



PROJETO DE GRADUAÇÃO

NÃO-LINEARIDADES E CONTROLE EM UMA TRELIÇA PSEUDOELÁSTICA

Por,

Marcel Vítor Santana dos Santos

Brasília, 20 de junho de 2012

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**NÃO-LINEARIDADES E CONTROLE
EM UMA TRELIÇA PSEUDOELÁSTICA**

Por,

Marcel Vítor Santana dos Santos

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Aline Souza de Paula, UnB/ENM (Orientadora)

Prof. Alberto Carlos Diniz, UnB/ENM

Prof. Marcus Vinícius Girão de Moraes, UnB/ENM

Brasília, 20 de Junho de 2012

Aos meus pais Herminísia e Givaldo, e meus irmãos Larissa e Vinícius.

Marcel Vitor Santana dos Santos.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à minha família por todo o suporte que me foi dado em todos os momentos da minha vida. Sem dúvidas, o carinho e a confiança que recebi foram essenciais para tudo que conquistei até aqui.

Aos grandes amigos que me acompanharam em diversas ocasiões e fizeram com que os momentos partilhados na graduação ficassem muito mais divertidos. As conversas, projetos, desafios e conhecimentos trocados ao longo desses anos são grande parte da minha formação.

À professora Aline Souza, que se mostrou uma excelente orientadora e não mediu esforços para ensinar e oferecer todo o apoio necessário para a realização deste projeto, e ao professor Fernando Albuquerque de Oliveira, que me apresentou o universo fascinante dos sistemas complexos e me proporcionou momentos de grande crescimento acadêmico.

Marcel Vítor Santana dos Santos.

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade analisar e controlar um sistema mecânico composto por uma treliça de duas barras compostas de liga de memória de forma (SMA) que apresenta um comportamento *snap-through*. Este fenômeno é causado pela presença de não-linearidades geométricas que, dependendo do nível de carga aplicada, induzem o sistema à duas configurações instáveis no espaço. Além disso, a presença de não-linearidades constitutivas, introduzidas pela dinâmica de transição de fases existente em SMAs pode aumentar ainda mais a complexidade na resposta desse tipo de sistema. Para estabilizar o comportamento da treliça, sobretudo buscando evitar o *snap-through*, uma estratégia de controle foi empregada através da inserção de uma nova variável nas equações que governam o movimento. A variável e a lei de controle foram definidas através do método *Time-delay Feedback (TDF)*. Por último, uma investigação numérica foi feita para analisar a combinação dos valores dos parâmetros de controle capazes de induzir, no sistema inicialmente caótico, comportamentos quase-periódicos e periódicos.

ABSTRACT

This work has been conducted in order to analyze and control a mechanical system comprising a two-bar truss composed of shape memory alloy (SMA) that exhibit snap-through behavior. This phenomenon occurs due to the presence of geometric non-linearities which, depending on the load level applied, lead the system to two different unstable spatial configurations. Furthermore, the presence of constitutive non-linearities introduced by the dynamic of phase transition existing in SMAs can increase the complexity of such a system. Thus, in order to stabilize this kind of behavior, a control strategy was developed through the insertion of a new variable into the equations governing the motion, and their values were fed via the *Time-Delay Feedback (TDF)* method. Finally, a numerical investigation was conducted to find an optimal combination of parameters able to induce, in the original chaotic system, quasi-periodic and periodic behaviors.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS	1
1.1 Introdução.....	1
1.2 Objetivo.....	4
1.3 Organização do Trabalho	4
2. SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES.....	6
2.1 Espaço de Fase.....	6
2.2 Seção de Poincaré	7
2.3 Diagrama de Bifurcação	9
2.4 Expoente de Lyapunov	10
2.5 Determinação das Órbitas Periódicas Instáveis (OPI).....	11
3. MÉTODO PARA CONTROLE DE CAOS	13
3.1 Introdução.....	13
3.2 Método por realimentação com estados defasados (<i>TDF</i>)	14
3.3 Modelo matemático do método <i>TDF</i>	15
4. LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA (SMA).....	16
4.1 Considerações Metalúrgicas.....	16
4.2 Principais comportamentos termomecânicos	17
4.2.1 Efeito Pseudoelástico	17
4.2.2 Efeito de Memória de Forma	18
4.2.3 Transformação de Fase Devida à Variação de Temperatura	19
5. DINÂMICA DE UMA TRELIÇA DE VON MISES COMPOSTA POR SMA.....	20
5.1 Equações do Movimento	20
5.2 Identificação de comportamento caótico para vibração forçada	25
5.2.1 Análise do espaço de fase e seção de Poincaré ($\gamma = 0.01$ e $\pi = 0.3347$).....	27
5.2.2 Análise da dinâmica de transição de fase ($\gamma = 0.01$ e $\pi = 0.3347$)	27
5.3 Identificação de OPIs.....	29
6. CONTROLE DE UMA TRELIÇA DE VON MISES COMPOSTA POR SMA.....	30
6.1 Estratégia de controle	30
6.2 Resposta dinâmica do sistema forçado com ação de controle	32
6.3 Mapa de resultados	38
6.4 Padrões de comportamento caótico após ação de controle	40
6.5 Padrões de comportamento quase-periódico após a ação de controle	41
6.6 Padrões de comportamento periódico após a ação de controle	42
6.7 Análise de bifurcações.....	43
6.7.1 Controle de bifurcações – variação de frequência.....	43
6.7.2 Controle de bifurcações – variação de amplitude de forçamento	44
7. CONCLUSÃO	46
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ilustração de uma tubulação passando por uma depressão	2
Figura 2 - Espaço de fase para (a) período 1 (b) comportamento caótico	6
Figura 3 - Construção da seção de Poincaré	7
Figura 4 - Seção de Poincaré (a) Período 1 (b) Comportamento caótico.....	8
Figura 5 - Exemplo de diagrama de bifurcação	9
Figura 6 - Fases macroscópicas envolvidas no fenômeno memória de forma por tração.....	17
Figura 7 - Representação macroscópica do efeito pseudoelástico	17
Figura 8 - Representação macroscópica do efeito memória de forma	18
Figura 9 - Transformação de fase induzida por temperatura	19
Figura 10 - Treliça de duas barras (Von Mises).....	20
Figura 11 - Treliça de duas barras (Von Mises) composta por SMA	21
Figura 12 - Digrama da divisão do estado de fase	24
Figura 13 - Diagrama de bifurcação para variação de frequência.....	26
Figura 14 - Espaço de fase e seção de Poincaré ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$).....	27
Figura 15 - Dinâmica de transições de fase ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$) e diagrama tensão- deformação.....	28
Figura 16 - Algumas OPIs identificadas (a) Seção de Poincaré (b) Espaço de fase	29
Figura 17 - OPIs identificadas, em detalhe (a) Período 1 (b) Período 2 (c) Período 4	29
Figura 18 - Treliça de duas barras com natureza SMA com ação de controle.....	30
Figura 19 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 0$	33
Figura 20 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 0,5$	33
Figura 21 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 1$	35
Figura 22 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 1$, com transiente	36
Figura 23 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 2$ e $K = 0,7$	36
Figura 24 - Respostas do sistema (a) com transiente (b) sem transiente, para $\tau = 4$ e $K = 0,5$	37
Figura 25 - Comportamento caótico (a) $\tau = 1$ e $K = 0$ (b) $\tau = 2$ e $K = 0,1$ (c) $\tau = 2$ e $K = 0,4$..	40
Figura 26 - Comportamento quase-periódico (a) $\tau = 1$ e $K = 0,3$ (b) $\tau = 1$ e $K = 0,6$ (c) $\tau = 4$ e $K = 0,5$	41
Figura 27 - Comportamento periódico (a) $\tau = 1$ e $K = 0,1$ (b) $\tau = 1$ e $K = 0,35$ (c) $\tau = 2$ e $K =$ $0,7$	42
Figura 28 - Diagrama de bifurcação com variação de frequência, para $\tau = 1$ e $K = 1$, com ação de controle.....	43

Figura 29 - Diagrama de bifurcação com variação de amplitude para $\tau = 1$ e $K = 1$, com ação de controle..... 44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros constitutivos do sistema SMA..... 25

Tabela 2 - Resultados do comportamento do sistema, com variações de τ e K 38

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

1.1 Introdução

A ciência moderna define caos como sendo a ocorrência de comportamentos estocásticos em sistemas determinísticos. Considerando que o comportamento determinístico é governado por uma equação, enquanto que o comportamento estocástico obedece a uma função de distribuição de probabilidade, tem-se então que o caos, geralmente confundido com aleatoriedade, trata-se de um comportamento imprevisível inteiramente governado por uma equação de movimento (Stewart, 1991).

Diferentemente dos fenômenos aleatórios que apresentam uma resposta aleatória como consequência de uma entrada aleatória, no comportamento caótico, a partir de uma entrada totalmente conhecida e determinada, surge uma resposta aparentemente aleatória.

Uma característica marcante do comportamento caótico é a forte dependência em relação às condições iniciais e a pequenas perturbações do sistema. Além disso, no seu comportamento aparentemente aleatório e imprevisível, estão imersas infinitas órbitas periódicas instáveis (OPIs). Essa ordem escondida torna o comportamento muito mais compreensível e confere grande flexibilidade ao sistema (Lindner *et al.*, 1995).

O comportamento caótico em sistemas dinâmicos tem despertado grande interesse de pesquisadores e cientistas após Lorenz (1963) ter apresentado evidências da imprevisibilidade de modelos determinísticos de fenômenos meteorológicos. Além disso, a posterior verificação nas últimas décadas de que modelos dinâmicos simples podem apresentar respostas caóticas tem impulsionado ainda mais a pesquisa e a aplicação da teoria do caos em diversas áreas do conhecimento científico.

Atualmente, demonstra-se que sistemas dinâmicos de diversas áreas da ciência moderna possuem equações de governo não-lineares que apresentam um comportamento caótico, incluindo a engenharia, a medicina, a ecologia, a biologia e a economia.

A possibilidade para a ampla aplicação da teoria do caos se dá devido ao comportamento caótico estar vinculado às não-linearidades existentes nos sistemas de interesse. No campo da dinâmica de sistemas mecânicos, por exemplo, as não-linearidades se apresentam comumente sob duas formas básicas: as não-linearidades constitutivas e as geométricas. Ambas as formas estão presentes em diversos mecanismos. Essas não-linearidades podem induzir a um comportamento caótico.

O comportamento caótico pode ser tanto prejudicial, podendo acarretar falhas estruturais no sistema; como pode ser benéfico, por permitir que se explore a riqueza de possibilidades inerentes a este tipo de resposta. Como exemplo, tem-se que quando devidamente controlado, um sistema caótico pode ser estabilizado em diversas trajetórias periódicas diferentes. Portanto, é um tipo de sistema que oferece grande flexibilidade ao usuário, uma vez que, a princípio, pode-se estabilizá-lo em uma órbita

periódica que seja mais adequada em uma dada situação (Pereira-Pinto, 2004). Um ritmo extremamente regular pode estar associado a patologias como certos ritmos cardíacos, epilepsia, e tremores neurológicos. Por outro lado, existem fenômenos onde uma dinâmica regular está associada a um comportamento normal como os ciclos do sono e menstrual. Além disso, ritmos irregulares também podem representar patologias como as arritmias cardíacas e desordens neurológicas (Savi, 2006). O estudo do caos na engenharia recebeu um grande impulso após a observação de que sistemas mecânicos e elétricos não-lineares de baixa ordem podem se comportar caoticamente sob determinadas condições de operações. Uma das motivações deste trabalho é o interesse atual da engenharia em entender e poder explorar as peculiaridades do caos presentes no comportamento de determinados sistemas.

Há uma vasta literatura investigando este tipo de comportamento em sistemas mecânicos que pode ser justificado devido às características não-lineares. Características não-lineares de uma treliça têm sido extensamente estudadas com diferentes propósitos. A estabilidade de estruturas pode ser tratada, considerando uma treliça como um protótipo que representa seus principais aspectos. Bifurcações estão relacionadas a mudanças de situações de equilíbrio associadas, por exemplo, à flambagem. A treliça simétrica, conhecida como treliça de Von Mises, representa um dos sistemas mais populares relacionado à análise de estabilidade, definindo algumas das mais importantes características de estruturas em forma de arco plano e de muitos outros fenômenos físicos associados com a flambagem (Bazant & Cedolin, 1991).

É muito comum transportar gás, ou outros derivados do petróleo, por meio de tubulação passando por diversos tipos de terrenos, entre eles: fundo de rios, lagoas, baías, etc. Nestes ambientes, a estrutura poderá encontrar situações de trabalho inesperadas, como, por exemplo, estar apoiada ao longo de uma superfície irregular e sob influência de forças externa devido a correntezas, ondas, entre outras. Este tipo de situação serve para exemplificar a importância do estudo da treliça.

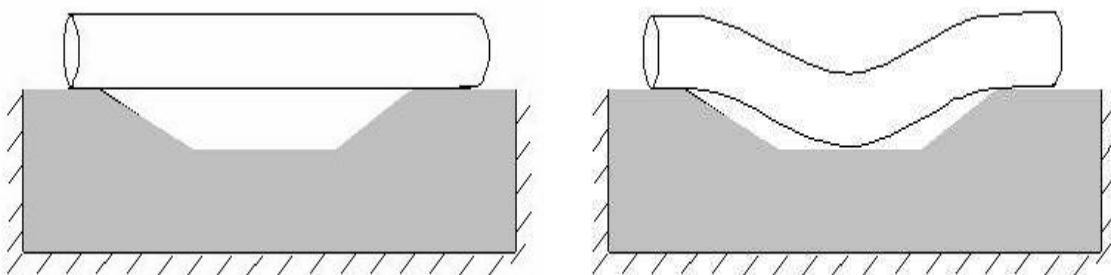


Figura 1 - Ilustração de uma tubulação passando por uma depressão

A Figura 1 ilustra uma tubulação ao longo de uma superfície com uma espécie de depressão. Com o passar do tempo, devido ao peso próprio e o efeito de fluência do material, a tubulação tenderá a

responder como uma estrutura em forma de arco plano. Sob esses aspectos, a estrutura em questão pode ser modelada como uma treliça sendo submetida a um forçamento externo, e ter suas principais características representadas por ela, entre elas a estabilidade.

Uma das características da treliça de Von Mises é que, dado um nível de carga, duas configurações de deslocamento são possíveis: uma para deslocamento positivo, e outra para deslocamento negativo. Se a estrutura está carregada com uma força aumentando uniformemente, o deslocamento pode passar de uma configuração para outra, apresentando o comportamento *snap-through*. Aspectos de flambagem pós-crítica em diferentes tipos de estruturas são normalmente analisados considerando o comportamento *snap-through* como nas treliças (Tada & Suito, 1998), cascas cilíndricas (Gonçalves & Del Prado, 2002; Soliman & Gonçalves, 2003), filmes finos (Parry et al., 2005), falhas de compósitos laminados (Choi et al., 1999).

O comportamento *snap-through* está associado a uma não-linearidade geométrica e, por esta razão, a dinâmica não-linear da treliça de Von Mises pode exibir um número interessante de comportamentos complexos. A combinação da não-linearidade geométrica com a constitutiva pode aumentar ainda mais a complexidade da dinâmica não-linear deste tipo de sistema. Yankelevsky (1999) apresenta o comportamento do material elasto-plástico demonstrando suas influências na resposta dinâmica da treliça. Savi et al. (2002 (a)) analisa uma treliça construída com ligas de memória de forma (Shape Memory Alloys - SMAs), que também apresenta um comportamento muito complexo devido às não-linearidades geométricas e constitutivas. Nogueira (2010) também analisa a resposta dinâmica desse tipo de sistema, identificando comportamentos caóticos, quase-periódicos e periódicos para vibrações livres e forçadas. Os resultados numéricos desse trabalho serão utilizados como base para o presente texto.

As ligas com memória de forma pertencem à classe de materiais inteligentes e estão sendo usadas em diferentes tipos de aplicações (Paiva & Savi, 2006; Machado & Savi, 2003). Entre diferentes comportamentos termomecânicos, as SMAs apresentam o efeito de pseudoelasticidade e o efeito de memória de forma, onde ambos estão associados a transformações martensíticas. O efeito de memória de forma está presente em várias ligas metálicas, sendo um fenômeno onde objetos deformados podem recuperar sua forma original ao serem aquecidos. O comportamento pseudoelástico, por outro lado, é caracterizado pela completa recuperação da deformação após ser submetido a um ciclo de carga-descarga, passando por um laço de histerese que dissipa energia (Paiva & Savi, 2006).

A dinâmica não-linear de osciladores construídos com elementos de SMA é tratada em diferentes referências, e apresentam um comportamento muito complexo (Savi & Braga, 1993a,b; Machado et al., 2004; Savi & Pacheco, 2002 (a); Machado et al., 2003; Lacarbonara & Vestroni, 2003; Lacarbonara et al., 2004; Bernardini & Rega, 2005; Savi et al., 2006; Santos & Savi, 2007).

1.2 Objetivo

O principal objetivo deste trabalho é analisar e controlar a resposta dinâmica de uma treliça pseudoelástica que representa um protótipo de um sistema estrutural que exhibe não-linearidades geométricas e constitutivas. Barras adaptativas construídas a partir de atuadores de SMA são exemplos de sistemas dinâmicos que podem se comportar como a estrutura considerada neste trabalho. Savi et al. (2002 (b)) tratam uma treliça de SMA considerando um modelo constitutivo polinomial para descrever o comportamento termomecânico da barra com SMA. Este modelo simples pode representar alguns aspectos do comportamento SMA, mas não é adequado para representar o laço de histerese. Aqui, um modelo constitutivo mais sofisticado é empregado a fim de descrever o comportamento termomecânico das SMAs (Paiva et al., 2005; Savi & Paiva, 2005). Este modelo constitutivo possui boa concordância com dados experimentais e, portanto, pode representar mais precisamente o comportamento qualitativo analisado na referência citada. Um procedimento numérico iterativo baseado na técnica de partição do operador (Ortiz et al., 1983), no algoritmo de projeção ortogonal (Savi et al., 2002 (b)) e no método clássico Runge-Kutta de quarta ordem é desenvolvido para tratar as não-linearidades na formulação. A investigação numérica desse sistema é feita considerando respostas livres e forçadas.

A partir da identificação de um caso de estudo com resposta forçada que apresenta comportamento caótico, uma nova formulação matemática foi desenvolvida para permitir uma ação de controle sobre o sistema, através da inserção de um termo que altera as equações de movimento. Para alimentar o comportamento desse novo parâmetro, utilizou-se um método de controle baseado em realimentação de estados defasados, conhecido como *TDF* (*Time-delay Feedback*).

Após investigar a capacidade do método *TDF* em estabilizar o sistema não-linear em questão, realizada com a utilização de valores dos parâmetros de controle adequados, os diferentes comportamentos obtidos são apresentados, demonstrando a eficácia da abordagem que foi desenvolvida. Por último, padrões de respostas caóticas, quase-periódicas e periódicas obtidas após a inserção do termo de controle são identificados, e uma análise de controle de bifurcação é feita, demonstrando que o método de controle é válido para diferentes valores de frequência e amplitude de forçamento, garantindo-lhe, assim, uma determinada robustez.

1.3 Organização do Trabalho

O trabalho é dividido em 7 capítulos. Neste primeiro capítulo uma introdução é apresentada. No segundo, conceitos sobre a identificação, classificação e análise de sistemas não-lineares são descritos. No capítulo 3, o método de controle *TDF* é apresentado. No quarto capítulo, alguns conceitos gerais sobre o comportamento de ligas de memória de forma (SMA) são discutidos. O capítulo 5 apresenta a análise dinâmica da treliça de Von Mises com memória de forma sem ação de controle. Incluem-se também neste capítulo as equações do movimento, a tabela dos parâmetros constitutivos utilizados na

simulação, e os tipos de respostas encontradas. No sexto capítulo, a abordagem de controle é apresentada, juntamente com os resultados obtidos e os padrões identificados no decorrer da dinâmica. No sétimo e último capítulo são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras do trabalho.

2. SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

O objetivo deste capítulo é apresentar ferramentas para análise da dinâmica de sistemas não-lineares. Esta análise possui duas abordagens distintas. Uma delas é qualitativa, onde o objetivo principal é entender o comportamento global da evolução do sistema dinâmico. Enquanto a outra é quantitativa e procura analisar a evolução do sistema no tempo.

Para isso, alguns conceitos fundamentais para uma análise qualitativa do sistema dinâmico: espaço de fase, seção de Poincaré, assim como o diagrama de bifurcação, são introduzidos. Esses conceitos são essenciais para a abordagem quantitativa, na medida em que fornecem uma compreensão global do comportamento do sistema. Além disso, apresenta-se o invariante dinâmico denominado expoente de Lyapunov. Por último, o método dos pontos recorrentes próximos (Auerbach et al, 1987), utilizado para o reconhecimento das órbitas periódicas instáveis (OPIs) imersas no atrator do sistema, é apresentado.

2.1 Espaço de Fase

O espaço de fase ou espaço de estado pode ser definido como o espaço vetorial de um sistema dinâmico, representado pelas suas variáveis dependentes. Cada ponto do espaço de fase representa um estado do sistema, e por esse ponto, passa apenas uma trajetória. À medida que sistema evolui no tempo, os sucessivos pontos traçam uma curva no espaço de fase, definindo uma dinâmica.

Quando o sistema exhibe um comportamento periódico, o sistema visita repetidas vezes o mesmo conjunto de pontos, originando, assim, uma curva fechada. No entanto, no caso de sistemas em regime caótico, devido à falta de periodicidade, as trajetórias nunca se fecham. Cabe ressaltar que sistemas quase-periódicos também apresentam como trajetória uma curva aberta. A Figura 2 (a) apresenta uma trajetória caracterizada por um período 1, enquanto a Figura 2 (b) apresenta uma trajetória caótica. Ambas as trajetórias foram geradas numericamente através de simulações do sistema que será estudado mais adiante.

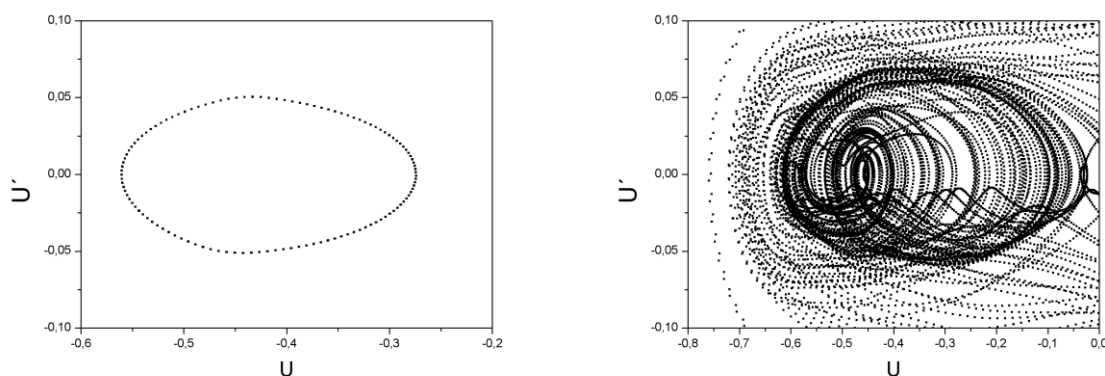


Figura 2 - Espaço de fase para (a) período 1 (b) comportamento caótico

Uma solução periódica é aquela que se repete em um dado intervalo de tempo denominado período. Assim, se T é um período de um movimento representado na dinâmica do espaço de fase, então qualquer período pode ser representado por $k*T$, onde k é qualquer número inteiro.

2.2 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é um procedimento muito utilizado, que possibilita uma melhor compreensão da dinâmica global do sistema através de uma identificação sintética do comportamento apresentado no espaço de fase. Este procedimento permite que um sistema dinâmico contínuo no tempo (fluxo) seja modelado como um sistema discreto (mapa), reduzindo-se, desta forma, uma dimensão do sistema.

A construção do mapa baseia-se na determinação dos pontos de interseção da trajetória do sistema com um hiperplano. O mapa, então, é definido por um ponto escolhido arbitrariamente no espaço de fase e pela condição de perpendicularidade desse hiperplano com a trajetória que passa pelo plano escolhido. O conjunto desses pontos de interseção constitui um mapa de Poincaré do sistema e o hiperplano escolhido é chamado de seção de Poincaré (Otani e Jones, 1987).

Não existe um método geral para a construção de uma seção de Poincaré. No entanto, para sistemas sujeitos a um forçamento periódico, é comum a adoção como seção de Poincaré uma superfície relacionada a uma determinada fase de forçamento, como mostrado na Figura 3. Portanto, a trajetória é amostrada a cada intervalo discreto de tempo, dando origem à seção de Poincaré. Desta forma, a variável de tempo é eliminada.

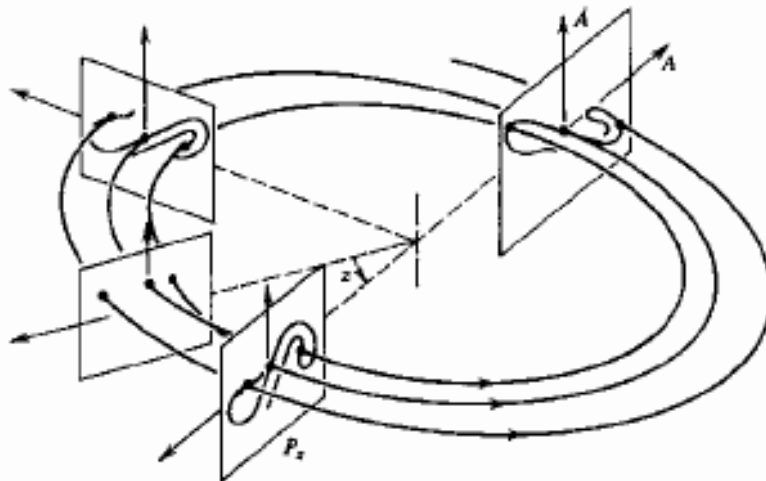


Figura 3 - Construção da seção de Poincaré

Desse modo, o intervalo de tempo entre cada amostragem é igual ao período de forçamento, $T = 2\pi/\omega$, e algumas configurações são passíveis de serem verificadas em uma seção de Poincaré:

- Um único ponto para casos de órbitas de período 1, com frequência igual a ω .
- Um conjunto de pontos para o caso de órbitas com uma frequência múltipla de ω . Dois pontos, por exemplo, para órbita de período 2 e três pontos para órbitas de período 3.
- Uma curva fechada para o caso de quase-periodicidade.
- Um conjunto infinito de pontos organizados que geralmente possuem geometria fractal com regiões vazias e regiões densas, organizadas em lamelas. Esse conjunto pode representar um atrator estranho, para o caso de movimento caótico; ou uma sela caótica, para o caso de caos transiente.

Embora a sela caótica possua um número infinito de pontos, para o caso de caos transiente tem-se apenas um número finito de pontos na seção de Poincaré, considerando que essas selas caóticas são repulsoras. Usualmente os sistemas caóticos possuem uma natureza fractal exibida no atrator estranho. Essa mesma característica fractal pode ser observada em uma sela caótica, para sistemas que apresentam caos transiente. No entanto, enquanto o atrator estranho é atrativo, a sela caótica é repulsiva.

O atrator caótico é definido como um conjunto fechado, invariante e ergódico que atrai todas as órbitas que se iniciam em alguma vizinhança. A ergodicidade significa que cada ponto neste conjunto é visitado em algum momento da evolução do sistema. A existência de uma órbita densa, geralmente em forma de ferradura, implica que o sistema é ergódico (Pereira-Pinto, 2004).

A Figura 4 mostra seções de Poincaré obtidas numericamente, associadas à fase de forçamento de 0° . A Figura 4 (a) revela uma órbita de período 1, caracterizada por um ponto na seção. A Figura 4 (b) apresenta um atrator estranho relacionado a um comportamento tipicamente caótico. Nota-se que, para o caso do comportamento caótico evidenciado no segundo caso, é possível observar um conjunto de pontos organizados sob uma estrutura fractal.

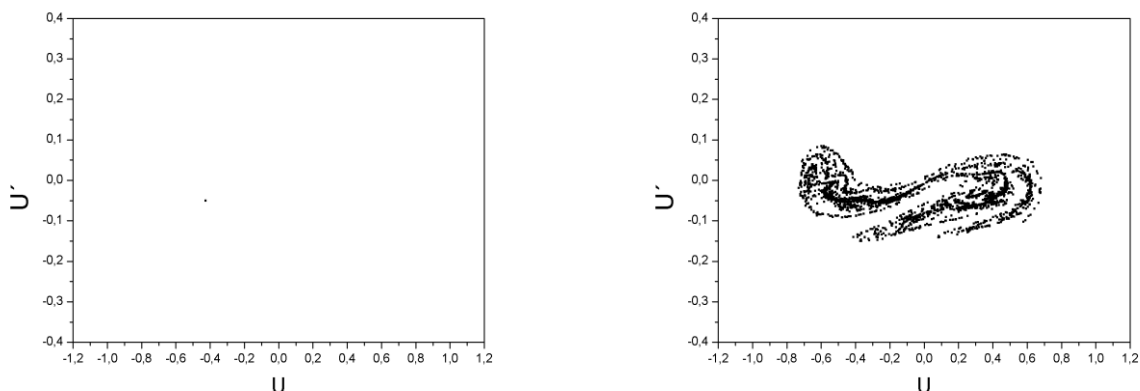


Figura 4 - Seção de Poincaré (a) Período 1 (b) Comportamento caótico

2.3 Diagrama de Bifurcação

O termo bifurcação está associado a uma mudança qualitativa na natureza da resposta do sistema, como consequência da variação de qualquer um de seus parâmetros. Os diagramas de bifurcação são bastante utilizados para analisar o comportamento global do sistema, avaliando onde e como ocorrem mudanças na resposta do sistema.

As variações na resposta de um sistema que conduzem ao surgimento do comportamento caótico são chamadas de rotas para o caos, e podem ser divididas em duas categorias:

- Bifurcações locais, que incluem as sequências de bifurcações, como por exemplo, duplicação de período.
- Bifurcações globais, que são caracterizadas por mudanças bruscas de comportamentos regulares para caóticos e vice-versa, como no caso de ocorrência de crise, fenômeno que ocasiona mudanças repentinas na dinâmica caótica.

O fenômeno da bifurcação está estreitamente relacionado com a existência do caos no sentido de que um sistema dinâmico que não apresenta algum tipo de bifurcação não apresenta uma resposta caótica. Deve-se destacar, no entanto, que a recíproca não é verdadeira, ou seja, um sistema que apresente bifurcações não necessariamente apresenta uma resposta caótica.

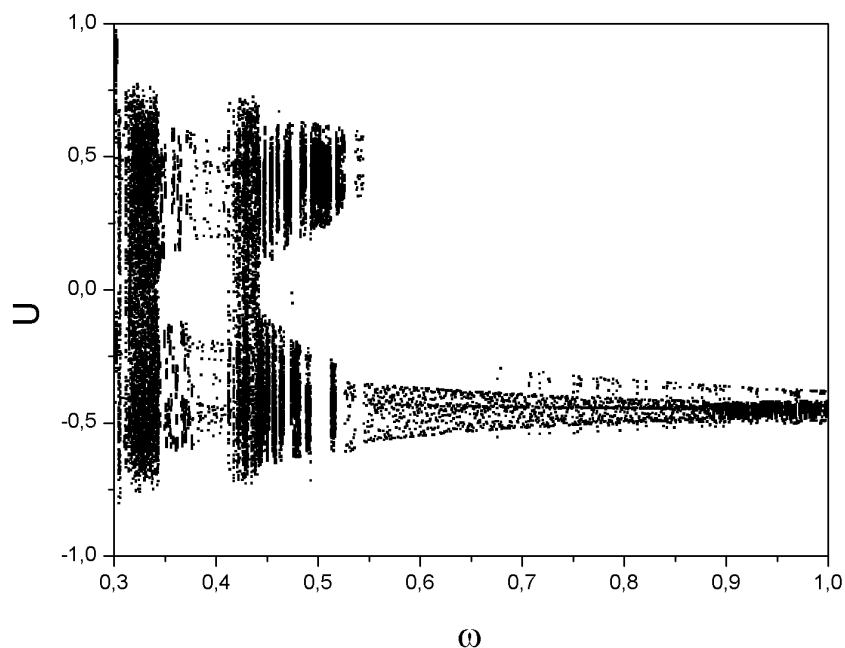


Figura 5 - Exemplo de diagrama de bifurcação

A representação do diagrama de bifurcação é feita através de um gráfico que relaciona alguma variável do sistema, como posição ou velocidade, versus algum parâmetro do sistema, que é variado de forma quase-estática. Neste trabalho, considera-se a posição como variável a ser observada a partir da seção de Poincaré, e, como parâmetro, a frequência de forçamento. Os diagramas de bifurcação neste trabalho são construídos utilizando o algoritmo da força bruta (Parker e Chua, 1989).

2.4 Expoente de Lyapunov

A sensibilidade às condições iniciais é uma das características mais marcantes apresentada pelos sistemas que respondem caoticamente. Essa sensibilidade pode ser percebida pela divergência de duas trajetórias iniciadas em condições de contorno muito próximas. Desta forma, qualquer erro, por menor que seja, nas especificações de um dado estado, pode levar a comportamentos distintos após um determinado período de tempo. Por consequência, isto implica que não é possível prever o comportamento de um sistema caótico para qualquer instante futuro.

Os expoentes de Lyapunov avaliam essa sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de duas trajetórias vizinhas, e representam um dos critérios mais importantes utilizados para definir o caos em sistemas dinâmicos. Assim, considera-se uma dada trajetória $\Phi(x_1, t)$, onde $\Phi(x, t)$ é o fluxo de um sistema dinâmico, e sua vizinhança em um instante inicial. Esta vizinhança pode ser definida através de uma esfera de raio r_0 . Considerando-se uma outra trajetória, $\Phi(x_2, t)$, inicialmente na fronteira da vizinhança definida, tem-se que a separação $r(t)$ no tempo entre essas duas trajetórias corresponde à evolução no tempo dos eixos de uma esfera suficiente pequena de estados do sistema dinâmico, e é expressa por:

$$R(t) = r_0 e^{\lambda t} \quad (2.1)$$

onde λ representa o maior expoente de Lyapunov. Se o expoente λ for negativo ou nulo, a trajetória $\Phi(x_2, t)$ não diverge com relação à $\Phi(x_1, t)$. Se por outro lado, λ for positivo, indica que a trajetória $\Phi(x_2, t)$ diverge exponencialmente da órbita original, caracterizando o caos.

Como a esfera inicial de raio r_0 é infinitesimal, a sua distorção é governada pela parte linear do fluxo que a transforma em um elipsóide. Tendo-se que os eixos principais do elipsóide no tempo t possuem um comprimento $r_i(t)$, define-se o espectro dos expoentes de Lyapunov como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \log_2 \frac{r_i(t)}{r(t)} \right), \text{ para } 1 \leq i \leq n, \quad (2.2)$$

onde n é a dimensão do sistema (Wolf et al., 1985). Desta forma, as trajetórias em um espaço de fase n -dimensional possuem n expoentes de Lyapunov. A análise dos sinais destes expoentes define as características da estabilidade local de uma trajetória.

Portanto, os expoentes de Lyapunov fornecem uma medida invariante sob uma transformação de coordenadas da estabilidade local de uma dada trajetória, sendo considerado um invariante do sistema. A presença de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, caracteriza o comportamento caótico. Para situações de existência de mais de um expoente positivo, tem-se o chamado hipercaos.

2.5 Determinação das Órbitas Periódicas Instáveis (OPI)

As trajetórias de sistemas em regime caótico vagam por uma infinidade de padrões periódicos instáveis, que são chamadas de órbitas periódicas instáveis. Essas trajetórias conferem uma grande flexibilidade ao sistema. Desta forma, pode-se dizer que em um atrator caótico estão imersas infinitas OPIs, que podem ser detectadas a partir da observação de uma série temporal caótica ou de uma análise feita diretamente da equação explícita da dinâmica do sistema.

As OPIs fazem parte do conjunto de invariantes topológicos de um determinado sistema e, portanto, não sofrem alteração topológica sob qualquer mudança de coordenada (Gunaratne *et al*, 1989). Além disso, diversos invariantes dinâmicos do sistema, como expoentes de Lyapunov e dimensão fractal, podem ser determinados a partir das OPIs (Auerbach *et al*, 1987).

O conjunto formado pelas OPIs representa o esqueleto dos atratores caóticos. Segundo Auerbach *et al* (1987), uma trajetória caótica visita, em algum instante de sua evolução, um ponto próximo o suficiente de uma órbita periódica instável qualquer.

Existem diferentes métodos para o reconhecimento das OPIs de um sistema dinâmico e diversos estudos que tratam de sua estabilização. Neste trabalho, utiliza-se o método dos pontos recorrentes próximos (*close-return method*) para a determinação das OPIs do sistema (Auerbach *et al*, 1987).

Dessa forma, a identificação pode ser feita a partir de uma série experimental caótica sob a forma, $\{X_i\}_{i=1}^N$, onde X_i é um vetor com dimensão idêntica ao do sistema. Além disso, é preciso determinar o período desejado para identificar uma OPI k -periódica.

A análise do vetor X_i é realizada em uma seção de Poincaré e, como o forçamento sobre o sistema é periódico, esta seção representa uma amostra estroboscópica onde os seus pontos são determinados sempre que o forçamento passa por uma fase determinada. A busca de uma órbita periódica instável é realizada varrendo-se todos os pontos da série temporal contidos na seção de Poincaré, ξ_i , verificando-se quais os pares que satisfazem a seguinte condição:

$$|\xi_i - \xi_{i+k}|_{i=1}^{NP-k} \leq r_1 \quad (2.3)$$

onde NP é o número total de pontos na seção de Poincaré, r_1 é a tolerância na qual distinguem-se os pontos recorrentes e k é o período máximo da órbita que se deseja encontrar. Quando essa condição é satisfeita, armazenam-se os pontos $\{\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k+1}\}$ pertencentes à órbita k -periódica, localizada na seção de Poincaré referente à fase de forçamento escolhida. Durante essa busca, uma determinada órbita pode ser visitada mais de uma vez, sendo então necessário verificar dentre as órbitas de mesmo período, aquelas que podem ser consideradas idênticas a menos de uma permutação em seus pontos, ou de uma tolerância r_2 , que mede a distância entre duas órbitas. Se duas órbitas equivalentes forem

encontradas para um dado período, faz-se a aproximação da órbita real pela sua média aritmética (Pereira-Pinto, 2004).

3. MÉTODO PARA CONTROLE DE CAOS

3.1 Introdução

Os métodos de controle de caos possuem algumas propriedades características que os distingue das abordagens de controle convencional. Essencialmente, o controlador explora a sensibilidade a pequenas perturbações e o conjunto denso de órbitas periódicas instáveis que os sistemas caóticos possuem. Essas propriedades não são encontradas em sistemas lineares ou não-caóticos. Neste contexto, o controlador é projetado para estabilizar uma órbita periódica instável de período qualquer e, conjuntamente, permitir que o sistema possa transitar dentre as diversas órbitas conforme a necessidade do usuário, conferindo grande flexibilidade ao sistema. Além disso, na concepção inicial das técnicas de controle de caos, o projeto do controlador não é baseado no modelo matemático do sistema e sim nas propriedades geométricas do atrator. Portanto, pode-se estimar os parâmetros do controlador a partir de séries temporais caóticas provenientes de sistemas físicos reais, não sendo necessário o conhecimento das equações de governo do sistema. Finalmente, tem-se que a abordagem do problema é no espaço de estado e utilizam-se ferramentas da análise de sistemas não-lineares, como por exemplo: seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov e reconstrução do espaço de estado.

Ultimamente, alguns autores tratam da utilização da teoria de controle convencional para a estabilização de sistemas não-lineares caóticos. Em geral, estes controladores fazem com que o sistema siga uma trajetória objetivo pré-estabelecida, ou então levam e mantêm o sistema em um zero de referência. Chen (1997) apresenta alguns princípios de projeto de controladores convencionais lineares e não-lineares para o controle de caos, com as condições matemáticas de controlabilidade desenvolvidas utilizando o método da função de Lyapunov.

