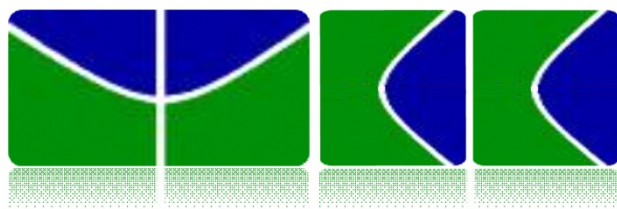


Trabalho de Conclusão de Curso
Licenciatura em Ciências Naturais



O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM DE SISTEMAS NATURAIS E OUTROS

Lucas Rangel Thomas

Orientadora: Mariana Malard Sales Andrade

Universidade de Brasília
Faculdade UnB Planaltina
Fevereiro de 2013

O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM DE SISTEMAS NATURAIS E OUTROS

Lucas Rangel Thomas

RESUMO Este trabalho aborda as possibilidades de modelagem matemática de sistemas através de equações diferenciais, com ênfase aos sistemas pertencentes ao ramo das Ciências Naturais. Dependendo do problema de interesse, esta modelagem pode ser feita de forma analítica ou de forma computacional. A seleção dos sistemas analisados neste trabalho foi feita, por um lado, através de um estudo da literatura padrão na área e, por outro, a partir de entrevistas com os professores de diferentes áreas de pesquisa da Faculdade UnB Planaltina.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Modelagem de sistemas. Ciências Naturais. Métodos analíticos. Métodos numéricos.

1 INTRODUÇÃO

Equações diferenciais são ferramentas matemáticas usadas para calcular a evolução de sistemas. O objetivo da modelagem é encontrar a taxa de variação com o tempo das grandezas que caracterizam o problema, ou seja, a dinâmica temporal do sistema de interesse. Resolvendo a equação diferencial (ou sistema de equações diferenciais) que caracteriza determinado processo ou sistema, pode-se extrair informações relevantes sobre os mesmos e, possivelmente, prever o seu comportamento.

Deve-se ter em mente que a modelagem de um sistema em um conjunto de equações diferenciais fornece, quase sempre, uma descrição aproximada e simplificada do processo real. Ainda assim, a modelagem através de equações diferenciais fornece uma ferramenta poderosa para acessarmos o comportamento geral de vários tipos de sistemas.

Historicamente, a evolução do ramo da matemática no qual se insere o estudo das equações diferenciais aconteceu em paralelo com o desenvolvimento da Física, funcionando como ferramenta de cálculo das equações de movimento da mecânica newtoniana, das equações de onda da física ondulatória e do eletromagnetismo e, mais tarde, na formulação da mecânica quântica e da relatividade.

Hoje em dia, o uso de equações diferenciais foi estendido para as mais diversas áreas do conhecimento. Para citar alguns exemplos de aplicações de equações diferenciais em Ciências Naturais, temos o problema da dinâmica de populações, o de propagação de epidemias, a datação por carbono radioativo, a exploração de recursos renováveis, a competição de espécies como, por exemplo, no sistema predador *versus* presa. Fora das Ciências Naturais, as equações diferenciais também encontram aplicação em economia, no sistema financeiro, no comércio, no comportamento de populações humanas, dentre outras.

Uma das principais razões da importância das equações diferenciais é que mesmo as equações mais simples são capazes de representar sistemas úteis. Mesmo alguns sistemas naturais mais complexos comportam modelagens em termos de equações diferenciais bem conhecidas. Por outro lado, problemas cuja modelagem exige equações diferenciais mais complicadas podem, hoje em dia, ser tratados através de métodos computacionais.

Assim, o estudo e o desenvolvimento da área de modelagem de sistemas através de equações diferenciais são de suma importância para a compreensão de problemas reais, apresentando aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento e, em particular, em Ciências Naturais.

2 ASPECTOS TÉCNICOS DO USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM DE SISTEMAS

O principal desafio que se apresenta na modelagem de sistemas em termos de equações diferenciais é formular as equações que descrevem o problema a partir de um conjunto restrito de informações, ou “pistas”, sobre o comportamento geral do sistema. A construção do modelo envolve uma percepção da situação real em linguagem matemática. Para que o modelo seja uma boa representação da realidade, é de fundamental importância enunciar de maneira precisa os princípios que governam o sistema de interesse.

Ora, como cada sistema possui um conjunto de variáveis e interações características, os modelos propostos aparecem nas mais diversas formas, não havendo uma lista de regras gerais para a representação de determinado sistema ou processo. Apesar disso, segundo Boyce e DiPrima (2012) [2], existem alguns passos que, frequentemente, fazem parte do processo de modelagem: (i) Identificação das variáveis que caracterizam o sistema, (ii) Definição das unidades de medida das variáveis, (iii) Determinação das leis (teóricas ou empíricas) que regem as relações entre as variáveis e a dinâmica do sistema e (iv) Expressar as leis em termos das variáveis identificadas.

Uma vez definido o conjunto de equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema, é necessário resolver as equações, ou seja, encontrar suas soluções. Algumas equações diferenciais possuem soluções analíticas, isto é, podem ser resolvidas “a mão”. Porém, em muitos casos, a complexidade dos sistemas modelados implica em equações complicadas, impossíveis de resolver analiticamente. Nesses casos, é necessário lançar mão de técnicas computacionais (numéricas) para a solução do problema. Alguns dos softwares mais usados na solução computacional de equações diferenciais são o Maple e o Mathematica, ferramentas que executam algoritmos de aproximação numérica. Estes softwares também são úteis na interpretação e representação gráfica das soluções obtidas, possibilitando um entendimento da solução bem mais claro do que o extraído de tabelas numéricas ou fórmulas analíticas complicadas. Abordagens computacionais podem ser implementadas também através de linguagens de programação como C e Fortran.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

3.1 Definição

Uma equação diferencial é uma lei, ou uma prescrição, que relaciona determinada função com suas derivadas. Em outras palavras, uma equação diferencial estabelece a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Resolver uma equação diferencial é encontrar a função que satisfaz a equação e, frequentemente, determinado conjunto de condições iniciais. A partir do conhecimento destas condições, a solução da equação diferencial fornece o valor da função em qualquer valor posterior da variável independente. Em particular, na descrição de um sistema em termos de uma função da variável independente tempo, a resolução da equação diferencial correspondente permite prever o comportamento futuro do sistema.

3.2 Classificação

Número de variáveis da função: As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao número de variáveis da função em termos da qual a equação é escrita. Equações diferenciais ordinárias (EDO) são aquelas cuja solução é uma função de apenas uma variável, ou seja, podem ser resolvidas apenas por derivadas simples. Um exemplo dado por Boyce e DiPrima(2012) [2] de uma EDO é

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t) \quad (3.2.1)$$

que descreve o circuito RLC, com capacitância C , resistência R e indutância L . A função do tempo $E(t)$ é a voltagem (conhecida) impressa no sistema. A função $Q(t)$, que é a solução procurada da equação diferencial, representa a carga em função do tempo fluindo no circuito. O circuito RLC é frequentemente utilizado em rádios.

Equações diferenciais parciais contêm funções de mais de uma variável e, portanto, envolvem derivadas parciais. Exemplos desses tipos de equações encontrados em Boyce e DiPrima (2012)[2] são a equação de propagação de calor

$$\alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (3.2.2)$$

e a equação de onda

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.2.3)$$

onde α e a são constantes físicas e $u(x, t)$ é, no caso da equação de calor, a temperatura e, no caso da onda, a amplitude como função da posição x e do tempo t . A equação de calor descreve a condução de energia térmica em um corpo sólido e a equação de onda aparece em uma variedade de problemas envolvendo movimento ondulatório e também na mecânica quântica.

