



**CIRCUITO HIPERCAÓTICO HEPTADIMENSIONAL  
SUBATUADO PARA TELECOMUNICAÇÃO  
SEGURA**

**FELIPE OFUGI HARA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CIRCUITO HIPERCAÓTICO HEPTADIMENSIONAL  
SUBATUADO PARA TELECOMUNICAÇÃO  
SEGURA**

**FELIPE OFUGI HARA**

**Orientador: PROF. DR. JOSÉ ALFREDO RUIZ VARGAS**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PUBLICAÇÃO -  
BRASÍLIA-DF, 8 DE DEZEMBRO DE 2020.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CIRCUITO HIPERCAÓTICO HEPTADIMENSIONAL  
SUBATUADO PARA TELECOMUNICAÇÃO  
SEGURA**

**FELIPE OFUGI HARA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO ACADÊMICO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO ELETRICISTA.

**APROVADA POR:**

Prof. Dr. José Alfredo Ruiz Vargas  
Orientador - ENE/UnB

Prof. Dr. Guillermo Alvarez Bestard  
Membro - FGA/UnB

Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal  
Membro - UFERSA

**BRASÍLIA, 8 DE DEZEMBRO DE 2020.**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

FELIPE OFUGI HARA

**Circuito Hipercaótico Heptadimensional Subatuado para Telecomunicação Segura**  
**2020xv, 90p., 201x297 mm**

(ENE/FT-UnB/FT/UnB, Engenheiro Eletricista, Engenharia Elétrica, 2020)

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Elétrica

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

HARA, F. O. Circuito Hipercaótico Heptadimensional Subatuado para Telecomunicação Segura. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica, Publicação, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2020. 90p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Felipe Ofugi Hara

TÍTULO: Circuito Hipercaótico Heptadimensional Subatuado para Telecomunicação Segura.

GRAU: Engenheiro Eletricista ANO: 2020

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste trabalho de conclusão de curso e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Felipe Ofugi Hara

UnB - Asa Norte, Brasília - DF, 70910-900

# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Neide, ao meu pai Jorge e à minha irmã Lívia por todo apoio durante a minha jornada até aqui.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. José Alfredo Ruiz Vargas, pela oportunidade e agradeço ao doutorando Kevin Herman Muraro Gularte por todo o auxílio prestado no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço à Deus por tudo o que me foi proporcionado.

Muito Obrigado!

# Resumo

Neste trabalho propõe-se um esquema de sincronização subatuado para um sistema hipercaótico heptadimensional de terceira ordem com aplicação em telecomunicação segura. A sincronização é feita entre dois sistemas hipercaóticos com condições iniciais distintas, denominados sistemas mestre e escravo. Quando a sincronização é realizada, pela convergência do sistema escravo para o sistema mestre, torna-se possível utilizar este esquema para estabelecer uma comunicação segura pois ele possibilita a criptografia e a transmissão do sinal no sistema mestre e a sua recuperação no sistema escravo. Em comparação com outros estudos encontrados na literatura, o esquema proposto possui uma maior simplicidade pois considera um controle proporcional e precisa de somente um sinal de controle em uma das equações de estado do sistema enquanto nos outros estudos são necessários sete sinais de controle, sendo um em cada equação de estado. Esta maior simplicidade possibilita uma implementação prática mais simples, fazendo uso de componentes de eletrônica analógica de baixo custo. Além disso, o esquema proposto permite a transmissão segura de até seis sinais simultaneamente e possui robustez à presença de distúrbios limitados, que são inerentes à sua implementação prática. A sincronização dos sistemas com a presença de um erro limitado e a sua robustez à presença de distúrbios são asseguradas pela teoria de estabilidade de Lyapunov e a verificação e a validação do esquema proposto foram realizadas por meio de simulações nos *Softwares* Matlab/Simulink e Multisim.

**Palavras-chave** - Análise de Lyapunov, caos analógico, comunicação segura, sistema hipercaótico heptadimensional, controle proporcional.

**Keywords** - Lyapunov analysis, analog chaos, secure communication, seven-dimensional hyperchaotic system, proportional control.

# Abstract

This work proposes an underactuated synchronization scheme for secure telecommunication based on a third-order seven-dimensional hyperchaotic system. The Synchronization is done between two systems called master and slave with different initial conditions. When synchronization is performed, due to the convergence of the slave system to the master system, it is possible to use this scheme to establish a secure communication because it allows the encryption and transmission of the signal in the master system and its recovery in the slave system. In comparison with other studies found in the literature, the proposed scheme has greater simplicity because it performs a proportional control and needs only one control signal in one of the system's state equations while in the other studies seven control signals are needed, one in each state equation. This greater simplicity enables a simpler practical implementation, making use of low-cost analog electronics components. In addition, the proposed scheme allows the safe transmission of up to six signals simultaneously and is robust to the presence of limited disturbances, which are inherent to its practical implementation. The synchronization of the systems with the presence of a bounded error and their robustness to the presence of disturbances are ensured by Lyapunov's theory and the verification and validation of the proposed scheme were carried out through simulations using Matlab/Simulink and Multisim software.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	REVISÃO DA LITERATURA .....	1
1.2	CONTRIBUIÇÃO .....	4
1.3	OBJETIVOS.....	5
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	5
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES E CONCEITOS PRELIMINARES</b> .....	<b>7</b>
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS .....	7
2.2	ESCALONAMENTO .....	9
2.3	TEORIA DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV .....	10
2.4	SISTEMAS CAÓTICOS E HIPERCAÓTICOS .....	11
2.5	SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS .....	12
<b>3</b>	<b>SINCRONIZAÇÃO SUBATUADA DE UM SISTEMA HIPERCAÓTICO HEPTADIMENSI- ONAL BASEADA EM UM CONTROLE PROPORCIONAL PARA APLICAÇÃO EM CO- MUNICAÇÃO SEGURA</b> .....	<b>14</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	14
3.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	15
3.3	EQUAÇÃO DE ERRO DE SINCRONIZAÇÃO E SINAL DE CONTROLE PROPOSTO	17
3.4	APLICAÇÃO DO ESQUEMA DE SINCRONIZAÇÃO EM TELECOMUNICAÇÃO SEGURA .....	24
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES</b> .....	<b>26</b>
4.1	SIMULAÇÃO USANDO O MATLAB/SIMULINK .....	26
4.2	SIMULAÇÃO UTILIZANDO O MULTISIM .....	44
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>DIAGRAMA DE BLOCOS DO SIMULINK</b> .....	<b>63</b>
<b>B</b>	<b>CÓDIGOS DAS SIMULAÇÕES NO MATLAB</b> .....	<b>64</b>



# LISTA DE FIGURAS

3.1	Representação em diagrama de blocos de um esquema de mascaramento caótico aditivo .....	25
4.1	Sinal mensagem $m_1(t)$ inserido no primeiro estado do sistema.....	27
4.2	Sinal mensagem $m_2(t)$ inserido no terceiro estado do sistema.....	28
4.3	Sinal mensagem $m_3(t)$ inserido no quarto estado do sistema.....	28
4.4	Sinal mensagem $m_4(t)$ inserido no quinto estado do sistema.....	29
4.5	Sinal mensagem $m_5(t)$ inserido no sexto estado do sistema.....	29
4.6	Sinal mensagem $m_6(t)$ inserido no sétimo estado do sistema.....	30
4.7	Desempenho da sincronização de $x_1s$ .....	31
4.8	Desempenho da sincronização de $x_2s$ .....	31
4.9	Desempenho da sincronização de $x_3s$ .....	32
4.10	Desempenho da sincronização de $x_4s$ .....	32
4.11	Desempenho da sincronização de $x_5s$ .....	33
4.12	Desempenho da sincronização de $x_6s$ .....	33
4.13	Desempenho da sincronização de $x_7s$ .....	34
4.14	Comparação entre a mensagem original $m_1(t)$ e a mensagem criptografada $r_1(t)$ .	35
4.15	Comparação entre a mensagem original $m_2(t)$ e a mensagem criptografada $r_2(t)$ .	35
4.16	Comparação entre a mensagem original $m_3(t)$ e a mensagem criptografada $r_3(t)$ .	36
4.17	Comparação entre a mensagem original $m_4(t)$ e a mensagem criptografada $r_4(t)$ .	36
4.18	Comparação entre a mensagem original $m_5(t)$ e a mensagem criptografada $r_5(t)$ .	37
4.19	Comparação entre a mensagem original $m_6(t)$ e a mensagem criptografada $r_6(t)$ .	37
4.20	Comparação entre a mensagem original $m_1(t)$ e a mensagem recuperada $\hat{m}_1(t)$ ...	38
4.21	Comparação entre a mensagem original $m_2(t)$ e a mensagem recuperada $\hat{m}_2(t)$ ...	38
4.22	Comparação entre a mensagem original $m_3(t)$ e a mensagem recuperada $\hat{m}_3(t)$ ...	39
4.23	Comparação entre a mensagem original $m_4(t)$ e a mensagem recuperada $\hat{m}_4(t)$ ...	39
4.24	Comparação entre a mensagem original $m_5(t)$ e a mensagem recuperada $\hat{m}_5(t)$ ...	40
4.25	Comparação entre a mensagem original $m_6(t)$ e a mensagem recuperada $\hat{m}_6(t)$ ...	40
4.26	Erro entre $\hat{m}_1(t)$ e $m_1(t)$ .....	41
4.27	Erro entre $\hat{m}_2(t)$ e $m_2(t)$ .....	41
4.28	Erro entre $\hat{m}_3(t)$ e $m_3(t)$ .....	42
4.29	Erro entre $\hat{m}_4(t)$ e $m_4(t)$ .....	42
4.30	Erro entre $\hat{m}_5(t)$ e $m_5(t)$ .....	43
4.31	Erro entre $\hat{m}_6(t)$ e $m_6(t)$ .....	43

