



## **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

# **ESTUDO SOBRE O DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA O PROBLEMA DE CONTATO ENTRE CILINDROS SOB CONDIÇÕES DE FRETTING UTILIZANDO O ABAQUS**

Por  
**Italo Dourado Affonso**

**Brasília, 06 de Julho de 2012**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

## PROJETO DE GRADUAÇÃO

# ESTUDO SOBRE O DOMÍNIO DE APLICAÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA O PROBLEMA DE CONTATO ENTRE CILINDROS SOB CONDIÇÕES DE FRETTING UTILIZANDO O ABAQUS

POR

**Italo Dourado Affonso**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico.

### **Banca Examinadora**

Prof. José Alexander Araújo, UnB/ ENM (Orientador)

\_\_\_\_\_

Prof. Fábio Comes de Castro, UnB/ENM (Co-Orientador)

\_\_\_\_\_

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, UnB/ ENM

\_\_\_\_\_

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, UnB/ENM

\_\_\_\_\_

Brasília, 06 de Julho de 2012

## **Agradecimentos**

*Primeiramente gostaria de agradecer à toda a minha família pelo apoio dado ao longo da minha formação, por toda a paciência e por terem me encorajado do começo ao fim. Agradeço a meu pai por ter respeitado todas as decisões difíceis que tomei nos últimos anos e ainda ter me aconselhado naqueles momentos onde houve incerteza. Agradeço também àqueles que se tornaram minha segunda família ao longo desses últimos 5 anos, em especial, Cristina e Sr. Brandini.*

*Agradeço aos maravilhosos amigos que fiz dentro do curso Milzara, Rodrigo e Renatha e que sempre batalharam ao meu lado para enfrentar todos esses desafios que nos foram dados. Agradeço especialmente àquela que acabou se tornando uma pessoa fundamental na minha vida, e que compartilhou comigo todas as alegrias e tristezas dos bastidores do curso, sempre com carinho e companheirismo. Obrigado Lívia.*

*Agradeço a todos meus colegas de laboratório que me ajudaram em todos os projetos de pesquisa dentro da UnB. Agradeço particularmente a Johan Bellecave e Raphael Araújo pois sem eles esse projeto dificilmente teria se concretizado. Agradeço também ao meu chefe Miguel Júnior por ter cedido horas de trabalho para que eu pudesse concluir este projeto e por ter me auxiliado no meu crescimento profissional.*

*Em especial agradeço à minha mãe, por todo o auxílio ao longo dessa jornada que foi meu curso de graduação. Durante esses 5 anos ela não só esteve lá para me amparar quando precisei, mas também foi tolerante para compreender e perdoar quando fui ausente. Obrigado Mãe.*

*Agradeço por fim a todos os professores do Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais: Prof. Fábio, Prof. Cosme, Prof. Jorge e Prof. Edgar e em especial ao Prof. Alex que, ao longo dos dois últimos anos, me auxiliou na minha formação acadêmica, profissional e pessoal, tendo sido um orientador dedicado que me fez crescer por meio de suas importantes críticas e sugestões.*

*Italo Dourado Affonso*

---

## RESUMO

O termo *fretting* denota um movimento oscilatório de pequena amplitude (normalmente da ordem de microns) entre duas superfícies em contato submetidas a um carregamento normal. Em problemas reais de engenharia, esse movimento pode ser causado por vibração ou por um carregamento cíclico e é responsável pela nucleação prematura de trincas. Quando combinado a uma tensão remota de fadiga, o processo passa a ser conhecido como fadiga por *fretting* e resulta em uma redução na vida em fadiga do componente. Neste trabalho utiliza-se o software de elementos finitos ABAQUS para avaliar as limitações da solução analítica fundamentada nas teorias de Hertz, Mindlin, Muskhelishvili e Hills & Nowell em problemas reais de contato entre cilindros elasticamente similares tanto sob condições de *fretting* quanto de fadiga por *fretting*. O modelo em estudo é baseado nos ensaios conduzidos no Laboratório de Ensaio Mecânicos da Universidade de Brasília e os resultados numéricos obtidos com o ABAQUS serão comparados à solução analítica do problema. O trabalho contém também um tutorial nos anexos mostrando o passo-a-passo da modelagem utilizando o ABAQUS.

---

## ABSTRACT

Fretting means a small amplitude (normally on the order of microns) oscillatory movement between two surfaces in contact under normal loading. In real engineering problems, this movement may be caused by vibration or by cyclic loading and leads to premature crack initiation. When combined with a bulk fatigue load, the process is known as fretting fatigue and it reduces the component's fatigue life. In this study the suite of software applications for Finite Element Analysis ABAQUS is used to analyze the limitations of the analytical solution based on the theories from Hertz, Mindlin, Muskhelishvili and Hills & Nowell in solving real problems of elastically similar cylinders under fretting and fretting fatigue. The target model is based on tests conducted at the Laboratory for Mechanical Tests at Universidade de Brasília and the numerical results obtained with ABAQUS are compared to the problem's analytical solution. This report also encloses a step-by-step tutorial of the modeling with ABAQUS.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E O ESTADO DA ARTE	1
1.2	OBJETIVO	4
<b>2</b>	<b>MECÂNICA DO CONTATO</b>	<b>5</b>
2.1	TEORIA DO CONTATO	5
2.2	FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS PLANOS	8
2.3	POTENCIAL DE MUSKHELISHVILI	9
2.4	TEORIA DO CONTATO DE HERTZ	11
2.4.1	CARGA NORMAL	11
2.4.2	CARGA TANGENCIAL	12
2.4.3	O EFEITO DA CARGA REMOTA DE FADIGA	15
2.5	CAMPO DE TENSÕES SOB O CONTATO	16
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>20</b>
3.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	20
3.2	O ABAQUS	21
3.3	MODELAGEM DO PROBLEMA DE CONTATO COM O ABAQUS	23
3.3.1	DISCRETIZAÇÃO DO CONTATO	23
3.3.2	FORMULAÇÕES DE ATRITO	24
3.3.3	MÉTODO DO MULTIPLICADOR DE LAGRANGE	25
3.3.4	MÉTODO DA PENALIDADE	26
3.3.5	DIFERENÇA ENTRE SMALL- E FINITE-SLIDING	26
3.3.6	ELEMENTOS LINEARES E QUADRÁTICOS	27
<b>4</b>	<b>MODELAGEM NUMÉRICA</b>	<b>29</b>
4.1	APARATO EXPERIMENTAL	29
4.2	MODELO NUMÉRICO	31
4.2.1	CARACTERÍSTICAS DA MÁQUINA USADA NA MODELAGEM	31
4.2.2	GEOMETRIA DO PROBLEMA	31
4.2.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO	31
4.3	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA	35
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>41</b>
5.1	MODELO TEÓRICO DE <i>FRETTING</i>	41
5.2	INFLUÊNCIA DO COMPRIMENTO EXPOSTO DA SAPATA	46
5.3	INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DO CORPO DE PROVA	52
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>60</b>
<b>7</b>	<b>PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>62</b>
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
	ANEXOS	66

# LISTA DE FIGURAS

1.1 - Montagens ilustrando situações de configurações típicas onde ocorre de fadiga por fretting: (a) Conexão do tipo rabo de andorinha e (b) Junta Rebitada .....	2
1.2 - Variação da vida em fadiga em função da amplitude de escorregamento. (Vingsbo e Söderberg, 1988).....	2
2.1 - Turbina Aeronáutica (a) Montagem pás e rotores; (b) Ruptura sem grandes danos da pá de uma turbina em 2007 em Dallas; (c) Ruptura em disco HTP de 1º estágio em vôo American Airlines N330AA em 2006 e (d) Ruptura de disco em 1996 levou a morte de 2 pessoas (Fonte: Meriaux, 2010) .....	5
2.2 - Tipos de Contato; (a) Incompleto e não conforme; (b) Completo;.....	6
2.3 - Contato entre dois corpos elasticamente similares submetidos a forças normais .....	7
2.4 - Zonas de adesão e escorregamento. ....	8
2.5 - Contato entre corpos elasticamente similares .....	9
2.6 - Semi-plano submetido a uma distribuição de tensão arbitrária .....	10
2.7 - Perfil de distribuição de tensões normais e cisalhantes para uma configuração de carregamento com $Q_{max}/fP=0.62$ .....	13
2.8 - Variação da Carga Q com o tempo .....	14
2.9 - Variação das tensões cisalhantes superficiais nos instantes de 1 a 5 da Figura 2.8. $Q_{max}/fP=0.62$ .....	15
2.10 - Efeito da carga remota de fadiga sobre o carregamento da Figura 2.9 com $\sigma_{B,max}/p_0=0.4$ .....	16
2.11 - Amplitude do campo de tensões sob a superfície para o alumínio no instante de carga cisalhante máxima com $Q_{max}/fP=0.62$ , $\sigma_{B,max}/p_0=0.4$ em $x/a=-1$ . ....	19
3.1 - Possibilidades de Configurações de Contato (Fonte: ABAQUS Analysis User's Manual, 2011) .....	23
3.2 - Formulações de Atrito (a) Formulação Variacional; (b) Multiplicador de Lagrange; (c) Método da Penalidade.....	24
3.3 - Tipos de Elementos; (a) Lineares e (b) Quadráticos .....	27
3.4 - Campo de deslocamentos no domínio do elemento; (a) Linear e (b) Quadrático ...	27
3.5 - Campo de Tensões arbitrário no contato entre dois cilindros planos com elementos (a) Lineares e (b) Quadráticos.....	28
4.1 - Dispositivos do laboratório de Mecânica dos Materiais da UnB. (a) MTS Systems 810; (b) Estrutura de aplicação da carga de <i>fretting</i> .....	29
4.2 - Configuração da aplicação dos carregamentos (a) Modelo do Contato; (b) Histórico de carregamento .....	30
4.3 - Modelagem do Contato, sapata com R=70mm e espécime com espessura 6.5mm .....	31
4.4 - Condições de contorno de movimento aplicadas ao problema .....	32
4.5 - Carregamentos aplicados ao problema .....	33
4.6 - Modelo do problema com condições de contorno.....	33
4.7 - Comprimento exposto da sapata (a) Modelo 3D do aparato de <i>fretting</i> ; (b) Vista frontal amplificada do modelo .....	34
4.8 - Efeito do comprimento exposto da sapata .....	34
4.9 - Malhas usadas na análise. (a) 10 Elementos; (b) 20 Elementos; (c) 40 Elementos; (d) 80 Elementos e (e) 160 Elementos.....	35
4.10 - Determinação do semi-comprimento médio do contato e seu respectivo erro.....	36
4.11 - Determinação do semi-comprimento da zona de adesão e seu respectivo erro....	36
4.12 - Determinação do deslocamento da zona de adesão .....	37
4.13 - Convergência do tamanho do contato .....	38
4.14 - Configuração final da malha do modelo contendo 160 elementos lineares na região de contato .....	40
5.1 - Distribuição de pressão ao longo do contato para o alumínio. ....	43
5.2 - Distribuição de tensões cisalhantes ao longo do contato para o alumínio em diferentes instantes de carregamento com $Q_{max}/fP=0.62$ .....	43

5.3 - Distribuição da tensão cisalhante máxima com carga remota para o alumínio com $Q_{max}/fP=0.62$ e $\sigma_{B,max}/p_0=0.40$ .	44
5.4 - Distribuição das tensões cisalhantes com presença de carga remota para o alumínio em diferentes instantes de carregamento com $Q_{max}/fP=0.62$ e $\sigma_{B,max}=0.40$	44
5.5 - Amplitude das componentes de tensão sob a superfície para uma sapata de alumínio em $x/a=-1$ , $Q_{max}/fP=0.62$ e $\sigma_{B,max}=0.4$ .	45
5.6- Efeitos do comprimento exposto de uma sapata de alumínio no instante de carga cisalhante máxima com $Q_{max}/fP=0.62$ e sem tensão remota de fadiga	47
5.7 - Efeitos do comprimento exposto para uma sapata de aço no instante de carga cisalhante máxima com $Q_{max}/fP=0.62$ e sem tensão remota de fadiga	47
5.8 - Efeitos do comprimento exposto para uma sapata de alumínio com $W=10mm$ no instante de carga cisalhante máxima com $Q_{max}/fP=0.62$ e sem tensão remota de fadiga	48
5.9 - Translação da zona de adesão para sapatas de alumínio com diversas alturas e larguras no instante de carga cisalhante máxima com $Q_{max}/fP=0.62$ e sem carga remota de fadiga	49
5.10 - Metodologia de medição da rotação da Sapata	49
5.11 - Rotação de sapatas de alumínio com diversas alturas e larguras no instante de carga cisalhante máxima com $Q_{max}/fP=0.62$ e sem carga remota de fadiga	50
5.12 - Efeito da Rigidez do Material sobre a rotação de uma sapata com $H=10mm$ no instante de carga cisalhante máxima com $Q_{max}/fP=0.62$ e sem carga remota de fadiga	50
5.13 - Variação do ângulo de rotação com a relação $H/W$ para sapatas de alumínio com $Q_{max}/fP=0.62$	51
5.14 - Efeito da tensão remota de fadiga sobre a rotação de uma sapata de alumínio com $H=10mm$ com $Q_{max}/fP=0.62$ e na curva que representa os dados com carga remota de fadiga $\sigma_{B,max}/p_0=0.4$ .	52
5.15 - Variação da componente de tensão $\sigma_{xx}$ em $x/a=1$ para diferentes espessuras do espécime	53
5.16 - Componente de Tensão $\sigma_{xx}$ em $x/a=1$ para espécime com espessura $b/a=3$ submetido apenas à carga normal	54
5.17 - Componente de Tensão $\sigma_{xx}$ em $x/a=1$ para espécime com espessura $b/a=5$ submetido apenas à carga normal	54
5.18 - Componente de Tensão $\sigma_{xx}$ em $x/a=1$ para espécime com espessura $b/a=10$ submetido apenas à carga normal	55
5.19 - Componente de Tensão $\sigma_{xx}$ em $x/a=1$ para espécime com espessura $b/a=200$ submetido apenas à carga normal	55
5.20 - Variação da componente de tensão $\sigma_{xx}$ ao longo da superfície do contato ( $y/a=0$ ) para diferentes semi-espessuras de contato.	56
5.21 - Componente de tensão $\sigma_{xx}$ analítica e numérica ao longo da superfície do contato ( $y/a=0$ ), apenas sob carregamento normal para (a) $b/a=3$ , (b) $b/a=5$ , (c) $b/a=10$ e (d) $b/a=200$ (comparada à solução de semi-plano infinito)	57
5.22 - Erros na amplitude da componente de tensão $\sigma_{xx}$ para corpos de alumínio com espessura finita comparados à solução de semi-plano infinito em $x/a=-1$ , $Q_{max}/fP=0.62$ e $\sigma_{B,max}/p_0=0.4$	59

## LISTA DE TABELAS

2.1 - Tensões cisalhantes atuantes em cada região na superfície de contato durante a variação da carga cisalhante com o tempo .....	14
2.2 - Sinais das Eq.(48) e Eq.(49) .....	19
3.1 - Erros associados a cada configuração de contato (Fonte: ABAQUS Analysis User's Manual, 2011).....	23
4.1 - Parâmetros usados na modelagem numérica.....	30
4.2 - Propriedades dos materiais ensaiados .....	30
4.3 - Convergência da pressão de pico .....	37
4.4 - Convergência da semi-largura do contato "a" .....	38
4.5 - Convergência da semi-largura da zona de adesão "c" .....	39
5.1 - Dados usados nas simulações .....	41
5.3 - Resultados das simulações numéricas .....	42
5.4 - Erro máximo no campo de tensões na superfície e sob ela para sapatas de diversos materiais em $x/a=-1$ e com $y/a \leq 0.4$ , $Q_{\max}/fP=0.62$ e $\sigma_{B,\max}=0.40$ .....	45
5.5 - Efeitos do comprimento exposto (H) da sapata no problema .....	46
5.6 - Translação da região de contato e rotação da sapata para diversas combinações de H e W48	
5.7 - Rotação da sapata para diversos materiais com H=10mm .....	51
5.8 - Erro do valor mínimo da componente de tensão $\sigma_{xx}$ e de sua localização .....	54
5.9 - Erro das soluções analíticas e numéricas de corpo fino quando comparadas à solução de semi-plano infinito em $y/a=0$ e $x/a=1$ .....	56
5.10 - Erro das soluções analítica e numérica de corpo fino comparadas à de semi-plano infinito para $y/a=0$ e $x/a=0$ .....	57
5.11 - Erro medidos em $y/a=0.25$ e $y/a=0$ comparados à solução de semi-plano infinito para corpos finos de alumínio em $x/a= -1$ , $Q_{\max}/fP=0.62$ e $\sigma_{B,\max}/p_0=0.4$ .....	58



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

$A$	Complacência Composta	[MPa <sup>-1</sup> ]
$a$	Semi-largura do contato	[mm]
$B$	Carga Remota de Fadiga por unidade de comprimento	[N/mm]
$b$	Semi-espessura do corpo de prova	[mm]
$c$	Semi-largura da zona de adesão para carga cisalhante máxima e mínima	[mm]
$c'$	Semi-largura da zona de adesão durante escorregamento reverso	[mm]
$c(u)$	Restrição no deslocamento	
$E$	Módulo de Elasticidade	[MPa]
$E_{eq}$	Módulo de Elasticidade Equivalente	[MPa]
$e$	Deslocamento da Zona de adesão para tensão remota de fadiga máxima	[mm]
$e'$	Deslocamento da zona de adesão para carregamento e descarregamento	[mm]
$f$	Coefficiente de Atrito	
$f_R$	Força de Reação	
$g$	Aceleração da gravidade	
$g(x)$	Deslocamento relativo na direção x	
$H$	Comprimento exposto da sapata	[mm]
$h$	Altura	
$h(x)$	Interpenetração de dois corpos	
$i$	Unidade Imaginária	
$k$	Rigidez	
$m$	Massa	
$N$	Número de Elementos	
$P$	Carga normal por unidade de comprimento	[N/mm]
$p$	Ordem de aproximação	
$p_0$	Pressão de pico	[MPa]
$p(x)$	Distribuição da pressão de contato	
$Q$	Carga tangencial por unidade de comprimento	[N/mm]
$Q_{max}$	Carga tangencial máxima	[N/mm]
$q(x)$	Distribuição de tensão cisalhante superficial	
$q'(x)$	Perturbação na distribuição de tensão cisalhante superficial	
$q''(x)$	Termo de correção para a distribuição de pressão cisalhante superficial	
$R$	Raio	[mm]
$R_{eq}$	Raio Equivalente	[mm]
$s$	Sinal de uma variável	
$t$	Tempo de processamento	[min]
$u$	Deslocamento	
$x,y,z$	Coordenadas do eixo cartesiano	
$W$	Largura da Sapata	[mm]

## Símbolos Gregos

$\delta$	Deslocamento da zona de contato	[mm]
$\varepsilon$	Parâmetro de Penalidade	
$\theta$	Rotação da Sapata	[rad]
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange	
$\mu$	Módulo de Rigidez	
$\nu$	Coefficiente de Poisson	
$\xi$	Variável de Integração	
$\Pi(u)$	Função Energia do Sistema massa-mola	
$\sigma$	Elemento de tensão da diagonal principal do tensor das tensões	
$\sigma(t)$	Tensor das Tensões	
$\sigma_B$	Tensão Remota de Fadiga	
$\tau$	Elemento de tensão das diagonais secundárias do tensor das tensões	
$\phi$	Função Potencial de Muskhelishvili	
$\phi'$	Derivada da função Potencial de Muskhelishvili	
$\omega$	Frequência Angular	

## Subscritos

$1,2$	Índices referentes aos corpos 1 e 2
$a$	Amplitude
$eq$	Equivalente
$max$	Máximo
$min$	Mínimo
$xx,yy,xy$	Componentes que indicam plano normal e sentido da componente de tensão

## Sobrescritos

$n$	Componente normal
$t$	Componente Tangencial
$\bar{\quad}$	Conjugado

## Siglas

EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
MEF	Método dos Elementos Finitos
PVF	Problema de valor de fronteira
sgn	Sinal de uma variável
UnB	Universidade de Brasília

# 1 INTRODUÇÃO

*Este capítulo visa apresentar o problema de fadiga por fretting, as principais situações onde ocorre e sua importância para a mecânica dos materiais. Além disso, estabelece o objetivo do presente estudo.*

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E O ESTADO DA ARTE

O termo *fretting* é utilizado para denotar um pequeno deslizamento relativo, normalmente da ordem de 1-50 $\mu$ m (Wittkowsky *et al.* 1998), entre duas superfícies em contato, submetidas a um carregamento normal. Esse movimento pode ser causado por vibração ou por um carregamento cíclico e é responsável por um aumento na rugosidade das superfícies, levando à nucleação de trincas. Essas trincas são concentradores de tensão, e em situações onde há uma carga remota de fadiga, podem levar a uma falha prematura do componente. Esse fenômeno é conhecido como fadiga por *fretting*.

Esse termo começou a ganhar significado na Engenharia em 1911 quando Eden *et al.* descreveu a falha de um espécime submetido à fadiga na região das garras de uma máquina de testes. Na época o fenômeno foi identificado como um dano superficial, o que hoje conhecemos como desgaste por *fretting*. Esses autores reportaram o aparecimento de resíduos de *fretting*, interpretado como óxido de ferro, na região da interface do contato.

Com o crescente conhecimento acerca do fenômeno percebeu-se que muitas aplicações de engenharia possuem componentes com características similares como, por exemplo, juntas parafusadas ou rebitadas, acoplamentos de eixos com engrenagens e/ou rolamentos, montagens por interferência e em cabos de aço na região próxima dos grampos em linhas de transmissão de corrente elétrica. Nas últimas décadas houve um crescente interesse da indústria aeronáutica pelo fenômeno devido à sua ocorrência na interface da montagem das palhetas com o disco de turbinas ou compressores (Ruiz *et al.*, 1984; Ruiz e Chen, 1986; Ruiz e Nowell, 2000) e em juntas rebitadas da fuselagem de aeronaves (Harish e Farris, 1998; Farris *et al.*, 2000).

Segundo Thomson (1998), 17% dos contratemplos nos sistemas de propulsão aeronáuticos são causados por fadiga por *fretting*. Levando em conta as exigências de um projeto aeronáutico como alta confiabilidade, baixo peso estrutural e longa vida operacional, pode-se dizer que esse setor da indústria é o mais afetado pelo *fretting* e, portanto, o mais interessado em seu estudo. Experimentos tem mostrado ainda que a fadiga por *fretting* pode causar uma redução de até 90% na resistência à fadiga de um material metálico (McDowell, 1953).

Devido à importância do problema para a indústria aeronáutica as configurações mais estudadas na fadiga por *fretting* são as montagens do tipo rabo de andorinha na junção das palhetas com o rotor de uma turbina Figura. 1.1(a) e juntas rebitadas Figura. 1.1(b).

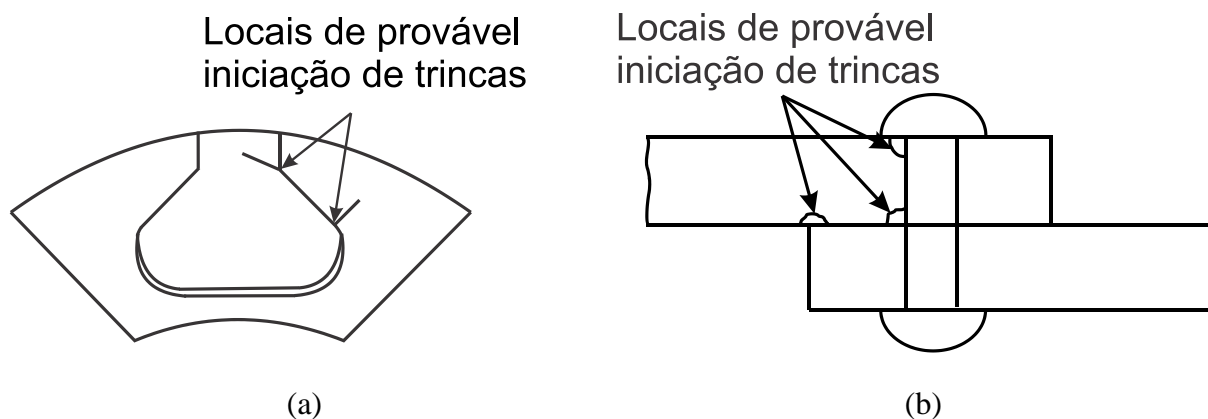


Figura 1.1 - Montagens ilustrando situações de configurações típicas onde ocorre de fadiga por fretting: (a) Conexão do tipo rabo de andorinha e (b) Junta Rebitada

Ainda hoje os efeitos que influenciam a fadiga por *fretting* não são completamente conhecidos. Tomlinson (1927) propôs que o deslocamento tangencial entre as superfícies em contato era o principal parâmetro que controlava este fenômeno. Posteriormente, Warlow-Davis (1941) observou que componentes submetidos a condições de *fretting* e depois carregados ciclicamente apresentam um decréscimo de 13 a 17% na resistência à fadiga. Já McDowell (1953) estendeu esse resultado para corpos submetidos conjuntamente à fadiga convencional e *fretting*, e observou que esses espécimes apresentavam uma redução de 50 a 80% na resistência à fadiga convencional.

A influência de outros efeitos como pressão no contato, amplitude do escorregamento relativo, condições ambientais e material só vieram a ser estudados posteriormente. Nishioka e Hirakawa (1969,1972) observaram que há uma faixa de deslocamentos tangenciais que acelerava o processo de fadiga por *fretting*. Esse efeito é bem resumido no diagrama (Figura 1.2) sugerido por Vingsbo e Söderberg (1988) da vida em fadiga em função da amplitude do escorregamento.

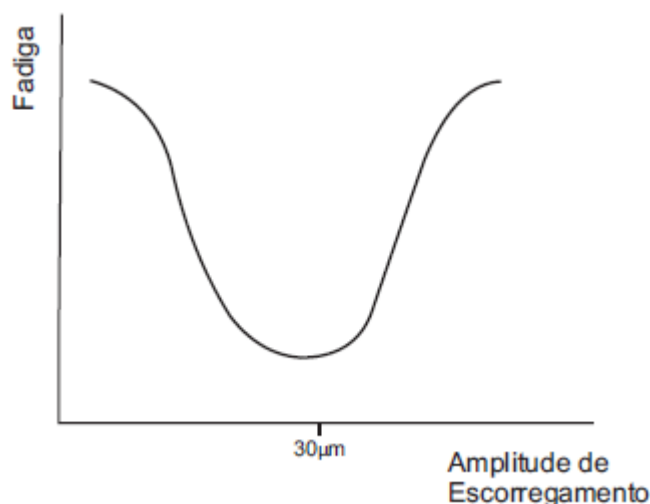


Figura 1.2 - Variação da vida em fadiga em função da amplitude de escorregamento. (Vingsbo e Söderberg, 1988)

Outro efeito que ganhou atenção particular em um estudo subsequente de Bramhall (1973) foi o tamanho do contato. Para isso foram realizadas uma série de experimentos mantendo-se o estado de

tensão constante e variando o tamanho do contato. Dessa forma concluiu-se que contatos inferiores a um tamanho crítico apresentavam vida infinita ( $>10^7$  ciclos), enquanto que para contatos maiores a falha ocorria. Mais tarde, Nowell (1988) e Araújo (2000) confirmaram a existência desse efeito para outros materiais.

Trabalhos recentes de Araújo e Mamiya (2003) e Araújo et al. (2004) previram a iniciação de trincas e a vida em fadiga de componentes sob condições de *fretting* através de um critério de fadiga em escala mesoscópica (escala do grão). Araújo e Mamiya (2003) observaram ainda a influência do tamanho do contato na vida sob fadiga por *fretting* e mostraram através de seus resultados a capacidade do critério em estimar corretamente a iniciação de trincas para maiores configurações de contato.

Atualmente pode-se dizer que existem três abordagens (Ciavarella e Demelio, 2001) de estudo dentro do campo de fadiga por *fretting*:

- Abordagem de microdeslizamentos;
- Abordagem baseada em mecânica da fratura;
- Abordagem que estabelece uma analogia com fadiga em entalhes;

Esta última propõe que o problema do *fretting* é equivalente a um problema de fadiga convencional na presença de um concentrador de tensões. Com isso o desgaste superficial passa a ter menos importância. Enquanto que o efeito da concentração de tensões na região do contato é maximizado. Giannakopoulos *et al.* (2000) observaram uma semelhança entre o campo de tensões do contato de uma sapata plana com cantos arredondados e um semi-plano com o de corpos entalhados e sugeriam que essa característica poderia ser usada para fazer tanto a previsão da vida em fadiga por *fretting*, quanto a sua resistência. Ainda dentro dessa abordagem está a teoria da distância crítica que propõe que a propagação de trincas pode ser evitada desde que haja uma rápida redução nos níveis de tensão à medida que se adentra no componente (Susmel, 2009). Portanto os altos níveis de tensão no contato não são representativos para a determinação da vida em fadiga por *fretting* e um valor médio, calculado nas proximidades do contato, conhecida como distância crítica, deve ser usado. Segundo Castro *et al.* (2011), se a tensão média não extrapolar um valor limite, as trincas não irão surgir ou, se surgirem, não se propagarão a ponto de levar o componente à falha.