Ordem : A ordem de uma equação diferencial é definida a partir da derivada mais alta que aparece na equação.

Por exemplo, a equação

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2x(t) = 0 \quad (3.2.4)$$

com c e ω constantes, é uma equação diferencial de segunda ordem, pois envolve a segunda derivada da função $x(t)$. A equação acima descreve uma oscilação $x(t)$ com frequência ω e constante de dissipação c .

Número de funções desconhecidas : Outra classificação de equações diferenciais é formulada a partir do número de funções desconhecidas que compõem a solução do problema. Caso só exista uma função a ser determinada, uma única equação diferencial é suficiente. Se existem mais funções, a solução do problema exige um sistema de equações composto por tantas equações diferenciais quantas forem as funções a serem determinadas.

Todas as equações diferenciais mencionadas até aqui tem como solução uma única função. Um exemplo de um problema que envolve mais de uma função é o modelo predador-presa, ou equações Lotka-Volterra como podem ser encontradas em Boyce e Diprima(2012)[2], descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Na equação acima, $x(t)$ e $y(t)$ são as populações da presa e do predador, respectivamente, a serem determinadas em função do tempo t ; a , α , c e γ são constantes cujos valores são baseados em observações empíricas e dependem das espécies particulares em estudo. O modelo acima é muito utilizado em Ecologia e outros ramos das Ciências Naturais.

Linearidade : Segundo Boyce e Diprima(2012)[2], a EDO

$$F(t, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad (3.2.6)$$

é dita linear se F for uma função linear das variáveis y, y', \dots, y^n , onde, nessa notação, y' se refere à derivada primeira, y'' à derivada segunda, y^n a n -ésima derivada de y em relação à variável independente t . Assim, a EDO linear geral de ordem n é:

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_n(t)y = g(t) \quad (3.2.7)$$

4 APLICAÇÕES E MODELOS CONHECIDOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM

4.1 Decaimento radioativo – Aplicação em Física, Química, Engenharia Nuclear, Arqueologia, Geologia, etc.

Segundo Alves (2009)[1], observações empíricas mostram que a taxa de desintegração de um elemento radioativo, como o carbono-14, em dado instante é proporcional à quantidade do elemento presente naquele instante. Matematicamente, isto significa que

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \quad (4.1.1)$$

onde $Q = Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no material como função do tempo t e $k > 0$ é a constante de desintegração.

Assim reduz-se o problema da datação de um material através da concentração de carbono-14 à resolução de *uma equação diferencial linear ordinária de 1ª ordem*. Pode-se resolver esta equação através do método de separação de variáveis, escrevendo:

$$\frac{dQ}{Q} = -kdt \rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = -k \int dt \rightarrow \ln Q = -kt + C \rightarrow Q = De^{-kt} \quad (4.1.2)$$

Supondo conhecida a concentração inicial Q_i , isto é, dado $Q(t=0) = Q_i$, então:

$$Q(t) = Q_i e^{-kt} \quad (4.1.3)$$

A solução mostra que o decaimento de carbono-14 em uma amostra é exponencial.

Supondo conhecida a concentração Q em algum instante posterior t , pode-se determinar a constante de decaimento k . Por exemplo, sabe-se que a meia

vida do Carbono-14 é de aproximadamente 5.730 anos. Isto quer dizer que, após este tempo, a quantidade de Carbono-14 em algum material caiu pela metade, ou seja:

$$Q(5.730) = \frac{1}{2}Q_i \quad (4.1.4)$$

Substituindo na equ. (4.1.3) para $Q(t)$:

$$\frac{1}{2}Q_i = Q_i e^{-5.730k} \rightarrow e^{-5.730k} = \frac{1}{2} \quad (4.1.5)$$

Aplicando logaritmo natural nos dois lados da equação, obtém-se:

$$\ln e^{-5.730k} = \ln \frac{1}{2} \rightarrow -5.730k = \ln \frac{1}{2} \quad (4.1.6)$$

Isolando k :

$$k = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{5.730} \rightarrow k \approx 1,21 \cdot 10^{-4} / ano \quad (4.1.7)$$

A partir do valor de k , pode-se reescrever a equação para a concentração $Q(t)$ de Carbono-14:

$$Q(t) = Q_i e^{-0,000121t} \quad (4.1.8)$$

Com o auxílio do Maple pode-se traçar o gráfico da função acima. A Figura 1 mostra o decaimento exponencial do Carbono-14 para $Q_i = 100$.

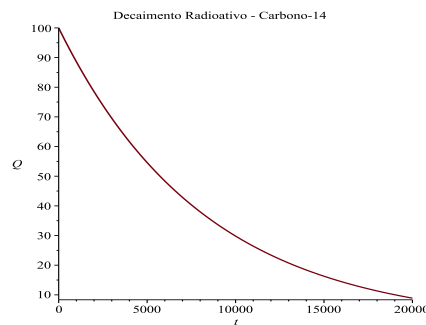


Figura 1: Concentração de carbono-14 Q em função do tempo t para $Q_i = 100$.

4.2 Dinâmica de populações – Aplicação em Biologia, Ecologia, Medicina, Economia, etc.

O estudo da dinâmica de populações envolve o estudo de equações diferenciais autônomas, ou seja, equações cuja variável independente não aparece explicitamente.¹

Essas equações são do tipo

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (4.2.1)$$

Equações autônomas são úteis para determinar o crescimento ou declínio populacional de uma dada espécie e os seus pontos críticos, localizados nos zeros de $f(y)$. Nestes pontos, $\frac{dy}{dt} = 0$, ou seja, a taxa de variação da população se anula. Assim, se a população, em algum momento, atinge algum dos valores críticos, a partir daí ela permanecerá constante. Dizemos que a população atingiu o equilíbrio.

Digamos que $y = y(t)$ representa a população de uma determinada espécie em um determinado instante de tempo t . Em uma primeira aproximação, vamos supor que a taxa de variação de y é proporcional ao valor atual de y . Podemos representar essa hipótese em uma equação diferencial.

$$\frac{dy}{dt} = ry \quad (4.2.2)$$

onde a constante de proporcionalidade r representa a taxa de crescimento ($r > 0$) ou declínio ($r < 0$) da população.

A partir da condição inicial

$$y(0) = y_0 \quad (4.2.3)$$

pode-se resolver a equação diferencial utilizando o método de separação de variáveis apresentado na seção 4.1, obtendo:

$$y(t) = y_0 e^{rt} \quad (4.2.4)$$

A solução acima mostra que, para $r > 0$, a população cresce exponencialmente enquanto que, para $r < 0$, a população decai exponencialmente. A Figura 2 mostra o gráfico dessa solução para diferentes valores de y_0 .

¹A equação diferencial (4.1.1) que descreve o decaimento do carbono-14 também é uma equação autônoma.

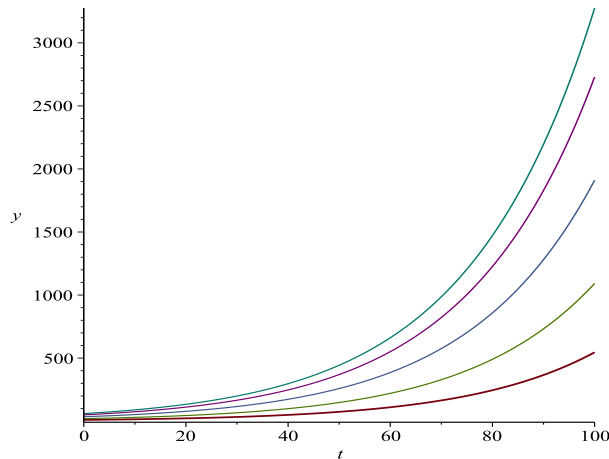


Figura 2: População y em função do tempo t para $r = 0.04$ e diferentes valores de população inicial y_0 . vermelho: $y_0 = 10$, verde claro: $y_0 = 20$, azul: $y_0 = 35$, roxo: $y_0 = 50$, verde: $y_0 = 60$

É importante observar que o modelo anterior com $r > 0$, pressupõe condições ideais para o crescimento da população, isto é, não considera eventuais fatores limitantes ao crescimento. Em uma situação real pode haver falta de alimento, espaço, a presença de predadores entre outros fatores, que modificarão a taxa de crescimento e o resultado anterior de crescimento exponencial ilimitado não será mais válido.

