

Universidade de Brasília

Instituto de Física

Marcos Vinícius Silva de Paula

**Interação Efetiva Átomo - Campo via Troca de
Três Fótons no Regime Dispersivo**

Brasília

15 dezembro de 2023

Marcos Vinícius Silva de Paula

Interação Efetiva Átomo - Campo via Troca de Três Fótons no Regime Dispersivo

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Alexandre Dodonov

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

15 dezembro de 2023

Marcos Vinícius Silva de Paula

Interação Efetiva Átomo - Campo via Troca de Três Fótons no Regime Dispersivo

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 15 dezembro de 2023:

Alexandre Dodonov
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasília
15 dezembro de 2023

Este trabalho é dedicado a todas as pessoas da periferia que não tiveram as mesmas oportunidades que eu.

Agradecimentos

Este trabalho é o resultado de muitas horas de estudo, cálculos, erros, simulações e mais erros.

Inicialmente, expresso minha gratidão às políticas de ações afirmativas e aos incentivos à educação e à permanência universitária, pois, sem elas, tanto eu quanto muitos colegas não teríamos a oportunidade de ingressar na universidade e concluir nossos estudos.

Agradeço à minha família pelo apoio e ajuda que tive até hoje, à minha mãe Marizete da Silva, minhas irmãs Marisa Silva e Ana Clara da Silva e aos meus sobrinhos, Alice Vitória e Caio Heitor.

Meus agradecimentos vão ao Prof. Dr. Alexandre Dodonov, meu orientador deste TCC, ou melhor, colaborador, pela paciência, disponibilidade e atenção nos dois anos de trabalho árduo. Com ele, aprendi e evolui em nossas conversas e reuniões, seja para tratar do trabalho em si ou para discussões gerais sobre qualquer outra coisa.

Também agradeço a todos os meus professores da graduação, em especial aos professores Alexandra Mocellin, Nádia Maria de Liz Köche, José Leonardo Ferreira, Marcello Ferreira e Paulo Sérgio da Silva Caldas. Obrigado por toda paciência e dedicação ao ensino.

Ao PET Física, pois neste grupo foi uma das épocas mais marcantes de minha graduação. Os projetos desenvolvidos pelo programa enriqueceram-me muito, como aluno e humano, além de que os amigos que fiz no tempo que estive no grupo levarei para a vida. Ao tutor do PET, Bernardo Mello, fica a gratidão por tudo que fez e ainda fará pelo PET.

Meus agradecimentos ao meu melhor amigo Alexandre Santana por todos os bons anos de conversas, vivências compartilhadas, sejam elas boas ou ruins, e de acompanhamento e torcida mútua um pelo outro.

Agradeço aos meus pilares da graduação, pois sem eles não me sustentaria, seja pela vida ou pelas idas ao Bar do Mendes, em muitos momentos William Wenner e Nicollas Stefan.

Meus agradecimentos vão ao André Luis pelas muitas horas de conversas sobre vários nada com nada e memes de gosto duvidoso, ao Israel Oliveira por nunca ter me atrapalhado a realizar minha pesquisa, e a Laura Sousa por levar doce de leite para a sala do Israel e sempre guardar pudim dos coffee breaks para mim.

Agradeço aos amigos que a Física me trouxe: Amanda Freitas, Bruna Leal, Caio Valadares, Carina Lyra, Gislene Vaz, Hausley Cassiano, Isabelle Castro, Igor Serejo, João Gabriel, João Saboya e Pedro Elias.

Aos amigos da vida, obrigado pelos momentos passados e os que virão: Aíssi Lima, Amanda Silva, Ana Luísa Romero, Ana Luíza Santos, Bruna Borges, Dayana Vivian, Deyvid André, Igor Felisberto, Isabel Venâncio, Jéssica Cristina, Kevin Guedes, Luan Lincoln, Mateus Motta, Melissa Rodrigues, Pedro Freitas, Rafael Ricardo, Rebeca Sulamita, Robert William, Stephanie de Paulo.

“Mas lembre-se: aconteça o que aconteça, nada como um dia após outro dia.”

Racionais MC's.

Resumo

O modelo de Rabi, que descreve fenomenologicamente um átomo de dois níveis interagindo com um campo, delinea as propriedades da transferência de energia entre suas partes constituintes, juntamente com as emissões e absorções de fótons. A representação desse sistema pode ser aproximada por diversos métodos, sejam eles já estabelecidos na literatura científica ou métodos inovadores desenvolvidos neste estudo. A introdução de interações efetivas, propostas neste trabalho, é relevante para faixas específicas de frequência, próximas aos valores de geração e absorção de fótons pelo sistema. A descrição do modelo foi abordada tanto de forma quântica quanto no limite semiclássico, com diferenciação baseada na origem do campo. Além disso, investigamos o sistema utilizando o estado coerente associado ao nível de energia do campo. Por fim, comparamos as probabilidades de estados excitados nos dois formalismos. Além de caracterizar as equações que regem a dinâmica do sistema em ambos os formalismos, isso proporciona uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos relacionados à interação entre luz e matéria.

Palavras-chaves: Modelo de Rabi. Acoplamento. Átomo-Cavidade. Estado Coerente. Interação Efetiva. Formalismo Clássico. Formalismo Quântico.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema átomo cavidade proposto seguindo a construção do Modelo de Rabi. Os parâmetros g e γ correspondem a constante de acoplamento do sistema e termo de relaxação respectivamente. Adaptado de (PAULA; SINESIO; DODONOV, 2023).	21
Figura 2 – Autoenergias obtidas numericamente e pelo (MBE) com o valor fixo de $n = 29$	41
Figura 3 – Probabilidades para o estado correspondente ao nível de energia $n = 29$, com ênfase para as frequências de ressonância do sistema responsável pela emissão e absorção de fótons.	42
Figura 4 – Autoenergias proporcionais ao estado de Fock $n = 100$	44
Figura 5 – Comportamento das funções K_i para a análise da aproximação proposta para a formação dos autoestados $ S_n\rangle$ e $ A_n\rangle$	45
Figura 6 – Probabilidades de se encontrar os autoestados $ g, 100\rangle$ e $ e, 97\rangle$ utilizando os autoestados $ S_n\rangle$ e $ A_n\rangle$ com $n = 100$	46
Figura 7 – Valores de ϵ_1 e ϵ_2 para $n = 100$	47
Figura 8 – Valores da frequência de ressonância do sistema em função de n	47
Figura 9 – Resultados referentes à probabilidade do estado coerente para diferentes valores em comparação com o parâmetro R_n , os valores de probabilidade foram normalizados pelos seus respectivos valores de pico.	51
Figura 10 – Caracterização da probabilidade do estado excitado com as relações obtidas em termos dos autoestados $ A_n\rangle$ e $ S_n\rangle$	54
Figura 11 – Probabilidades para o encontro dos estados $ g, 100\rangle$ e $ e, 97\rangle$	56
Figura 12 – Amplitude da oscilação da probabilidade as oscilações de Rabi do estado $ e, 97\rangle$	56
Figura 13 – Probabilidades de obtenção do estado excitado do sistema nas abordagens quântica e semiclássica.	60

Lista de abreviaturas e siglas

MR	Modelo de Rabi
MJC	Modelo de Jaynes-Cummings
MBE	Método da base específica
MN	Método Numérico
TPNDIT	Teoria de Perturbação Não Degenerada Independente do Tempo

Lista de símbolos

\hbar	Constante de Planck dividida por 2π
ν	Frequência do Campo
Ω	Frequência do Átomo
\hat{a}^\dagger	Operador de Criação de Estado
\hat{a}	Operador de Aniquilação de Estado
g	Constante de Acoplamento
γ	Relaxação
ξ_0	Campo Elétrico por fóton
n	Estado de Fock
\bar{n}	Número Médio de Fótons
$ \alpha\rangle$	Estado Coerente
P_e	Probabilidade do Estado Excitado do Sistema
Δn^2	Variância Estatística
Q	Parâmetro de Mandel

Sumário

	Introdução	19
1	MODELO DE RABI	21
1.1	Construção do Modelo	21
1.2	Hamiltonianos do Átomo e Cavidade	22
1.2.1	Hamiltoniano do Átomo	22
1.2.2	Hamiltoniano do Campo	22
1.3	Hamiltoniano de Interação	24
1.3.1	Interação Semiclássica	24
1.3.2	Interação Quântica	25
1.4	Hamiltoniano Total	26
1.4.0.1	Absorção	27
1.4.0.2	Emissão	27
1.4.1	Oscilações de Rabi	28
1.5	Formalismo Semiclássico	28
1.5.1	Estado Coerente	28
1.5.2	Parâmetro Q de Mandel	30
1.5.3	Considerações sobre o formalismo semiclássico	30
1.6	Equação Mestra	30
1.6.1	Operador Densidade	31
1.6.2	Equação de Von Neumann	31
1.6.3	Equação Mestra de Lindblad	32
1.6.4	Super Operador de Liouville	32
1.7	Modelo de Jaynes–Cummings	33
1.8	Colapso - Resurgimento	34
2	AUTOENERGIAS E AUTOESTADOS	37
2.1	Teoria de Pertubação Independente do Tempo	37
2.2	Solução Numérica	37
2.3	Base Específica	38
2.4	Método Proposto	44
3	INTERAÇÃO EFETIVA	49
3.1	Aproximação para o (MJC) de 3 fótons	49
3.1.1	Probabilidade do Estado Excitado e Parâmetro Q de Mandel	52
3.2	Dinâmica	55

4	MODELO SEMICLÁSSICO	57
4.1	Formulação semiclássica via Estado Coerente	57
4.2	Equação Mestra	57
4.2.1	Formulação do Operador Densidade	58
4.3	Dinâmica dos estados	59
4.4	Probabilidade de obtenção do estado excitado	59
	Considerações Finais	61
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICES	67
	APÊNDICE A – TEORIA DE PERTURBAÇÃO NÃO DEGENERADA INDEPENDENTE DO TEMPO	69
	APÊNDICE B – MÉTODO DE FERRARI PARA O ENCONTRO DE RAÍZES DE EQUAÇÕES DE 4°	71
	ANEXOS	77
	ANEXO A – RESULTADO ANALÍTICO TPNDIT	79
A.1	Correções até Terceira Ordem	79
	ANEXO B – RELAÇÕES UTEIS	83
B.0.1	Operadores de Pauli	83
B.0.2	Ação dos Operadores em $\hat{\rho}_1$	83
B.1	Demais Relações utilizadas	85
	ANEXO C – TEORIA DE PERTURBAÇÃO NÃO-DEGENERADA INDEPENDENTE DO TEMPO APLICADA À BASE ESPECÍFICA	87

Introdução

Os estudos sobre a caracterização da luz datam de mais de 100 anos, que propiciaram o que sabemos sobre os fótons até hoje, dos quais foram tratados como uma onda que não possuem massa, viajam na maior velocidade do universo e possuem interferência mútua. O outro tratamento para os fótons é que são partículas com valores de momento e energia bem definidos, e até possuem spin como uma partícula.

Contudo, os fótons, então, não são ondas nem partículas, porque, seja o que for que pensemos que seja, teríamos dificuldades para explicar a outra parte do seu comportamento. Portanto, os fótons são partículas semelhantes a ondas e/ou ondas semelhantes a partículas: um fóton nunca pode ser dividido em partes, mas a interferência de um único fóton pode ser facilmente observada pelas tecnologias modernas.

O estudo da emissão espontânea de fótons revela que, na presença de corpos macroscópicos, a força da interação entre os átomos e o campo de radiação pode mudar significativamente em comparação com o caso em que os átomos estão em um espaço livre de interferências externas.

Particularmente, se esses corpos formarem um sistema ressonante, chamado cavidade, com um acoplamento átomo-campo, torna-se possível observar transições de energia entre o átomo e o campo vinculado a cavidade.

Em termos gerais, um fóton emitido por um átomo excitado não escapa imediatamente, mas é capturado pela cavidade por algum tempo, podendo ser reabsorvido pelo átomo.

No primeiro capítulo, abordamos a construção do Modelo de Rabi em suas versões quântica e semiclássica, esta última considerando o campo como clássico. Apresentamos a construção individual dos operadores Hamiltonianos que constituem o sistema. Explicitamos o Modelo de Jaynes-Cummings derivado do Modelo de Rabi, além de discorrer sobre características fenomenológicas associadas ao sistema por meio de conceitos e ferramentas pertinentes à descrição do modelo.

No segundo capítulo, caracterizamos as autoenergias e autoestados do sistema utilizando diferentes métodos e destacamos as diferenças entre eles na busca pelo mais adequado para a análise, considerando as devidas aproximações.

O terceiro capítulo estabelece as premissas das aproximações, abordando a interação efetiva pelo modelo de Jaynes-Cummings de 3 fótons. Caracterizamos a probabilidade para o estado excitado, explicitamos as equações diferenciais da dinâmica e definimos o parâmetro Q relacionado ao modelo.

Por fim, o quarto capítulo trata do modelo semiclássico construído com o uso do estado coerente, além da caracterização do operador densidade relacionado adjunto. Exploramos a Equação Mestra sem termos dissipativos, concluindo com a comparação dos formalismos quântico e semiclássico.

1 Modelo de Rabi

1.1 Construção do Modelo

A interação do sistema átomo campo descrito pelo Modelo de Rabi (MR), do qual consiste em um átomo interagente com o campo relacionado a uma cavidade Fig 1.

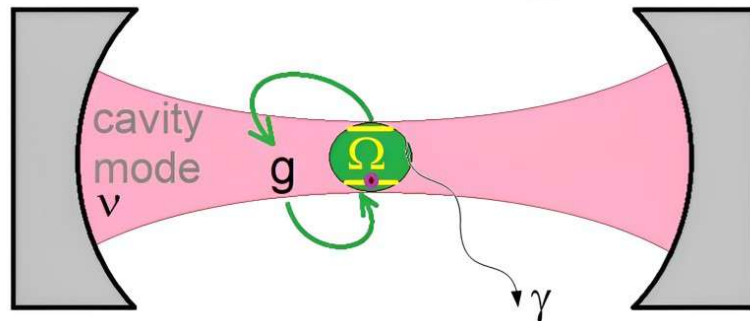


Figura 1 – Sistema átomo cavidade proposto seguindo a construção do Modelo de Rabi. Os parâmetros g e γ correspondem a constante de acoplamento do sistema e termo de relaxação respectivamente. Adaptado de (PAULA; SINESIO; DODONOV, 2023).

A descrição do sistema em termos de seus Hamiltonianos constituintes é visto pela formulação descrita pelo Hamiltoniano.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}. \quad (1.1)$$

O termo \hat{H}_0 descreve o movimento livre do átomo e do modo de radiação do campo e \hat{H}_{int} descreve o acoplamento do sistema átomo-campo.

O (MR) proporciona características quânticas fundamentais na interação luz-matéria, com base em uma solução de equações de movimento acopladas (VOGEL; WELSCH, 2006). Por exemplo, o (MR) é empregado com sucesso para estudar diversos problemas em experimentos de micromaser, nos quais um dispositivo formado por um átomo de frequência única na ordem de micro-ondas.

O átomo de dois níveis, ou sistema de dois níveis, por sua vez, é elevado a um nível de energia superior e perde energia pela radiação emitida em uma frequência espe-

cífica, comparável à frequência de um laser, em cavidades ópticas (SCULLY; MEYER; WALTHER, 1996; ZHANG et al., 1999).

1.2 Hamiltonianos do Átomo e Cavidade

1.2.1 Hamiltoniano do Átomo

O átomo utilizado apresenta dois estados possíveis: o estado fundamental $|g\rangle$ e o estado excitado $|e\rangle$. Ele interage com um único modo de radiação do campo. Além disso, os graus de liberdade do átomo podem ser descritos pelas matrizes de spin de Pauli (FOX, 2006; GRYNBERG et al., 2010).

Tratando de somente dois níveis de energia possíveis para o átomo, com $E_e \equiv \hbar\Omega_e$ para o estado excitado $|e\rangle$ do átomo e $E_g \equiv \hbar\Omega_g$ para o estado fundamental $|g\rangle$.

O Hamiltoniano relacionado ao átomo é descrito da seguinte forma:

$$\hat{H}_a \rightarrow E_g |g\rangle \langle g| + E_e |e\rangle \langle e|. \quad (1.2)$$

Tomando a notação matricial obtemos,

$$\hat{H}_a \rightarrow \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix} = E\mathbb{I} + \frac{1}{2}\hbar\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Como notações, os termos $E \equiv \frac{1}{2}(E_e + E_g)$ e $\Omega \equiv \Omega_e - \Omega_g$ denotam a média dos valores de energia e a transição de frequência respectivamente (NEWELL, 2018).

Dado que a energia constante no Hamiltoniano não desempenha um papel significativo na caracterização do sistema, podemos eliminá-la visto, observando que $\frac{1}{2}\hbar\Omega\hat{\sigma}_z \approx \hbar\Omega\hat{\sigma}_e$ e $\hat{\sigma}_e \rightarrow |e\rangle \langle e|$ o operador de projeção do estado excitado.

$$\hat{H}_a = \hbar\Omega\hat{\sigma}_e. \quad (1.4)$$

1.2.2 Hamiltoniano do Campo

O formalismo a ser apresentado é uma adaptação à quantização do campo eletromagnético confinado em um volume finito, tal qual uma cavidade, com paredes perfeitamente refletivas.

Em linhas gerais, a solução da parte espacial das equações de Maxwell sob esta condição adjunto com o espaço de integração, que é finito, cria autofunções são normalizáveis e suas expressões analíticas, se forem viáveis, dependem da geometria da cavidade (MEYSTRE; III, 1999).

Em geral, existem dois princípios fundamentais que regem o processo físico da radiação e determinam as propriedades físicas do campo de radiação. A equação de Schrödinger determina o nível de energia atômica quantizada, e as equações de Maxwell governam o comportamento do campo de radiação (NEWELL, 2018).

Na teoria quântica da luz, o campo de radiação é tratado como um conjunto de osciladores harmônicos. A energia de cada modo é quantizada de maneira semelhante à de um oscilador harmônico. Haja vista a quantização do campo, surge com a ligação do Hamiltoniano do campo eletromagnético livre a um oscilador harmônico (SHIH, 2016).

Os resultados da mecânica quântica para osciladores harmônicos são, então, adaptados ao campo de radiação quantizado. O campo livre assume significado de não haver “fontes” ou “sumidores” do campo de radiação no volume escolhido de $V = L^3$ que cobre o campo de interesse (MEYSTRE; III, 1999).

A energia do campo livre é dada,

$$\hat{H}_{campo} \rightarrow \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \hat{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2(\vec{r}, t) \right] d^3\vec{r}. \quad (1.5)$$

Os campos eletromagnéticos são tratados como osciladores harmônicos independentes e $a(t)$, $a^*(t)$ amplitudes de modo normal relacionado ao campo com \vec{k} um vetor de onda e \vec{e} vetor unitário onde ν é a frequência angular do modo (VEDRAL, 2005).

