\epsilon = (1 + \nu) \frac{\sigma}{E} + 1,5 \left(3 \frac{1-n}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{H} \right)^{\frac{1}{n}}$$

5.1.2.2 Carregamento cíclico

Considera-se uma história de carregamento de cisalhamento descrita pela história de deformação prescrita:

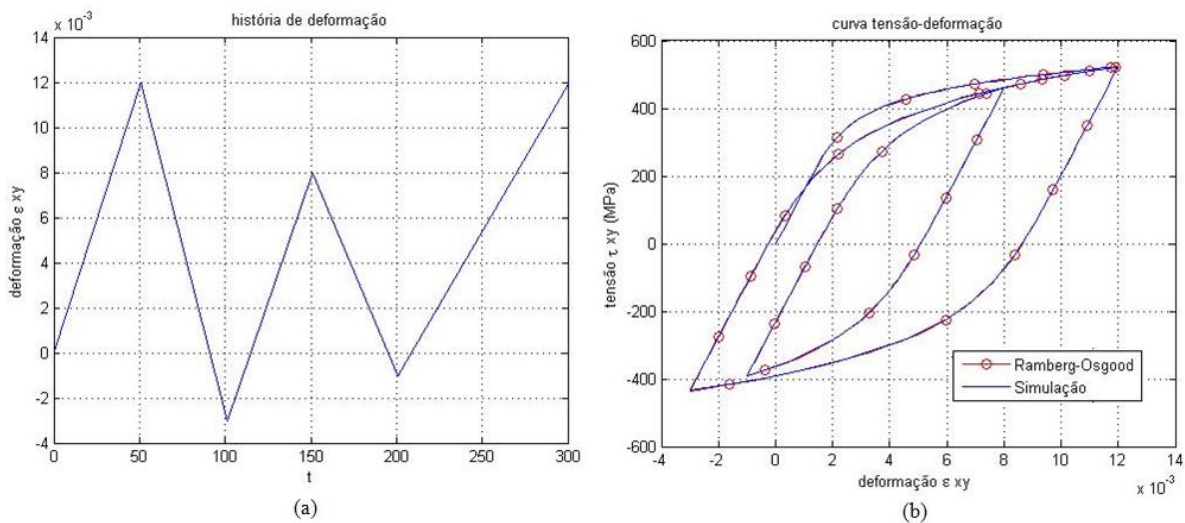


Figura 5.4 - Simulação de ensaio de torção com carregamento cíclico de amplitude variável. (a) história de deformação e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig. 5.4(a) ilustra a história de deformação que representa um carregamento cíclico de amplitude variável. Esta simulação, assim como a simulação de tração-compressão de amplitude variável, foi feita a partir dos parâmetros materiais da liga de aço AISI 4340. Esta simulação foi gerada com um passo máximo $\Delta\varepsilon = 0,0004$. O resultado da simulação é mostrado na Fig. 5.4(b). Para desenhar os laços de histerese foi usada a regra de Masing (1926), modificada para o caso de cisalhamento puro, que é dada por:

$$\Delta\varepsilon = (1 + \nu) \frac{\Delta\sigma}{E} + 3 \left(3^{\frac{1-n'}{2n'}} \right) \left(\frac{\Delta\sigma}{2H'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

5.2 SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTOS MULTIAXIAIS

Após a validação da ferramenta, foram realizadas diversas simulações para poder comparar a resposta do modelo a resultados obtidos experimentalmente encontrados na literatura. O objetivo da comparação mostrada nesta seção é determinar com que nível de exatidão este modelo pode descrever o comportamento elasto-plástico sob carregamentos proporcionais e não-proporcionais. Foram feitas simulações para a liga de aço SAE 1045HR e para a liga de alumínio 7075-T651.

5.2.1 SAE 1045

Para as simulações mostradas nesta subseção, foram utilizados os parâmetros materiais da liga de aço SAE 1045HR, como o módulo de elasticidade $E = 202 \text{ GPa}$, coeficiente de encruamento cíclico $H' = 1258 \text{ MPa}$ e expoente de encruamento cíclico $n' = 0,113$ (Leese, 1985). Foram feitas simulações com trajetórias elípticas e retangulares, como mostrado a seguir.

5.2.1.1 Carregamento proporcional

Considera-se uma história de carregamento normal-cisalhante descrita pela história de deformação prescrita.

A Fig. 5.5 (a) ilustra a história de deformação ε_{xy} x ε_x que representa um carregamento proporcional, com amplitudes $\varepsilon_{x a} = 0,415\%$ e $\varepsilon_{xy a} = 0,111\%$. A simulação foi gerada com o passo $\Delta\varepsilon = 0,005\%$, e com um número de superfícies de encruamento $N_s = 20$. Os resultados obtidos na simulação são mostrados nas Fig. 5.5 (b), (c) e (d). As tensões máximas e mínimas obtidas foram $\sigma_{x max} = 346 \text{ MPa}$, $\sigma_{x min} = -346 \text{ MPa}$, $\tau_{xy max} = 63 \text{ MPa}$ e $\tau_{xy min} = -63 \text{ MPa}$, enquanto as amplitudes de tensões obtidas experimentalmente foram $\sigma_a = 340 \text{ MPa}$ e $\tau_a = 60 \text{ MPa}$ (Fatemi, 1989).

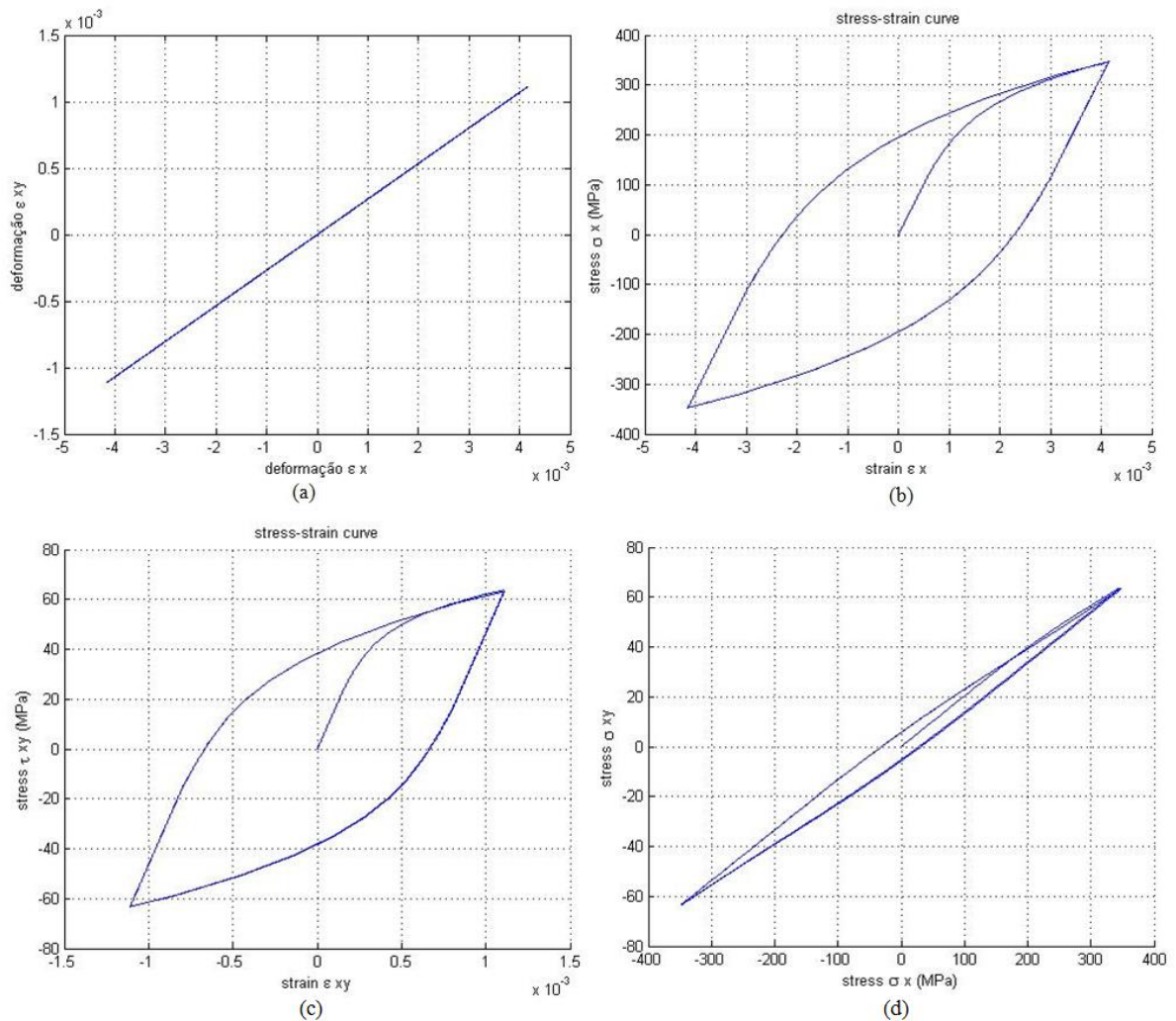


Figura 5.5 – Simulação de ensaio com carregamento proporcional do tipo normal cisalhante. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

5.2.1.2 Carregamento não-proporcional com trajetória elíptica

Considera-se uma história de carregamento normal-cisalhante descrita pela história de deformação prescrita.