4.32	Circuitos para a obtenção da mensagem criptografada $s(t)$ , da mensagem recuperada $\hat{m}(t)$ e do erro $e(t)$ .....	45
4.33	Planta do sistema mestre.....	46
4.34	Planta do sistema escravo .....	47
4.35	Circuito de controle.....	48
4.36	Desempenho de sincronização de $x_{1s}(t)$ .....	49
4.37	Desempenho de sincronização de $x_{2s}(t)$ .....	49
4.38	Desempenho de sincronização de $x_{3s}(t)$ .....	50
4.39	Desempenho de sincronização de $x_{4s}(t)$ .....	50
4.40	Desempenho de sincronização de $x_{5s}(t)$ .....	51
4.41	Desempenho de sincronização de $x_{6s}(t)$ .....	51
4.42	Desempenho de sincronização de $x_{7s}(t)$ .....	52
4.43	Mensagem original $m(t)$ e mensagem criptografada $s(t)$ .....	52
4.44	Mensagem original $m(t)$ e mensagem recuperada $\hat{m}(t)$ .....	53
4.45	Erro entre a mensagem original $m(t)$ e mensagem recuperada $\hat{m}(t)$ .....	54
A.1	Diagrama de blocos no Simulink .....	63

# LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
$\forall$	Para qualquer que seja
$\  \quad \ $	Norma
$\Rightarrow$	Implica que
$\exists$	Existe
$\in$	É elemento de
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\infty$	Infinito
$s$	"Subscrito" Escravo
$m$	"Subscrito" Mestre
$*$	"Sobrescrito" Ponto de equilíbrio
$-$	"Sobrescrito" Limitante superior

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Revisão da literatura

A teoria do caos é o campo da matemática destinado a estudar os sistemas dinâmicos cujos estados são governados, em sua maioria, por leis determinísticas e possuem como principais características uma alta sensibilidade às condições iniciais, um comportamento não linear e um comportamento aparentemente aleatório, o que os torna imprevisíveis a longo prazo (STROGATZ, 2018). Estes sistemas dinâmicos, conhecidos como sistemas caóticos, possuem aplicações em diversas áreas que incluem gestão de crises pandêmicas como o atual surto de COVID-19 (MANGIAROTTI et al., 2020), sistemas físicos (ALI et al., 2020) (WANG; CHEN; JING, 2019), químicos (AWAL; BULLARA; EPSTEIN, 2019) (VARAN; AKGUL, 2018), meteorológicos (ZELEŇÁKOVÁ et al., 2018), financeiros (HUANG; CAO, 2017) (VARGAS; GRZEIDAK; HEMERLY, 2015), biológicos (HUESO et al., 2018), fluxo de fluidos (SHIRMOHAMMADI; TOHIDI, 2019), tráfego rodoviário (CHENG et al., 2017), criptografia de imagens (AL-HAZAIMEH et al., 2019) (FARAH et al., 2020), telecomunicação segura (YU; WANG et al., 2019) (NWACHIOMA et al., 2019), entre outros.

No uso comum a palavra “caos” é utilizada para se referir a um estado de desordem, porém os sistemas caóticos podem ser definidos de uma maneira mais precisa. Uma definição amplamente utilizada é a definição formulada por Robert L. Devaney (DEVANEY, 2008) que diz que um sistema dinâmico  $f$  é classificado como caótico se:

- $f$  é transitivo;
- $f$  possui órbitas periódicas densas;
- $f$  possui uma dependência sensível às condições iniciais.

Nos sistemas caóticos, diferenças pequenas nas condições iniciais como as causadas por arredondamentos em cálculos numéricos e computacionais podem acarretar em resultados com

grandes divergências como foi verificado por Edwards Lorenz em um de seus estudos sobre meteorologia (LORENZ, 1963). Como a maioria dos parâmetros envolvidos nos sistemas físicos são aproximações e não valores exatos, há uma previsibilidade dos sistemas caóticos somente por um curto período de tempo, mesmo que estes sistemas sejam governados por leis determinísticas e sem aleatoriedades envolvidas. Em outras palavras, de uma maneira paradoxal a natureza determinística destes sistemas os torna imprevisíveis ao longo do tempo. Lorenz resume o comportamento caótico como “Onde o estado presente aproximado é insuficiente para determinar aproximadamente o estado futuro distante, independentemente de o estado presente exato determinar exatamente o estado futuro” (LORENZ, 1990) e retrata esta sensibilidade às condições iniciais por meio de um exemplo metafórico conhecido como Efeito Borboleta que diz que o bater de asas de uma borboleta, representando uma pequena mudança nas condições iniciais do sistema, poderia desencadear em uma tormenta em outro ponto do planeta como um tornado, que representa um resultado significativamente diferente do caso em que as pequenas mudanças nas condições iniciais do sistema não ocorresse (LORENZ, E., 1972).

Acredita-se que as primeiras observações do comportamento caótico foram feitas em estudos sobre problemas de gravitação. Isaac Newton, por meio das leis da Mecânica Clássica, conseguia determinar e prever a posição entre duas massas gravitacionais, o que dava uma explicação para o movimento orbital entre a Terra e o Sol. Porém, ao se incluir mais um corpo no sistema, começavam a haver alguns desvios imprevisíveis e a evolução deste sistema tendia para um comportamento modelado por equações diferenciais não-lineares. O problema dos três corpos se mostrou muito mais complexo e sistemas como este evoluíam para formas cujo equilíbrio era desestabilizado, com órbitas não periódicas, irregulares e aparentemente aleatórias. A descrição do movimento dos três corpos foi considerada impossível por um longo período e somente no final do século XIX, Henri Poincaré pôde descrever e observar o comportamento caótico no estudo do movimento do problema dos três corpos (POINCARÉ; MAITLAND, 2003).

Outros sistemas que se baseiam na teoria do caos são os sistemas hipercaóticos, que possuem as mesmas características dos sistemas caóticos mas com um maior grau de complexidade. Basicamente, os sistemas hipercaóticos são sistemas caóticos com mais de três dimensões, ou seja, devem ter pelo menos quatro equações de estados e pelo menos dois expoentes de Lyapunov positivos (STANKEVICH et al., 2019). O sistema de Rossler (ROSSLER, 1979) foi o primeiro sistema hipercaótico a ser apresentado na literatura e consiste em um sistema com quatro dimensões. Desde então, diversos sistemas hipercaóticos com um maior grau de complexidade foram publicados, assim tem-se sistemas pentadimensionais (ZHOU; WANG, 2020) (VAIDYANATHAN et al., 2019) (LIU; WANG; LEI, 2020) (YANG; BAI, 2017) (SUN, 2018) (YU; LIU; QIAN et al., 2020), hexadimensionais (YANG; YANG; CHEN, 2020) (YU; LIU; SHEN et al., 2020) (MEZATIO et al., 2019) (YANG; YANG; CHEN, 2020) (LIU; KADIR; LIU, 2019), heptadimensionais (PENG, Z. et al., 2020) (HU; CHAN, 2018) (SUN; GUO; WU, 2019) (YANG; ZHU; YANG, 2018), entre outros (LIN; YU; LÜ, 2017) (LAGMIRI; ELALAMI; ELALAMI, 2017) (KOUAGOU; DLAMINI; SIMELANE, 2020). Em geral, quanto

maior a dimensão de um sistema hipercaótico, maior é a sua imprevisibilidade e a complexidade de seu comportamento dinâmico, o que torna estes sistemas mais indicados para aplicações que envolvem a criptografia de sinais.

Devido às características apresentadas anteriormente, a comunidade acadêmica buscou propor esquemas de comunicação segura baseados nos sistemas caóticos e hipercaóticos (LI; ZHANG et al., 2019) (SMAOUI; ZRIBI; ELMOKADEM, 2017) (DELAVARI; MOHADESZADEH, 2016) (HASSAN; HAMMUDA, 2019) (CHEN et al., 2020). Nestes sistemas, caso um sinal mensagem venha a ser interceptado por um terceiro no canal de comunicação durante a sua transmissão, a sua decodificação deverá ser praticamente impossível. Isso porque, em geral, eles são compostos por dois sistemas caóticos denominados mestre e escravo, por onde um sinal mensagem é criptografado ao ser inserido no transmissor (sistema mestre) e recuperado no receptor (sistema escravo) após o mesmo ter sido transmitido por meio de um canal de comunicação qualquer. A recuperação do sinal mensagem só é possível quando os dois sistemas entram em sincronia. Assim, busca-se estabelecer uma comunicação em segurança ao se forçar uma sincronização entre os dois sistemas, convergindo os estados do sistema escravo para os estados do sistema mestre, mesmo que ambos partam de condições iniciais distintas.

Existem diversas formas de sincronização do caos, sendo elas: sincronização projetiva (ZHANG et al., 2019) (LIU; LIU, 2017) (YAN; DING, 2019) (SHAMMAKH; MAHMOUD; KASHKARI, 2020) (WANG, C. et al., 2020), sincronização completa (LI; LI, 2016), sincronização por fase (MAHMOUD; AL-HARTHI, 2020) (ESHMAWI; MAHMOUD, 2020), entre outras (BOCCALETTI et al., 2002). Além disso, há uma variedade de técnicas de controle comumente utilizadas para a sincronização de sistemas caóticos, como o controle ativo (BIGDELI; ZIAZI, 2017) (WANG, S. et al., 2020), controle adaptativo (RAJAGOPAL; KARTHIKEYAN; SRINIVASAN, 2017) (WANG; WANG; WU, 2018), controle de modo deslizante (DELAVARI; MOHADESZADEH, 2016) (SINGH; ROY, 2018), etc. A maioria dos esquemas apresentados na literatura utilizam um sinal de controle em cada equação de estado do sistema caótico, ou seja, a quantidade de sinais de controle aplicada é a mesma quantidade de dimensões do sistema como em (HE; SUN; WANG, 2019) (JAHANSHAHI et al., 2019) o que caracteriza uma sincronização completamente atuada. Quando a quantidade de sinais de controle é menor do que a quantidade de dimensões do sistema, a sincronização é dita subatuada (GULARTE; RÊGO; VARGAS, 2018). Visando uma maior simplicidade, o esquema de sincronização a ser apresentado neste trabalho fará uso de uma sincronização subatuada com somente um sinal de controle proporcional.

Além disso, diferentemente de muitos estudos encontrados na literatura como em (YU; WANG et al., 2019) (XIONG; QU; LUO, 2019), este estudo considera a presença de distúrbios, que são inerentes a implementação prática do esquema de comunicação segura, e utiliza uma sincronização proporcional e subatuada, o que acarreta na implementação de um circuito com maior simplicidade e que utiliza componentes de eletrônica analógica de baixo custo.