Apesar dos esforços que tem sido feitos para entender o problema, falhas causadas por fadiga por *fretting* ainda ocorrem em situações reais. Muitas vezes a prática industrial é adotar medidas de caráter paliativo (Beard, 2004) cujos efeitos não são plenamente conhecidos. Segundo Nowell e Dini (2003), o objetivo maior da pesquisa da fadiga por *fretting* pode ser entendido como a previsão da vida em fadiga por *fretting*, sob dadas condições de contato, de um conjunto de parâmetros materiais medidos de forma independente. Na sua forma mais simples, isso pode envolver a medição da vida em *fretting* para um espécime com um acabamento superficial semelhante sob diferentes condições de geometria e carregamento.

## **1.2 OBJETIVO**

O objetivo principal deste trabalho é avaliar as limitações do modelo analítico para contato entre cilindros planos, fundamentado nas teorias de Hertz, Mindlin, Muskhelishvili e Hills & Nowell, na determinação do campo de tensão para um experimento real, onde as simplificações dessas teorias podem não se aplicar. Essa avaliação será feita por meios numéricos usando o software de elementos finitos ABAQUS.

Ao longo do trabalho também será elaborado um tutorial no mesmo software para modelar a configuração do ensaio de fadiga por fretting do laboratório de ensaios mecânicos da UnB.

## 2 MECÂNICA DO CONTATO

*Este capítulo apresenta o estado da arte do problema de contato bidimensional entre cilindros e a formulação matemática necessária para o desenvolvimento do projeto.*

### 2.1 TEORIA DO CONTATO

Muitos dos problemas reais de *fretting* envolvem geometrias de alta complexidade, carregamentos desconhecidos e outras condições de contorno de difícil determinação, como tamanho do contato, histórico do carregamento, existência ou não de similaridade elástica no contato, presença de uma fase entre as componentes normal e tangencial do carregamento, pontos do contato submetidos a efeitos de atrito, entre outros. Por isso é quase sempre impossível obter um modelo analítico para analisar problemas reais de Engenharia. Um exemplo clássico que envolve os problemas mencionados acima é a conexão entre as pás e o rotor de uma turbina aeronáutica conforme ilustrado na Figura 2.1.



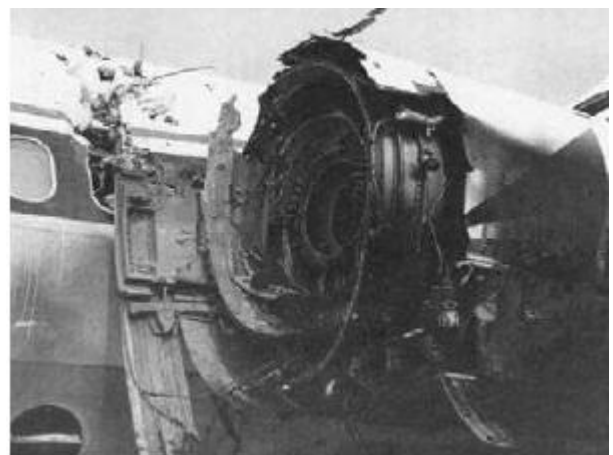
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.1 - Turbina Aeronáutica (a) Montagem pás e rotos; (b) Ruptura sem grandes danos da pá de uma turbina em 2007 em Dallas; (c) Ruptura em disco HTP de 1º estágio em voo American Airlines N330AA em 2006 e (d) Ruptura de disco em 1996 levou a morte de 2 pessoas (Fonte: Meriaux, 2010)

Nesses casos é preciso lançar mão de métodos numéricos, sendo um dos principais o método dos elementos finitos. Apesar desse tipo de modelagem apresentar uma série de dificuldades, ela é capaz de auxiliar o projetista em situações onde a formulação analítica não está disponível. Uma vez que o arquivo de entradas tenha sido modelado corretamente, um software de elementos finitos é capaz de fornecer todo o campo de tensões na vizinhança do contato além do seu histórico, a distribuição das tensões de contato, os pontos onde há escorregamento relativo e onde há aderência entre as superfícies e os efeitos de uma tensão remota quando houver. Esses parâmetros são de fundamental importância para a análise do problema uma vez que irão governar a iniciação e a propagação de trincas.

Em geral, quando se opta por trabalhar com um modelo numérico, é necessário verificar se todas as condições foram definidas corretamente. Isso é feito através da validação do modelo que normalmente o compara com a solução analítica do problema, quando houver. A solução analítica leva em conta geometrias idealizadas e bem definidas como cilindros e esferas, para que haja um controle maior sobre os parâmetros que influenciam o problema e para descartar efeitos tais como imprecisões de fabricação. Portanto é preciso entender em primeiro lugar os tipos de contatos existentes e suas características. Dois dos desses tipos são ilustrados na Figura 2.2.

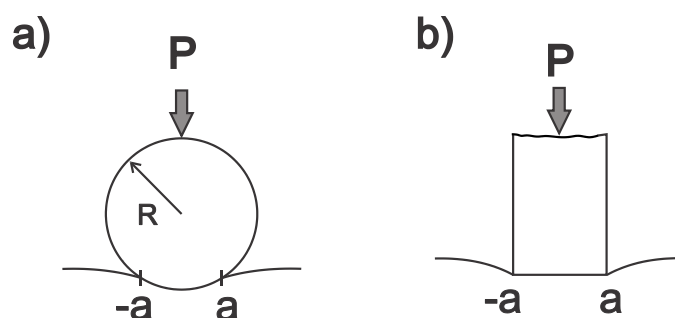


Figura 2.2 - Tipos de Contato; (a) Incompleto e não conforme; (b) Completo;

A Figura 2.2(a) ilustra um cilindro pressionado contra um semi-plano, formando um contato do tipo incompleto, uma vez que a extensão do contato não é definida geometricamente, sendo dependente do valor da carga  $P$  aplicada, e não conforme já que para valores pequenos de  $P$  a semi-largura do contato “ $a$ ” é muito inferior ao raio do cilindro,  $R$ . Isso implica que, quando  $a \ll R$ , a deformação do cilindro será restrita a um pequeno segmento de arco e portanto o cilindro pode ser aproximado como um semi-plano. Outra característica desse tipo de contato é que à medida que se afasta do centro do mesmo a pressão cai continuamente para zero. A vantagem de estudar o contato entre um cilindro com um semi-plano é que o problema possui uma solução analítica que será posteriormente apresentada. Além disso, essa solução só pode ser perturbada localmente, em casos onde houver imperfeições no acabamento superficial, não influenciando a distribuição de pressão. Por esses motivos essa é a geometria usada nas sapatas dos ensaios de fadiga por *fretting* no Laboratório de Ensaio Mecânicos da UnB; portanto, também será usada ao longo deste trabalho.



Os contatos ditos completos ocorrem quando o tamanho do contato não é influenciado pela carga  $P$ , conforme ilustrado na Figura 2.2(b). Aqui a inclinação da curva não é contínua nas extremidades do contato. Isso significa que pequenas falhas na usinagem das sapatas podem ter grande influência na distribuição de pressão. As configurações de contato não ficam restritas a apenas essas duas geometrias aqui apresentadas, porém, por não serem relevantes para esse estudo não serão apresentados, mas podem ser encontrados em Hills e Nowell (1994).

O próximo passo para formular o problema de *fretting* é entender o surgimento das tensões cisalhantes. Quando uma carga  $P$  é aplicada a dois corpos em contato é natural imaginar que os pontos no contato serão esmagados e sofrerão um deslocamento perpendicular à aplicação da carga  $P$ , no sentido de dentro para fora do contato, conforme ilustrado na Figura 2.3.

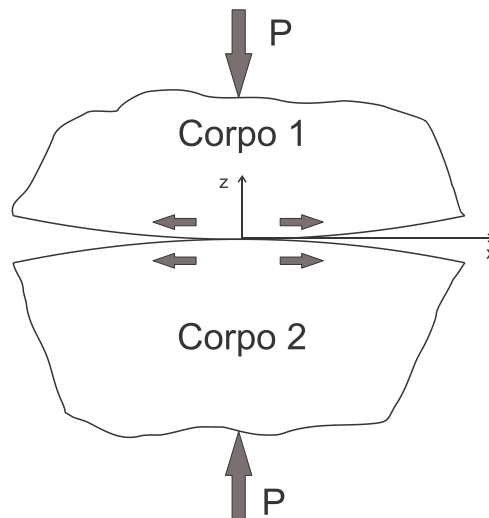


Figura 2.3 - Contato entre dois corpos elasticamente similares submetidos a forças normais

Porém, assumindo que os corpos sejam feitos do mesmo material (elasticamente similares), o deslocamento entre pontos equivalentes na superfície será idêntico, independente do coeficiente de atrito. Portanto não surgem tensões de atrito e a solução do problema continua a mesma.

Supondo agora a aplicação de uma força tangencial  $Q$ , como mostrado na Figura 2.4, suficientemente grande para causar escorregamento, ocorre o surgimento de uma tensão cisalhante  $q(x,y)$ , determinada pela Lei de Coulomb:

$$|q(x,y)| = -fp(x,y) \quad (1)$$

onde  $f$  é o coeficiente de atrito. Essas tensões cisalhantes causam o aparecimento de uma distribuição de pressão  $p(x,y)$  e, portanto, de um deslocamento normal. Porém como as tensões cisalhantes atuam em direções opostas e os corpos são elasticamente similares, o deslocamento de pontos equivalentes na superfície é, novamente, o mesmo. Em problemas de *fretting* as forças tangenciais geralmente não são suficientes para causar escorregamento, o que resulta na Eq. (2):

$$|Q| < fP \quad (2)$$

onde “P” é a força normal. Isso resulta no aparecimento de duas zonas distintas, uma de aderência e outra de escorregamento, ilustradas na Figura 2.4. A existência da zona de adesão é de fácil compreensão, uma vez que as forças tangenciais não são suficientes para causar escorregamento. Já a zona de escorregamento ocorre, pois, a medida em que se afasta do centro do contato a tensão normal tende para zero e portanto seria necessário um coeficiente de atrito infinito para prevenir o escorregamento. Portanto, dentro dessa zona, as tensões cisalhantes devem ser inferiores ao limite onde há escorregamento:

$$|q(x, y)| < -fp(x, y) \quad (3)$$

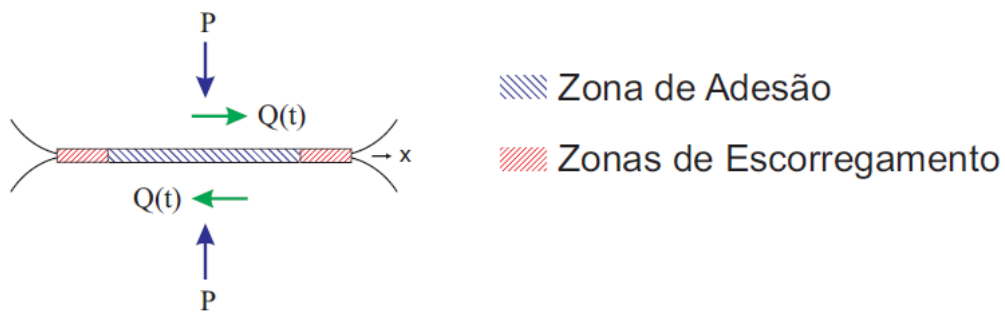


Figura 2.4 - Zonas de adesão e escorregamento.

Uma vez que as tensões cisalhantes dos corpos são iguais em magnitude, porém, com sentido contrário os deslocamentos normais induzidos serão os mesmos. Portanto, a distribuição de pressão continua sem ser afetada pelas tensões cisalhantes, o que torna o problema desacoplado.

## 2.2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS PLANOS

A metodologia para a formulação do problema consiste em determinar a resolver equações integrais que relacionam a distribuição de pressão  $p(x)$  com o deslocamento normal  $h(x)$ , conforme ilustrado na Figura 2.5, e a distribuição das tensões cisalhantes com o deslocamento tangencial relativo  $g(x)$ . Neste trabalho serão apresentadas apenas as equações que regem a relação entre essas variáveis. Mais detalhes referentes ao desenvolvimento dessas equações podem ser encontrados em Hills e Nowell (1994).

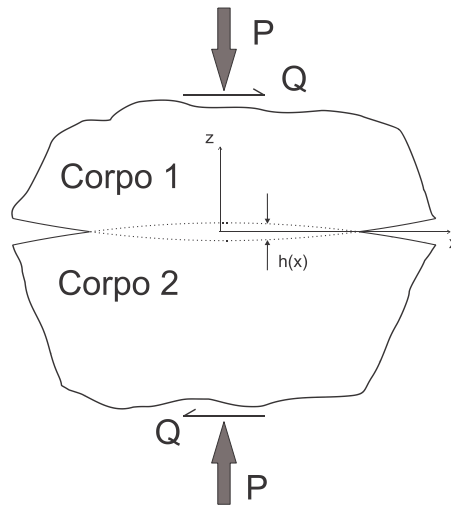


Figura 2.5 - Contato entre corpos elasticamente similares

Quando os dois corpos são elasticamente similares a solução pode ser obtida pela integração ao longo de todo o contato das Equações integrais (4) e (5):

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (4)$$

e,

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{q(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (5)$$

Sendo A a complacência composta e dada por:

$$A = 2 \left( \frac{\kappa + 1}{4\mu} \right) \quad (6)$$

onde  $\kappa=3-4\nu$  quando há estado plano de deformação,  $\nu$  é o coeficiente de *poisson* e  $\mu$  o módulo de rigidez.

## 2.3 POTENCIAL DE MUSKHELISHVILI

Em *fretting* também é importante compreender o campo de tensões sob a superfície, e como este se reduz à medida que se afasta desta. Uma das formas de se calcular esse campo de tensões é utilizando a formulação do potencial de Muskhelishvili (1953), Hills, Nowell e Sackfield (1993).

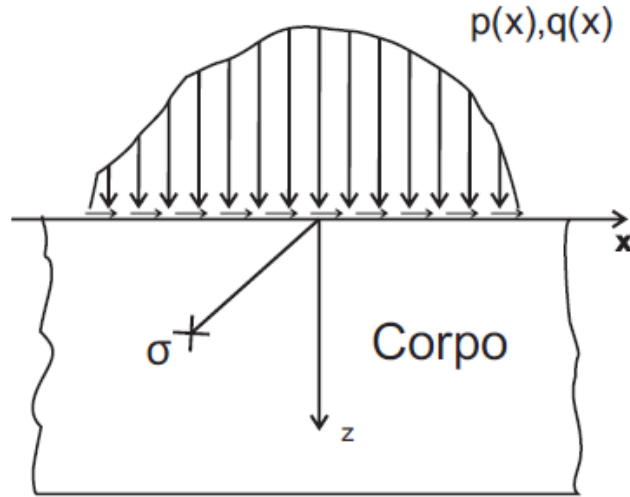


Figura 2.6 - Semi-plano submetido a uma distribuição de tensão arbitrária

Nesta formulação, na qual a posição é dada por uma coordenada complexa  $x+yi$ , o potencial pode ser escrito como mostrando na Eq.(7):

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{contato}} \frac{p(t) - iq(t)}{t - z} dt \quad (7)$$

onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são distribuições de tensões arbitrárias. Em condições de escorregamento essas distribuições são relacionadas pela Eq.(1). Assim a Eq. (7) pode ser reescrita como:

$$\phi(z) = \frac{1 - if}{2\pi i} \int_{\text{contato}} \frac{p(t)dt}{t - z} \quad (8)$$

Uma vez determinado o potencial o valor da tensão as componentes de tensão podem ser determinadas por:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})) \quad (9)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\tau_{xy} = 2((\bar{z} - z)\phi'(z) - \bar{\phi}(\bar{z}) - \phi(z)) \quad (10)$$

onde  $\Phi'(z)$  é dado pela diferenciação da função potencial com respeito a  $z$ ,  $\bar{\phi}(\bar{z})$  é o conjugado da função potencial e  $\bar{\phi}(\bar{z})$  é o conjugado da função potencial onde o argumento é substituído pelo conjugado de  $z$ .

Portanto, uma vez conhecida a distribuição de tensões na superfície a função potencial de Muskhelishvili pode ser calculada e o campo de tensões sob a superfície determinado. Essa formulação voltará a ser abordada na seção seguinte.

## 2.4 TEORIA DO CONTATO

### 2.4.1 CARGA NORMAL

A teoria clássica de contato que admite uma solução analítica é aplicável a problemas de contato entre cilindros paralelos e infinitamente longos. Essa configuração já foi adotada em testes de fadiga por outros pesquisadores (Nowell, 1988 e Araújo, 2000), uma vez que longe das extremidades do contato onde há severos concentradores de tensão, o problema é praticamente bidimensional e a solução plana fornece uma aproximação satisfatória. Essa configuração é ilustrada pela Figura 2.5 e os corpos são considerados como semi-planos elásticos. Dessa forma a teoria de Hertz (1882) prevê que quando uma carga normal é aplicada a corpos interpenetrantes, uma distribuição de pressão elíptica é desenvolvida:

$$p(x) = -p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (11)$$

onde  $p_0$  é o valor máximo da pressão no contato, também chamada de pressão de pico, que pode ser obtida a partir da condição de equilíbrio entre a pressão de contato e a Carga P aplicada:

$$P = - \int_{-a}^a p(\xi) d\xi \quad (12)$$

cuja solução é,

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (13)$$

onde  $a$  é o semi-comprimento do contato,

$$a = \sqrt{\frac{4PR_{eq}}{\pi E_{eq}}} \quad (14)$$

e  $R_{eq}$  e  $E_{eq}$  são definidos por:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \quad (15)$$

$$E_{eq} = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\right)^{-1} \quad (16)$$

onde  $R$  é o raio dos cilindros,  $E$  o módulo de elasticidade dos corpos e  $\nu$  o coeficiente de *poisson*.

Muitas vezes, incluindo este trabalho, também convém expressar a carga P em função da pressão de pico. Isso pode ser feito integrando a área sob a distribuição de contato de  $-a$  até  $a$ , o que resulta em:

$$P = \frac{\pi \cdot R_{eq} \cdot p_0^2}{E_{eq}} \quad (17)$$

Isso será importante posteriormente, pois no ABAQUS é preciso conhecer a carga que deverá ser aplicada para gerar determinada distribuição de pressão.

## 2.4.2 CARGA TANGENCIAL

Conforme foi explicado na seção 2.1, o carregamento cisalhante existente em problemas de *fretting* é, em geral, inferior ao valor limite que causa escorregamento total, o que causa o aparecimento das zonas de adesão e de escorregamento. A zona de adesão, também conhecida como zona de aderência, está restrita ao interior do contato, conforme ilustrado na Figura 2.4, e tem seus limites determinados por  $|x| \leq c$ , estando a zona de escorregamento limitada pela zona de adesão por um lado, e pelo fim do contato do outro ( $c \leq |x| \leq a$ ). Esse carregamento também é responsável pelo aparecimento de tensões cisalhantes na superfície, como foi descrito por Cattaneo (1938) e de forma independente por Mindlin em 1949. Portanto parece conveniente modelar a distribuição de tensões cisalhantes como uma perturbação da solução de escorregamento total:

$$q(x) = fp_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} - q'(x) \quad (18)$$

Para se determinar a perturbação  $q'(x)$  é necessário resolver a Eq.(5) levando em consideração o fato de não haver movimento relativo na direção do contato entre pontos correspondentes da zona de adesão dos corpos em contato, ou seja:

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in |x| \leq c \quad (19)$$

Isso resulta em:

$$q'(x) = fp_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad (20)$$

Logicamente essa função assume valor nulo na zona de escorregamento já que não há perturbação:

$$q'(x) = 0 \quad \forall x \in c \leq |x| \leq a \quad (21)$$

Sendo que o tamanho da zona de adesão pode ser calculado igualando a carga normal aplicada à integral da distribuição de tensões cisalhantes:

$$Q = - \int_{-a}^a q(\xi) d\xi \quad (22)$$

O que resulta em:

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left| \frac{Q}{fP} \right|} \quad (23)$$

A Figura 2.7 traz um perfil de distribuição de pressão e de tensões cisalhantes típico, onde é possível observar uma diminuição nas tensões cisalhantes dentro da zona de adesão causadas pela perturbação da Eq.(19):

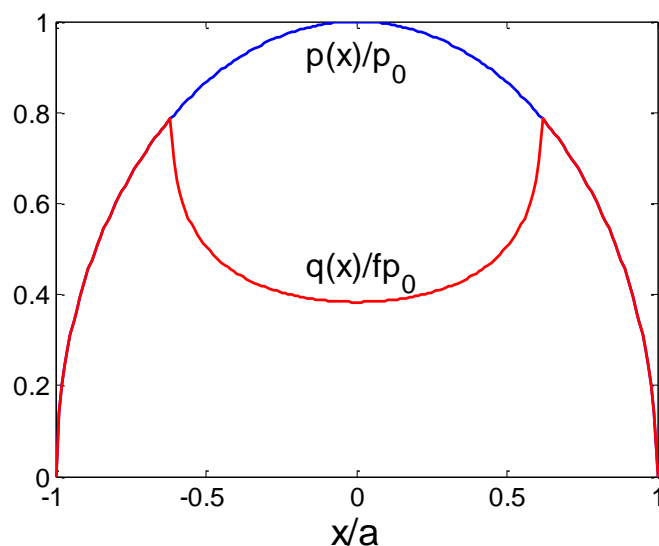


Figura 2.7 - Perfil de distribuição de tensões normais e cisalhantes para uma configuração de carregamento com  $Q_{\max}/fP=0.62$

Porém, essa configuração apresentada só é válida quando a carga cisalhante atinge seu valor máximo no ciclo de carregamento. Convém conhecer o que ocorre também no carregamento reverso, para ser capaz de determinar o campo de tensões em qualquer instante de carregamento. A resolução desse problema será brevemente descrita neste trabalho, podendo a formulação completa ser encontrada em Hills *et al.* (1993).

Para essa análise é importante recordar que as condições de contorno na zona de adesão e na zona de escorregamento são descritas pelas Eq.(1) e Eq.(3). Além disso, as tensões cisalhantes sempre apontam na direção oposta ao movimento da sapata:

$$\text{sgn}(q(x)) = -\text{sgn}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) \quad (24)$$

Para compreender melhor o fenômeno de escorregamento reverso vamos assumir um carregamento tangencial senoidal em função do tempo descrito pela Figura 2.8. Esse carregamento pode ser dividido em três partes. Na primeira, entre o ponto 0 o ponto 1 o carregamento parte do zero e cresce até atingir seu valor máximo. Nessa parte as Eq.(18) a Eq.(21) são válidas. Porém durante o descarregamento de 1 para 1', o deslocamento relativo muda de sinal, o que viola a Eq.(24) e causa adesão em todo o contato. À medida que o descarregamento continua até o ponto 2, ocorrerá um escorregamento reverso a partir dos limites externos do contato. Portanto o que se formará é uma nova zona de escorregamento ( $c' \leq |x| \leq a$ ), onde as tensões cisalhantes irão mudar de sinal. Logo, mantendo a idéia de modelar o problema como perturbações da solução de escorregamento total, será necessário fazer uma nova correção para prevenir o escorregamento na zona de adesão:

$$q''(x) = 2fp_0 \frac{c'}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2} \quad (25)$$

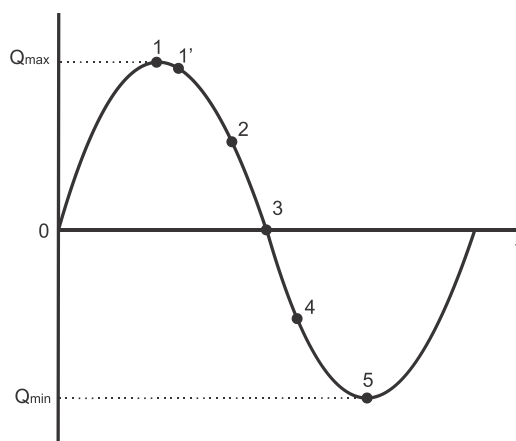


Figura 2.8 - Variação da Carga Q com o tempo

É interessante ressaltar que devido a mudança do deslocamento relativo o fator  $q'(x)$  deixa de ser descontado da solução com escorregamento total e passa ser somado às tensões cisalhantes, dobrando-as, por esse motivo é necessário colocar o fator de dois na nova perturbação  $q''(x)$ . A Tab. 2.1 traz as distribuições de tensões cisalhantes para cada uma das regiões durante o descarregamento.

Tabela 2.1 - Tensões cisalhantes atuantes em cada região na superfície de contato durante a variação da carga cisalhante com o tempo

$q(x)/fp_0$	Zona de Aplicação
$-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$	$c' <  x  \leq a$
$-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2}$	$c <  x  \leq c'$
$-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2} - \frac{c}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$	$ x  \leq c$



O tamanho da nova zona de adesão em escorregamento reverso pode ser calculado utilizando novamente a condição de equilíbrio:

$$\frac{c'(t)}{a} = \sqrt{1 - \left( \frac{Q_{max} - s_1 Q(t)}{2fP} \right)^2} \quad (26)$$

Onde  $s_1=1$  para descarregamento e carga mínima e  $s_1= -1$  para recarregamento e carga máxima.

A Figura 2.9 mostra a distribuição de tensões no contato para os instantes de 1 a 5 da Figura 2.8. É importante notar que nos instantes de carga cisalhante máxima, 1 e 5, a tensão cisalhante é simétrica. Já no ponto onde a carga cisalhante é nula, 3, a tensão cisalhante não é. Isso porque elas estão em equilíbrio, significando que o contato não é linear. Portanto tanto as tensões cisalhantes quanto as tensões e deformações dos corpos em contato dependem da história de carregamento. Em resumo sempre que o princípio das perturbações for aplicado a problemas de contato com atrito, deve-se tomar o devido cuidado.

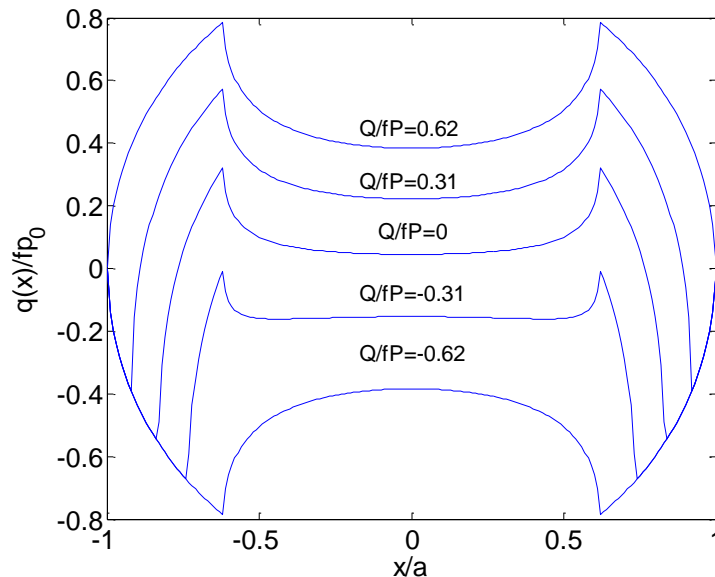


Figura 2.9 - Variação das tensões cisalhantes superficiais nos instantes de 1 a 5 da Figura 2.8.  $Q_{max}/fP=0.62$

### 2.4.3 O EFEITO DA CARGA REMOTA DE FADIGA

Conforme discutido na introdução os problemas de *fretting* normalmente ocorrem na presença de uma carga remota de fadiga que pode estar aplicada a um dos dois corpos. No Laboratório de Ensaio Mecânicos da Universidade de Brasília, a aplicação dessa carga remota é feita em fase com o carregamento cisalhante, como será explicado no capítulo 4 deste trabalho. Por esse motivo será abordado nesta seção apenas situações onde essas cargas são aplicadas em fase:

$$\sigma_B = \sigma_{B,max} \sin(\omega t) \quad (27)$$

Essa tensão remota irá provocar um deslocamento na zona de adesão ( $e$ ) nos instantes de carga cisalhante máxima e mínima, e um deslocamento ( $e'$ ) durante o descarregamento e o recarregamento. Detalhes sobre o cálculo desses deslocamentos podem ser encontrados em Hills *et al.* (1993).

$$\frac{e}{a} = \frac{\sigma_{B,max}}{4fp_0} \quad (28)$$

$$\frac{e'}{a} = \frac{\sigma_{B,max} - s_1\sigma_B(t)}{8fp_0} \quad (29)$$

A Figura 2.10 mostra o deslocamento da zona de adesão causado pelo acréscimo da tensão remota de fadiga sobre o mesmo carregamento cisalhante da Figura 2.9.