A Fig. 5.6 (a) ilustra a história de deformação ϵ_{xy} \times ϵ_x que representa um carregamento com trajetória elíptica, inicialmente cisalhante, com amplitudes $\epsilon_{x a} = 0,410\%$ e $\epsilon_{xy a} = 0,1065\%$. A simulação foi gerada com o passo $\Delta\epsilon < 0,01\%$, e com um número de superfícies de encruamento $N_s = 20$. Os resultados obtidos na simulação são mostrados nas Fig. 5.6 (b), (c) e (d). As tensões máximas e mínimas obtidas foram $\sigma_{x max} = 371 MPa$, $\sigma_{x min} = -404 MPa$, $\tau_{xy max} = 199 MPa$ e $\tau_{xy min} = -190 MPa$, enquanto as amplitudes de tensões obtidas experimentalmente foram $\sigma_a = 364 MPa$ e $\tau_a = 149 MPa$ (Fatemi, 1989).

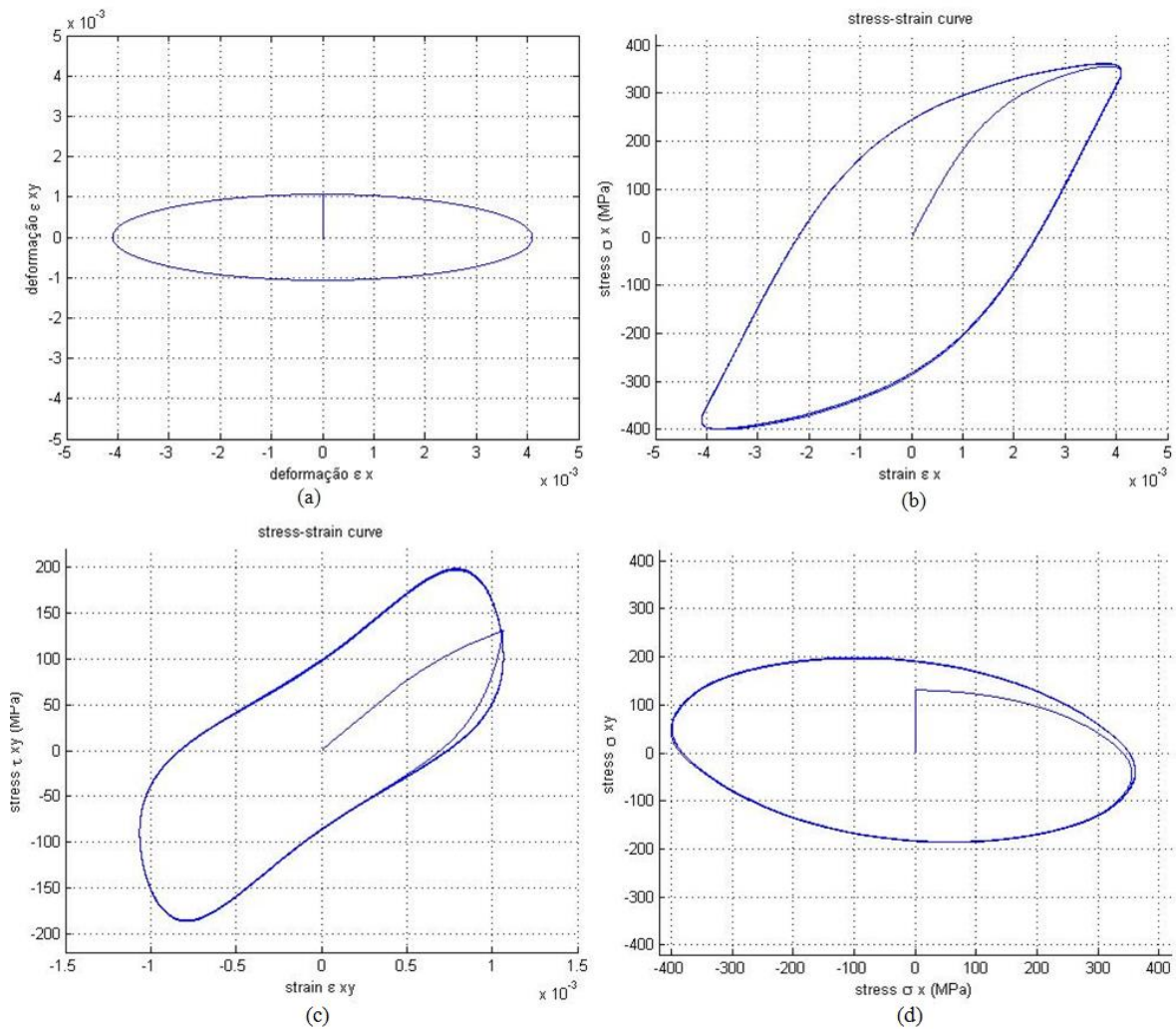


Figura 5.6 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória elíptica. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

5.2.1.3 Carregamento não-proporcional com trajetória retangular

Considera-se uma história de carregamento normal-cisalhante descrita pela história de deformação prescrita.

A Fig. 5.7 (a) ilustra a história de deformação ϵ_{xy} x ϵ_x que representa um carregamento com trajetória retangular, inicialmente cisalhante, com amplitudes $\epsilon_{xa} = 0,096\%$ e $\epsilon_{xya} = 0,1065\%$. A simulação foi gerada com o passo $\Delta\epsilon < 0,0005\%$, e com um número de superfícies de encruamento $N_s = 20$. Os resultados obtidos na simulação são mostrados nas Fig. 5.7 (b), (c) e (d). As tensões máximas e mínimas obtidas foram $\sigma_{x\max} = 204 \text{ MPa}$, $\sigma_{x\min} = -226 \text{ MPa}$, $\tau_{xy\max} = 147 \text{ MPa}$ e $\tau_{xy\min} = -142 \text{ MPa}$, enquanto as amplitudes de tensões obtidas experimentalmente foram $\sigma_a = 207 \text{ MPa}$ e $\tau_a = 148 \text{ MPa}$ (Fatemi, 1989).