Desta forma, as vantagens do esquema de comunicação baseado em caos a ser proposto

neste estudo em relação a outros esquemas deste tipo comumente encontrados na literatura são:

- O esquema é baseado em um sistema hipercaótico heptadimensional, ou seja, possui uma dimensão alta e uma maior complexidade em seu comportamento dinâmico em comparação com outros sistemas com ordem mais baixas como em (NWACHIOMA et al., 2019) (CHEN et al., 2020) e, conseqüentemente, espera-se que o esquema a ser proposto possua uma criptografia mais difícil de ser quebrada.
- O esquema é subatuado e possui somente um sinal de controle em somente uma das equações de estado, diferentemente de outros estudos que são completamente atuados como em (VARAN; AKGUL, 2018) e apresentam sinais de controle em todos os estados ou são subatuados mas apresentam mais de um sinal de controle. Isto é considerado uma vantagem pois essa característica traz uma maior simplicidade para a implementação do circuito de sincronização do esquema.
- O sinal de controle utilizado obedece a uma lei de controle proporcional, que possui mais simplicidade em comparação com outros sinais de controle mais complexos apresentados em outros esquemas de sincronização como em (VARAN; AKGUL, 2018) (VAFAMAND; KHORSHIDI; KHAYATIAN, 2018) (CHEN et al., 2020) (PENG, X. et al., 2018) (LIU, 2018).
- O esquema possui robustez a distúrbios limitados que são inerentes às implementações práticas por meio de circuitos eletrônicos, como será demonstrado no Capítulo 3 deste trabalho.
- Neste esquema é possível transmitir de maneira segura até seis sinais mensagem diferentes simultaneamente, como será mostrado no Capítulo 4, por meio das simulações em Matlab.
- Este esquema pode de ser implementado utilizando-se elementos de eletrônica analógica de baixo custo, como amplificadores operacionais, resistores, capacitores e multiplicadores. Isso será validado por meio de simulações nos softwares MATLAB/Simulink e Multisim.

## 1.2 Contribuição

A principais contribuições deste trabalho concentram-se na proposição de um novo esquema para telecomunicação segura baseado em um sistema hipercaótico heptadimensional de terceira ordem sendo que o esquema proposto possui características vantajosas em comparação ao que é encontrado em muitos outros estudos na literatura. Estas características estão listadas a seguir:

- O esquema possui uma maior simplicidade por ser subatuado, utilizar somente um sinal de controle em uma equação de estado e basear-se em uma lei de controle proporcional, diferentemente de (VARAN; AKGUL, 2018) (JAHANSHAHI et al., 2019) que apresentam esquemas de sincronização completamente atuados ou subatuados com mais de um sinal de controle e de (ZHOU; TAN; YU, 2019) (ZHOU; TAN, 2019) (VAFAMAND; KHORSHIDI; KHAYATIAN, 2018) (WANG; WANG; WU, 2018) (CHEN et al., 2020) (WANG, W. et al., 2019) (ÇIÇEK; KOCAMAZ; UYAROĞLU, 2018) que se baseiam em leis de controle mais complexas.
- O esquema possui robustez a ruídos e distúrbios limitados pois este estudo leva em consideração a presença de distúrbios na análise da estabilidade, ao contrário de (VARAN; AKGUL, 2018) (CAO, 2020) (ZHONG et al., 2020).

### 1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo propor um sistema para telecomunicação segura baseado na sincronização proporcional e subatuada entre dois sistemas hipercaóticos heptadimensionais e de terceira ordem denominados sistemas mestre e escravo, em que ambos os sistemas possuam a mesma planta e partam de condições iniciais distintas. O sinal de controle deverá ser aplicado em somente uma equação de estado e o sistema deverá ser capaz de transmitir até seis sinais mensagem simultaneamente que serão somados aos estados do sistema mestre, criptografados e recuperados no sistema escravo. Este sistema deve ter como características a simplicidade e a robustez a distúrbios limitados as quais são características essenciais para a aplicação em telecomunicação segura e para a viabilização de uma implementação física utilizando-se componentes de eletrônica analógica de baixo custo. A sincronização e a robustez do sistema deverão ser asseguradas pela teoria de estabilidade de Lyapunov e a validação do esquema proposto deverá ser feita por meio de simulações nos *softwares* Matlab/Simulink e Multisim.

### 1.4 Organização do trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: Encontra-se uma breve revisão da literatura, bem como as contribuições e objetivos deste trabalho.
- Capítulo 2: São apresentadas as definições e conceitos necessários para a compreensão deste trabalho.
- Capítulo 3: Formula-se o problema, propõe-se o controle e prova-se, a partir da teoria de Lyapunov, a limitação do erro.



- Capítulo 4: É realizada a validação do esquema proposto por meio dos resultados das simulações realizadas nos *softwares* Matlab/Simulink e Multisim.
- Capítulo 5: Encontram-se as principais conclusões deste Trabalho de Conclusão de Curso.

# Capítulo 2

## Definições e conceitos preliminares

Neste capítulo são apresentadas as principais definições e conceitos necessários para a compreensão deste trabalho.

### 2.1 Sistemas dinâmicos

As definições e conceitos apresentados a seguir foram extraídos de (KHALIL; GRIZZLE, 2002). Seja um sistema dinâmico composto por uma quantidade finita de equações diferenciais ordinárias acopladas e que assume o seguinte formato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_3 &= f_3(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que  $\dot{x}_i$  refere-se à derivada de  $x_i$  em relação a variável temporal  $t$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_p$  são chamadas de variáveis de entrada e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são chamadas de variáveis de estado. Pode-se utilizar a seguinte notação vetorial para reescrevê-las da seguinte forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ f_3(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}\tag{2.2}$$

assim, tem-se

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.3)$$

a equação (2.3) é chamada de equação de estado,  $u$  é o vetor de entrada e  $x$  é o vetor de estado. Quando  $u$  não está presente, a equação passa a ser chamada de equação de estados não forçada e pode ser escrita como:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.4)$$

Se a parte da direita de (2.4) não depende do tempo, ou seja, se  $f(t, x) = f(x)$ , o sistema dinâmico é classificado como invariante no tempo. Além disso, a entrada  $u$  na equação (2.3) é frequentemente representada por uma equação na forma:

$$u = g(t, x) \quad (2.5)$$

Assim, a equação (2.3) pode ser representada como:

$$\dot{x} = f(t, x, g(t, x)) = f(t, x) \quad (2.6)$$

Outra definição importante é o conceito de ponto de equilíbrio. Seja um sistema representado pela equação (2.3), um ponto  $x = x^*$  neste sistema é chamado de ponto de equilíbrio se a sua taxa de variação neste ponto for nula, ou seja:

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right]_{x=x^*} = 0 \quad (2.7)$$

Note que o ponto de equilíbrio possui a propriedade de se manter, para sempre, em  $x^*$  caso o sistema se inicie neste ponto e não haja a presença de perturbações.

Em sistemas lineares a equação (2.3) assume o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que  $A, B, C$  e  $D$  são matrizes variantes no tempo.

Quando se tem um sistema não-linear, há uma tentativa de se linearizar o sistema sobre algum ponto e analisar o modelo linear resultante. Isso ocorre pois os sistemas lineares possuem propriedades que facilitam a sua análise. Porém, existem limitações associadas à linearização de um sistema não-linear. A primeira é que a linearização só pode prever o comportamento do sistema com uma boa aproximação nas vizinhanças do ponto em que foi realizada e a segunda é que a dinâmica de um comportamento não-linear, quando utilizada para modelar um sistema

físico, é, em geral, muita mais rica em detalhes do que a dinâmica linear.

## 2.2 Escalonamento

As vezes pode ser necessário alterar o sistema de equações diferenciais para que o mesmo trabalhe em uma determinada faixa de frequências e de amplitudes. Isso pode ser necessário quando se implementa analogicamente o sistema usando componentes eletrônicos não ideais, cujo funcionamento se restringe a faixas específicas. As definições apresentadas nesta seção foram retiradas de (DIANESE, 1977).

### 2.2.1 Escalonamento em amplitude

O escalonamento em amplitude pode ser realizado quando é necessário evitar a sobrecarga e a saturação de componentes. Para se alterar a amplitude, faz-se uma parametrização em relação a uma nova escala desejada. Por exemplo, se desejamos trocar uma variável  $x$  por uma outra com amplitude  $n$  vezes menor, sendo  $n$  um número real, definimos uma nova variável  $\tilde{x}$  e a definimos como

$$\tilde{x} = \frac{x}{n} \quad (2.9)$$

Uma vez que essa proporção é definida, é necessário repassá-la para o sistema de equações diferenciais. Nota-se que essa relação também será válida para as derivadas.

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\dot{x}}{n} \quad (2.10)$$

Desta forma, para se realizar um escalonamento em amplitude em um sistema, basta realizar a troca das variáveis do sistema por outras variáveis multiplicadas por um fator desejado. Note que os valores das condições iniciais também devem ser ajustados, ou seja, se em uma situação hipotética desejássemos escalonar o sistema para valores de amplitude  $n$  vezes menor, então as condições iniciais do sistema também deveriam ser divididas por  $n$ .

### 2.2.2 Escalonamento em frequência

Em alguns casos deseja-se alterar a frequência de um processo acelerando-o ou atrasando-o no tempo. Para se realizar esta alteração, basta multiplicar toda a equação diferencial por um valor desejado. Por exemplo, caso desejássemos tornar o desenvolvimento do sistema no decorrer do tempo  $m$  vezes mais lenta, basta multiplicar a equação por  $\frac{1}{m}$ . Caso contrário, ou seja, se desejássemos tornar a evolução do sistema  $m$  vezes mais rápido, basta multiplicar toda a equação por  $m$ .

## 2.3 Teoria de estabilidade de Lyapunov

Nesta sessão apresentam-se as definições e conceitos a respeito da teoria da estabilidade de Lyapunov, os quais foram retirados de (IOANNOU; SUN, 2012).