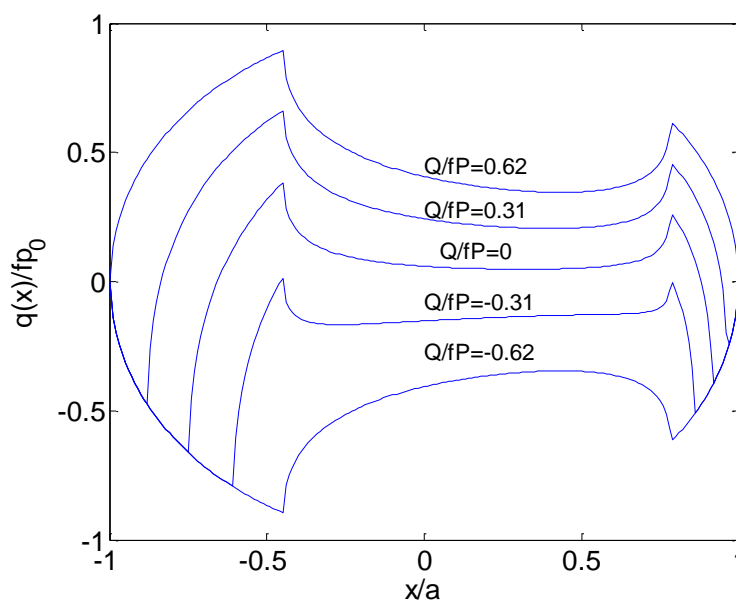


Figura 2.10 - Efeito da carga remota de fadiga sobre o carregamento da Figura 2.9 com  $\sigma_{B,max}/p_0=0.4$

É importante notar que valores muito grandes da tensão remota de fadiga irão causar escorregamento reverso a partir das extremidades do contato. Isso ocorrerá quando as condições das Eq.(30) e Eq.(31) forem violadas. Nesses casos o problema não apresenta solução analítica e precisa ser calculado numericamente (Nowell e Hills, 1987).

$$e + c < a \quad (30)$$

$$e' + c' < a \quad (31)$$

## 2.5 CAMPO DE TENSÕES SOB O CONTATO

Uma vez determinada a distribuição de pressão no contato é possível determinar o campo de tensões substituindo a Eq.(11) na Eq.(7), encontrando assim o potencial de Muskhelishvili:

$$\phi(z) = \frac{-(1-if)p_0}{2\pi i} \frac{1}{a} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-x^2} dx}{x-z} \quad (32)$$

Cujo resultado da integração é dado por:

$$\phi(z) = \frac{-p_0}{2a} (i+f) \left( z - s\sqrt{z^2-a^2} \right) \quad (33)$$

E a derivada, o conjugado e o conjugado do argumento conjugado ( $\bar{\phi}(\bar{z})$ ) são dados respectivamente por:

$$\phi'(z) = \frac{-p_0}{2a} (i+f) \left( 1 - s \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} \right) \quad (34)$$

$$\bar{\phi}(z) = \frac{-p_0}{2a} (-i+f) \left( z - s\sqrt{z^2-a^2} \right) \quad (35)$$

$$\bar{\phi}(\bar{z}) = \frac{-p_0}{2a} (-i+f) \left( \bar{z} - s\sqrt{\bar{z}^2-a^2} \right) \quad (36)$$

Onde  $s = \text{sgn}(x)$  é o sinal de  $x$  e  $z = x + iy$  ( $i$  sendo a unidade imaginária) a coordenada complexa da posição conforme colocado na Figura 2.6. Dessa forma o campo de tensões pode ser calculado somando-se as Eq.(9) e Eq.(10) e substituindo as funções das Eq.(33) a Eq.(36):

$$\zeta(z) = \sigma_{yy} + i\tau_{xy} = (\bar{z} - z)\phi'(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) - \bar{\phi}(z) \quad (37)$$

Onde as componentes de tensão serão dadas por:

$$\sigma_{yy} = \text{Real}(\zeta(z)) \quad (38)$$

$$\tau_{xy} = \text{Imag}(\zeta(z)) \quad (39)$$

$$\sigma_{xx} = 2 \left( \phi(z) - \bar{\phi}(\bar{z}) \right) - \sigma_{yy} \quad (40)$$

Nessas equações, as componentes de tensão que são representadas, são na verdade composições de componentes normal e tangencial causadas pelas cargas P e Q:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^n + \sigma_{xx}^t \quad (41)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^n + \sigma_{yy}^t \quad (42)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^t \quad (43)$$

Para separar as componentes n e t, basta resolver as Eq.(9) e Eq.(10) supondo um coeficiente de atrito nulo ( $f=0$ ). Não havendo atrito a componente tangencial desaparece, pois não surgirão tensões cisalhantes no contato. Dessa forma é possível calcular a componente normal, que podem ser usada posteriormente para calcular as componentes tangenciais a partir das Eq.(41) a Eq.(43). As componentes normais podem ser expressas por:

$$\zeta(z) = \sigma_{yy}^n + i\tau_{xy}^n = (\bar{z} - z)\phi'(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) - \bar{\phi}(z) \quad (44)$$

$$\sigma_{yy}^n = \text{Real}(\zeta(z)) \quad (45)$$

$$\tau_{xy}^n = \text{Imag}(\zeta(z)) \quad (46)$$

$$\zeta(z) = \sigma_{yy} + i\tau_{xy} = (\bar{z} - z)\phi'(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) - \bar{\phi}(z) \quad (47)$$

As componentes de tensão calculadas utilizando o potencial de Muskhelishvili podem então ser aplicadas para determinar o campo de tensão cíclico na região do contato. Esse campo é obtido a partir da superposição das componentes  $p(x)$  e  $q(x)$  e pelas perturbações  $q'(x)$  e  $q''(x)$ . Esse campo de tensões pode ser dividido em quatro regiões, de carregamento máximo, carregamento mínimo, descarregamento e recarregamento. O tensor das tensões para o problema de contato sob escorregamento parcial é dado por:

$$\frac{\sigma\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} = \frac{\sigma^n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} \pm f \frac{\sigma^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} \mp f \frac{c}{a} \frac{\sigma^t\left(\frac{x-e}{c}, \frac{y}{c}\right)}{p_0} + \frac{\sigma_B(t)}{p_0} \quad (48)$$

Para os instantes de carregamento máximo e mínimo, e

$$\begin{aligned} \frac{\sigma\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} &= \frac{\sigma^n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} \pm f \frac{\sigma^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} \mp 2f \frac{c'(t)}{a} \frac{\sigma^t\left(\frac{x-e'(t)}{c'(t)}, \frac{y}{c'(t)}\right)}{p_0} \\ &\pm f \frac{c}{a} \frac{\sigma^t\left(\frac{x-e}{c}, \frac{y}{c}\right)}{p_0} + \frac{\sigma_B(t)}{p_0} \end{aligned} \quad (49)$$

para o carregamento e descarregamento. Onde,

$$\sigma_B = \sigma_B(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

e os sinais das Eq.(48) e Eq.(49) são dados pela Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Sinais das Eq.(48) e Eq.(49)

	1°	2°	3°	4°	5°
Q(t)=Q <sub>máx</sub>	+	+	-	+	<b>0</b>
Q(t)=Q <sub>mín</sub>	+	-	+	+	<b>0</b>
Descarregamento	+	-	+	-	+
Recarregamento	+	+	-	+	+

Para a obtenção das componentes  $\sigma^t[(x-e)/c,y/c]$  e  $\sigma^t[(x-e'(t))/c'(t),y/c'(t)]$  basta calcular as componentes da mesma forma que apresentado no capítulo mas substituindo  $x/a$  por  $[(x-e)/c]$  ou  $[(x-e'(t))/c'(t)]$  e  $y/a$  por  $y/c$  ou  $y/c'(t)$ , respectivamente.

Por fim a componente de tensão  $\sigma_{zz}$  é uma composição das componentes  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  quando assumida a condição de estado plano de deformação. Essa relação é apresentada na Eq. (51). A Figura 2.11 traz as amplitudes de cada componente de tensão para um contato envolvendo corpos de alumínio na posição mais crítica ( $x/a=-1$ ) e com  $Q_{\max}/fP=0.62$  e  $\sigma_{B,\max}/p_0=0.4$ .

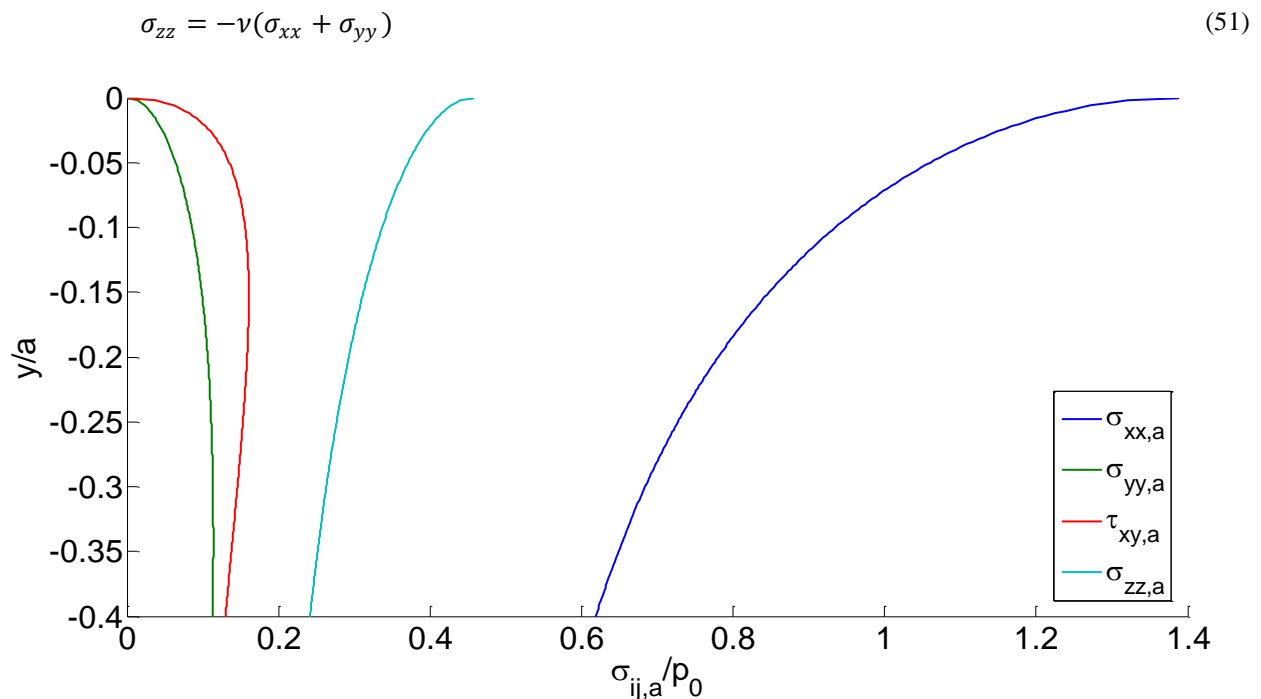


Figura 2.11 – Amplitude do campo de tensões sob a superfície para o alumínio no instante de carga cisalhante máxima com  $Q_{\max}/fP=0.62$ ,  $\sigma_{B,\max}/p_0=0.4$  em  $x/a=-1$ .

## 3 METODOLOGIA

*Este capítulo contém uma introdução sobre o Método dos Elementos Finitos, apresenta o pacote comercial que será usado ao longo do projeto e traz detalhes sobre a modelagem do problema no software.*

Para alcançar os objetivos propostos optou-se por trabalhar com o Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando o pacote comercial ABAQUS.

### 3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Grande parte dos problemas de engenharia encontrados no dia-a-dia podem ser expressos através de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs). Porém apenas uma pequena fração desses problemas apresenta uma solução analítica. Nesses casos é necessário lançar mão de soluções numéricas que aproximam a solução, ficando como papel do engenheiro analisar os resultados e verificar se as simplificações usadas e o erro associado aos resultados não comprometem a solução do problema. Nesse âmbito aparece o Método dos Elementos Finitos (MEF) que consiste basicamente em diversos métodos numéricos para aproximar a solução de problemas descritos por EDOs e EDPs e limitados por condições de contorno.

A origem dos MEF data da época da 2ª guerra mundial (ver site da EEL<sup>1</sup>), quando um artigo publicado pelo matemático Courant abordava esse assunto. Porém devido as limitações da computação da época esse artigo foi deixado de lado pela comunidade científica durante muitos anos. Os primeiros trabalhos práticos envolvendo o MEF só começaram na década de 50, quando engenheiros o aplicaram no desenvolvimento de aviões a jato na Boeing. Em 1956, M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp publicaram um dos primeiros artigos que delineavam as idéias do método. Esse artigo ainda não fazia referência ao termo MEF, que só foi utilizado pela primeira vez por R. W. Clough em um artigo subsequente.

Com o desenvolvimento com computadores eletrônicos nas universidades e institutos de pesquisa norte americanos e em conjunto com o contexto histórico da guerra fria o MEF ganhou ampla aplicação em estratégias à segurança americana, como na pesquisa nuclear e na indústria aeroespacial.

---

<sup>1</sup> [http://www.demar.eel.usp.br/metodos/mat\\_didatico/Methodo\\_dos\\_Elementos\\_Finitos.pdf](http://www.demar.eel.usp.br/metodos/mat_didatico/Methodo_dos_Elementos_Finitos.pdf)

O primeiro software de elementos finitos foi financiado pela NASA em 1965 e liderado por Dick MacNeal. Esse pacote, batizado de NASTRAN, permitia a análise de tensões e deformações, cálculo de vigas, de problemas de cascas e placas, análise de estruturas complexas, como asas de aviões e análise de vibrações em duas e três dimensões. Essa primeira versão do programa continha diversas falhas, que foram posteriormente corrigidos por Dick MacNeal e Bruce McCormick, que fundaram uma empresa de software e comercializaram o programa com o nome de MS-NASTRAN. Na mesma época John Swanson desenvolvia outro programa de MEF para a análise de reatores nucleares que posteriormente começou a ser comercializado com o nome de ANSYS.

Posteriormente vieram outros programas como o ALGOR, ABAQUS e COSMOS como programas de MEF de uso geral. Atualmente o MEF pode ser aplicado nas mais diversas áreas da Engenharia como na ciência dos materiais, mecânica dos fluidos, transferência de calor, eletromagnetismo, entre outras.

A razão pela qual o MEF pode ser aplicado em problemas de valor de fronteira (PVF) envolvendo EDOs e EDPs está baseada nas duas formas de resolução que esses problemas apresentam. A primeira forma, conhecida como forma forte, ou clássica, consiste na resolução direta das equações que governam o problema físico e suas condições de contorno. Para isso pode-se lançar mão da separação de variáveis, transformada de Laplace, etc. Infelizmente poucos são os casos na Engenharia onde se pode utilizar a forma forte uma vez que ela é aplicável apenas em problemas contínuos.

Por outro lado, a forma fraca, ou variacional, é outra forma de escrever a formulação utilizando as integrais das equações diferenciais que governam o problema físico. Na engenharia mecânica a forma variacional também é conhecida como o princípio do trabalho virtual. É possível demonstrar (Hughes 1987) que essas formas são equivalentes e admitem uma única e mesma solução. A vantagem em se modelar o problema utilizando a forma variacional é o fato de ela ser capaz solucionar problemas não contínuos. A resolução da forma fraca pode ser obtida através de métodos de aproximação como o método de Galerkin, o método dos mínimos quadrados e o método da colocação.

Esse capítulo traz apenas uma introdução ao MEF e seu embasamento teórico, não sendo o foco principal do estudo. Mais detalhes acerca de métodos numéricos associados ao MEF podem ser encontrados em Hughes (1987).

## **3.2 O ABAQUS**

O ABAQUS é um pacote comercial de elementos finitos para aplicações diversas que começou a ser desenvolvido no final da década de 70 pela ABAQUS Inc. Em 2005, a Dassault Systèmes, que

também comercializa o SolidWorks e o Catia, adquiriu a ABAQUS Inc. (ver site: Dassault Systèmes, News and Media<sup>2</sup>) com uma proposta de criar uma plataforma científica de simulação unificada.

Assim como os demais pacotes de elementos finitos o ABAQUS consiste em três etapas para a solução de um problema: Pré-processamento ou modelagem, processamento ou análise de elementos finitos e o pós-processamento.

O pré-processamento envolve criar um arquivo de entrada que contém a geometria em estudo e onde são definidas as diversas propriedades do modelo que se deseja adotar. Nessa etapa, ocorre a programação do algoritmo, que pode ser feita utilizando a interface gráfica do ABAQUS ou através de comandos escritos em Python. Ela é composta basicamente por oito passos:

- Partes – Onde são desenhadas as geometrias do problema;
- Propriedades – onde se definem as propriedades dos materiais que estão sendo usados e o seu comportamento (elástico ou plástico, por exemplo);
- Montagem – Em problemas que envolvem mais de um corpo as diferentes partes são montadas para formar o conjunto;
- Passos – Define a sequência de aplicação das cargas e das condições de contorno e em quantos incrementos elas serão aplicadas;
- Interações – Define os tipos de interações pertinentes ao problema. No caso de um problema de contato é aqui que se aplica o comportamento tangencial e normal dos corpos;
- Carga – Onde são aplicados os esforços (Força concentrada, força distribuída, etc.) e as condições de contorno (Engaste, simetria axial, etc.);
- Saída de dados – dados que se deseja que o problema retorne após a execução da simulação;
- Malha – Define a discretização das regiões em elementos finitos. Esses elementos variam em forma (Triangular, Quadrangular, Hexagonal), distribuição (livre, estruturada, varrida) e tipo (Linear e Quadrático);

No processamento o problema descrito no pré-processamento é resolvido através do uso de equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais.

Por fim, na etapa de pós-processamento o ABAQUS retorna os campos de tensões, deformações, status de contato, através de uma interface renderizada, onde é possível realizar animações, plotar gráficos, etc.

---

<sup>2</sup> [http://www.3ds.com/company/news-media/press-releases-detail/release//single/873/?no\\_cache=1](http://www.3ds.com/company/news-media/press-releases-detail/release//single/873/?no_cache=1)



### 3.3 MODELAGEM DO PROBLEMA DE CONTATO COM O ABAQUS

#### 3.3.1 DISCRETIZAÇÃO DO CONTATO

No ABAQUS há duas formas de discretizar o contato, a saber: *Node-to-Surface* e *Surface-to-Surface*. Dentro de cada uma dessas discretizações é necessário ainda definir a superfície *master* e a superfície *slave*. As quatro configurações possíveis estão ilustradas na Figura 3.1.

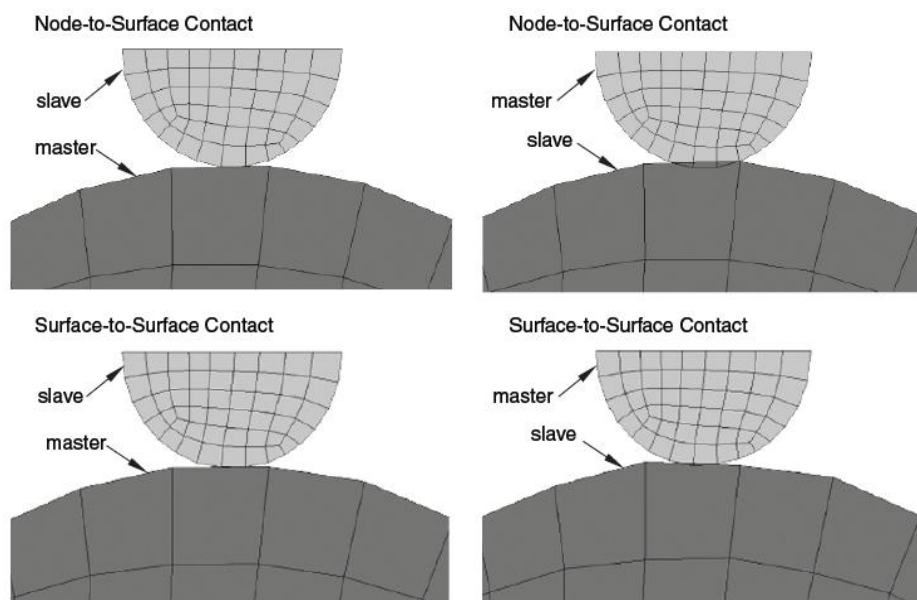


Figura 3.1 - Possibilidades de Configurações de Contato (Fonte: ABAQUS Analysis User's Manual, 2011)

Na discretização *Node-to-Surface*, cada nó da superfície *slave* interage com uma projeção correspondente da superfície *master*, de modo que cada condição de contato envolve um único nó da superfície *slave* e um grupo de nós próximos da superfície *master*. Já a discretização *Surface-to-Surface* considera a forma de ambas as superfícies nas restrições da região do contato.

A discretização *Node-to-Surface* possui um custo computacional inferior à discretização *Surface-to-Surface*, mas que em geral, segundo o Tutorial do ABAQUS, não justifica o seu uso, uma vez que o erro associado a ela é muito superior. A Tabela a seguir, extraída do tutorial, apresenta os erros associados às configurações da Figura 3.1. Vale ressaltar que esses erros são associados ao erro da pressão de contato e por isso, apesar da malha grosseira apresentada na Figura 3.1, eles são da ordem de 1% para a discretização *Surface-to-Surface*.

Tabela 3.1 - Erros associados a cada configuração de contato (Fonte: ABAQUS Analysis User's Manual, 2011)

Tipo de Discretização	Superfície slave	Erro máximo na pressão de contato
Node-to-Surface	Corpo Superior	13%
	Corpo Inferior	31%
Surface-to-Surface	Corpo Superior	~1%
	Corpo Inferior	~1%

Seguindo a recomendação do tutorial do ABAQUS, obteve-se por trabalhar neste projeto com a discretização *Surface-to-Surface*. Como é possível observar na Tabela 3.1, a escolha da superfície *master* e *slave* na discretização *Surface-to-Surface* pouco afeta os resultados, porém uma escolha correta pode ter um efeito significativo na performance do modelo. Além disso, deve-se evitar modelar malhas dissimilares, pois isso causa um aumento no custo computacional. No modelo em estudo escolheu-se a sapata como a superfície *master* e o corpo de prova com a *slave*.

### 3.3.2 FORMULAÇÕES DE ATRITO

O ABAQUS dispõe de diversos modelos para a formulação de um problema de contato, este pode ser considerado sem atrito, pode considerar um atrito definido pelo usuário ou utilizar os métodos do multiplicador de Lagrange, da penalidade e do decaimento exponencial Estático-Cinético. Os métodos que melhor se aplicam ao problema de *fretting* são o do multiplicador de Lagrange e o da penalidade, que serão neste trabalho brevemente discutidos. Mais informações sobre as formulações de atrito podem ser encontradas em Wriggers (2002).

Para esclarecer e exemplificar esses dois métodos vamos aplicá-los a um problema estático unidimensional, Figura 3.1(a) que consiste em um ponto de massa “m” submetido à ação da aceleração gravitacional.

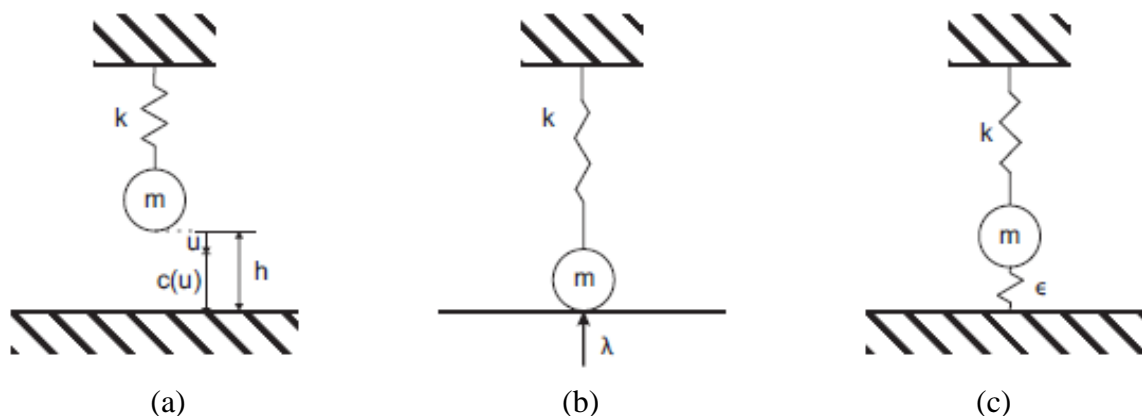


Figura 3.2 - Formulações de Atrito (a) Formulação Variacional; (b) Multiplicador de Lagrange; (c) Método da Penalidade

O deslocamento,  $u$ , deste ponto está restrito por um plano rígido. A energia e o equilíbrio de forças para esse problema podem ser escritos pelas Eq. (52) e (53), respectivamente:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu \quad (52)$$

$$\delta\Pi(u) = ku\delta u - mg\delta u \quad (53)$$

Nesse problema há dois cenários possíveis:

1. A rigidez da mola é suficientemente grande para evitar que a massa pontual toque a superfície.

$$c(u) > 0 \quad e \quad f_R = 0 \quad (54)$$

2. Os parâmetros do sistema são tais que a massa pontual entra em contato com a superfície

$$c(u) = 0 \quad e \quad f_R < 0 \quad (55)$$

onde,

$$c(u) = h - u \geq 0 \quad (56)$$

Independentemente do caso, as Equações (54) e (55) podem ser combinadas na Eq.(57)

$$c(u) \geq 0, \quad f_R \leq 0 \quad e \quad f_R \cdot c(u) = 0 \quad (57)$$

que são conhecidas em mecânica do contato como condições de Hertz-Signorini-Moreau. Tanto o método do multiplicador de Lagrange quanto o da penalidade utilizam essa formulação para determinar a distribuição de pressão no contato e como consequência a distribuição das tensões cisalhantes.

### 3.3.3 MÉTODO DO MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

O método do multiplicador de Lagrange funciona acrescentando um terceiro termo à Eq.(52):

$$\Pi(u, \lambda) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \lambda c(u) \quad (58)$$

onde o multiplicador de Lagrange ( $\lambda$ ) é equivalente a força de reação  $f_R$ . A variação da Eq.(58) fornece duas equações, já que  $u$  e  $\lambda$  podem ser variados de forma independente:

$$ku\delta u - mg\delta u - \lambda\delta u = 0 \quad (59)$$

$$c(u)\delta\lambda = 0 \quad (60)$$

onde a primeira equação representa o equilíbrio de forças do ponto de massa, já incluindo a força de reação da superfície rígida e a segunda satisfaz a Eq.(56) indicando que houve contato ( $u=h$ ). Assim é possível resolver a equação para o multiplicador de Lagrange.

$$\lambda = kh - mg \quad (61)$$

### 3.3.4 MÉTODO DA PENALIDADE

De forma semelhante ao multiplicador de Lagrange o método da penalidade adiciona um termo de penalidade à equação de energia (Eq. 52), esse termo pode ser interpretado como uma mola de rigidez  $\epsilon$ , colocada entre a superfície e o ponto de massa.

$$\Pi(u, \lambda) = \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \frac{1}{2}\epsilon[c(u)]^2 \quad (62)$$

A variação da Eq.(62) fornece apenas:

$$ku\delta u - mg\delta u - \epsilon c(u)\delta u = 0 \quad (63)$$

onde a solução será:

$$u = \frac{(mg + \epsilon h)}{(k + \epsilon)} \quad (64)$$

$$c(u) = h - u = \frac{kh - mg}{k + \epsilon} \quad (65)$$

Como, em casos onde há contato,  $mg \geq kh$ , haverá penetração do ponto de massa na superfície. Isso seria equivalente a compressão da mola. Para evitar esse efeito seria necessário fazer  $\epsilon \rightarrow \infty$ , porém isso faz com que o algoritmo não alcance a convergência. Essa medida faz com que a solução do método tenda para a solução de Lagrange, uma vez que a força de reação nesse método é dada por:

$$\lambda = f_R = \epsilon c(u) = \frac{\epsilon}{k + \epsilon}(kh - mg) \quad (66)$$

Ná prática, o método da penalidade apresenta um custo computacional menor, tendo como desvantagem o fato de admitir interpenetração dos corpos, o que acaba prejudicando os resultados. Neste estudo, o tempo computacional não foi um fator crítico, como será visto mais adiante, e por esse motivo optou-se por trabalhar apenas com o método do multiplicador de Lagrange, visando obter resultados mais próximos aos analíticos. Essa alternativa, porém, não deve ser descartada, em especial para problemas mais complexos, que exijam um tempo de processamento muito superior.

### 3.3.5 DIFERENÇA ENTRE SMALL- E FINITE-SLIDING

Na modelagem de contato com *small-sliding* a área do contato é calculada a partir da geometria não deformada do pré-processamento e permanece constante durante toda a simulação. Esse caso não é compatível com o problema de contato entre cilindros, uma vez que o contato é incompleto, e o tamanho do contato é definido a partir da carga aplicada. Por esse motivo optou-se por trabalhar com

*finite-sliding* onde a área de contato e a distribuição de pressão são calculadas a partir dos modelos deformados.

### 3.3.6 ELEMENTOS LINEARES E QUADRÁTICOS

No ABAQUS existe a possibilidade de se trabalhar com dois tipos de elementos, os lineares e os quadráticos. Na prática, os elementos lineares permitem a resolução do problema com um menor custo computacional, porém tem uma precisão inferior se comparados aos elementos quadráticos.