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \nu A \left[ia(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - ia^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \vec{e}, \quad (1.6)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = A \left[ia(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - ia^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] (\vec{k} \times \vec{e}). \quad (1.7)$$

A energia do campo eletromagnético é tratada como um oscilador harmônico (MEYSTRE; III, 1999; RAND, 2010). Logo, o Hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$\hat{H}_{campo} \rightarrow \frac{\hbar\nu}{2} [\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}] = \frac{\hbar\Omega}{2} [\hat{n} + 1]. \quad (1.8)$$

Em suma, a contribuição do Hamiltoniano do campo vinculado à cavidade, por sua vez, surge com a energia dos campos elétricos e magnéticos.

$$\hat{H}_{campo} = \hbar\nu\hat{n}. \quad (1.9)$$

Este é um oscilador harmônico que admite apenas energias quantizadas (VEDRAL, 2005).

Os Hamiltonianos obtidos até aqui, possibilitam a formulação do Hamiltoniano que descreve o movimento livre do átomo e do modo de radiação da cavidade.

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu\hat{n} + \hbar\Omega\hat{\sigma}_e. \quad (1.10)$$

1.3 Hamiltoniano de Interação

A interação do sistema, formulada neste trabalho com o uso da interação de dipolo (Wolfgang P. Schleich, 2015; VOGEL; WELSCH, 2006; ORSZAG, 2018).

$$\hat{H}_{int} = -e\hat{r}\vec{E}(t). \quad (1.11)$$

A partir de $|e\rangle$ e $|g\rangle$ os estados excitado e fundamental do átomo, partimos para a utilização da relação de completude pelos estados do átomo, com isso podemos expressar a posição do operador \hat{r} nas energias dos autoestados da função de onda $\psi_j(\vec{r})$ com $j = \{e, g\}$ e paridade bem definida.

$$\hat{H}_{int} = -e(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)\hat{r}(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)\vec{E}(t),$$

desde que $|\psi_j|^2$, seja uma função simétrica e \hat{r} como uma função antissimétrica, obtemos as relações.

$$\begin{aligned} e\langle e|\hat{r}|e\rangle &= e\langle g|\hat{r}|g\rangle = 0, \\ e\langle e|\hat{r}|g\rangle &= e\int\psi_e^*(\vec{r})\hat{r}\psi_g(\vec{r})\equiv\hat{P}, \\ e\langle g|\hat{r}|e\rangle &= e\int\psi_g^*(\vec{r})\hat{r}\psi_e(\vec{r})\equiv\hat{P}^*. \end{aligned}$$

Os termos \hat{P} e \hat{P}^* são referentes ao elemento de momento de dipolo, enquanto $\vec{E}(t)$ é o campo atuante no átomo.

Por conseguinte, o operador de dipolo $e\hat{r}$ assume a forma.

$$e\hat{r} = \hat{P}\hat{\sigma}_+ + \hat{P}^*\hat{\sigma}_-. \quad (1.12)$$

A partir da reescrita do operador de dipolo, podemos definir os operadores $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ e $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ que atuam como operadores de criação e aniquilação, respectivamente, para os estados possíveis do átomo (Wolfgang P. Schleich, 2015; ORSZAG, 2018).

$$\hat{H}_{int} \rightarrow (\hat{P}\hat{\sigma}_+ + \hat{P}^*\hat{\sigma}_-)\vec{E}(t). \quad (1.13)$$

Por fim, a Eq.(1.13) caracteriza o Hamiltoniano de interação entre as componentes constituintes do sistema estudado, além de que a mesma pode ser adaptada para o tipo de campo vinculado ao sistema, seja este clássico ou quântico.

1.3.1 Interação Semiclássica

O formalismo semiclássico proposto consiste do tratamento do átomo e cavidade tratados como sistemas quânticos, enquanto a interação entre os mesmos ocorre mediante

um campo eletromagnético clássico (M. Suhail Zubairy, 1997). Portanto, retornando a Eq.(1.13) com o campo eletromagnético $\vec{E}(t)$ utilizado assumido linearmente polarizado.

$$\vec{E}(t) = \varepsilon \cos(\nu t). \quad (1.14)$$

O termo ε é a amplitude de oscilação e $\nu = ck$ a frequência do campo,

$$\hat{H}_{int} = g \cos(\nu t) \hat{\sigma}_x. \quad (1.15)$$

A constante g de acoplamento, também chamada de frequência de Rabi, assume a forma,

$$g = \frac{|\hat{P}|}{\hbar} \varepsilon. \quad (1.16)$$

O Hamiltoniano Eq.(1.15) fornece uma base para a teoria semiclássica da radiação, na qual os átomos são tratados segundo a teoria quântica, e o campo conforme as equações clássicas de Maxwell (MANDEL; WOLF, 1995).

A teoria semiclássica da radiação é uma abordagem útil e adequada para a interação da luz com a matéria.

A busca por um significado de um “limite clássico” no (MR) pode se tornar ambíguo, uma vez que o sistema de átomos (dois níveis) não tem uma contrapartida clássica conhecida.

O campo eletromagnético, por outro lado, tem um limite clássico natural que também pode ser escrito em termos de estados coerentes como visto na Subseção 1.5.1.

1.3.2 Interação Quântica

Analogamente ao caso semiclássico retornamos mais uma vez a Eq.(1.13) com o campo eletromagnético $\vec{E}(t)$ como um campo quântico que surge da expansão do vetor potencial em termos dos operadores de criação e aniquilação (ORSZAG, 2018),

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i\xi_0 \vec{u}(\hat{r}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (1.17)$$

a quantidade ξ_0 possui dimensão de campo elétrico, algumas vezes referido como campo elétrico por fóton, ou campo elétrico de vácuo, enquanto o termo \vec{u} é a função de modo para o campo estudado (Wolfgang P. Schleich, 2015).

O uso das equações encontradas anteriormente do operador de dipolo e do campo elétrico, quando combinadas, propiciam o Hamiltoniano de interação,

$$\hat{H}_{int} = i\xi_0 \left[\vec{P} \cdot \vec{u}(\hat{r}) \hat{\sigma}_+ + \vec{P}^* \cdot \vec{u}(\hat{r}) \hat{\sigma}_- \right] (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (1.18)$$

O produto escalar $\vec{P} \cdot \vec{u}(\hat{r})$ entre o elemento de matriz de momento de dipolo \vec{P} e a função modo \vec{u} produz um número complexo de fase φ ,

$$\vec{P} \cdot \vec{u}(\hat{r}) = |\vec{P} \cdot \vec{u}(\hat{r})| \exp(i\varphi). \quad (1.19)$$

Portanto, o Hamiltoniano de interação reduzida,

$$\hat{H}_{int} = i\hbar g [\exp(i\varphi) \hat{\sigma}_+ + \exp(-i\varphi) \hat{\sigma}_-] (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (1.20)$$

Logo, introduzindo a constante de acoplamento ou frequência de Rabi.

$$g(\hat{r}) \equiv \frac{|\vec{P} \cdot \vec{u}(\hat{r})|}{\hbar} \xi_0. \quad (1.21)$$

Com fase de $\varphi = \frac{\pi}{2}$, o Hamiltoniano de interação torna-se

$$\hat{H}_{int} = \hbar g [\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-] (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (1.22)$$

A interação proposta pelo momento de dipolo oscila com frequência Rabi entre os estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ na presença de um campo eletromagnético (M. Suhail Zubairy, 1997).

Como os sistemas atômicos e de campo são agora quantizados, os estados do sistema combinado envolverão produtos de estados de ambos os sistemas (GRYNBERG et al., 2010; KLAUDER; SKAGERSTAM, 1985).

$$|e, n\rangle = |e\rangle \otimes |n\rangle, |g, n\rangle = |g\rangle \otimes |n\rangle.$$

1.4 Hamiltoniano Total

A descrição total do sistema a partir das construções dos Hamiltonianos apresentados nas Subseções 1.2.2, 1.3.1 e 1.3.2, possibilita a descrição do (MR) com os seguintes Hamiltonianos Semiclássico (\hat{H}_{SC}) e Quântico (\hat{H}_Q).

$$\hat{H}_Q \rightarrow \nu \hat{n} + \Omega \hat{\sigma}_e + g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{\sigma}_x. \quad (1.23)$$

$$\hat{H}_{SC} \rightarrow \nu \hat{n} + \Omega \hat{\sigma}_e + g \cos(\nu t) \hat{\sigma}_x. \quad (1.24)$$

Nota-se que as contribuições $\nu \hat{n}$ da cavidade e $\Omega \hat{\sigma}_e$ correspondente aos também chamados de estados internos do sistema, enquanto a interação entre operador Hamiltoniano de interação dependente da frequência de Rabi g que traz as matrizes de spin de Pauli em termos de $\hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_+$ e o operador de campo $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ (ORSZAG, 2018; Wolfgang P. Schleich, 2015).

As interações átomo-campo de particular interesse na óptica quântica são aquelas nas quais as frequências de campo estão próximas das frequências de transição atômica. No exemplo mais simples, uma única frequência de campo está próxima da ressonância com uma única transição atômica, e apenas os dois estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$ desta transição têm probabilidades de ocupação significativas.

Então, a interação átomo-campo é bem descrita pela aproximação no qual o átomo é considerado um sistema de dois estados caracterizado completamente por uma frequência de transição e um elemento de matriz dipolo (BLAKELY, 2019).

O termo de interação do Hamiltoniano vem da troca de energia entre o átomo e a luz, mais especificamente, com $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$ corresponde à emissão de um fóton do átomo para o campo vinculado à cavidade, e o termo $\hat{a}\hat{\sigma}_+$ corresponde à absorção de um fóton gerado pelo o campo para o átomo (RYE; MD, 2019).

A descrição formalizada do sistema, nos permite a caracterização de fenômenos fundamentais relacionados ao (MR), tais como os fenômenos de absorção e emissão e a própria oscilação vinculada a dinâmica do modelo.

1.4.0.1 Absorção

A partir do átomo em um estado $|g\rangle$, na presença de n fótons, como consequência da aplicação do operador de aniquilação referente a expressão,

$$\hat{a} |g, n\rangle = \sqrt{n} |g, n - 1\rangle. \quad (1.25)$$

Desta forma, podemos caracterizar a transição entre autoestados do Hamiltoniano não perturbado, construído com as contribuições do átomo e da cavidade, ocorre somente com probabilidade significativa entre dois estados de mesma energia. Esta condição diz respeito ao sistema total, sendo expressa sob a forma,

$$\begin{aligned} E_g + n\hbar\nu &= E_e + (n - 1)\hbar\nu, \\ E_e &= E_g + \hbar\nu. \end{aligned}$$

O estado final do átomo tem uma energia maior que o estado inicial, e o processo tem probabilidade máxima se a energia $\hbar\nu$ do fóton que desaparece for exatamente igual à energia ganha pelo átomo (GRYNBERG et al., 2010; GERRY; KNIGHT, 2005).

1.4.0.2 Emissão

Analogamente, supondo que o átomo esteja inicialmente no estado $|e\rangle$, na presença de n fótons usamos a relação vinculada à aplicação do operador de criação,

$$\hat{a}^\dagger |e, n\rangle = \sqrt{n + 1} |e, n + 1\rangle. \quad (1.26)$$

Por conseguinte, a conservação de energia entre os estados inicial e final,

$$E_g = E_e - \hbar\nu$$

O átomo passa do nível $|e\rangle$ para o nível $|g\rangle$ de menor energia, emitindo um fóton (GRYNBERG et al., 2010; GERRY; KNIGHT, 2005).

1.4.1 Oscilações de Rabi

A partir do sistema estiver inicialmente em um dos dois estados, a probabilidade de encontrá-lo no outro estado é uma função senoidal do tempo. Tal formulação descreve o fenômeno conhecido como oscilação Rabi (GRYNBERG et al., 2010).

Um átomo sofre oscilações de Rabi, sendo a frequência de Rabi que também pode ser determinada pelo número médio de fótons $\langle \hat{n} \rangle$, como visto em abordagens do caso semiclássico.

O (MR) é visto historicamente como o primeiro modelo totalmente quantizado da interação entre um átomo de dois níveis, ou qualquer outro sistema de dois níveis, e um campo eletromagnético monocromático quantizado.

Como uma das vantagens de tratar o campo puramente quântico surge a emissão espontânea que ocorre naturalmente e campos com baixo número de fótons podem ser tratados.

O caso em que o campo excitante é estritamente senoidal, de modo que a amplitude é constante. A solução para o problema de como um átomo responde ao campo foi dada pela primeira vez por Rabi com o comportamento de um spin $\frac{1}{2}$ em um campo magnético (RABI, 1936; RABI, 1937).

Como compensação por seus trabalhos em modelos de átomos de dois níveis, Isidor Isaac Rabi foi laureado com o prêmio Nobel pelo problema de um sistema de spin meio, um sistema de dois níveis, interagindo com um campo magnético (VEDRAL, 2005).

1.5 Formalismo Semiclássico

1.5.1 Estado Coerente

Alusivo aos estados com nível bem definido n , os estados coerentes podem ser usados como base vetorial para caracterizar o campo de radiação, exceto que os estados coerentes são vetores não ortogonais, em geral.

A obtenção de uma expressão de $|\alpha\rangle$ surge em termos do estado $|n\rangle$ (ROBERT; COMBESCURE, 2021; HAUS, ; KLAUDER; SKAGERSTAM, 1985).

O estado coerente é definido como o autoestado do operador de aniquilação,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (1.27)$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.28)$$

Portanto, um estado coerente é visto como uma superposição infinita de estados $|n\rangle$. O estado coerente descreve um estado que permanece inalterado (até um fator) sob a ação do operador aniquilação (BACHOR, 2019; INTRODUCTION, 2009; KLAUDER; SKAGERSTAM, 1985).

Fenomenologicamente, estados coerentes $|\alpha\rangle$ são estados quânticos muito próximos dos estados clássicos.

As flutuações no campo eletromagnético e as variáveis são as mesmas que para o vácuo, as flutuações na incerteza fracionária para o número de fótons diminuem com o aumento do número médio de fótons e os estados tornam-se bem localizados em fase com o aumento do número médio de fótons (LOUDON, 2000).

Como considerações, temos que o número médio de fótons para o estado coerente assume a forma,

$$\bar{n} = \langle \hat{n} \rangle = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (1.29)$$

Os valores esperados de operadores normalmente ordenados para o estado coerente são encontrados com uso de suas propriedades de autovalor (LOUDON, 2000).

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = \langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle. \quad (1.30)$$

A probabilidade de encontrar n fótons em $|\alpha\rangle$ é dada por uma distribuição de Poisson,

$$P(n) = \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (1.31)$$

A variância correspondente para o estado coerente,

$$[\Delta n]^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle. \quad (1.32)$$

As flutuações relativas, $\delta n \equiv \frac{1}{n}$, tendem a zero no limite de grande amplitude. No espaço de fase, um estado coerente é um gaussiano simétrico, que, além disso, é um estado de incerteza mínima, o que significa que é localizado ao máximo conforme o princípio da incerteza de Heisenberg (LARSON; MAVROGORDATOS, 2021; GERRY; KNIGHT, 2005).

O próprio termo “coerente” tem origem na terminologia usada na óptica quântica (por exemplo, radiação coerente, fontes que emitem de forma coerente). Desde então, estados coerentes e suas diversas generalizações se espalharam pela física quântica e métodos

matemáticos relacionados, por exemplo, física nuclear, atômica e da matéria condensada, teoria quântica de campos, problemas de quantização e desquantização, abordagens de integrais de caminho e também em sistemas de emaranhamento (INTRODUCTION, 2009).

1.5.2 Parâmetro Q de Mandel

O parâmetro Q é uma medida natural do afastamento da variância do número de fótons n da variância de um processo de Poisson (MANDEL, 1979).

A variância no número de fótons de único modo, correspondente na teoria do campo quantizado ao operador número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$,

$$[\Delta n]^2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2,$$

O parâmetro Q de Mandel é descrito,

$$Q = \frac{[\Delta n]^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (1.33)$$

Como utilidade fornece uma medida simples do quão não clássico é o sistema físico estudado, sendo um Q negativo associado a um campo considerado não clássico (BLAKELY, 2019).

1.5.3 Considerações sobre o formalismo semiclássico

A teoria semiclássica da radiação não consegue explicar todos os aspectos da interação da luz com a matéria.

A falha da teoria semiclássica é evidente no caso da emissão espontânea de fótons, o processo no qual um átomo, sem qualquer causa externa, faz uma transição para uma energia mais baixa, e o campo eletromagnético ganha um nível de energia (BLAKELY, 2019; VEDRAL, 2005).

1.6 Equação Mestra

O formalismo da Equação Mestra é construído com equações diferenciais usadas para modelar a dinâmica de sistemas que podem ser descritas como uma combinação probabilística de alguns estados do sistema estudado (SHTYKOV; SMOLSKIY, 2020; GARDINER; ZOLLER, 2004).

A equação mestra serve para a caracterização da dinâmica de sistemas quânticos que podem então, ser expressas empregando outra representação do estado do sistema, conhecida como operador de densidade $\hat{\rho}$.

O operador de densidade contém todas as informações relativas às probabilidades (conhecidas como populações) em cada estado $|\psi_j\rangle$ (CAMPAIOLI; COLE; HAPUARACHCHI, 2023).

1.6.1 Operador Densidade

A matriz Densidade descreve o estado do sistema, normalmente usada para sistemas abertos e dissipativos (Robert W. Boyd, 2003). A matriz de densidade descreve uma média estatística de um conjunto de sistemas idênticos (CARMICHAEL, 1999).

Introduzimos o operador de densidade para especificar estatisticamente as probabilidades dos estados relacionados,

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| = \sum_m \sum_n \rho_{mn} |m\rangle \langle n|, \quad (1.34)$$

o termo P_j significa a probabilidade do sistema estar no estado $|\psi_j\rangle$.

O operador densidade em sua forma matricial, os elementos diagonais ρ_{mm} da matriz de densidade são conhecidos como populações e denotam as probabilidades de encontrar o sistema nos respectivos estados de base $|m\rangle$, logo são reais e não negativos (LAMBROPOULOS; PETROSYAN,).

Evidenciando a propriedade que a matriz de densidade é hermitiana, logo ela pode ser diagonalizada por uma transformação unitária.

Os elementos fora da diagonal ρ_{mn} são conhecidos como coerências e fornecem informações sobre a superposição coerente dos estados de base $|m\rangle$ e $|n\rangle$ (CAMPAIOLI; COLE; HAPUARACHCHI, 2023).