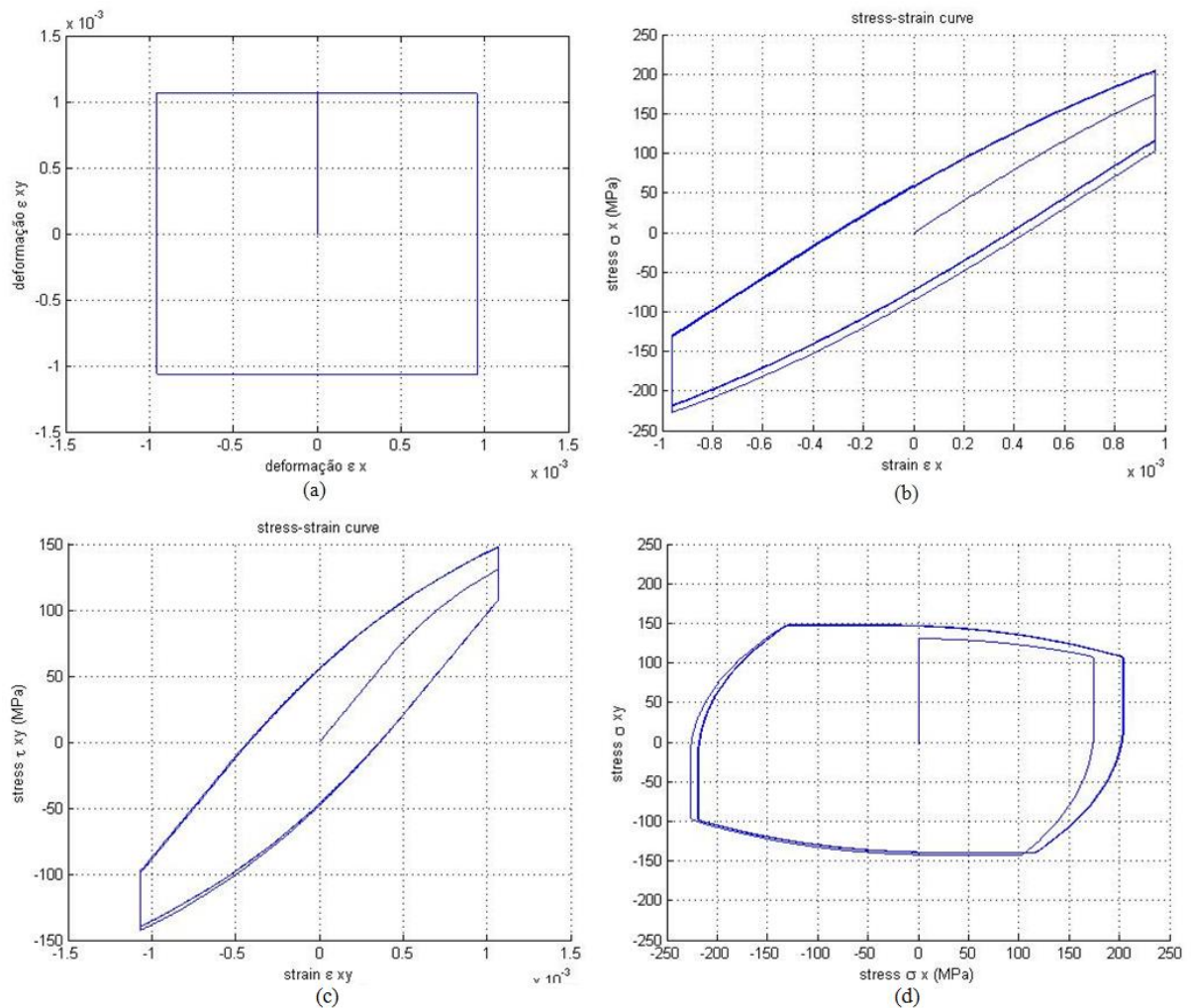


Figura 5.7 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória retangular. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

5.2.2 7075-T651

Para as simulações mostradas nesta subsecção, foram utilizados os parâmetros materiais da liga de alumínio 7075-T6, como o módulo de elasticidade $E = 71 \text{ GPa}$, coeficiente de encruamento cíclico $H' = 977 \text{ MPa}$ e expoente de encruamento cíclico $n' = 0,106$ (Endo, 1969). Foram feitas simulações com trajetórias elípticas e trajetórias em oito, como mostrado a seguir.

5.2.2.1 Carregamento proporcional

Considera-se uma história de carregamento normal-cisalhante descrita pela história de deformação prescrita:

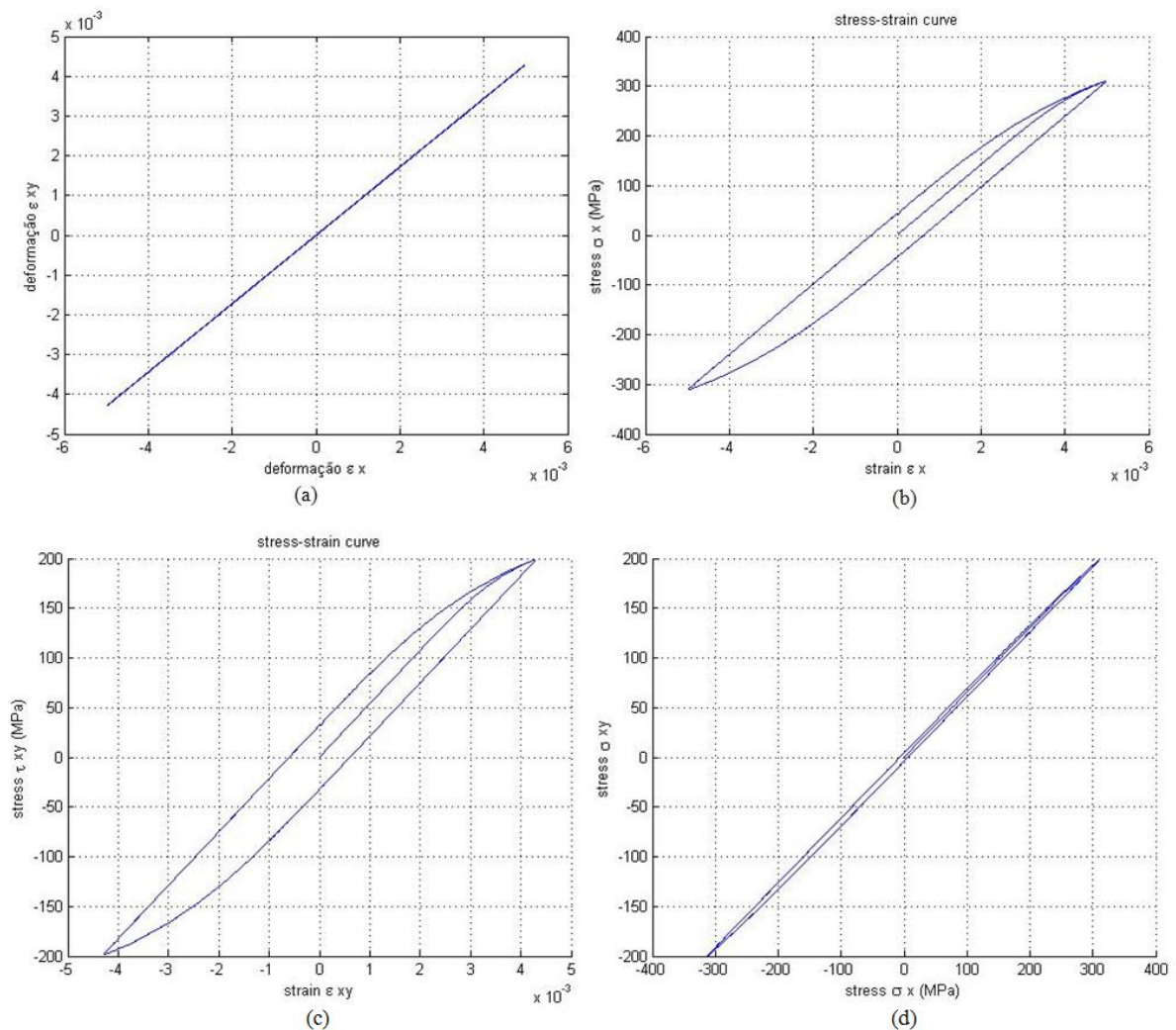


Figura 5.8 - Simulação de ensaio com carregamento proporcional do tipo normal cisalhante. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

A Fig. 5.8 (a) ilustra a história de deformação ϵ_{xy} x ϵ_x que representa um carregamento proporcional, com amplitudes $\epsilon_{xa} = 0,5\%$ e $\epsilon_{xya} = 0,43\%$. A simulação foi gerada com o passo $\Delta\epsilon = 0,005\%$, e com um número de superfícies de encruamento $N_s = 20$. Os resultados obtidos na simulação são mostrados nas Fig. 5.8 (b), (c) e (d). As tensões máximas e mínimas obtidas foram $\sigma_{x\ max} = 311\ MPa$, $\sigma_{x\ min} = -311\ MPa$, $\tau_{xy\ max} = 199\ MPa$ e $\tau_{xy\ min} = -199\ MPa$, enquanto as amplitudes de tensões obtidas experimentalmente foram $\sigma_a = 351,3\ MPa$ e $\tau_a = 222\ MPa$ (Zhao, 2008).