O caso oposto é obtido se utilizar $r < 0$ que, ao invés de crescimento, gera decaimento exponencial até a eventual extinção da população. Este caso pressupõe que há apenas condições que impedem a manutenção ou crescimento da população e também não é representativo de situações reais. No caso de uma população humana, por exemplo, os avanços tecnológicos podem constituir um fator favorável ao crescimento.

Mesmo sendo um modelo extremamente simplificado, ele se mostra útil na investigação da dinâmica de certos tipos de população como, por exemplo, no estudo de crescimento de tumores.

Observações experimentais mostram que microrganismos que se reproduzem de forma a ocorrer duplicação, como as bactérias e tumores, têm sua

taxa de crescimento proporcional ao volume de células divididas em um determinado momento. Luz e Corrêa (2001)[5] estudaram o crescimento de tumores utilizando equações diferenciais do tipo (4.2.2) encontrando a seguinte solução:

$$V(t) = V_0 e^{\lambda(t-t_0)} \quad (4.2.5)$$

onde $V(t)$ é o volume de células no instante t , $V_0 = V(t_0)$ é o volume de células no instante inicial t_0 e λ é a taxa de variação da população. De acordo com este modelo, o volume de células cresce exponencialmente com o tempo.

Como um aprimoramento do resultado anterior de crescimento exponencial ilimitado, Luz e Corrêa (2001)[5] propuseram um ajuste em $V(t)$ que, então, toma a seguinte forma:

$$V(t) = V_0 e^{\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))\right)} \quad (4.2.6)$$

onde V_0 , α e λ são constantes positivas.

A Fig. 3 mostra o gráfico desta solução para determinados valores dos parâmetros V_0 , α e λ .

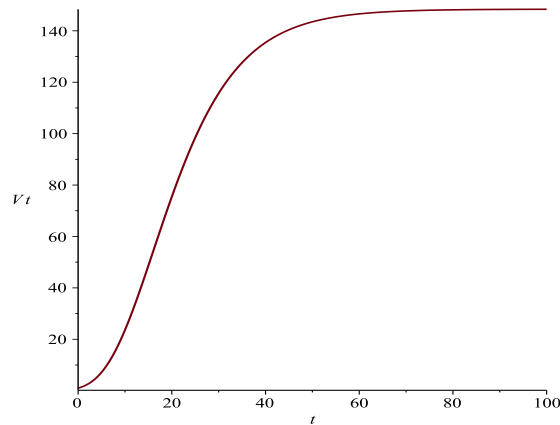


Figura 3: Volume de tumores sólidos V em função do tempo t para $\lambda = 0.5$, $\alpha = 0.1$ e $V_0 = 1$. O crescimento de tumores é mais lento com o passar do tempo.

Analisando o gráfico podemos ver que, diferentemente da Fig. 2, aqui o crescimento dos tumores, após determinado período de tempo, atinge seu ápice e, a partir desse ponto, o volume permanece constante, ou seja, a população de tumores atinge o equilíbrio.

Uma forma de aprimorar o modelo de dinâmica populacional fornecido pela eq. (4.2.2) é substituir a constante r por uma função $h(y)$, obtendo uma equação modificada na qual a dependência da taxa de variação com a população não é simplesmente linear (caso discutido anteriormente), mas uma função mais complexa que leva em consideração eventuais fatores externos limitantes ou favoráveis ao crescimento.

Assim, vamos estudar a equação:

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y \quad (4.2.7)$$

Escolheremos a função $h(y)$ a partir de nosso conhecimento do problema real. Vamos tomar $h(y)$ tal que: (i) $h(y) = r > 0$, com r constante, quando y for pequeno, pois baixas populações tendem a aumentar sem muita influência do meio externo, isto é, a taxa de crescimento a cada instante depende essencialmente do número de indivíduos naquele instante (hipótese anterior aplicada a baixas populações); (ii) Após determinado valor de população, $h(y)$ começa a diminuir quando y aumenta, devido a fatores limitantes, como alimento, espaço, entre outros (nesse regime, a população tende a crescer, pois pela eq. (4.2.7) temos que $h(y) > 0 \Rightarrow dy/dt > 0$, mas em uma taxa menor; (iii) Eventualmente $h(y)$ cruza a reta $h = 0$ (onde a população pára de crescer pois aí, de acordo com a eq. (4.2.7), $dy/dt = 0$); (iv) A partir desse ponto, $h(y) < 0$ (e, conseqüentemente, tem início um decaimento populacional já que, de acordo com a eq.(4.2.7), teremos $h(y) < 0 \rightarrow dy/dt < 0$).

A função mais simples com essas propriedades é $h(y) = r - ay$, onde a é uma constante positiva. Substituindo essa função na eq. (4.2.7), obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y \quad (4.2.8)$$

Essa equação é conhecida como a equação de Verhulst ou equação logística, comumente escrita na forma equivalente

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y \quad (4.2.9)$$

onde r é a taxa de crescimento intrínseca e k representa o nível de saturação ou capacidade de sustentação ambiental para determinada espécie em questão.

Na Fig. 4, podemos ver o gráfico que mostra $f(y) = r(1 - \frac{y}{k})y$ em função de y .

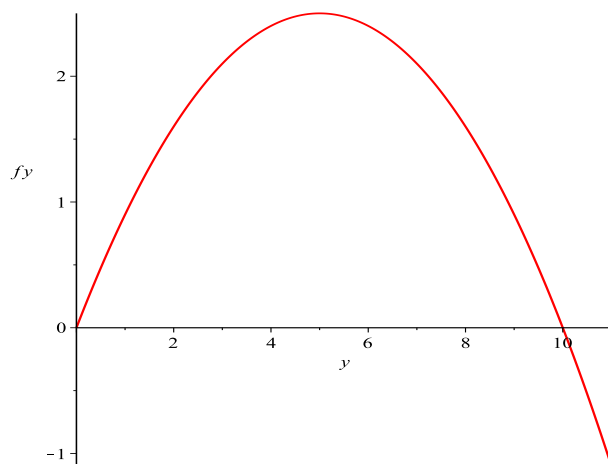


Figura 4: Função $f(y)$ para a equação logística, com valores de $k=10$ e $r=1$. Os zeros de $f(y)$ ocorrem nos pontos $(0, 0)$ e $(0, k)$.

Podemos ver que as interseções com o eixo x e variável y , ou seja, os zeros de $f(y)$, são $(0, 0)$ e $(0, k)$. Estes são os pontos críticos da equação onde $dy/dt = 0$. Assim, $y = 0, k$ são os valores de equilíbrio da população, ou seja, a população fica constante após atingir estes valores.

Podemos encontrar a solução geral da eq. (4.2.8) utilizando o Maple e com isso determinar o valor da população em um instante de tempo em particular. Assumindo a condição inicial (4.2.3), obtemos

$$y(t) = \frac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}} \quad (4.2.10)$$

A partir da solução, podemos ver como funciona a dinâmica dessa população para determinados períodos de tempo.