Os estados do número de fótons são os autoestados do Hamiltoniano. A evolução temporal dos estados do número de fótons envolve a propagação de fase apenas em medições ópticas. Esta propriedade é útil para a propagação do estado ou do operador (Robert W. Boyd, 2003).

1.6.2 Equação de Von Neumann

O estudo da dinâmica de sistemas quânticos usando a representação do operador de densidade (NEW, 2011).

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \quad (1.35)$$

com \hat{H} o Hamiltoniano do sistema. A solução para esta equação é dada por algum operador unitário $\hat{U}(t; t_0)$ que propaga o estado do sistema de algum tempo inicial t_0 para algum tempo t (KLAUDER; SUDARSHAN, 1968; Crispin Gardiner, 2004),

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t; t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t; t_0). \quad (1.36)$$

A equação mestra do operador densidade possibilita o encontro da dinâmica de sistemas quânticos que interagem fracamente com o ambiente circundante (NEW, 2011; Crispin Gardiner, 2004).

Originalmente desenvolvidos no campo da óptica quântica para estudar interações luz-matéria, eles são usados para simular uma variedade de fenômenos da mecânica quântica, como modelos de ruído para processamento de informações quânticas, espectros de emissão e absorção transientes de materiais opticamente ativos e espectros eletrônicos e experimentos de ressonância de spin nuclear (CAMPALOLI; COLE; HAPUARACHCHI, 2023).

1.6.3 Equação Mestre de Lindblad

A reformulação da Equação de Von Neumann com termos dissipativos com termos envolvendo o operador de densidade é a equação mestra de Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad, frequentemente conhecida como equação mestra de Lindblad,

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \sum_k \gamma_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \hat{\rho}(t) \} \right) \quad (1.37)$$

O termo $\hat{\rho}(t)$ é o operador de densidade do sistema, \hat{H} é o Hamiltoniano do sistema e $\{ \hat{L}_k \}$ são os operadores de Lindblad representando processos não unitários, como relaxamento ou decoerência, que ocorrem em algumas taxas $\{ \gamma_k \}$, $[\cdot, \cdot]$ e $\{ \cdot, \cdot \}$ denota o comutador e o anticomutador dos operandos (MILZ; POLLOCK; MODI, 2017).

A equação mestra de Lindblad é desenvolvida com termos de dissipação para perda de energia e emissão espontânea para ambas as partes constituintes do (MR) (WALLS; MILBURN, 2012; GARDINER; ZOLLER, 2004).

1.6.4 Super Operador de Liouville

Torna-se conveniente expressar a equação mestra em uma notação simplificada,

$$\dot{\hat{\rho}} = \hat{\mathcal{L}}\hat{\rho}. \quad (1.38)$$

O termo $\hat{\mathcal{L}}$ é o superoperador associado ao operador $\hat{\rho}$.

A construção do superoperador utiliza a seguinte identidade de álgebra linear para a forma ordenada por colunas de $vec(\hat{\rho})$ (BARNETT, 1990; WEEDBROOK et al., 2012).

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A) vec(X),$$

Procedemos inserindo o operador de identidade $\hat{1}$ na Eq.(1.37).

$$\hat{\rho}' = -\frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}) + \sum_k \gamma_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k) \right), \quad (1.39)$$

como resultado para o superoperador

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{i}{\hbar} (\hat{1} \otimes \hat{H} - \hat{H}^T \otimes \hat{1}) + \sum_k \gamma_k \left(\hat{L}_k^* \otimes \hat{L}_k - \frac{1}{2} (\hat{1} \otimes \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \hat{1} + \hat{L}_k^T \hat{L}_k^* \otimes \hat{1}) \right).$$

A vantagem da forma do superoperador consiste em oferecer um caminho direto para resolver a Eq.(1.37), baseado na solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares (WALLS; MILBURN, 2012; GARDINER; ZOLLER, 2004).

1.7 Modelo de Jaynes–Cummings

O modelo de Jaynes-Cummings (MJC) consiste em um átomo de dois níveis que interage com o campo de uma cavidade. O campo é assumido como sendo de um único modo com frequência ν , de modo que cada fóton tem uma energia de $E = \hbar\nu$, enquanto os dois níveis de energia do átomo são separados por $\Delta E_a = \hbar\nu_a$ (FOX, 2006).

O Modelo de Jaynes-Cummings (MJC) descreve um átomo de dois estados acoplado a apenas um modo de campo, e a interação de dipolo é tratada com a aproximação da onda rotativa. Essa abordagem consegue eliminar os termos $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+$ e $\hat{a} \hat{\sigma}_-$ do Modelo de Rabi (MR), conforme descrito pela Eq.(1.23) (THEODORIDIS; KRAEMER,).

Novamente, o átomo utilizado no modelo constitui um sistema de dois níveis, e às vezes também o citamos simplesmente como sistema de dois níveis (dois estados) e às vezes também como qubit (LARSON; MAVROGORDATOS, 2021).

No (MJC), o átomo troca excitações com o campo vinculado a cavidade de tal forma que a absorção de energia, reduz a energia do campo em um nível enquanto o átomo é excitado de $|g\rangle$ para $|e\rangle$.

O campo e o átomo trocam energia através da absorção e emissão de fótons. Um átomo no estado fundamental pode absorver um fóton e fazer a transição para o estado excitado, ou um átomo no estado de excitado pode emitir um fóton para a energia relacionada a cavidade, fazendo a transição para o estado fundamental.

A taxa de troca fóton-energia é refletida pelo coeficiente de acoplamento g (RYE; MD, 2019; FOX, 2006)

No (MJC) a energia total é a soma de três termos: a energia do campo vinculado a cavidade, a energia do átomo de dois níveis e a energia de interação entre o átomo e a luz (VEDRAL, 2005; THEODORIDIS; KRAEMER, ; VOGEL; WELSCH, 2006).

Portanto, como operador, o Hamiltoniano do (MR) torna-se,

$$\hat{H} = \hbar\Omega\hat{\sigma}_e + \hbar\nu\hat{n} + \hbar g (\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+), \quad (1.40)$$

Os operadores de spin, $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$, aumentam e diminuem a energia do átomo. Os operadores fotônicos de criação e aniquilação, \hat{a}^\dagger e \hat{a} , adicionam ou removem um fóton do campo vinculado à cavidade (BARNETT; RADMORE, 2002).

1.8 Colapso - Resurgimento

O comportamento de colapso-ressurgimento é caracterizado pela probabilidade de ocupação do estado atômico excitado no (MR) para o caso em que o campo da cavidade está inicialmente em um estado coerente $|\alpha\rangle$.

Os fenômenos de colapso e ressurgimento podem ser compreendidos fisicamente a partir da Eq.(1.31) com cada termo no somatório representa oscilações de Rabi para um valor definido de n .

As oscilações de Rabi vinculadas as probabilidades dos estados do átomo diminuição de fase e em seguida entrarão em colapso após algum tempo t . As oscilações entram em colapso após alguns períodos específicos, permanecem constantes durante um intervalo de tempo finito e então as oscilações reaparecem novamente, caracterizando o ressurgimento.

A evolução do tempo associada as oscilações de Rabi associadas a diferentes excitações têm frequências diferentes e, portanto, tornam-se não correlacionadas, levando a um colapso da probabilidade. À medida que o tempo aumenta ainda mais, a correlação é restaurada e ocorre o ressurgimento. Esse comportamento continua e uma sequência infinita de ressurgimentos é obtida.

O colapso é um efeito de interferência destrutiva das oscilações quânticas de Rabi em diferentes frequências (VOGEL; WELSCH, 2006; AGARWAL, 2013). Portanto, é resultado de flutuações quânticas do campo de radiação.

O tempo de colapso da inversão populacional para grande $\langle n \rangle$. O número de oscilações no envelope aumenta à medida que $\hbar\nu$ aumenta, mas o tempo de colapso permanece o mesmo (LARSON; MAVROGORDATOS, 2021; FICEK; WAHIDDIN, 2014). Observa-se que o colapso ocorre apenas se o estado superior estiver ocupado, isto é, apenas se a emissão espontânea puder ocorrer, indicando que o colapso pode estar associado a flutuações quânticas do campo (BLAKELY, 2019; BACHOR, 2019).

O efeito de ressurgimento ocorre com a oscilação de Rabi, que eventualmente reaparece numa escala de tempo mais longa após um colapso, visto que isto ocorre porque o número de ondas senoidais que contribuem para a expressão, o qual é finito. Assim, o

tempo necessário para que as diversas oscilações retornem à sua relação de fase inicial também é finito.

O importante é que os ressurgimentos ocorram apenas devido à estrutura granular da distribuição dos fótons. O ressurgimento é, portanto, um fenômeno quântico puro. Uma distribuição contínua de fótons (sem zeros) causaria um colapso, assim como um campo clássico, mas sem ressurgimento ([M. Suhail Zubairy, 1997](#)).

2 Autoenergias e Autoestados

2.1 Teoria de Pertubação Independente do Tempo

A partir do Hamiltoniano total encontrado na Seção 1.4 com a consideração que $\hbar = 1$, podemos então definir nosso sistema como um Hamiltoniano total igual ao enunciado, contudo tomando a contribuição de interação do Hamiltoniano de interação na aproximação de dipolo quântica como fator perturbativo.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (2.1)$$

$$\hat{H}_0 = \nu \hat{n} + \Omega \hat{\sigma}_e, \quad (2.2)$$

$$\hat{V} = g (a + a^\dagger) \hat{\sigma}_x. \quad (2.3)$$

Os operadores de criação e aniquilação descrevem a emissão e absorção de um fóton, enquanto para o operador $\hat{\sigma}_x$, muda o estado excitado vigente do átomo.

Suas respectivas autoenergias não perturbadas, para os autoestados iniciais.

$$E_{g,n} = \nu n, \text{ com respectivo autoestado } |g, n\rangle.$$

$$E_{e,n} = \nu n + \Omega, \text{ com respectivo autoestado } |e, n\rangle.$$

Com aplicação da perturbação nos autoestados iniciais, torna-se necessário a significação do processo.

As falhas da (TPNDIT), ocorrem com a degenerescência das autoenergias, das quais propiciam termos no denominador da expansão que tendem a 0. Tais termos surgem quando $\Omega \approx \nu$ e $\Omega \approx 3\nu$, como pode ser notado com a explicitação dos cálculos no Anexo A.

2.2 Solução Numérica

Uma das formas possíveis de contornar o erro surgido com o uso da (TPNDIT) decorre da utilização de métodos numéricos, tais métodos citados são descritos pelo manual (SOFTWARE, 2021) que nos permitem encontrar os autovalores e autovetores do sistema estudado.

Portanto, utilizando o Hamiltoniano completo do sistema, contudo expandindo em termos das bases $|g, n\rangle$ e $|e, n\rangle$ para o formato matricial,

$$\begin{aligned}
\langle g, m | \hat{H} | n, g \rangle &= \nu n \delta_{m,n}, \\
\langle e, m | \hat{H} | n, g \rangle &= g \left(\sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \right), \\
\langle g, m | \hat{H} | n, e \rangle &= \langle e, m | \hat{H} | n, g \rangle, \\
\langle e, m | \hat{H} | n, e \rangle &= \nu n \delta_{m,n} + \Omega \delta_{m,n}.
\end{aligned}$$

Para um valor N fixo, sendo este um estado de Fock (SHTYKOV; SMOLSKIY, 2020), a escrita da matriz resultante desta formulação, ocorre com as N primeiras linhas e colunas relacionadas aos vetores de base $|g, n\rangle$, enquanto os termos $N+1$ até $2(N+1)$ são relacionados aos vetores de base $|e, n\rangle$.

2.3 Base Específica

A abordagem proposta neste método envolve a reformulação do Hamiltoniano completo do sistema, utilizando uma base específica $\{|g, N\rangle, |e, N-1\rangle, |g, N-2\rangle, |e, N-3\rangle\}$.

Essa escolha de base, quando aplicada à expansão do Hamiltoniano total, abrange as condições que levaram à inadequação da (TPNDIT), conforme discutido na seção 2.1. Por tanto, com o Hamiltoniano não perturbado \hat{H}_0 ,

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 = \nu \hat{n} + \Omega \hat{\sigma}_e + g \left[\sqrt{N} |g, N\rangle \langle e, N-1| + \sqrt{N} |e, N-1\rangle \langle g, N| \right. \\
+ \sqrt{N-1} |e, N-1\rangle \langle g, N-2| + \sqrt{N-1} |g, N-2\rangle \langle e, N-1| \\
\left. + \sqrt{N-2} |g, N-2\rangle \langle e, N-3| + \sqrt{N-2} |e, N-3\rangle \langle g, N-2| \right].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

A perturbação atuante no sistema assume a forma,

$$\begin{aligned}
\hat{V} = g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{\sigma}_x - g \left[\sqrt{N} |g, N\rangle \langle e, N-1| + \sqrt{N} |e, N-1\rangle \langle g, N| \right. \\
+ \sqrt{N-1} |e, N-1\rangle \langle g, N-2| + \sqrt{N-1} |g, N-2\rangle \langle e, N-1| \\
\left. + \sqrt{N-2} |g, N-2\rangle \langle e, N-3| + \sqrt{N-2} |e, N-3\rangle \langle g, N-2| \right].
\end{aligned}$$

Definindo fatores que envolvam os precursores da falha da teoria de perturbação,

$$\Delta_1 \equiv \nu - \Omega, \Delta_3 \equiv 3\nu - \Omega. \tag{2.5}$$

Para que assim, construir o Hamiltoniano total expandido na base específica,

$$\hat{H}_0 = \nu N + M, \quad (2.6)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{N} & 0 & 0 \\ g\sqrt{N} & -\Delta_1 & g\sqrt{N-1} & 0 \\ 0 & g\sqrt{N-1} & -2\nu & g\sqrt{N-2} \\ 0 & 0 & g\sqrt{N-2} & -\Delta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Portanto, os autovalores da matriz M propiciam na equação característica,

$$\Lambda_{N,i}^4 + B\Lambda_{N,i}^3 + C\Lambda_{N,i}^2 + D\Lambda_{N,i} + E = 0.$$

Os coeficientes da equação característica encontrada.

$$\begin{aligned} B &= 2\nu + \Delta_1 + \Delta_3, \\ C &= 2\nu(\Delta_1 + \Delta_3) + \Delta_1\Delta_3 - 3g^2(N-1), \\ D &= 2\nu(\Delta_1\Delta_3 - g^2N) - g^2(2N-1)\Delta_3 - g^2(N-2)\Delta_1, \\ E &= g^2N[g^2(N-2) - 2\nu\Delta_3]. \end{aligned}$$

Logo, os autovalores encontrados da matriz M , com a resolução da equação característica pelo método de Ferrari, deduzido no Apêndice B, temos que as respectivas raízes do problema são denotados como $\Lambda_{N,i}$, com $i = 1, \dots, 4$.

$$\Lambda_{N,1} = -\frac{B}{4} - S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \quad (2.8)$$

$$\Lambda_{N,2} = -\frac{B}{4} - S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}, \quad (2.9)$$

$$\Lambda_{N,3} = -\frac{B}{4} + S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}, \quad (2.10)$$

$$\Lambda_{N,4} = -\frac{B}{4} + S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}. \quad (2.11)$$

Os termos auxiliares, por sua vez,

$$S = \sqrt{\frac{Q_0 \cos \varphi - p}{6}}, \quad q = D + \frac{B}{2} \left(\frac{B^2}{4} - C \right),$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{Q_1}{2Q_0^3} \right), \quad p = C - \frac{3}{8}B^2,$$

$$Q_0 = \sqrt{C^2 - 3BD + 12E},$$

$$Q_1 = 2C^3 - 9C(BD + 8E) + 27(B^2E + D^2).$$

Para os autovalores relacionados as bases $|g, n\rangle$ e $|e, n\rangle$, fora dos limites da base específica escolhida.

$$\begin{aligned} |g, n\rangle & \text{ para } n \neq N, N-2 \text{ com autovalor } E_{g,N} = \nu N, \\ |e, n\rangle & \text{ para } n \neq N-1, N-3 \text{ com autovalor } E_{e,N} = \nu N + \Omega. \end{aligned}$$

Finalmente, os autovetores identificados mediante a utilização da base específica apresentam autovalores expressos como $E_{N,i} = \nu N + \Lambda_{N,i}$.

$$|s_{N,i}^{(0)}\rangle = [\phi_{N,i}^{(0)} |g, N\rangle + \phi_{N,i}^{(1)} |e, N-1\rangle + \phi_{N,i}^{(2)} |g, N-2\rangle + \phi_{N,i}^{(3)} |e, N-3\rangle]. \quad (2.12)$$

Logo, os termos referentes ao fator de normalização e as amplitudes de probabilidade,

$$\begin{aligned} \Theta_{N,i} &= \left\{ 1 + \Phi_{N,i}^2 + \Phi_{N,i}^2 \frac{g^2 N}{\Lambda_{N,i}^2} + \frac{g^2 (N-2)}{(\Delta_3 + \Lambda_{N,i})^2} \right\}^{-1/2}, \\ \Phi_{N,i} &= \frac{g\sqrt{N-1}}{\left(\Delta_1 + \Lambda_{N,i} - \frac{g^2 N}{\Lambda_{N,i}}\right)}, \phi_{N,i}^{(0)} = \frac{\Phi_{N,i} g\sqrt{N}}{\Lambda_{N,i}} \Theta_{N,i}, \\ \phi_{N,i}^{(1)} &= \Phi_{N,i} \Theta_{N,i}, \phi_{N,i}^{(2)} = \Theta_{N,i}, \\ \phi_{N,i}^{(3)} &= \frac{g\sqrt{N-2}}{\Delta_3 + \Lambda_{N,i}} \Theta_{N,i}. \end{aligned}$$

Seguindo com a comparação dos resultados obtidos por cada método podemos prosseguir com a análise do sistema proposto. Os parâmetros utilizados para as simulações são $\nu = 1.0$ e $g = 0.001\nu$.

Nesse contexto, investigamos o sistema considerando o estado de energia da cavidade com $n = 29$, uma vez que, para valores de energia superiores, a capacidade computacional disponível não é suficiente para estudar níveis mais elevados.

As comparações realizadas focaram nas autoenergias e probabilidades dos estados, obtidas tanto numericamente quanto pelo método da base específica (MBE).

Os resultados obtidos com a base específica foram também aproximados mediante o uso da (TPNDIT), cujos resultados analíticos estão detalhados no Anexo C.

As autoenergias, ilustradas na Figura 2, foram determinadas pela comparação entre o método numérico (MN) (representado por traço contínuo) e o uso da base específica (representado por traço pontilhado). O gráfico obtido caracteriza o fenômeno de afastamento repentino, também conhecido como *anti-crossing* ou *avoided crossing*. O comportamento de *anti-crossing* descreve a troca de energia entre o átomo e a cavidade (BUSCH et al., 2011; GRIPP; MIELKE; OROZCO, 1997).