5.2.2.2 Carregamento não-proporcional com trajetória elíptica

Considera-se uma história de carregamento normal-cisalhante descrita pela história de deformação prescrita:

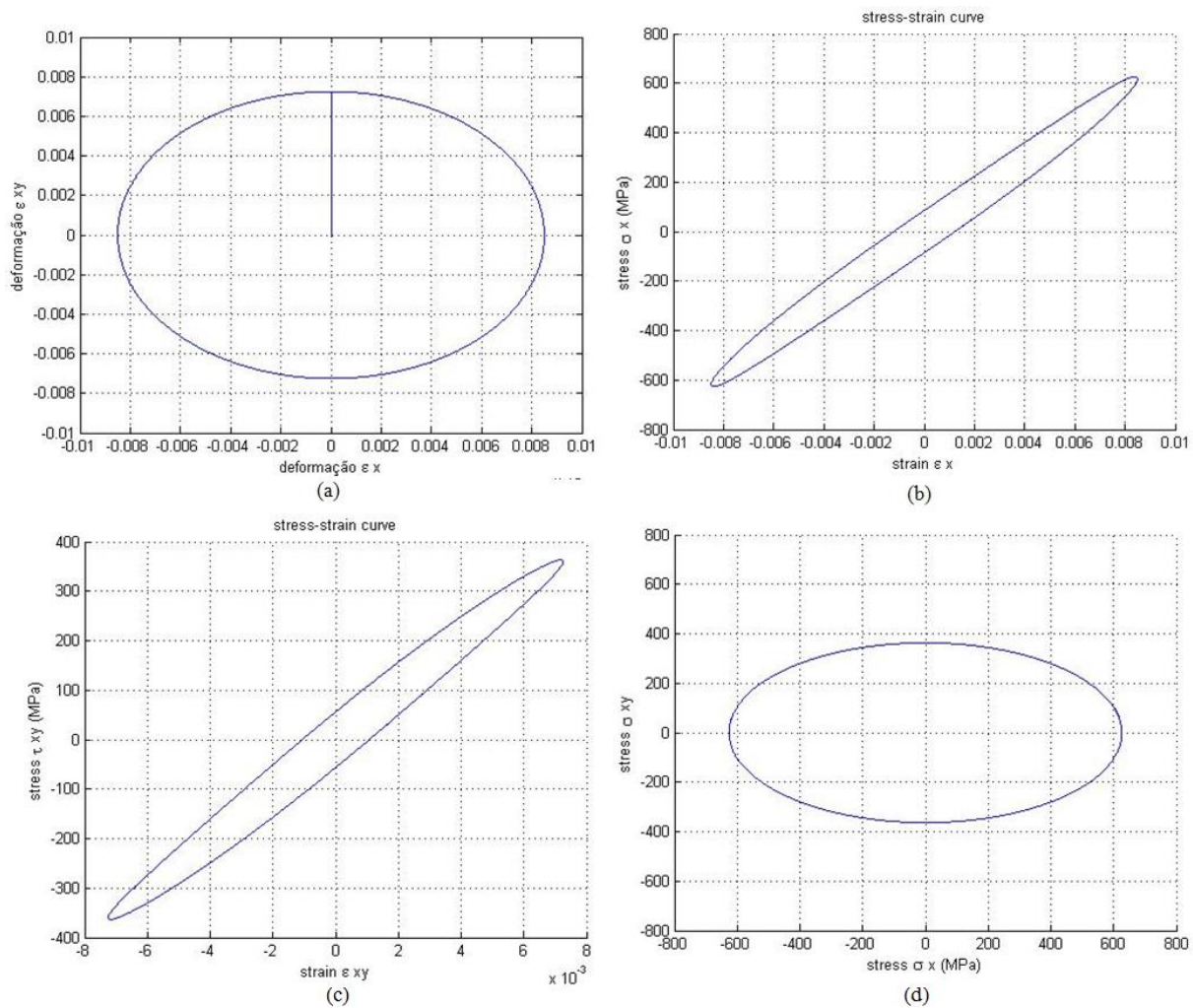


Figura 5.9 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória elíptica. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

A Fig. 5.9 (a) ilustra a história de deformação ϵ_{xy} \times ϵ_x que representa um carregamento com trajetória elíptica, inicialmente cisalhante, com amplitudes $\epsilon_{x a} = 0,85\%$ e $\epsilon_{xy a} = 0,725\%$. A simulação foi gerada com o passo $\Delta\epsilon < 0,01\%$, e com um número de superfícies de encruamento $N_s = 22$. Os resultados obtidos na simulação são mostrados nas Fig. 5.9 (b), (c) e (d). Neste caso, decidiu-se plotar apenas os ciclos estabilizados, o que aconteceu apenas no segundo ciclo. As tensões máximas e mínimas obtidas foram $\sigma_{x max} = 626 MPa$, $\sigma_{x min} = -626 MPa$, $\tau_{xy max} = 363 MPa$ e $\tau_{xy min} = -363 MPa$, enquanto as amplitudes de tensões obtidas experimentalmente foram $\sigma_a = 543,7 MPa$ e $\tau_a = 329,4 MPa$ (Zhao, 2008).

5.2.2.3 Carregamento não-proporcional com trajetória em oito

Considera-se uma história de carregamento normal-cisalhante descrita pela história de deformação prescrita:

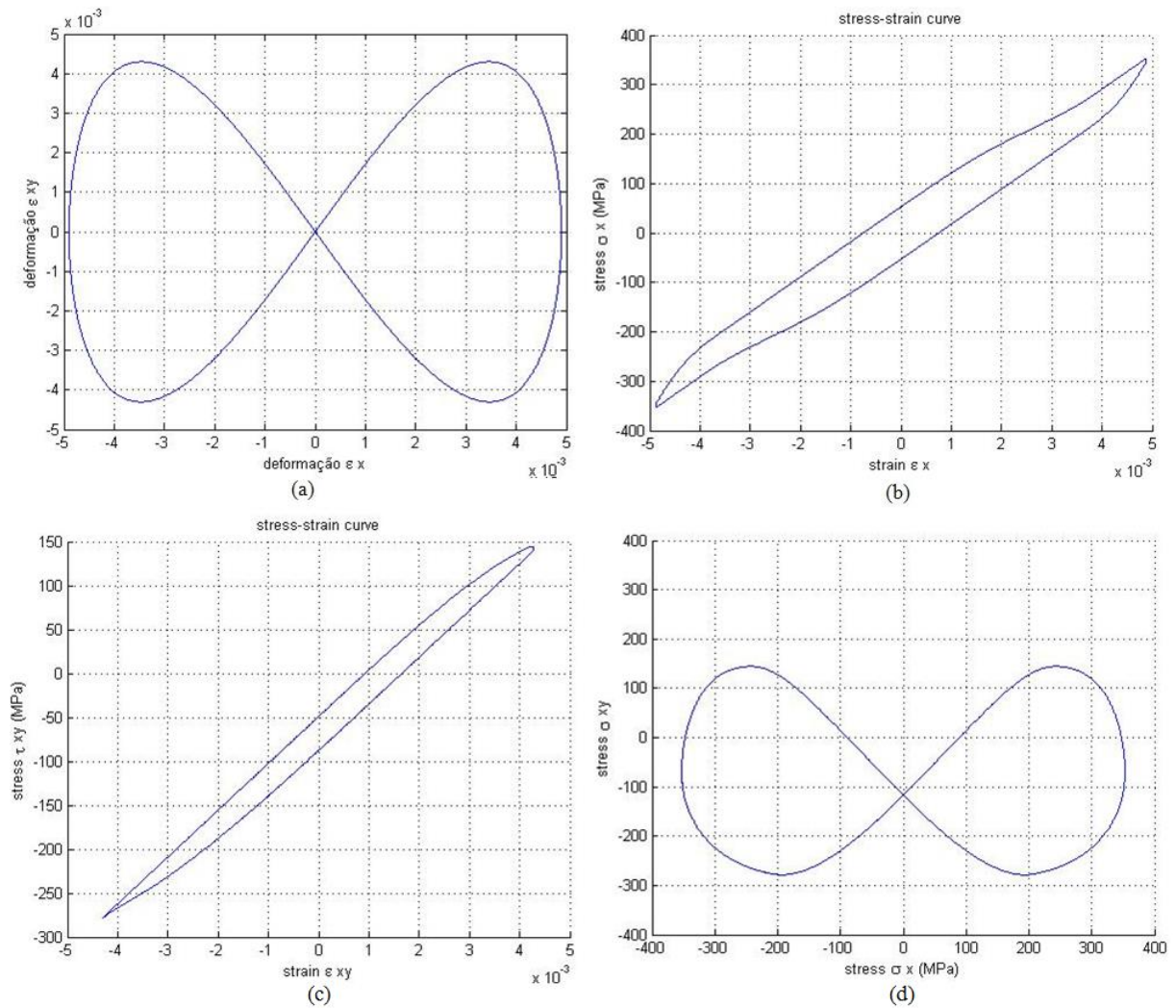


Figura 5.10 - Simulação de ensaio com carregamento não-proporcional, do tipo normal cisalhante, com trajetória em oito. (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Resposta da simulação: (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

A Fig. 5.10 (a) ilustra a história de deformação ϵ_{xy} x ϵ_x que representa um carregamento com trajetória em oito, inicialmente cisalhante, com amplitudes $\epsilon_{xa} = 0,49\%$ e $\epsilon_{xya} = 0,43\%$. A simulação foi gerada com o passo $\Delta\epsilon < 0,01\%$, e com um número de superfícies de encruamento $N_s = 18$. Os resultados obtidos na simulação são mostrados nas Fig. 5.10 (b), (c) e (d). Neste caso, também foi decidido plotar apenas os ciclos estabilizados, o que aconteceu apenas após alguns ciclos. As tensões máximas e mínimas obtidas foram $\sigma_{x\max} = 352\text{ MPa}$, $\sigma_{x\min} = -352\text{ MPa}$, $\tau_{xy\max} = 144\text{ MPa}$ e $\tau_{xy\min} = -278\text{ MPa}$, enquanto as amplitudes de tensões obtidas experimentalmente foram $\sigma_a = 352\text{ MPa}$ e $\tau_a = 232\text{ MPa}$ (Zhao, 2008).

5.2.3 Efeito do número de superfícies de encruamento

Outra simulação foi realizada, considerando-se uma trajetória ϵ_{xy} x ϵ_x elíptica e os parâmetros materiais da liga de aço SAE 1045. Esta simulação foi realizada com o objetivo de estudar o efeito do número de superfícies de encruamento na resposta gerada pela ferramenta, o que já foi observado por

Jiang (1993). Para esta simulação foram consideradas as amplitudes de deformação $\varepsilon_{x a} = 0,264\%$ e $\varepsilon_{xy a} = 0,2555\%$. A Fig. 5.11 ilustra o resultado de três simulações em contraste com uma elipse gerada a partir da aproximação das amplitudes de tensões obtidas experimentalmente (Jiang, 1993). Após diversas simulações com diferentes números de superfície, observou-se que a ferramenta não alcançou uma convergência. Isto é, quanto maior o número de superfícies, maiores os níveis de tensões resultantes.

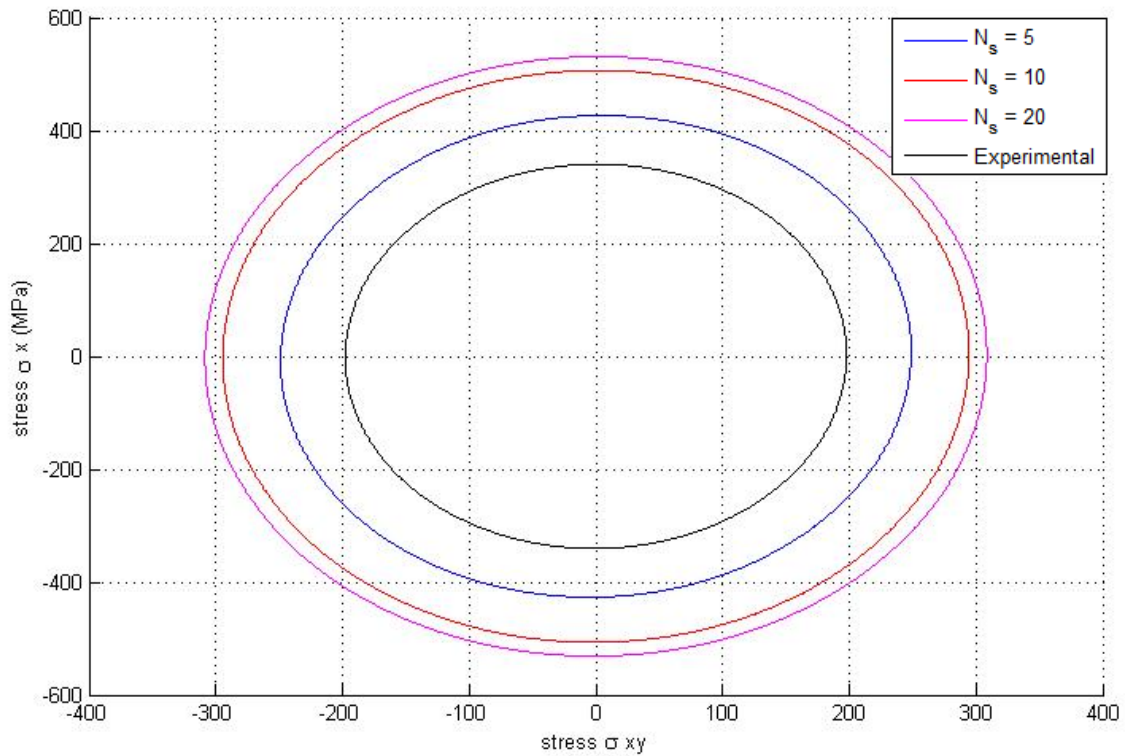


Figura 5.11 – Comparação entre simulações realizadas com diferentes quantidades de superfícies de encruamento e dados experimentais.

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou um estudo crítico do modelo de Garud para a descrição do comportamento elasto-plástico cíclico sob carregamentos proporcionais e não-proporcionais. O estudo compreendeu: (i) a implementação computacional e simulação do modelo de plasticidade unidimensional; (ii) a implementação computacional e simulação do modelo de Prager com múltiplas superfícies no contexto de carregamentos normais-cisalhantes; (iii) a implementação computacional do modelo de Garud; (iv) validação desta ferramenta a partir de simulações de carregamentos uniaxiais; (v) simulação de carregamentos multiaxiais proporcionais e não-proporcionais do tipo tração-cisalhamento.

Os resultados obtidos permitem concluir que:

- 1- o modelo de Garud fornece excelente descrição, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, das histórias uniaxiais de carregamento;
- 2- quando são consideradas condições de carregamento multiaxiais normais-cisalhantes com carregamentos proporcionais, o modelo de Garud fornece resultados com um bom nível de aproximação;
- 3- em condições de carregamentos não-proporcionais, o modelo de Garud produziu resultados qualitativamente satisfatórios. Entretanto, do ponto de vista quantitativo, apenas em alguns poucos casos o modelo foi capaz de produzir trajetórias de tensão com amplitudes próximas daquelas observadas experimentalmente. Em geral, o modelo de Garud produziu encruamento não-proporcional em níveis muito superiores daqueles observados experimentalmente;
- 4- observou-se que o aumento do número de superfícies de encruamento pode produzir um aumento espúrio nos níveis de tensão, em carregamentos não-proporcionais. Esse fato se torna evidente em simulações com grandes amplitudes de deformações, onde existem grandes níveis de deformações plásticas.