### 2.3.1 Conceitos sobre estabilidade

Sejam os seguintes sistemas modelados por equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.11)$$

em que  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f : \tau \times B(r) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\tau = [t_0, \infty)$  e  $B(r) = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x\| < r\}$ . Assume-se que  $f$  é de tal natureza que, para cada  $x_0 \in B(r)$  e cada  $t_0 \in \mathfrak{R}^+$ , (2.11) possui uma, e somente uma solução  $x(t; t_0, x_0)$ .

**Definição 2.2.1.1:** Um estado  $x_e$  é chamado de **estado de equilíbrio** para o sistema descrito por (2.11) se  $f(t, x_s) \equiv 0$  para todo  $t \geq t_0$

**Definição 2.2.1.2 .** Um estado de equilíbrio  $x_s$  é chamado de **estado de equilíbrio isolado** se existir uma constante  $k > 0$  tal que  $B(x_e, k) := \{x \mid \|x - x_s\| < k\} \subset R^n$

**Definição 2.2.1.3:** O estado de equilíbrio  $x_e$  é considerado **estável** (no sentido de Lyapunov) se para um  $t_o$  arbitrário e  $\varepsilon > 0$  existir um  $\delta(\varepsilon, t_0)$  tal que  $\|x_0 - x_e\| < \delta$  implica  $\|x(t; t_0; x_0) - x_e\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Definição 2.2.1.4:** O estado de equilíbrio  $x_e$  é considerado **uniformemente estável** se ele for estável e se  $\delta(\varepsilon, t_0)$  na definição 2.2.1.3 não for dependente de  $t_o$ .

**Definição 2.2.1.5 :** O estado de equilíbrio  $x_e$  é considerado **assintoticamente estável** se

- (i) ele for estável e
- (ii) existir um  $\delta(t_0)$  tal que  $\|x_0 - x_e\| < \delta(t_0)$  implica em  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, t_0; x_0) - x_s\| = 0$ .

Se a condição (ii) for satisfeita, então o estado de equilíbrio  $x_e$  é **atrativo**.

**Definição 2.2.1.6:** O conjunto de todos  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$  tal que  $x(t; t_0; x_0) \rightarrow x_e$  quando  $t \rightarrow \infty$  para qualquer  $t_0 \geq 0$  é chamado de **região de atração** do estado de equilíbrio  $x_e$ .

**Definição 2.2.1.7:** O estado de equilíbrio  $x_e$  é chamado de **uniformemente assintoticamente estável** se

- (i) ele for uniformemente estável e
- (ii) para cada  $\varepsilon > 0$  e qualquer  $t_0$  em  $\mathfrak{R}^+$ , existe um  $\delta_0 > 0$ , independente de  $t_0, \varepsilon$  e um  $T(\varepsilon) > 0$ , independente de  $t_0$ , tal que  $\|x(t; t_0; x_0) - x_e\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$  sempre que  $\|x_0 - x_e\| < \delta_0$ .

**Definição 2.2.1.8:** O estado de equilíbrio  $x_e$  é chamado de **exponencialmente estável** se, para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta(\varepsilon) > 0$ , tal que  $\|x(t; t_0; x_0) - x_e\| < \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$  para todo  $t \geq t_0$  sempre que  $\|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon)$ , em que  $\alpha > 0$

**Definição 2.2.1.9:** O estado de equilíbrio  $x_e$  é chamado de **instável** se ele não for estável.

Quando a equação em (2.11) possui somente uma única solução para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , são necessárias as seguintes definições para se realizar uma caracterização global de soluções.

**Definição 2.2.1.10:** Uma solução  $x(t; t_0; x_0)$  de (2.11) é **limitada** se existe algum  $\beta > 0$  tal que  $\|x(t; t_0; x_0) - x_e\| < \beta$  para todo  $t > t_0$ , em que  $\beta$  pode ser dependente de cada solução.

**Definição 2.2.1.11:** As soluções de (2.11) são **uniformemente limitadas** se para quaisquer  $\alpha > 0$  e  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , existir um  $\beta = \beta(\alpha)$ , independente de  $t_0$ , tal que se  $\|x_0\| < \alpha$ , então  $\|x(t; t_0; x_0) - x_e\| < \beta$  para todo  $t > t_0$ .

**Definição 2.2.1.12:** As soluções de (2.11) são **uniformemente finalmente limitadas** (com limitante  $B$ ) se existir algum  $B > 0$  e se para quaisquer  $\alpha \geq 0$  e  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , existir um  $T = T(\alpha) > 0$  (independente de  $t_0$ ) tal que  $\|x_0\| < \alpha$  implica  $\|x(t; t_0; x_0)\| < B$  para todo  $t > t_0 + T$ .

**Definição 2.2.1.13:** Se  $x(t; t_0; x_0)$  é uma solução de  $\dot{x} = f(t, x)$ , então a trajetória  $x(t; t_0; x_0)$  é chamada de **estável** se o ponto de equilíbrio  $z_e = 0$  da equação diferencial  $\dot{z} = f(t, z + x(t; t_0; x_0)) - f(t, x(t; t_0; x_0))$  for estável.

## 2.4 Sistemas caóticos e hipercaóticos

Os conceitos apresentados nesta seção foram retirados de (STROGATZ, 2018) e (DEVANEY, 2008). Embora não haja um consenso quanto a formalização universal de caos, existem três características que são necessárias para que um sistema seja considerado caótico:

- **Sensibilidade às condições iniciais:** implica que as trajetórias se separam a uma taxa exponencialmente rápida quando possuem trajetórias próximas dadas pelas variáveis de estados.
- **Comportamento não linear e aperiódico:** implicam em trajetórias que não se acomodam com o passar do tempo em pontos fixos, órbitas periódicas ou quasi-periódicas.
- **Sistema determinístico:** implica que o sistema é governado por leis determinísticas e, apesar da sua característica aparentemente aleatória, não possui entradas ou parâmetros aleatórios.

Os expoentes de Lyapunov são utilizados para caracterizar a separação das trajetórias de um sistema ao longo do tempo. Seja  $\delta(t)$  a distância entre duas trajetórias em termos do tempo e  $\delta_0$  a distância no tempo inicial  $t_0$ , o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais se

$\delta(t)$  crescer exponencialmente com o passar do tempo. Desta forma  $\delta(t)$  pode ser representada como:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\gamma(t-t_0)} \quad (2.12)$$

Em que  $\gamma$  é chamado de expoente de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov são úteis para avaliar a previsibilidade de um sistema. Para que um sistema seja considerado caótico é necessário que no mínimo um expoente de Lyapunov seja positivo. Já os sistemas hipercaóticos necessitam que pelo menos dois expoentes de Lyapunov sejam positivos e que o mesmo possua quatro ou mais dimensões (STANKEVICH et al., 2019).

## 2.5 Sincronização de sistemas caóticos

Os sistemas caóticos possuem como característica intrínseca a sensibilidade às condições iniciais que fazem com que pequenas diferenças levem as trajetórias dos sistemas a uma separação de ordem exponencial com o decorrer do tempo. Esta característica faz com que a sincronização de sistemas caóticos tornem-se um desafio já que mesmo em sistemas caóticos idênticos com condições iniciais ligeiramente distintas haja uma evolução dessincronizada. Como na grande maioria dos sistemas práticos não se conhece os parâmetros de maneira exata, mas sim com um erro associado, este problema de sincronização é considerado como sendo de relevância prática.

De acordo com (BOCCALETTI et al., 2002) a sincronização caótica pode ser definida como um fenômeno em que dois ou mais sistemas caóticos ajustam uma propriedade de seu movimento para um comportamento comum.

A seguir, será formulado o problema de sincronização para um sistema dinâmico composto por equações diferenciais ordinárias. Seja o sistema caótico representado por:

$$\dot{x}_m = f_m(x_m, d_m(t)) \quad (2.13)$$

Em que  $f_m$  é um mapa conhecido,  $x_m$  é o estado do sistema mestre e  $d_m$  é um distúrbio desconhecido. E seja um sistema escravo representado por:

$$\dot{x}_s = f_s(x_s, u, d_s(t)) \quad (2.14)$$

Em que  $f_s$  é um mapa conhecido,  $x_s$  é o estado do sistema escravo,  $u$  é a entrada do controlador e  $d_s$  é um distúrbio desconhecido. Podemos definir o erro dinâmico baseando-se em (2.13) e

(2.14) como:

$$\dot{e} = \dot{x}_s - \dot{x}_m = f_s(x_s, u, d_s(t)) - f_m(x_m, d_m(t)) \quad (2.15)$$

em que

$$e = x_s - x_m \quad (2.16)$$

é definido como sendo o erro de sincronização. Em geral, se  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, se o sistema escravo convergir para os valores do sistema mestre, podemos considerar que os sistemas descritos pelas equações (2.13) e (2.14) estão perfeitamente sincronizados. Neste trabalho também consideraremos a sincronização para o caso em que  $e(t)$  se manter em valores limitados e próximos de zero quando  $t \rightarrow \infty$ .



# Capítulo 3

## Sincronização subatuada de um sistema hipercaótico heptadimensional baseada em um controle proporcional para aplicação em comunicação segura

### 3.1 Introdução

Este capítulo apresenta um esquema de sincronização subatuado baseado em um sistema hipercaótico heptadimensional e de terceira ordem (LIU; ZHU; SUN, 2014) para aplicação em telecomunicação segura. Os principais atributos do esquema proposto que o diferenciam de muitos trabalhos encontrados na literatura são:

- O esquema é subatuado e possui somente um controle atuando em uma equação de estado, diferentemente de muitos esquemas apresentados na literatura como em (VARAN; AKGUL, 2018) (YU; ZHANG et al., 2020) (YAN; DING, 2019) em que os estados são completamente atuados e possuem sinais de controle em todas as equações.
- O esquema faz uso de uma lei de controle proporcional que tem como característica a simplicidade, diferentemente dos esquemas apresentados em (VARAN; AKGUL, 2018) (YU; LIU; HE et al., 2019) que possuem leis de controle com maior complexidade.
- Possui robustez à ruídos e a distúrbios limitados diferentemente de muitos estudos como em (YU; WANG et al., 2019) e (XIONG; QU; LUO, 2019) que não consideram a presença de distúrbios.