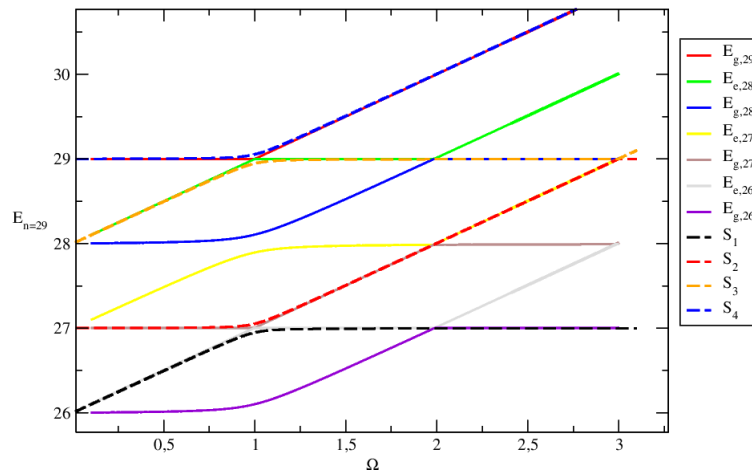


Figura 2 – Autoenergias obtidas numericamente e pelo (MBE) com o valor fixo de $n = 29$.

Os pontos com ocorrência de *anti-crossing* identificados destacam os níveis de energia nos quais o sistema estudado possui energias próximas para suas partes constituintes.

A largura entre os níveis de energia é referente à diferença dos níveis de energia, ou seja, a descrição da diferença entre os níveis de energia,

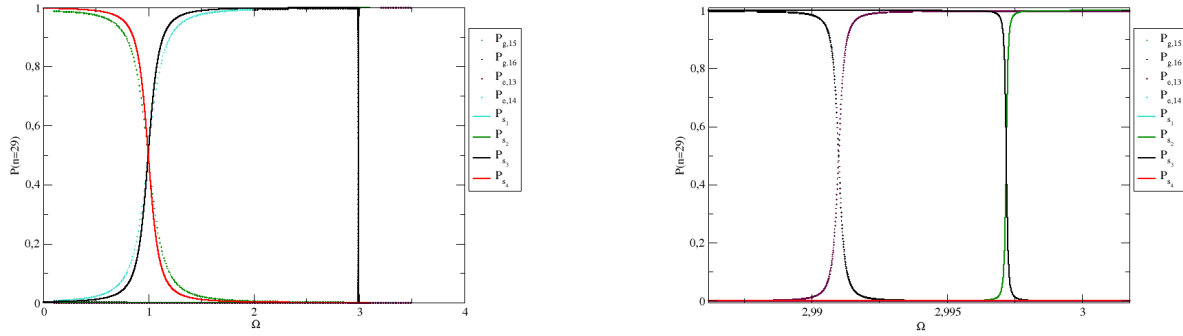
$$\Delta E = E_{e,n} - E_{g,n}, \quad (2.13)$$

Como exemplo para $\Omega \approx 0$ a diferença é na ordem de ν .

Os valores de Ω que propiciam a ressonância entre as partes constituintes do sistema, ocorrem os fenômenos de absorção e emissão citados nas subseções 1.4.0.1 e 1.4.0.2.

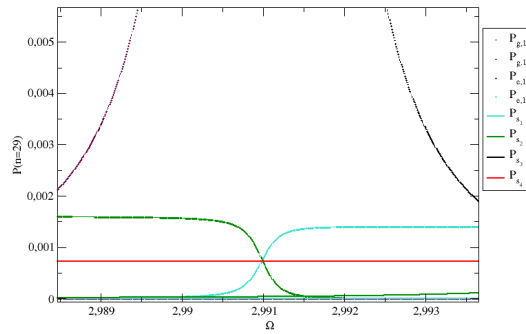
A diferença de energia para os *anti-crossing*, no que lhe concerne, assume valor próximo da constante de acoplamento, ou seja, $\Delta E \approx g$ (SCALA et al., 2021).

O encontro das probabilidades para ambos os métodos, partimos para o autoestado com melhor aproximação, o estado com energia $E_{g,28}$, entre o (MBE) e o (MN), para que assim sejam feitas as devidas comparações.



(a) Cruzamento de probabilidades para valores de frequência na ordem de $\Omega \approx \nu$.

(b) Cruzamento de probabilidades para valores de frequência na ordem de $\Omega \approx 3\nu$.



(c) Cruzamento de probabilidades para valores de frequência na ordem de $\Omega \approx 3\nu$. As probabilidades para este caso com valores inferiores à 1% de ocorrer encontrando com o (MN).

Figura 3 – Probabilidades para o estado correspondente ao nível de energia $n = 29$, com ênfase para as frequências de ressonância do sistema responsável pela emissão e absorção de fótons.

O gráfico da Figura 3 trata das probabilidades para ambos os métodos referente ao estado $|g, 28\rangle$. As probabilidades P_{s_i} (traço contínuo) com $i = 1, \dots, 4$ são originadas do (MBE) para o estado citado referente as quatro probabilidades para o mesmo estado $|g, 28\rangle$ provenientes das quatro Eqs.(2.12) de autoestados obtidas.

Como resultado, o (MBE) produz apenas dois cruzamentos ao variar os valores de Ω , ao passo que numericamente identificamos todos os três cruzamentos.

Embora haja concordância no comportamento geral entre os resultados obtidos pelo (MBE) e os resultados numéricos, observa-se na Figura 3 que os autoestados não são equivalentes entre si.

A discrepância é mais evidente no autoestado de melhor aproximação, já que nenhuma das probabilidades associadas aos quatro autoestados identificados pelo (MBE)

se aproxima das obtidas numericamente, comprometendo a validade do método para os objetivos desta pesquisa.

Diante dessa disparidade nos resultados, optamos por abandonar a abordagem inicial proposta com a base específica, devido às limitações encontradas na (TPNDIT). Em vez disso, escolhemos uma abordagem alternativa para formalizar o estudo sobre o problema em questão.

A terceira abordagem mencionada baseia-se na descrição centralizada em um conjunto de bases suficientes para explicar a geração dos três cruzamentos responsáveis pela geração de fótons. Isso nos permite aplicar métodos numéricos apropriados para caracterizar os fenômenos físicos observados.

2.4 Método Proposto

Em busca de uma aproximação analítica para o sistema proposto, tomamos uma terceira abordagem que consiste na expansão do Hamiltoniano do sistema Eq.(1.23) em uma base ortonormal que envolva a geração dos três cruzamentos para fótons do sistema, tal base fornece uma matriz 12×12 tridiagonal, do qual nos fornece 12 autovalores e autovetores, para que assim possamos calculá-los numericamente.

Portanto, a expansão citada é em termos da base $\{|g, n + i\rangle, |e, n + j\rangle\}$ com $k = -6, i = 4, 2, \dots, k$ e $j = 3, 1, \dots, k - 1$, nos fornece a matriz com elementos sob a forma.

$$\begin{aligned} \langle i, g | \hat{H} | g, i \rangle &= \nu n, \\ \langle j, e | \hat{H} | g, i \rangle &= g \left(\sqrt{i} \delta_{N+4, i-1} + \sqrt{i+1} \delta_{N+4, i+1} \right), \\ \langle i, g | \hat{H} | e, j \rangle &= g \left(\sqrt{j} \delta_{i, j-1} + \sqrt{j+1} \delta_{i, j+1} \right), \\ \langle j, e | \hat{H} | e, j \rangle &= \nu n + \Omega. \end{aligned}$$

Tomando o estado de Fock fixo em $n = 100$, os valores utilizados para as simulações são para a constante de acoplamento fixa em $g = 0.001\nu$ e $\nu = 1.0$.

fundamentamos nossa busca para as autoenergias entre 99.7ν e 100.3ν , encontramos os autoestados $|g, 100\rangle$ e $|e, 97\rangle$ conforme explicitado na Figura 4.

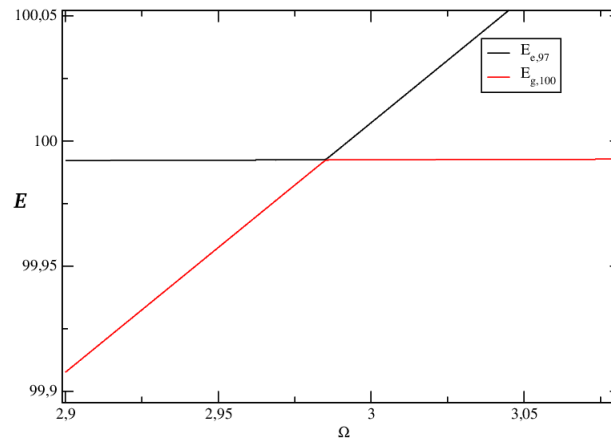


Figura 4 – Autoenergias proporcionais ao estado de Fock $n = 100$.

O resultado obtido para as autoenergias propicia, como esperado, o comportamento de *anti-crossing* encontrado nas formulações apresentadas anteriormente, tal que é mantido o significado de troca de energias e de ressonância das partes constituintes do sistema.

A troca de energia nos estados identificados ocorre por meio da excitação do átomo e da desexcitação do campo, que transita do estado $|g, 100\rangle$ para o estado $|e, 97\rangle$.

Da mesma forma, para o estado $|e, 97\rangle$, ocorre a desexcitação do átomo e excitação do campo, levando o sistema de volta ao estado $|g, 100\rangle$.

A partir das autoenergias encontradas, formulamos dois novos autoestados correspondentes com probabilidades encontradas na Figura 4.

$$|S_n\rangle \approx \alpha |g, n\rangle + \beta |e, n - 3\rangle, \quad (2.14)$$

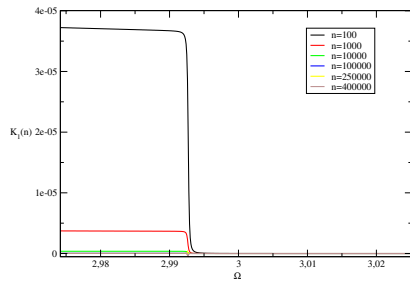
$$|A_n\rangle \approx \delta |g, n\rangle + \gamma |e, n - 3\rangle. \quad (2.15)$$

A prova da nossa aproximação surge com a verificação da condição $K_i(n) = 0$ para $i = 1, 2, 3$,

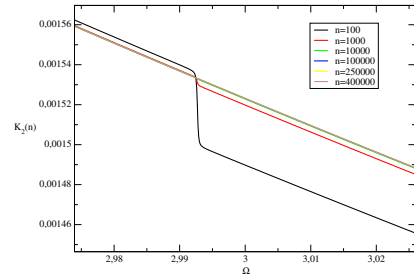
$$K_1(n) = \gamma^2 - \alpha^2, \quad (2.16)$$

$$K_2(n) = 1 - \beta^2 - \alpha^2, \quad (2.17)$$

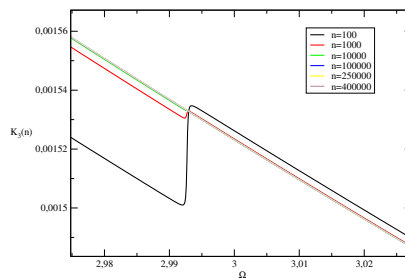
$$K_3(n) = 1 - \delta^2 - \gamma^2. \quad (2.18)$$



(a) A função K_1 em função de Ω para diferentes valores de n .



(b) A função K_2 em função de Ω para diferentes valores de n .



(c) A função K_3 em função de Ω para diferentes valores de n .

Figura 5 – Comportamento das funções K_i para a análise da aproximação proposta para a formação dos autoestados $|S_n\rangle$ e $|A_n\rangle$.

Verifica-se que os valores da Figura 5 são próximos de zero, validando a aproximação utilizada.

Além dos autoestados $|g, n\rangle$ e $|e, n - 3\rangle$, há outros autoestados pertencentes ao sistema, embora suas probabilidades de ocorrência sejam inferiores a 1%, enfatizando a aproximação feita descrita pelas equações (2.15) e (2.14).

Estes comportamentos são ressaltados para as probabilidades relacionadas aos estados $|A_{100}\rangle$ e $|S_{100}\rangle$ como visto na Figura 6.

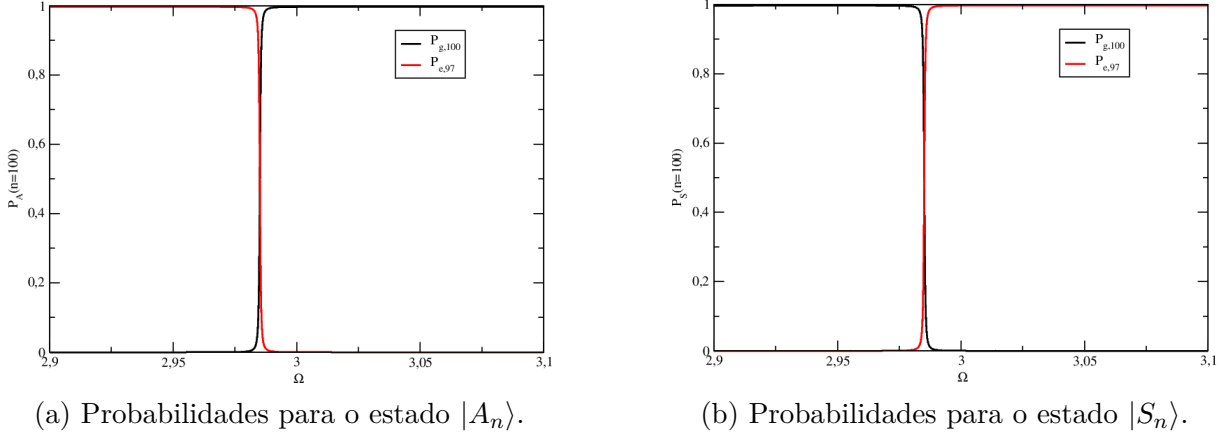


Figura 6 – Probabilidades de se encontrar os autoestados $|g, 100\rangle$ e $|e, 97\rangle$ utilizando os autoestados $|S_n\rangle$ e $|A_n\rangle$ com $n = 100$.

O gráfico representado na Figura 6b evidência a transição de deexcitação do átomo e excitação do campo para o autoestado $|A_{100}\rangle$.

Analogamente, o gráfico exibido na Figura 6a ilustra a excitação do átomo e de-excitação do campo para o autoestado $|S_{100}\rangle$.

Como resultado, obtemos as relações,

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= 1 - \epsilon_1, \\ \gamma^2 + \delta^2 &= 1 - \epsilon_2.\end{aligned}$$

As quais, os autoestados encontrados, adjunto de suas probabilidades, nos fornecem as seguintes relações com $\alpha \approx \gamma$ e $\delta \approx \beta$.

Os valores de ϵ_1 e ϵ_2 nos fornecem os valores de ressonância do sistema, $\Omega \approx 3\nu$, para n fixo, como exemplo mostrado na Figura 7.

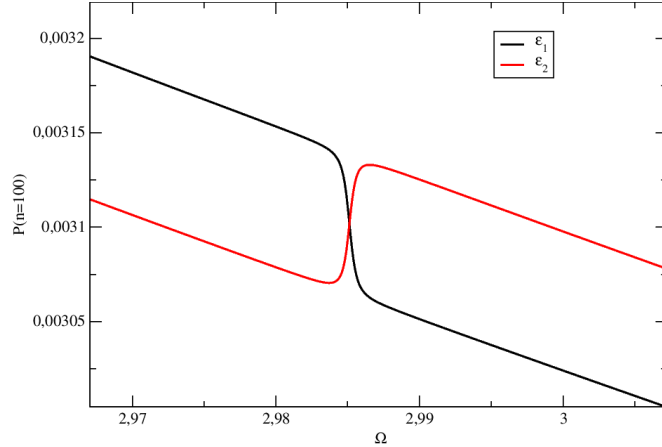


Figura 7 – Valores de ϵ_1 e ϵ_2 para $n = 100$.

Com a verificação numérica dos parâmetros α , β , γ e δ , encontramos como valores correspondentes para os autoestados.

$$|S_n\rangle = \alpha_n |g, n\rangle + \sqrt{1 - \alpha_n^2} |e, n - 3\rangle, \quad (2.19)$$

$$|A_n\rangle = -\sqrt{1 - \alpha_n^2} |g, n\rangle + \alpha_n |e, n - 3\rangle, \quad (2.20)$$

A partir do encontro de diferentes valores de frequência de ressonância em função do número de fótons n , obtemos a relação da frequência do átomo em função do nível de energia n , visto na Figura 8.

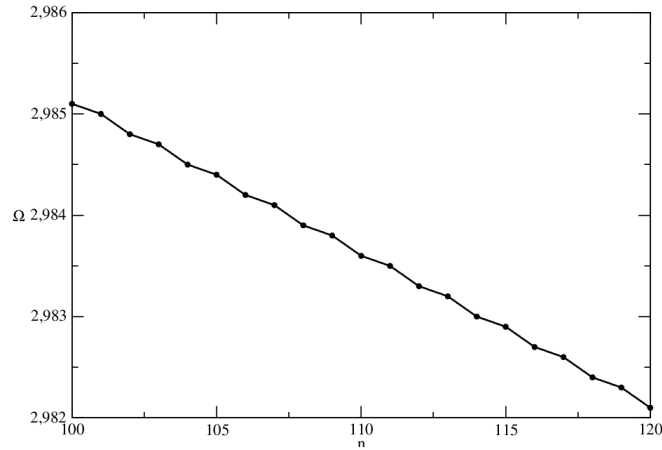


Figura 8 – Valores da frequência de ressonância do sistema em função de n .

Assim, observa-se que à medida que o estado de Fock aumenta, a frequência para a ressonância do sistema átomo-cavidade diminui.

Além disso, o método sugerido para analisar o sistema é mais adequado à capacidade computacional disponível, permitindo o estudo de estados com n na ordem de 10^5 para este trabalho.

3 Interação Efetiva

3.1 Aproximação para o (MJC) de 3 fótons

Os resultados obtidos na Seção 1.7 propiciam a descrição do Hamiltoniano para o (MJC) de três fótons, descrito pelo Hamiltoniano,

$$\hat{H}_{JC} = \nu \hat{n} + \Omega \hat{\sigma}_e + \chi (\hat{a}^3 \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^{\dagger 3} \hat{\sigma}_-). \quad (3.1)$$

Os termos ν e Ω são as frequências da cavidade e do átomo de dois níveis, enquanto \hat{n} , \hat{a} , \hat{a}^\dagger são os operadores número, criação e aniquilação de campo, os termos $\hat{\sigma}_e$, $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ são operadores referentes ao estado excitado, criação e aniquilação de estados do átomo.