Chen (1994) sugere uma abordagem convencional da teoria de controle ótimo para controlar sistemas caóticos utilizando sequências de perturbações de modo a minimizar a energia total de controle.

Myneni *et al.* (1999) propõe um novo método de controle de caos muito simples para aplicação a sistemas rápidos e aplicam experimentalmente a dois circuitos elétricos. Neste método, o controlador realiza uma perturbação pré-determinada quando o sistema entra em uma janela de controle definida e volta a sua posição de referência quando a trajetória do sistema sai dessa janela. A partir da localização desta janela de controle, determinam-se órbitas periódicas instáveis a serem estabilizadas.

Controladores baseados no método direto de Lyapunov também foram apresentados em trabalhos recentes por Hsiao e Tung (2002) e Wang e Jing (2004). Uma vantagem deste método é que não é necessário esperar que a trajetória do sistema passe na vizinhança de um ponto fixo para a ativação do controle.

Bessa *et al.* (2009) propõem a utilização de uma estratégia de controle baseada em modos deslizantes e aprimorada por um algoritmo fuzzy adaptativo, de forma a lidar com as incertezas do modelo. O trabalho tem como aplicação um pêndulo não-linear em regime caótico e aborda a estabilização de órbitas periódicas instáveis naturais do sistema, assim como de órbitas genéricas.

Além desses métodos, Boccaletti *et al.* (2000) tratam o problema de rastreamento e de sincronização de sistemas caóticos, e mencionam diversas implementações experimentais. Savi *et al.* (2006) apresentam uma discussão sobre a utilização de alguns métodos de controle de caos em sistemas mecânicos. Fradkov *et al.* (2006) apresentam uma revisão dos métodos de controle de caos – considerando-se 3 categorias: sem realimentação, com realimentação e discretos e com realimentação e contínuos – e suas aplicações em sistemas mecânicos.

Dentre os métodos de controle de caos contínuos, o método por realimentação com estados defasados será analisado neste trabalho.

3.2 Método por realimentação com estados defasados (*TDF*)

O método *TDF*, proposto por Pyragas (1992), foi o primeiro método de controle de caos contínuo, e se diferencia dos métodos discretos pelo fato de exercer uma atuação ininterrupta sobre o sistema, o que favorece o controle em sistemas contínuos muito instáveis. O método *Time-delay Feedback*, ou *TDF*, possui as propriedades de utilizar pequenas perturbações no sistema e de ser independente do modelo dinâmico do sistema, o que favorece a implementação experimental deste método.

A primeira implementação experimental do método de controle *TDF* foi reportada por Pyragas & Tamasevicius (1993) no controle de um oscilador eletrônico caótico. Diversos autores apresentam resultados numéricos e experimentais da estabilização de diferentes sistemas dinâmicos utilizando essa mesma técnica de controle.

O método *TDF* se baseia na realimentação da diferença entre estados atual e defasado do sistema. Logo, para implementá-lo é necessário definir o tempo de defasagem e o ganho do controlador. A dificuldade na implementação do método de controle *TDF* reside na determinação do tempo de defasagem e, principalmente, do ganho do controlador. Diversos trabalhos que implementam este método utilizam a periodicidade da órbita a ser estabilizada como tempo de defasagem, e o ganho do controlador é determinado por tentativa e erro, principalmente nas implementações experimentais.

Neste contexto, Pyragas (1992) determina o ganho do controlador analisando a estabilidade das órbitas a partir do expoente de Lyapunov utilizando-se as equações de movimento do sistema. Em Pyragas & Tamasevicius (1993) o controle experimental do sistema é realizado aumentando-se o ganho do controlador até que a estabilização da órbita seja alcançada. Kittel *et al.* (1995) e Herrmann (2001) apresentam algoritmos adaptativos baseados no método *TDF* que ajustam o tempo de defasagem automaticamente, enquanto Boccaletti & Arcchi (1995) apresentam um método de

controle adaptativo para ajustar o ganho do controlador. De Paula (2010) aplica o método *TDF* em sistemas caóticos para controlar bifurcações. A metodologia apresentada nesse trabalho será amplamente utilizada para o controle do sistema em estudo.

3.3 Modelo matemático do método *TDF*

O método *TDF* pode ser aplicado a sistemas dinâmicos modelados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares, como apresentado na equação 3.1

$$\dot{x}(t) = Q(x, t) + B(t) \quad (3.1)$$

onde $x(t) \in R^n$ é o vetor que contém as variáveis de estado, $Q(x, t) \in R^n$ define a dinâmica do sistema, enquanto $B(t) \in R^n$ está associado à ação de controle.

Para isso, o método de controle *TDF* se baseia na realimentação da diferença entre estados atual e defasado do sistema, e a perturbação é dada pela lei de controle apresentada na equação 3.2

$$B(t) = K(x_\tau - x) \quad (3.2)$$

onde $K \in R^n$ é a matriz de ganho, τ é defasagem de tempo, $x = x(t)$ e $x_\tau = x(\tau - t)$. Se o tempo de defasagem coincidir com a periodicidade da i -ésima OPI tem-se que $\tau = T_i$ e a perturbação se anula para a solução do sistema da equação 3.1 correspondente a esta OPI, $x(t) = x_i(t)$. Além disso, a estabilização da órbita pode ser alcançada a partir da escolha de valores apropriados para a matriz de ganho, K .

Este método foi implementado com sucesso, numérica e experimentalmente em diferentes sistemas mecânicos (Hikihara & Kawagoshi, 1996; Ramesh & Narayanan, 2001; De Paula, 2010), dentre outros. No entanto, é importante lembrar que o procedimento falha para a estabilização de OPIs de elevada periodicidade, e por isso a aplicação deve ser feita com a escolha de pequenos valores de τ .

4. LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA (SMA)

O objetivo deste capítulo é explicar os principais comportamentos termomecânicos associados às ligas com memória de forma e, para tal, é necessário o conhecimento de alguns conceitos quanto sua composição metalúrgica. Posteriormente, são apresentadas algumas aplicações inerentes ao uso desse tipo de material.

4.1 Considerações Metalúrgicas

As propriedades singulares das SMAs estão associadas ao fenômeno de transformações de fase martensíticas, que são responsáveis por diferentes comportamentos termomecânicos complexos inerentes a esse tipo de material. Estas transformações são processos não-difusivos envolvendo fases sólidas que ocorrem a velocidades muito elevadas.

Basicamente, as SMAs podem apresentar duas fases cristalográficas distintas: a martensita e a austenita. A martensita é uma fase estável a baixas temperaturas (para o estado livre de tensões), podendo ser induzida tanto por temperatura quanto por tensão. Quando induzida por temperatura, a martensita é conhecida como martensita maclada (*twinned*), e possui 24 variantes. Quando induzida por tensão, as 24 variantes dão origem a apenas uma variante orientada na direção do carregamento, e pode ser encontrada na literatura sendo chamada de martensita não-maclada (*detwinned*). A austenita é uma fase estável a altas temperaturas e possui apenas uma variante. Apesar de existirem apenas duas fases microscópicas (austenita e martensita), devido ao fato de se obter mais duas variantes da martensita quando induzida por tensão (uma induzida por tração (M+) e outra por compressão (M-)), pode-se dizer que existem 4 fases macroscópicas envolvidas nos processos de transformação de fases.

As ligas à base de Níquel-Titânio (*NiTi*) oferecem boas propriedades físicas e mecânicas, além de excelente biocompatibilidade, e por isso têm sido as mais utilizadas em diversas aplicações. O processo de obtenção dessas ligas pode ser um fator complicador para o entendimento do comportamento de policristais, pois em geral proporcionam estruturas cristalinas de texturas cristalográficas muito complexas. Outro fator de grande influência diz respeito à composição química, já que pequenas alterações na proporção equiatômica entre Níquel e Titânio podem gerar precipitados (Ti_3Ni_4) que não são capazes de experimentar transformações martensíticas, agindo como obstáculos à movimentação das discordâncias.

Na Figura 6, tem-se o material inicialmente a uma temperatura em que a martensita não-maclada (designada pela letra M) é uma fase estável. Com a aplicação de uma tensão superior à tensão crítica (σ^{crit}), há o aparecimento de uma nova variante martensítica maclada associada à tração (designada pela letra M+). Ao descarregar a amostra, o material continua a apresentar a estrutura M+, pois não há uma nova transformação de fase ($M+ \rightarrow M$), havendo uma pequena recuperação elástica. O material, agora livre de tensões, é aquecido acima de uma dada temperatura, para a qual a variante martensítica

M+ é instável, resultando numa estrutura austenítica (designada pela letra A). Este processo dá origem a uma transformação de fase inversa ($M^+ \rightarrow A$), com a consequente recuperação da forma.

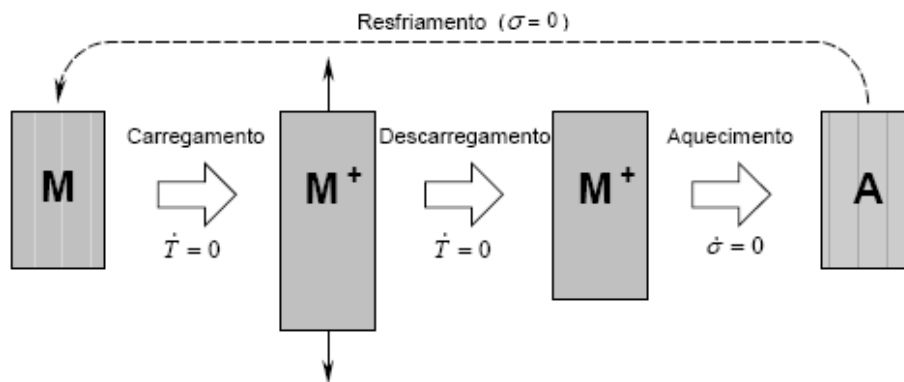


Figura 6 - Fases macroscópicas envolvidas no fenômeno memória de forma por tração

4.2 Principais comportamentos termomecânicos

Os comportamentos termomecânicos das SMAs estão associados às transformações de fase, que podem ocorrer pela imposição dessas ligas a um campo de tensões, de temperatura ou, ainda, uma combinação de ambos os campos de tensões e temperatura.

Com isso, dependendo do campo em que as ligas serão submetidas, poderão ocorrer alguns fenômenos como pseudoelasticidade e memória de forma, entre outros. A seguir, os principais comportamentos desse tipo de material serão brevemente apresentados.

4.2.1 Efeito Pseudoelástico

O efeito pseudoelástico ocorre a altas temperaturas de forma que $T > A_f$, e as fases envolvidas nesse fenômeno são as variantes da martensita, que pode ser induzida por tração (M+) ou por compressão (M-), e a austenita. Ao considerar uma amostra de SMA inicialmente no estado livre de tensões, tem-se nessa situação a presença da fase austenítica (A), onde a mesma é estável. A Figura 7 representa de forma macroscópica o fenômeno da pseudoelasticidade

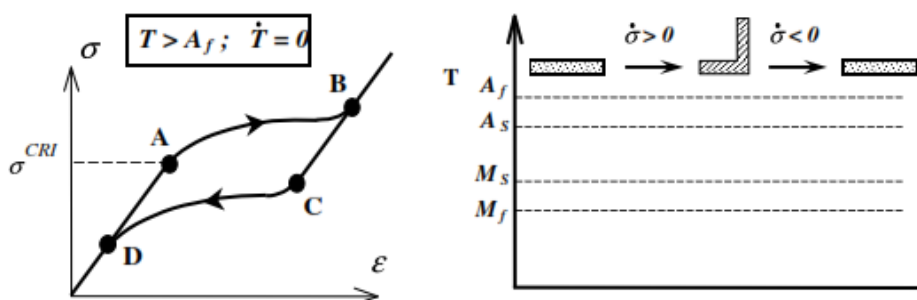


Figura 7 - Representação macroscópica do efeito pseudoelástico

De acordo com o gráfico, com a aplicação de um carregamento mecânico, a estrutura cristalina austenítica é mantida até que uma tensão crítica σ^{crit} seja alcançada (ponto A), tendo até então como resposta um comportamento elástico. A partir de então, dá-se início a uma transformação de fase $A \rightarrow M+$ (trecho AB). Ao descarregar a amostra, ocorre no material a transformação inversa $M+ \rightarrow A$ (trecho CD), já que para $T > A_f$ torna a martensita uma fase instável no estado livre de tensões.

É importante destacar que o aparecimento de um laço de histerese (região compreendida entre os pontos A, B, C e D), implicando na dissipação de energia do sistema ao passar por esta região. Vale ressaltar que existe um limite à recuperação dessas deformações representado pelo limite elástico da fase produto obtida após a transformação, a partir de onde o material passa a se comportar plasticamente e a deformação não mais pode ser recuperada.

4.2.2 Efeito de Memória de Forma

O efeito de memória de forma ocorre a baixas temperaturas onde $T < M_f$, de forma que a martensita e suas variantes são as fases macroscópicas envolvidas no processo. Admita uma amostra cuja estrutura cristalográfica seja martensítica, resultante do resfriamento de uma amostra a uma temperatura inferior a M_f . A Figura 8 mostra a curva tensão-deformação para esta amostra, representando macroscopicamente esse tipo de comportamento. Com a aplicação de um carregamento, tem-se uma resposta elástica até que uma tensão crítica seja alcançada (ponto A), dando início a um processo de reorientação da martensita resultando em uma única variante (no caso unidimensional, martensita associada à tração, $M+$ ou à compressão, $M-$). Durante este processo de reorientação, a tensão não se desenvolve muito em comparação com a deformação alcançada (trecho AB). A partir do ponto B, a liga volta a apresentar um comportamento elástico. Ao descarregar a amostra, não há uma nova conversão em diversas variantes, pois esta única variante resultante é termodinamicamente estável para $T < A_s$, havendo apenas uma pequena recuperação elástica.

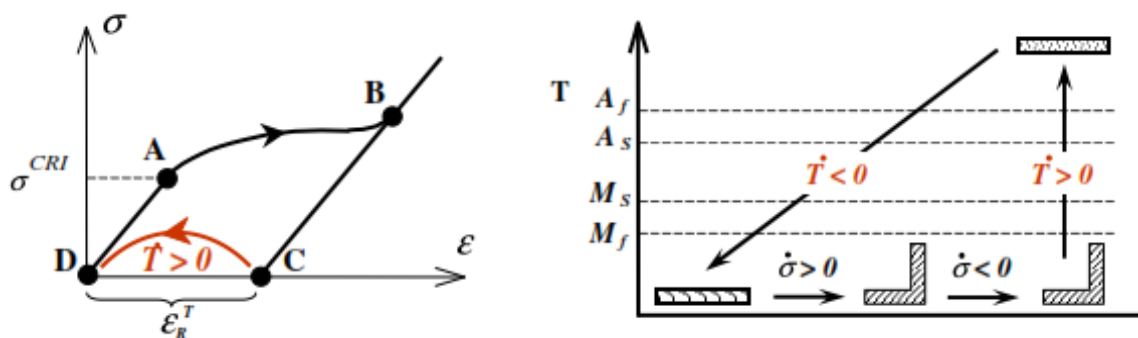


Figura 8 - Representação macroscópica do efeito memória de forma

A deformação residual resultante pode, então, ser recuperada através do aquecimento da amostra acima de A_f . Assim, o material retorna à fase austenítica, assumindo a configuração geométrica original, apresentando o efeito de memória de forma.

4.2.3 Transformação de Fase Devida à Variação de Temperatura

A transformação de fase devido à variação de temperatura é um comportamento que ocorre no estado livre de tensões, sendo mostrado na Figura 9. Considerando um corpo feito de uma liga com memória de forma, admitindo estar no estado livre de tensões e inicialmente a uma temperatura $T \geq A_f$, tem-se que a microestrutura inicialmente presente é a austenítica (ponto D), sendo denominada fase matriz. Partindo do estado citado anteriormente, ao diminuir a temperatura a estrutura cristalina inicia uma transformação de fase martensítica (trecho AB) e consequente auto-acomodação dos novos cristais martensíticos. Este processo se inicia em $T = M_s$ (ponto A) e dura até que a temperatura $T = M_f$ (ponto B), abaixo da qual a martensita é estável, seja alcançada.

De outra forma, partindo do ponto B, ao elevar a temperatura ocorrerá a transformação inversa (trecho CD) iniciando ao atingir A (ponto C), e terminando até que a temperatura A_f seja alcançada (ponto D).

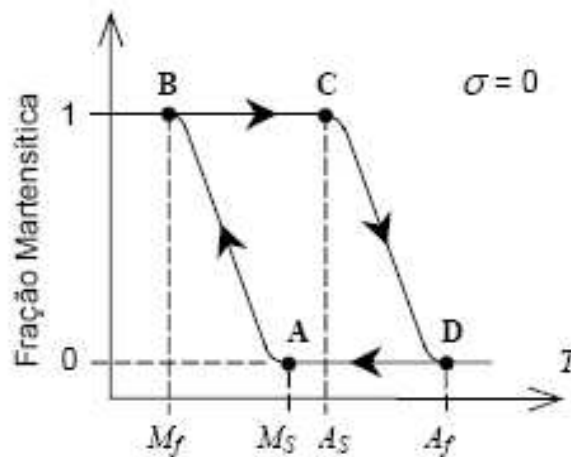


Figura 9 - Transformação de fase induzida por temperatura

É importante destacar que para todo processo de transformação de fase induzida por temperatura, parte da energia cedida ao material será destinada a expansão térmica do mesmo, e outra parte responsável pelo processo de transformação de fase propriamente dito.

5. DINÂMICA DE UMA TRELIÇA DE VON MISES COMPOSTA POR SMA

Este capítulo trata da modelagem matemática da treliça de Von Mises com memória de forma, obtendo as equações do movimento. A partir daí, são realizadas simulações numéricas, cujo procedimento adotado está brevemente apresentado neste capítulo.

5.1 Equações do Movimento

Considere uma treliça formada por duas barras idênticas construídas a partir de ligas com memória de forma, de comprimento L e seção de área A . As barras formam um ângulo φ com a linha horizontal e estão livres para girar em torno de seus suportes e juntas, mas somente no plano formado pelas barras (Figura 10). O carregamento crítico de Euler nas barras é considerado sendo suficientemente grande, de forma que não ocorrerão flambagens nas simulações apresentadas neste trabalho. Além disso, todas as simulações são realizadas a temperatura constante, T , sendo $T > A_f$, ou seja, as duas barras apresentam comportamento pseudoelástico.

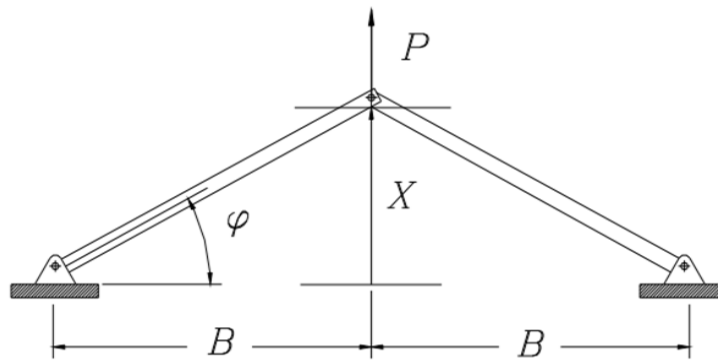


Figura 10 - Treliça de duas barras (Von Mises)

Além disso, assume-se que a massa da estrutura está inteiramente concentrada na junção entre as duas barras. Dessa forma, a estrutura está dividida em segmentos sem massa, conectados por nós de massa concentrada e determinada por considerações estáticas. Apenas movimentos simétricos do sistema foram considerados, implicando que a massa concentrada, m , pode somente mover-se na vertical, resultando num sistema basicamente unidimensional cujo deslocamento está denotado por U . Foi considerado também, um amortecimento viscoso linear representado pelo coeficiente c .

Com estas suposições, o balanço de forças é expresso através da lei de movimento apresentada pela equação 5.1:

$$-2F\sin(\varphi) - c\dot{X} + P = m\ddot{X} \quad (5.1)$$

onde F é a força em cada barra, enquanto P é uma força externa. A descrição da força F está relacionada ao comportamento termomecânico da SMA e, portanto, existem diferentes maneiras de serem feitas. Aqui, utiliza-se um modelo constitutivo com variáveis internas que foi previamente discutido em diferentes referências (Savi et al., 2002 (b), Baêta-Neves et al., 2004, Paiva et al., 2005, Savi & Paiva, 2005). Desta forma, o modelo proposto pode ser representado pela Figura 11.