A convergência do erro de sincronização do esquema apresentado para valores limitados e a sua robustez à distúrbios limitados é assegurada pela teoria de estabilidade de Lyapunov, como será demonstrado nos itens seguintes.

## 3.2 Formulação do Problema

Considere o sistema hipercaótico (LIU; ZHU; SUN, 2014; VARAN; AKGUL, 2018) a seguir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_5 - bx_5x_6x_7 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 - dx_6 + x_1x_6x_7 \\ \dot{x}_3 &= -ax_3 + ax_5 - gx_1x_2x_7 \\ \dot{x}_4 &= -ax_4 + ex_1 + x_1x_2x_3 \\ \dot{x}_5 &= -ax_5 + ex_7 - x_2x_3x_4 \\ \dot{x}_6 &= -ex_6 + ex_5 + x_3x_4x_5 \\ \dot{x}_7 &= -bx_7 + fx_2 - hx_4x_5x_6\end{aligned}\tag{3.1}$$

Em que  $a = 15$ ,  $b = 5$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 25$ ,  $e = 10$ ,  $f = 4$ ,  $g = 0.1$  e  $h = 1.5$  são constantes reais. Observe que este é um sistema hipercaótico heptadimensional e de terceira ordem, em que  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  e  $x_7$  são os estados do sistema. Com base em (3.1), temos os seguintes sistemas mestre e escravo.

Sistema mestre:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1m} &= -ax_{1m} + ax_{5m} - bx_{5m}x_{6m}x_{7m} \\ \dot{x}_{2m} &= -cx_{2m} - dx_{6m} + x_{1m}x_{6m}x_{7m} \\ \dot{x}_{3m} &= -ax_{3m} + ax_{5m} - gx_{1m}x_{2m}x_{7m} \\ \dot{x}_{4m} &= -ax_{4m} + ex_{1m} + x_{1m}x_{2m}x_{3m} \\ \dot{x}_{5m} &= -ax_{5m} + ex_{7m} - x_{2m}x_{3m}x_{4m} \\ \dot{x}_{6m} &= -ex_{6m} + ex_{5m} + x_{3m}x_{4m}x_{5m} \\ \dot{x}_{7m} &= -bx_{7m} + fx_{2m} - hx_{4m}x_{5m}x_{6m}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Sistema escravo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1s} &= -ax_{1s} + ax_{5s} - bx_{5s}x_{6s}x_{7s} + h_1(t) \\
\dot{x}_{2s} &= -cx_{2s} - dx_{6s} + x_{1s}x_{6s}x_{7s} + h_2(t) + u(t) \\
\dot{x}_{3s} &= -ax_{3s} + ax_{5s} - gx_{1s}x_{2s}x_{7s} + h_3(t) \\
\dot{x}_{4s} &= -ax_{4s} + ex_{1s} + x_{1s}x_{2s}x_{3s} + h_4(t) \\
\dot{x}_{5s} &= -ax_{5s} + ex_{7s} - x_{2s}x_{3s}x_{4s} + h_5(t) \\
\dot{x}_{6s} &= -ex_{6s} + ex_{5s} + x_{3s}x_{4s}x_{5s} + h_6(t) \\
\dot{x}_{7s} &= -bx_{7s} + fx_{2s} - hx_{4s}x_{5s}x_{6s} + h_7(t)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

em que  $x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}, x_{4m}, x_{5m}, x_{6m}$  e  $x_{7m}$  são os estados do sistema mestre,  $x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}$  e  $x_{7s}$  são os estados do sistema escravo,  $h_1(t), h_2(t), h_3(t), h_4(t), h_5(t), h_6(t)$  e  $h_7(t)$  são os distúrbios no sistema escravo e  $u(t)$  é o sinal de controle.

**Comentário 1:** Por ser hipercaótico, o comportamento do sistema (3.1) é sensível às condições iniciais, aparentemente aleatório e é aperiódico. Assim, a sincronização deste tipo de sistema é, em geral, considerada mais complexa se comparada a outros tipos de sistemas dinâmicos.

**Hipótese 1:** Assume-se que os distúrbios são limitados. Mais precisamente,

$$\begin{aligned}
|h_1(t)| &\leq \bar{h}_1 \\
|h_2(t)| &\leq \bar{h}_2 \\
|h_3(t)| &\leq \bar{h}_3 \\
|h_4(t)| &\leq \bar{h}_4 \\
|h_5(t)| &\leq \bar{h}_5 \\
|h_6(t)| &\leq \bar{h}_6 \\
|h_7(t)| &\leq \bar{h}_7
\end{aligned} \tag{3.4}$$

em que  $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{h}_5, \bar{h}_6$  e  $\bar{h}_7$  são constantes positivas.

**Comentário 2:** No sistema (3.3) os distúrbios são considerados explicitamente para ressaltar que o esquema apresentado é válido mesmo que na presença de ruídos e variações que são inerentes às implementações práticas e podem ser causados pela existência de interferências eletromagnéticas e pela imprecisão, envelhecimento e não idealidades dos componentes eletrônicos utilizados na implementação.

### 3.3 Equação de erro de sincronização e sinal de controle proposto

A dinâmica dos erros de sincronização é definida como:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= \dot{x}_{1s} - \dot{x}_{1m} \\
 \dot{e}_2 &= \dot{x}_{2s} - \dot{x}_{2m} \\
 \dot{e}_3 &= \dot{x}_{3s} - \dot{x}_{3m} \\
 \dot{e}_4 &= \dot{x}_{4s} - \dot{x}_{4m} \\
 \dot{e}_5 &= \dot{x}_{5s} - \dot{x}_{5m} \\
 \dot{e}_6 &= \dot{x}_{6s} - \dot{x}_{6m} \\
 \dot{e}_7 &= \dot{x}_{7s} - \dot{x}_{7m}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Então as equações para a dinâmica do erro podem ser obtidas a partir das equações (3.2) e (3.3). Assim:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= -ae_1 + ae_5 - b(e_5e_6e_7 + e_5e_6x_{7m} + e_5x_{6m}e_7 + e_5x_{6m}x_{7m} \\
 &\quad + x_{5m}e_6e_7 + x_{5m}e_6x_{7m} + x_{5m}x_{6m}e_7) + h_1 \\
 \dot{e}_2 &= -ce_2 - de_6 + e_1e_6e_7 + e_1e_6x_{7m} + e_1x_{6m}e_7 + e_1x_{6m}x_{7m} \\
 &\quad + x_{1m}e_6e_7 + x_{1m}e_6x_{7m} + x_{1m}x_{6m}e_7 + h_2 + u \\
 \dot{e}_3 &= -ae_3 + ae_5 - g(e_1e_2e_7 + e_1e_2x_{7m} + e_1x_{2m}e_7 + e_1x_{2m}x_{7m} \\
 &\quad + x_{1m}e_2e_7 + x_{1m}e_2x_{7m} + x_{1m}x_{2m}e_7) + h_3 \\
 \dot{e}_4 &= -ae_4 + ee_1 + e_1e_2e_3 + e_1e_2x_{3m} + e_1x_{2m}e_3 + e_1x_{2m}x_{3m} \\
 &\quad + x_{1m}e_2e_3 + x_{1m}e_2x_{3m} + x_{1m}x_{2m}e_3 + h_4 \\
 \dot{e}_5 &= -ae_5 + ee_7 - e_2e_3e_4 - e_2e_3x_{4m} - e_2x_{3m}e_4 - e_2x_{3m}x_{4m} \\
 &\quad - x_{2m}e_3e_4 - x_{2m}e_3x_{4m} - x_{2m}x_{3m}e_4 + h_5 \\
 \dot{e}_6 &= -ee_6 + ee_5 + e_3e_4e_5 + e_3e_4x_{5m} + e_3x_{4m}e_5 + e_3x_{4m}x_{5m} \\
 &\quad + x_{3m}e_4e_5 + x_{3m}e_4x_{5m} + x_{3m}x_{4m}e_5 + h_6 \\
 \dot{e}_7 &= -be_7 + fe_2 - h(e_4e_5e_6 + e_4e_5x_{6m} + e_4x_{5m}e_6 + e_4x_{5m}x_{6m} \\
 &\quad + x_{4m}e_5e_6 + x_{4m}e_5x_{6m} + x_{4m}x_{5m}e_6) + h_7
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

**Fato 1:** Os estados do sistema mestre são limitados (LIU; ZHU; SUN, 2014). Mais preci-

samente,

$$\begin{aligned}
|x_{1m}| &\leq \bar{x}_1 \\
|x_{2m}| &\leq \bar{x}_2 \\
|x_{3m}| &\leq \bar{x}_3 \\
|x_{4m}| &\leq \bar{x}_4 \\
|x_{5m}| &\leq \bar{x}_5 \\
|x_{6m}| &\leq \bar{x}_6 \\
|x_{7m}| &\leq \bar{x}_7
\end{aligned} \tag{3.7}$$

em que  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6$  e  $\bar{x}_7$  são constantes positivas.

**Hipótese 2:** As condições iniciais são suficientemente pequenas de forma que

$$\|e(0)\| \leq \alpha < 1 \tag{3.8}$$

em que  $\alpha$  é uma constante positiva.

**Fato 2:** Considere que  $m, n, p$  e  $q$  são números naturais entre 1 e 7. Perceba que:

$$\begin{aligned}
(e_m \pm e_n)^2 &\geq 0 \\
4e_m e_n e_p e_q &\leq 2e_m^2 e_n^2 + 2e_p^2 e_q^2 \\
2e_m^2 e_n^2 &\leq e_m^4 + e_n^4
\end{aligned} \tag{3.9}$$

**Teorema 1:** Considere os sistemas mestre e escravo descritos em (3.2) e (3.3) e a seguinte lei de controle definida por:

$$u = -\psi e_2 \tag{3.10}$$

em que  $\psi > 0$  é uma constante definida pelo usuário.