A aplicação da relação de completeza em termos dos estados $|g, n\rangle$ e $|e, n-3\rangle$,

$$\hat{1} = |g, n\rangle \langle n, g| + |e, n-3\rangle \langle n-3, e|. \quad (3.2)$$

Propicia na formulação do Hamiltoniano Efetivo,

$$\hat{H}_{ef} = \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} E_{g,n} |g, n\rangle \langle n, g| + E_{e,n} |e, n-3\rangle \langle n-3, e| + \xi_n (|g, n\rangle \langle n-3, e| + |e, n-3\rangle \langle n, g|) \quad (3.3)$$

Os valores $E_{e,n}$, $E_{g,n}$ e ξ_n são alusivas as energias para os estados excitado e fundamental sistema, enquanto o termo ξ é a constante de acoplamento do sistema. Os temos N_{min} e N_{max} são os estados de Fock n para os quais a aproximação é válida.

Os autoestados obtidos na Seção 2.4, apresentados como Eqs. (3.4) e (3.5) são, então, autoestados do Hamiltoniano efetivo,

$$|A_n\rangle = \alpha_n |e, n-3\rangle - \sqrt{1 - \alpha_n^2} |g, n\rangle, \quad (3.4)$$

$$|S_n\rangle = \alpha_n |g, n\rangle + \sqrt{1 - \alpha_n^2} |e, n-3\rangle. \quad (3.5)$$

Os termos α_n e $\sqrt{1 - \alpha_n^2}$ são as amplitudes de probabilidade para os estados $|S_n\rangle$ e $|A_n\rangle$ obtidos pela aproximação do sistema.

Por conseguinte, ao aplicarmos na equação de Schrödinger independente do tempo obtemos o seguinte sistema de equações, para o estado $|A_n\rangle$ com autoenergia A_n ,

$$A_n \alpha_n = \alpha_n E_e - \sqrt{1 - \alpha_n^2} \xi, \quad (3.6)$$

$$\sqrt{1 - \alpha_n^2} A_n = -\xi \alpha_n + \sqrt{1 - \alpha_n^2} E_g. \quad (3.7)$$

Analogamente, para o estado $|S_n\rangle$ com autoenergia S_n ,

$$\alpha_n S_n = \alpha_n E_g + \sqrt{1 - \alpha_n^2} \xi, \quad (3.8)$$

$$\sqrt{1 - \alpha_n^2} S_n = \left(\sqrt{1 - \alpha_n^2} E_e + \alpha_n \xi \right) \quad (3.9)$$

Obtemos a expressão em função de n , para a diferença das autoenergias dada pela Eq. (3.10), as relações para as constantes de interação conforme Eq. (3.11), e o acoplamento do Hamiltoniano efetivo como indicado pela Eq. (3.12).

$$\Delta_n = S_n - A_n, \quad (3.10)$$

$$\Theta_n = \Delta_n (1 - 2\alpha_n^2), \quad (3.11)$$

$$\xi_n = \Delta_n \alpha_n \sqrt{1 - \alpha_n^2}. \quad (3.12)$$

Além disso, obtemos expressões para as energias

$$E_e = S_n (1 - \alpha_n^2) + A_n \alpha_n^2, \quad (3.13)$$

$$E_g = A_n (1 - \alpha_n^2) + S_n \alpha_n^2. \quad (3.14)$$

A reunião das expressões analíticas nesta seção permite a obtenção de diversas características associadas ao sistema estudado, incluindo a probabilidade para o estado excitado e os momentos do número de fótons.

Definimos a função R_n ,

$$R_n = \frac{|\Delta_n|}{\xi_n}, \quad (3.15)$$

a Eq.(3.15) caracteriza a diferença de energias em termos da constante de acoplamento para cada valor do estado de Fock. Para valores de ressonância do sistema com $\nu = 1.0$ e variando Ω , observamos o comportamento de V centrado no valor de $|\alpha|^2$. Como probabilidade para o estado coerente,

$$P(\alpha) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (3.16)$$

Esta probabilidade exibe uma distribuição de Poisson, característica dos estados coerentes. Em um estado coerente, a probabilidade de encontrar um número específico de partículas segue essa distribuição.

O parâmetro α afeta a amplitude e a fase do estado coerente e $|\alpha|^2$ está relacionado ao número médio de fótons no estado coerente.

Simultaneamente plotamos a probabilidade para o estado coerente Eq.(3.16) como visto na Figura 9.

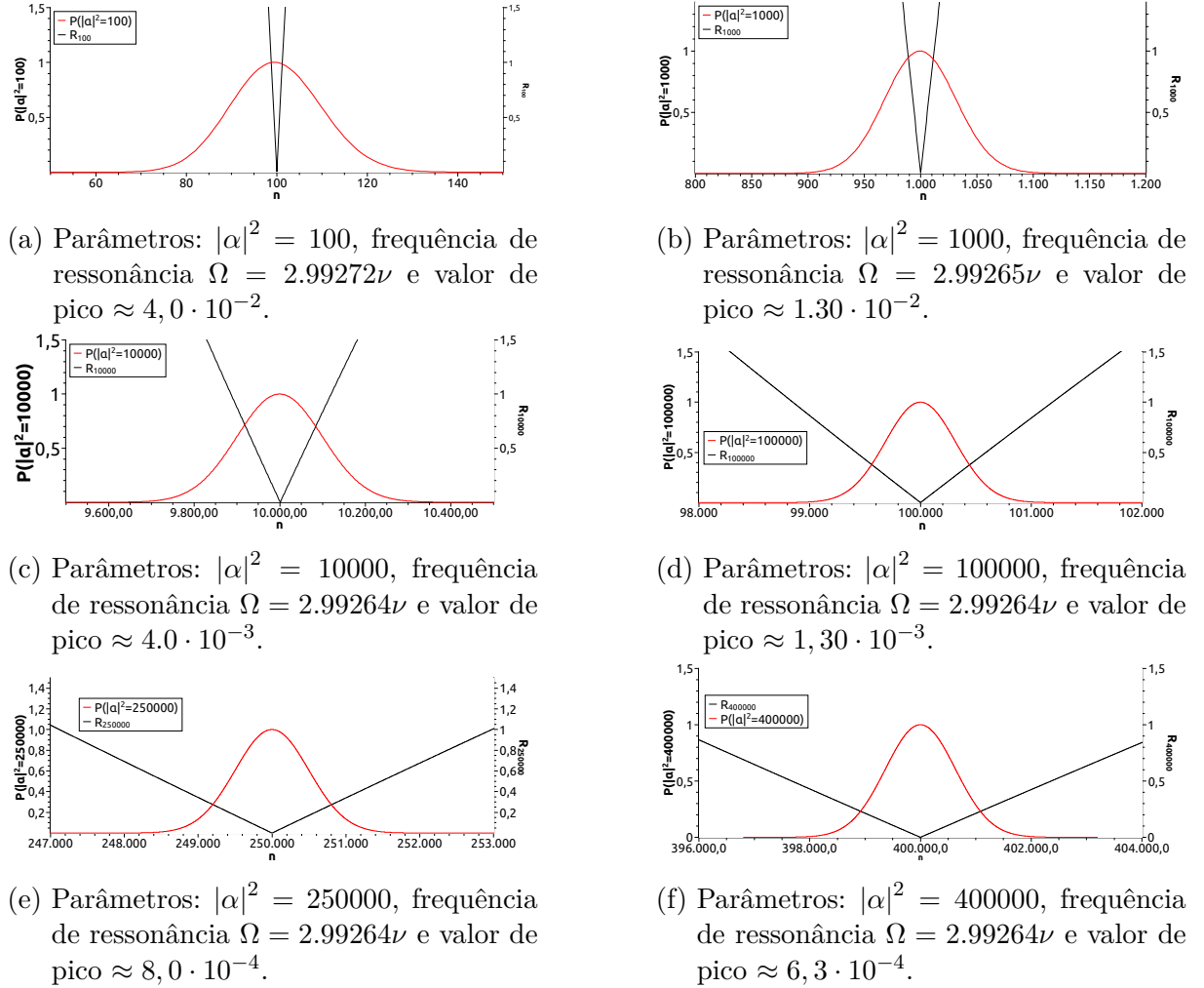


Figura 9 – Resultados referentes à probabilidade do estado coerente para diferentes valores em comparação com o parâmetro R_n , os valores de probabilidade foram normalizados pelos seus respectivos valores de pico.

Além de que, as simulações realizadas que envolvem os estados $|A_n\rangle$ e $|S_n\rangle$, mantemos $\nu = 1.0$, a constante de acoplamento $g = 0.07/|\alpha|$ e $\Omega \approx 3\nu$ está no respectivo valor de ressonância para o estado n escolhido.

Observa-se que à medida que o estado coerente aumenta, o valor de ressonância da frequência Ω possui variação ínfima até tornar-se constante, e a quantidade de fótons no estado coerente também aumenta. Ao mesmo tempo, a probabilidade de encontrar esses fótons no mesmo estado diminui. Portanto, o número médio de fótons encontrados no estado coerente é inversamente proporcional à probabilidade de encontrá-los.

3.1.1 Probabilidade do Estado Excitado e Parâmetro Q de Mandel

O encontro da probabilidade inicia-se com a inversão das bases constituintes de $|A_n\rangle$ e $|S_n\rangle$.

$$|e, n-3\rangle = \alpha_n |A_n\rangle + \sqrt{1-\alpha_n^2} |S_n\rangle, \quad (3.17)$$

$$|g, n\rangle = \alpha_n |S_n\rangle - \sqrt{1-\alpha_n^2} |A_n\rangle. \quad (3.18)$$

Assumindo o estado inicial do sistema sob a forma,

$$|\psi_0\rangle = \sum_n c_n |g, n\rangle = \sum_n c_n \left[\alpha_n |S_n\rangle - \sqrt{1-\alpha_n^2} |A_n\rangle \right]. \quad (3.19)$$

A evolução temporal do sistema, descrita em termos das energias para os estados citados,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n \left[e^{-itS_n} \alpha_n |S_n\rangle - e^{-itA_n} \sqrt{1-\alpha_n^2} |A_n\rangle \right]. \quad (3.20)$$

O somatório da Eq. (3.20) percorre as probabilidades relevantes para o número de fótons, o termo c_n é descrito pelo argumento um dado estado coerente do sistema.

$$c_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.21)$$

A excitação atômica média para o estado excitado do sistema descrito pela expressão,

$$P_e(t) = \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_e | \psi(t) \rangle, \quad (3.22)$$

$$P_e(t) = 4 \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} |c_n|^2 \alpha_n^2 (1-\alpha_n^2) \sin^2 \frac{\Delta_n t}{2}. \quad (3.23)$$

Os termos N_{\min} e N_{\max} referem-se ao intervalo de valores para o número de fótons associado ao sistema, considerando a probabilidade do estado coerente.

$$\langle n(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{n} | \psi(t) \rangle, \quad (3.24)$$

$$\langle n(t) \rangle = \langle n(0) \rangle - 12 \sum |c_n|^2 \left[\alpha_n^2 (1-\alpha_n^2) \sin^2 \frac{\Delta_n t}{2} \right]. \quad (3.25)$$

O valor $\langle n(0) \rangle$ é descrito sob a forma.

$$\langle n(0) \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^2 = \bar{n}$$

Para $\langle n^2(t) \rangle$, obtemos como resultado,

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{n}^2 | \psi(t) \rangle, \quad (3.26)$$

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle n^2(0) \rangle + \sum |c_n|^2 4\alpha_n^2 (1 - \alpha_n^2) [-6n + 9] \sin^2 \frac{\Delta_n t}{2}, \quad (3.27)$$

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle n^2(0) \rangle + 9P_e - 24 \sum n |c_n|^2 \alpha_n^2 (1 - \alpha_n^2) \sin^2 \frac{\Delta_n t}{2}, \quad (3.28)$$

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle n^2(0) \rangle + 9P_e + \bar{A}. \quad (3.29)$$

Com termo auxiliar,

$$\bar{A} \equiv -24 \sum n |c_n|^2 \alpha_n^2 (1 - \alpha_n^2) \sin^2 \frac{\Delta_n t}{2}.$$

A variância estatística que descreve a incerteza associada ao estado n ,

$$[\Delta n(t)]^2 = \langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2, \quad (3.30)$$

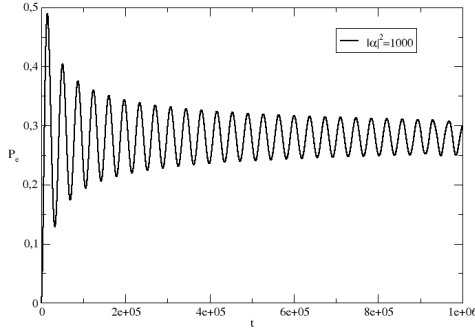
$$[\Delta n(t)]^2 = \langle n^2(0) \rangle + 9P_e + \bar{A} - (\langle n(0) \rangle^2 - 6 \langle n(0) \rangle P_e + 9P_e^2). \quad (3.31)$$

Portanto, o fator Q de Mandel para a indicação de flutuações no sistema,

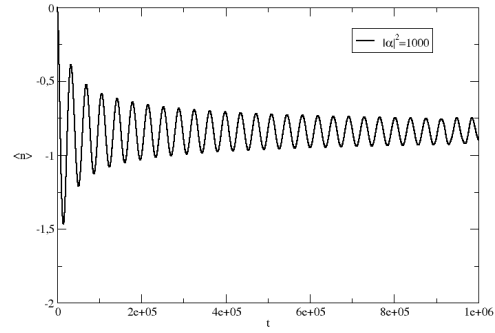
$$Q = \frac{[\Delta n(t)]^2 - \langle n(t) \rangle}{\langle n(t) \rangle} = \frac{P_e [6\bar{n} + 12 - 9P_e] + \bar{A}}{\bar{n} - 3P_e}. \quad (3.32)$$

A Figura 10 ilustra o comportamento da probabilidade obtida e do número médio de fótons em duas faixas de valores distintas.

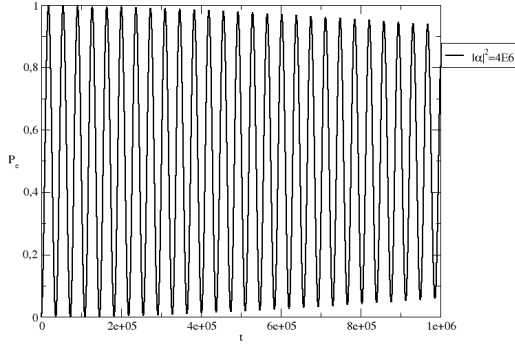
Essa representação nos permite caracterizar o fenômeno de colapso nas oscilações de Rabi, evidenciado nas variações de probabilidade.



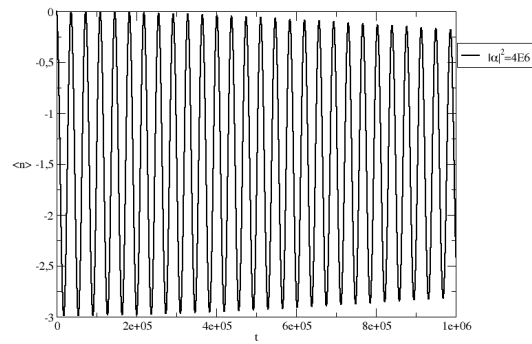
(a) Probabilidade de obtenção do estado excitado para $|\alpha|^2 = 1000$.



(b) Número médio de fótons $\langle n \rangle$, para o estado excitado para $|\alpha|^2 = 1000$.



(c) Probabilidade de obtenção do estado excitado para $|\alpha|^2 = 400000$.



(d) Número médio de fótons $\langle n \rangle$, para o estado excitado para $|\alpha|^2 = 400000$.

Figura 10 – Caracterização da probabilidade do estado excitado com as relações obtidas em termos dos autoestados $|A_n\rangle$ e $|S_n\rangle$.

No entanto, o comportamento de ressurgimento não pôde ser observado devido à limitação computacional atual, uma vez que a evolução temporal excede a capacidade de processamento disponível.

Além da ausência do fenômeno de ressurgimento, observa-se que o colapso para o estado coerente, na ordem de $\sim 10^3$, mantém a amplitude das oscilações de Rabi aproximadamente constante.

Por fim, com o estado coerente $|\alpha\rangle$ com $\bar{n} = \alpha^2$,

$$\langle n^2(0) \rangle = \langle a^\dagger a a^\dagger a \rangle = \alpha^2 \langle a^\dagger a + 1 \rangle = \alpha^2 (\alpha^2 + 1) = \bar{n} (\bar{n} + 1), \quad (3.33)$$

$$[\Delta n(0)]^2 = \langle n^2(0) \rangle - \langle n(0) \rangle^2 = \bar{n} = \langle n(0) \rangle. \quad (3.34)$$

e o respectivo fator Q ,

$$Q(0) = \frac{[\Delta n(0)]^2 - \langle n(0) \rangle}{\langle n(0) \rangle} = 0. \quad (3.35)$$

3.2 Dinâmica

Estendendo o tratamento do sistema com o uso do Hamiltoniano efetivo Eq. (3.3), buscamos com a equação de Schrödinger dependente do tempo, com $\hbar = 1$, a descrição da evolução temporal do sistema átomo cavidade.

Portanto, com a função de onda $|\psi(t)\rangle$ em termos das bases do Hamiltoniano efetivo,

$$|\psi(t)\rangle = A(t)|g, n\rangle + B(t)|e, n-3\rangle. \quad (3.36)$$

Ao aplicarmos a Eq.(3.36) na Equação de Schrödinger,

$$i\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle. \quad (3.37)$$

Obtemos para suas respectivas amplitudes de probabilidade o sistema de equações diferenciais,

$$\dot{A} = -iAE_g - i\xi B, \quad (3.38)$$

$$\dot{B} = -iBE_e - i\xi A. \quad (3.39)$$

Como solução analítica para o sistema obtido,

$$A(t) = \frac{e^{-\frac{it}{2}\epsilon}}{\delta_+ - \delta_-} \left(\delta_+ \exp\left(\frac{it}{2}\theta\right) - \delta_- \exp\left(-\frac{it}{2}\theta\right) \right), \quad (3.40)$$

$$B(t) = \frac{\delta_+ \delta_-}{\xi(\delta_+ - \delta_-)} \sin\left(\frac{t}{2}\theta\right) \exp\left(-\frac{it}{2}(\epsilon + \pi)\right). \quad (3.41)$$

Como parâmetros auxiliares,

$$\eta = \left(\frac{\delta_+ \delta_-}{\xi(\delta_+ - \delta_-)} \right)^2, \quad (3.42)$$

$$\epsilon = E_e + E_g, \quad (3.43)$$

$$\delta_{\pm} = E_e - E_g \pm \sqrt{(E_e - E_g)^2 + 4\xi^2} \quad (3.44)$$

$$\theta = \sqrt{(E_e - E_g)^2 + 4\xi^2}. \quad (3.45)$$

O parâmetro η , em particular, representa a amplitude da oscilação de Rabi na probabilidade para o estado $|e, n-3\rangle$, enquanto a variável n atravessa o valor de ressonância entre as frequências do átomo e do campo.