A diferença principal entre esses dois tipos de elementos é a ordem da aproximação do campo de deslocamentos. Ao se discretizar uma malha em, por exemplo,  $N$ , elementos de  $p$ -ésima ordem, o número de nós passa a ser dados por  $Np+1$ . Como o próprio nome indica, os elementos lineares possuem uma aproximação de primeira ordem ou linear, enquanto o elemento quadrático possui uma aproximação de segunda ordem, ou quadrática. Portanto uma malha linear com 10 elementos teria 11 nós enquanto uma malha quadrática com os mesmos dez elementos teria 21 nós. Mais informações sobre elementos lineares e quadráticos podem ser encontradas no site da IIT-KANPUR<sup>3</sup>, apresentado nas referências. A Figura 3.3 ilustra a distribuição dos nós em elementos quadráticos e lineares.

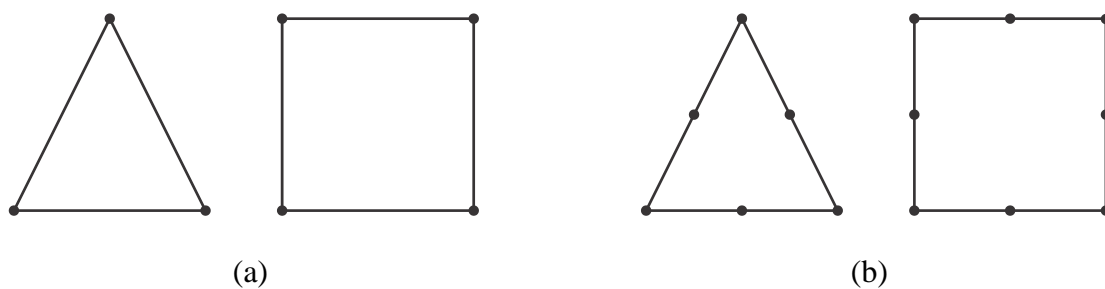


Figura 3.3 - Tipos de Elementos; (a) Lineares e (b) Quadráticos

Portanto a aproximação do deslocamento dentro do domínio de um elemento pode ser ilustrada pela Figura 3.4, onde  $u$  representa o deslocamento de cada um dos nós do elemento.

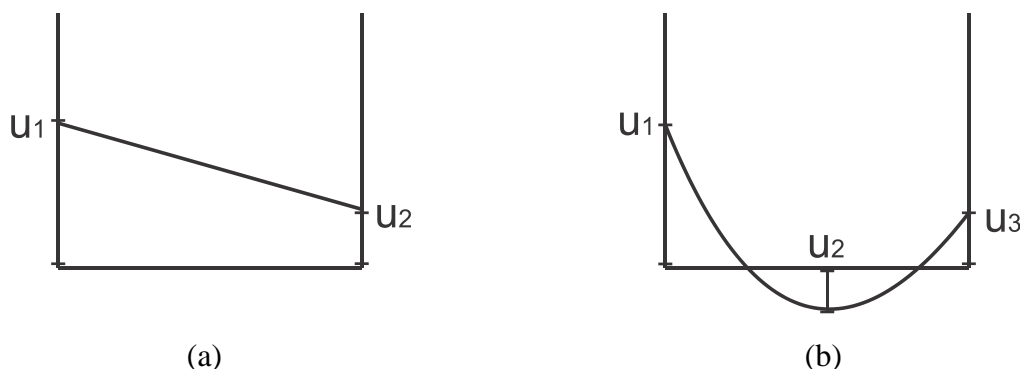


Figura 3.4 - Campo de deslocamentos no domínio do elemento; (a) Linear e (b) Quadrático

<sup>3</sup> [http://ecourses.vtu.ac.in/nptel/courses/Webcourse-contents/IIT-KANPUR/FiniteElementMethod/lecture-9/9\\_3.htm](http://ecourses.vtu.ac.in/nptel/courses/Webcourse-contents/IIT-KANPUR/FiniteElementMethod/lecture-9/9_3.htm)

Outra diferença ocorre na modelagem com esses dois tipos de elementos e diz respeito ao campo de tensões, como fica evidente na Figura 3.5. Ao se trabalhar com elementos lineares conforme mostrado na Figura 3.5(a) haverá pequenas discontinuidades para o valor das tensões nos nós. O mesmo não ocorre com os elementos quadráticos, como pode ser visto na figura 3.5(b). Uma alternativa para isso é substituir o campo de tensões fornecido por elementos lineares pelo seu valor médio visando homogeneizar esses valores, o que pode ser feito com o recurso *Averaging*.

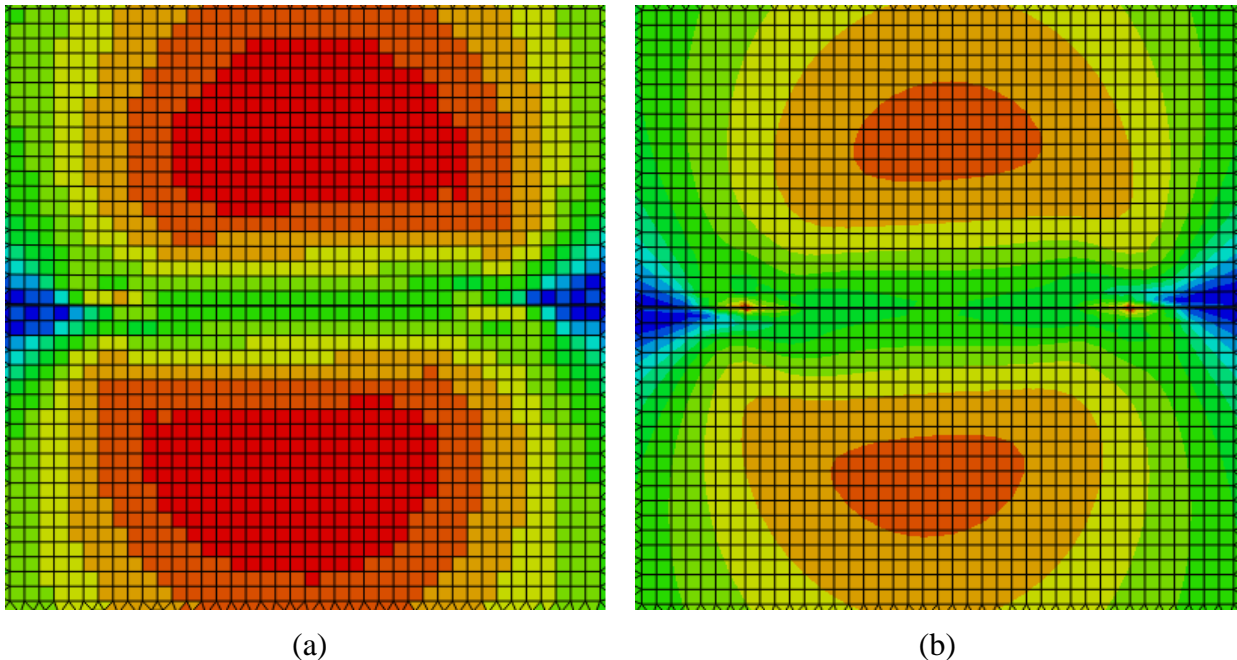


Figura 3.5 – Campo de Tensões arbitrário no contato entre dois cilindros planos com elementos (a) Lineares e (b) Quadráticos

Além dos parâmetros mostrados nesse capítulo existem muitos outros que são relevantes para uma simulação utilizando o ABAQUS, porém a teoria por trás de cada um deles está fora do escopo deste trabalho. Essas informações podem ser encontradas no tutorial do programa e em livros sobre o método dos elementos finitos.

Os parâmetros descritos neste capítulo são aqueles que ao longo do desenvolvimento do trabalho, mais afetaram a modelagem, nos quesitos de tempo de processamento e precisão dos resultados e por esse motivo as bases para a tomada de decisões foi apresentada. O objetivo principal deste capítulo é auxiliar o leitor a compreender melhor os capítulos seguintes desse trabalho.

## 4 MODELAGEM NUMÉRICA

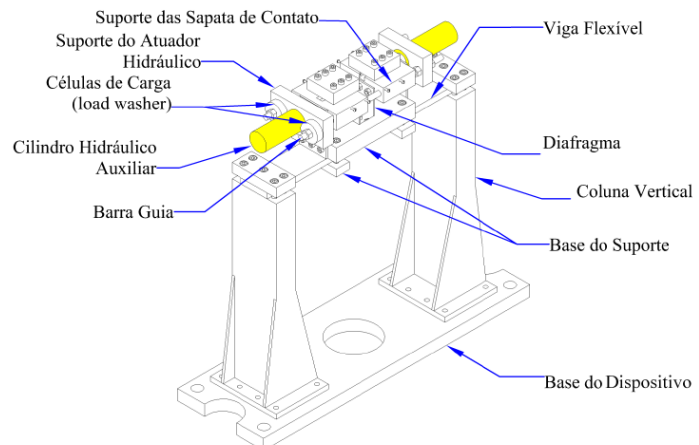
*Este capítulo apresenta as instalações do laboratório de Ensaios Mecânicos da Universidade de Brasília onde são feitos os experimentos que fundamentam o modelo numérico. Em seguida são apresentadas as condições de contorno usadas no modelo computacional e estudos preliminares acerca de convergência de malha.*

### 4.1 APARATO EXPERIMENTAL

A base utilizada para a modelagem numérica foram os ensaios realizados no laboratório de ensaios mecânicos da Universidade de Brasília. Esses ensaios são realizados em uma máquina de fadiga uniaxial MTS Systems 810, Figura 4.1(a), sobre a qual está montado o dispositivo de *fretting* ilustrado na Figura 4.1(b)



(a)



(b)

Figura 4.1 – Dispositivos do laboratório de Mecânica dos Materiais da UnB. (a) MTS Systems 810; (b) Estrutura de aplicação da carga de *fretting*.

Na montagem de um experimento o corpo de prova é primeiramente fixado às garras inferior e superior. Em seguida deve-se aplicar a tensão média, caso esta seja diferente de zero para o experimento. As sapatas são então pressionadas pelos atuadores hidráulicos contra o corpo de prova, de forma a gerar um carregamento normal na sapata (carga P). Por fim aplica-se a carga de fadiga, sendo que os deslocamentos causados por essa, juntamente com a carga P resultarão no surgimento do carregamento de cisalhamento (carga Q), que, portanto estará em fase com a tensão remota de fadiga

( $\sigma_B$ ). O procedimento de aplicação dos carregamentos bem como sua configuração ficam claros na Figura 4.2.

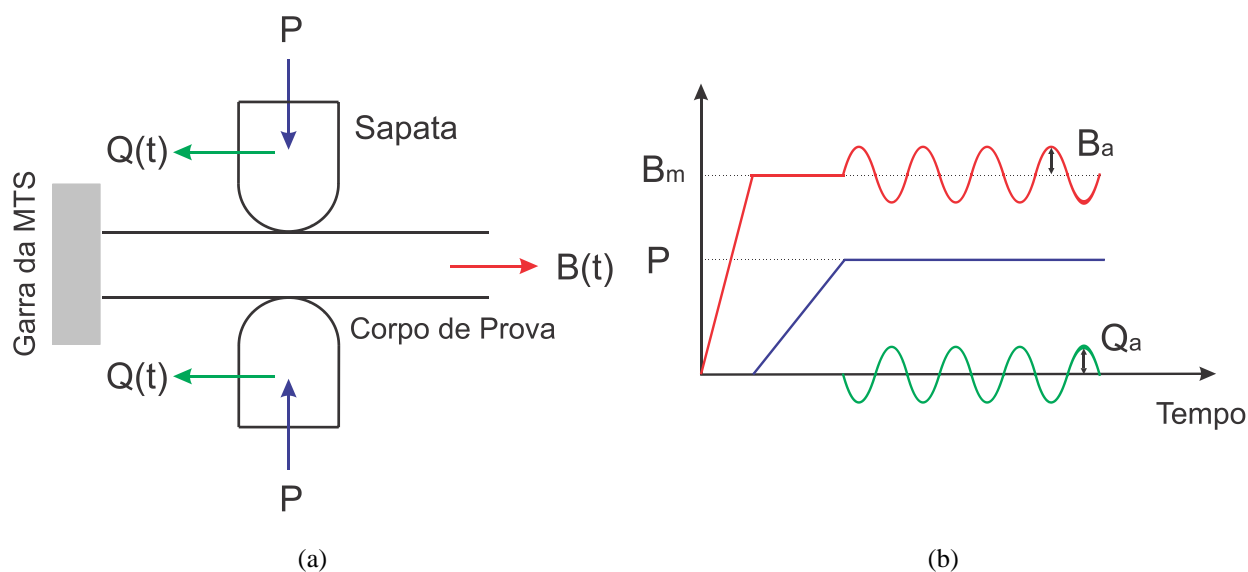


Figura 4.2 - Configuração da aplicação dos carregamentos (a) Modelo do Contato; (b) Histórico de carregamento

Os valores das forças que serão aplicadas ao espécime são definidos a partir das suas dimensões e dos parâmetros gerais do ensaio. Estes podem ter diversos valores que dependem do que se deseja avaliar com o experimento. Para a modelagem numérica optou-se por trabalhar com valores geralmente usados nos ensaios. Esses valores são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros usados na modelagem numérica

Coeficiente de atrito	$Q_{max}/fP$	$\sigma_{B,max}/p_0$	Raio da Sapata (R)
0.6	0.62	0.4	70mm

Os materiais estudados com maior frequência no laboratório são ligas alumínio, ligas de titânio e aço, por serem os materiais mais usados em situações de frequente ocorrência de *fretting* e, portanto foram os materiais usados nas simulações numéricas. Como as propriedades necessárias para a construção do modelo computacional são apenas o módulo de elasticidade e o coeficiente de *poisson*, obteve-se por usar valores típicos para cada um desses materiais sem se preocupar com as propriedades de liga. Por esse motivo esses materiais serão chamados daqui para frente apenas de alumínio, aço e titânio. As propriedades desses materiais são apresentadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Propriedades dos materiais ensaiados

Material	Aço	Alumínio	Titânio
Módulo de Elasticidade (MPa)	210000	70000	114000
Coeficiente de Poisson	0.33	0.33	0.34

É importante apontar que o coeficiente de atrito é distinto para cada um desses materiais. Porém como essas diferenças não são significativas optou-se por manter esses coeficientes iguais ao valor apresentado na Tabela 4.1 para garantir que as cargas normal e cisalhante fossem constantes ao longo das simulações.



## 4.2 MODELO NUMÉRICO

### 4.2.1 CARACTERÍSTICAS DA MÁQUINA USADA NA MODELAGEM

O computador usado para a realização das simulações é da marca TOSHIBA e conta com um processador de 2.2 GHz e uma memória de 3.00 GB. Durante as simulações foi estipulado um uso máximo de memória padrão de 50%. Para a realização do trabalho utilizou-se o software de elementos finitos ABAQUS 6.11.

### 4.2.2 GEOMETRIA DO PROBLEMA

O modelo inicial do problema foi criado considerando uma sapata de raio 70mm, e um corpo de prova com largura 6.5mm, valores condizentes com as geometrias usadas nos ensaios de *fretting* na UnB. O problema foi modelado em duas dimensões (Figura 4.3), seguindo o modelo analítico que admite essa simplificação.

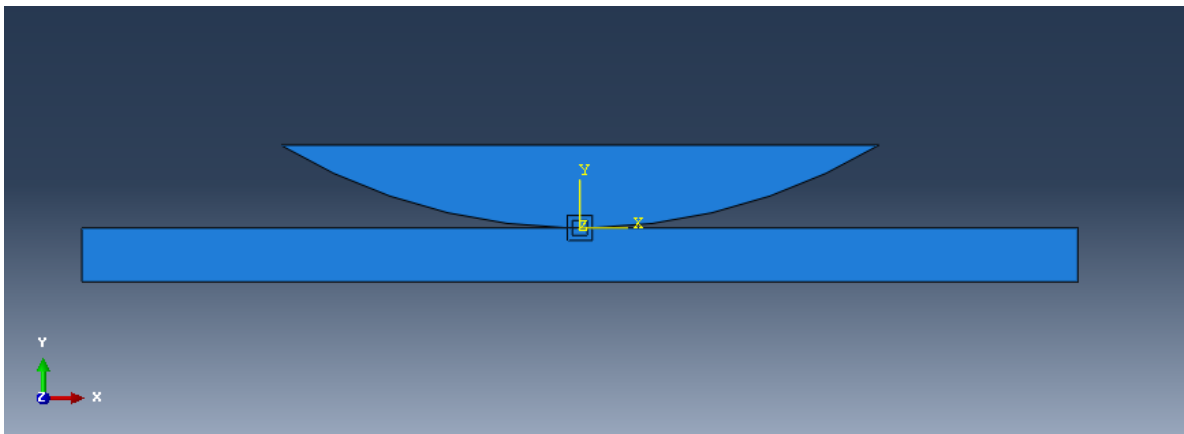


Figura 4.3 - Modelagem do Contato, sapata com  $R=70\text{mm}$  e espécime com espessura 6.5mm

No centro do contato desenhou-se uma região de partição onde foi feito o refino da malha. Conforme explicado no capítulo 3, optou-se por definir a sapata com a superfície *Master* e o corpo de prova com a superfície *slave*. Como esse é um problema de deformação plana, é necessário informar ao ABAQUS a espessura da região. Quando essa informação é irrelevante para o tipo de região criada ela é desprezada. Porém ela será importante para a definição das forças, uma vez que a força concentrada aplicada no ABAQUS é dada por unidade de espessura. Com base nisso optou-se por utilizar uma espessura de 1mm para que o valor da força por unidade de espessura coincida com a força concentrada.

### 4.2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para modelar adequadamente o problema foram utilizadas 5 condições de contorno de restrição de movimento e 3 carregamento, a carga P, carga Q e a carga remota de fadiga. Para a criação de algumas das restrições de movimento foi necessário a criação de restrições entre pontos de referência e a sapata e o corpo de prova. A Figura 4.4 ilustra as condições de contorno de movimento.

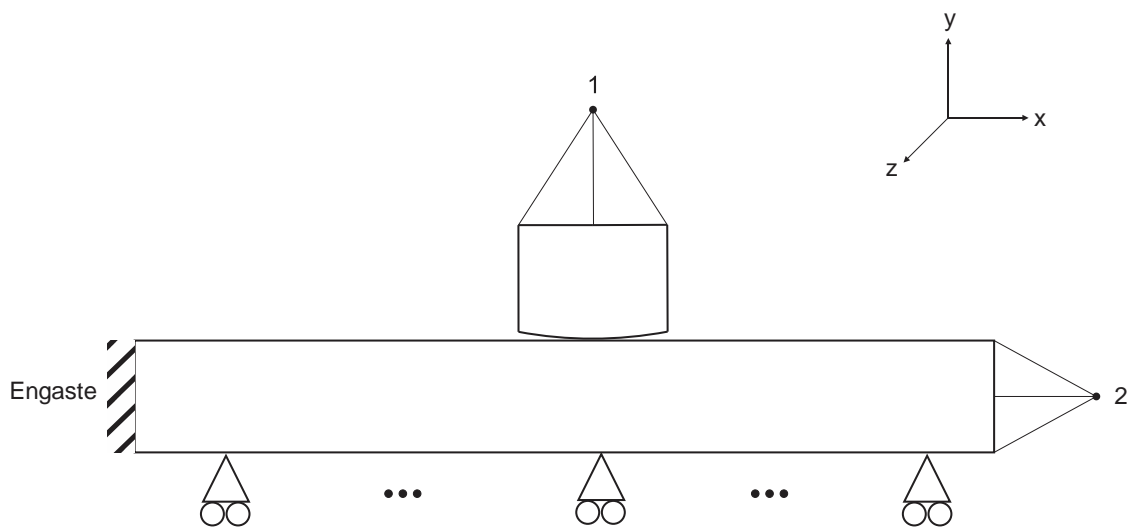


Figura 4.4 - Condições de contorno de movimento aplicadas ao problema

Portanto a aresta superior do cilindro foi restringida ao ponto 1 e a aresta direita do corpo de prova ao ponto 2. Isso significa que essas arestas só poderão se mover juntamente com esses pontos. Com esse esclarecimento, é possível dispor as cinco condições de contorno:

1. Engaste da aresta esquerda do corpo de prova;
2. Restrição de deslocamentos ao longo de y da aresta inferior do corpo de prova;
3. Fixação da aresta livre do corpo de prova com o ponto 2 e subsequente engaste do ponto 2;
4. Fixação da aresta superior da sapata com o ponto 1 e restrição de rotação com relação ao eixo z do ponto 1.
5. Deslocamento do ponto 1 de -0.0005m na direção vertical;

Apesar de a montagem ter sido feita com os corpos tangentes um ao outro, apenas com a aplicação da quinta condição de contorno é que o ABAQUS reconhece o contato e converge para a solução do problema. Portanto ela só é necessária no início do programa, sendo desativada depois que a força P é aplicada e garante que os corpos permaneçam em contato. A estratégia de criar pontos de referência onde são aplicadas as condições de contorno e os carregamentos diminui o tempo de processamento. Além disso ele facilita a aplicação da carga cisalhante e da condição de contorno 5.

Após a criação das condições de contorno são aplicadas as 3 cargas:

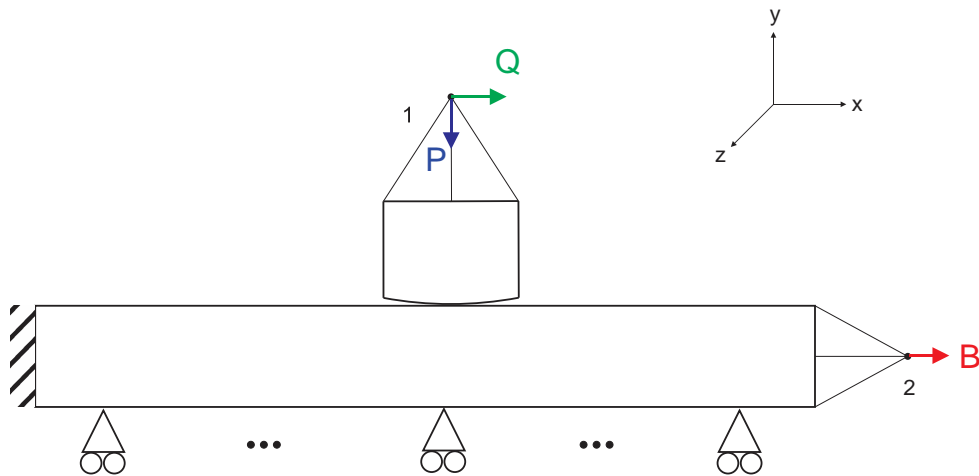


Figura 4.5 – Carregamentos aplicados ao problema

Obviamente que o engaste realizado no ponto impede que a carga remota de fadiga tenha qualquer efeito sobre o problema, por isso ele é suprimido em simulações de fadiga por *fretting*. Já em simulações de *fretting* simples, a carga remota é suprimida.

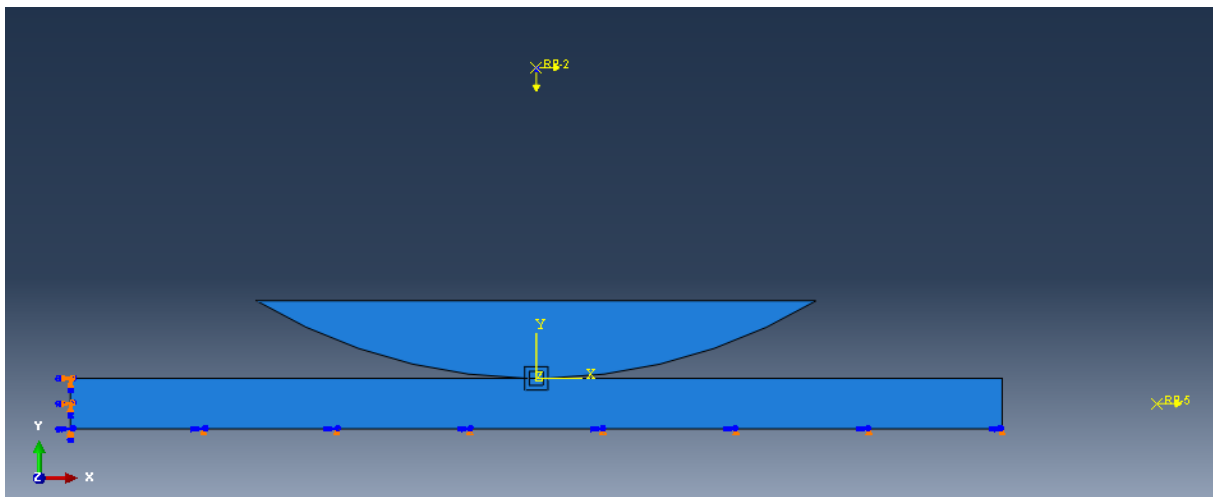


Figura 4.6 - Modelo do problema com condições de contorno

A aplicação das condições de contorno e das cargas foi efetuada em 4 passos, na forma ilustrada pela Figura 4.2(b). No passo inicial, são aplicadas todas as condições de contorno exceto a 5. Essa por sua vez é aplicada em um segundo passo, fazendo com que o ABAQUS entenda que o cilindro tocou o corpo de prova. No terceiro passo, a carga P é aplicada em um único incremento e a o deslocamento do passo 2 é desativado. Por fim, no caso 4 é aplicada a carga cisalhante (Q) e, em simulações de fadiga por *fretting*, a carga B, sendo o carregamento dessas forças senoidal e em fase.

Um dos objetivos do trabalho é determinar ainda o efeito do comprimento exposto da sapata sobre o resultado analítico. A Figura 4.7 auxilia na compreensão do significado desse comprimento.

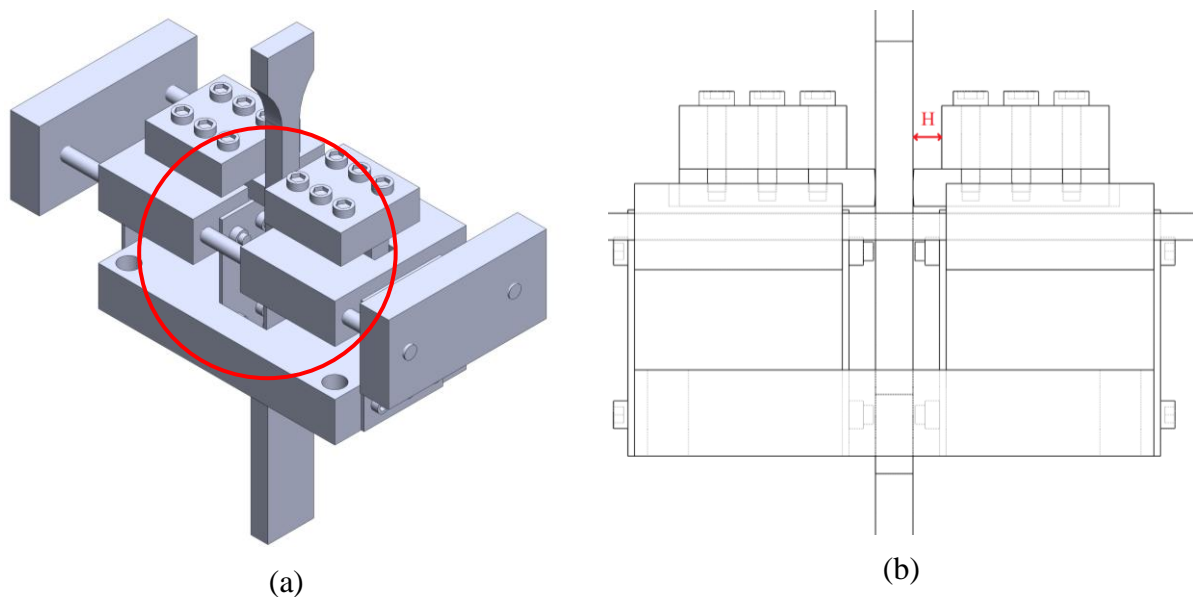


Figura 4.7 – Comprimento exposto da sapata (a) Modelo 3D do aparato de *fretting*; (b) Vista frontal ampliada do modelo

Se a sapata for pensada com sendo uma viga, é de se esperar que dependendo do comprimento exposto e do material da sapata, possa haver flexão da mesma, e que isso deva ter efeitos sobre os resultados analíticos. No Laboratório de Ensaio Mecânicos da UnB trabalha-se com um cenário onde o comprimento exposto é de 10mm.

A Figura 4.8 ajuda a entender melhor esse cenário onde, após a aplicação de uma carga cisalhante, observa-se o que ocorre com uma sapata rígida em vermelho e com uma sapata real que sofre flexão em azul. Nessa situação a zona de adesão age como um engaste para movimentos em x, impedindo que a sapata deslize. Por esse motivo a sapata sofre uma flexão que causa uma rotação  $\theta$  da seção circular da mesma. Essa rotação, por sua vez, causa um deslocamento  $\delta$  na região de contato.