O estudo do modelo de Garud forneceu subsídios importantes para a compreensão de diversos aspectos envolvidos na modelagem da plasticidade cíclica. Entretanto, do ponto de vista quantitativo, tal modelo mostrou deficiências substanciais na reprodução de resultados experimentais relatados na literatura quando histórias de carregamento não-proporcionais são consideradas. O modelo de Garud certamente representa uma evolução em relação ao modelo de Mróz, uma vez que inconsistências conceituais (intersecção de superfícies de encruamento) são evitadas pelo modelo em estudo. No entanto, a alteração proposta por Garud teve como motivação a correção das inconsistências mecânicas em detrimento de uma maior aderência com as observações experimentais.

6.2 RECOMENDAÇÕES

Após um estudo crítico do modelo de Garud, propõe-se que para a obtenção de melhores resultados na descrição do comportamento elasto-plástico sob carregamentos não-proporcionais, sejam estudados modelos com leis de encruamento que permitam uma melhor descrição deste tipo de carregamento. Com base nos estudos de Jiang (1993), alguns dos modelos que proporcionam uma melhor descrição de carregamentos não-proporcionais incluem Ohno-Wang (1991), Chaboche (1979) e Jiang (1993). Tais estudos devem partir de um conhecimento aprofundado do modelo de Armstrong-Frederick (1966), do qual esses modelos são derivados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Armstrong, P.J. & Frederick, C.O., 1966, "A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect". Report RD/B/N731,CEGB, Central Electricity Generating Board, Berkeley, UK.
- Bannantine, J.A., 1989, A variable amplitude multiaxial fatigue life prediction method, Ph.D. Thesis, Report No. 151, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Basquin, O.H., 1910, "The exponential law of endurance tests". In: Proc. annual meeting, American society for testing materials, vol. 10; p. 625–30.
- Bauschinger, J., 1886, "On the Change of the Position of the Elastic Limit of Iron and Steel Under Cyclic Variations of Stress", Mitt. Mech.-Tech. Lab., Munich, Vol.13, No. 1.
- Broek, D., 1985, Elementary Engineering Fracture Mechanics, 4. Ed. Dordrecht: Editora Nijhoff. 516p.
- Chaboche, J.L., Dang-Van, K., Cordier, G., 1979, "Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel". In: Structural Mechanics in Reactor Technology, Trans. 5th SMIRT, Berlin, L11/3.
- Coffin Jr., L. F., 1962, "Low cycle fatigue -A review". Appl. Math. Res., 1, 129.
- Conle, F. A., Landgraf, R. W., & Richards, F. D., 1984. Materials Data Book: Monotonic and Cyclic Properties of Engineering Materials, Ford Motor Co., Scientific Research Staff, Dearborn, MI.
- Endo, T. & Morrow, J., 1969. "Cyclic Stress-Strain and Fatigue Behavior of Representative Aircraft Metals," Journal of Materials, ASTM, vol. 4, no. 1, Mar. 1969, pp.159-175.
- Esslinger, V., Kieselbach, R., Koller, R., Weisse, B., 2004, The railway accident of Eschede – technical background, Engineering failure analysis 11, 4, 515-535.
- Fatemi, A., Stephens, R. I., 1989, Biaxial fatigue of 1045 steel under in-phase and 90 deg out-of-phase loading conditions, Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments, SAE AE-14 121-137.
- Garud, Y.S., 1981, "A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings", ASME Journal of Engineering Materials and Technology, 103:118-125.
- Jiang, Y., 1993, "Cyclic plasticity with an emphasis on ratcheting", Thesis, University of Illinois
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.-L., 1990, Mechanics of solid materials, Cambridge University Press.
- Manson, S. S. & Hirschberg, M. H., 1964, "Fatigue behavior in strain cycling in the low- and intermediate-cycle range." In: Fatigue, an Interdisciplinary Approach, Syracuse University, Syracuse, pp. 133–178.
- Masing, G., 1926, "Eigenspannungen un verfestigung beim messing", in: Second International Congress for Applied Mechanics, Zurich, pp. 332–335 (in German).
- Mendelson, A., 1968, Plasticity: Theory and application, McMillan, New York.
- Mróz, Z., 1967, "On the description of anisotropic workhardening", J. Mech. Phys. Solids, 15:163-175.
- Ohno, N., & Wang, J. D., 1991, "Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal coditions", International Journal of Plasticity, Vol. 7, pp. 879-891.
- Ortiz, M. & Simo, J. C., 1986, Analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, Int. J. Numer. Meth. Engrng. 23:353-366.
- Prager, W., 1955, "The theory of plasticity: a survey of recent achievements", Proceedings, Institution of Mechanical Engineers, 169:41-57.
- Prager, W., 1956, "A new method of analyzing stress and strains in work-hardening plastic solids", J. Appl. Mech. 23, 493-96.
- Ramberg, W., & Osgood, W. R., 1943, "Description of stress-strain curves by three Parameters". Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC.

- Simo, J. C. & Hughes, T. J. R., 1987, General return mapping algorithms for rate-independent plasticity. In: Desai, C. S. et al. (Ed), Constitutive laws for engineering materials: theory and applications, Elsevier, 221-231.
- Simo, J.C. & Hughes, T.J.R., 1998, "Computational Inelasticity", Springer.
- Simo, J. C. & Taylor, R. L., 1985, Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 48:101-118.
- Von Mises, R., 1913, "Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand". *Göttin. Nachr. Math. Phys.*, vol. 1, pp. 582–592.
- Withey, P. A., 1997, Fatigue failure of the Havilland comet I, *Engineering failure analysis* 4, 2 147-154.
- "Wöhler's Experiments on the Strength of Metals", *Engineering*, August 23, 1967, p. 160.
- Zhao, T., Jiang, Y., 2008, Fatigue of 7075-T651 aluminum alloy, *Int. J. Fatigue* 30 834-849.
- Ziegler, H., 1959, "A modification of Prager's hardening rule", *Quarterly of Applied Mechanics*, 17:55-65.

ANEXOS

	Pág.
Anexo I	74
Algoritmo de descrição do comportamento elasto-plástico, com encruamento cinemático linear por partes, no contexto unidimensional, em linguagem Matlab.	
Anexo II	77
Algoritmo de descrição do comportamento elasto-plástico, com superfícies de escoamento de Mises e encruamento cinemático de Prager, linear por partes, no contexto de carregamentos normais-cisalhantes, em linguagem Matlab.	
Anexo III	81
Algoritmo de descrição do comportamento elasto-plástico, com superfícies de escoamento de Mises e encruamento cinemático de Garud, no contexto multiaxial, em linguagem Matlab.	

ANEXO I: Algoritmo de descrição do comportamento elasto-plástico, com encruamento cinemático linear por partes, no contexto unidimensional, em linguagem Matlab.

1)

```
Function [eps_p,q,sigma,L,eps] = passo(sigma,deps,eps,eps_p,q,...
L,E,sigma_y,H,m,n)

% Versão de 02 de janeiro de 2013
%
% Argumentos:
% sigma      Vetor das tensões sigma, do instante 1 ao instante n.
% deps       Incremento de deformação.
% eps        Vetor das deformações totais prescritas.
% eps_p      Vetor das deformações plásticas, do instante 1 ao instante n.
% q          Matriz com a coordenada de cada centro de superfície de
%            escoamento, do instante 1 ao instante n.
% L          Identificador de estágio de encruamento.
% E          Módulo de elasticidade.
% sigma_y    Vetor com a tensão de escoamento de cada superfície.
% H          vetor com o módulo de encruamento cinemático de cada
%            superfície de escoamento.
% m          Magnitude do vetor H.
% n          Identificador do instante de tempo
%
% Resultados:
% eps_p      Vetor atualizado das deformações plásticas, do instante 1 ao
%            instante n+1.
% q          Matriz atualizada das coordenada de cada centro de superfície
%            de escoamento, do instante 1 ao instante n+1.
% sigma      Vetor atualizado das tensões sigma, do instante 1 ao instante
%            n+1.
% L          Identificador de estágio de encruamento.
% eps        Vetor das deformações totais prescritas. (pode ter sido
%            modificado pela correção de passo)

% Passo tentativo
sigma_trial = E*(eps(n+1) - eps_p(n));
f1_trial = abs(sigma_trial - q(n,1)) - sigma_y(1);
fL_trial = abs(sigma_trial - q(n,L)) - sigma_y(L);

if f1_trial <= 0.0

    % Passo elástico
    eps_p(n+1) = eps_p(n);
    q(n+1,:) = q(n,:);
    sigma(n+1) = sigma_trial;
    L = 1;
else

    % Passo plástico no passo L
    delta_gamma = fL_trial/(E+H(L));
    N = sign(sigma_trial - q(n,L));

    eps_p(n+1) = eps_p(n) + delta_gamma*N;
    q(n+1,1:L) = q(n,1:L) + delta_gamma*H(L)*N;
    q(n+1,L+1:m) = q(n,L+1:m);

    sigma(n+1) = E*(eps(n+1) - eps_p(n+1));
```

```

    if abs(sigma(n+1) - q(n+1,L+1)) > sigma_y(L+1)

        % correção do passo de deformação
        alfa =
step_fraction(eps(n),deps,eps_p(n),q(n,:),L,E,sigma_y,H);
        eps(n+1) = eps(n) + alfa*deps;

        % calculo do estado tentativo para passo corrigido
        sigma_trial = E*(eps(n+1) - eps_p(n));
        fL_trial = abs(sigma_trial - q(n,L)) - sigma_y(L);

        % passo plástico para nova deformação total
        delta_gamma = fL_trial/(E + H(L));
        N = sign(sigma_trial - q(n,L));

        eps_p(n+1) = eps_p(n) + delta_gamma*N;
        q(n+1,1:L) = q(n,1:L) + delta_gamma*H(L)*N;
        q(n+1,L+1:m) = q(n,L+1:m);

        sigma(n+1) = E*(eps(n+1) - eps_p(n+1));

        L = L + 1;
    end
end
end