A partir das Eqs (3.40) e (3.41), encontramos a probabilidade para os estados $|g, n\rangle$ e $|e, n-3\rangle$ com $n = 100$ como visto na Figura 11.

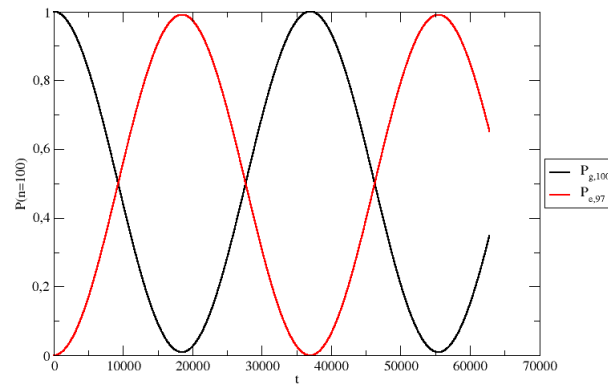


Figura 11 – Probabilidades para o encontro dos estados $|g, 100\rangle$ e $|e, 97\rangle$.

As probabilidades desenvolvem oscilações de Rabi com seu formato sinusoidal como descrito na Seção 1.4.1, as quais evidenciam a troca de energia coerente entre o campo e o átomo de dois níveis.

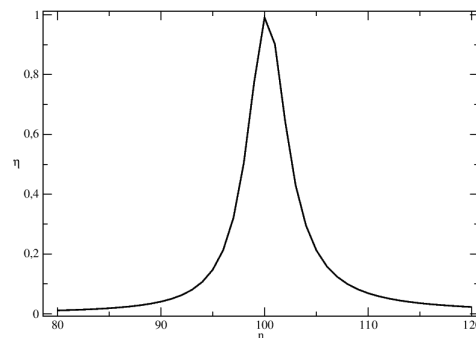


Figura 12 – Amplitude da oscilação da probabilidade as oscilações de Rabi do estado $|e, 97\rangle$.

O comportamento da amplitude para o estado $|e, 97\rangle$ com a frequência do átomo $\Omega = 2.99272\nu$ descrito pela Figura 12, caracterizando o pico da oscilação, $n = 100$ concordando com o resultado da simulação para a solução da equação de Schrödinger Figura 11.

4 Modelo Semiclássico

4.1 Formulação semiclássica via Estado Coerente

Retornando ao modelo semiclássico, contudo com a formulação via estado coerente, iniciamos com o Hamiltoniano do (MR) quântico,

$$\hat{H} = \nu \hat{n} + \frac{\Omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g_q (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (4.1)$$

Na representação da interação do sistema átomo-campo no estado coerente $|\alpha\rangle$, realizamos a substituição $\hat{a} \rightarrow \alpha$.

$$\hat{H} = \frac{\Omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g_q (\hat{a} e^{-it\nu} + \hat{a}^\dagger e^{it\nu}) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (4.2)$$

$$\hat{H} \rightarrow \frac{\Omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g_q \alpha (e^{-it\nu} + e^{it\nu}) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (4.3)$$

Portanto, como resultado a constante de acoplamento,

$$g_q = \frac{g}{\alpha}.$$

Os termo g e g_q são constantes de acoplamento, para os regimes semiclássico e quântico, respectivamente e $\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$ é uma das matrizes de Pauli.

4.2 Equação Mestra

A equação mestra utilizada serve para a caracterização da dinâmica do sistema, tratada com o Superoperador de Liouville,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} = & -i [\hat{H}, \hat{\rho}] + \gamma_\phi (\hat{\sigma}_z \hat{\rho} \hat{\sigma}_z - \hat{\rho}) \\ & + \frac{\gamma}{2} (n_t + 1) (2\hat{\sigma}_- \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-) \\ & + \frac{\gamma}{2} n_t (2\hat{\sigma}_+ \hat{\rho} \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+). \end{aligned} \quad (4.4)$$

O termo n_t é o número térmico de fótons e os fatores γ e γ_ϕ são termos de relaxamento do sistema.

A solução para esta equação é para algum operador unitário $\hat{U}(t; t_0)$ que propaga o estado do sistema como visto na Seção 1.6 para algum tempo posterior.

$$\hat{\rho} = e^{-i\nu t \hat{\sigma}_z / 2} \rho_1 e^{i\nu t \hat{\sigma}_z / 2}. \quad (4.5)$$

Reformulamos, então, a Eq. (4.4).

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 = & -i\hat{H}_{ef}\hat{\rho}_1 + i\hat{\rho}_1\hat{H}_{ef}^\dagger + ig\left(\hat{\rho}_1\hat{\sigma}_+e^{i2\nu t} + \hat{\rho}_1\hat{\sigma}_-e^{-i2\nu t}\right) \\ & - ig\left(\hat{\sigma}_+e^{i2\nu t} + \hat{\sigma}_-e^{-i2\nu t}\right)\hat{\rho}_1 + \gamma_\phi\hat{\sigma}_z\hat{\rho}_1\hat{\sigma}_z \\ & + \frac{\gamma}{2}(n_t + 1)(2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}_1\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_e\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1\hat{\sigma}_e) \\ & + \frac{\gamma}{2}n_t(2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}_1\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_g\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1\hat{\sigma}_g). \end{aligned} \quad (4.6)$$

O Hamiltoniano Efetivo para a interação semiclássica,

$$\hat{H}_{ef} = -\frac{\Delta_-}{2}\hat{\sigma}_z + g_0(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) - i\frac{\gamma_\phi}{2}. \quad (4.7)$$

O termo Δ_- é a diferença de frequências,

$$\Delta_- = \nu - \Omega. \quad (4.8)$$

Como Autoestados do Hamiltoniano Efetivo,

$$|\phi_+\rangle = \sqrt{\frac{2}{R(R + \Delta_-)}} \left[\frac{1}{2}(R + \Delta_-)|g\rangle + g_0|e\rangle \right], \quad (4.9)$$

$$|\phi_-\rangle = \sqrt{\frac{2}{R(R - \Delta_-)}} \left[\frac{1}{2}(R - \Delta_-)|g\rangle - g_0|e\rangle \right] \quad (4.10)$$

As respectivas autoenergias para os novos estados $|\phi_+\rangle$ e $|\phi_-\rangle$,

$$E_\pm = \pm \frac{R}{2} - i\frac{\gamma_\phi}{2}, \quad (4.11)$$

O parâmetro R é definido sob a forma,

$$R = \sqrt{4g_0^2 + \Delta_-^2}.$$

4.2.1 Formulação do Operador Densidade

A expansão do operador densidade $\hat{\rho}_1$ em termos das bases $|\phi_+\rangle$ e $|\phi_-\rangle$,

$$\hat{\rho}_1 = \left[e^{it(E_+^* - E_+)} A |\phi_+\rangle \langle\phi_+| + e^{it(E_-^* - E_-)} B |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \right. \quad (4.12)$$

$$\left. + e^{it(E_+^* - E_+)} C |\phi_+\rangle \langle\phi_-| + e^{it(E_-^* - E_-)} C^* |\phi_-\rangle \langle\phi_+| \right], \quad (4.13)$$

$$\hat{\rho}_1 = e^{-t\gamma_\phi} [A |\phi_+\rangle \langle\phi_+| + B |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \quad (4.14)$$

$$+ e^{-itR} C |\phi_+\rangle \langle\phi_-| + e^{itR} C^* |\phi_-\rangle \langle\phi_+|]. \quad (4.15)$$

Utilizando a propriedade do traço da matriz densidade, conseguimos reescrever a amplitude B em termos da amplitude A ,

$$\text{Tr} [\rho_1] = 1 \Rightarrow B = (e^{t\gamma_\phi} - A). \quad (4.16)$$

Portanto, a reescrita do operador densidade,

$$\hat{\rho}_1 = e^{-t\gamma_\phi} \left[A |\phi_+\rangle \langle \phi_+| + (e^{t\gamma_\phi} - A) |\phi_-\rangle \langle \phi_-| + e^{-itR} C |\phi_+\rangle \langle \phi_-| + e^{itR} C^* |\phi_-\rangle \langle \phi_+| \right]. \quad (4.17)$$

4.3 Dinâmica dos estados

Nossa análise concentra-se na descrição da dinâmica do sistema para os autoestados $|\phi_+\rangle$ e $|\phi_-\rangle$. No caso atual, desconsideramos qualquer efeito de dissipação proveniente dos termos n_t , γ , e γ_ϕ .

Reorganizando os termos da Eq. (4.4) e derivando o operador $\hat{\rho}_1$ conforme apresentado na Eq. (4.15), obtemos o sistema de equações diferenciais que descrevem as amplitudes A e C .

$$\begin{aligned} \dot{A} = i \frac{g_0}{2R} \left[\left((R - \Delta_-) e^{-it(2\nu+R)} - (R + \Delta_-) e^{it(2\nu-R)} \right) C \right. \\ \left. + \left((R + \Delta_-) e^{-it(2\nu-R)} - (R - \Delta_-) e^{it(2\nu+R)} \right) C^* \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\dot{C} = \frac{ig_0}{2R} \left[\left(2A - e^{t\gamma_\phi} \right) \left((R - \Delta_-) e^{it(2\nu+R)} - (R + \Delta_-) e^{-it(2\nu-R)} \right) - 8g_0 C \cos(2\nu t) \right]. \quad (4.19)$$

As equações Eqs.(4.18) e (4.19) foram obtidas com o auxílio de relações encontradas no Anexo B.

As simulações para a dinâmica são feitas com o uso das condições iniciais,

$$C(0) = \langle \phi_- | |g\rangle \langle g| | \phi_+\rangle = \frac{g_0}{R}, \quad (4.20)$$

$$A(0) = \frac{(R + \Delta_-)}{2R}. \quad (4.21)$$

Os parâmetros para $g_0 = 0.07/\sqrt{\alpha}$, $\nu = 1.0$ e $\Omega \approx 3\nu$.

4.4 Probabilidade de obtenção do estado excitado

Utilizamos a propriedade de cálculo da probabilidade associada ao operador densidade, obtendo-a como o traço do produto entre o operador densidade ρ_1 e o operador de projeção no estado excitado $\hat{\sigma}_e$.

$$P_e = \text{Tr} [\hat{\rho}_1 \hat{\sigma}_e]. \quad (4.22)$$

Portanto,

$$P_e = e^{-t\gamma\phi} \left[A \frac{2g_0^2}{R(R + \Delta_-)} + (e^{t\gamma\phi} - A) \frac{2g_0^2}{R(R - \Delta_-)} - (e^{-itRC} + e^{itRC^*}) \frac{g_0}{R} \right], \quad (4.23)$$

$$P_e = \frac{2g_0^2}{R(R - \Delta_-)} - \frac{e^{-t\gamma\phi}}{R} \left[A\Delta_- + 2g_0 \text{Re} (e^{-itRC}) \right]. \quad (4.24)$$

Continuando com as simulações, comparamos tanto a probabilidade de encontrar o estado excitado de forma quântica quanto semiclássica, conforme ilustrado na Figura 13, considerando $n = 200000$ e $\Omega = 2.9964\nu$.

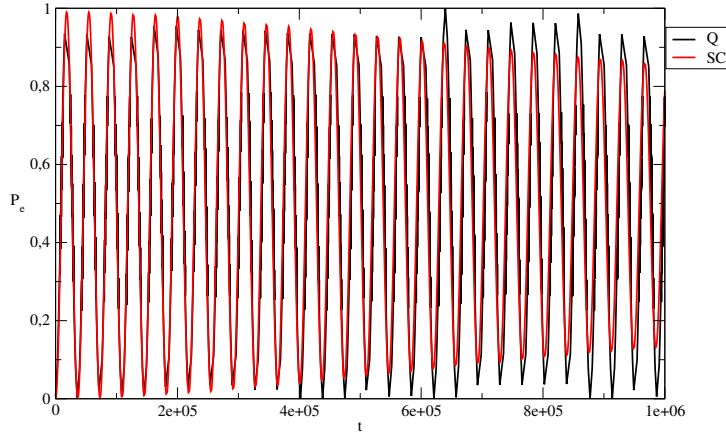


Figura 13 – Probabilidades de obtenção do estado excitado do sistema nas abordagens quântica e semiclássica.

As oscilações de Rabi surgidas da probabilidade do estado excitado para o caso quântico (Q) diminuem em amplitude, caracterizando o comportamento de colapso, enquanto para o caso semiclássico (SC) a amplitude de oscilação permanece estável em torno de 100% de obtenção do estado.

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, exploramos em detalhes os diferentes aspectos do Modelo de Rabi, investigando suas implicações tanto na perspectiva quântica quanto na semiclássica. As conclusões derivadas de cada capítulo proporcionam uma compreensão abrangente das complexidades envolvidas na descrição deste sistema quântico.

A construção do Modelo de Rabi em suas formas quântica e semiclássica nos forneceu uma base sólida para compreender a interação entre um átomo de dois níveis e um campo. A caracterização das autoenergias e autoestados do sistema permitiu a exploração de diferentes métodos com a caracterização dos *anti-crossing* e o cruzamentos de probabilidades, devido à ressonância do sistema, das transições de estado para a ressonância das partes constituintes.

A interação efetiva abordada pelo modelo de Jaynes-Cummings de 3 fótons adjunto da probabilidade para o estado excitado e a explicitação das equações diferenciais da dinâmica forneceram percepções sobre a evolução temporal do sistema, enquanto a definição do parâmetro Q acrescentou a descrição quantitativa à nossa compreensão do quão não clássico é o sistema. A abordagem do modelo semiclássico, destacou a relevância do estado coerente e a caracterização da Equação Mestra com ausência de dissipações e relaxamentos.

Este trabalho permitiu aprofundar a compreensão de modelos e conceitos não estudados nos cursos de Mecânica Quântica da graduação. Além da explanação de fenômenos associados à interação entre luz e matéria. As conclusões obtidas fornecem uma base sólida para futuras investigações e descrições alternativas do sistema, seja com mais componentes ou outros tipos de alteração e com fatores dissipativos condizentes com o modelo.

Referências

- AGARWAL, G. S. *Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9780429971396. Citado na página 34.
- BACHOR, T. C. R. H.-A. *A Guide to Experiments in Quantum Optics [Thrid, Edition]*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 53. 1689–1699 p. ISSN 1098-6596. ISBN 9788578110796. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.
- BARNETT, S. *Matrices: methods and applications*. [S.l.]: Oxford University Press, 1990. Citado na página 32.
- BARNETT, S. M.; RADMORE, P. M. *Methods in Theoretical Quantum Optics*. [S.l.: s.n.], 2002. Citado na página 34.
- BLAKELY, J. *An introduction to quantum optics and quantum fluctuations*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 60. 267–268 p. ISSN 0010-7514. ISBN 9780199215614. Citado 3 vezes nas páginas 27, 30 e 34.
- BUSCH, J. et al. Cooling atom-cavity systems into entangled states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 84, p. 022316, Aug 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.022316>>. Citado na página 40.
- CAMPAIOLI, F.; COLE, J. H.; HAPUARACHCHI, H. A Tutorial on Quantum Master Equations: Tips and tricks for quantum optics, quantum computing and beyond. p. 1–59, 2023. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2303.16449>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- CARMICHAEL, H. *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. Springer, 1999. (Physics and astronomy online library). ISBN 9783540548829. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ocgRgM-yJacC>>. Citado na página 31.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1977. (A Wiley interscience publication, v. 2). ISBN 9782705658342. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CnkfAQAAMAAJ>>. Citado na página 69.
- Crispin Gardiner, P. Z. *Quantum Noise A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer, 2004. 449 p. ISBN 0854046356. Disponível em: <https://www.google.com.br/books/edition/Quantum_Noise/a_xsT8oGhdgC?hl=pt-BR&gbpv=0>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- FICEK, Z.; WAHIDDIN, M. R. *Quantum optics for beginners*. [S.l.: s.n.], 2014. 1–335 p. ISBN 9789814411769. Citado na página 34.
- FOX, A. *Quantum Optics: An Introduction*. OUP Oxford, 2006. (Oxford Master Series in Physics). ISBN 9780198566724. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2YESDAAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 33.

- GARDINER, C. W.; ZOLLER, P. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic ... - Crispin Gardiner, Peter Zoller - Google Books*. [s.n.], 2004. 449 p. ISBN 9783540223016. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/9783540223016>>. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 33.
- GERRY, C.; KNIGHT, P. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521527354. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CgByyoBJJwgC>>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 29.
- GRIPP, J.; MIELKE, S. L.; OROZCO, L. A. Evolution of the vacuum rabi peaks in a detuned atom-cavity system. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 56, p. 3262–3273, Oct 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.3262>>. Citado na página 40.
- GRYNBERG, G. et al. *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139490849. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=l-l0L8YInA0C>>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 26, 27 e 28.
- HAUS, P. E. P. J. W. *Fundamentals of Nonlinear Optics*. [S.l.: s.n.]. Citado na página 28.
- INTRODUCTION. John Wiley & Sons, Ltd, 2009. 1-11 p. ISBN 9783527628285. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9783527628285.ch1>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- KLAUDER, J.; SKAGERSTAM, B.-S. *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*. [S.l.: s.n.], 1985. ISBN 9971-966-52-2. Citado 3 vezes nas páginas 26, 28 e 29.
- KLAUDER, J.; SUDARSHAN, E. *Fundamentals of Quantum Optics*. Dover Publications, 1968. (Dover books on physics). ISBN 9780486450087. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=rbSfWTrKwnAC>>. Citado na página 31.
- KUROŠ, A. *Higher Algebra*. Mir Publishers, 1980. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=KQ4YAQAAMAAJ>>. Citado na página 71.
- LAMBROPOULOS, P.; PETROSYAN, D. *Peter Lambropoulos, David Petrosyan-Fundamentals of quantum optics and quantum information-Springer (2007)*. [S.l.: s.n.]. ISBN 9783540345718. Citado na página 31.
- LARSON, J.; MAVROGORDATOS, T. The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants. *The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants*, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 29, 33 e 34.
- LOUDON, R. *The Quantum Theory of Light*. OUP Oxford, 2000. ISBN 9780191589782. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=AEkfajgqldoC>>. Citado na página 29.
- M. Suhail Zubairy, M. O. S. *ScullyZubairy, 1ed, 2001-Quantum optics*. Cambridge University Press, 1997. 630 p. ISBN 0521435951, 9780521435956. Disponível em: <https://books.google.com.br/books/about/Quantum_Optics.html?id=20ISsQCKKmQC&redir_esc=y>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 35.