A Figura 5 mostra o gráfico que representa o crescimento de uma população até atingir a capacidade de sustentação ambiental k , para diferentes valores para a população inicial. A partir desse valor, a população permanece em equilíbrio, ou seja, constante.

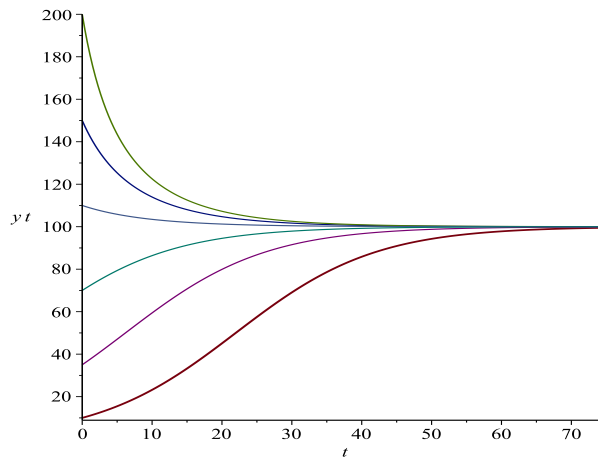


Figura 5: Solução da equação de Verhulst, para $r = 0.1$, $k = 100$ e os diferentes valores de y_0 .

Um outro caso que também descreve a dinâmica de populações é a equação envolvendo um limiar crítico. Consideremos a seguinte equação:

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y \quad (4.2.11)$$

onde r e T são constantes positivas e T é um limiar.

A Figura 6 mostra a função $f(y)$. As interseções com o eixo dos y , ou seja, os pontos críticos nos quais a população atinge o equilíbrio são $(0, 0)$ e $(0, T)$.

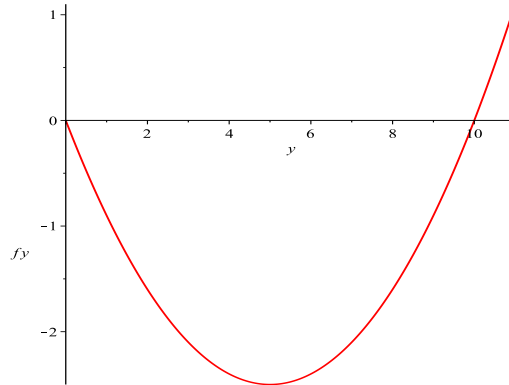


Figura 6: Função $f(y)$ para a equação com limiar crítico utilizando valores: $r = 1$ e $T = 10$. Os zeros de $f(y)$ ocorrem nos pontos $(0, 0)$ e $(0, T)$.

Com o auxílio do Maple, podemos resolver a equação diferencial (4.2.11), utilizando a condição inicial (4.2.3).

Obtemos a seguinte solução:

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}} \quad (4.2.12)$$

Na Figura 7 vemos o gráfico que mostra $y(t)$. Podemos observar três casos: (i) para a curva azul, $y_0 < T$ e a população é decrescente; (ii) para a curva vermelha, $y_0 = T$ e a população é constante e (iii) para a curva verde, $y_0 > T$ e a população é crescente.

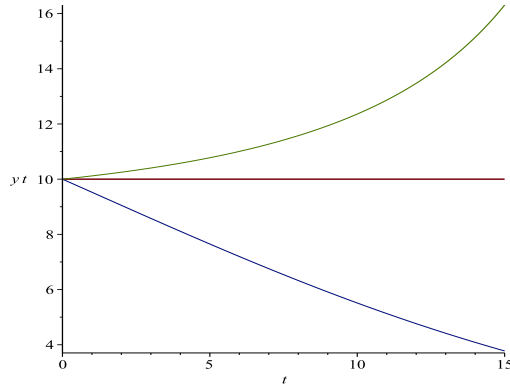


Figura 7: Solução da equação de dinâmica populacional com limiar crítico para: $r = 0.1$ e $y_0 = 10$. Azul: $T = 11$; Vermelho: $T = 10$, Verde: $T = 9$.

4.3 Capitalização de investimentos – Aplicação no Sistema Financeiro[Boyce e Diprima (2012)[2]]

Em muitas situações, o atual sistema financeiro utiliza o regime de juros compostos, pois ele oferece uma maior rentabilidade se comparado ao regime de juros simples. As modalidades de investimentos e financiamentos são calculadas de acordo com esse sistema, portanto é de grande utilidade estudá-lo. Aplicações financeiras baseadas em juros compostos podem ser modeladas por uma equação diferencial.

Suponha que uma quantia de dinheiro é depositada em um banco que paga juros a uma taxa r ao mês. O valor $S(t)$ do investimento em qualquer instante t depende tanto da frequência de capitalização dos juros, ou seja, da periodicidade em que os juros são aplicados, quanto da taxa de juros. Se supusermos que a capitalização é feita continuamente, pode-se montar um problema de valor inicial simples que descreve o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é $\frac{dS}{dt}$. Essa quantidade é igual a taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros r , vezes o valor atual do investimento $S(t)$. Então obtemos a equação diferencial de primeira ordem que descreve o processo:

$$\frac{dS}{dt} = rS \tag{4.3.1}$$

Novamente encontramos uma equação diferencial linear ordinária de 1ª ordem.

Supondo que o valor inicial de investimento é S_0 , encontram-se os valores de S para qualquer instante de tempo t . Como resultado, obtém-se:

$$S(t) = S_0 e^{rt} \quad (4.3.2)$$

Portanto, como mostra a equação, uma conta bancária com juros capitalizados continuamente cresce exponencialmente!

Podemos agora supor que possam existir, além do acúmulo de juros, depósitos e retiradas ocorrendo a uma taxa constante k . Matematicamente, esses depósitos e retiradas entram como uma contribuição aditiva na eq. (4.3.1):

$$\frac{dS}{dt} = rS + k \quad (4.3.3)$$

onde $k > 0$ representa depósitos e $k < 0$ retiradas.

A solução geral dessa equação é

$$S(t) = ce^{rt} - \frac{k}{r} \quad (4.3.4)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial $S(0) = S_0$:

$$c = S_0 + \frac{k}{r} \quad (4.3.5)$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r}(e^{rt} - 1) \quad (4.3.6)$$

Onde $S_0 e^{rt}$ é a parte que representa os juros compostos em si, e $\frac{k}{r}(e^{rt} - 1)$ é a parte referente a depósitos ou retiradas a uma taxa k . Dessa forma, simula-se uma situação mais real, onde há uma flexibilidade para o cliente de um banco, por exemplo, realizar depósitos ou retirar dinheiro de uma conta poupança.

A Figura 8 mostra como o saldo S varia com o tempo t para os diversos valores de k .

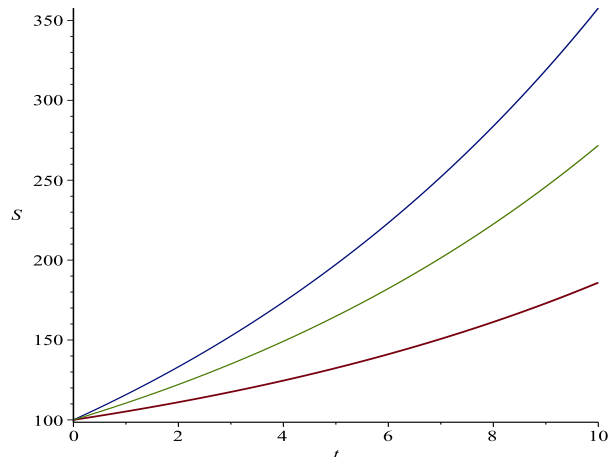


Figura 8: Capital S em função do tempo t para $S_0 = 100$ e diferentes valores de k . Azul: $k > 0$; Verde: $k = 0$; Vermelho: $k < 0$.