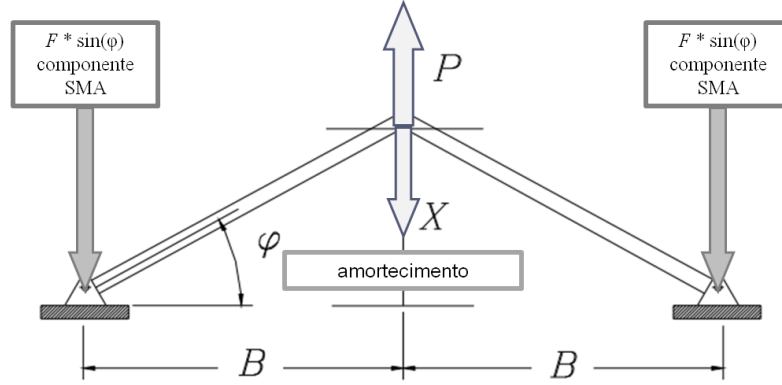


Figura 11 - Treliça de duas barras (Von Mises) composta por SMA

De acordo com a equação constitutiva, consideram-se as seguintes variáveis: deformação (ε), temperatura (T) e mais três variáveis de estado associadas à fração volumétrica de cada fase: β_1 está associado à martensita maclada induzida por tração, β_2 está relacionado à martensita maclada induzida por compressão, β_3 representa a austenita. Considera-se, ainda, uma quarta fase β_4 relacionada à martensita não-maclada, que pode ser obtida da condição de coexistência de fase ($\beta_4 = 1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$). Com estas suposições, é possível obter um conjunto completo de equações constitutivas que descrevem o comportamento termomecânico das SMA, conforme a modelagem apresentada na equação 5.2.

$$\sigma = E\varepsilon + [\alpha + E\alpha_h](\beta_2 - \beta_1) - \Omega(T - T_0) \quad (5.2)$$

Pode-se observar que a equação 5.2 apresenta variáveis relacionadas ao comportamento imposto pela deformação, temperatura e dinâmica das transformações de fase. O cálculo da variação das frações volumétricas associadas é representado pelo conjunto de equações acopladas a seguir:

$$\dot{\beta}_1 = \frac{1}{\eta} \{ \alpha\varepsilon + \Lambda + [2\alpha_h\alpha + E\alpha_h^2](\beta_2 - \beta_1) + \alpha_h[E\varepsilon - \Omega(T - T_0)] - \partial_1 J_\pi \} + \partial_1 J_\chi \quad (5.3)$$

$$\dot{\beta}_2 = \frac{1}{\eta} \{ -\alpha\varepsilon + \Lambda - [2\alpha_h\alpha + E\alpha_h^2](\beta_2 - \beta_1) - \alpha_h[E\varepsilon - \Omega(T - T_0)] - \partial_2 J_\pi \} \quad (5.4)$$

$$\dot{\beta}_3 = \frac{1}{\eta} \left\{ -\frac{1}{2}(E_A - E_M)[\varepsilon + \alpha_h(\beta_2 - \beta_1)]^2 + \Lambda_3 + (\Omega_A - \Omega_M)(T - T_0)[\varepsilon + \alpha_h(\beta_2 - \beta_1)] - \partial_3 J_\pi \right\} + \partial_3 J_\chi \quad (5.5)$$

onde $E = E_M + \beta_3 (E_A - E_M)$ é o módulo de elasticidade, enquanto $\Omega = \Omega_M + \beta_3 (\Omega_A - \Omega_M)$ está relacionado ao coeficiente de expansão térmica. Note que o subscrito “A” refere-se à fase austenítica, enquanto “M” refere-se à fase martensítica. Além disso, os parâmetros $\Lambda = \Lambda(t)$ e $\Lambda_3 = \Lambda_3(t)$ estão associados ao nível de tensão da transformação de fase. O parâmetro α_h está inserido para definir a amplitude horizontal do loop da histerese no gráfico tensão-deformação, enquanto α ajuda no controle do loop vertical neste mesmo diagrama.

Os termos $\partial_n J_\pi$ ($n = 1, 2, 3$) são sub-diferenciais da função indicatriz J_π com respeito a β_n (Rockafellar, 1970). A função indicatriz $J_\pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ está relacionada a um conjunto convexo π , que define a coexistência de fases. Com respeito à evolução da equação devido à fração volumétrica, η_1, η_2, η_3 representam a dissipação interna relacionada à transformação de fase. Além disso $\partial_n J_\chi$ ($n = 1, 2, 3$) são sub-diferenciais da função indicatriz J_χ com respeito a β_n (Rockafellar, 1970). Esta função indicatriz está associada com o conjunto convexo χ , que estabelece condições para a correta descrição dos sub-loops internos devido à transformação de fase incompleta e também evita as transformações de fase $M^+ \rightarrow M$ ou $M^- \rightarrow M$.

Com relação à definição dos parâmetros, Λ e Λ_3 possuem uma dependência linear com a temperatura conforme equações 5.6 e 5.7:

$$\Lambda = -L_0 + \frac{L}{T_M} (T - T_M) \quad (5.6)$$

$$\Lambda_3 = -L_0^A + \frac{L^A}{T_M} (T - T_M) \quad (5.7)$$

Aqui, T_M é a temperatura abaixo da qual a fase martensítica se torna estável. Além disso, L_0, L, L_0^A e L^A são parâmetros relacionados ao carregamento crítico para transformação de fase.

Visando incluir diferentes características da cinética de transformação de fase para processos de carregamento e descarregamento, são considerados diferentes valores para o parâmetro da dissipação interna η_n ($n = 1, 2, 3$): η_n^L e η_n^U durante o processo de carregamento e descarregamento, respectivamente. Mais detalhes sobre o modelo constitutivo estão apresentados em Paiva *et al.* (2005) e Savi & Paiva (2005).

Neste ponto, é necessário definir a deformação da treliça visando permitir o uso da equação constitutiva na equação de equilíbrio 5.1. Assim, assumindo o forçamento expresso pela equação 5.8.

$$\varepsilon = \frac{L}{L_0} - 1 = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi} - 1 \quad (5.8)$$

A equação do movimento pode ser reescrita como:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + 2A \frac{X}{(X^2+B^2)^{1/2}} \left\{ E \left[\frac{(X^2+B^2)^{1/2}}{L_0} - 1 \right] + [\alpha + E\alpha_h](\beta_2 - \beta_1) - \Omega(T - T_0) \right\} = P(t) \quad (5.9)$$

onde B é a projeção horizontal de cada barra da treliça. A correspondência da modelagem proposta para a deformação a partir dos valores de $\cos\varphi$ pode ser obtida avaliando-se os parâmetros geométricos invariantes da Figura 10.

Considerando uma excitação periódica $P = P_0 \sin(\omega t)$ a equação do movimento pode ser escrita numa forma adimensional da seguinte forma:

$$x' = y \quad (5.10)$$

$$y' = \gamma \sin(\varpi t) - \xi y - \mu_E \left[1 - \frac{1}{(x^2 + b^2)^{1/2}} \right] - [(\hat{\alpha} + \mu_E \alpha_h)(\beta_2 - \beta_1) - \hat{\Omega} \mu_\Omega (\theta - \theta_0)] \frac{x}{(x^2 + b^2)^{1/2}}$$

Para realizar a adimensionalização das variáveis apresentadas na equação 5.10 foram utilizados parâmetros de referência que facilitam a aplicação de valores numéricos. Desta forma, tem-se que:

$$x = \frac{X}{L}, \quad b = \frac{B}{L_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{2E_R A}{mL_0}, \quad \gamma = \frac{P_0}{mL_0 \omega_0^2}, \quad \xi = \frac{c}{m\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \varpi = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (5.11)$$

$$\theta = \frac{T}{T_M}, \quad \mu_E = \frac{E}{E_R}, \quad \mu_\Omega = \frac{\Omega}{\Omega_R}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\alpha}{E_R}, \quad \hat{\Omega} = \frac{\Omega_R T_R}{E_R} \quad \text{e} \quad ()' = \frac{d()}{d\tau}.$$

Com o objetivo de tratar as não-linearidades envolvidas na formulação, utiliza-se a técnica de partição do operador associada ao procedimento iterativo que calcula a dinâmica do sistema e, em paralelo, reavaliam as equações constitutivas do modelo da liga até que seja atingida a convergência. Esta técnica consiste em dividir o espaço de estado em subespaços que podem ser resolvidos separadamente, onde a solução de um subespaço é utilizada como entrada para solução do outro subespaço. Este procedimento tem como vantagem a possibilidade de utilização de algoritmos clássicos para avaliar cada parte do sistema.

Neste trabalho, o espaço de estado do problema foi dividido em dois subespaços: um representando o espaço de fase, que engloba as variáveis u e \dot{u} , e outro subespaço contendo as variáveis internas do modelo constitutivo, β_1 , β_2 e β_3 . Este procedimento permite que o primeiro subespaço do sistema, referente ao espaço de fase do oscilador, seja resolvido pelo algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem ou qualquer outro algoritmo de integração numérica, enquanto a solução do segundo subespaço, referente às variáveis internas do modelo, seja obtida através do método da

projeção ortogonal, que garante que as frações volumétricas de cada fase obedecem às restrições de coexistência.

A integração das equações de movimento da treliça é realizada de forma que as variáveis internas do modelo da liga, β_1 , β_2 e β_3 sejam considerados parâmetros conhecidos. Assim, inicialmente, obtém-se o valor da deformação (ou deslocamento) para uma primeira tentativa, mantendo-se constantes os valores das variáveis internas da liga em relação ao instante de tempo anterior. O valor de deformação (ou deslocamento) obtido é utilizado como argumento de entrada para a avaliação do modelo constitutivo, atualizando os valores das suas variáveis internas e obtendo, por consequência, um novo valor de σ . Então, torna-se necessário retornar às equações do espaço de fase da treliça integrando-as, mas, utilizando desta vez, os novos valores das variáveis internas obtidos na última avaliação do modelo (β_1 , β_2 e β_3 e ε). Este procedimento é repetido até que se obtenha a convergência que é atingida quando a diferença entre o valor da tentativa de deformação (ou deslocamento) e o valor atual atingirem uma tolerância admissível. Este algoritmo é representado esquematicamente no diagrama da Figura 12.

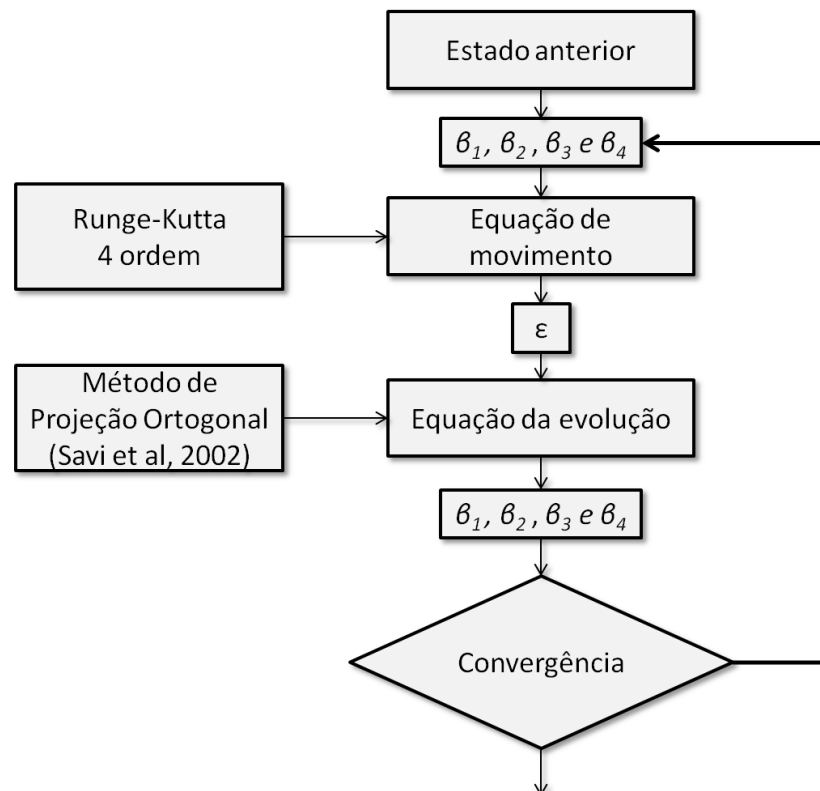


Figura 12 - Diagrama da divisão do estado de fase

As simulações numéricas são realizadas utilizando o Runge-Kutta de quarta ordem com o passo de tempo menor que $\Delta\tau = \pi/1000\pi$. Em todas as simulações utilizou-se o material cuja propriedade está apresentada na Tabela 1. Estes valores representam um comportamento típico de uma SMA, obtida para uma simulação quase-estática a $T = 373K$.

Para os dados da Tabela 1, os parâmetros definidos na equação 5.10 assumem os valores $x = -0.447$, $b = 0.884$, $\omega_0^2 = 1.2 \times 10^{10}$, $\xi = 0$, $\theta = 1.28$, $\hat{\alpha} = 2.78 \times 10^{-3}$, $\hat{\Omega} = 5.11 \times 10^{-3}$. Além disso, consideramos $b = 0.866$ correspondendo à treliça uma posição inicial φ_0 . Os parâmetros utilizados nas simulações deste trabalho foram obtidos por Nogueira (2010).

Tabela 1 - Parâmetros constitutivos do sistema SMA

E_A (GPa)	E_M (GPa)	α (MPa)	α_h
54	54	150	0.052
L_0 (MPa)	L (MPa)	L_0^A (MPa)	L^A (MPa)
0.15	41.5	0.63	185
Ω_A	Ω_M	T_M (K)	T_A (K)
0.74	0.17	291.4	307.7
η_n^L (Mpa.s)		η_n^U (Mpa.s)	
10		27	

5.2 Identificação de comportamento caótico para vibração forçada

Nesta seção, discute-se vibração forçada da treliça de duas barras pseudoelástica. Esta análise é feita considerando comportamentos em alta temperatura, onde a fase austenítica é estável no estado livre de tensões. A análise é iniciada considerando o diagrama de bifurcação que representa amostras estroboscópicas dos valores de deslocamentos, U , mediante a variação lenta de um parâmetro do sistema. Inicialmente, varia-se a frequência, ω , fixando-se a amplitude de forçamento em $\gamma = 0.01$. Os valores percorridos durante a variação da frequência vão de 0,3 a 1, com incrementos de 5×10^4 . É importante ressaltar que a variável ω é adimensional. Além disso, cada valor de frequência é calculado por uma integração de 200 períodos de forçamento, onde 100 são descartados por conta de efeitos transientes.

O diagrama de bifurcação é calculado a partir de amostras estroboscópicas de cada estado do sistema de acordo com a variação imposta pelo parâmetro de estudo. Assim uma questão torna-se importante nesse processo: a condição inicial adotada para cada iteração. Especialmente em sistemas caóticos, que são muito sensíveis às condições iniciais, os resultados gerados por simulações que induzem um retorno do sistema à sua condição inicial, para cada nova iteração, pode trazer resultados inacurados. Logo, é necessário que a condição final de cada iteração anterior seja guardada para servir de condição inicial para a próxima iteração, suavizando o processo de passagem entre as várias amostras estroboscópicas. Essa condição foi utilizada nas simulações desse trabalho.

A Figura 13 apresenta um diagrama de bifurcação que mostra regiões de maior complexidade, indicadas por uma nuvem de pontos, assim como regiões mais comportadas, que são indicadas por um número discreto de pontos associadas a movimentos periódicos que estão dispostos em torno de um dos pontos de equilíbrio do sistema. Deve-se observar a nítida diferença de comportamento entre diferentes valores de frequência.

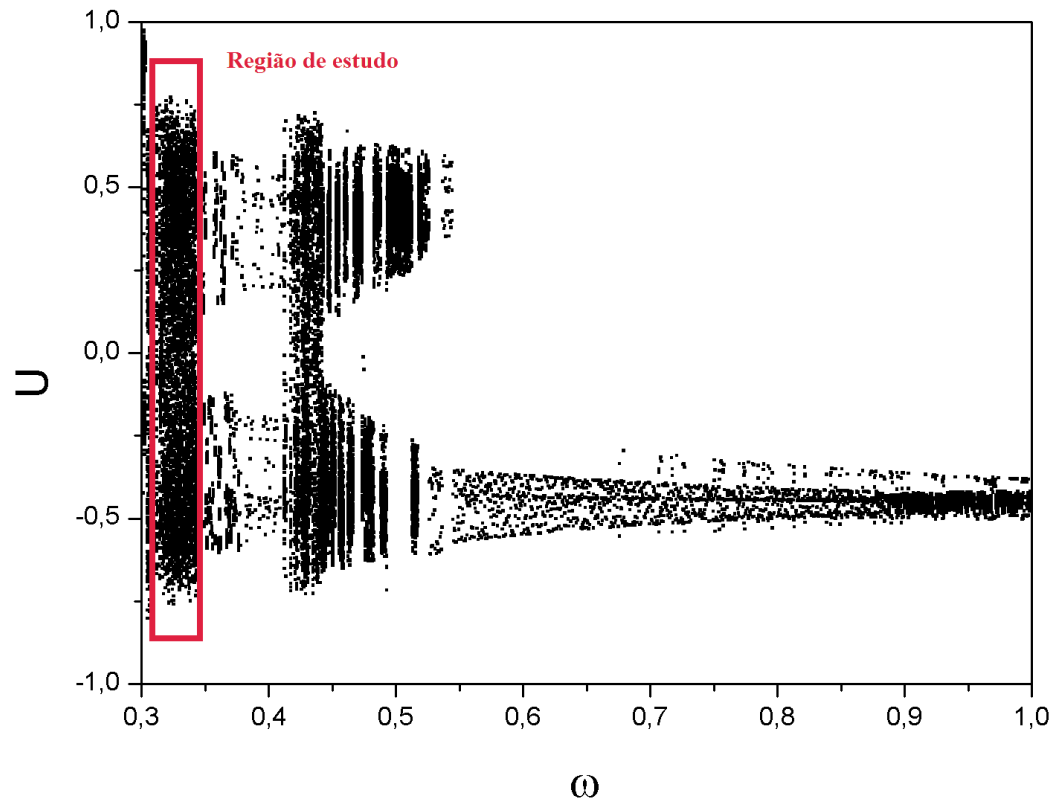


Figura 13 - Diagrama de bifurcação para variação de frequência

Para analisarmos o comportamento do sistema forçado em regime caótico, optou-se por estudar a faixa de frequência equivalente à $\varpi = 0,3347$. Para esse valor de frequência, o sistema apresenta um comportamento caótico que é precedido de uma faixa transiente que não é mostrado no diagrama. Os valores de frequência imediatamente superiores apontam uma janela mais comportada que evolui para outro regime caótico, convergindo para movimentos concentrados em torno de uma das posições de equilíbrio, que podem ser identificados a partir de $\varpi = 0,55$. Essa riqueza de comportamentos indica que esse é um bom exemplo para o estudo de um regime caótico que pode ser estabilizado a partir do mecanismo de controle. Finalmente, pode-se concluir que as possibilidades apresentadas representam uma grande complexidade relacionada à treliça SMA.

5.2.1 Análise do espaço de fase e seção de Poincaré ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$)

Uma vez identificada uma região caótica no diagrama de bifurcação, pode-se verificar essa resposta através do espaço de fase e da seção de Poincaré, como mostrado na Figura 14. O espaço de fase está delimitado em faixas de valores simétricas para posição e velocidade. Além disso, a reta $U = 0$ foi apresentada para facilitar a visualização do movimento realizado pela treliça SMA em ambas as posições positiva e negativa do sistema.