MANDEL, L. Sub-poissonian photon statistics in resonance fluorescence. *Optics Letters*, v. 4, n. 7, p. 205–207, 1979. Citado na página 30.

MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. (EBL-Schweitzer). ISBN 9780521417112. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=FeBix14iM70C>>. Citado na página 25.

MEYSTRE, P.; III, M. S. *Cavity Quantum Electrodynamics: The Strange Theory of Light in a Box*. [S.l.]: Wiley-VCH, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

MILZ, S.; POLLOCK, F. A.; MODI, K. An introduction to operational quantum dynamics. *Open Systems and Information Dynamics*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 24, n. 04, p. 1740016, dez. 2017. ISSN 1793-7191. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S1230161217400169>>. Citado na página 32.

NEW, G. *Introduction to Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781139500760. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=X8OepYTth7EC>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

NEWELL, A. *Nonlinear Optics*. CRC Press, 2018. ISBN 9780429971396. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=EUpaDwAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

ORSZAG, M. *Quantum Optics: Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence*. Springer International Publishing, 2018. ISBN 9783319804774. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Zx6QtgEACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.

PAULA, M. V. S. de; SINESIO, W. W. T.; DODONOV, A. V. Ancilla-assisted generation of photons from vacuum via time-modulation of extracavity qubit. *Entropy*, v. 25, n. 6, 2023. ISSN 1099-4300. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1099-4300/25/6/901>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.

RABI, I. I. On the process of space quantization. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 49, p. 324–328, Feb 1936. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.49.324>>. Citado na página 28.

RABI, I. I. Space quantization in a gyrating magnetic field. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 51, p. 652–654, Apr 1937. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.652>>. Citado na página 28.

RAND, S. Lectures on Light. *Lectures on Light*, 2010. Citado na página 23.

ROBERT, D.; COMBESURE, M. *Coherent States and Applications in Mathematical Physics: Second Edition*. [S.l.: s.n.], 2021. 1–575 p. ISSN 18645887. ISBN 9783030708443. Citado na página 28.

Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Elsevier Science, 2003. 576 p. ISBN 9780080479750, 0080479758. Disponível em: <https://www.google.com.br/books/edition/Nonlinear_Optics/3vHb7WGXmSQC?hl=pt-BR&gbpv=0>. Citado na página 31.

RYE, D. N.; MD, N. A. A. *Many Body Systems of Coupled Dissipative Jaynes-Cummings Cavities*. [S.l.]: US Naval Academy, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 33.

- SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. 1. ed. Addison Wesley, 1993. Hardcover. ISBN 0201539292. Disponível em: <<http://www.worldcat.org/isbn/0201539292>>. Citado na página 69.
- SCALA, G. et al. Beyond the rabi model: Light interactions with polar atomic systems in a cavity. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 104, p. 013722, Jul 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.013722>>. Citado na página 41.
- SCULLY, M. O.; MEYER, G. M.; WALTHER, H. Induced emission due to the quantized motion of ultracold atoms passing through a micromaser cavity. *Physical review letters*, APS, v. 76, n. 22, p. 4144, 1996. Citado na página 22.
- SHIH, Y. *An introduction to quantum optics: Photon and biphoton physics*. [S.l.: s.n.], 2016. 1–448 p. ISSN 0010-7514. ISBN 9781420012484. Citado na página 23.
- SHTYKOV, V. V.; SMOLSKIY, S. M. *Introduction to Quantum Electronics and Nonlinear Optics*. [S.l.: s.n.], 2020. ISBN 9783030376130. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 38.
- SOFTWARE, R. W. *Imsl® Fortran Math Library*. IMSL Numerical Libraries, 2021. Disponível em: <<https://www.imsl.com/products/imsl-fortran-libraries>>. Citado na página 37.
- THEODORIDIS, T.; KRAEMER, J. *Output Coupling in Optical Cavities and Lasers A Quantum Theoretical Approach*. [S.l.: s.n.]. ISBN 9783131450715. Citado na página 33.
- VEDRAL, V. *Modern Foundations of Quantum Optics*. [S.l.: s.n.], 2005. Citado 4 vezes nas páginas 23, 28, 30 e 33.
- VOGEL, W.; WELSCH, D.-G. *Quantum Optics*. [S.l.: s.n.], 2006. ISBN 9783527405077. Citado 4 vezes nas páginas 21, 24, 33 e 34.
- WALLS, D.; MILBURN, G. *Quantum Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Springer Study Edition). ISBN 9783642795046. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=o6nrCAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- WEEDBROOK, C. et al. Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society, v. 84, n. 2, p. 621–669, maio 2012. ISSN 0034-6861. Citado na página 32.
- Wolfgang P. Schleich. *Schleich - Quantum Optics in Phase Space*. Wiley, 2015. 716 p. ISBN 9783527802555, 352780255X. Disponível em: <https://www.google.com.br/books/edition/Quantum_Optics_in_Phase_Space/AUJeCwAAQBAJ?hl=pt-BR&gbpv=0>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.
- ZHANG, Z.-M. et al. Velocity selection for ultracold three-level atoms using two micromaser cavities. *Physical Review A*, APS, v. 60, n. 4, p. 3321, 1999. Citado na página 22.

Apêndices

APÊNDICE A – Teoria de Perturbação Não Degenerada Independente do Tempo

Em diversas circunstâncias que o estudo e conseqüentemente, a pesquisa em mecânica quântica nos leva até funções Hamiltonianas das quais não conseguimos resolvê-las com solução exata, contudo o advento da teoria de perturbação nos permite o encontro da melhor solução com uma acurácia condizente (SAKURAI, 1993).

Logo, o uso dos autovetores e autovalores de um Hamiltoniano não perturbado \hat{H}_0 , podemos caracterizar o sistema pela equação de Schrödinger.

$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (\text{A.1})$$

O conjunto de bases $\{|n\rangle\}$, é completo, isto é a relação de fechamento é satisfeita.

Utilizando agora um Hamiltoniano \hat{H} , independente do tempo, tal que a mesma é constituída de um Hamiltoniano \hat{H}_0 bem definido e um termo perturbativo \hat{V} .

O sistema total formado é descrito com o auxílio de um parâmetro λ real e contínuo que serve para contabilizar o número de vezes que a perturbação \hat{V} é utilizada para os cálculos.

O método explicado nesta seção se baseia na expansão dos autovalores e autovetores em potências de λ ,

$$(\hat{H}_0 + \lambda\hat{V}) |n^{(\lambda)}\rangle = E_n^{(\lambda)} |n^{(\lambda)}\rangle. \quad (\text{A.2})$$

A expansão dos autovalores de energia E_n , cria uma diferença de energia do valor não perturbado $E_n^{(0)}$, logo surge um desvio de energia característico para cada n nível de energia (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1977).

$$\Delta_n \equiv E_n - E_n^{(0)}. \quad (\text{A.3})$$

A expansão dos autovetores $|n\rangle$ e seus respectivos desvios de energia Δ_n em potências de λ ,

$$\Delta_n^{(i)} = \langle n^{(0)} | \hat{V} | n^{(i-1)} \rangle \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.4})$$

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k \neq n} |k^{(0)}\rangle \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \lambda^2 \left(\sum_{k \neq n} \sum_{l \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{kl} V_{ln}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_l^{(0)})} - \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle V_{nn} V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \right). \quad (\text{A.5})$$

Não obstante, este trabalho utilizará apenas a expansão até terceira ordem, tanto para os desvios de energia quanto para os autovetores,

$$\Delta_n^{(i)} = \langle n^{(0)} | \hat{V} | n^{(i-1)} \rangle \quad i = 1, \dots, 3. \quad (\text{A.6})$$

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)} |}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} \hat{V} |n^{(0)}\rangle. \quad (\text{A.7})$$

$$|n^{(2)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)} |}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} (\hat{V} |n^{(1)}\rangle - \Delta_n^{(1)} |n^{(1)}\rangle). \quad (\text{A.8})$$

$$|n^{(3)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{|k^{(0)}\rangle \langle k^{(0)} |}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} (\hat{V} |n^{(2)}\rangle - \Delta_n^{(1)} |n^{(2)}\rangle - \Delta_n^{(2)} |n^{(1)}\rangle). \quad (\text{A.9})$$

A teoria Perturbativa enunciada nesta seção, trata do caso não degenerado de suas autoenergias para os autoestados não perturbados, ou seja, $E_n^{(0)} \neq E_k^{(0)}$.

O caso com degenerescência o método será inválido para tais condições, contudo há formas de se contornar este tipo de situação, em que pode-ser utilizada a Teoria de Perturbação Independente do Tempo Degenerada.

APÊNDICE B – Método de Ferrari para o encontro de raízes de Equações de 4^o

Nosso problema inicia com um polinômio de 4^o, para que assim encontremos as raízes relacionadas ao polinômio citado. Logo, tomemos o polinômio de quarto grau em sua forma mais geral (KUROŠ, 1980).

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \forall a \neq 0.$$

Manipulamos a equação inicial, com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ para a forma,

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Os novos termos são, respectivamente: $A = \frac{b}{a}, B = \frac{c}{a}, C = \frac{d}{a}, D = \frac{e}{a}$.

Fórmula Reduzida

Nesta etapa buscamos a eliminação do termo de terceiro grau, para que assim seja possível o encontro da solução por métodos previamente conhecidos.

Por tanto, com a substituição $x = y - \frac{A}{4}$,

$$\left(y - \frac{A}{4}\right)^4 + A\left(y - \frac{A}{4}\right)^3 + B\left(y - \frac{A}{4}\right)^2 + C\left(y - \frac{A}{4}\right) + D = 0,$$

$$y^4 + \left(B - \frac{3}{8}A^2\right)y^2 + \left(\frac{1}{8}A^3 - \frac{AB}{2} + C\right)y + \left(\frac{A^2B}{16} + D - \frac{3}{256}A^4 - \frac{AC}{4}\right) = 0,$$

$$\therefore y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

A equação obtida, permite que continuemos a dedução do método com $p = B - \frac{3}{8}A^2$, $q = \frac{1}{8}A^3 - \frac{AB}{2} + C$ e $r = \frac{A^2B}{16} + D - \frac{3}{256}A^4 - \frac{AC}{4}$.

Fórmula de Ferrari

O produto final do método é a transformação da equação obtida anteriormente de tal forma que seja possível fatorá-la e resolvê-la por meio de equações de segundo grau.

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \Rightarrow y^4 + py^2 + r = -qy,$$

Somamos o fator $uy^2 + w$ em ambos os lados,

$$y^4 + (p + u)y^2 + r + w = -qy + uy^2 + w, (*)$$

Com ambos os lados fatoráveis, podemos transformá-los em quadrados perfeitos. Por conseguinte, os discriminantes dos polinômios de ambos os lados devem ser nulos.

$$\begin{aligned}(p + u)^2 - 4(r + w) &= 0, \\ q^2 - 4uw &= 0,\end{aligned}$$

Portanto, com as equações obtidas, temos que $w = \frac{q^2}{4u}$. A partir do uso das devidas manipulações encontramos a equação de terceiro grau auxiliar,

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0.$$

A equação obtida, serve como base para a o encontro das raízes da equação inicial proposta, contudo a equação atual é resolvida pelo método de Tartaglia-Cadarno.

A continuação da dedução do método de Ferrari depende que das soluções obtidas ao menos uma seja real, em especial utilizaremos a que é real e positiva.

Tomemos então a raiz positiva, u_p , logo podemos enfim transformar os termos da equação B em quadrados perfeitos.

$$y^4 + (p + u_p)y^2 + r + \frac{q^2}{4u_p} = -qy + u_p y^2 + \frac{q^2}{4u_p},$$

Logo, podemos escrever sob a forma,

$$\left(y^2 + \frac{p + u_p}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{u_p}y - \frac{q}{2\sqrt{u_p}}\right)^2,$$

$$y^2 + \frac{p + u_p}{2} = \pm \left(\sqrt{u_p}y - \frac{q}{2\sqrt{u_p}}\right),$$

Desta última equação, encontramos duas equações de segundo grau, tais que:

$$y^2 - \sqrt{u_p}y + \frac{p + u_p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{u_p}} = 0,$$

$$y^2 + \sqrt{u_p}y + \frac{p + u_p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{u_p}} = 0,$$

Resolvendo as equações de segundo grau obtidas, obtemos como solução para y ,

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{u_p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-u_p - 2p - \frac{2q}{\sqrt{u_p}}},$$

$$y_{3,4} = -\frac{\sqrt{u_p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-u_p - 2p + \frac{2q}{\sqrt{u_p}}},$$

Por fim, a solução em x , ocorre subtraindo $\frac{A}{4}$ das soluções em y .

$$x_{1,2} = -\frac{A}{4} + \frac{\sqrt{u_p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-u_p - 2p - \frac{2q}{\sqrt{u_p}}},$$

$$x_{3,4} = -\frac{A}{4} - \frac{\sqrt{u_p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-u_p - 2p + \frac{2q}{\sqrt{u_p}}}.$$

Prova de que sempre haverá ao menos uma raiz real positiva na equação auxiliar

Seja a nossa função auxiliar sob a forma,

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0,$$

O termo $-q^2$ sempre será negativo, portanto com $q \neq 0$ e aplicando as relações de Gerard para equações de terceiro grau, em especial a que diz que o termo independente é igual ao oposto das raízes da equação.

Logo, com u_1, u_2, u_3 as respectivas raízes, temos

$$-q^2 = -u_1 \cdot u_2 \cdot u_3,$$

$$\therefore q^2 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3.$$

Portanto, existe ao menos uma raiz $u_i > 0$, além de que as possibilidades são: As três raízes são reais e distintas, uma raiz é real e as outras são complexas conjugadas, três raízes reais com duas iguais.

Fórmula de Tartaglia-Cardano (1526)

Seja o polinômio de terceiro grau em sua forma mais geral.

$$\tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} = 0, \quad \forall \tilde{a} \neq 0.$$

Manipulamos a equação inicial, com $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{R}$ para a forma,

$$x^3 + \tilde{A}x^2 + \tilde{B}x + \tilde{C} = 0.$$

Os novos termos são respectivamente: $\tilde{A} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}, \tilde{B} = \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}, \tilde{C} = \frac{\tilde{d}}{\tilde{a}}$.

Buscamos aqui, retirar o segundo termo de maior ordem, isto é, o termo de segundo grau.

Realizamos a substituição, $x = y - \frac{\tilde{A}}{3}$,

$$\left(y - \frac{\tilde{A}}{3}\right)^3 + \tilde{A}\left(y - \frac{\tilde{A}}{3}\right)^2 + \tilde{B}\left(y - \frac{\tilde{A}}{3}\right) + \tilde{C} = 0,$$

$$y^3 - \frac{\tilde{A}^2}{3}y + \frac{2\tilde{A}^3}{27} + \tilde{B}y - \frac{B\tilde{A}}{3} + \tilde{C} = 0,$$

$$\therefore y^3 + py + q = 0,$$

Com termos $\tilde{p} = \tilde{B} - \frac{\tilde{A}^2}{3}$ e $\tilde{q} = \tilde{C} - \frac{\tilde{A}\tilde{B}}{3} + \frac{2\tilde{A}^3}{27}$.

Rescrevendo $y = u + w$, temos então.

$$(u + w)^3 + p(u + w) + q = 0,$$

$$u^3 + w^3 + (3uw + p)(u + w) + q = 0,$$

$$\therefore u^3 + w^3 + q = -(3uw + p)(u + w),$$

Para que ambos os lados sejam fatoráveis, obtemos

$$\tilde{p} = -3uw,$$

$$\tilde{q} = -(u^3 + w^3)$$

Com às devidas manipulações encontramos os termos,

$$u^3 v^3 = -\frac{\tilde{p}^3}{27}.$$

Novamente, pelas relações de Gerard temos que em uma equação de segundo grau, a soma das raízes é igual ao negativo do coeficiente do termo de grau 1 dividido pelo coeficiente do termo de grau 2, e o produto das raízes é igual ao coeficiente do termo de grau 0 dividido pelo coeficiente do termo de grau 2.

Portanto,

$$u^3 + v^3 = -\tilde{q},$$

$$u^3 v^3 = -\frac{\tilde{p}^3}{27},$$

Logo, podemos montar uma equação de segundo grau auxiliar sob a forma:

$$s^2 - (u^3 + v^3)s + (u^3 v^3) = 0,$$

$$s^2 + \tilde{q}s - \frac{\tilde{p}^3}{27} = 0,$$

$$s_{1,2} = -\frac{\tilde{q}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{q}^2 + 4 \cdot \frac{\tilde{p}^3}{27}} \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{\tilde{q}}{2} \pm \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}.$$

Atribuindo cada solução temos, então

$$u^3 = -\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}},$$

$$v^3 = -\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}.$$

Soluções para u e v com a fórmula de Moivre:

$$u = \left\{ \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}}, e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}}, e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}} \right\}.$$

$$u = \left\{ \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}}, e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}}, e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}} \right\}.$$

Como $y = u + v$, e com $e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}},$$

$$y_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}}\right),$$

$$y_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}}\right)$$

De maneira equivalente,

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right),$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right).$$

Com $\theta = \arccos\left(-\frac{q}{2\rho}\right)$ e $\rho = \sqrt{\frac{\tilde{q}}{4} + \sqrt{\frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27}}}$.

Por fim,

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{A}{3},$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{A}{3},$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) - \frac{A}{3}.$$

Anexos

ANEXO A – Resultado Analítico TPNDIT

A aplicação da teoria de perturbação enunciada e explicitada no Apêndice A, obtemos então as respectivas correções das autoenergias e autoestados, para os estados fundamental e excitado.