5 APLICAÇÕES E MODELOS CONHECIDOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM

5.1 Oscilador harmônico amortecido – Aplicação em Física e Engenharias [Projeto de Iniciação Científica [6]]

Todo objeto material é composto de átomos ou moléculas que, mesmo sob condições normais de temperatura e pressão, estão em constante vibração. Esta dinâmica vibracional constitui os chamados modos naturais ou normais de vibração do material. Entender como funciona a dinâmica vibracional interna dos materiais é muito relevante para a pesquisa fundamental em áreas do conhecimento como a física, química, engenharia, ciências de materiais, entre outras.

Um sistema vibracional simples cujo estudo pode ser feito através de equações diferenciais é o oscilador harmônico amortecido. O movimento harmônico amortecido ocorre quando uma força externa dissipativa atua sobre um oscilador harmônico fazendo com que a velocidade de seu movimento reduza-se gradualmente. Um exemplo típico de força externa dissipativa é a força de resistência do ar. Um sistema oscilando no ar acaba por ter reduzida sua

energia cinética e, portanto, sua amplitude de oscilação devido à força de resistência que o ar exerce sobre o sistema.

A partir da segunda lei de Newton é possível escrever a equação de movimento do oscilador harmônico amortecido da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0 \quad (5.1.1)$$

onde $x = x(t)$ é a posição do oscilador com função do tempo t , $\frac{dx}{dt}$ sua velocidade, $\frac{d^2x}{dt^2}$ sua aceleração, c é a constante de amortecimento e ω é a frequência angular. O conhecimento da posição $x(t)$ do oscilador para cada instante de tempo requer a resolução de uma equação diferencial linear ordinária de 2ª ordem.

Supondo uma solução para a equação diferencial da forma

$$x(t) = e^{f(c,\omega)t} \quad (5.1.2)$$

Onde $f(c, \omega)$ é uma função dos parâmetros c e ω .

Obtém-se que:

$$\frac{dx}{dt} = f(c, \omega)e^{f(c,\omega)t} \quad (5.1.3)$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f^2(c, \omega)e^{f(c,\omega)t} \quad (5.1.4)$$

Substituindo na equação diferencial (5.1.5):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2x(t) = f^2(c, \omega)e^{f(c,\omega)t} + cf(c, \omega)e^{f(c,\omega)t} + \omega^2e^{f(c,\omega)t} = 0 \quad (5.1.5)$$

Simplificando:

$$f^2(c, \omega) + cf(c, \omega) + \omega^2 = 0 \quad (5.1.6)$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara para resolver a equação de segundo grau:

$$f(c, \omega) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (5.1.7)$$

Assim, a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$x(t) = Ae^{\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}t} + Be^{\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}t} \quad (5.1.8)$$

onde as constantes A e B são determinadas a partir das condições iniciais:

$$\begin{cases} x(0) = A + B \\ \dot{x}(0) = A\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}\right) + B\left(\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}\right) \end{cases} \quad (5.1.9)$$

Resolvendo esse sistema para A e B , obtém-se:

$$A = \frac{2\dot{x}(0) + (c + \sqrt{c^2 - 4\omega^2})x(0)}{2\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} \quad (5.1.10)$$

$$B = -\frac{2\dot{x}(0) + (c - \sqrt{c^2 - 4\omega^2})x(0)}{2\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} \quad (5.1.11)$$

Substituindo os valores de A e B na eq. (5.1.8) temos:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{2\dot{x}(0) + (c + \sqrt{c^2 - 4\omega^2})x(0)}{2\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} e^{\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}t} \\ & - \frac{2\dot{x}(0) + (c - \sqrt{c^2 - 4\omega^2})x(0)}{2\sqrt{c^2 - 4\omega^2}} e^{\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}t} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Existem duas soluções típicas:

(i) $c^2 - 4\omega^2 < 0 \rightarrow$ Solução oscilatória com amplitude exponencialmente decrescente.

$$\sqrt{c^2 - 4\omega^2} = \sqrt{(-4\omega^2 - c^2)} = i\sqrt{4\omega^2 - c^2} \quad (5.1.13)$$

Reescrevendo a eq. (5.1.12)

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{2\dot{x}(0) + (c + i\sqrt{4\omega^2 - c^2})x(0)}{2i\sqrt{4\omega^2 - c^2}} e^{-\frac{c}{2}t} e^{+i\frac{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}{2}t} \\ & - \frac{2\dot{x}(0) + (c - i\sqrt{4\omega^2 - c^2})x(0)}{2i\sqrt{4\omega^2 - c^2}} e^{-\frac{c}{2}t} e^{-i\frac{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}{2}t} \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

A solução é composta por oscilações $e^{\pm i\frac{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}{2}t}$ com amplitudes que decrescem exponencialmente com $e^{-\frac{c}{2}t}$, como pode ser visualizado no gráfico abaixo obtido com Maple.

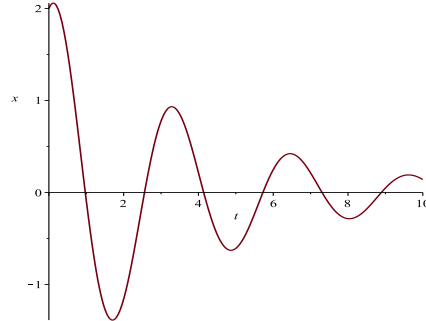


Figura 9: Deslocamento x em função do tempo t de um oscilador harmônico amortecido para para $c = 0,5 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, $x(0) = 2\text{m}$ e $\dot{x}(0) = 1 \text{ m/s}$. A amplitude da oscilação decresce exponencialmente.

(ii) $c^2 - 4\omega^2 > 0 \rightarrow$ Solução de decaimento exponencial sem oscilação.

Os radicais não precisam ser reescritos e a solução é dada simplesmente pela eq. (5.1.12) O gráfico da solução pode ser traçado utilizando o Maple conforme a Figura 10.

Analisando os dois casos concluímos que: No primeiro, quando $c < 2\omega$, a constante de amortecimento é relativamente pequena de modo que a tendência dominante é de oscilação e o amortecimento é um efeito secundário. O sistema oscila com amplitude decrescente. No segundo caso, $c > 2\omega$, ou seja, a constante de amortecimento é grande e a tendência dominante é dada pelo termo de amortecimento. Como resultado, o sistema nem chega a oscilar e a posição decai exponencialmente.

A compreensão do comportamento desse sistema simples é o primeiro passo na investigação de sistemas vibratórios mais complexos. Além disso, os princípios envolvidos são os mesmos para muitos problemas. Por exemplo, existe uma analogia entre osciladores forçados e amortecidos com o circuito elétrico RLC (que será discutido na próxima seção). As equações diferenciais que descrevem estes sistemas são equivalentes, assim como suas soluções.

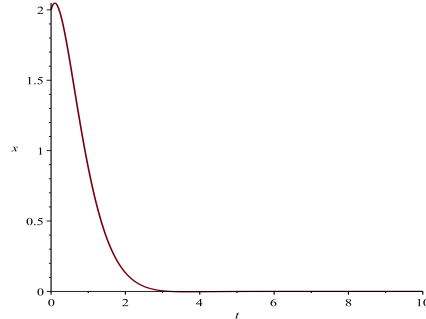


Figura 10: Deslocamento x em função do tempo t de um oscilador harmônico amortecido para $c = 4, 1 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, $x(0) = 2 \text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 1 \text{ m/s}$. O deslocamento diminui exponencialmente sem oscilação.