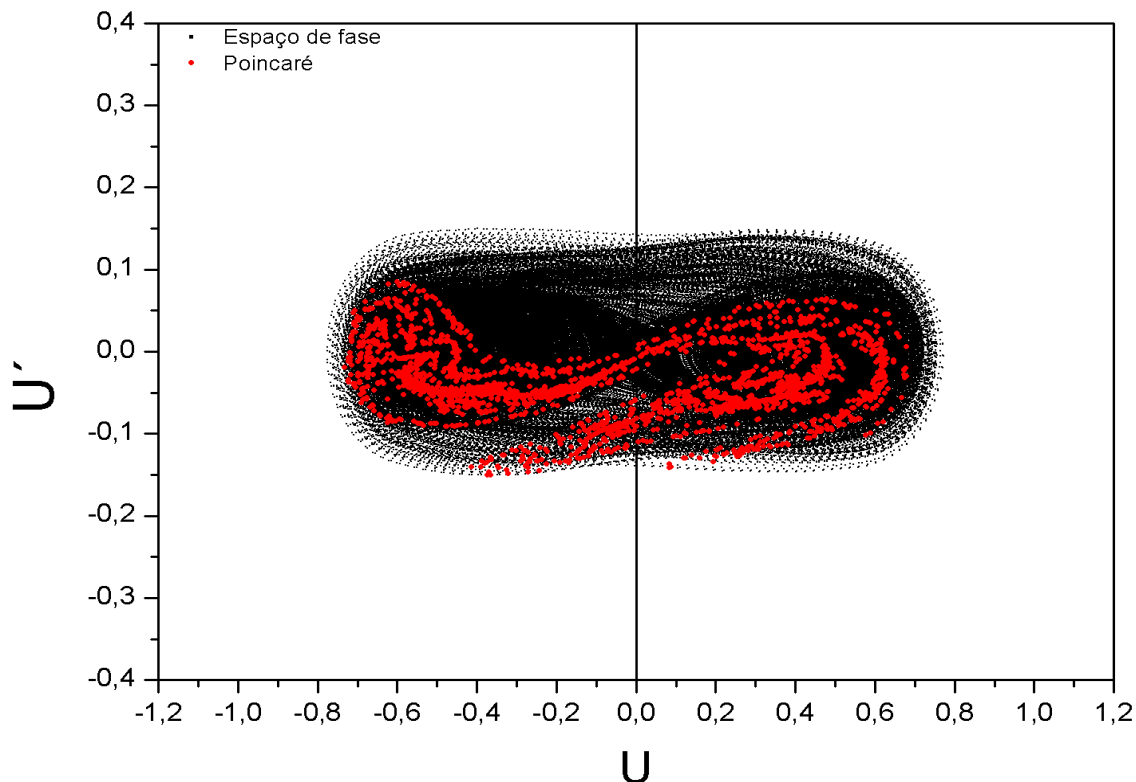


Figura 14 - Espaço de fase e seção de Poincaré ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$)

Pode-se perceber que a apresentação da seção de Poincaré sobre o espaço de fase facilita a identificação da dinâmica existente. O conjunto de pontos representados pelo corte perpendicular de um hiperplano revela que o sistema visita pontos por toda a extensão do espaço apresentado, além de possuir uma estrutura fractal. Outro aspecto interessante que pode ser observado claramente neste gráfico é o fenômeno *snap-through*, que ocorre quando a treliça passa de um lado para o outro da configuração espacial. Pode-se perceber que, para o regime caótico, o sistema visita os pontos de equilíbrio positivo e negativo várias vezes, sem um padrão determinado.

5.2.2 Análise da dinâmica de transição de fase ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$)

As características constitutivas das SMA que constituem a treliça analisada, rica em transições de fase entre martensita e austenita, representam uma fonte de não-linearidade importante para a análise da dinâmica, devendo ser avaliada. Para o caso em questão, o sistema apresenta uma condição de

temperatura $\theta \geq \theta_A$ ($\theta = 1.28$), onde somente a fase austenítica está presente para um estado livre de tensões, o que caracteriza um efeito pseudoelástico. Nesse estado, variantes da martensita podem ser induzidas por tração (**M+**) ou por compressão (**M-**). A Figura 15 ilustra esse tipo de comportamento.

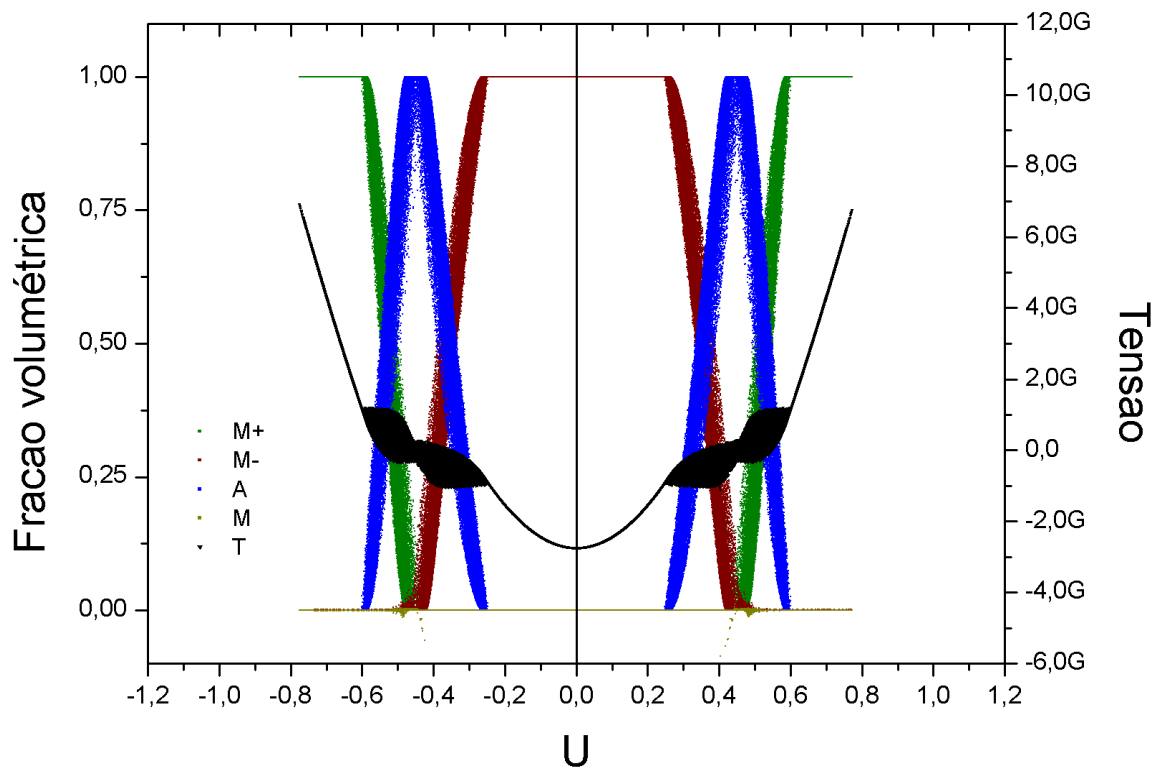


Figura 15 - Dinâmica de transições de fase ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$) e diagrama tensão-deformação.

O deslocamento vertical do sistema é representado pela abscissa U , que é novamente repartida em partes simétricas. No eixo das ordenadas, têm-se duas escalas. À esquerda, pode-se observar a fração volumétrica presente para cada fase envolvida na transformação. É importante ressaltar que esses valores são equivalentes às variáveis β_1 , β_2 , β_3 e β_4 apresentadas no conjunto de equações 5.3, 5.4 e 5.5. À direita, valores de tensão são apresentados. Para o caso de estudo selecionado, pode-se observar com clareza, em torno de $U = -0.6$, o momento em que a transição de fase **M+** \rightarrow **A** começa a ocorrer. Nesse ponto, o começo de um laço de histerese também pode ser observado na curva de tensão. Após o término da transição, o sistema passa por um curto estado livre de tensões que é evidenciado pela fração volumétrica da austenita em 100%, além da curva de tensão que assume valor igual à zero. Em torno de $U = -0.45$, é possível observar o começo da transição **A** \rightarrow **M-** que induz um segundo laço de histerese que termina em aproximadamente $U = -0.25$. A partir dessa posição, a curva de tensão assume valores negativos bem definidos, passando por um ponto de inflexão em $U = 0$. Um comportamento análogo é observado partindo-se do quadrante simétrico positivo. Além disso, é possível constatar um aspecto “borrado” nas curvas de fração volumétrica e no laço de histerese da curva de tensão. Esse padrão é determinado pela sensibilidade às condições iniciais e, conseqüentemente pequenas perturbações, que faz com que o sistema realize caminhos diferentes a

cada nova órbita executada dentro da zona em que ocorrem transições de fase martensíticas e austeníticas.

5.3 Identificação de OPIs

Essencialmente, os métodos de controle de caos podem ser decompostos em duas fases: a fase de aprendizagem, onde se identificam as OPIs e determinam-se os parâmetros do controlador; e a fase de controle propriamente dita, onde realizam-se as perturbações no parâmetro de controle de forma a estabilizar a trajetória do sistema em OPIs previamente selecionadas. Para o sistema em estudo, entretanto, os parâmetros do controlador não são calculados devido à dificuldade existente na implementação do cálculo de ferramentas usualmente utilizadas para quantificar o comportamento caótico, como o expoente de Lyapunov.

A Figura 16 mostra as órbitas periódicas instáveis que foram identificadas na seção de Poincaré e no espaço de fase do sistema de treliça composta por SMA estudado. Pode-se observar órbitas de período 1, 2 e 4.

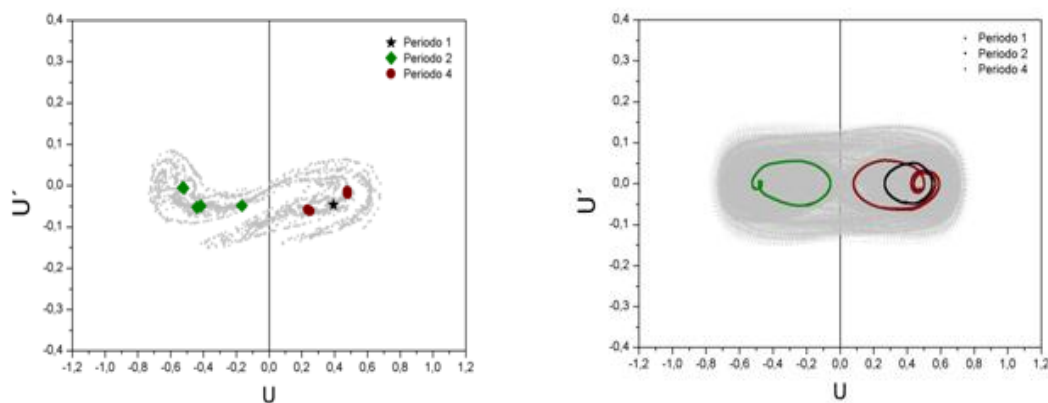


Figura 16 - Algumas OPIs identificadas (a) Seção de Poincaré (b) Espaço de fase

Na Figura 17, detalhes das OPIs identificadas são mostrados no espaço de fase. Pode-se observar que existe uma pequena falha no fechamento de cada órbita para todas as periodicidades apresentadas.

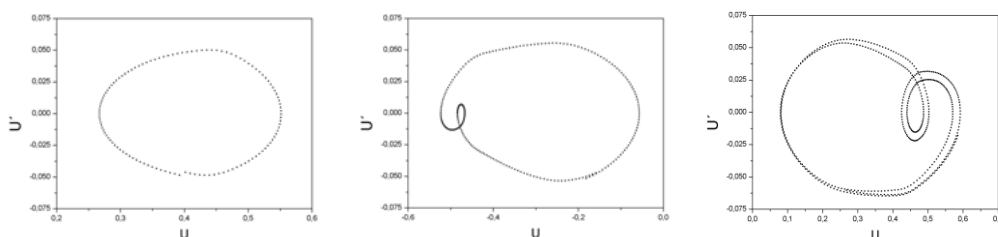


Figura 17 - OPIs identificadas, em detalhe (a) Período 1 (b) Período 2 (c) Período 4

6. CONTROLE DE UMA TRELIÇA DE VON MISES COMPOSTA POR SMA

6.1 Estratégia de controle

Com o objetivo de estabelecer uma metodologia passível de ser aplicada experimentalmente para controlar a treliça de Von Mises composta por SMA, um parâmetro D , como mostrado na Figura 18, foi inserido no sistema de equações que governam o sistema apresentado. Esse novo grau de liberdade é capaz de permitir a atuação em um dos pontos de apoio da treliça, realizando deslocamentos com base na realimentação de informações provenientes das respostas anteriores apresentadas pelo sistema.

Para o bom funcionamento dessa estratégia de controle, é necessário garantir que a perturbação causada pelo termo de controle esteja inserida nas leis que governam o movimento do sistema, assim como na definição da deformação apresentada pelas barras compostas por SMA, uma vez que esta variável é responsável por influenciar toda a dinâmica de transições de fase martensíticas e austeníticas que ocorrem durante a aplicação de tensões de tração ou deformação.

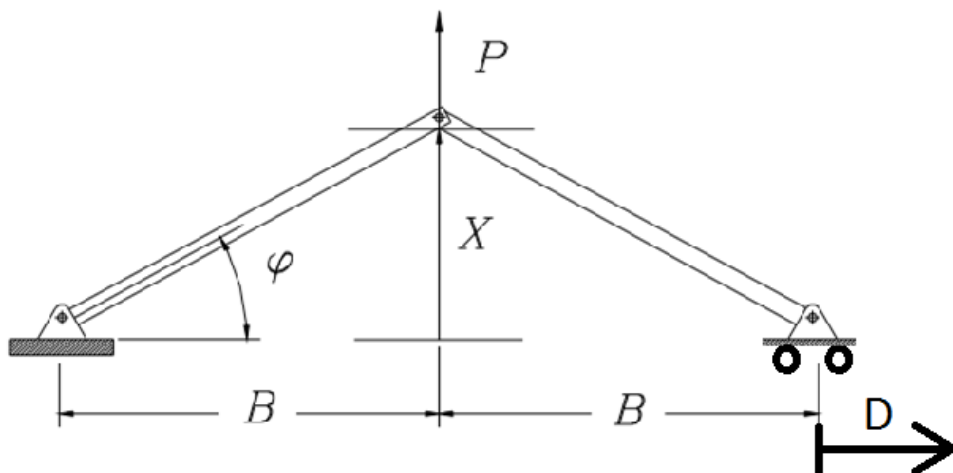


Figura 18 - Treliça de duas barras com natureza SMA com ação de controle

Além disso, o valor de D deve ser limitado, quando comparado ao valor de L , a pequenas variações no espaço, para que a uni-dimensionalidade do sistema continue sendo garantida. A importância dessa condição também pode ser confirmada através da equação 5.1, que exibe uma dependência da equação de movimento em relação à $\sin(\varphi)$. A negligência ao respeito dessas condições pode fazer com que não-linearidades sejam inseridas no modelo, o que não é desejado.

Por último, deve-se observar que, no caso da ocorrência de uma variação D no apoio do sistema, os catetos inferiores de cada um dos triângulos esquerdo e direito, formados por X , B e pela barra da treliça, sofrem uma variação igual à $D/2$ em seus comprimentos, e este fator deve ser inserido na modelagem do sistema.

Deste modo, levando em consideração as condições apresentadas, a equação 5.9 pode ser reescritas da seguinte forma:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + 2A \frac{X}{\left(x^2 + \left(B + \frac{D}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \left\{ \begin{array}{l} E \left[\frac{\left(x^2 + \left(B + \frac{D}{2}\right)^2\right)^{1/2}}{L_0} - 1 \right] \\ + [\alpha + E\alpha_h](\beta_2 - \beta_1) - \Omega(T - T_0) \end{array} \right\} = P(t) \quad (6.1)$$

Seguindo a mesma lógica, e considerando uma excitação periódica $P = P_0 \sin(\omega t)$, a nova equação do movimento pode ser escrita numa forma adimensional da seguinte forma:

$$x' = y \quad (6.2)$$

$$y' = \gamma \sin(\varpi t) - \xi y - \mu_E \left[1 - \frac{1}{\left(x^2 + \left(b + \frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2}} \right] - \left[\begin{array}{l} (\hat{\alpha} + \mu_E \alpha_h)(\beta_2 - \beta_1) \\ - \hat{\Omega} \mu_\Omega (\theta - \theta_0) \end{array} \right] \frac{x}{\left(x^2 + \left(b + \frac{d}{2}\right)^2\right)^{1/2}}$$

Para realizar a adimensionalização das variáveis apresentadas na equação 6.2 foram utilizados parâmetros de referência que facilitam a aplicação de valores numéricos. Assim, tem-se que:

$$x = \frac{X}{L}, \quad b = \frac{B}{L_0}, \quad d = \frac{D}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{2E_R A}{mL_0}, \quad \gamma = \frac{P_0}{mL_0 \omega_0^2}, \quad \xi = \frac{c}{m\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \varpi = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (6.3)$$

$$\theta = \frac{T}{T_M}, \quad \mu_E = \frac{E}{E_R}, \quad \mu_\Omega = \frac{\Omega}{\Omega_R}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\alpha}{E_R}, \quad \hat{\Omega} = \frac{\Omega_R T_R}{E_R} \quad \text{e} \quad ()' = \frac{d()}{d\tau}.$$

Uma vez definidas as novas equações que governam o sistema através da incorporação do novo termo de controle proposto, é necessário entender como essa perturbação irá atuar no tempo. Levando em consideração o método de controle *TDF*, apresentado no Capítulo 3, pode-se definir a perturbação através da realimentação da diferença entre um estado atual e um estado defasado do sistema, de acordo com a equação 3.2. Esse processo depende da escolha arbitrária de dois parâmetros: o ganho multiplicador K e o valor da defasagem utilizada entre a comparação de estados τ .

Logo, o valor da perturbação inserida no sistema através da variável $d = D/L$ pode ser definido a partir de uma variação da equação 3.1, como:

$$d = K(x'_\tau - x') \quad (6.4)$$

Aqui, o tempo de defasagem é definido segundo a periodicidade da OPI que se deseja estabilizar. Para as OPIs identificadas, a defasagem pode assumir valores iguais a 1, 2 ou 4. Em relação ao ganho multiplicador K , entretanto, a escolha de valores apropriados é mais complexa. Neste trabalho, será realizada uma investigação por tentativa e erro. Alguns autores, no entanto, calculam valores adequados para o ganho a partir do cálculo do expoente de Lyapunov (Pyragas, 1992; De Paula, 2010).

6.2 Resposta dinâmica do sistema forçado com ação de controle

Uma vez definida a estratégia de controle e a sua modelagem matemática, é necessário avaliar a influência do método no comportamento do sistema após a inserção da perturbação causada pela ação do termo de controle. Para explorar essas possibilidades, vários valores associados aos parâmetros τ e K foram testados, de acordo com a seguinte metodologia:

- Variação da defasagem τ (dentro dos valores identificados nas OPIs)
 - Variação do ganho K , variando de 0 até 1, com incrementos de 0,1 ou 0.05
 - Avaliação do espaço de fase e da seção de Poincaré
 - Avaliação da dinâmica de transições de fase e curva tensão-deformação
 - Avaliação do sinal de controle no tempo
 - Avaliação do sinal de controle no espaço
- Fecha variação da defasagem τ

É importante notar que as avaliações propostas para espaço de fase e seção de Poincaré; dinâmica de transição de fase e curva tensão-deformação; e sinais de controle no tempo e espaço; devem ser realizadas em conjunto. Devido à complexidade apresentada pelos padrões presentes na dinâmica do sistema, por vezes não é possível concluir a classificação mais adequada utilizando apenas a análise de um tipo de gráfico. Através da complementação e do reforço de informações provenientes de cada uma das fontes apresentadas o trabalho de identificação de comportamentos pode ser feito de forma mais acurada.

Para ilustrar a forma de apresentação dos resultados, o sistema em seu regime caótico original sem ação de controle, equivalente ao sistema com ação de controle para ganho $K = 0$, é mostrado na Figura 19 (observe que para este valor de ganho o valor de d na equação 6.4 é sempre igual à zero). Cabe ressaltar que o termo de controle, expresso na ordenada dos gráficos, corresponde à atuação de controle d .