Então o erro de sincronização é uniformemente finalmente limitado e converge em tempo finito para o conjunto compacto  $\Omega = \{e \in \mathfrak{R}^7 \mid \|e\| \leq \theta\}$ , sendo  $\|e\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 + e_6^2 + e_7^2$ ,  $\alpha \geq \theta = \sqrt{\frac{2\beta}{\rho}} > 0$ ,  $\rho < 2\rho_{15}$ ,  $\rho_{15} = \min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7\}$ ,  $\rho_1 = a - \frac{7}{4}$ ,  $\rho_2 = \psi + c - \frac{13}{4} - \bar{x}_6^2 \bar{x}_7^2 - d^2 - \bar{x}_1^2 \bar{x}_7^2 - f^2 - \bar{x}_1^2 \bar{x}_6^2 - g^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_7^2$ ,  $\rho_3 = a - \frac{5}{4}$ ,  $\rho_4 = a - \frac{5}{4}$ ,  $\rho_5 = a - \frac{3}{4}$ ,  $\rho_6 = e - \frac{1}{2}$ ,  $\rho_7 = b - \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \bar{h}_1^2 + \bar{h}_2^2 + \bar{h}_3^2 + \bar{h}_4^2 + \bar{h}_5^2 + \bar{h}_6^2 + \bar{h}_7^2 + b^2 \bar{x}_6^2 \bar{x}_7^2 + b^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_7^2 + b^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_6^2 + 2a^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_4^2 + g^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_7^2 + g^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + 3e^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 + \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + h^2 \bar{x}_4^2 \bar{x}_6^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 + \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2 + \bar{x}_4^2 \bar{x}_5^2 + \bar{x}_3^2 \bar{x}_5^2 + h^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_6^2 + h^2 \bar{x}_4^2 \bar{x}_5^2$ .

**Prova:**

Considere a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 + e_6^2 + e_7^2) \tag{3.11}$$

Derivando (3.11) em relação ao tempo ao longo das trajetórias dos erros resulta:

$$\dot{V} = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 + e_5\dot{e}_5 + e_6\dot{e}_6 + e_7\dot{e}_7 \quad (3.12)$$

Substituindo-se (3.6) e (3.10) em (3.12), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e_1^2(a) - e_2^2(\psi + c) - e_3^2(a) - e_4^2(a) - e_5^2(a) - e_6^2(e) - e_7^2(b) + e_1h_1 + e_2h_2 \\ & + e_3h_3 + e_4h_4 + e_5h_5 + e_6h_6 + e_7h_7 + e_1e_5(a - bx_{6m}x_{7m}) - e_1e_6(bx_{5m}x_{7m}) \\ & - e_1e_7(bx_{5m}x_{6m}) + e_1e_2(x_{6m}x_{7m}) + e_2e_6(x_{1m}x_{7m} - d) + e_2e_7(f + x_{1m}x_{6m}) \\ & + e_3e_5(a - x_{2m}x_{4m}) - e_1e_3(gx_{2m}x_{7m}) - e_2e_3(gx_{1m}x_{7m}) - e_3e_7(gx_{1m}x_{2m}) \\ & + e_1e_4(e + x_{2m}x_{3m}) + e_2e_4(x_{1m}x_{3m}) + e_3e_4(x_{1m}x_{2m}) + e_5e_7(e - hx_{4m}x_{6m}) \\ & - e_2e_5(x_{3m}x_{4m}) - e_4e_5(x_{2m}x_{3m}) + e_5e_6(e + x_{3m}x_{4m}) + e_3e_6(x_{4m}x_{5m}) \\ & + e_4e_6(x_{3m}x_{5m}) - e_4e_7(hx_{5m}x_{6m}) - e_6e_7(hx_{4m}x_{5m}) - e_1e_5e_6(bx_{7m}) \\ & - e_1e_5e_7(bx_{6m}) - e_1e_6e_7(bx_{5m}) + e_1e_2e_6(x_{7m}) + e_1e_2e_7(x_{6m}) + e_2e_6e_7(x_{1m}) \\ & - e_1e_2e_3(gx_{7m}) - e_1e_3e_7(gx_{2m}) - e_2e_3e_7(gx_{1m}) + e_1e_2e_4(x_{3m}) + e_1e_3e_4(x_{2m}) \\ & + e_2e_3e_4(x_{1m}) - e_2e_3e_5(x_{4m}) - e_2e_4e_5(x_{3m}) - e_3e_4e_5(x_{2m}) + e_3e_4e_6(x_{5m}) \\ & + e_4e_5e_6(x_{3m}) + e_3e_5e_6(x_{4m}) - e_4e_5e_7(hx_{6m}) - e_4e_6e_7(hx_{5m}) - e_5e_6e_7(hx_{4m}) \\ & - e_1e_5e_6e_7(b) + e_1e_2e_6e_7 - e_1e_2e_3e_7(g) + e_1e_2e_3e_4 - e_2e_3e_4e_5 + e_3e_4e_5e_6 \\ & - e_4e_5e_6e_7(h) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Analisando o caso  $\dot{V} \leq 0$ , a partir de (3.9) e da desigualdade de Young (HARDY et al.,

1952), note que

$$\begin{aligned}
e_1 h_1 &\leq \frac{e_1^2}{4} + \bar{h}_1^2; e_2 h_2 \leq \frac{e_2^2}{4} + \bar{h}_2^2; e_3 h_3 \leq \frac{e_3^2}{4} + \bar{h}_3^2; e_4 h_4 \leq \frac{e_4^2}{4} + \bar{h}_4^2; e_5 h_5 \leq \frac{e_5^2}{4} + \bar{h}_5^2; \\
e_6 h_6 &\leq \frac{e_6^2}{4} + \bar{h}_6^2; e_7 h_7 \leq \frac{e_7^2}{4} + \bar{h}_7^2; e_1 e_5 (a - b x_{6m} x_{7m}) \leq (a^2 + b^2 \bar{x}_6^2 \bar{x}_7^2) + \frac{e_1^4}{8} + \frac{e_5^4}{8}; \\
-e_1 e_6 (b x_{5m} x_{7m}) &\leq b^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_7^2 + \frac{e_1^4}{8} + \frac{e_6^4}{8}; -e_1 e_7 (b x_{5m} x_{6m}) \leq b^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_6^2 + \frac{e_1^4}{8} + \frac{e_7^4}{8}; \\
e_1 e_2 (x_{6m} x_{7m}) &\leq \frac{e_1^2}{4} + e_2^2 (\bar{x}_6^2 \bar{x}_7^2); e_2 e_6 (x_{1m} x_{7m} - d) \leq \frac{e_2^2}{4} + e_6^2 (d^2 + \bar{x}_1^2 \bar{x}_7^2); \\
e_2 e_7 (f + x_{1m} x_{6m}) &\leq \frac{e_2^2}{4} + e_7^2 (f^2 + \bar{x}_1^2 \bar{x}_6^2); e_3 e_5 (a - x_{2m} x_{4m}) \leq (a^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_4^2) + \frac{e_3^4}{8} + \frac{e_5^4}{8}; \\
-e_1 e_3 (g x_{2m} x_{7m}) &\leq g^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_7^2 + \frac{e_1^4}{8} + \frac{e_3^4}{8}; -e_2 e_3 (g x_{1m} x_{7m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + e_3^2 (g^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_7^2); \\
-e_3 e_7 (g x_{1m} x_{2m}) &\leq g^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + \frac{e_3^4}{8} + \frac{e_7^4}{8}; e_1 e_4 (e + x_{2m} x_{3m}) \leq (e^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2) + \frac{e_1^4}{8} + \frac{e_4^4}{8}; \\
e_2 e_4 (x_{1m} x_{3m}) &\leq \frac{e_2^2}{4} + e_4^2 (\bar{x}_1^2 \bar{x}_3^2); e_3 e_4 (x_{1m} x_{2m}) \leq \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + \frac{e_3^4}{8} + \frac{e_4^4}{8}; \\
e_5 e_7 (e - h x_{4m} x_{6m}) &\leq (e^2 + h^2 \bar{x}_4^2 \bar{x}_6^2) + \frac{e_5^4}{8} + \frac{e_7^4}{8}; -e_2 e_5 (x_{3m} x_{4m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + e_5^2 (\bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2); \\
-e_4 e_5 (x_{2m} x_{3m}) &\leq \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 + \frac{e_4^4}{8} + \frac{e_5^4}{8}; e_5 e_6 (e + x_{3m} x_{4m}) \leq (e^2 + \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2) + \frac{e_5^4}{8} + \frac{e_6^4}{8}; \\
e_3 e_6 (x_{4m} x_{5m}) &\leq \bar{x}_4^2 \bar{x}_5^2 + \frac{e_3^4}{8} + \frac{e_6^4}{8}; e_4 e_6 (x_{3m} x_{5m}) \leq \bar{x}_3^2 \bar{x}_5^2 + \frac{e_4^4}{8} + \frac{e_6^4}{8}; \\
-e_4 e_7 (h x_{5m} x_{6m}) &\leq h^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_6^2 + \frac{e_4^4}{8} + \frac{e_7^4}{8}; -e_6 e_7 (h x_{4m} x_{5m}) \leq h^2 \bar{x}_4^2 \bar{x}_5^2 + \frac{e_6^4}{8} + \frac{e_7^4}{8}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Observe que produtos que envolvem mais de duas variáveis podem ser separadas por meio de parênteses de forma a sempre se fazer produtos de duas variáveis e, assim, pode se utilizar a