```

2)

```

function c = step_fraction(en,de,epn,qn,l,E,sy,H)
%
% calculo do fator alfa da correção do passo
%
% Argumentos:
% en      Deformação total no instante n.
% de      Incremento de deformação.
% epn     Deformação plástica no instante n.
% qn      Centro da superfície de escoamento no instante n.
% l       Identificador de estágio de encruamento.
% E       Módulo de elasticidade.
% sy      Tensão de escoamento.
% H       Módulo de encruamento cinemático.
%
% Resposta:
% c       Valor de alfa, fator de correção de passo

% inicializacao de estimativas para a raiz
a = 0;
b = 1;
f_a = f_(a,en,de,epn,qn,l,E,sy,H);
f_b = f_(b,en,de,epn,qn,l,E,sy,H);
f_c = f_b;

while abs(f_c) > 1e-6
    % passo regula-falsi
    c = b - (f_b/(f_b - f_a))*(b - a);
    f_c = f_(c,en,de,epn,qn,l,E,sy,H);

    % atualizacao dos pontos a, b e suas raizes
    a = b;
    b = c;

```

```

    f_a = f_b;
    f_b = f_c;
end
end

```

3)

```

function res = f_(alfa,en,de,epn,qn,l,E,sy,H)

% Argumentos:
% alfa      Fator de correção de passo
% en        Deformação total no instante n.
% de        Incremento de deformação.
% epn       Deformação plástica no instante n.
% qn        Centro da superfície de escoamento no instante n.
% l         Identificador de estágio de encruamento.
% E         Módulo de elasticidade.
% sy        Tensão de escoamento.
% H         Módulo de encruamento cinemático.
%
% Resposta:
% res       Valor da função f(l+1) para o novo valor de alfa

en1    = en + alfa*de;
s_tr   = E*(en1 - epn);
dgamma = (abs(E*(en1 - epn) - qn(l)) - sy(l))/(E+H(l));
val    = abs(E*(en1 - epn - dgamma*sign(s_tr - qn(l))) - qn(l+1));
res    = val - sy(l+1);

end

```

ANEXO II: Algoritmo de descrição do comportamento elasto-plástico, com superfícies de escoamento de Mises e encruamento cinemático de Prager, linear por partes, no contexto de carregamentos normais-cisalhantes, em linguagem Matlab.

1)

```
function [sigma,eps_p,beta,L,eps] = passo_N_C_linear_por_partes(eps,...
sigma,eps_p,beta,n,sigma_y,H,L,E,G)

% Versão de 28 de janeiro de 2013
%
% Argumentos:
% eps      Matriz das deformações totais prescritas.
% sigma    Matriz das tensões sigma, do instante 1 ao instante n.
% eps_p    Matriz das deformações plásticas, do instante 1 ao instante n.
% beta     Matriz com a coordenada de cada centro de superfície de
%          escoamento, do instante 1 ao instante n.
% n        Identificador do instante de tempo
% sigma_y  Vetor com a tensão de escoamento de cada superfície.
% H        vetor com o módulo de encruamento cinemático de cada
%          superfície de escoamento.
% L        Identificador de estágio de encruamento.
% E        Módulo de elasticidade.
% G        Módulo de elasticidade ao cisalhamento.
%
% Resultados:
% sigma    Matriz atualizada das tensões sigma, do instante 1 ao instante
%          n+1.
% eps_p    Matriz atualizado das deformações plásticas, do instante 1 ao
%          instante n+1.
% beta     Matriz atualizada das coordenada de cada centro de superfície
%          de escoamento, do instante 1 ao instante n+1.
% L        Identificador de estágio de encruamento.
% eps      Vetor das deformações totais prescritas. (pode ter sido
%          modificado pela correção de passo)

C = [E 0; 0 2*G];          % Matriz de rigidez elastica para salhamento
P = [2/3 0; 0 2];        % Operador projeção
P1P = [1 0; 0 2];
I = eye(2);
m = length(sigma_y);

deps = eps(:,n+1) - eps(:,n);

% Passo tentativo
sigma_trial = C*(eps(:,n+1)-eps_p(:,n));
eta_trial1 = sigma_trial - beta(:,1,n);
eta_trial = sigma_trial - beta(:,L,n);

f1_trial = sqrt(eta_trial1'*(P*eta_trial1)) - sqrt(2/3)*sigma_y(1);
fL_trial = sqrt(eta_trial'*(P*eta_trial)) - sqrt(2/3)*sigma_y(L);
fprintf(' f1_trial = %f\n', f1_trial);

if f1_trial <= 0.0

    % Passo elástico
    sigma(:,n+1) = sigma_trial;
    beta(:,n+1) = beta(:,n);
    eps_p(:,n+1) = eps_p(:,n);
    L = L+1;
end
```

```

else

    % Passo plástico no passo L

    [delta_gamma,eta] = dg_NR_NC(C,P,I,H(L),eta_trial,sigma_y(L),...
        fL_trial);

    eps_p(:,n+1) = eps_p(:,n) + delta_gamma*P*eta;

    for i = 1:L
        beta(:,i,n+1) = beta(:,i,n) + (2/3)*delta_gamma*H(L)*P1P*eta;
    end
    for i = L+1:m
        beta(:,i,n+1) = beta(:,i,n);
    end

    sigma(:,n+1) = C*(eps(:,n+1) - eps_p(:,n+1));

    eta_verif = sigma(:,n+1) - beta(:,L+1,n+1);

    if sqrt(eta_verif'*(P*eta_verif)) > sqrt(2/3)*sigma_y(L+1);

        % correção do passo de deformação

        alfa_c =
        correcao_do_passo(eps(:,n),deps,eps_p(:,n),beta(:, :, n),...
            L,C,sigma_y,H,P,I);
        fprintf('alfa_c = %f\n', alfa_c);

        eps(:,n+1) = eps(:,n) + alfa_c*deps;

        % calculo do estado tentativo para passo corrigido
        sigma_trial = C*(eps(:,n+1)-eps_p(:,n));
        eta_trial = sigma_trial - beta(:,L,n);
        fL_trial = sqrt(eta_trial'*(P*eta_trial)) -
sqrt(2/3)*sigma_y(L);

        % passo plástico para nova deformação total

        % Determinação de delta_gamma pelo método de Newton-Rhapson

        [delta_gamma,eta] =
        dg_NR_NC(C,P,I,H(L),eta_trial,sigma_y(L),fL_trial);

        eps_p(:,n+1) = eps_p(:,n) + delta_gamma*P*eta;

        for i = 1:L
            beta(:,i,n+1) = beta(:,i,n) +
(2/3)*delta_gamma*H(L)*P1P*eta;
        end
        for i = L+1:m
            beta(:,i,n+1) = beta(:,i,n);
        end

        sigma(:,n+1) = C*(eps(:,n+1) - eps_p(:,n+1));

        L = L + 1;

    end