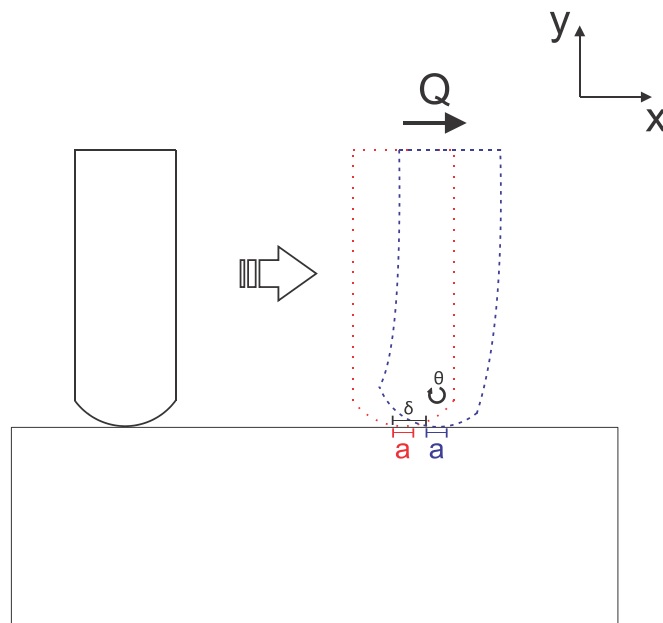


Figura 4.8 - Efeito do comprimento exposto da sapata

### 4.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA

O primeiro passo ao se trabalhar com um novo modelo é determinar a malha a ser usada. Essa escolha deve levar em conta uma relação de custo-benefício entre o tempo computacional e os erros obtidos. Conforme explicado anteriormente o ABAQUS possui dois tipos de elementos, os lineares e os quadráticos. Este segundo tipo fornece, em vários casos, soluções mais precisas com uma quantidade menor de elementos, sua desvantagem consiste no consumo mais elevado de memória RAM quando comparado aos elementos do tipo linear.

Com base nas vantagens e desvantagens de cada tipo de elemento foram estipuladas malhas com 10, 20, 40, 80 e 160 elementos na região do contato, conforme ilustrado na Figura 4.9. Esses elementos foram modelados tanto do tipo quadráticos quanto do tipo lineares, a fim de determinar qual ofereceria a melhor relação entre precisão e custo computacional. Para realizar esse estudo, a malha foi refinada apenas na região do contato mantendo as demais malhas constantes. A região adjacente à zona de contato também teve de sofrer alterações para manter uma coerência com a região do contato, o que também pode ser observado na Figura 4.9.

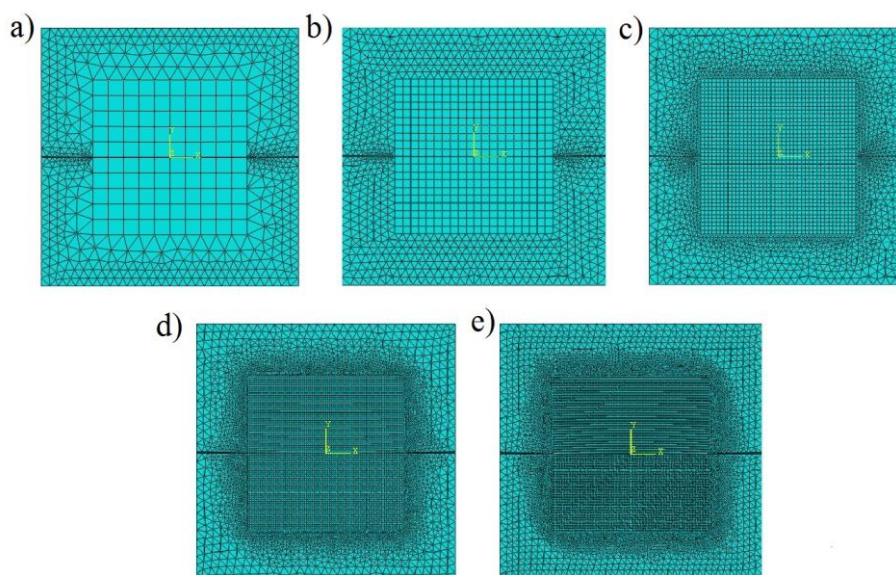


Figura 4.9 - Malhas usadas na análise. (a) 10 Elementos; (b) 20 Elementos; (c) 40 Elementos; (d) 80 Elementos e (e) 160 Elementos

Nessa seção são usados os termos erro e imprecisão e é importante fazer uma discriminação entre os dois. Ao se usar o termo erro, refere-se a diferença entre os resultados numéricos e analíticos, enquanto o termo imprecisão está associado à incerteza causada pelo tamanho do elemento usado na malha. Isso ficará mais claro ao longo do capítulo.

Para executar a análise proposta, optou-se inicialmente por trabalhar com um modelo submetido apenas a *fretting*. Nesse estudo os parâmetros de comparação entre as malhas são os erros associados às pressões de pico ( $p_0$ ), às semi-larguras dos contatos ( $a$ ) e às semi-larguras das zonas de adesão ( $c$ ). Em geral, não existem dificuldades em se determinar esses elementos de forma analítica, podendo ser feito através das Equações (13), (14) e (23). Quando se trabalha com dados numéricos, existe uma

dificuldade extra, já que é preciso determinar a incerteza nos parâmetros de comprimento associada, nesse caso, ao tamanho dos elementos.

Assumindo a distribuição de pressão genérica ilustrada na Figura 4.10, com a discretização apresentada, é possível determinar um tamanho do contato máximo, com os dois primeiros elementos fora do contato, e um tamanho do contato mínimo, com os dois primeiros elementos dentro do contato. Com base nisso optou-se por trabalhar com o valor médio desses dois tamanhos de contato, onde a imprecisão é dado por 1 elemento para mais, e 1 elemento para menos. Como, em geral, se fala na semi-largura do contato, essa imprecisão passa a ser de 0.5 elemento para mais e 0.5 elementos para menos.

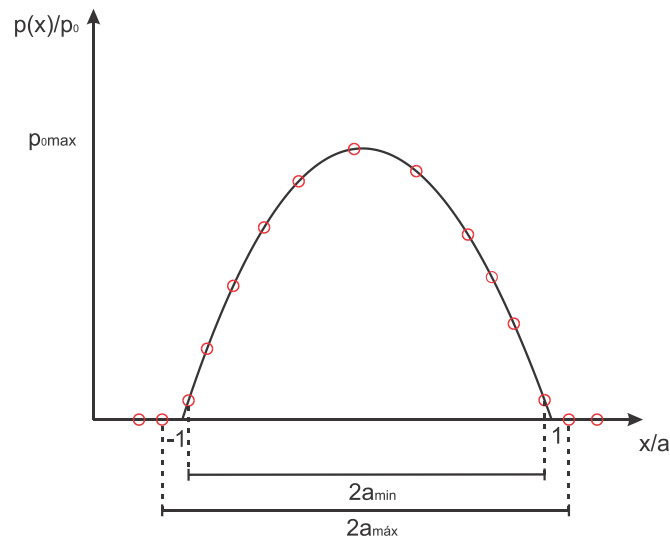


Figura 4.10 - Determinação do semi-comprimento médio do contato e seu respectivo erro

Já para o tamanho da zona de adesão essa imprecisão será maior. Isso ocorre pois não se pode calcular um valor médio como foi feito com o tamanho do contato, já que não há como saber se o início da zona de adesão está a direita ou a esquerda do valor máximo da tensão cisalhante, conforme é ilustrado na Figura 4.11. Nesse caso a alternativa encontrada foi determinar o tamanho da zona de adesão a partir das tensões máximas cisalhantes onde o erro passa a ser dados por 1 elementos para mais e 1 elementos para menos.

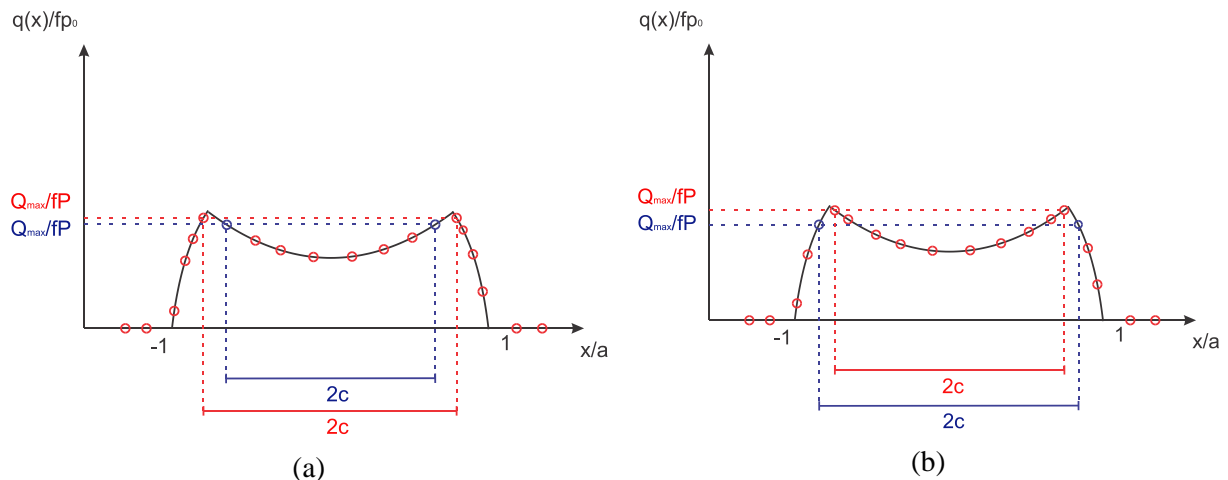


Figura 4.11 - Determinação do semi-comprimento da zona de adesão e seu respectivo erro

O erro para o deslocamento da zona de adesão pode ser determinado de forma análoga ao do tamanho da zona de adesão e também é dado por  $\pm 1$  elemento. O procedimento para sua determinação consiste em calcular a diferença entre os picos da distribuição da tensão cisalhante com e sem a carga remota de fadiga (*Bulk Load*). Esse procedimento é ilustrado pela Figura 4.12.

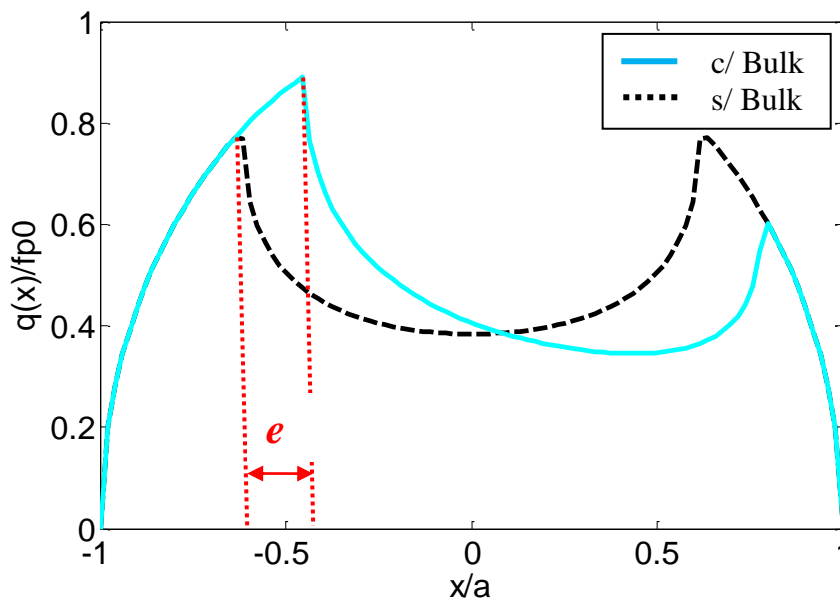


Figura 4.12 - Determinação do deslocamento da zona de adesão

Conforme apresentado na Tabela 4.3, as pressões de pico não apresentaram resultados muito conclusivos, uma vez que os valores medidos pelo ABAQUS não variam significativamente com o refino de malha.

Tabela 4.3 - Convergência da pressão de pico

Tipo de Elemento	Número de Elementos	$p_0$ ,analítico	$p_0$ ,numérico	Erro % $p_0$	Tempo de Processamento (min)
Linear	10	200	200.7	0.35%	0:31
Quadratico	10	200	200.4	0.20%	1:10
Linear	20	200	200.4	0.20%	0:33
Quadratico	20	200	200.2	0.10%	1:32
Linear	40	200	200.6	0.30%	0:59
Quadratico	40	200	200.2	0.10%	4:14
Linear	80	200	200.7	0.35%	1:51
Quadratico	80	200	200.3	0.15%	13:56
Linear	160	200	200.8	0.40%	6:31
Quadratico	160	200	200.4	0.20%	55:06

O tamanho do contato, por sua vez, ilustra claramente essa convergência tanto para os elementos lineares quanto para os elementos quadráticos. Os dados são apresentados na Tabela 4.4 enquanto a Figura 4.13 ilustra por meio de um gráfico essa convergência.

Tabela 4.4 – Convergência da semi-largura do contato “a”

Tipo de Elemento	Número de Elementos	$a_{\text{analítico}}(\text{mm})$	$a_{\text{numérico,médio}}(\text{mm})$	Erro % $a$	Tempo de Processamento (min)
Linear	10	0.7129	0.99000±0.09	27.71±12.62%	0:31
Quadrático	10	0.7129	0.81000±0.09	13.62±12.62%	1:10
Linear	20	0.7129	0.85500±0.045	19.93±6.31%	0:33
Quadrático	20	0.7129	0.76500±0.045	7.31±6.31%	1:32
Linear	40	0.7129	0.78750±0.0225	10.46±3.16%	0:59
Quadrático	40	0.7129	0.74250±0.0225	4.15±3.16%	4:14
Linear	80	0.7129	0.73126±0.01125	2.57±1.58%	1:51
Quadrático	80	0.7129	0.70870±0.01125	-0.59±1.58%	13:56
Linear	160	0.7129	0.72566±0.005625	1.79±0.79%	6:31
Quadrático	160	0.7129	0.71440±0.005625	0.21±0.79%	55:06

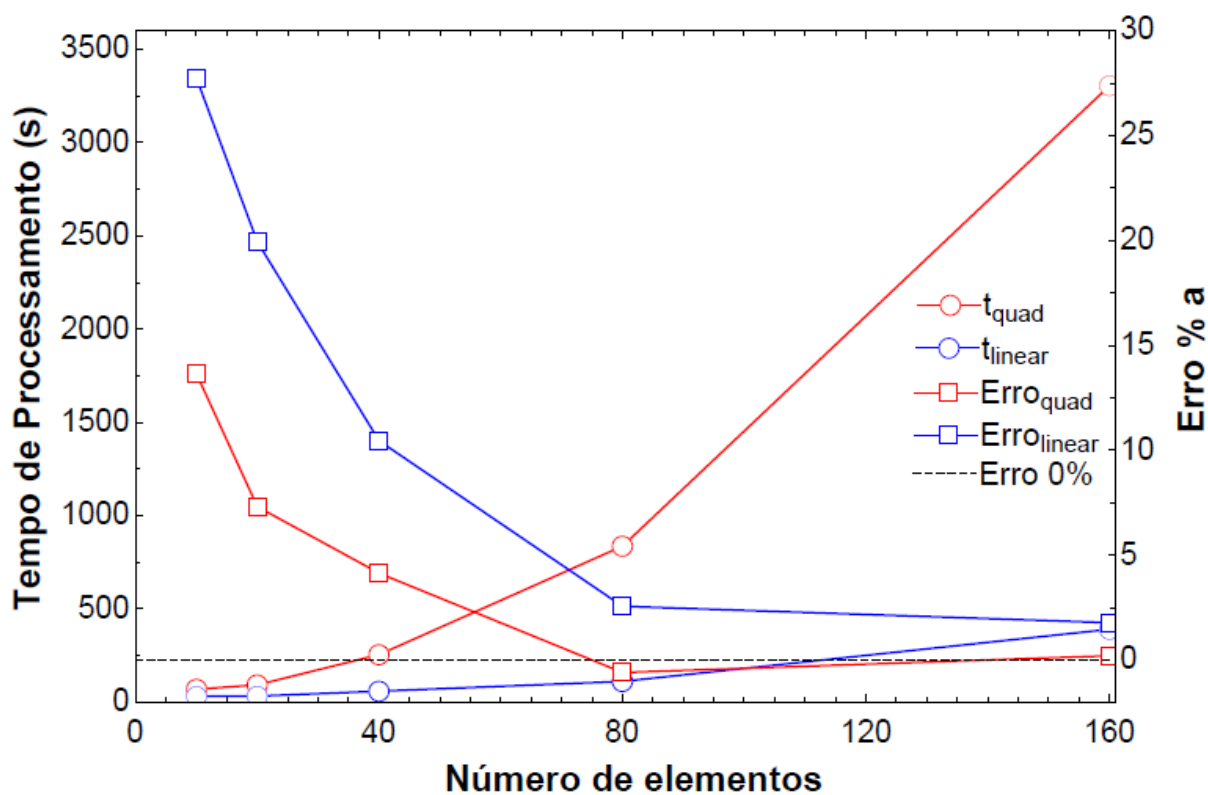


Figura 4.13 - Convergência do tamanho do contato

Já a zona de adesão (c) também não foi capaz de produzir resultados conclusivos, uma vez que o tamanho dos elementos ainda é relativamente grande quando comparado ao tamanho dessa zona.



Portanto seria necessário fazer um refino muito grande da malha antes que comece a haver uma modificação em  $c$ . Isso fica claro na Tabela 4.5, onde a primeira redução em  $c$  só pode ser observada a partir de 160 elementos.

Tabela 4.5 – Convergência da semi-largura da zona de adesão “ $c$ ”

Tipo de Elemento	Número de Elementos	$c_{analítico}(mm)$	$c_{numérico}(mm)$	Erro % $c$	Tempo de Processamento (min)
Linear	10	0.4394	0.4500±0.18	22.90±42.92%	0:31
Quadrático	10	0.4394	0.5400±0.18	2.41±42.92%	1:10
Linear	20	0.4394	0.4500±0.09	2.41±20.48%	0:33
Quadrático	20	0.4394	0.4500±0.09	2.41±20.48%	1:32
Linear	40	0.4394	0.4500±0.045	2.41±10.24%	0:59
Quadrático	40	0.4394	0.4500±0.045	2.41±10.24%	4:14
Linear	80	0.4394	0.4500±0.0225	2.41±5.12%	1:51
Quadrático	80	0.4394	0.4500±0.0225	2.41±5.12%	13:56
Linear	160	0.4394	0.4444±0.01125	1.14±2.56%	6:31
Quadrático	160	0.4394	0.4500±0.01125	2.41±2.56%	55:06

Apesar dos estudos com o tamanho da zona de adesão não serem conclusivos para a análise de convergência da malha, os valores calculados para esse parâmetro apresentaram um erro aceitável, aproximadamente 2.5%, o que implica que o algoritmo é capaz de calculá-lo com certa precisão.

A etapa seguinte seria acrescentar a carga remota de fadiga e observar a convergência do deslocamento da zona de adesão ( $e$ ). Porém após observar os resultados da primeira etapa concluiu-se que esse estudo iria gerar um tempo de processamento extremamente elevado em algumas das simulações e não traria resultados conclusivos. Isso acontece, pois assim como o tamanho da zona de adesão, o deslocamento desta apresenta um valor muito inferior aos elementos usados, e as malhas aqui propostas não seriam capazes de perceber variações nesses elementos, e por isso optou-se por usar apenas os resultados da primeira etapa para fazer a escolha da malha. Adiante no trabalho ficará claro que o ABAQUS é capaz de calcular com boa precisão esse parâmetro, sendo ele apenas pouco conclusivo durante a análise de convergência da malha assim como ocorreu com a semi-largura da zona de adesão.

Com base no exposto concluiu-se que a malha mais eficiente para o modelo é a linear com 160 elementos. Isso porque ela apresenta uma precisão semelhante à malha quadrática com um custo computacional muito inferior. Isso fica claro na Figura 4.13. Além disso, o fato de haver uma quantidade maior de elementos, quando comparada, por exemplo, à malha com 80 elementos

quadráticos, faz com que a imprecisão ao medir parâmetros pequenos, como o tamanho da zona de adesão e o seu deslocamento, seja menor.

Para as regiões fora do contato usaram-se elementos de maiores dimensões e com geometria triangular que possui menos nós que a quadrangular. Apesar desses elementos não serem críticos para os parâmetros em estudo, procura-se em geral manter uma coerência no tamanho destes elementos com os elementos do contato. Como é possível observar na Figura 4.14 há um refino da malha a medida que essa se aproxima do centro do contato, visando manter essa coerência. A única restrição para definir os elementos no restante do contato é que eles sejam do mesmo tipo dos elementos usados na região central do modelo, ou seja, lineares.

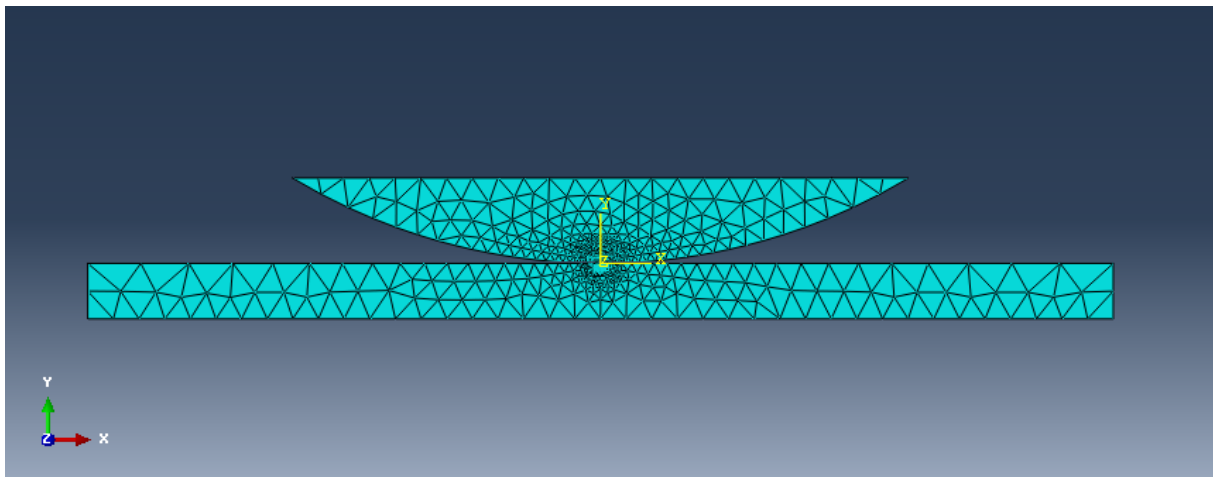


Figura 4.14 - Configuração final da malha do modelo contendo 160 elementos lineares na região de contato

Uma vez definidas todas as etapas da modelagem, o ABAQUS retorna os campos de tensão em cada instante de carregamento em todas as regiões dos componentes. Os dados obtidos e as análises destes serão apresentadas no capítulo seguinte.

# 5 RESULTADOS

*Este capítulo contém a validação do pacote comercial ABAQUS para o uso em problemas de Fadiga por fretting, juntamente com diversas simulações numéricas de como variações geométricas da sapata e do corpo de prova podem diferir da solução analítica.*

Este capítulo foi dividido em três etapas. Na primeira, os resultados numéricos obtidos com o ABAQUS são comparados com a solução analítica obtida usando as equações do capítulo 2 e com o auxílio do MATLAB. Em seguida faz-se um estudo sobre como as soluções geradas após modificações geométricas na sapata, mais especificamente comprimento exposto e largura, diferem da solução analítica. Na última parte estuda-se como a solução do problema com um corpo de prova de espessura finita difere da solução que considera semi-plano infinito. O intuito principal é mostrar a acurácia do pacote de elementos finitos e extendê-lo para situações onde a solução analítica não se aplica.

## 5.1 MODELO TEÓRICO DE FRETTING

Para analisar o problema de *fretting* tipicamente ensaiado no Laboratório de Ensaio Mecânicos da UnB, optou-se por trabalhar com o alumínio, o aço e o titânio cuja importância nesse campo já foi discutida e as propriedades foram apresentadas na Tabela 4.2. A Tabela 5.1 traz os valores dos carregamentos aplicados a cada um dos materiais, bem como alguns parâmetros (tamanho do contato, tamanho da zona de adesão, deslocamento da zona de adesão) que foram calculados através da solução analítica. É importante lembrar que o somatório da zona de adesão com seu deslocamento deve ser inferior ao tamanho do contato ( $c + e < a$ ) para garantir que não ocorrerá escorregamento reverso. Alguns dados já apresentados foram repetidos nessa Tabela para facilitar a leitura.

Tabela 5.1 - Dados usados nas simulações

	Alumínio	Titânio	Aço
P (N/mm)	223.96	223.96	223.96
Q (N/mm)	83.31	83.31	83.31
B (N/mm)	520	666.1	900.65
$p_0$ (MPa)	200	256.20	346.41
$f$	0.6	0.6	0.6
$Q_{max}/fP$	0.62	0.62	0.62
$\sigma_{B,max}/p_0$	0.4	0.4	0.4
$a$ (mm)	0.7129	0.5565	0.4116
$c$ (mm)	0.4394	0.3431	0.2537
$e$ (mm)	0.1188	0.0928	0.0686
$c+e$ (mm)	0.5582	0.3987	0.2949

Vale ressaltar que no modelo do ABAQUS, os carregamentos foram aplicados na forma de forças concentradas, visando obter um menor tempo de processamento. A determinação dessas forças pode ser feita a partir da pressão de pico e com auxílio da Eq. (17) e da relação  $Q_{max}/fP$  apresentada na Tabela 5.1. Já os parâmetros  $a$ ,  $c$  e  $e$  foram calculados analiticamente com as Eq. (14), (23) e (28) para serem comparados com os valores numéricos.

Para verificar a precisão do modelo numérico calculou-se o erro associado a alguns parâmetros do contato, assim como foi feito na análise de convergência da malha. Na Tabela 5.2 é possível perceber que os erros associados ao tamanho do contato foram baixos, da ordem de 1 a 3%. Porém é importante ressaltar que os erros foram maiores para materiais mais rígidos e logo, com menores tamanhos de contato.

Essa diferença está baseada no fato de que para esses materiais o tamanho dos elementos é relativamente grande quando comparado ao da zona de adesão e isso aumenta a imprecisão associada ao erro. O aço, por exemplo, apresenta um erro de 2.5% no tamanho do contato, frente ao alumínio com 1.79%. Por outro lado a imprecisão associada ao tamanho do elemento corresponde a 2.73% para o aço e apenas 1.58% para o alumínio.

Tabela 5.2 - Resultados das simulações numéricas

Material	$p_{0,num}$	Erro $p_0$	$a_{num}$	Erro $a$	$c_{num}$	Erro $c$	$e_{num}$	Erro $e$
Alumínio	200.8	0.40%	0.7257	1.79±1.58%	0.4444	1.14±2.56%	0.1238	4.17±9.47%
Titânio	256.9	0.27%	0.5682	2.09±2.02%	0.3488	1.66%±3.28%	0.0900	3.02±12.1%
Aço	346.8	0.11%	0.4219	2.50±2.73%	0.2588	2.01±4.43%	0.0675	1.60±16.4%

O mesmo problema ocorre com o tamanho do deslocamento da zona de adesão “ $e$ ” na presença da carga remota de fadiga. Tomando o caso do alumínio como exemplo, essa dimensão deve ser, segundo a solução analítica, de 0.1188 mm. Mesmo utilizando 160 elementos em um dentro de uma região de 1.8mm, o comprimento de cada elemento é de 0.01125mm, o que corresponde a 9.5% do tamanho do deslocamento “ $e$ ”. Portanto seria necessário usar uma malha com 640 elementos na região do contato para obter incertezas de ordem semelhante à “ $a$ ” e “ $c$ ”, de 3%.

Apesar dos problemas encontrados, os resultados numéricos obtidos pelo ABAQUS se ajustaram muito bem à solução analítica (dentro de uma faixa de ±5%), isso fica mais claro ao se observar os gráficos das distribuições de tensão numéricas e analíticas ilustradas nas Figuras 5.1 a 5.4.

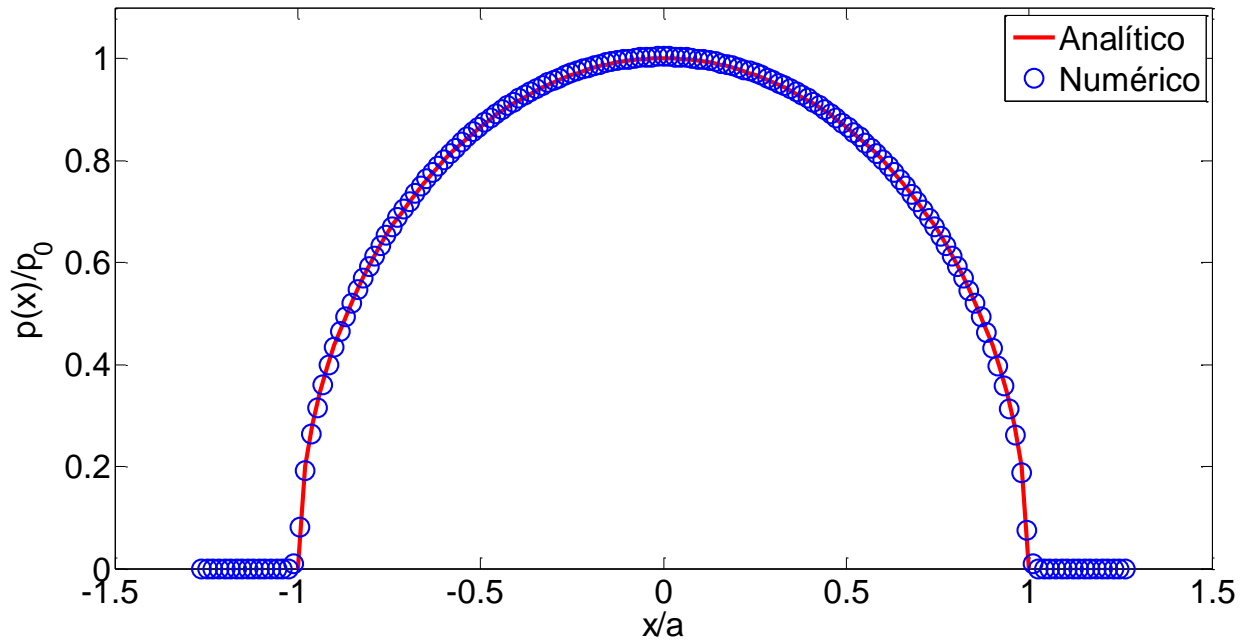


Figura 5.1 - Distribuição de pressão ao longo do contato para o alumínio.