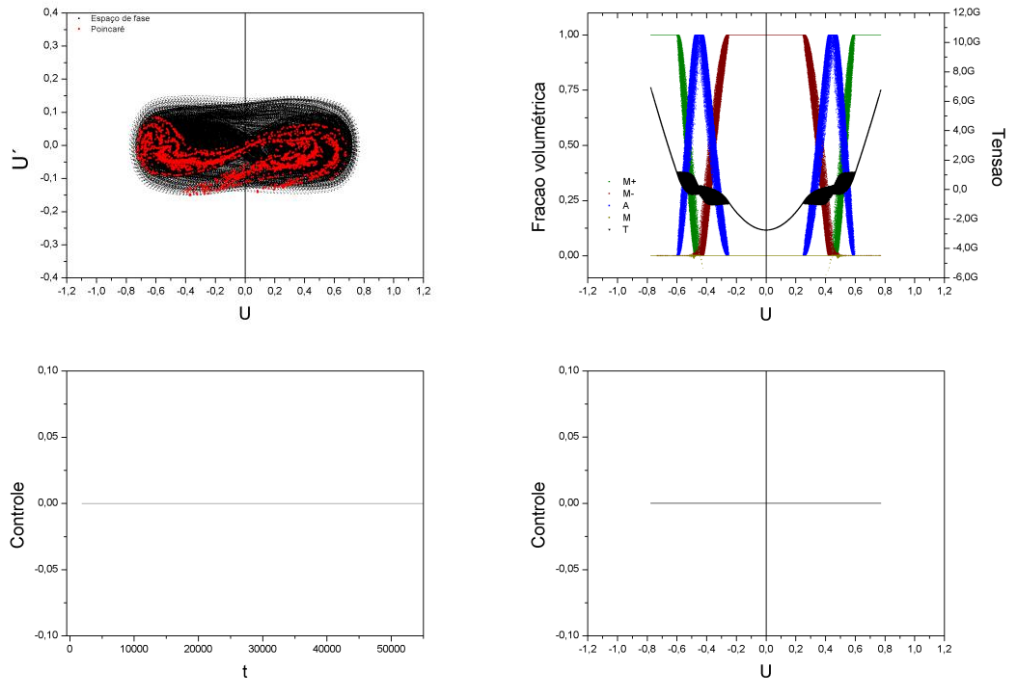


Figura 19 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 0$

Seguindo a metodologia apresentada, a análise do sistema sob ação de controle é iniciada para $\tau = 1$, buscando a estabilização de uma OPI de período-1. Para valores de K diferentes de zero, a perturbação causada pela ação do termo de controle começa a ter efeito sobre o sistema. Na Figura 20, é possível identificar essa diferença de comportamento para $K = 0,5$.

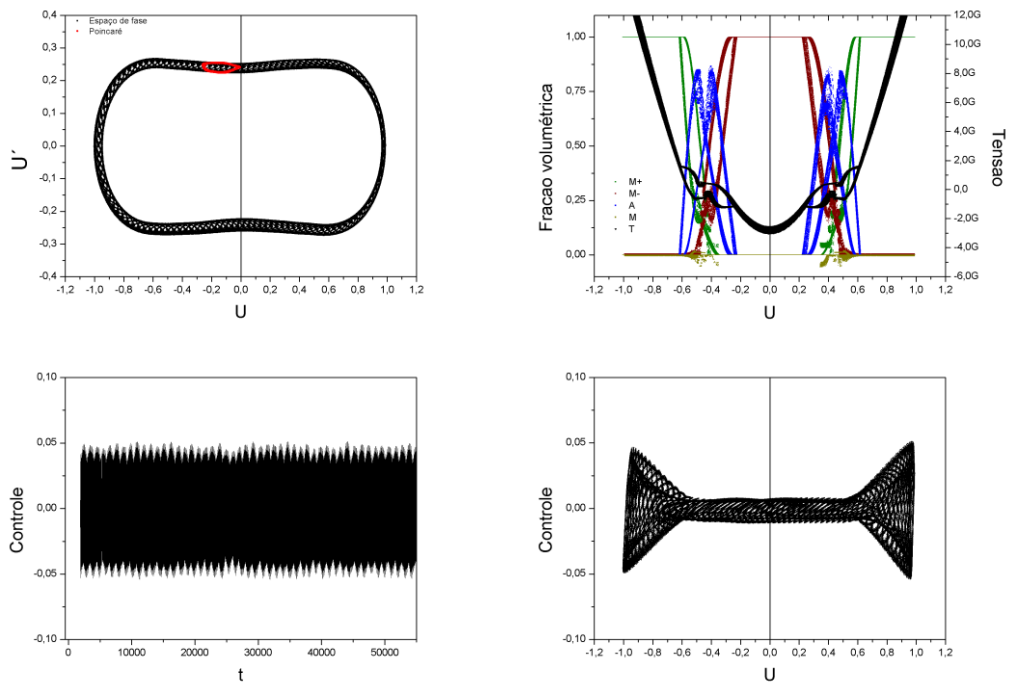


Figura 20 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 0,5$

Para esses valores de defasagem e ganho, o sistema apresenta uma resposta quase-periódica. Além disso, os resultados apresentados correspondem ao comportamento em regime permanente.

Avaliando o espaço de fase e a seção de Poincaré, é possível observar que, apesar da treliça visitar ambos os quadrantes apresentados, esse movimento é realizado seguindo um determinado padrão. Durante a passagem do lado positivo para o lado negativo, a velocidade do sistema permanece aproximadamente constante, sofrendo acelerações positivas e negativas nos pontos onde as posições assumem valores absolutos máximos.

Esse comportamento também pode ser observado na dinâmica de transições de fase e na curva de tensão. Para o caso quase-periódico, pode-se observar que, em torno de $U = -0.6$, a transição de fase $\mathbf{M+} \rightarrow \mathbf{A}$ começa a ocorrer. Nesse ponto, o começo de um laço de histerese também pode ser observado na curva de tensão. Entretanto, antes do término da transição, é possível observar o começo da transição $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M-}$ que induz um segundo laço de histerese que termina em aproximadamente $U = -0.25$. Desta forma, o sistema nunca passa por um estado livre de tensões, o que é evidenciado pelos valores de fração volumétrica da austenita, que são sempre menores que 100%. Além disso, esse fenômeno gera uma coexistência dos laços de histerese. Um comportamento análogo é observado partindo-se do quadrante simétrico positivo.

Avaliando o termo de controle no tempo, pode-se concluir que os valores absolutos da perturbação inserida pelo termo de controle D estão, no máximo, em torno de 5% do valor de L , o que é um resultado bastante interessante porque garante as condições estabelecidas na definição das condições de uni-dimensionalidade que garantem a validade matemática da estratégia adotada.

Para a resposta do controle no espaço, pode-se perceber que o valor do termo de controle é menor dentro da faixa demarcada pelos laços de histerese, o que induz um comportamento em “forma de ampulheta”. Talvez, esse fenômeno possa ser explicado graças à energia perdida durante a transição de fase, que, devido ao reforço causado pela coexistência de laços, é suficientemente grande para induzir essa diferença de valores na ação do termo de controle.

Aumentando-se o valor do ganho para $K = 1$, uma OPI de período 1 é estabilizada. A Figura 21 mostra o comportamento do sistema para esse ganho em regime permanente. Para esta situação, uma consideração importante deve ser feita: quando o sistema atinge o regime permanente em uma órbita controlada, o parâmetro de controle deixa de atuar, e por isso o seu valor permanece muito próximo de zero para os estados subsequentes do tempo.

Vale ressaltar que a OPI mostrada é diferente da identificada na Figura 16 e Figura 17. No entanto a órbita instável estabilizada é simétrica àquela mostrada nas figuras anteriores, o que é natural tendo em vista as características de simetria que o problema apresenta.

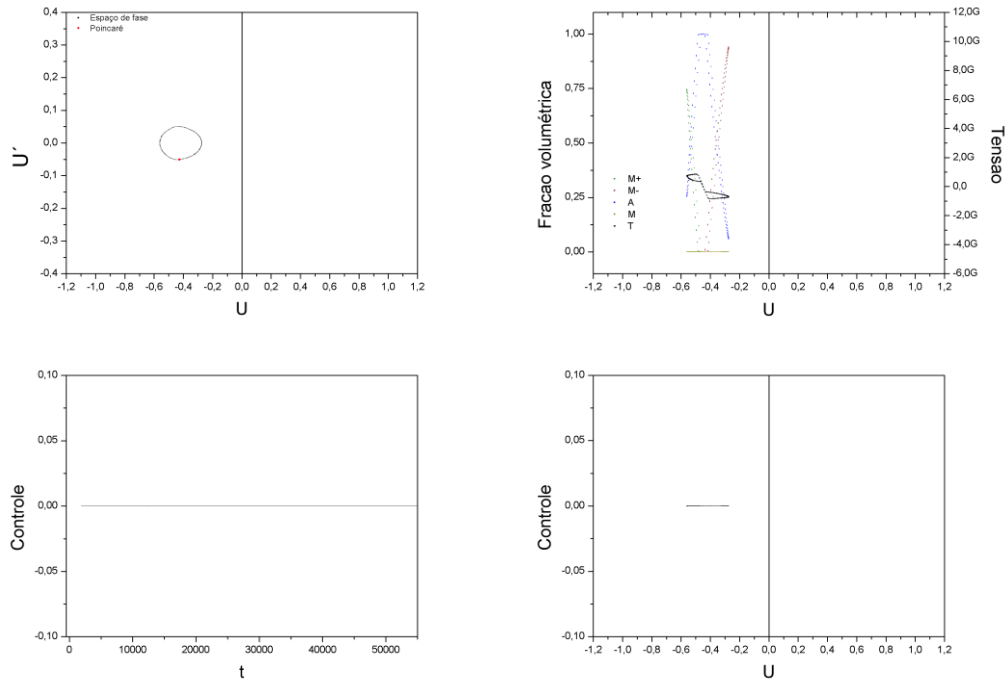


Figura 21 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 1$

Desta forma pode-se observar através do espaço de fase que o sistema permanece durante todo o tempo em uma órbita de período 1 estabilizada na parte negativa das coordenadas espaciais. Esse comportamento é confirmado pela seção de Poincaré, representada por um único ponto. Assim, é possível afirmar que o método de controle *TDF* funciona e é capaz de estabilizar as OPI para o sistema em estudo. Situações como essas são muito interessantes para a engenharia, pois após a perturbação inserida pelo controle o comportamento *snap-through* é evitado.

Avaliando a dinâmica de transição de fase e da curva de tensão, podemos ver que o aspecto “borrado” presente em situações anteriores não é mais encontrado. Esse fenômeno ocorria por conta da sensibilidade ao comportamento caótico, que induzia a passagem do sistema por trajetórias diferentes, ou a não periodicidade na resposta no caso quase-periódico. Entretanto, com o sistema estabilizado em uma órbita periódica, é natural que a transição de fases ocorra sempre no mesmo ponto. Analisando a curva de tensão, podemos observar que os dois laços de histerese possuem início e término bem definidos. Além disso, os valores de absolutos de tensão são consideravelmente menores, fato que abre possibilidades para que melhorias estruturais sejam projetadas para esse tipo de sistema.

Para visualizar a convergência para a órbita de período 1 estabilizada, é necessário estudar o transiente do sistema. A Figura 22 mostra o comportamento do sistema, incluindo o transiente, para $\tau = 1$ e $K = 1$, em comparação com o sistema em regime permanente apresentado na Figura 21. Pode-se observar que o termo de controle, em ambas as representações no espaço e no tempo, alcança valores praticamente nulos muito rapidamente, estabilizando o sistema.

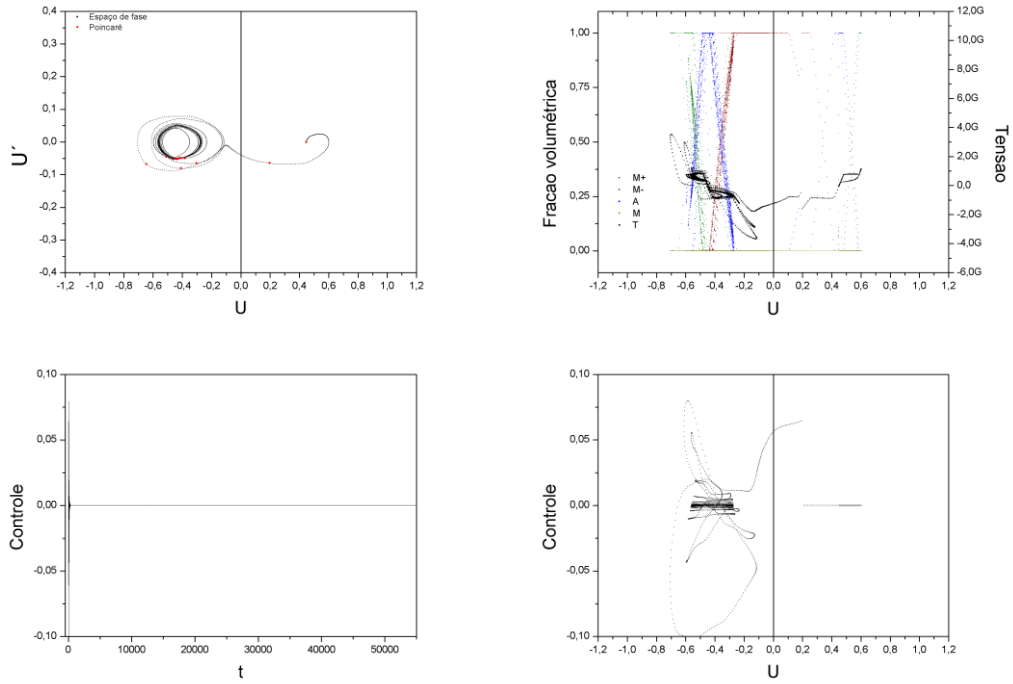


Figura 22 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 1$ e $K = 1$, com transiente

Seguindo a metodologia apresentada, considera-se agora $\tau = 2$, buscando a estabilização de uma OPI de período 2. A Figura 23 apresenta a resposta do sistema para $K = 0,7$.

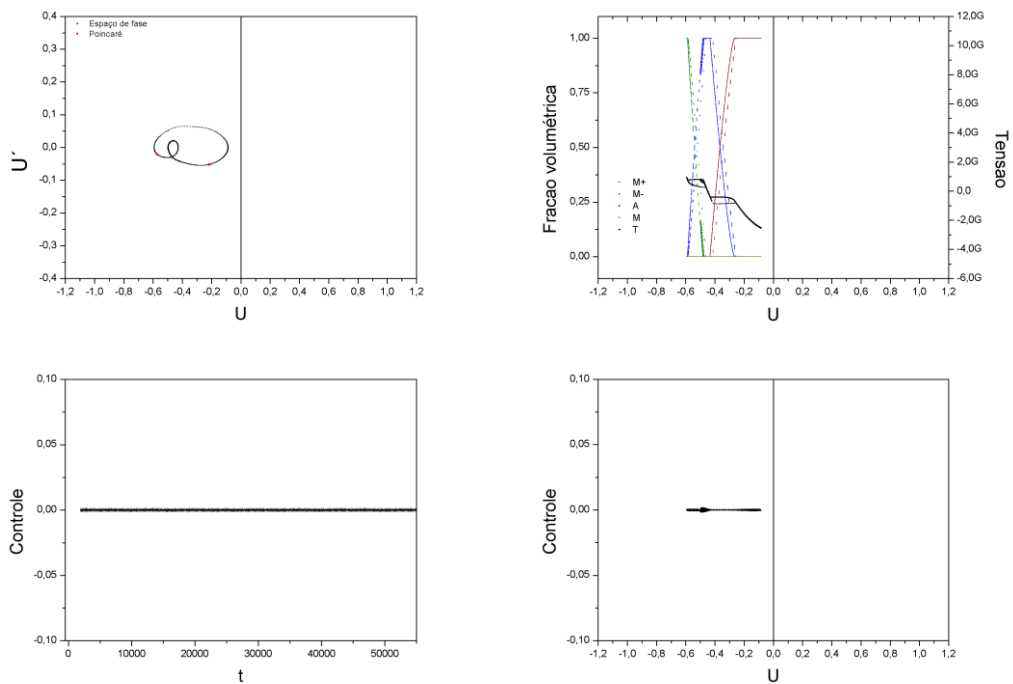


Figura 23 - Resposta do sistema controlado com $\tau = 2$ e $K = 0,7$

Por último, considera-se a lei de controle para $\tau = 4$. A Figura 24 mostra a resposta do sistema com $\tau = 4$ e $K = 0,5$, apresentando um comportamento quase-periódico. Para esses valores dos parâmetros de controle observa-se um maior transiente. Este fato pode ocorrer devido à dificuldade que o método

TDF apresenta para convergir em alta periodicidade. Desta forma, a análise do transiente torna-se mais importante na avaliação do sistema com ação de controle quando se aumenta o valor de τ . É possível perceber, no exemplo dado, que sem a realização de uma análise do transiente, seria possível concluir, erroneamente, que o sistema é caótico, ao invés de quase-periódico.

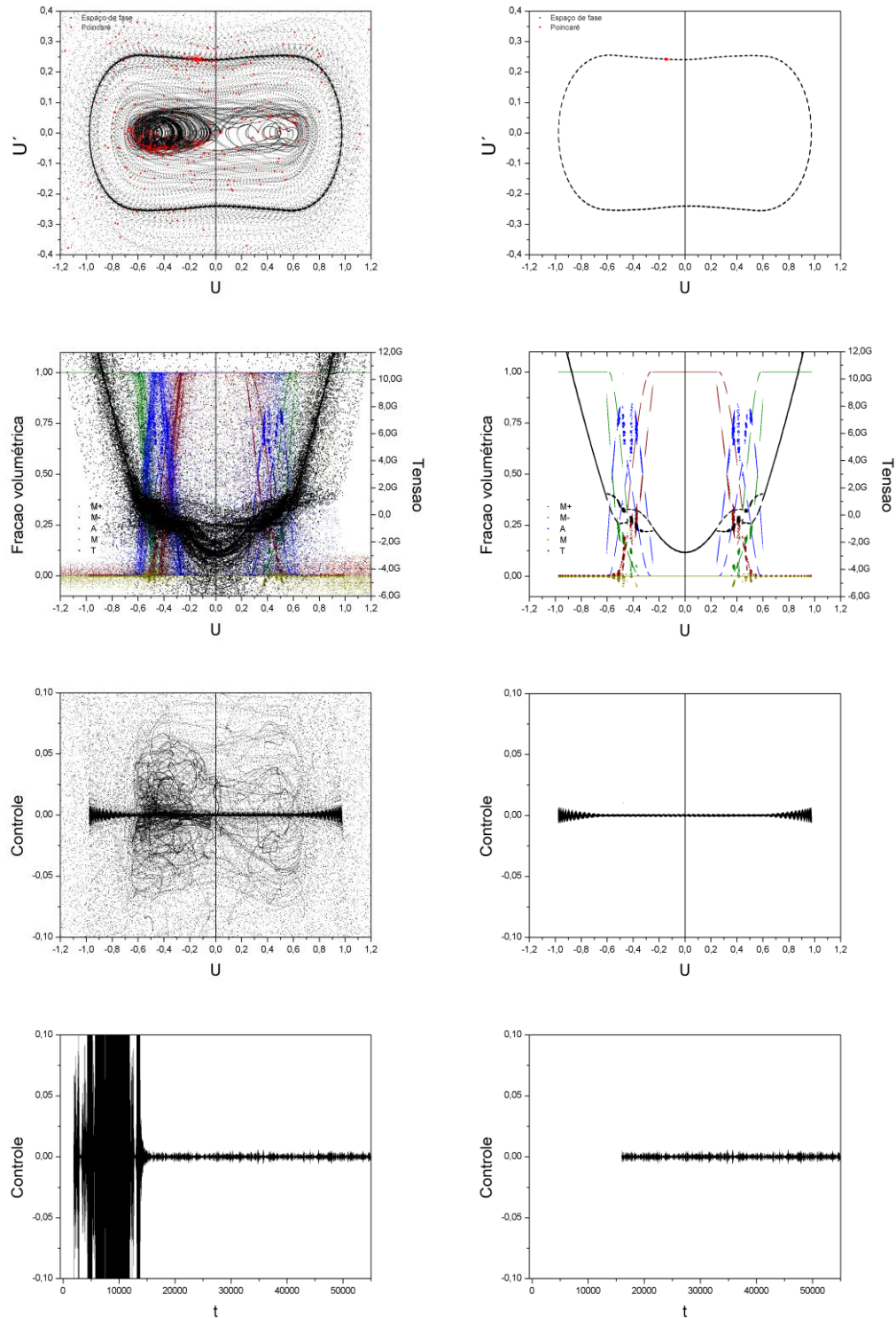


Figura 24 - Respostas do sistema (a) com transiente (b) sem transiente, para $\tau = 4$ e $K = 0,5$

Para os diferentes valores de K testados não foi possível estabilizar nenhuma OPI de período 4. O comportamento quase-periódico alcançado, apresentado na Figura 24, não evita o comportamento snap-through. No entanto, o comportamento caótico foi suprimido, e essa alternativa pode também ser interessante em determinadas situações.