desigualdade de Young e o Fato 2, dessa forma

$$\begin{aligned}
& -e_1e_5e_6(bx_{7m}) \leq \frac{e_1^2}{4} + \frac{e_5^4b^4\bar{x}_7^4}{2} + \frac{e_6^4}{2}; -e_1e_5e_7(bx_{6m}) \leq \frac{e_1^2}{4} + \frac{e_5^4b^4\bar{x}_6^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; \\
& -e_1e_6e_7(bx_{5m}) \leq \frac{e_1^2}{4} + \frac{e_6^4b^4\bar{x}_5^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; e_1e_2e_6(x_{7m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_6^4\bar{x}_7^4}{2} + \frac{e_1^4}{2}; \\
& e_1e_2e_7(x_{6m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_7^4\bar{x}_6^4}{2} + \frac{e_1^4}{2}; e_2e_6e_7(x_{1m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_6^4\bar{x}_1^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; \\
& -e_1e_2e_3(gx_{7m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_3^4g^4\bar{x}_7^4}{2} + \frac{e_1^4}{2}; -e_1e_3e_7(gx_{2m}) \leq \frac{e_1^2}{4} + \frac{e_3^4g^4\bar{x}_2^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; \\
& -e_2e_3e_7(gx_{1m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_3^4g^4\bar{x}_1^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; e_1e_2e_4(x_{3m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_1^4\bar{x}_3^4}{2} + \frac{e_4^4}{2}; \\
& e_1e_3e_4(x_{2m}) \leq \frac{e_1^2}{4} + \frac{e_3^4\bar{x}_2^4}{2} + \frac{e_4^4}{2}; e_2e_3e_4(x_{1m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_3^4\bar{x}_1^4}{2} + \frac{e_4^4}{2}; \\
& -e_2e_3e_5(x_{4m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_3^4\bar{x}_4^4}{2} + \frac{e_5^4}{2}; -e_2e_4e_5(x_{3m}) \leq \frac{e_2^2}{4} + \frac{e_4^4\bar{x}_3^4}{2} + \frac{e_5^4}{2}; \\
& -e_3e_4e_5(x_{2m}) \leq \frac{e_3^2}{4} + \frac{e_4^4\bar{x}_2^4}{2} + \frac{e_5^4}{2}; e_3e_4e_6(x_{5m}) \leq \frac{e_3^2}{4} + \frac{e_4^4\bar{x}_5^4}{2} + \frac{e_6^4}{2}; \\
& e_4e_5e_6(x_{3m}) \leq \frac{e_4^2}{4} + \frac{e_5^4\bar{x}_3^4}{2} + \frac{e_6^4}{2}; e_3e_5e_6(x_{4m}) \leq \frac{e_3^2}{4} + \frac{e_5^4\bar{x}_4^4}{2} + \frac{e_6^4}{2}; \\
& -e_4e_5e_7(hx_{6m}) \leq \frac{e_4^2}{4} + \frac{e_5^4h^4\bar{x}_6^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; -e_4e_6e_7(hx_{5m}) \leq \frac{e_4^2}{4} + \frac{e_6^4h^4\bar{x}_5^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; \\
& -e_5e_6e_7(hx_{4m}) \leq \frac{e_5^2}{4} + \frac{e_6^4h^4\bar{x}_4^4}{2} + \frac{e_7^4}{2}; -e_1e_5e_6e_7(b) \leq \frac{b}{8}(e_1^4 + e_5^4 + e_6^4 + e_7^4); \\
& e_1e_2e_6e_7 \leq \frac{1}{8}(e_1^4 + e_2^4 + e_6^4 + e_7^4); -e_1e_2e_3e_7(g) \leq \frac{g}{8}(e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 + e_7^4); \\
& e_1e_2e_3e_4 \leq \frac{1}{8}(e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 + e_4^4); -e_2e_3e_4e_5 \leq \frac{1}{8}(e_2^4 + e_3^4 + e_4^4 + e_5^4); \\
& e_3e_4e_5e_6 \leq \frac{1}{8}(e_3^4 + e_4^4 + e_5^4 + e_6^4); -e_4e_5e_6e_7(h) \leq \frac{h}{8}(e_4^4 + e_5^4 + e_6^4 + e_7^4)
\end{aligned} \tag{3.15}$$



Definindo que

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= a - \frac{7}{4} \\
\rho_2 &= \psi + c - \frac{13}{4} - \bar{x}_6^2 \bar{x}_7^2 - d^2 - \bar{x}_1^2 \bar{x}_7^2 - f^2 - \bar{x}_1^2 \bar{x}_6^2 - g^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_7^2 \\
\rho_3 &= a - \frac{5}{4} \\
\rho_4 &= a - \frac{5}{4} \\
\rho_5 &= a - \frac{3}{4} \\
\rho_6 &= e - \frac{1}{2} \\
\rho_7 &= b - \frac{1}{2} \\
\rho_8 &= \frac{19 + b + g + 4\bar{x}_3^4}{8} \\
\rho_9 &= \frac{1}{2} \\
\rho_{10} &= \frac{15 + g + 4\bar{x}_1^4 + 4\bar{x}_2^4 + 4\bar{x}_4^4 + 4g^4(\bar{x}_1^4 + \bar{x}_2^4 + \bar{x}_7^4)}{8} \\
\rho_{11} &= \frac{18 + h + 4(\bar{x}_2^4 + \bar{x}_3^4 + \bar{x}_5^4)}{8} \\
\rho_{12} &= \frac{24 + b + h + 4\bar{x}_3^4 + 4\bar{x}_4^4 + 4h^4\bar{x}_6^4 + 4b^4(\bar{x}_6^4 + \bar{x}_7^4)}{8} \\
\rho_{13} &= \frac{25 + b + h + 4\bar{x}_7^4 + 4\bar{x}_1^4 + 4b^4\bar{x}_5^4 + 4h^4(\bar{x}_4^4 + \bar{x}_5^4)}{8} \\
\rho_{14} &= \frac{40 + b + g + h + 4\bar{x}_6^4}{8} \\
\beta &= \bar{h}_1^2 + \bar{h}_2^2 + \bar{h}_3^2 + \bar{h}_4^2 + \bar{h}_5^2 + \bar{h}_6^2 + \bar{h}_7^2 + b^2 \bar{x}_6^2 \bar{x}_7^2 + b^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_7^2 + b^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_6^2 + 2a^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_4^2 \\
&\quad + g^2 \bar{x}_2^2 \bar{x}_7^2 + g^2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + 3e^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 + \bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + h^2 \bar{x}_4^2 \bar{x}_6^2 + \bar{x}_2^2 \bar{x}_3^2 + \bar{x}_3^2 \bar{x}_4^2 + \bar{x}_4^2 \bar{x}_5^2 + \bar{x}_3^2 \bar{x}_5^2 \\
&\quad + h^2 \bar{x}_5^2 \bar{x}_6^2 + h^2 \bar{x}_4^2 \bar{x}_5^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Retomando (3.13) e considerando (3.16), advém

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\rho_1 e_1^2 - \rho_2 e_2^2 - \rho_3 e_3^2 - \rho_4 e_4^2 - \rho_5 e_5^2 - \rho_6 e_6^2 - \rho_7 e_7^2 + \rho_8 e_1^4 + \rho_9 e_2^4 + \rho_{10} e_3^4 \\
&\quad + \rho_{11} e_4^4 + \rho_{12} e_5^4 + \rho_{13} e_6^4 + \rho_{14} e_7^4 + \beta
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Note que  $\rho_2$  é positivo dependendo da escolha dos valores de  $\psi$  e que  $\rho_1, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$  e  $\rho_7$  são positivos. Como  $\psi$  é definido pelo usuário, escolhe-se valores de forma que  $\rho_2$  seja positivo. Note também que  $\rho_8, \rho_9, \rho_{10}, \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}$  e  $\rho_{14}$  também são positivos. Assumindo

que  $\rho_{15} = \min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7\}$ ,  $\rho_{16} = \max\{\rho_8, \rho_9, \rho_{10}, \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}\}$ , resulta

$$\dot{V} \leq -\rho_{15}\|e\|^2 + \rho_{16}\|e\|^4 + \beta \quad (3.18)$$

Partindo-se da Hipótese 2, existem valores de  $\alpha$ , que estão relacionados com  $\|e(0)\|$  suficientemente pequenos, de modo que  $-\rho_{15}\|e(0)\|^2 + \rho_{16}\|e(0)\|^4 \leq -\frac{\rho}{2}\|e(0)\|^2$ , sendo  $\rho$  uma constante positiva desconhecida. Por outro lado, para instantes  $t > 0$ , pode-se concluir que  $-\rho_{15}\|e(t)\|^2 + \rho_{16}\|e(t)\|^4 \leq -\frac{\rho}{2}\|e(t)\|^2$ , pois o fato de  $\dot{V}(t) \leq 0$  implica que a  $\|e\|$  se manterá constante ou diminuirá em instantes posteriores a  $t = 0$ . A razão disso se deve a forma particular da equação (3.11) e de  $\|e\| > \theta$ . Em outras palavras, a seguinte inequação é válida.

$$\dot{V} \leq -\rho V + \beta \quad (3.19)$$

Caso  $\|e\| > \theta$ , então  $\dot{V} < 0$ , e dessa forma o erro de sincronização gradativamente reduzirá ao longo do tempo até estar pertencente ao conjunto compacto  $\Omega$ . Ou seja, se  $\|e\|$  sair do conjunto  $\Omega$ ,  $\dot{V}$  se tornará menor e forçará a convergência do erro de sincronização para o conjunto residual  $\Omega$ , como mostrado em (3.19). Portanto, note que o erro de sincronização é uniformemente finalmente limitado e a convergência ocorre em tempo finito por causa da particularidade da forma de (3.19). Para maiores detalhes, vide (IOANNOU; SUN, 2012).

**Comentário 3:** O desempenho do sistema de sincronização é afetado diretamente por  $\psi$  no estado em que está presente o controle e indiretamente nos outros estados. Porém, existe uma limitação que é dada pelos distúrbios presentes nos estados subatuados, como é usual na literatura.

**Comentário 4:** Uma restrição suave foi imposta para esse teorema, já que é necessário que  $\theta$  seja menor que  $\alpha$  e, assim, seja também menor do que um. Para essa condição ser atendida basta descarregar todos os capacitores antes de iniciar o processo de sincronização. Essa é a principal peculiaridade da proposta, que é decorrente da Hipótese 2 e de se ter um controle subatuado. Note que para melhoria do desempenho, escalonamentos de amplitude podem ser utilizados de forma que os valores dos erros iniciais e dos limitantes dos estados mestres sejam pequenos. Esta técnica também possibilita tornar os sinais transmitidos menos vulneráveis a distúrbios.

**Comentário 5:** Para aplicações em telecomunicação segura às vezes é necessário que a mensagem seja transmitida a partir de estados em que não há a presença do sinal de controle. A razão disso é que o estado em que está o controle não consegue diferenciar distúrbios das mensagens caso sejam da mesma grandeza. O erro de sincronização do estado em que está presente o controle costuma ser insensível à presença de distúrbios.