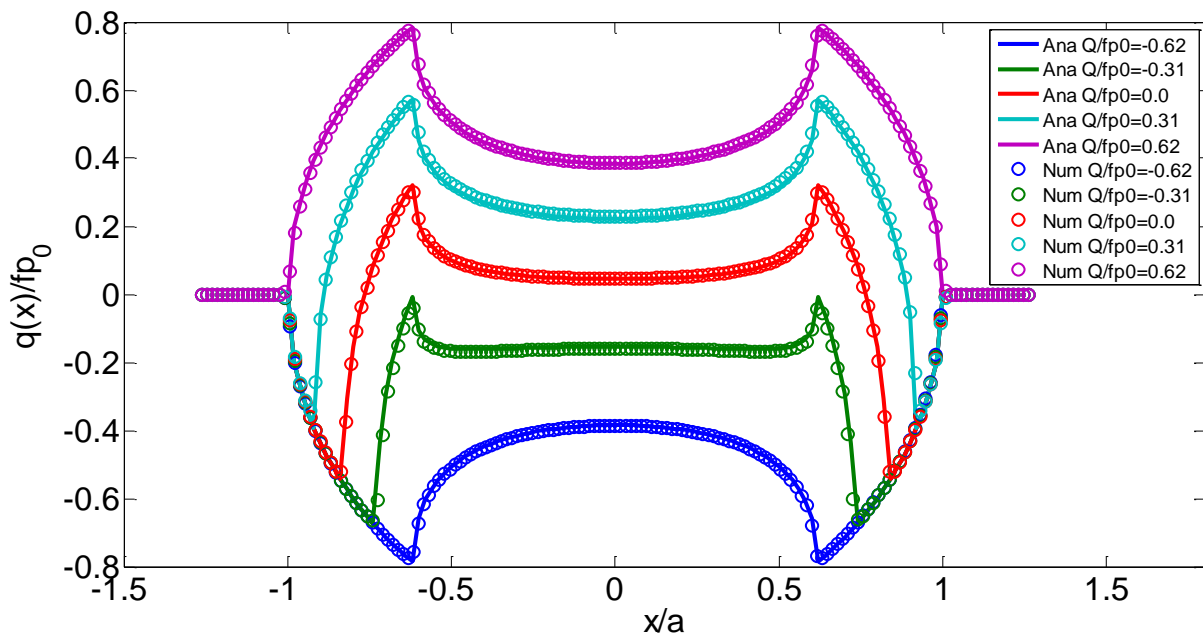


Figura 5.2 – Distribuição de tensões cisalhantes ao longo do contato para o alumínio em diferentes instantes de carregamento com  $Q_{\max}/fP=0.62$

Nessas figuras fica fácil perceber a concordância nas distribuições de tensões normais e cisalhantes em todos os instantes de carregamento, bem como no campo de tensões sob o contato. Essa concordância entre os resultados analíticos e numéricos não é modificada pela aplicação da tensão remota de fadiga.

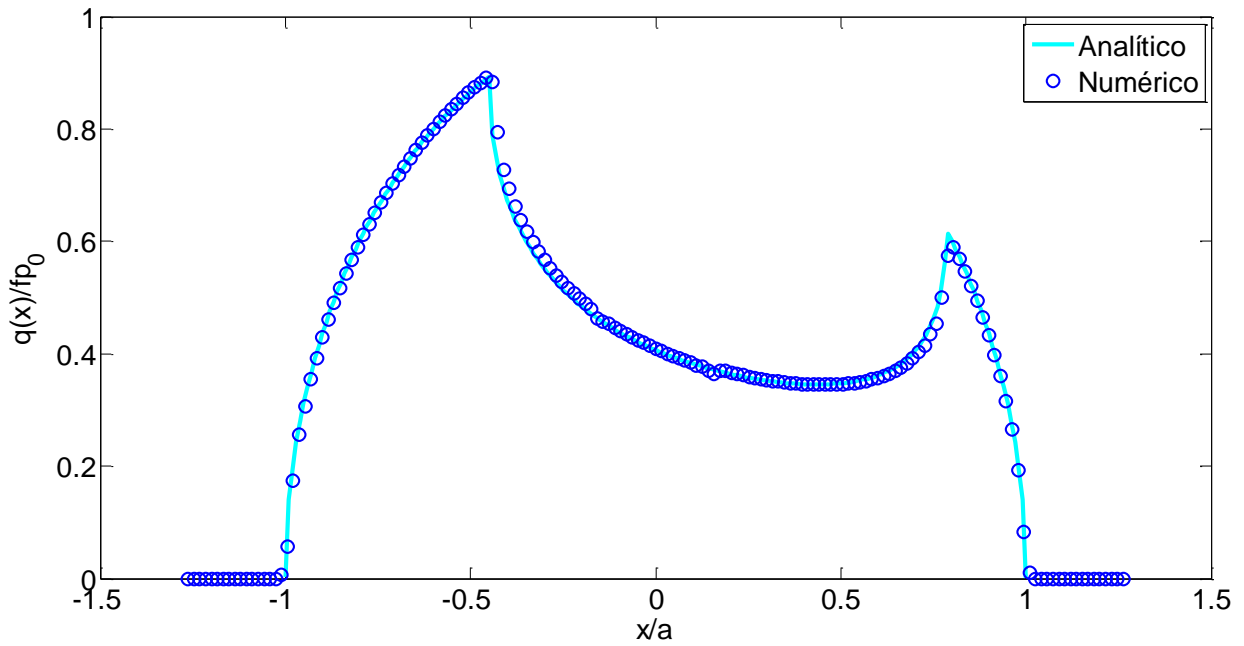


Figura 5.3 - Distribuição da tensão cisalhante máxima com carga remota para o alumínio com  $Q_{\max}/fP=0.62$  e  $\sigma_{B,\max}/p_0=0.40$ .

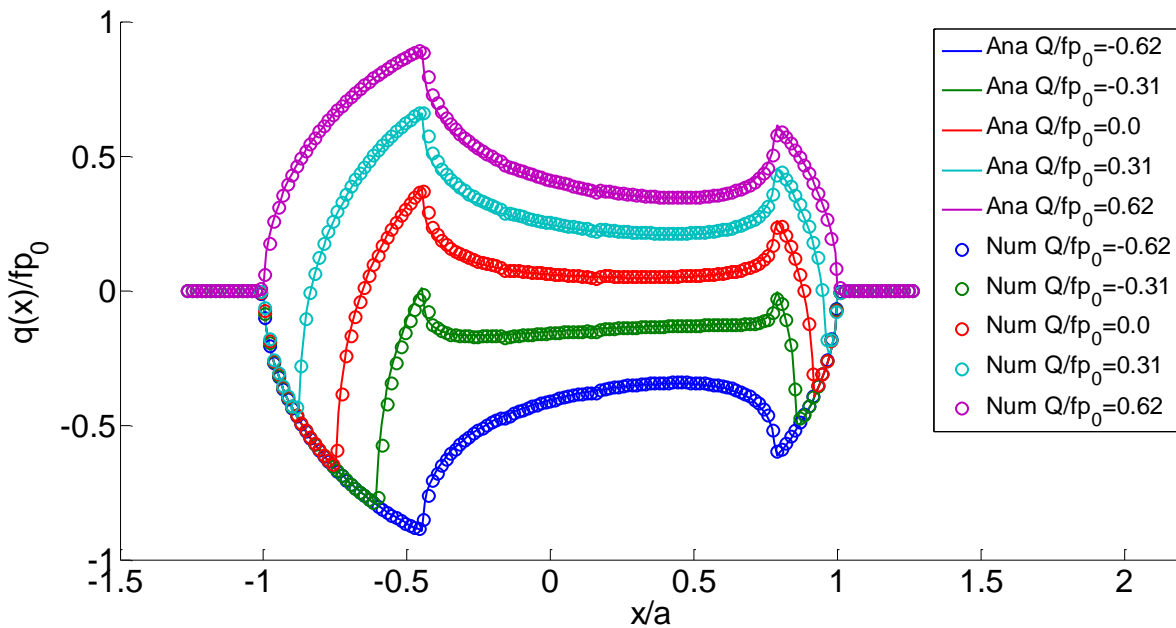


Figura 5.4 - Distribuição das tensões cisalhantes com presença de carga remota para o alumínio em diferentes instantes de carregamento com  $Q_{\max}/fP=0.62$  e  $\sigma_{B,\max}=0.40$

Além da distribuição de tensão ao longo foi contato, as amplitudes de tensão, a medida que se adentra o corpo, foram calculadas e comparadas com os valores analíticos. Os erros em cada elemento da profundidade são expressos na Tabela 5.3. Este campo de tensão foi calculado na parte anterior do contato  $x/a=-1$  onde ocorrem as maiores amplitudes de tensão.

Nestas simulações o erro associado à componente de tensão  $\sigma_{xx}$  calculada exatamente na superfície do contato acabou sendo muito superior ao erro no restante dos pontos. Isso ocorre, pois o ABAQUS

não calcula as tensões exatamente na superfície, e sim faz uma média das tensões nos nós próximos. Como o gradiente das tensões nessa região é extremamente elevado, há essa divergência, apenas no primeiro ponto, entre os resultados analítico e numérico. Por isso o erro das componentes de tensão na superfície do contato foram apresentados separadamente na Tabela 5.3, que apresenta o valor máximo que o erro das outras componentes de tensão assume nos demais pontos até uma profundidade de 40% da semi-largura do contato para todos os materiais. A Figura 5.5 ilustra o campo de tensões para uma sapata de alumínio nas condições descritas pela Tabela 5.1.

Tabela 5.3 - Erro máximo no campo de tensões na superfície e sob ela para sapatas de diversos materiais em  $x/a=-1$  e com  $y/a \leq 0.4$ ,  $Q_{\max}/fP=0.62$  e  $\sigma_{B,\max}=0.40$

	$\sigma_{xx,\text{superfície}}$	$\sigma_{yy,\text{superfície}}$	$\sigma_{zz,\text{superfície}}$	$\tau_{xy,\text{superfície}}$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\tau_{xy}$	$\sigma_{zz}$
Aço	-12.92%	1.81%	-13.72%	4.75%	3.36%	-0.63%	-1.38%	3.19%
Alumínio	-4.38%	4.60%	0.21%	5.49%	5.20%	2.76%	0.72%	7.97%
Titânio	-11.26%	1.73%	4.07%	-9.56%	4.44%	0.68%	-1.27%	4.32%

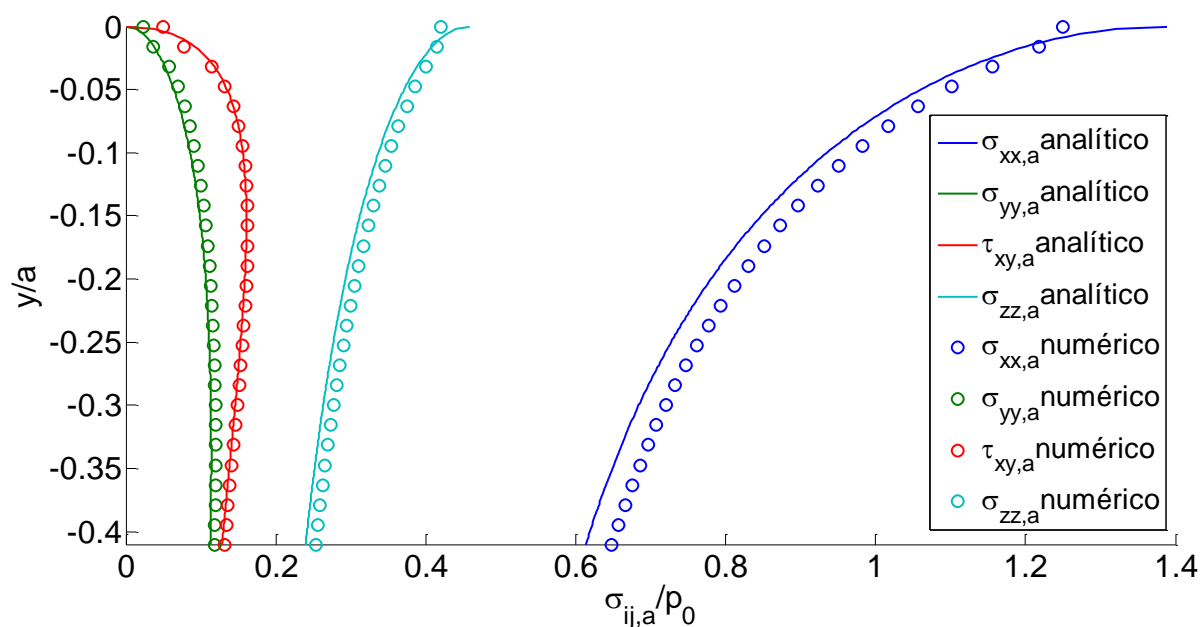


Figura 5.5 – Amplitude das componentes de tensão sob a superfície para uma sapata de alumínio em  $x/a=-1$ ,  $Q_{\max}/fP=0.62$  e  $\sigma_{B,\max}=0.4$ .

## 5.2 INFLUÊNCIA DO COMPRIMENTO EXPOSTO DA SAPATA

A segunda parte dos resultados consistiu em analisar de que forma a solução para uma sapata com comprimento exposto ( $H$ ) maior que zero difere da solução analítica. Em primeira análise foram realizadas simulações apenas de fretting, uma vez que o efeito da fadiga mascara as consequências do comprimento exposto, devido a não simetria da distribuição da tensão cisalhante em relação ao centro do contato. Posteriormente ela será incluída na simulação.

O primeiro passo desse estudo foi verificar se o comprimento exposto modificaria as dimensões dos parâmetros de contato. Na Tabela 5.4 fica claro que não houve modificações significativas nesses parâmetros.

Tabela 5.4 - Efeitos do comprimento exposto ( $H$ ) da sapata no problema

Material	H	$p_{0,num}$	Erro $p_0$	$a_{num}$	Erro $a$	$c_{num}$	Erro $c$
Alumínio	0	200.8	0.40%	0.7257	1.79±1.58%	0.4444	1.14±5.12%
Alumínio	5	201.2	0.60%	0.7257	1.79±1.58%	0.4444	2.41±5.12%
Alumínio	10	200.7	0.35%	0.7257	1.79±1.58%	0.4444	2.41±5.12%
Titânio	0	256.9	0.27%	0.5682	2.09±2.02%	0.3488	1.66%±6.56%
Titânio	5	257.1	0.35%	0.5682	2.09±2.02%	0.3488	1.66%±6.56%
Titânio	10	256.7	0.20%	0.5682	2.09±2.02%	0.3544	3.29%±6.56%
Aço	0	346.8	0.11%	0.4219	2.50±2.73%	0.2588	2.01±8.86%
Aço	5	346.9	0.14%	0.4219	2.50±2.73%	0.2644	4.22±8.86%
Aço	10	346.7	0.08%	0.4275	3.86%±2.73%	0.2588	2.01±8.86%

Com base nos resultados da Tabela 5.4 o passo seguinte foi tentar determinar a rotação da sapata ( $\theta$ ) e a translação da região de contato ( $\delta$ ), já apresentadas no capítulo 4. A Figura 5.6 ilustra bem esses efeitos, sendo que nela foi acrescentada também uma sapata com altura 20mm onde esses efeitos são amplificados, visando facilitar a compreensão do leitor. A distribuição de tensão dessa figura ocorre para o instante onde a carga cisalhante é máxima e aponta da esquerda para a direita. Portanto é possível observar que a translação na zona de adesão ocorre no mesmo sentido do deslocamento da sapata.

Na Figura 5.6 também é possível ver uma diferença entre o pico da tensão cisalhante à direita da zona de adesão comparado ao pico à esquerda. Essa diferença é mais evidente na curva que representa a curva da sapata de 5mm. Essa diferença entre os picos da tensão cisalhante não é proporcional à magnitude da rotação da sapata, que será quantificada posteriormente. Ela serve apenas como indicativo deste efeito.



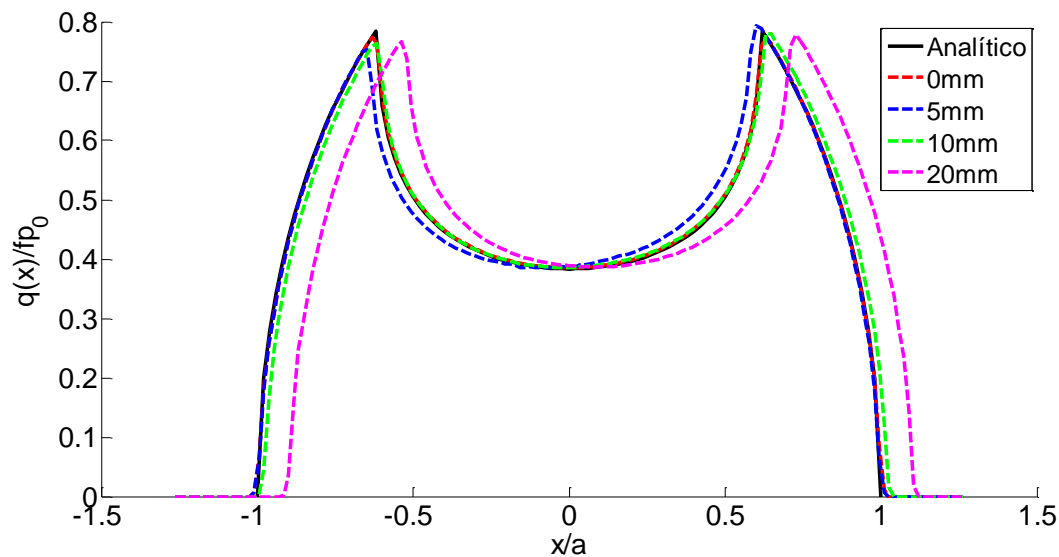


Figura 5.6 - Efeitos do comprimento exposto de uma sapata de alumínio no instante de carga cisalhante máxima com  $Q_{\max}/fP=0.62$  e sem tensão remota de fadiga

Em sapatas feitas de material com maior módulo de elasticidade como o aço, esse efeito é menos significativo como pode ser visto na Figura 5.7. Nessa primeira análise esses efeitos são mostrados apenas de forma qualitativa, para ilustrar o problema ao leitor, mas serão quantificados posteriormente.

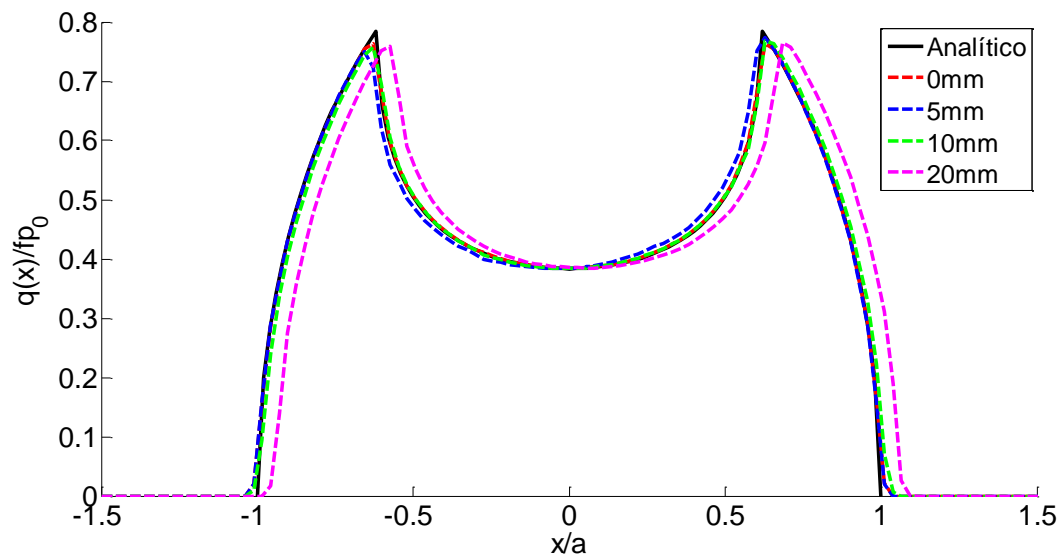


Figura 5.7 - Efeitos do comprimento exposto para uma sapata de aço no instante de carga cisalhante máxima com  $Q_{\max}/fP=0.62$  e sem tensão remota de fadiga

A fim de investigar mais a fundo os efeitos de rotação, optou-se por modelar uma sapata com largura “W” de 10mm e outra com “W” de 15mm, para compará-las com a sapata de 13mm. Essas sapatas irão apresentar valores diferentes para o momento de inércia de área e como essa relação varia proporcionalmente com o cubo da largura é de se esperar efeitos bem distintos.

Isso fica mais evidente na Figura 5.8 onde a translação da região de contato para a sapata com  $H=10\text{mm}$  foi bem mais acentuada.

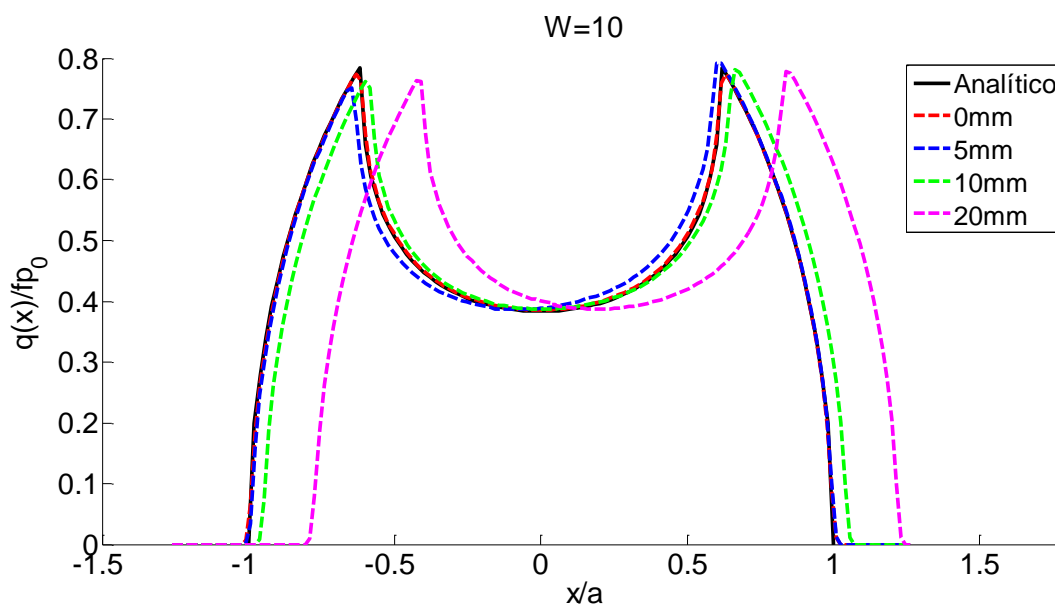


Figura 5.8 – Efeitos do comprimento exposto para uma sapata de alumínio com  $W=10\text{mm}$  no instante de carga cisalhante máxima com  $Q_{\text{max}}/fP=0.62$  e sem tensão remota de fadiga

Em uma análise mais quantitativa, a Tabela 5.5 mostra que a translação da região de contato e a rotação da sapata variam proporcionalmente com o comprimento exposto da sapata, e numa proporção inversa com a largura. A Figura 5.9 mostra graficamente a translação da região de contato para sapatas de alumínio com larguras de 10mm, 13mm e 15mm em função do comprimento exposto.

Tabela 5.5 – Translação da região de contato e rotação da sapata para diversas combinações de H e W

W (mm)	H (mm)	H/W	$\delta$ (mm)	$\theta$ (graus)
10	0	0	0	0
10	5	0.5	0.005625	0.0080
10	10	1	0.03375	0.0341
10	20	2	0.1575	0.1352
13	5	0.38	0.005625	0.0039
13	10	0.77	0.01125	0.0159
13	20	1.54	0.0675	0.0626
15	5	0.33	0.005625	0.0023
15	10	0.67	0.01125	0.0105
15	20	1.33	0.045	0.0416

O grande problema desse efeito é que a seção do corpo de prova onde ocorrem as maiores amplitudes de tensão e onde provavelmente ocorrerá a nucleação da trinca deixa de ser constante, passando a oscilar fase com a carga. Isso pode acabar afastando os resultados experimentais daqueles previstos pelo modelo analítico.

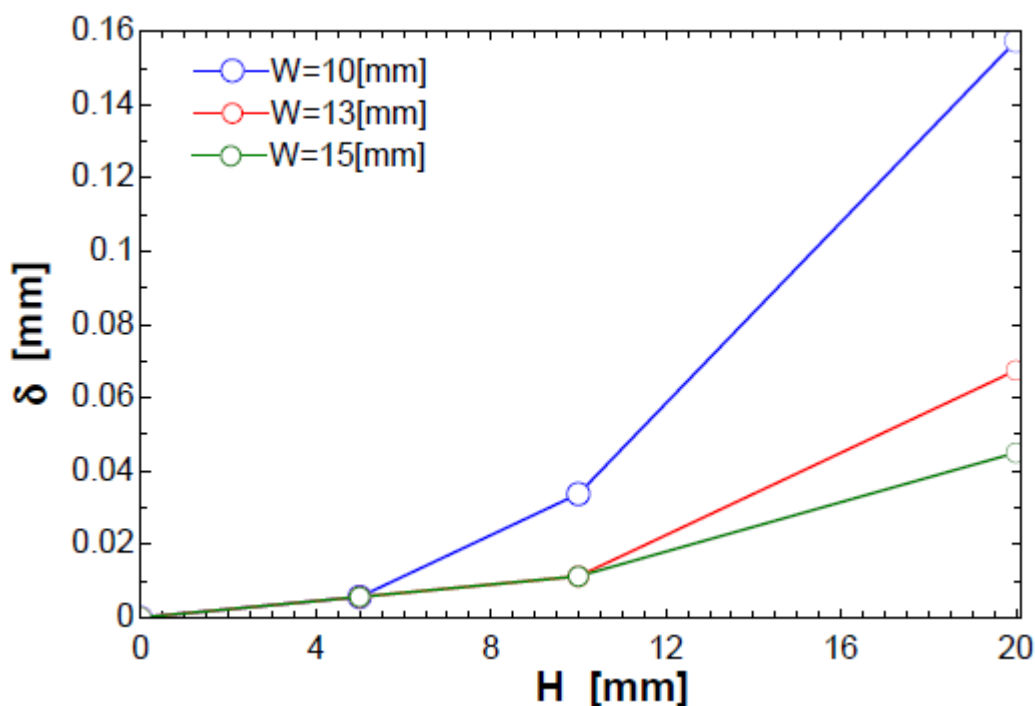


Figura 5.9 - Translação da zona de adesão para sapatas de alumínio com diversas alturas e larguras no instante de carga cisalhante máxima com  $Q_{max}/FP=0.62$  e sem carga remota de fadiga

Para a construção do Gráfico da Figura 5.9, foi necessário trabalhar com um refino de malha mais elevado, 320 elementos de 0.005625mm, para a sapata com altura de 5mm, uma vez que o valor da translação era inferior ao tamanho dos elementos (para 160 elementos) e por isso não era detectado. Esse problema já discutido anteriormente voltou a se repetir nessa análise. Por esse motivo, optou-se por trabalhar com a rotação da sapata já que esse valor não depende do tamanho dos elementos usados e é proporcional ao valor da translação da região de contato.