6 PROPOSTAS DE MODELAGEM DE PROBLEMAS ATRAVÉS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Foram realizadas entrevistas com professores da Faculdade UnB Planaltina com o objetivo de identificar sistemas das diversas áreas do conhecimento que pudessem ser modelados por equações diferenciais. A última parte deste trabalho de conclusão de curso pretende modelar, simular e discutir esses sistemas.

6.1 Problema Sugerido pelo professor Ismael Victor Costa (Físico) - Circuito RLC

O circuito RLC, um tipo de circuito elétrico encontrado especialmente em rádios, consiste de um resistor de resistência R , um indutor de indutância L , um capacitor de capacitância C e uma fonte de alimentação de tensão $V(t)$, como mostrado na Figura 11.

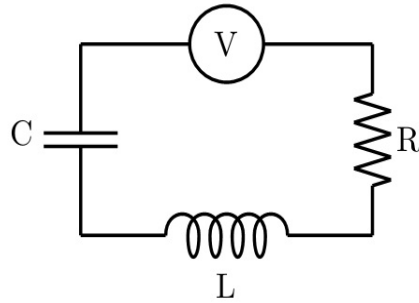


Figura 11: Circuito RLC

De acordo com as leis elementares da eletricidade, a queda de tensão no resistor é

$$V_r = RI \quad (6.1.1)$$

onde I é a corrente no circuito.

A queda de tensão no capacitor é

$$V_c = \frac{Q}{C} \quad (6.1.2)$$

onde Q é a carga no capacitor.

E a queda de tensão no indutor:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad (6.1.3)$$

A segunda lei de Kirchhoff nos diz que, em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito, portanto:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t) \quad (6.1.4)$$

Sabendo que

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (6.1.5)$$

pode-se reescrever na eq. (6.1.4) da seguinte forma:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = V(t) \quad (6.1.6)$$

Assumindo as condições iniciais

$$Q(t_0) = Q_0 \quad (6.1.7)$$

e

$$\frac{dQ}{dt} \Big|_{t=t_0} = I(t_0) = I_0 \quad (6.1.8)$$

obtem-se uma equação diferencial para a corrente I diferenciando a eq. (6.1.6) em relação a t e depois usando a eq. (6.1.5) para substituir $\frac{dQ}{dt}$.

Assim:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = V'(t) \quad (6.1.9)$$

Suponhamos que a tensão externa seja alternada e dada por $V(t) = E_0 \sin \omega t$, onde E_0 e ω são constantes positivas representando a amplitude e frequência de oscilação da tensão, respectivamente.² Logo:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t \quad (6.1.10)$$

6.1.1 Solução Geral

Uma das formas de resolver uma equação diferencial é supor uma solução que satisfaça a equação. Assim, vamos supor uma solução particular

$$I_p(t) = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (6.1.11)$$

com amplitude A e fase φ .

Para a equação acima ser uma solução, deve-se reescrever a eq. (6.1.10) em termos de I_p , ou seja:

$$LI_p'' + RI_p' + \frac{1}{C}I_p = \omega E_0 \cos \omega t \quad (6.1.12)$$

Substituindo as derivadas primeira e segunda de $I_p(t)$ e rearranjando o lado esquerdo da eq. (6.1.12), obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A \sin(\omega t - \varphi) + R\omega A \cos(\omega t - \varphi) = \\ & = \omega E_0 \cos \varphi \cos(\omega t - \varphi) - \omega E_0 \sin(\varphi) \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Para que a equação acima seja verdadeira para todo instante de tempo t , os coeficientes dos termos oscilatórios $\cos(\omega t - \varphi)$ e $\sin(\omega t - \varphi)$ devem se anular. Logo:

$$\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)A = \omega E_0 \sin(\varphi) \quad (6.1.14)$$

$$R\omega A = \omega E_0 \cos(\varphi) \quad (6.1.15)$$

²Note que esta escolha de $V(t)$ reproduz a condição física de que $V(t_0) = 0$.

Resolvendo A e φ , obtemos:

$$\frac{(6.1.14)}{(6.1.15)} \rightarrow \tan \varphi = \frac{L\omega^2 - \frac{1}{C}}{R\omega} \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) \quad (6.1.16)$$

$$\sqrt{(6.1.14)^2(6.1.15)^2} \rightarrow \sqrt{(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + R^2\omega^2} A = \omega E_0 \rightarrow A = \frac{\omega E_0}{\sqrt{(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + R^2\omega^2}} \quad (6.1.17)$$

As equações anteriores determinam as constantes A e φ da solução particular (6.1.11) em função dos parâmetros experimentais do problema. A eq. (6.1.17) é particularmente interessante pois fornece a amplitude A de oscilação da corrente em função da frequência ω de oscilação da tensão no circuito. O gráfico da eq. (6.1.17) é mostrado na Figura 12 para determinados valores de E_0 , R , L e C . Note que para $\omega \simeq 2$, A atinge seu valor máximo. Neste ponto, dizemos que o circuito RLC está em ressonância com a fonte externa de tensão.

A fim de obter a solução geral, escrevemos a equação para a solução homogênea, subtraindo a eq. (6.1.12) da eq. (6.1.10):

$$LI_h'' + RI_h' + \frac{1}{C}I_h = 0 \quad (6.1.18)$$

Suponhamos uma solução da forma

$$I_h(t) = e^{rt} \quad (6.1.19)$$

sendo r uma constante.

Substituindo esta solução na eq. (6.1.18), obtém-se r em função dos parâmetros experimentais R , L e C :

$$r = r_{\pm} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} \quad (6.1.20)$$

Sabendo que e^{r_+t} e e^{r_-t} obedecem a eq. (6.1.18), logo, $c_+e^{r_+t}$ e $c_-e^{r_-t}$ também são soluções. Assim, pode-se reescrever a solução geral da eq. (6.1.10) da seguinte forma

$$I(t) = c_+e^{r_+t} + c_-e^{r_-t} + A \sin(\omega t - \varphi) \quad (6.1.21)$$

onde r_{\pm} são dados pela eq.(6.1.20), A é dado pela eq. (6.1.17) e φ é dado pela eq. (6.1.16).

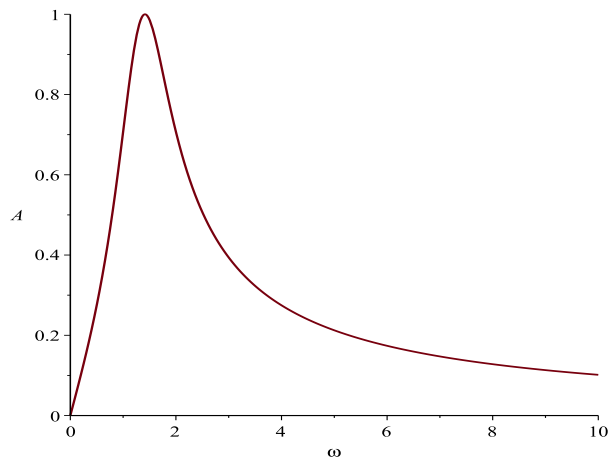


Figura 12: Amplitude A de oscilação da corrente em um circuito RLC em função da frequência ω de oscilação da tensão para $E_0 = 1$ V, $R = 1$ Ω , $L = 1$ H e $C = 0.5$ F.

O gráfico da solução do circuito RLC pode ser traçado com o auxílio do *Maple*. A Figura (13) mostra a corrente I em função do tempo t para determinados valores dos parâmetros experimentais. Os valores utilizados foram: e $E_0 = 1$ V, $\omega = 2$ rad.s⁻¹, $R = 10$ Ω , $L = 1$ H, $C = 0,5$ F. A partir desses valores, foram calculados $\varphi = 78.46$ utilizando da eq. (6.1.16), $A = 0.0995$ utilizando a eq. (6.1.17) e $r_+ = -0,2041$ e $r_2 = -9,7958$ utilizando a eq. (6.1.20). Nota-se que a corrente I tem comportamento geral oscilatório. É interessante notar que esta oscilação, em um primeiro momento, não acontece em torno do eixo $I = 0$ mas em torno de uma função exponencial decrescente. Após um curto período de tempo, essa oscilação ocorre em torno do eixo $I = 0$. Na Figura 13, plotamos o gráfico até $t = 25$ s.