A.1 Correções até Terceira Ordem

Estado $|g, n\rangle$ e autoenergia $\Delta_{g,n}$

$$|g, n^{(1)}\rangle = g \left(\frac{\sqrt{n}}{\nu - \Omega} |e, n - 1^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{n+1}}{\nu + \Omega} |e, n + 1^{(0)}\rangle \right),$$

$$|g, n^{(2)}\rangle = g^2 \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2\nu(\nu - \Omega)} |g, n - 2^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2\nu(\nu + \Omega)} |g, n + 2^{(0)}\rangle \right),$$

$$\begin{aligned} |g, n^{(3)}\rangle = & g^3 \frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{2\nu(\nu - \Omega)(3\nu - \Omega)} |e, n - 3^{(0)}\rangle \\ & + g^3 \left(\frac{n+1}{\nu + \Omega} + \frac{n-1}{2\nu} - \frac{n}{\nu - \Omega} \right) \frac{\sqrt{n}}{(\nu - \Omega)^2} |e, n - 1^{(0)}\rangle \\ & - g^3 \left(\frac{n}{\nu - \Omega} - \frac{n+1}{\nu + \Omega} + \frac{n+2}{2\nu} \right) \frac{\sqrt{n+1}}{(\nu + \Omega)^2} |e, n + 1^{(0)}\rangle \\ & - g^3 \frac{\sqrt{(n+3)(n+2)(n+1)}}{2\nu(\nu + \Omega)(3\nu + \Omega)} |e, n + 3^{(0)}\rangle, \end{aligned}$$

$$\Delta_g^{(1)} = 0,$$

$$\Delta_g^{(2)} = g^2 \left(\frac{n}{\nu - \Omega} - \frac{n+1}{\nu + \Omega} \right),$$

$$\Delta_g^{(3)} = 0,$$

Autoestado $|g, n\rangle$ e autoenergia $E_{g,n}$ corrigidos com as contribuições até terceira

ordem.

$$\begin{aligned}
|g, n\rangle &= \frac{g^3 \sqrt{n(n-1)(n-2)}}{2\nu(\nu-\Omega)(3\nu-\Omega)} |e, n-3^{(0)}\rangle + \frac{g^2 \sqrt{n(n-1)}}{2\nu(\nu-\Omega)} |g, n-2^{(0)}\rangle \\
&+ g^3 \left[\left(\frac{n+1}{\nu+\Omega} + \frac{n-1}{2\nu} - \frac{n}{\nu-\Omega} \right) \frac{1}{\nu-\Omega} + \frac{1}{g^2} \right] \frac{\sqrt{n}}{\nu-\Omega} |e, n-1^{(0)}\rangle \\
&+ \frac{g^2 \sqrt{(n+2)(n+1)}}{2\nu(\nu+\Omega)} |g, n+2^{(0)}\rangle \\
&- g^3 \left[\frac{1}{g^2} + \left(\frac{n}{\nu-\Omega} - \frac{n+1}{\nu+\Omega} + \frac{n+2}{2\nu} \right) \frac{1}{\nu+\Omega} \right] \frac{\sqrt{n+1}}{\nu+\Omega} |e, n+1^{(0)}\rangle \\
&- \frac{g^3 \sqrt{(n+3)(n+2)(n+1)}}{2\nu(\nu+\Omega)(3\nu+\Omega)} |e, n+3^{(0)}\rangle
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$E_{g,n}^{(3)} = \nu n + g^2 \left(\frac{n}{\nu-\Omega} - \frac{n+1}{\nu+\Omega} \right). \tag{A.2}$$

Estado $|e, n\rangle$ e autoenergia $\Delta_{e,n}$

$$|e, n^{(1)}\rangle = g \left(\frac{\sqrt{n}}{\Omega+\nu} |g, n-1^{(0)}\rangle + \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega-\nu} |g, n+1^{(0)}\rangle \right),$$

$$|e, n^{(2)}\rangle = g^2 \left(\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2\nu(\Omega+\nu)} |e, n-2^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{(n+2)(n+1)}}{2\nu(\Omega-\nu)} |e, n+2^{(0)}\rangle \right),$$

$$\begin{aligned}
|e, n^{(3)}\rangle &= g^3 \frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{2\nu(\Omega+\nu)(\Omega+3\nu)} |g, n-3^{(0)}\rangle \\
&+ g^3 \left(-\frac{n+1}{\Omega-\nu} - \frac{n}{\Omega+\nu} + \frac{n-1}{2\nu} \right) \frac{\sqrt{n}}{(\Omega+\nu)^2} |g, n-1^{(0)}\rangle \\
&- g^3 \left(\frac{n+1}{\Omega-\nu} + \frac{n}{\Omega+\nu} + \frac{n+2}{2\nu} \right) \frac{\sqrt{n+1}}{(\Omega-\nu)^2} |g, n+1^{(0)}\rangle \\
&- g^3 \frac{\sqrt{(n+3)(n+2)(n+1)}}{2\nu(\Omega-\nu)(\Omega-3\nu)} |g, n+3^{(0)}\rangle,
\end{aligned}$$

$$\Delta_e^{(1)} = 0,$$

$$\Delta_e^{(2)} = g^2 \left(\frac{n+1}{\Omega-\nu} + \frac{n}{\Omega+\nu} \right),$$

$$\Delta_e^{(3)} = 0.$$

Autoestado $|e, n\rangle$ e autoenergia $E_{e,n}$ corrigidos com as contribuições até terceira ordem.

$$\begin{aligned}
|e, n\rangle = & \frac{g^3 \sqrt{n(n-1)(n-2)}}{2\nu(\Omega+\nu)(\Omega+3\nu)} |g, n-3^{(0)}\rangle + \frac{g^2 \sqrt{n(n-1)}}{2\nu(\Omega+\nu)} |e, n-2^{(0)}\rangle \\
& + g^3 \left[\left(\frac{n-1}{2\nu} - \frac{n+1}{\Omega-\nu} - \frac{n}{\Omega+\nu} \right) \frac{1}{(\Omega+\nu)} + \frac{1}{g^2} \right] \frac{\sqrt{n}}{(\Omega+\nu)} |g, n-1^{(0)}\rangle \\
& + g^3 \left[\frac{1}{g^2} - \left(\frac{n+1}{\Omega-\nu} + \frac{n}{\Omega+\nu} + \frac{n+2}{2\nu} \right) \frac{1}{\Omega-\nu} \right] \frac{\sqrt{n+1}}{\Omega-\nu} |g, n+1^{(0)}\rangle \\
& - \frac{g^2 \sqrt{(n+2)(n+1)}}{2\nu(\Omega-\nu)} |e, n+2^{(0)}\rangle \\
& - \frac{g^3 \sqrt{(n+3)(n+2)(n+1)}}{2\nu(\Omega-\nu)(\Omega-3\nu)} |g, n+3^{(0)}\rangle,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$E_{e,n}^{(3)} = \nu n + \Omega + g^2 \left(\frac{n+1}{\Omega-\nu} + \frac{n}{\Omega+\nu} \right). \tag{A.4}$$

Em mãos das autoenergias e dos autoestados corrigidos, nota-se que o comportamento em geral das funções encontradas são bem definidos para valores, dos quais a frequência do átomo Ω , seja diferente de ν e 3ν , visto que nestes valores a teoria de perturbação irá falhar, invalidando o método para estes intervalos propiciando a imprecisão dos resultados pela teoria de perturbação aplicada.

ANEXO B – Relações Uteis

B.0.1 Operadores de Pauli

$$\hat{\sigma}_e = |e\rangle \langle e| = \frac{(R - \Delta_-)}{2R} |\phi_+\rangle \langle \phi_+| - \frac{g}{R} |\phi_+\rangle \langle \phi_-| - \frac{g}{R} |\phi_- \rangle \langle \phi_+| + \frac{(R + \Delta_-)}{2R} |\phi_- \rangle \langle \phi_-|, \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e| = \frac{(R - \Delta_-)}{2R} |\phi_- \rangle \langle \phi_+| - \frac{g}{R} |\phi_- \rangle \langle \phi_-| + \frac{g}{R} |\phi_+\rangle \langle \phi_+| - \frac{(R + \Delta_-)}{2R} |\phi_+\rangle \langle \phi_-|, \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g| = \frac{(R - \Delta_-)}{2R} |\phi_+\rangle \langle \phi_-| + \frac{g}{R} |\phi_+\rangle \langle \phi_+| - \frac{g}{R} |\phi_- \rangle \langle \phi_-| - \frac{(R + \Delta_-)}{2R} |\phi_- \rangle \langle \phi_+|, \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{\sigma}_g = |g\rangle \langle g| = \frac{2g^2}{R(R + \Delta_-)} |\phi_- \rangle \langle \phi_-| + \frac{g}{R} |\phi_- \rangle \langle \phi_+| + \frac{g}{R} |\phi_+\rangle \langle \phi_-| + \frac{2g^2}{R(R - \Delta_-)} |\phi_+\rangle \langle \phi_+|, \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{\sigma}_z = -\frac{\Delta_-}{R} |\phi_+\rangle \langle \phi_+| - \frac{2g}{R} |\phi_+\rangle \langle \phi_-| - \frac{2g}{R} |\phi_- \rangle \langle \phi_+| + \frac{\Delta_-}{R} |\phi_- \rangle \langle \phi_-|. \quad (\text{B.5})$$

B.0.2 Ação dos Operadores em $\hat{\rho}_1$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 \hat{\sigma}_+ = e^{-t\gamma\phi} & \left[\left(A \frac{g}{R} - \frac{(R + \Delta_-)}{2R} e^{-itRC} \right) |\phi_+\rangle \langle \phi_+| \right. \\ & + \left(A \frac{(R - \Delta_-)}{2R} - \frac{g}{R} e^{-itRC} \right) |\phi_+\rangle \langle \phi_-| \\ & + \left(\frac{g}{R} e^{itRC^*} - \frac{(R + \Delta_-)}{2R} B \right) |\phi_- \rangle \langle \phi_+| \\ & \left. + \left(\frac{(R - \Delta_-)}{2R} e^{itRC^*} - \frac{g}{R} B \right) |\phi_- \rangle \langle \phi_-| \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 \hat{\sigma}_- = e^{-t\gamma\phi} & \left[\left(A \frac{g}{R} + \frac{(R - \Delta_-)}{2R} e^{-itRC} \right) |\phi_+\rangle \langle \phi_+| \right. \\ & + \left(-A \frac{(R + \Delta_-)}{2R} - \frac{g}{R} e^{-itRC} \right) |\phi_+\rangle \langle \phi_-| \\ & + \left(\frac{g}{R} e^{itRC^*} + B \frac{(R - \Delta_-)}{2R} \right) |\phi_- \rangle \langle \phi_+| \\ & \left. + \left(-\frac{(R + \Delta_-)}{2R} e^{itRC^*} - B \frac{g}{R} \right) |\phi_- \rangle \langle \phi_-| \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 \hat{\sigma}_g = e^{-t\gamma\phi} & \left[\left(+\frac{g}{R} e^{-itRC} + A \frac{2g^2}{R(R-\Delta_-)} \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_+| \right. \\
& + \left(A \frac{g}{R} + \frac{2g^2}{R(R+\Delta_-)} e^{-itRC} \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_-| \\
& + \left(+B \frac{g}{R} + \frac{2g^2}{R(R-\Delta_-)} + e^{itRC^*} \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_+| \\
& \left. + \left(\frac{g}{R} e^{itRC^*} + B \frac{2g^2}{R(R+\Delta_-)} \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \right]
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_g \hat{\rho}_1 = e^{-t\gamma\phi} & \left[\left(+\frac{2g^2}{R(R-\Delta_-)} A + \frac{g}{R} e^{itRC^*} \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_+| \right. \\
& + \left(\frac{2g^2}{R(R-\Delta_-)} e^{-itRC} + \frac{g}{R} B \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_-| \\
& + \left(\frac{2g^2}{R(R+\Delta_-)} e^{itRC^*} + \frac{g}{R} A \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_+| \\
& \left. + \left(\frac{g}{R} e^{-itRC} + \frac{2g^2}{R(R+\Delta_-)} B \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \right]
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 \hat{\sigma}_e = e^{-t\gamma\phi} & \left[\left(\frac{(R-\Delta_-)}{2R} A - \frac{g}{R} e^{-itRC} \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_+| \right. \\
& + \left(\frac{(R+\Delta_-)}{2R} e^{-itRC} - \frac{g}{R} A \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_-| \\
& + \left(\frac{(R-\Delta_-)}{2R} e^{itRC^*} - \frac{g}{R} B \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_+| \\
& \left. + \left(\frac{(R+\Delta_-)}{2R} B - \frac{g}{R} e^{itRC^*} \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \right]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_e \hat{\rho}_1 = e^{-t\gamma\phi} & \left[\frac{(R-\Delta_-)}{2R} A |\phi_+\rangle \langle\phi_+| - \frac{g}{R} A |\phi_-\rangle \langle\phi_+| \right. \\
& + B \left(-\frac{g}{R} |\phi_+\rangle \langle\phi_-| + \frac{(R+\Delta_-)}{2R} |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \right) \\
& + e^{-itRC} \left(\frac{(R-\Delta_-)}{2R} |\phi_+\rangle \langle\phi_-| - \frac{g}{R} |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \right) \\
& \left. + e^{itRC^*} \left(-\frac{g}{R} |\phi_+\rangle \langle\phi_+| + \frac{(R+\Delta_-)}{2R} |\phi_-\rangle \langle\phi_+| \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_z \hat{\rho}_1 \hat{\sigma}_z = e^{-t\gamma\phi} & \left[\left(+\frac{2g\Delta_-}{R^2} (e^{itRC^*} + e^{-itRC}) + B \left(\frac{2g}{R}\right)^2 + A \left(\frac{\Delta_-}{R}\right)^2 \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_+| \right. \\
& \left((A-B) \frac{2g\Delta_-}{R^2} + \left(\frac{2g}{R}\right)^2 e^{itRC^*} - \left(\frac{\Delta_-}{R}\right)^2 e^{-itRC} \right) |\phi_+\rangle \langle\phi_-| \\
& + \left(\left(\frac{2g}{R}\right)^2 e^{-itRC} - \left(\frac{\Delta_-}{R}\right)^2 e^{itRC^*} + (A-B) \frac{2g\Delta_-}{R^2} \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_+| \\
& \left. \left(A \left(\frac{2g}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_-}{R}\right)^2 B - \frac{2g\Delta_-}{R^2} (e^{itRC^*} + e^{-itRC}) \right) |\phi_-\rangle \langle\phi_-| \right] \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

B.1 Demais Relações utilizadas

$$\frac{(R - \Delta_-)(R + \Delta_-)}{2R} = \left(\frac{g}{R}\right)^2, \quad (\text{B.13})$$

$$\left[\frac{(R - \Delta_-)}{2R} \right]^2 = \frac{(R - \Delta_-)}{2R} - \left(\frac{g}{R}\right)^2, \quad (\text{B.14})$$

$$\left[\frac{(R + \Delta_-)}{2R} \right]^2 = \frac{(R + \Delta_-)}{2R} - \left(\frac{g}{R}\right)^2. \quad (\text{B.15})$$

ANEXO C – Teoria de Perturbação não-degenerada Independente do Tempo Aplicada à Base Específica

As correções para as autofunções $|s_{N,i}\rangle$ com suas respectivas correções de energia, através do uso da TPNDIT,

$$|s_{N,i}^{(1)}\rangle = \phi_{N,i}^{(0)} \frac{g\sqrt{N+1}}{\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu} |e, N+1\rangle + \phi_{N,i}^{(3)} \frac{g\sqrt{N-3}}{\Lambda_{N,i} + 4\nu} |g, N-4\rangle,$$

$$|s_{N,i}^{(2)}\rangle = \left[g^2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{\Lambda_{N,i} - \Lambda_{N,j}} \left[\frac{\phi_{N,i}^{(0)} \phi_{N,j}^{(0)} (N+1)}{\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu} + \frac{\phi_{N,i}^{(3)} \phi_{N,j}^{(3)} (N-3)}{\Lambda_{N,i} + 4\nu} \right] |s_{N,j}\rangle \right. \\ \left. + g^2 \frac{\phi_{N,i}^{(3)} \sqrt{(N-3)(N-4)}}{(\Lambda_{N,i} + 5\nu - \Omega)(\Lambda_{N,i} + 4\nu)} |e, N-5\rangle + g^2 \frac{\phi_{N,i}^{(0)} \sqrt{(N+1)(N+2)}}{(\Lambda_{N,i} - 2\nu)(\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu)} |g, N+2\rangle \right] \\ \Gamma_{ij} \equiv \sum_{j \neq i} \frac{g^3}{\Lambda_{N,i} - \Lambda_{N,j}} \left[\frac{\phi_{N,i}^{(0)} \phi_{N,j}^{(0)} (N+1)}{\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu} + \frac{\phi_{N,i}^{(3)} \phi_{N,j}^{(3)} (N-3)}{\Lambda_{N,i} + 4\nu} \right],$$

$$|s_{N,i}^{(3)}\rangle = \left\{ + \frac{g^3 \phi_{N,i}^{(3)} \sqrt{(N-3)(N-4)(N-5)}}{(\Lambda_{N,i} + 5\nu - \Omega)(\Lambda_{N,i} + 4\nu)(\Lambda_{N,i} + 6\nu)} |g, N-6\rangle \right. \\ \left. + \left(\frac{g^3 \phi_{N,i}^{(3)} (N-4) \sqrt{(N-3)}}{(\Lambda_{N,i} + 5\nu - \Omega)(\Lambda_{N,i} + 4\nu)^2} + \Gamma_{ij} \frac{\phi_{N,j}^{(3)} \sqrt{N-3}}{\Lambda_{N,i} + 4\nu} \right) |g, N-4\rangle \right. \\ \left. + \frac{g^3 \phi_{N,i}^{(0)} \sqrt{(N+1)(N+2)(N+3)}}{(\Lambda_{N,i} - 2\nu)(\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu)(\Lambda_{N,i} - 3\nu - \Omega)} |e, N+3\rangle \right. \\ \left. + \left(\Gamma_{ij} \frac{\phi_{N,j}^{(0)} \sqrt{N+1}}{\Lambda_{N,i} - \nu - \Omega} + \frac{g^3 \phi_{N,i}^{(0)} (N+2) \sqrt{(N+1)}}{(\Lambda_{N,i} - 2\nu)(\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu)^2} \right) |e, N+1\rangle \right. \\ \left. - g^3 \sum_{k \neq i} \frac{1}{\Lambda_{N,i} - \Lambda_{N,k}} \left(\frac{\phi_{N,i}^{(0)2} (N+1)}{\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu} + \frac{\phi_{N,i}^{(3)2} (N-3)}{\Lambda_{N,i} + 4\nu} \right) \left(\phi_{N,i}^{(0)} \frac{g\sqrt{N+1}}{\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu} + \phi_{N,i}^{(3)} \frac{g\sqrt{N-3}}{\Lambda_{N,i} + 4\nu} \right) |s_{N,k}\rangle \right\}$$

$$\Delta_{N,i}^{(1)} = \langle s_{N,i} | \hat{V} |s_{N,i}^{(0)}\rangle = 0,$$

$$\Delta_{N,i}^{(2)} = g^2 \left[\frac{\phi_{N,i}^{(0)2} (N+1)}{\Lambda_{N,i} - \Omega - \nu} + \frac{\phi_{N,i}^{(3)2} (N-3)}{\Lambda_{N,i} + 4\nu} \right],$$

$$\Delta_{N,i}^{(3)} = \langle s_{N,i} | \hat{V} |s_{N,i}^{(2)}\rangle = 0.$$

Nota-se, então, que com a especificação de base utilizada no método, conseguimos contornar a falha da TPNDIT surgida do método convencional, possibilitando então a caracterização da dinâmica do sistema de forma analítica.

Tal afirmação decorre ao confirmarmos que os autovalores $\Lambda_{N,i}$ tornam a equação característica válida, isto é, encontramos a igualdade de ambos os lados da equação.