Para avaliar a rotação da sapata “ $\theta$ ”, calculou-se os deslocamentos verticais dos nós 1 e 2, mostrados na Figura 5.10, e dada a largura da sapata “W”, usou-se a Eq. (67). Nesse caso, como  $\theta$  é muito pequeno, desprezou-se o deslocamento horizontal dos pontos. Na medição do deslocamento vertical desses pontos é necessário descontar o efeito do deslocamento causado pela carga P. A medição foi feita para o valor de  $\theta_{max}$  que ocorre em conjunto com a carga tangencial máxima.

$$\sin(\theta) = \frac{x_1}{W/2} = \frac{x_2}{W/2} \quad (67)$$

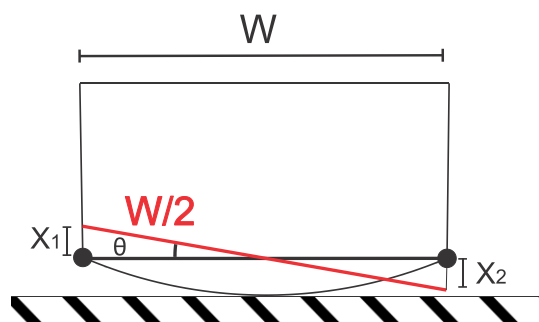


Figura 5.10 – Metodologia de medição da rotação da Sapata

O gráfico da Figura 5.11 ilustra o efeito da largura da sapata sobre a rotação. Assim como foi observado na translação da região de contato, as sapatas mais estreitas apresentaram rotações maiores. Nesse caso é possível ver que cada sapata apresentou uma rotação diferente e as medições não truncaram para o mesmo valor como aconteceu para as sapatas mais rígidas na análise de translação.

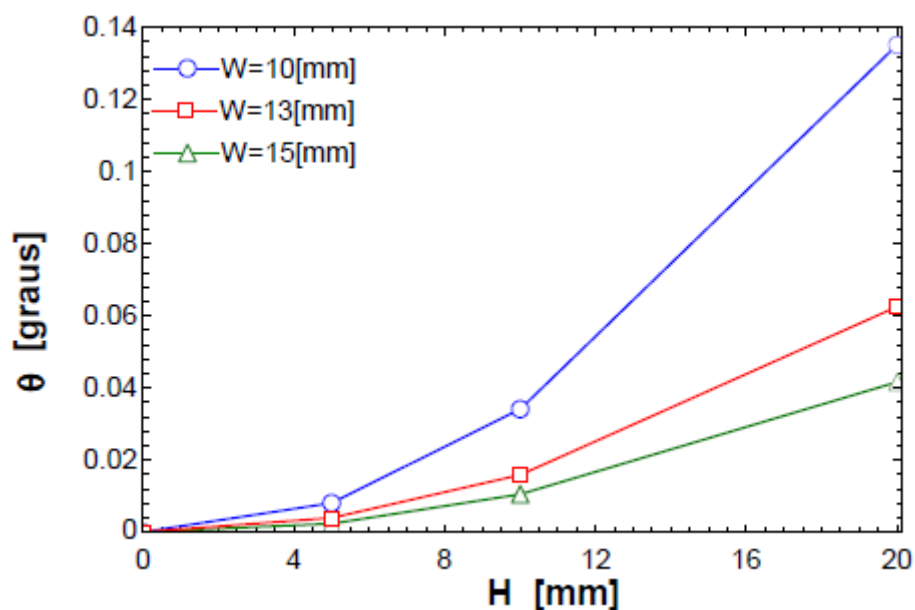


Figura 5.11 – Rotação de sapatas de alumínio com diversas alturas e larguras no instante de carga cisalhante máxima com  $Q_{max}/fP=0.62$  e sem carga remota de fadiga

Outro parâmetro que se optou por trabalhar nesse estudo foi o efeito da rigidez do material sobre a rotação da sapata. Para isso fixou-se a altura exposta em  $H=10\text{mm}$ , como nas sapatas usadas nos ensaios de *fretting* na UnB e variou-se sua largura e seu material. Os resultados são apresentados no gráfico da Figura 5.12 e na Tabela 5.6. Como era de se esperar, a rotação dos materiais foi inversamente proporcional à rigidez do material.

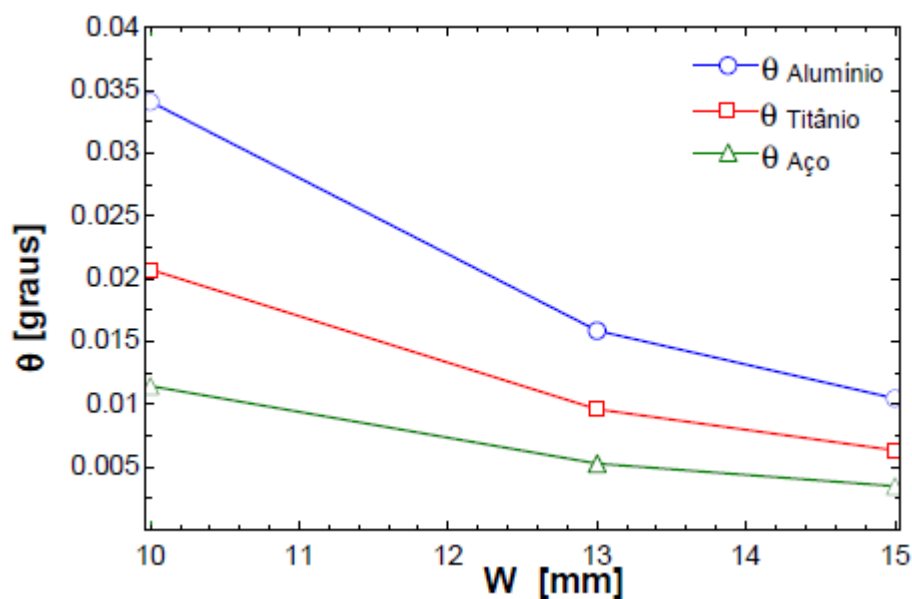


Figura 5.12 - Efeito da Rigidez do Material sobre a rotação de uma sapata com  $H=10\text{mm}$  no instante de carga cisalhante máxima com  $Q_{max}/fP=0.62$  e sem carga remota de fadiga

Tabela 5.6 - Rotação da sapata para diversos materiais com H=10mm

W (mm)	$\theta_{\text{Alumínio}}$ (graus)	$\theta_{\text{Titânio}}$ (graus)	$\theta_{\text{Aço}}$ (graus)
10	0.0341	0.0207	0.0115
13	0.0159	0.0096	0.0053
15	0.0105	0.0063	0.0035

A Figura 5.13 mostra como a rotação da sapata varia com a relação H/W. A informação nela contida pode auxiliar na escolha de uma sapata com a relação H/W apropriada para minimizar os efeitos da rotação. Nessa figura é interessante notar que, para relações de H/W inferiores a 0.8, os valores da rotação variam muito pouco. Já para valores maiores que esse, a inclinação da curva passa a ser cada vez mais acentuada entrando em uma faixa de dimensões indesejada para as sapatas.

Deve-se notar ainda que esse gráfico foi traçado considerando que o material utilizado para a sapata e o espécime é o alumínio, que possui o menor módulo de rigidez entre os 3 materiais estudados. Portanto, a recomendação de se trabalhar com relações de H/W inferiores a 0.8 também é válida para os demais materiais, já que estes irão apresentar rotações inferiores às do alumínio conforme o gráfico da Figura 5.12.

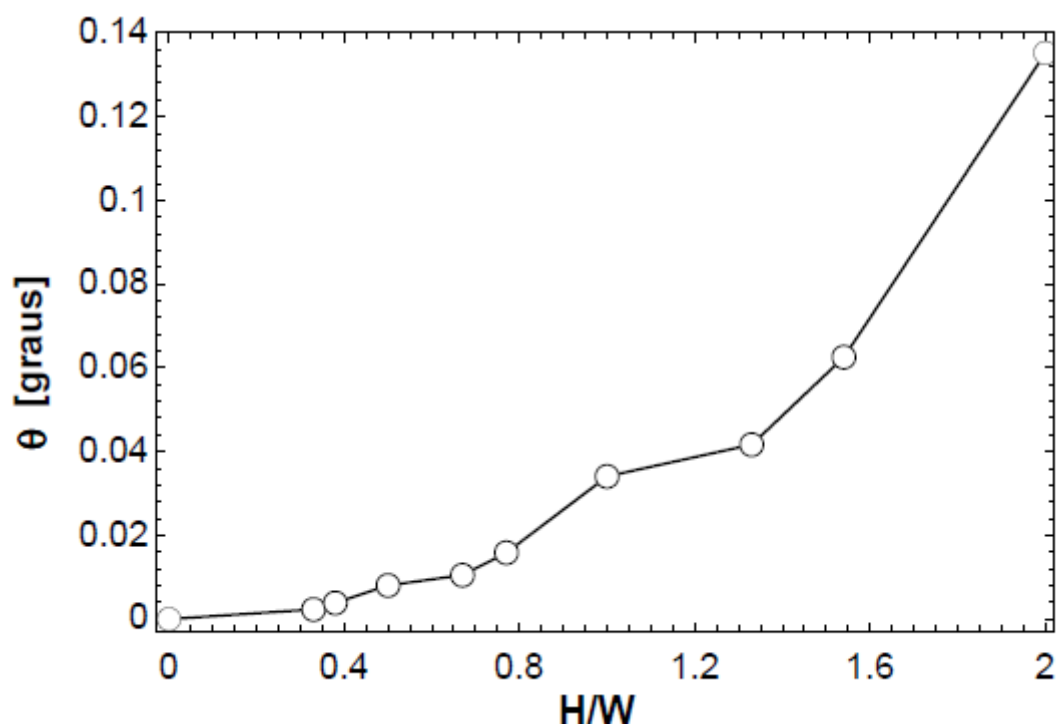


Figura 5.13 - Variação do ângulo de rotação com a relação H/W para sapatas de alumínio com  $Q_{\text{max}}/fP=0.62$

O último efeito estudado neste subcapítulo foi a influência da carga remota de fadiga sobre a rotação da sapata e a translação de região de contato. Até o momento esse efeito havia sido desprezado, pois esses parâmetros ficam mais evidentes e são mais facilmente compreendidos apenas na presença da carga cisalhante. Na presença da carga remota de fadiga é necessário descontar também o afinamento do corpo de prova causado pelo efeito de *poisson* aos se computar o deslocamento dos nós da sapata. Após a aplicação desse carregamento ficou evidente que ele não tem nenhum efeito

observável sobre a rotação da sapata de alumínio com  $H=10\text{mm}$ , como fica claro na Figura 5.14. Portanto os Resultados da Figura 5.13 continuam válidos também para ensaios de fadiga por *fretting*.

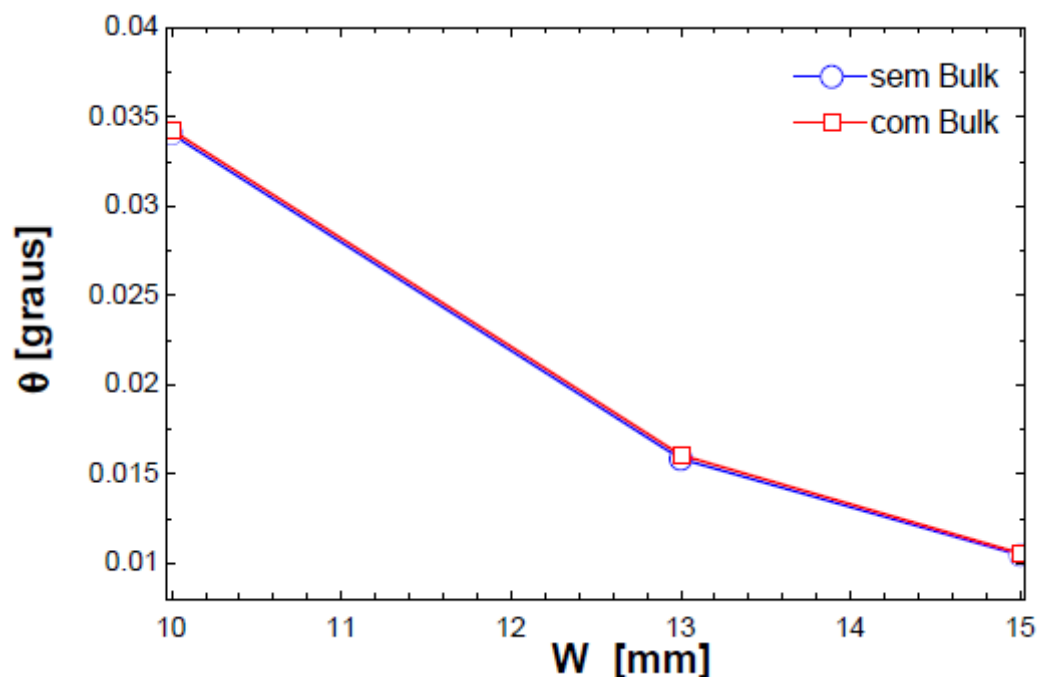


Figura 5.14 - Efeito da tensão remota de fadiga sobre a rotação de uma sapata de alumínio com  $H=10\text{mm}$  com  $Q_{\max}/fP=0.62$  e na curva que representa os dados com carga remota de fadiga  $\sigma_{B,\max}/p_0=0.4$ .

### 5.3 INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DO CORPO DE PROVA

Diversos autores já investigaram o efeito da espessura do espécime sobre o campo de tensões sob a superfície (Bentall e Johnson, 1968 e Nowell e Hills, 1988) e concluíram que as soluções diferem pouco da solução analítica, que considera o espécime como um semi-plano infinito, desde que a semi-espessura,  $b$ , do espécime seja pelo menos 5 vezes superior à semi-largura do contato ( $b/a > 5$ ). Como a relação  $b/a$  usada na modelagem foi de 9.12 não deveria haver problemas no sentido da espessura afetar o campo de tensão subsuperficial.

Por outro lado Fellows *et al.* (1995) mostrou que essa relação é aplicável somente as componentes  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ , que são praticamente indistinguíveis da solução de semi-plano infinito com  $b/a > 5$ , enquanto a componente  $\sigma_{xx}$ , e, por consequência, a componente  $\sigma_{zz}$ , apresentam diferenças da solução utilizando semi-plano infinito até para relações de  $b/a$  superiores a 10. Isso é válido para o campo de tensão gerado apenas pela carga normal (P). O artigo conclui também que o acréscimo da carga cisalhante (Q) não afeta consideravelmente a distribuição de  $\sigma_{xx}$ .

O problema em se assumir a condição de semi-plano infinito ao se trabalhar com corpos finos (*Thin Strip*) é que a componente  $\sigma_{xx}$  acaba sendo subestimada, uma vez que a solução de corpo fino apresenta componentes trativas de  $\sigma_{xx}$  na camada superficial, fato que não ocorre em na solução teórica. Deve-se observar que  $\sigma_{xx}$  é a componente de tensão mais severa e tem grande influência no

sentido de nuclear e propagar as trincas. Ainda nesse artigo (Fellows *et al.*, 1995) é proposta uma forma analítica de corrigir o valor da tensão  $\sigma_{xx}$  para levar em consideração o efeito da espessura finita quando os cilindros em contato são submetidos apenas à carga normal. Nesse caso, a nova solução irá diferir daquela com semi-plano infinito por um fator dado pela Eq. (67):

$$\sigma_c = \frac{ap_0}{2b} \quad (68)$$

Esse fator é acrescido no problema como uma tensão remota de fadiga média na componente de tensão  $\sigma_{xx}$  conforme ilustrado na Figura 5.15.

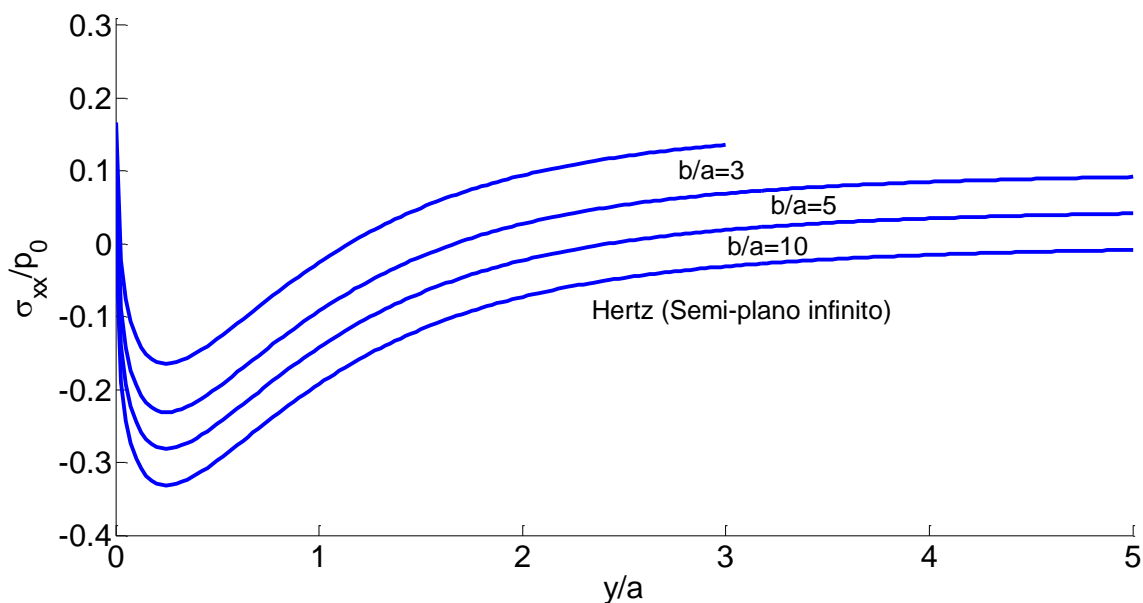


Figura 5.15 - Variação da componente de tensão  $\sigma_{xx}$  em  $x/a=1$  para diferentes espessuras do espécime

Atualmente o Laboratório de Ensaio Mecânicos da UnB trabalha com relações de  $b/a$  entre 5 e 9, e essa análise é importante para verificar se há uma necessidade de se alterar a espessura dos corpos de prova usados. Por isso foram criados 4 modelos com as relações  $b/a$  3, 5 e 10, usadas no artigo (Fellows *et al.*, 1995) e um corpo com  $b/a$  igual a 200 para simular a condição de semi-plano infinito. Nesses ensaios os corpos foram submetidos apenas a carga normal para obter as mesmas condições de carregamento do artigo. Os resultados para cada um dos corpos é apresentado nas Figuras 5.16 a 5.19.

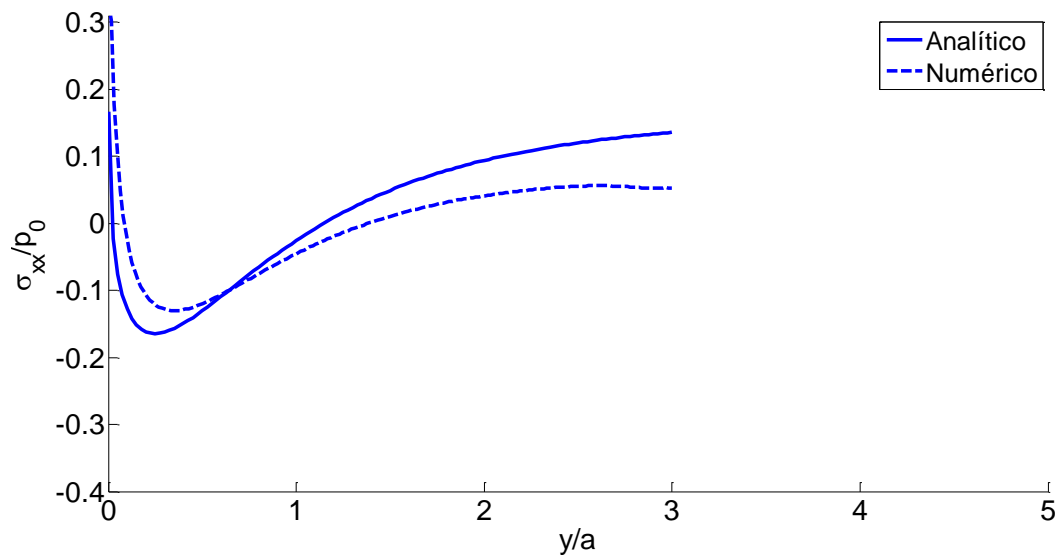


Figura 5.16 - Componente de Tensão  $\sigma_{xx}$  em  $x/a=1$  para espécime com espessura  $b/a=3$  submetido apenas à carga normal

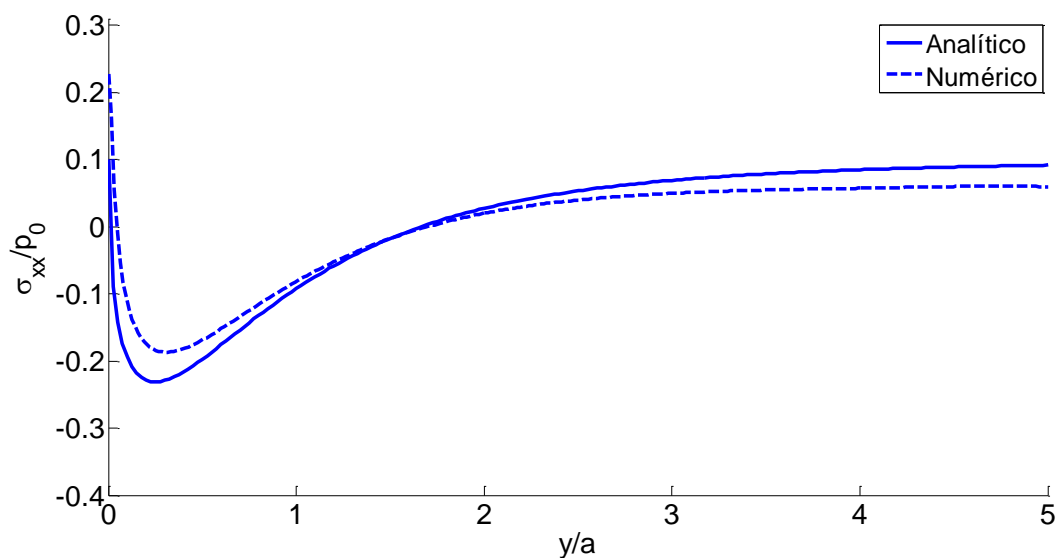


Figura 5.17 - Componente de Tensão  $\sigma_{xx}$  em  $x/a=1$  para espécime com espessura  $b/a=5$  submetido apenas à carga normal

Visando avaliar a acurácia dos resultados numéricos, comparou-se o valor mínimo da componente de tensão  $\sigma_{xx}$  com os valores obtidos a partir do modelo analítico e da Eq. (67). Escolheu-se esse ponto para a análise por ser o local onde o erro é máximo. Além disso, observou-se que também existe uma diferença entre o local de ocorrência do ponto de mínimo nas soluções analíticas e numéricas, e por isso determinou-se o erro associado à localização desse ponto. Esses valores são apresentados na Tabela 5.7

Tabela 5.7 – Erro do valor mínimo da componente de tensão  $\sigma_{xx}$  e de sua localização

$b/a$	$\sigma_{numérico,min}$ (MPa)	$\sigma_{analítico,min}$ (MPa)	Erro $\sigma_{min}$	$y/a_{numérico}$	$y/a_{analítico}$	Erro $y/a$
3	-24.50	-32.92	-20.82%	0.347	0.25	38.95%
5	-37.40	-46.25	-19.13%	0.316	0.25	26.32%
10	-49.92	-56.249	-11.25%	0.268	0.25	7.37%
200	-64.06	-66.25	-3.31%	0.252	0.25	0.80%



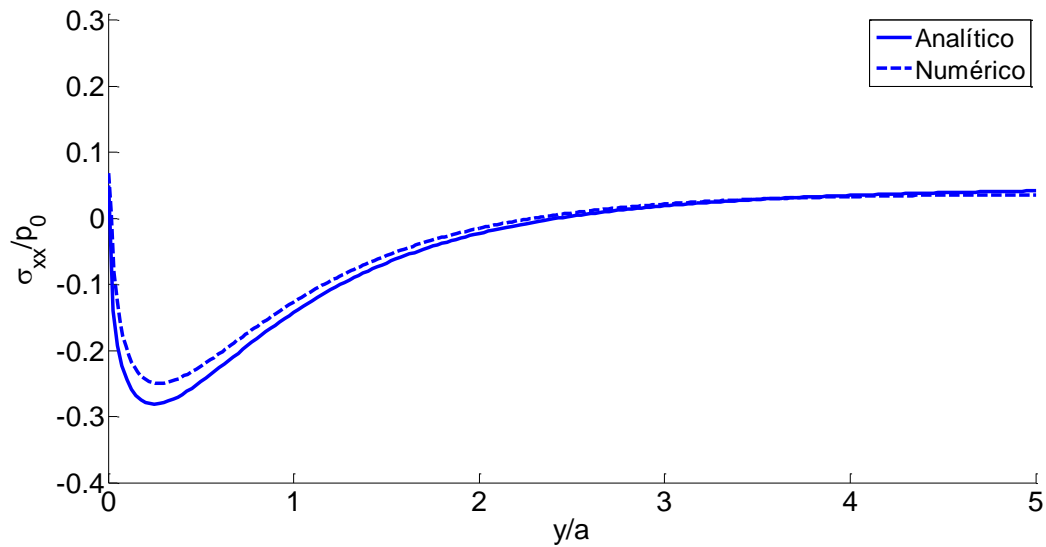


Figura 5.18 - Componente de Tensão  $\sigma_{xx}$  em  $x/a=1$  para espécime com espessura  $b/a=10$  submetido apenas à carga normal

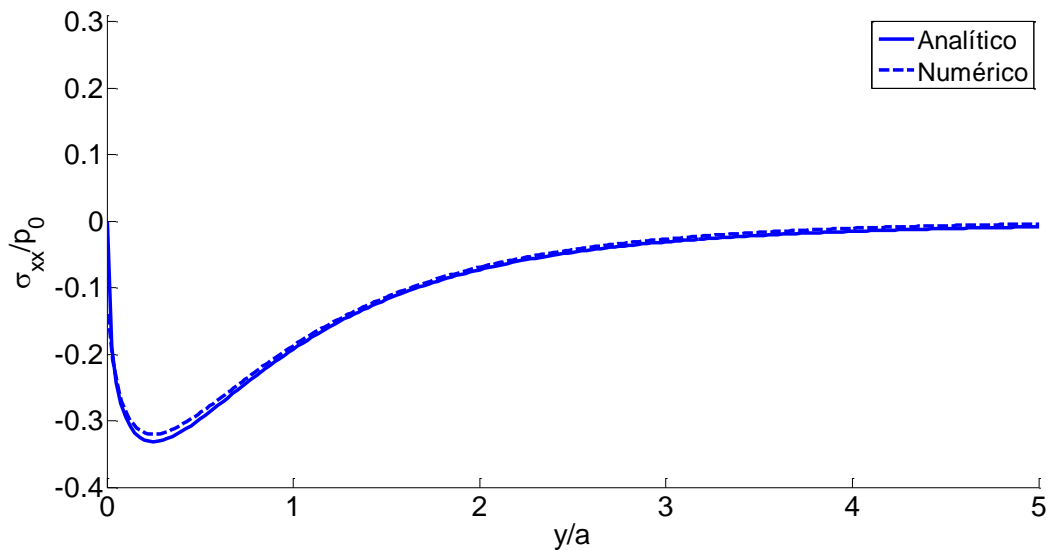


Figura 5.19 - Componente de Tensão  $\sigma_{xx}$  em  $x/a=1$  para espécime com espessura  $b/a=200$  submetido apenas à carga normal

Ao longo deste trabalho a imprecisão do ABAQUS em medir as componentes de tensão na superfície do contato já foi discutida diversas vezes. O que se observa é que nos primeiros pontos imediatamente sob a superfície os erros com relação a solução analítica são bem elevados, decaindo rapidamente a medida em que se adentra no contato. A magnitude dos erros da componente  $\sigma_{xx}$  na superfície do contato e em  $x/a=1$  é apresentada na Tabela 5.8. Vale lembrar que essa componente é a mais importante dentre as demais, por ter a maior magnitude, o que a torna a principal responsável pela nucleação e crescimento de trincas. Por esse motivo deve-se tomar cuidado especial com essa dificuldade do pacote de elementos finitos.

Tabela 5.8 – Erro das soluções analíticas e numéricas de corpo fino quando comparadas à solução de semi-plano infinito em  $y/a=0$  e  $x/a=1$

	$b/a=200$	$b/a=10$	$b/a=5$	$b/a=3$
Analítico	0%	4.95%	9.95%	16.6%
Numérico	-0.31%	9.35%	18.19%	27.0%

Com base nos resultados obtidos nessa análise pode-se dizer que, apesar de o ABAQUS não ter calculado com boa acurácia as componentes de tensão para relações de  $b/a$  menores que 5 (erros superiores a 18% para a componente  $\sigma_{xx}$  na superfície do contato e maiores que 19% para o ponto de mínima tensão), ele segue a mesma tendência dos resultados obtidos em *Fellows et al.* (1995) onde ao se computar o fato de se estar trabalhando com um corpo fino, a solução de campo de tensões subsuperficiais se distancia da solução de semi-plano infinito.

Isso também pode ser observado na distribuição da tensão cisalhante ao longo da superfície do contato, submetido apenas à carga normal ( $P$ ), apresentada na Figura 5.20. Essas tensões são particularmente importantes de se analisar, pois como falado anteriormente o ABAQUS apresentou certa imprecisão em medir valor da componente de tensão  $\sigma_{xx}$  na superfície do contato ( $x/a=1$ ). Para isso usou-se novamente o fator de correção proposto por *Fellows et al.* (1995). Vale ressaltar que o valor de  $\sigma_{xx}$  só foi plotado entre  $0 \leq x/a \leq 1$  pois ele é simétrico em relação ao centro do contato.