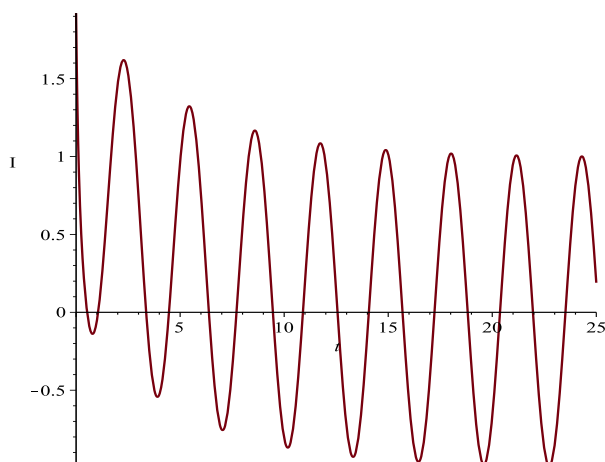


Figura 13: Oscilação da corrente I em função da do tempo t para $c_+ = 1$, $c_- = 1$, $r_+ = -0,2041$, $r_- = -9,7958$, $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$, $A = 0,0995$ e $\varphi = 78,45$.

6.2 Problema sugerido pelos professores Alexandre Parize (Químico) e Marco Aurélio (Físico) - Dispersão de um medicamento encapsulado no organismo

O problema proposto pelos professores foi de resolver a equação de Fick a fim de compreender como ocorre a dispersão de um medicamento encapsulado no organismo.

Difusão, segundo Crank (1975)[3] é o processo em que a matéria é transportada de uma parte do sistema a outro como resultado de movimentos aleatórios das moléculas. No caso proposto, uma quantidade de matéria encapsulada em um fármaco é liberada por algum mecanismo, como um poro, fissura, etc. e a partir daí se dispersa no meio externo.

Vamos supor que uma massa M de uma determinada substância é liberada em um ponto $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ em $t = t_0$. É claro que não é possível liberar uma massa finita de matéria em exatamente um ponto no espaço e tempo, isso é uma aproximação matemática.

A difusão dessa substância através do espaço é governada pela equação de Fick.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (6.2.1)$$

onde $C = C(x, y, z, t)$ é a concentração da substância como função da posição (x, y, z) e do tempo t e D é o coeficiente de difusão.

A equação de Fick é uma *equação diferencial parcial linear de segunda ordem*. Consideraremos inicialmente o problema unidimensional e depois vamos generalizar para a situação real em três dimensões.

6.2.1 Solução

Solução em 1D Em um sistema cujo comprimento é muito maior que sua altura e espessura, a difusão ocorre basicamente em uma dimensão. Então pode-se dizer que $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial z} = 0$ e podemos reescrever a eq. (6.2.1) simplificada em 1D:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (6.2.2)$$

A hipótese de liberação de uma substância de forma instantânea e pontual equivale à seguinte condição inicial:

$$C(x, t_0) = \frac{M}{A} \delta(x - x_0) \quad (6.2.3)$$

onde A é a área da seção reta no plano $y - z$ e $\delta(x - x_0)$ é a função Delta de Dirac que indica que, inicialmente (em $t = t_0$) a massa M se concentra em um único ponto do espaço (em $x = x_0$).

As condições de contorno são:

$$C, \frac{\partial C}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (6.2.4)$$

Para resolver a equação diferencial (6.2.2) com a condição inicial (6.2.3) e de contorno (6.2.4), pode-se utilizar uma análise dimensional para encontrar uma variável adimensional que permite converter a equação diferencial parcial original em uma equação diferencial ordinária de solução mais simples.

Inicialmente, notemos que, além da posição x e do tempo t , a concentração depende também da constante de difusão D e da razão M/A . Matematicamente:

$$C = C(x, t; \frac{M}{A}, D) \quad (6.2.5)$$

Suponhamos que C possa ser escrito em termos de duas funções C_1 e C_2 tal que:

$$C(x, t; \frac{M}{A}, D) = C_1(\frac{M}{A}, D; \text{ajuste}) C_2(\eta) \quad (6.2.6)$$

onde $\eta = \eta(x, t; \text{ajuste})$.

A tentativa é isolar a dependência de C dos parâmetros constantes $\frac{M}{A}$ e D em C_1 e a dependência de C das variáveis x e t em C_2 (via η). Devemos ainda obter η como uma variável adimensional, e por isso, ter que $[C_1] = [C]$. Os ajustes acima irão, se possível, garantir estes requisitos de dimensionalidade.

1. Para construir C_1 , precisamos utilizar as grandezas M/A ($[M/A] = Kg/m^2$) e D ($[D] = m^2/s$) e um ajuste em termos de x ($[x] = m$) e/ou t ($[t] = s$) tal que $[C_1] = [C] = \frac{Kg}{m^3}$. Se dividirmos $\frac{M}{A}$ por \sqrt{Dt} podemos usar t para cancelar o segundo "indesejável". Assim,

$$C_1\left(\frac{M}{A}, D, t\right) = \frac{\frac{M}{A}}{\sqrt{Dt}} \quad (6.2.7)$$

fornece $[C_1] = \frac{Kg}{m^3}$, como desejado.

2. Para construir η em termos de x ($[x] = m$) e t ($[t] = s$) e algum ajuste com D ($[D] = m^2/s$) e/ou M/A ($[M/A] = Kg/m^2$) tal que $[\eta] = 1$ podemos dividir x por \sqrt{Dt} . Assim,

$$\eta(x, t, D) = \frac{x}{\sqrt{Dt}} \quad (6.2.8)$$

fornece $[\eta] = 1$ como desejado.

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} C\left(x, t, \frac{M}{A}, D\right) &= \frac{\frac{M}{A}}{\sqrt{Dt}} C_2(\eta) \\ \eta(x, t, D) &= \frac{x}{\sqrt{Dt}} \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Substituindo na eq. (6.2.2), a seguinte *equação diferencial ordinária de segunda ordem* é obtida:

$$\frac{d^2 C_2}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\eta \frac{dC_2}{d\eta} + \frac{1}{2}C_2 = 0 \quad (6.2.10)$$

As expressões (6.2.4) implicam em novas condições de contorno:

$$C_2, \frac{\partial C_2}{\partial \eta} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \eta \rightarrow \pm\infty \quad (6.2.11)$$

Conforme mostrado por Fisher[4], a solução do problema (6.2.10)-(6.2.11) é:

$$C(x, t) = \frac{\frac{M}{A}}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right] \quad (6.2.12)$$

Solução em 2D Em um sistema cuja espessura é muito menor do que as outras duas dimensões, a difusão ocorre essencialmente em um plano. A equação em 2D que descreve o problema é:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (6.2.13)$$

A condição inicial pode ser escrita usando a função Delta de Dirac

$$C(x, y, t_0) = \frac{M}{L} \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (6.2.14)$$

onde L é o tamanho do sistema na direção z .