6.3 Mapa de resultados

A Tabela 2 mostra o resultado da exploração que foi realizada através da variação dos parâmetros K e τ , para o caso de estudo escolhido ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$).

Tabela 2 - Resultados do comportamento do sistema, com variações de τ e K

Ganho (K)	0	0,10	0,20	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,70	0,75	1,0
Defasagem ($\tau = 1$)	C	P ₄	QP	QP	P ₂	QP	QP	QP	QP	QP	P ₁	P ₁	P ₁
Defasagem ($\tau = 2$)	C	C	C	C	C	C*	C	C	C	C	P ₂	C*	C*
Defasagem ($\tau = 4$)	C	C	C	C	C	C*	QP	C	C	C*	C*	C*	C*

Os comportamentos encontrados foram classificados como:

- C = comportamento caótico
- QP = comportamento quase-periódico
- P_N = comportamento estabilizado em uma órbita de período N
- * = D excede valores acima de 10% de L

Com base nos resultados apresentados, é possível concluir que a aplicação do método de controle pode ser considerada bem sucedida para todos os valores de ganho K aplicados para uma defasagem $\tau = 1$, uma vez que as perturbações geradas pela combinação desses parâmetros fizeram com que o sistema saísse de seu regime caótico, alcançando movimentos quase-periódicos e órbitas de período 1, 2 e 4. Além disso, algumas características merecem atenção. A resposta de comportamento quase-periódico e periódico não apresenta correlação com o aumento do valor de ganho. Em outras palavras, o aumento do ganho não garante uma estabilização em órbita periódica. Entretanto, ao considerar somente $\tau = 1$, é possível perceber que existe uma correlação negativa para este comportamento: quanto maior o valor do ganho, menor o período de uma possível órbita controlada.

Para valores de defasagem $\tau = 2$ e $\tau = 4$, apenas duas combinações de ganho e defasagem conseguiram suprimir o comportamento caótico. Entretanto, cabe lembrar que a variação dos valores de ganho foi feita através de tentativa e erro. O emprego de outros métodos de controle, como o *ETDF* (*Extended Time-Delay Feedback*), que considera mais estados defasados e mais uma variável de ganho R , resultados que suprimissem comportamentos caóticos seriam obtidos com mais facilidade.

Além disso, simulações com um incremento de ganho menor poderiam ajudar no ajuste fino de parâmetros para driblar casos de coexistência de órbitas. Ao mudar os valores de ganho para esses casos, seria possível estabilizar uma determinada órbita de preferência, ao invés de outra igual de mesma periodicidade.

6.4 Padrões de comportamento caótico após ação de controle

Os resultados coletados nas simulações mostram um padrão bastante incidente em sistemas que apresentam comportamento caótico. Esses casos são caracterizados por um espaço de fase desorganizado, transições de fase com aspecto “borrado” com a presença de estados livre de tensões, e sinais de controle com resposta aleatória no tempo e espaço, como pode ser visto na Figura 25.

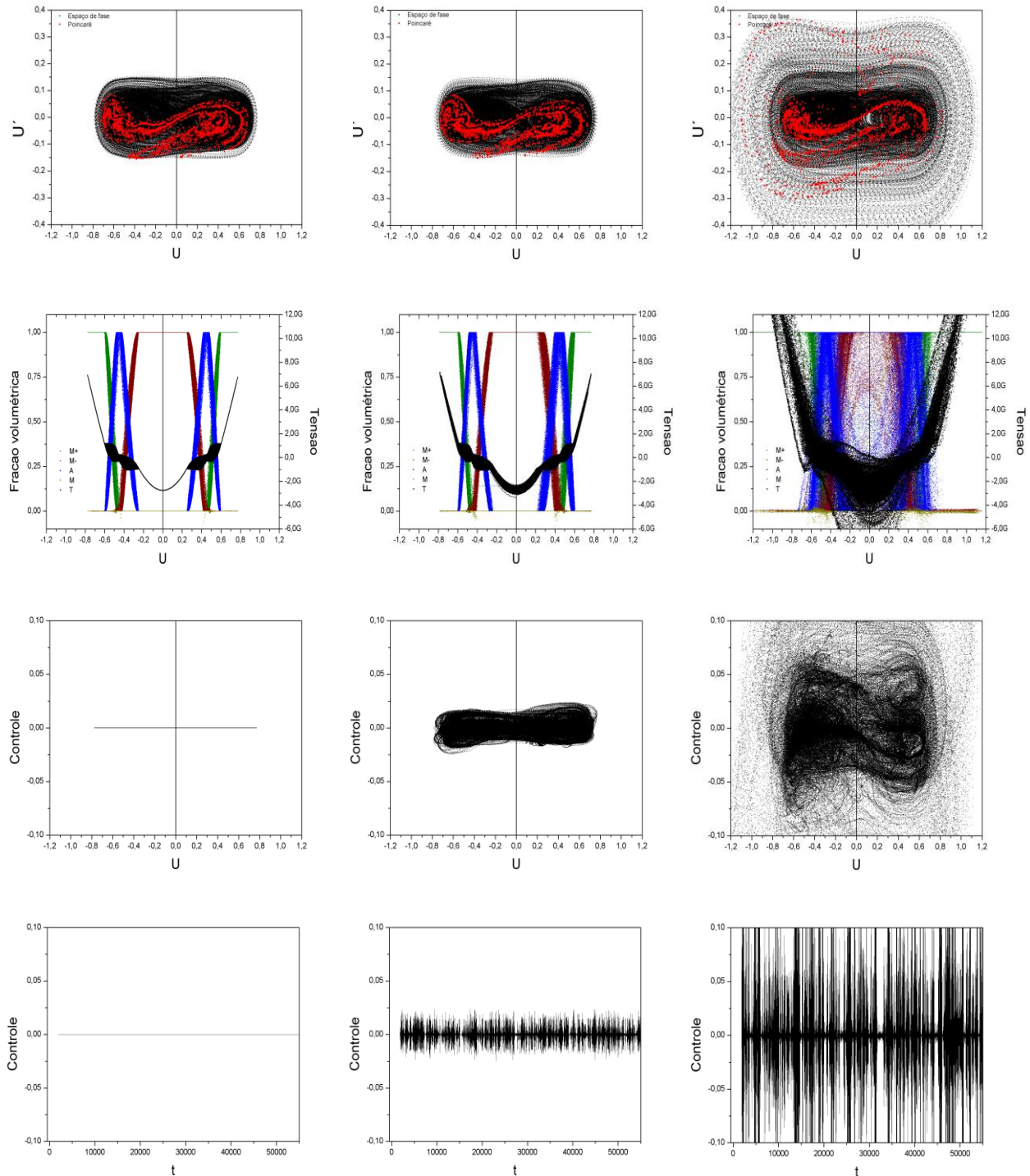


Figura 25 - Comportamento caótico (a) $\tau = 1$ e $K = 0$ (b) $\tau = 2$ e $K = 0,1$ (c) $\tau = 2$ e $K = 0,4$

6.5 Padrões de comportamento quase-periódico após a ação de controle

Os casos quase-periódicos são caracterizados por um espaço de fase organizado, que visita os dois lados do sistema seguindo um padrão bem definido. As transições de fase apresentam uma coexistência de laços de histerese, e o sistema nunca alcança um estado livre de tensões. Além disso, o sinal de controle no espaço apresenta um comportamento de “ampulheta”, conforme a Figura 26.

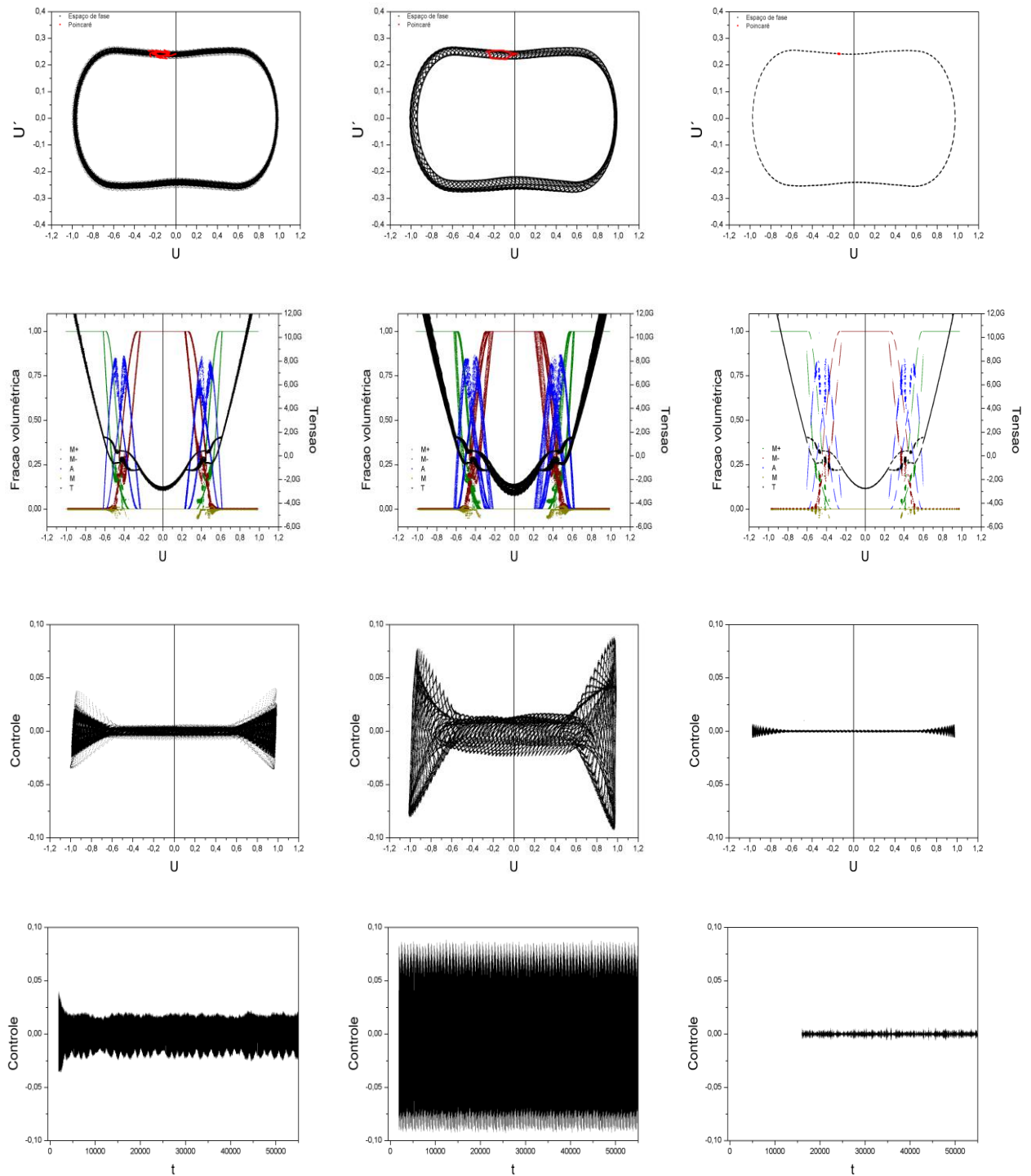


Figura 26 - Comportamento quase-periódico (a) $\tau = 1$ e $K = 0,3$ (b) $\tau = 1$ e $K = 0,6$ (c) $\tau = 4$ e $K = 0,5$

6.6 Padrões de comportamento periódico após a ação de controle

Os casos periódicos são caracterizados por um espaço de fase que mostra a estabilização da treliça em apenas um dos lados, realizando pequenas oscilações. As transições de fase apresentam uma trajetória bem definida, e a curva de tensão apresenta laços de histerese claramente separados. O sinal de controle apresenta padrões facilmente identificáveis no espaço e no tempo, conforme a Figura 27.

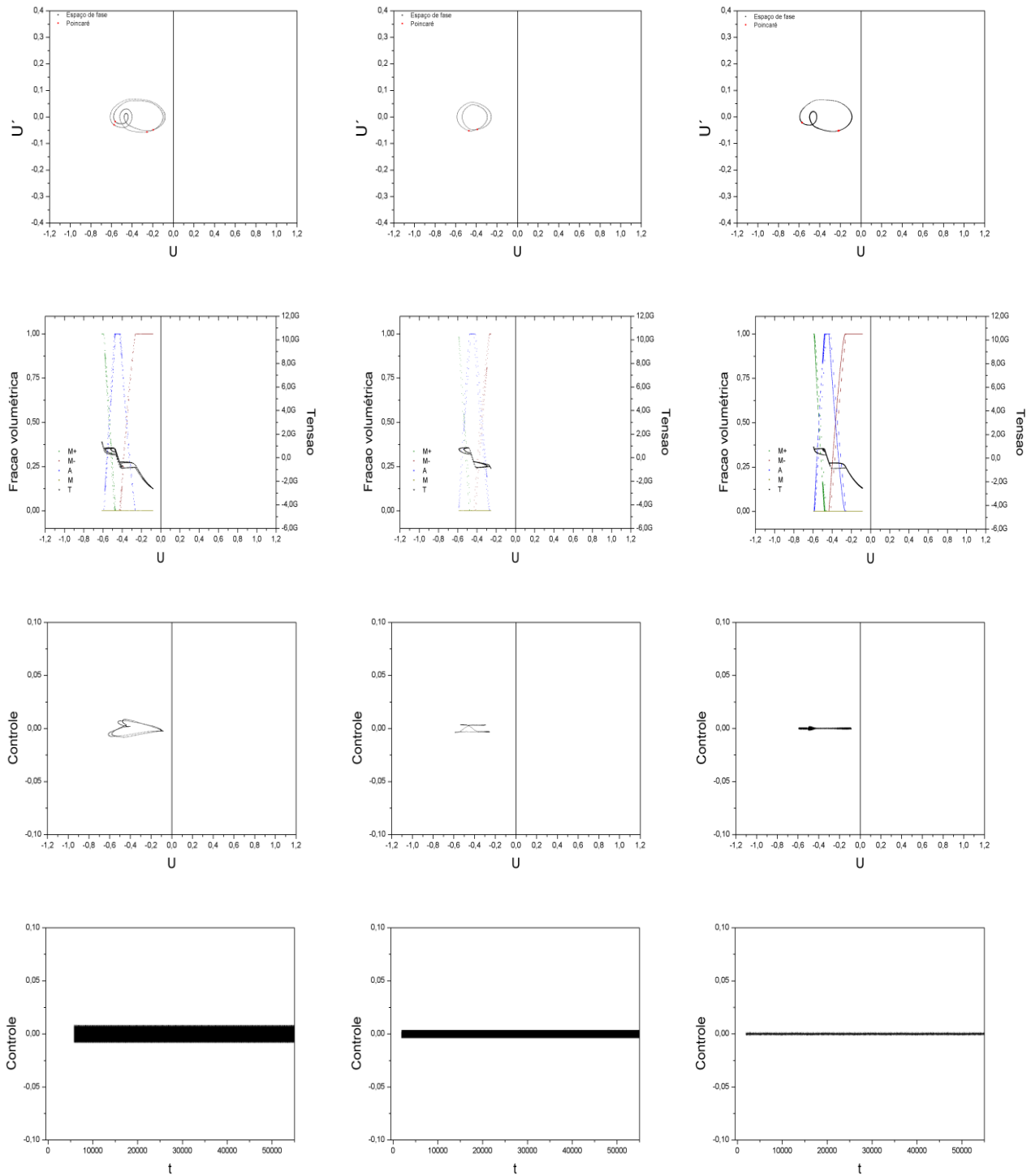


Figura 27 - Comportamento periódico (a) $\tau = 1$ e $K = 0,1$ (b) $\tau = 1$ e $K = 0,35$ (c) $\tau = 2$ e $K = 0,7$

6.7 Análise de bifurcações

Após o estudo do problema proposto e da formulação e aplicação da estratégia de controle adotada, pode-se perceber que o sistema comportou-se bem com a ação de controle para o caso de estudo escolhido ($\gamma = 0.01$ e $\varpi = 0.3347$). Entretanto, em condições reais de funcionamento, fatores externos causariam um ruído que faria com que os parâmetros adotados no modelo teórico oscilassem seus valores. Assim, uma análise mais profunda sobre o comportamento do sistema em outras situações também deve ser explorada, a fim de garantir que esse método seja considerado robusto. Para esse fim, podem-se utilizar diagramas de bifurcação para observar a evolução do sistema para uma faixa de valores de frequência e amplitude de forçamento, com e sem a ação do termo de controle.

6.7.1 Controle de bifurcações – variação de frequência

A Figura 28 mostra o diagrama de bifurcação do sistema sem e com a ação de controle para $\tau = 1$ e $K = 1$, com variação da frequência de forçamento. No caso presente, com a ação de controle deseja-se estabilizar a OPI de período 1, previamente estabilizada, quando a frequência de forçamento é variada.

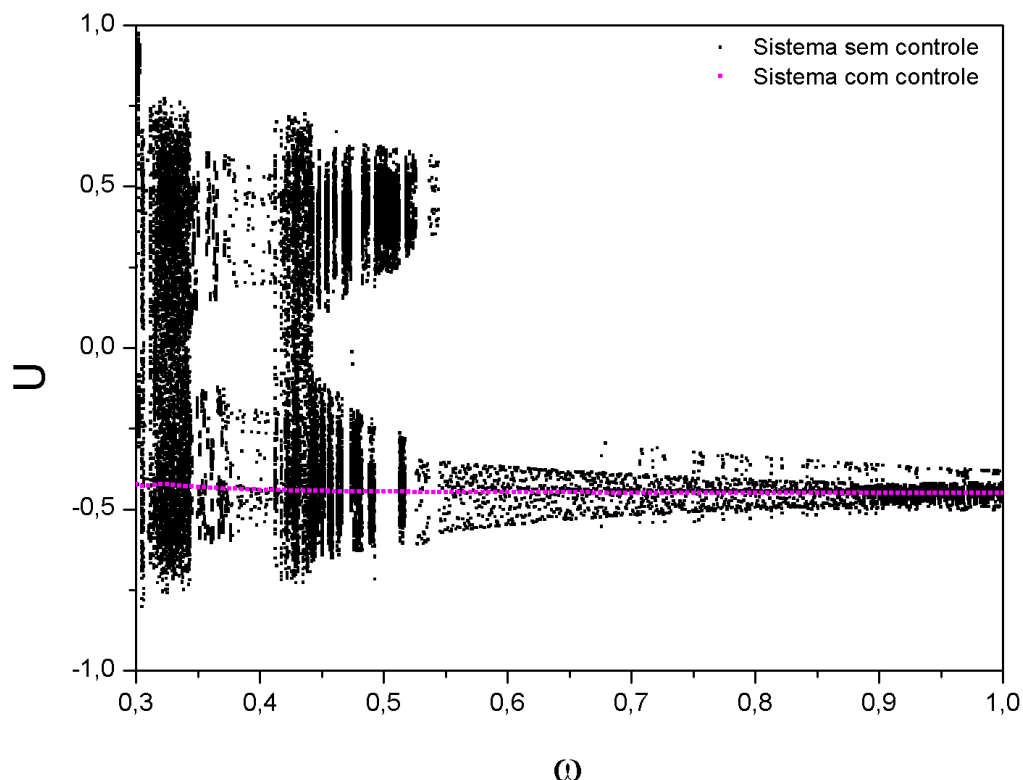


Figura 28 - Diagrama de bifurcação com variação de frequência, para $\tau = 1$ e $K = 1$, com ação de controle.