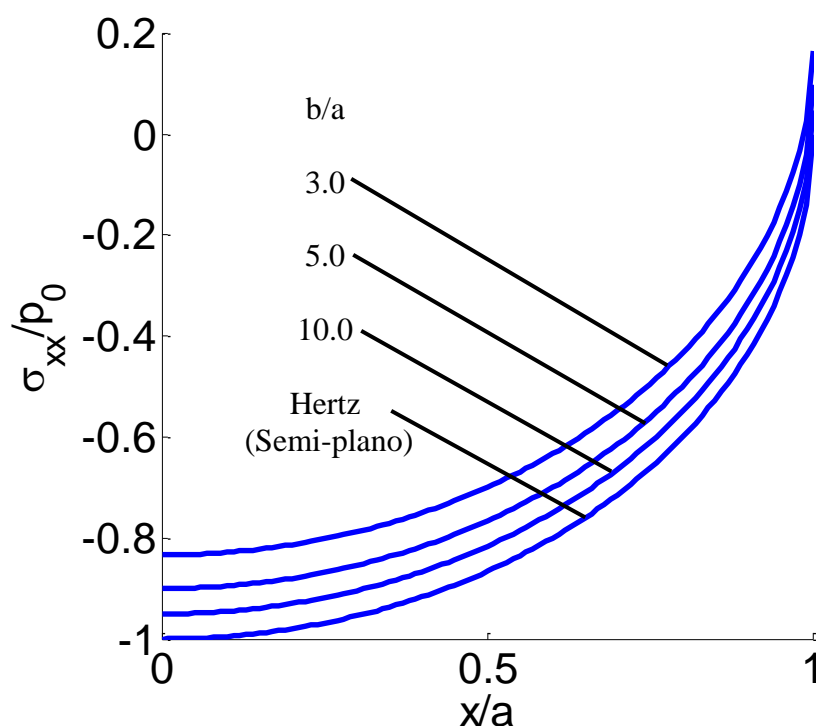


Figura 5.20 – Variação da componente de tensão  $\sigma_{xx}$  ao longo da superfície do contato ( $y/a=0$ ) para diferentes semi-espessuras de contato.

Os resultados numéricos para a componente  $\sigma_{xx}$  na superfície são apresentados na Figura 5.21. nela percebe-se que a medida em que a relação  $b/a$  diminui, os resultados numéricos se ajustam melhor ao modelo analítico na região próxima ao centro do contato. Os erros em  $x/a=0$  e  $y/a=0$  dos dados analíticos e numéricos em comparação com a solução de semi-plano infinito são apresentados

na Tabela 5.9. Por outro lado, relações  $b/a$  maiores ajustam melhor a curva nas extremidades da zona de adesão, conforme já foi apresentado na Tabela 5.8, e confirmado na Figura 5.21.

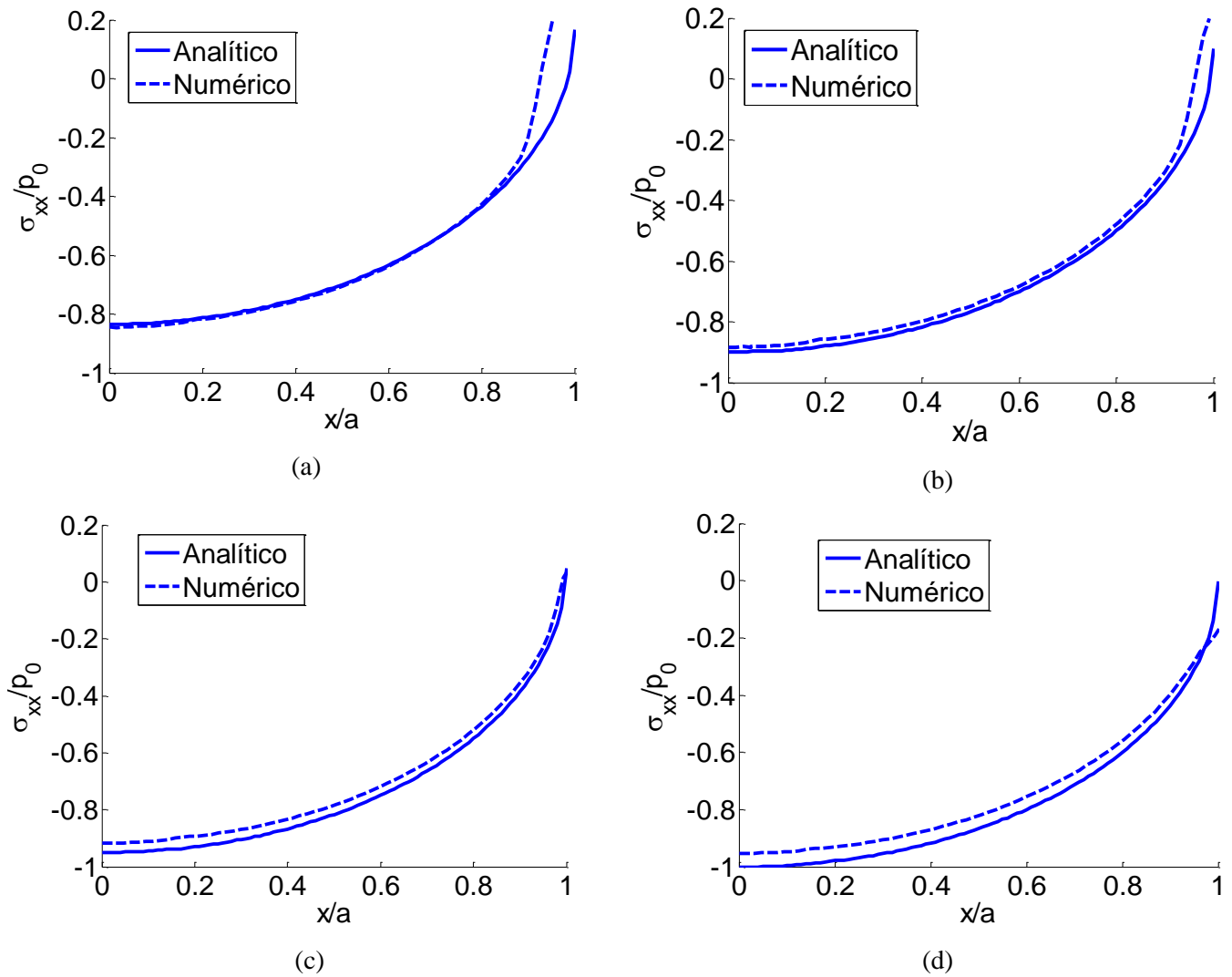


Figura 5.21 – Componente de tensão  $\sigma_{xx}$  analítica e numérica ao longo da superfície do contato ( $y/a=0$ ), apenas sob carregamento normal para (a)  $b/a=3$ , (b)  $b/a=5$ , (c)  $b/a=10$  e (d)  $b/a=200$  (comparada à solução de semi-plano infinito)

Tabela 5.9 – Erro das soluções analítica e numérica de corpo fino comparadas à de semi-plano infinito para  $y/a=0$  e  $x/a=0$

	$b/a=200$	$b/a=10$	$b/a=5$	$b/a=3$
Analítica	0%	-4.96%	-10%	-16.6%
Numérica	-4.76%	-8.27%	-11.7%	-15.6%

Uma segunda análise que pode ser feita com base nesses resultados é comparar os erros entre a solução numérica para corpos finos e a analítica de semi-plano infinito para a componente  $\sigma_{xx}$  quando submetido apenas à carga normal e quando submetida a todos os carregamentos (normal, tangencial e *bulk*) nas posições  $y/a=0.25$ .

Nesse caso, à medida que a carga cisalhante e a carga remota de fadiga aumentam, a contribuição dessas cargas para a componente  $\sigma_{xx}$  passa a ser mais significativa que a da carga normal. Por isso a diferença entre as soluções passa a ser percentualmente menor. Vamos tomar como exemplo o erro entre a solução numérica e a analítica de semi-plano infinito para um corpo com relação  $b/a=10$  submetido apenas à carga P. Nesse caso o erro será de aproximadamente -25%.

Agora se usarmos como comparação o mesmo modelo usado na Figura 5.5, com espessura  $2b=13\text{mm}$ , que gera uma relação  $b/a=9.12$ , que apresenta carga cisalhante e carga remota de fadiga suaves, ou seja, que não causam escorregamento reverso ( $e+c < a$ ), neste caso o erro entre a amplitude de tensão, que é a componente mais determinante para a propagação de trincas, em  $x/a=-1$ , será inferior a 6%. Vale ressaltar que quando o corpo é submetido apenas à carga normal, o campo de tensões susuperficial em  $x/a=1$  e  $x/a=-1$  é idêntico.

Portanto quanto maiores forem as relações  $Q_{\max}/fP$  e  $\sigma_{B,\max}/p_0$  (mas sem alcançar a condição de escorregamento reverso), menos graves serão as consequências de se trabalhar com um espécime de espessura finita.

A Figura 5.22 ajuda a esclarecer esse fenômeno. Ela mostra os resultados numéricos de um espécime de alumínio com diversas relações  $b/a$  submetido as componentes normal, tangencial e *bulk* descritas na Tabela 5.1 à uma distância  $y/a < 0.4$  comparados à solução teórica. Essa região foi escolhida por ser o local com maior probabilidade de iniciação de trincas. Nesse caso é possível perceber gráficamente que os erros entre a solução numérica de corpo fino e a solução analítica de semi-plano infinito são muito menos significativos. As relações  $b/a$  usadas advêm de corpos de prova com espessuras múltiplas do corpo de prova original, ou seja,  $b=13\text{mm}$ ,  $b=6.5\text{mm}$ ,  $b=3.25\text{mm}$  e  $b=1.625\text{mm}$ .

A Tabela 5.10 traz ainda os erros da amplitude de tensão  $\sigma_{xx}$  medidos nas posições  $y/a=0.25$  e  $y/a=0$  comparados à solução teórica, assim como foi feito no estudo do da tensão  $\sigma_{xx}$  devido apenas à carga normal. Esses erros foram bem inferiores àqueles das Tabelas 5.7 e 5.8.

Tabela 5.10 – Erro medidos em  $y/a=0.25$  e  $y/a=0$  comparados à solução de semi-plano infinito para corpos finos de alumínio em  $x/a= -1$ ,  $Q_{\max}/fP=0.62$  e  $\sigma_{B,\max}/p_0=0.4$

	$b/a=18.23$	$b/a=9.12$	$b/a=4.56$	$b/a=2.28$
Erro % em $y/a=0.25$	2.36%	4.41%	9.30%	18.55%
Erro % em $y/a=0$	-11.4%	-4.39%	-2.30%	3.21%

Na Tabela 5.10 e na Figura 5.23 percebe-se ainda que os erros na superfície do contato foram novamente discrepantes dos erros no restante da profundidade. Isso pode ser amenizado caso se opte por trabalhar com um número maior de elementos na região próxima do contato. Se tomarmos como exemplo o erro em  $y/a=0$  para  $b/a=9.12$ , na modelagem com elementos de  $0.01125\text{mm}$ , temos -4.39%. Ao se reduzir pela metade o tamanho do elemento é possível obter um erro de -1.37%. Em compensação o tempo de processamento passa de 5:58min para 47:18min.

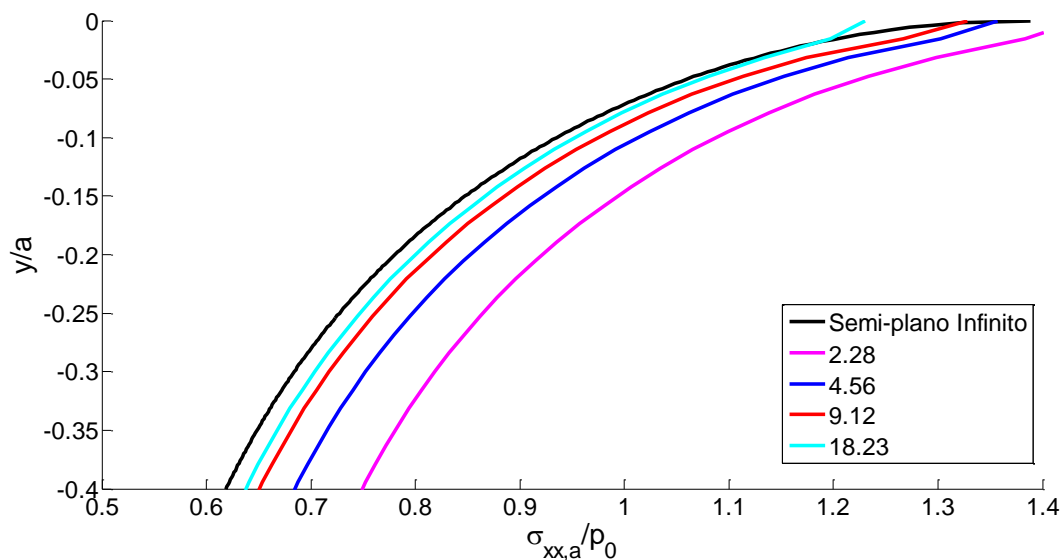


Figura 5.22 - Erros na amplitude da componente de tensão  $\sigma_{xx}$  para corpos de alumínio com espessura finita comparados à solução de semi-plano infinito em  $x/a=-1$ ,  $Q_{max}/fP=0.62$  e  $\sigma_{B,max}/p_0=0.4$

Portanto para as condições tipicamente ensaiadas no Laboratório de Ensaios Mecânicos da UnB o acréscimo da carga cisalhante e da carga remota de fadiga acaba reduzindo o impacto de se trabalhar com um espécime de espessura finita, desde que a relação  $b/a$  usada no experimento seja próxima de 10.

Por fim pode-se dizer que as informações contidas nesse capítulo são valiosas no projeto de um ensaio de fadiga por *fretting*. Elas mostram que existem limitações para os casos onde o modelo analítico pode ser aplicado, principalmente no que diz respeito às relações  $H/W$  e  $b/a$ . Logo, isso pode servir de base para a elaboração de dispositivo de ensaios experimentais de fadiga por *fretting* e de espécimes e sapatas para a realização dos testes.

## 6 CONCLUSÃO

*Este capítulo contém as conclusões sobre as limitações do uso da solução analítica em experimentos reais de fadiga por fretting, resume a acurácia dos dados obtidos com o ABAQUS e traz algumas considerações acerca do uso do software.*

A partir dos resultados obtidos com o pacote de elementos finitos ABAQUS na modelagem de um problema de contato sob condições de fadiga por fretting foi possível tecer diversas conclusões sobre os casos onde se pode trabalhar com a solução analítica. No que diz respeito à distribuição de tensão no contato para o conjunto espécime-sapata usado na UnB, os resultados foram extremamente acurados. Na comparação da solução numérica com a solução analítica do problema, os erros máximos obtidos para a pressão de pico,  $p_0$ , foram inferiores a 0.4% e para a semi-largura do contato,  $a$ , não excederam 2.5%.

Os erros para os parâmetros associados à carga cisalhante e à carga remota de fadiga foram ligeiramente superiores, mas ainda assim bem acurados. O erro máximo para a semi-largura da zona de adesão,  $c$ , foi inferior a 2% enquanto o erro do deslocamento desta manteve-se abaixo de 4.2%. Essa análise é válida para mais de um material, tendo sido desenvolvida neste trabalho para o aço, alumínio e titânio.

Em uma análise posterior observou-se que, ao se trabalhar com materiais com baixo módulo de elasticidade, como o alumínio, deve-se atentar para a relação H/W, pois quanto maior esse valor, maior será a rotação da sapata e por consequência mais elevado será a translação da região de contato. Concluiu-se ainda que relações de H/W até 0.8, como as usadas no Laboratório de ensaios mecânicos da UnB, não diferem tanto da solução analítica, apresentando baixos valores para a translação da região de contato e rotação da sapata. Essa relação também pode ser usada para materiais mais rígidos como o aço e o titânio, já que as rotações desses materiais serão ainda menores, conforme mostrado na Figura 5.12.

Outra relação estudada foi o efeito da espessura do corpo de prova sobre o campo de tensões sob a superfície. Nessa modelagem o ABAQUS apresentou erros elevados principalmente nas componentes de tensão na superfície do contato, chegando aproximadamente à -13% para o aço conforme a Tabela 5.3. Isso ocorre, pois ele não calcula a tensão exatamente na superfície do contato, e sim faz uma média das tensões nos arredores desse nó. Isso pode ser amenizado com um refino maior de malha, mas a um custo computacional bem superior. Ao se estudar a componente  $\sigma_{xx}$  apenas sob carregamento normal usando o modelo teórico proposto por Fellows *et al.* (1995), observa-se que

para relações de  $b/a$  iguais a 3, a solução analítica para  $\sigma_{xx}$  chega a diferir 16.6% na superfície do contato em  $x/a=1$ , enquanto a numérica difere 27%.

Apesar disso, concluiu-se que as discrepâncias com relação ao modelo analítico de semi-plano infinito passam a ser menos significativas ao se acrescentar as cargas tangencial e remota de fadiga, com valores tipicamente usados no Laboratório de Ensaios Mecânicos da UnB. Isso ocorre, pois a contribuição delas para  $\sigma_{xx}$  passa a ser mais significativa que a da carga normal, e o erro se torna percentualmente menor.

Pode-se dizer que o estudo realizado foi capaz de fornecer informações importantes acerca do comportamento de diversas geometrias do corpo de prova e da sapata para o desenvolvimento de um experimento de fadiga por *fretting*. Além disso, o tutorial elaborado e contido nos anexos deste trabalho facilita com que novos estudos sejam realizados, dando continuidade aos resultados obtidos neste trabalho.

Na maior parte das simulações o tempo de processamento não excedeu aos 8 minutos, devido, em grande parte, a possibilidade de se modelar o problema através de elementos lineares, cujo custo computacional é muito inferior aos elementos quadráticos e seus erros são praticamente os mesmos.

Com relação ao uso do software, não foram encontradas dificuldades na modelagem do problema, especialmente pela interface simplificada do mesmo e pelo manual do usuário que traz diversos esclarecimentos sobre o uso do pacote. Isso pode ser visto com maior clareza no tutorial desenvolvido neste trabalho. A grande desvantagem de se trabalhar com a interface gráfica do ABAQUS diz respeito ao tempo demandado para a geração e execução de cada modelo. Nesse caso é necessário lançar mão de uma programação em Python, por meio da qual é possível executar loops variando o parâmetro desejado e assim gerar resultados de forma mais rápida e eficiente, porém com um grau de complexidade mais elevado.

Em síntese os resultados deste trabalho indicam em que condições a solução analítica pode ser usada, o que pode ser de auxílio ao se desenvolver novos dispositivos experimentais de *fretting* e para a realização de modificações nos já existentes.

## 7 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Apesar de este trabalho apresentar resultados positivos quanto ao uso do ABAQUS na solução de problemas envolvendo *fretting*, apenas uma faixa estreita de situações foi simulada. Portanto seria necessário analisar outras configurações antes de tirar conclusões definitivas sobre o uso do pacote. Para isso ser alcançado poderiam ser feitas modificações nos parâmetros do modelo, como nas relações  $Q_{\max}/fPe$   $\sigma_{B,\max}/p_0$ , para verificar o comportamento do ABAQUS nessas situações.

Outra sugestão de pesquisa poderia ser expandir o modelo existente para um cenário 3D, para avaliar se a simplificação de estado plano de deformação é válida. Os resultados poderiam então ser comparados àqueles gerados na situação 2D e ao modelo analítico.

Por fim, poderia-se ainda estudar mais a fundo o campo de tensões sob a superfície para determinar a direção de crescimento de eventuais trincas que venham a surgir ou como a rotação da sapata em casos de comprimento exposto afeta o campo subsuperficial de tensões.



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Araújo, J. A. **On the Initiation and Arrest and Fretting Fatigue Cracks**. 2000. 231 f. Tese (D. Phil thesis), Oxford University, Oxford.
- Araújo, J. A., & Mamiya, E. N. **The application of a Mesoscopic scale approach in fretting fatigue**. 2003. ABCM, Vol. 25, pp.16-20.
- Araújo, J. A., Nowell, D., & Vivacqua, R. C. **The use of Multiaxial Fatigue models to predict fretting fatigue life of components subjected to different contact stress fields**. 2004. Fatigue Fract Engng Mater Struct, 27, pp. 967-978.
- Analysis User's Manual, ABAQUS 6.11, Volume V: **Prescribed Conditions, Constraints & Interactions**, D'S Simulia, 2011.
- Beard, J. **Palliatives for fretting fatigue**. In: Waterhouse RB, Lindley TC, editors. **Fretting fatigue, ESIS 18**. 2004. London: M.E.P; p. 419-36.
- Bentall, R. H., & Johnson, K. L. **An elastic strip in plane rolling contact**. 1968. Int. J. Mech. Sci., 10, pp. 637-663.
- Bramhall, R. **Studies in fretting fatigue**. 1973. 241 f. Tese (D. Phil. Thesis), Oxford University, Oxford.
- Castro, F. C, Araújo, J. A., Affonso, I. D., Santos. T. B. **Short Crack Arrest in fretting fatigue: comparative analysis between multiaxial stress and stress intensity factor based models**. 2011. 21st International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2011, 2011, Natal. Proceedings of COBEM 2011, 2011.
- Cattaneo, C. **Sul Contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi**. 1938. Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei, 27, Ser. 6, 342, 434, 474.
- Ciavarella, M. & Demelio, G. **A review of analytical aspects of fretting fatigue, with extension to damage parameters, and application to dovetail joints**. 2001. International Journal of Solids and Structures, 38, (10-13), 1971-1811.
- Dassault Systèmes, News and Media. Disponível em: <[http://www.3ds.com/company/news-media/press-releases-detail/release//single/873/?no\\_cache=1](http://www.3ds.com/company/news-media/press-releases-detail/release//single/873/?no_cache=1)>. Acesso em 30 de maio 2012.
- Departamento de Engenharia de Materiais, DEMAR, Escola de Engenharia de Lorena (EEL), **Método dos Elementos Finitos**. Disponível em: <[http://www.demar.eel.usp.br/metodos/mat\\_didatico/Metodo\\_dos\\_Elementos\\_Finitos.pdf](http://www.demar.eel.usp.br/metodos/mat_didatico/Metodo_dos_Elementos_Finitos.pdf)>. Acesso em 28 maio 2012.
- Eden, E. M., Rose, W. N., Cunningham, F. L. **The endurance of metals**. 1911. Proc I Mech E; 4:139.
- Farris, T. N., Szolwinsky, M. P., Harish, G. **Fretting in aerospace structures and materials**. 2000. In: Hoepfner DW, Chandrasekaran V, Elliott CB, editors. Fretting fatigue: current technology and practices, ASTM STP 1367. West Conshohocken, PA: ASTM; p. 523-37.
- Fellows, L. J., Nowell, D., Hills, D. A. **Contact stresses in a moderately thin strip** (with particular reference to fretting experiments). 1995. Wear, 185, pp. 235-238.
- Giannakopoulos, A. E., Lindley, T. C., Suresh, S. **Similarities of stress concentration in contact at round punches and fatigue at notches: implication to fretting fatigue crack initiation**. 2000. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 23/2000, p561,571.
- Harish, G. & Farris, T.N. **Shell modeling of fretting in riveted lap joints**. 1998. AIAA Journal, Vol. 36, No. 6.
- Hertz, H. **Über die Berührung fester elastischer Körper**. 1882. Jnl Reine und angewandte Mathematik, 92, pp. 156-171.

- Hills, D. A., Nowell, D., Sackfield, A. **Mechanics of Elastic Contacts**. 1993. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Hills, D. A. & Nowell, D. **Mechanics of Fretting Fatigue, Solid Mechanics and its Applications**. 1994. Kluwer Academic Publishers.
- Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and dynamic finite element analysis**. 1987. Prentice-Hall.
- Indian Institute of Technology Kanpur, Web course contents, **Finite Element Method**. Disponível em: < [http://ecourses.vtu.ac.in/nptel/courses/Webcourse-contents/IIT-KANPUR/FiniteElementMethod/lecture-9/9\\_3.htm](http://ecourses.vtu.ac.in/nptel/courses/Webcourse-contents/IIT-KANPUR/FiniteElementMethod/lecture-9/9_3.htm)>. Acesso em 7 de julho 2012.
- Martins, L. H. L. **Projeto de aparato experiemntal e avaliação da resistência à fadiga sob condições de fretting**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Publicação ENM.DM-125A/08, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF.
- McDowell, J. R. **Fretting Corrosion Tendencies of Several Combinations of Materials**. 1953. Symposium on Fretting Corrosion, ASTM STP 144, Philadelphia, pp. 24-39
- Mindlin, R. D. **Compliance of elastic bodies in contact**. 1949. *Int. App. Mech.*, 16, pp.259-268.
- Meriaux, J. **Etude Experimentale et modelisation de l'endommagement d'un contact aube/disque de soufflante soumis a des chargements de fretting fatigue**. 2010. 208 f. Tese (These pour obtenir le grade de Docteur), L'Ecole Centrale de Lyon, Lyon.
- Muskhelishvili, N. I. **Some basic problems of mathematical theory of elasticity**. 1953. Noordhoff, Groningen, 36, pp. 99-107.
- Nishioka, K., Hirakawa K. **Fundamental investigations of fretting fatigue (part 2) - Fretting fatigue test machine and some results**. 1969a. *Bull, JSME*, Vol. 12, No. 50, pp.180-187.
- Nishioka, K., Hirakawa, K. **Fundamental investigations of fretting fatigue (part 3) – Some phenomena and mechanisms of surface cracks**. 1969b. *Bull, JSME*, Vol. 12, No. 51, pp. 397-407.
- Nishioka, K., Hirakawa, K. **Fundamental investigations of fretting fatigue (part 4) – The effect of mean stress**. 1969c. *Bull, JSME*, Vol. 12, No. 52, pp. 408-414.
- Nishioka, K., Hirakawa, K.. **Fundamental investigations of fretting fatigue (part 5) – The effect of relative slip amplitude**. 1969d. *Bull, JSME*, Vol. 12, No. 52, pp. 692-697.
- Nishioka, K., Hirakawa, K. **Fundamental investigations of fretting fatigue (part 6)**. 1972. *Bull, JSME*, Vol. 15, No. 80, pp.135-144.
- Nowell, D. **An analysis of fretting fatigue**. 1988. 245 f. Tese (D. Phil. Thesis), Oxford University, Oxford.
- Nowell, D., Dini, D. **Stress Gradient Effects in fretting fatigue**. 2003. *Tribology International* 36, p.71-78
- Nowell, D., & Hills, D. A. **Contact problems incorporating elastic layers**. 1988. *Int. J. Mech. Sct.*, 24 (1), pp. 105-115.
- Pinheiro, P. A. B. **O uso do ANSYS para modelar o problema do contato entre cilindros em condições de fadiga por fretting**. 2011. 95 f. Dissertação (Projeto de Graduação), Publicação departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF.
- Ruiz, C., Boddington, P. H. B., Chen, K. C. **An investigation of fatigue and fretting in a dovetail joint**. 1984. *Exp Mech*; 24(3):208–17.
- Ruiz, C., Chen, K. C. **Life assessment of dovetail joints between blades and discs in aero-engines**. 1986. In: *Proc. Int. Conf. on Fatigue*. Sheffield: I. Mech. E.
- Ruiz, C., Nowell, D. **Designing against fretting fatigue in aeroengines**. 2000. In: Fuentes M, Elices M, Martin-Meizoso A, Martinez-Esnaola JM, editors. *Fracture mechanics, applications and challenges, Invited papers presented at the 13th European Conference on Fracture*, ESIS publication 26. Amsterdam: Elsevier; p. 73–95.

- Susmel, L. **Multiaxial notch fatigue: From nominal to local stress/strain quantities**. 2009. Woodhead Publishing Limited, UK.
- Thomson, D. **The national high cycle fatigue (HCF)**. 1998. Third Nat. Turbine Engine High Cycle Fatigue conference, Saint Antonio, Texas, CD-ROM proceedings, Strange, W. A. (Ed)
- Tomlinson, G. A. **The rusting of steel surfaces in contact**. 1927. Proceeding of the royal society, Vol. 115, pp. 472-483.
- Visgbo, O., Söderberg, S. **On fretting maps**. 1988. Wear; 126(2):131-47.
- Warlow-Davis, F. J. **Fretting corrosion and fatigue strength**. 1941. Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Vol. 146, pp. 32.
- Wittkowsky, B. U., Birch, P. R., Dominguez, J. and Suresh, S. **An Apparatus for quantitative fretting fatigue testing**. 1999. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures 22, Blackwell Science Ltd., p. 307-320.
- Wriggers, P. **Computational Contact Mechanics**. 2002. 1<sup>st</sup> Ed. John Wiley & Sons, LTD.

# ANEXOS

		Página
Anexo I	TUTORIAL PARA MODELAGEM DO PROBLEMA DE CONTATO ENTRE CILINDROS 2D NO ABAQUS	67
Anexo II	Rotina MATLAB para determinação da distribuição de Tensões no Contato	114
Anexo III	Rotina MATLAB da distribuição de tensões cisalhantes no carregamento	115
Anexo IV	Rotina MATLAB do efeito da carga remota de fadiga	117
Anexo V	Rotina MATLAB da amplitude do campo de tensões subsuperficiais	118