```

```
end
end
```

2)

```
function [delta_gamma,eta] = dg_NR_NC(C,P,I,H,eta_trial,sigma_y,f)

    alfa = 1E-8;
    delta_gamma = 0;
    k = 0;

    eta = eta_trial;

    while abs(f)>1E-20 && k<15

        % Cálculo aproximado da derivada de f por diferenças finitas

        eta_l = (I + (delta_gamma + alfa)*(C*P + (2/3)*H*I))\eta_trial;
        f_l = sqrt(eta_l'*P*eta_l) - sqrt(2/3)*sigma_y;
        df = (f_l - f)/alfa;

        % Novos valores de delta_gamma, eta e f

        delta_gamma = delta_gamma - f/df;
        eta = (I + delta_gamma*(C*P + (2/3)*H*I))\eta_trial;
        f = sqrt(eta'*P*eta) - sqrt(2/3)*sigma_y;

        k = k+1;

    end

end
```

3)

```
function c = correcao_do_passo(en,de,epn,beta_n,l,C,sy,H,P,I)

% calculo do fator alfa que impoe  $s_{\{n+1\}} = sig_{\{l+1\}}$ 

% inicializacao de estimativas para a raiz
a = 0;
b = 1;
f_a = f_trac_cisalh(a,en,de,epn,beta_n,l,C,sy,H,P,I);
f_b = f_trac_cisalh(b,en,de,epn,beta_n,l,C,sy,H,P,I);
f_c = f_b;

while abs(f_c) > 1e-6
    % passo regula-falsi
    c = b - (f_b/(f_b - f_a))*(b - a);
    f_c = f_trac_cisalh(c,en,de,epn,beta_n,l,C,sy,H,P,I);

    % atualizacao dos pontos a, b e suas raizes
    a = b;
    b = c;
    f_a = f_b;
    f_b = f_c;
end
```

end

4)

```
function res = f_trac_cisalh(alfa_c,en,de,epn,beta_n,l,C,sy,H,P,I)
```

```
en1    = en + alfa_c*de;  
s_tr   = C*(en1 - epn);  
eta_trial = s_tr - beta_n(:,l);
```

```
% Determinação de delta_gamma pelo método de Newton-Rhapson
```

```
f = sqrt(eta_trial'*(P*eta_trial)) - sqrt(2/3)*sy(l);
```

```
[delta_gamma,eta] = dg_NR_NC(C,P,I,H(l),eta_trial,sy(l),f);
```

```
val    = C*(en1 - epn - delta_gamma*P*eta) - beta_n(:,l+1);  
res    = sqrt(val'*(P*val)) - sqrt(2/3)*sy(l+1);
```

end

ANEXO III: Algoritmo de descrição do comportamento elasto-plástico, com superfícies de escoamento de Mises e encruamento cinemático de Garud, no contexto multiaxial, em linguagem Matlab.

```
function [sigma_n1,S_n1,beta_n1,eps_n1,l,eps_pn1] = ...
passo_garud_exp_v1(eps_n1,eps_n,sigma_n,S_n,eps_pn,beta_n,sigma_y,H,...
l,G,k,m,lamb)

% Versão 10/04/2013
%
% Argumentos:
% eps_n1      Matriz de deformações no instante n+1.
% eps_n       Matriz de deformações no instante n.
% sigma_n     Matriz do tensor tensão de Cauchy no instante n.
% S_n        Matriz do tensor tensão desviadora no instante n.
% eps_pn     Matriz das deformações plásticas no instante n.
% beta_n     Matriz com as coordenadas dos centros das superfícies de
%            encruamento de 1 a m, no instante n.
% sigma_y    Vetor com a tensão de escoamento de cada superfície.
% H          Vetor com o módulo de encruamento cinemático de cada
%            superfícies de escoamento ou encruamento.
% l          Superfície de encruamento ativa.
% G          Módulo de elasticidade ao cisalhamento.
% k          Módulo de elasticidade volumétrico.
% m          Número de superfícies de encruamento.
% lamb      Constante de Lamé.
%
% Resultados:
% sigma_n1   Matriz do tensor tensão de Cauchy no instante n+1.
% S_n1      Matriz do tensor tensão desviadora no instante n+1.
% beta_n1   Matriz com as coordenadas dos centros das superfícies de
%            encruamento de 1 a m, no instante n+1.
% eps_n1    Matriz de deformações no instante n+1.
% l         Superfície de encruamento ativa.
% eps_pn1   Matriz das deformações plásticas no instante n+1.

cond = 0;
cond2 = 0;

while cond == 0
deps = eps_n1 - eps_n;

% Passo tentativo
e_n1 = eps_n1 - (1/3)*trace(eps_n1)*eye(3);
S_trial = 2*G*(e_n1 - eps_pn);
f1_trial = norm(S_trial - beta_n(:, :, 1), 'fro') - sqrt(2/3)*sigma_y(1);

if f1_trial <= 0 % Passo elástico

    S_n1 = 2*G*(e_n1 - eps_pn);
    beta_n1 = beta_n;
    l = 1;
    sigma_n1 = lamb*trace(eps_n1-eps_pn)*eye(3) + 2*G*(eps_n1-eps_pn);
    eps_pn1 = eps_pn;
    cond = 1;

else % Passo plástico

    % 1) Calculando o incremento de tensão
```

```

de = deps - (1/3)*(trace(deps))*eye(3);
N_n = (S_n - beta_n(:, :, l))/norm(S_n - beta_n(:, :, l), 'fro');
deps_p = (3*G/(3*G+H(l)))*(trace(deps'*N_n))*N_n;
dS = 2*G*(de - deps_p);
dsigma_H = k*trace(deps);
dsigma = dS + dsigma_H*eye(3);
sigma_n1 = sigma_n + dsigma;
S_n1 = S_n + dS;
eps_pn1 = eps_pn + deps_p;

% 2) determinando a direção de encruamento

A = norm(dS, 'fro')^2;
B = trace(dS*(S_n - beta_n(:, :, l+1)));
C = (2/3)*(sigma_y(l+1)^2) - (norm((S_n - beta_n(:, :, l+1)), 'fro'))^2;
alfa = (-B+sqrt(B^2+A*C))/A;
S_2l = S_n + alfa*dS;
beta_2l = S_2l - sqrt(2/3)*sigma_y(l)*(S_2l -
beta_n(:, :, l+1))/norm(S_2l - beta_n(:, :, l+1), 'fro');
Y_n = beta_2l - beta_n(:, :, l);

% 3) Atualizando a variável de encruamento para o estágio l

a = norm(Y_n, 'fro')^2;
b = trace((S_n1 - beta_n(:, :, l))*Y_n);
c = norm(S_n1 - beta_n(:, :, l), 'fro')^2 - (2/3)*sigma_y(l)^2;
rho = (b - sqrt(b^2 - a*c))/a;
delta_beta_l = rho*Y_n;
beta_n1(:, :, l) = beta_n(:, :, l) + delta_beta_l;

% 4) Atualizando as variáveis de encruamento para os demais estágios

N_n1 = (S_n1 - beta_n1(:, :, l))/norm(S_n1 - beta_n1(:, :, l), 'fro');
for i = 1:l-1
beta_n1(:, :, i) = S_n1 - sqrt(2/3)*sigma_y(i)*N_n1;
end
beta_n1(:, :, l+1:m) = beta_n(:, :, l+1:m);

% 5) Correção do passo

if norm(S_n1 - beta_n1(:, :, l+1), 'fro') - sqrt(2/3)*sigma_y(l+1) <= 1E-8
    fi = 1;
    cond = 1;
    if cond2 == 1
        l = l+1;
    end
else
    fi = norm(S_2l-S_n, 'fro')/norm(dS, 'fro');
end

if fi == 0 % empacotamento de superfícies de escoamento
    l = l+1;
else
    deps = fi*deps;
    eps_n1 = eps_n + deps;
    cond2 = 1;
end

end
end
end

```