As condições de contorno são

$$C, \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad (x, y \rightarrow \pm\infty) \quad (6.2.15)$$

A solução dessa equação é similar à solução em 1D, a única diferença é que esse problema será resolvido separando as variáveis x e y em duas equações diferenciais independentes, para então chegar à solução geral:

$$C(x, y, t) = \frac{\frac{M}{L}}{4\pi(t - t_0)\sqrt{D_x D_y}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4D_x(t - t_0)} - \frac{(y - y_0)^2}{4D_y(t - t_0)}\right] \quad (6.2.16)$$

Solução em 3D Quando a dispersão de matéria se dá em todas as dimensões em uma proporção comparável, como provavelmente é o caso do problema proposto pelos professores, será utilizada a eq. (6.2.1) que se adequa melhor ao sistema. As condições iniciais e de contorno são respectivamente:

$$C(x, y, z, t_0) = M\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad (6.2.17)$$

$$C, \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad (x, y, z \rightarrow \pm\infty) \quad (6.2.18)$$

O método de resolução é o mesmo utilizado em 2D, porém separando em três equações diferenciais parciais em termos de x , y e z para obter a seguinte solução:

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{[4\pi(t - t_0)]^{\frac{3}{2}} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4D_x(t - t_0)} - \frac{(y - y_0)^2}{4D_y(t - t_0)} - \frac{(z - z_0)^2}{4D_z(t - t_0)}\right] \quad (6.2.19)$$

Podemos entender o significado desta solução plotando os gráficos da solução em 1D. A Figura 14 mostra o gráfico que representa a concentração C em função da posição x para diferentes intervalos de tempo t , em torno da posição inicial x_0 :

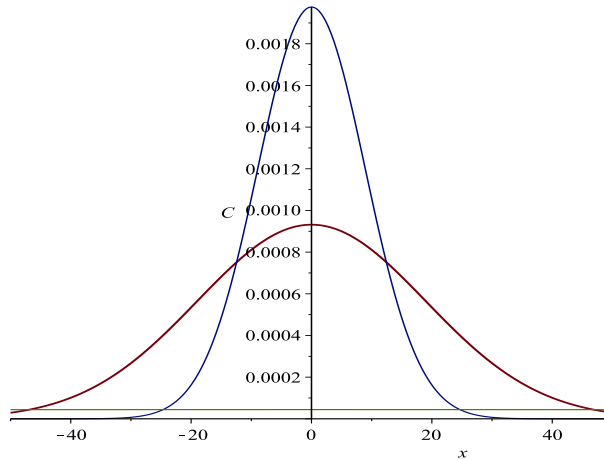


Figura 14: Concentração C em função da posição x para $M = 0,05$ Kg; $A = 2$ m²; $D = 20$ m²/s; $t_0 = 0$ s; $x_0 = 0$ m. Azul: $t = 1$ s, Vermelho: $t = 8$ s, Verde: $t = 4000$ s.

A partir desse gráfico, nota-se que, para tempos pequenos, a substância está concentrada em torno da posição inicial, como evidenciado pela curva azul, tirada para $t = 1$ s, que mostra um pico bem estreito em torno de $x_0 = 0$. À medida que o tempo passa, a substância se espalha, como pode ser visto pelo pico mais achatado da curva vermelha, em $t = 8$ s. Após um intervalo de tempo muito grande, como pode ser visto pela linha verde para em $t = 4000$ s, a concentração assume um valor constante. Este é o valor C_h para o qual a concentração de substância no sistema se torna homogênea. Pela Figura 14 vemos que, para os parâmetros escolhidos, $C_h \simeq 3,5 \cdot 10^{-5}$ Kg/m³.

A Figura 15 mostra o gráfico da concentração C em função do tempo t para diferentes posições x :

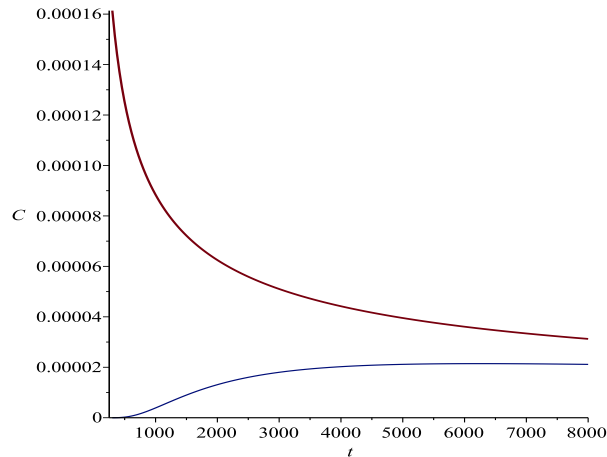


Figura 15: Concentração C em função do tempo t para $M = 0,05$ Kg; $A = 2$ m²; $D = 20$ m²/s; $t_0 = 0$ s; $x_0 = 0$ m. Vermelho: $x = 0,01$ m, Azul: $x = 500$ m.

Analisando a Figura 15, nota-se que a concentração C em posições próximas à posição inicial vai diminuindo com o passar do tempo, enquanto em posições mais distantes, a concentração tende a aumentar. Para intervalos maiores de tempo, a concentração tende a assumir um comportamento assintótico, se aproximando de um valor constante $C_h = 3,5 \cdot 10^{-5}$ Kg/m³ sendo o mesmo valor encontrado para a Figura 14.

O conhecimento do valor de C_h pode ser relevante para aplicações práticas, como a sugerida pelos professores de difusão de um medicamento no corpo humano. É razoável supor que o medicamento passa a fazer efeito depois de espalhado pela corrente sanguínea, ou seja, depois que a concentração da substância atingiu o valor C_h . Assim, C_h deve ser maior do que um valor limite, que pode ser fornecido por estudos empíricos, abaixo do qual a concentração é muito baixa para que o medicamento produza o efeito desejado. A partir desta informação, é possível saber qual a quantidade de substância ativa deve estar contida na capsula do medicamento.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho de conclusão de curso, efetuamos um estudo sobre algumas aplicações de equações diferenciais em problemas encontrados nas diversas áreas do conhecimento, principalmente nas Ciências Naturais.

No processo de modelagem de um sistema proposto, para que o modelo seja uma boa representação da realidade, é fundamental identificar as variáveis que caracterizam o sistema, assim como determinar as leis teóricas ou empíricas que o regem. As condições iniciais fornecidas para a solução da equação diferencial também devem refletir a realidade do sistema representado.

Seguindo esta metodologia, apresentamos exemplos de modelagem dos seguintes sistemas: Decaimento radioativo, Dinâmica de populações, Capitalização de Investimentos, Oscilador harmônico amortecido, circuito RLC e Difusão de partículas.

Para comprovar se o modelo matemático proposto se adequa ao sistema real, foi utilizado o *software Maple*, uma ferramenta útil para resolver equações e plotar seus gráficos. A partir disso, podemos verificar a validade do modelo proposto e analisar a solução obtida.

Durante este estudo, vimos que até mesmo as equações diferenciais mais simples são capazes de modelar matematicamente situações reais. Situações mais complexas podem ser modeladas por equações mais complicadas cujas soluções podem ser obtidas através de métodos numéricos e computacionais.

Referências

- [1] ALVES, W. Datação por decaimento radioativo. Disponível em: *http : //tinyurl.com/c3kltx6* Acesso em: 15 de Novembro de 2012.
- [2] BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [3] CRANK, J. The Mathematics of diffusion. 2nd edition. Oxford, Oxford Univ. Press, 347p. 1975.
- [4] FISCHER, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N.H. 1979. **Mixing in Inland and Coastal Waters**. Academic Press, Inc., San Diego, California.
- [5] LUZ, A. M.; CORRÊA, F. Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações. Revista Virtual de Iniciação Acadêmica da UFPA *http : //www.ufpa.br/revistaic* Vol 1, No. 1, Março 2001
- [6] THOMAS, L. R. Métodos analíticos e computacionais para o estudo da dinâmica de redes cristalinas. Projeto de Iniciação Científica. Faculdade UnB Planaltina. 2011