Os valores de ganho e defasagem foram escolhidos devido aos bons resultados demonstrados previamente no caso de estudo escolhido. Pode-se perceber que o sistema que antes apresentava comportamentos caóticos passa a apresentar um comportamento de período 1, para toda a faixa de

valores de frequência estudada. Vale ressaltar que é possível confirmar que o sistema escolhido para ser o caso de estudo ($\varpi = 0.3347$), é claramente estabilizado.

O resultado apresentado na Figura 27 mostra que o método *TDF* estabiliza o sistema em uma órbita de período 1 com $\gamma = 0.01$ e na faixa de frequência de forçamento de 0.3 até 1 com o mesmo valor de ganho, K , mostrando a robustez do método. Esse resultado é bastante expressivo e interessante para aplicações de engenharia. Para investigar o comportamento gerado pela imposição de outros valores para as amplitudes de forçamento, um segundo diagrama de bifurcação foi gerado, conforme apresentado a seguir.

6.7.2 Controle de bifurcações – variação de amplitude de forçamento

A Figura 29, assim como o diagrama de bifurcação mostrado previamente, mostra o comportamento do sistema sem e com a ação do termo de controle para $\tau = 1$ e $K = 1$. Para a variação da amplitude de forçamento imposta pela força externa, fixando a frequência em $\varpi = 0.3347$, pode-se perceber que o sistema que antes apresentava comportamentos caóticos passa a apresentar um comportamento de período 1, para toda a faixa de valores estudada. Esse resultado é particularmente interessante, pois mostra um desempenho ainda melhor quando comparado ao controle variando-se a frequência de forçamento.

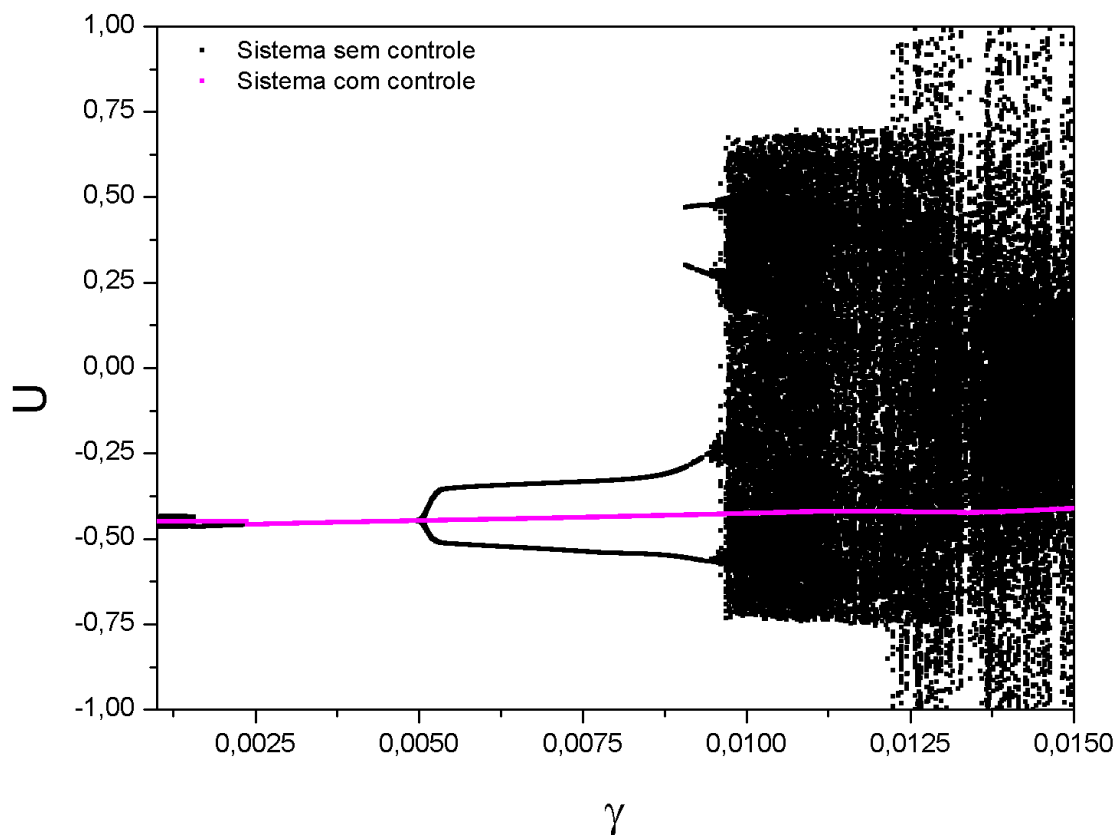


Figura 29 - Diagrama de bifurcação com variação de amplitude para $\tau = 1$ e $K = 1$, com ação de controle.

Pode-se concluir que o método de controle também é robusto para variações de frequência. Nota-se que a diferença de comportamentos com e sem controle para o caso de estudo escolhido ($\gamma = 0.01$) pode ser visualizada com clareza.

7. CONCLUSÃO

Este trabalho analisou e controlou um sistema mecânico composto por uma treliça de duas barras compostas de liga de memória de forma (SMA) que apresenta um comportamento snap-through. Este fenômeno é causado pela presença de não-linearidades geométricas que, dependendo do nível de carga aplicada, induzem o sistema à visitar duas configurações instáveis no espaço. Além disso, a presença de não-linearidades constitutivas, introduzidas pela dinâmica de transição de fases existente em SMAs mostrou que esse fator aumenta ainda mais a complexidade na resposta desse tipo de sistema. Para estabilizar o comportamento da treliça, sobretudo buscando evitar o snap-through, uma estratégia de controle foi empregada através da inserção de uma nova variável nas equações que governam o movimento. A variável e a lei de controle foram definidas através do método *Time-delay Feedback* (*TDF*). Por último, uma investigação numérica foi feita para analisar a combinação dos valores dos parâmetros de controle capazes de induzir, no sistema inicialmente caótico, comportamentos quase-periódicos e periódicos.

Para reconstituir o comportamento das transições envolvidas na dinâmica da liga de memória de forma, utilizou-se um modelo constitutivo previamente desenvolvido (Savi et al. 2002 (b)) que apresenta bons resultados quando comparados a dados experimentais. Além disso, os valores numéricos utilizados foram obtidos por Nogueira (2010). A investigação feita neste trabalho foi realizada considerando respostas forçadas da treliça, cuja temperatura foi considerada acima da temperatura de estabilização da fase austenita, evidenciando um comportamento pseudoelástico.

Com o objetivo de identificar o comportamento do sistema mediante a inserção da nova variável de controle, um caso de estudo, inicialmente em regime caótico, foi investigado. Após a construção de equações de movimento adequadas, algumas ferramentas para análise da dinâmica de sistemas não-lineares, como espaço de fase e seção de Poincaré, foram utilizadas para permitir que a análise dinâmica das simulações realizadas fossem feitas com mais facilidade. Assim, partindo de uma metodologia apresentada por De Paula (2010) para estabilizar órbitas instáveis e realizar controle de bifurcações, uma investigação de valores dos parâmetros necessários para aplicação de controle via método *TDF* foi realizada, e os resultados da análise mostraram que o sistema pode apresentar um número interessante de comportamentos complexos. Após a identificação de OPIs, foram testados valores de defasagem, τ , igual a 1, 2 e 4.

Com a investigação, foi possível concluir que a aplicação do método de controle pode ser considerada bem sucedida para todos os valores de ganho K aplicados para uma defasagem $\tau = 1$, uma vez que as perturbações geradas pela combinação desses parâmetros fizeram com que o sistema saísse de seu regime caótico, alcançando movimentos quase-periódicos e órbitas de período 1, 2 e 4. Além disso, algumas características merecem atenção. A resposta de comportamento quase-periódico e periódico não apresenta correlação com o aumento do valor de ganho. Em outras palavras, o aumento

do ganho não garante uma estabilização em órbita periódica. Entretanto, ao considerar somente $\tau = 1$, é possível perceber que existe uma correlação negativa para este comportamento: quanto maior o valor do ganho, menor o período de uma possível órbita controlada.

Para valores de defasagem $\tau = 2$ e $\tau = 4$, apenas duas combinações de ganho e defasagem conseguiram suprimir o comportamento caótico. Entretanto, cabe lembrar que a variação dos valores de ganho foi feita através de tentativa e erro. Com o emprego de outros métodos de controle, como o *ETDF* (*Extended Time-Delay Feedback*), que considera mais estados defasados e mais uma variável de ganho R , resultados que suprimissem comportamentos caóticos seriam obtidos com mais facilidade.

Após a aplicação bem-sucedida do controle, vários padrões de comportamento puderam ser identificados na dinâmica de respostas caóticas, quase-periódicas e periódicas. Desta forma, os casos caóticos, são caracterizados por um espaço de fase desorganizado, transições de fase com aspecto “borrado” e com a presença de estados livre de tensões, e sinais de controle com respostas sem padrão definido no tempo e espaço. Os casos quase-periódicos são caracterizados por um espaço de fase organizado, que visita os dois lados do sistema seguindo um padrão bem definido. As transições de fase apresentam uma coexistência de laços de histerese, e o sistema nunca alcança um estado livre de tensões. Além disso, o sinal de controle no espaço apresenta um comportamento característico, em “forma de ampulheta”. Os casos periódicos, que controlam o comportamento snap-through, são caracterizados por um espaço de fase que mostra a estabilização da treliça em apenas um dos lados, realizando pequenas oscilações. As transições de fase apresentam uma trajetória bem definida, e a curva de tensão apresenta laços de histerese claramente separados. O sinal de controle apresenta padrões facilmente identificáveis no espaço e no tempo.

Em relação aos aspectos estruturais, pode-se observar que os valores de tensão estabilizados para os casos periódicos asseguram uma incidência de carga muito menor no sistema, em torno de 1GPa, o que pode abrir muitas possibilidades para otimizações estruturais. Para o caso de quase-periodicidade os valores de tensão encontrados são relativamente altos, podendo chegar à 12 GPa. Entretanto, fenômenos como plasticidade, que ocorrem no caso de SMAs, não são levados em consideração pelo modelo, o que pode explicar esses resultados. Para comportamentos caóticos, os valores de tensão estão, no máximo, na faixa de 6 GPa. Levando em consideração o módulo de elasticidade dessas ligas, igual a 54 GPa, temos então deformações da ordem de 10%, o que condiz com resultados experimentais existentes.

Em seguida, uma análise extensiva foi realizada para investigar a validade do modelo de controle para valores além dos que foram estudados no caso escolhido através de diagramas de bifurcação para variação da frequência e da amplitude de forçamento. Vale ressaltar que esta análise apresenta uma importância especial, pois simula condições reais de funcionamento em engenharia. Assim, os resultados mostraram que a abordagem desenvolvida é válida para uma extensa faixa de comportamentos, com o controle atuando com parâmetros $\tau = 1$ e $K = 1$.

Finalmente, uma imensa quantidade de trabalhos futuros pode ser realizada a partir do que foi apresentado neste projeto. Alterações na aplicação do modelo de controle *TDF*, e mesmo a consideração de novas abordagens com outros métodos devem ser consideradas. Métodos de identificação de caos como o expoente de Lyapunov devem ser levados em consideração, apesar da dificuldade de implementação. Deve-se destacar, ainda, a importância de investigar o comportamento da treliça em diferentes temperaturas, o que pode revelar nuances interessantes e novos desafios para a abordagem de controle utilizada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Auerbach, D., Cvitanovic, P., Eckmann, J. -P., Gunaratne, G. & Procaccia, I. (1987), “Exploring Chaotic Motion Through Periodic Orbits”, *Physical Review Letters*, v.58, n.23, pp. 2387-2389.
- Baêta-Neves, A.P., Savi, M.A. & Pacheco, P.M.C.L., 2004, “On the Fremond’s constitutive model for shape memory alloys”, *Mechanics Research Communications*, 31 (6), pp.677-688.
- Bazant, Z. P. & Cedolin, L., 1991, “Stability of Structures”, Oxford Press.
- Bernardini, D. & Rega, G., 2005, “Thermomechanical modelling, nonlinear dynamics and chaos in shape memory oscillators”, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, v.11, n.3, pp.291-314.
- Bessa, W. M., de Paula, A. S. & Savi, M. A., 2009, “Chaos Control Using an Adaptive Fuzzy Sliding Mode Controller with Application to a Nonlinear Pendulum”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.42, pp.784-791.
- Boccaletti, S. & Arecchi, F. T., 1995, “Adaptive Control of Chaos”, *Europhysics Letters*, v.31, pp.127-132.
- Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y.-C., Mancini, H. & Maza, D., 2000, “The control of chaos: theory and applications”, *Physics Reports*, v.329, pp.103-197.
- Choi, S., Lee, J.J., Seo, D.C., et al., 1999, “The active buckling control of laminated composite beams with embedded shape memory alloy wires”, *Composite Structures*, 47, pp.679-686.
- De Paula, A.S., 2010, “Controle De Caos Em Sistemas Mecânicos”, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Fradkov, A. L., Evans, R. J. & Andrievsky, B. R., 2006, “Control of Chaos: Methods and Applications in Mechanics”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, v.364, pp.2279-2307.
- Gonçalves, P.B. & Del Prado, Z.J.G.N., 2002, “Nonlinear oscillations and stability of parametrically excited cylindrical shells”, *Meccanica*, 37, pp.569–597.
- Gunaratne, G.; Lindsay, P. S.; Vinson, M. J. (1989), “Chaos beyond Onset: A Comparison of Theory and Experiment”, *Physical Review Letters*, v.63, n.1, pp.1-4.
- Herrmann, G., 2001, “A Robust Delay Adaptation Scheme for Pyragas’ Chaos Control Method”, *Physics Letters A*, v.287, pp.245-256.
- Hikiyara, T. & Kawagoshi, T., 1996, “An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos”, *Physics Letters A*, v. 211, pp.29-36.
- Hsiao, Y.-C. & Tung, P. C., 2002, “Global chaos control of non-autonomous systems”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 254, n. 1, pp. 163-174.
- Kittel, A., Parisi, J. & Pyragas, K., 1995, “Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time”, *Physics Letters A*, v.198, pp.433-436.

- Lacarbonara, W., Bernardini, D. & Vestroni, F., 2004, “Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices”, *International Journal of Solids and Structures*, v.41, n.5-6, pp.1209-1234.
- Lindner, J. F., Ditto, W. (1995), “Removal, suppression, and control of chaos by nonlinear design”, *Applied Mechanical Reviews*, v.48, n.12, pp.795-808.
- Machado, L. G., 2002, “Caos em Sistemas Dinâmicos com Múltiplos Graus de Liberdade e Memória de Forma”. Tese de M.Sc., IME, Rio de Janeiro, R.J, Brasil.
- Machado, L.G., Savi, M.A. & Pacheco, P.M.C.L., 2003, “Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators”, *International Journal of Solids and Structures*, v.40, n.19, pp.5139-5156.
- Machado, L.G., Savi, M.A. & Pacheco, P.M.C.L., 2004, “Bifurcations and crises in a shape memory oscillator”, *Shock and Vibration*, v.11, n.2, pp.67-80.
- Myneni, K., Barr, T. A., Corron, N. J. & Pethel, S. D., 1999, “New Method for the Control of Fast Chaotic Oscillations”, *Physical Review Letters*, v.83, pp.2175-2178.
- Nogueira, J.B., 2010, “Nonlinear dynamics and chaos in a pseudoelastic two-bar truss”, *Smart Materials and Structures*.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M. & Taylor, R.L., 1983, “Operator split methods for the numerical solution of the elastoplastic dynamic problem”, *Computer Methods of Applied Mechanics and Engineering*, 39, pp.137-157.
- Otani, M., Jones, A. J., 1997, “Guiding Chaotic Orbits”, Research Report.
- Paiva, A., Savi, M.A., Braga, A.M.B., et al., 2005, “A constitutive model for shape memory alloys considering tensile-compressive asymmetry and plasticity”, *International Journal of Solids and Structures*, 42 (11-12), pp.3439-3457.
- Paiva, A. & Savi, M.A., 2006, “An overview of constitutive models for shape memory alloys”, *Mathematical Problems in Engineering*, v.2006, Article ID56876, pp.1-30.
- Parker, T. S., Chua, L. O., 1989, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, New York, Springer-Verlag.
- Parry, G., Colin, J., Coupeau, C., et al., 2005, “Snapthrough occurring in the postbuckling of thin films”, *Applied Physics Letters*, 86, 081905.
- Pereira-Pinto, F.H.I., 2004, “Controle de Caos em Sistemas Mecânicos: Aplicação a um Pêndulo Não-Linear”, Tese de M.Sc., IME, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Pereira-Pinto, F.H.I., Ferreira, A.M. & Savi, M.A. (2004), “Chaos Control in a Nonlinear Pendulum Using a Semi-Continuous Method”, *Chaos, Solitons and Fractals*, v.22, n.3, pp.653-668.
- Pinto, E. G. F. & Savi, M. A. (2003), “Nonlinear Prediction of Time Series Obtained from an Experimental Pendulum”, *Current Topics in Acoustical Research – Research Trends*, v.3, pp.151-162.

- Pyragas, K., 1992, “Continuous control of chaos by self-controlling feedback”, *Physics Letters A*, v. 170, pp. 421-428.
- Pyragas, K. & Tamasevicius, A., 1993, “Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback”, *Physics Letters A*, v.180, pp.99-102.
- Ramesh, M. & Narayanan, S., 2001, “Controlling chaotic motions in a two-dimensional airfoil using time-delayed feedback”, *Journal of Sound and Vibration*, v.239, pp.1037-1049.
- Rockafellar, R. T., 1970, “Convex Analysis”, Princeton Press.
- Santos, B.C. & Savi, M.A., 2007, “Nonlinear Dynamics of a Nonsmooth Shape Memory Alloy Oscillator”, *Chaos, Solitons & Fractals*.
- Santos, B.C. 2007, “Dinâmica Não-Linear de um Oscilador com Suporte Descontínuo com Memória de Forma”, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil..
- Savi, M.A. & Braga, A.M. B., 1993a, “Chaotic vibrations of an oscillator with shape memory”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v.XV, n.1, pp.1-20.
- Savi, M.A. & Braga, A.M.B., 1993b, “Chaotic response of a shape memory oscillator with internal constraints”, *Proceedings of XII the Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM 93 - ABCM)*, Brasília, Brazil, pp.33-36.
- Savi, M.A. & Pacheco, P.M.L.C., 2002 (a), “Chaos and hyperchaos in shape memory systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v.12, n.3, pp.645-657.
- Savi, M.A., Paiva, A., Baêta-Neves, A.P., et al., 2002 (b), “Phenomenological modeling and numerical simulation of shape memory alloys: A thermo-plastic-phase transformation coupled model”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 13 (5), pp.261-273.
- Savi, M.A. & Paiva, A., 2005, “Describing internal subloops due to incomplete phase transformations in shape memory alloys”, *Archive of Applied Mechanics*, 74 (9), pp.637-647.
- Savi, M.A., 2006, *Dinâmica Não-Linear e Caos*, 1 ed. Rio de Janeiro, e-papers.
- Savi, M.A., SA, M.A.N., Paiva, A., et al., 2008, “Tensile-Compressive Asymmetry Influence on the Shape Memory Alloy System Dynamics”, *Chaos, Solitons & Fractals*, v.36, n.4, pp.828-842.
- Soliman, M.S. & Gonçalves, P.B., 2003, “Chaotic behavior resulting in transient and steady state instabilities of pressure-loaded shallow spherical shells”, *Journal of Sound and Vibration*, 259(3), pp.497–512.
- Stewart, I. , 1991, “Será que Deus Joga Dados?: a nova matemática do caos”, Rio de Janeiro, Jorge Zahar.
- Tada, M. & Suito, A., 1998, “Static and dynamic post-buckling behavior of truss structures”, *Engineering Structures*, 20 (4-6), pp. 384-389.
- Yankelevsky, D.Z., 1999, “Elastic-plastic behavior of a shallow two bar truss”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 41, pp.663-675.

- Wang, R. & Jing, Z., 2005, "Chaos Control of Chaotic Pendulum System", *Chaos, Solitons and Fractals*, v.21, pp.201-207.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A. (1985), "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica D*, v.16, pp.285-317.