**Comentário 6:** Como se pode ver na página 137 de (JOVIC, 2011), o erro da mensagem é igual ao erro de sincronização quando o erro de sincronização é convencionado como sendo igual ao estado mestre menos o estado escravo. Como se adotou a convenção que o erro de

sincronização é o estado escravo menos o estado mestre, então o erro da mensagem é igual ao oposto do erro de sincronização. O erro da mensagem é definido como a mensagem recuperada menos a mensagem original. É importante notar que se o erro de sincronização for limitado, então o erro da mensagem também será limitado. Adicionalmente, se a mensagem original também for limitada, então, conseqüentemente, a mensagem recuperada também será limitada. Portanto, caso a mensagem original seja limitada, o Teorema 1 apresentado nesse capítulo também será válido para mostrar a limitação do erro da mensagem numa aplicação em telecomunicação segura.

**Comentário 7:** Para se alterar o tempo de convergência e a escolha do dimensionamento dos componentes eletrônicos para implementação analógica, pode-se utilizar escalonamento da frequência.

### 3.4 Aplicação do esquema de sincronização em telecomunicação segura

Para a comunicação segura baseada em caos ocorrer primeiramente soma-se os sinais mensagem  $m_k(t)$  que se deseja transmitir, com  $k = 1.., 6$ , aos sinais aparentemente aleatórios  $x_{im}(t)$  com  $i = 1.., 7$  gerados a partir dos estados do sistema mestre. Os sinais mensagem podem ser adicionados a quaisquer sinais gerados pelos estados do sistema mestre, com exceção do sinal gerado pelo estado  $x_{2m}$ , pois este estado estará sob a atuação do sinal de controle. Assim, a quantidade máxima de sinais mensagem a serem transmitidas neste sistema passam a ser seis sinais.

O sinais criptografados  $s_k(t)$  resultantes da soma descrita no parágrafo anterior podem ser transmitidos por meio do canal de comunicação de modo que dificilmente sejam decodificados caso venham a ser interceptados por terceiros a menos que estes tenham a chave para a decodificação das mensagens que são: a lei de controle, a planta do sistema caótico e as condições iniciais.

Após a transmissão, os sinais recebidos  $r_k(t)$  pelo receptor, são os sinais  $s_k(t)$  codificados acrescidos de pequenos ruídos e distorções que são inerentes ao canal de comunicação. A decodificação destes sinais só é possível após se estabelecer uma sincronização entre os estados do sistema escravo  $x_{is}(t)$  e os estados do sistema mestre  $x_{im}(t)$  pela convergência dos estados do escravo para os estados do mestre. Feito isso, a mensagem recuperada  $\hat{m}_k(t)$  poderá ser obtida pela diferença entre  $r_k(t)$  e  $x_{is}(t)$  para cada estado do sistema que contenha alguma mensagem.

Conhecido como sistema caótico aditivo, o esquema para comunicação segura descrito é mostrado na figura 3.1 a seguir.

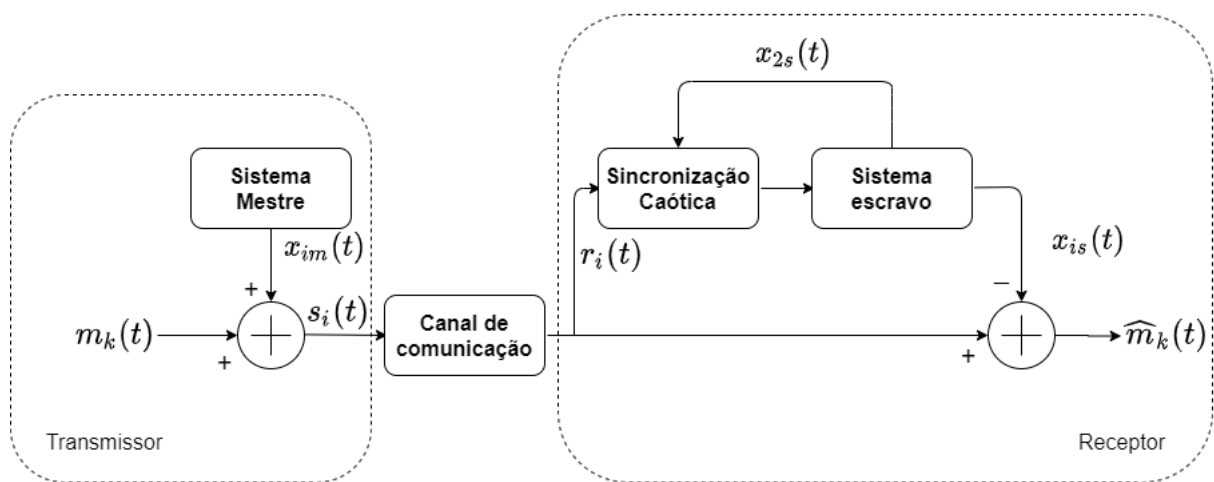


Figura 3.1: Representação em diagrama de blocos de um esquema de mascaramento caótico aditivo

# Capítulo 4

## Simulações

Neste capítulo são apresentadas as simulações computacionais que validam o esquema de sincronização para comunicação segura baseado no sistema hipercaótico (3.1) e que utiliza a lei de controle (3.10). Por meio das simulações em MATLAB/Simulink é possível verificar o comportamento do sistema, os erros de sincronização e a sua robustez quando o mesmo se encontra sob a atuação de distúrbios limitados, considerados em (3.3) e em (3.4), além de se mostrar a possibilidade de se transmitir de maneira segura até seis sinais mensagem simultaneamente. Já a simulação realizada no *software* Multisim nos mostra a possibilidade de se implementar o esquema de sincronização proposto utilizando elementos de eletrônica analógica de baixo custo.

### 4.1 Simulação usando o Matlab/Simulink

A simulação presente nesta seção foi realizada utilizando-se o *software* MATLAB R2020a (9.8.0.1323502) 64-bit (win64), em um computador Dell Inspiron 5421 com processador Intel Core i7-3537U, GPU NVIDIA GeForce GT 730M e sistema operacional Windows 10 Home Single Language versão 2004. Os códigos dos arquivos utilizados nesta simulação encontram-se nos Apêndices A e B.

Para esta simulação, foi utilizado o parâmetro  $\psi = 1000$  sendo que o mesmo foi aplicado na lei de controle proporcional em (3.10). O método utilizado foi o ode113 com uma janela de duração de 15 segundos. As condições iniciais consideradas para o sistema mestre foram  $x_{1m}(0) = -1$ ;  $x_{2m}(0) = 1$ ;  $x_{3m}(0) = -0.5$ ;  $x_{4m}(0) = 0.5$ ;  $x_{5m}(0) = 0$ ;  $x_{6m}(0) = -0.25$  e  $x_{7m}(0) = 0.25$ . E as condições iniciais consideradas para o sistema escravo foram  $x_{1s}(0) = 5$ ;  $x_{2s}(0) = -5$ ;  $x_{3s}(0) = 2.5$ ;  $x_{4s}(0) = -2.5$ ;  $x_{5s}(0) = -1$ ;  $x_{6s}(0) = 1.25$  e  $x_{7s}(0) = -1.25$ .

Além disso, esta simulação considera a transmissão simultânea dos seis sinais mensagem a

seguir:

$$\begin{aligned}m_1(t) &= 0.2[4\text{sen}(2\pi 0.6t) + 3\text{sen}(2\pi 1.2t) + 0.8\text{cos}(2\pi 2t) + 2\text{square}(2\pi 0.4t)] \\m_2(t) &= 0.2[3\text{sen}(2\pi 0.8t + \frac{\pi}{2}) + 2\text{cos}(2\pi 0.6t)] \\m_3(t) &= 0.3[2\text{sawtooth}(2\pi 0.5t) + 0.75\text{square}(2\pi 0.9t) + 1.1\text{cos}(2\pi 0.6t)] \\m_4(t) &= 0.4[\text{square}(2\pi 0.5t) + 1.2\text{cos}(2\pi 0.9t) - 0.8\text{sawtooth}(2\pi 0.6t)] \\m_5(t) &= -0.3\text{cos}(2\pi 0.9t) \\m_6(t) &= 0.3\text{cos}(8t) + 0.5\text{sen}(5t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Sendo que cada um destes seis sinais mensagens, mostrados nas figuras (4.1 a 4.6), foram inseridos em estados diferentes do sistema com exceção do segundo estado, que está sob a atuação do sinal de controle.

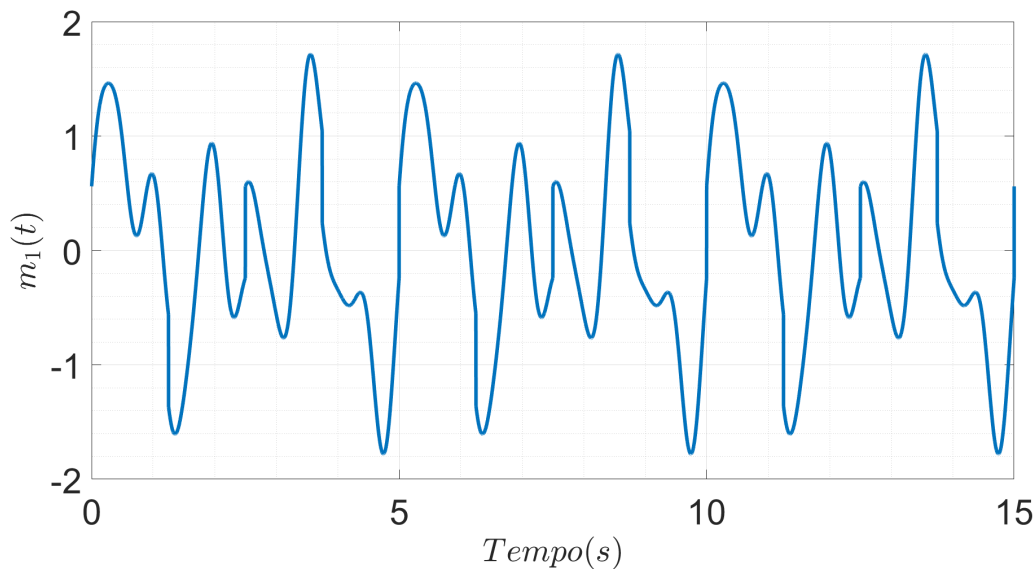


Figura 4.1: Sinal mensagem  $m_1(t)$  inserido no primeiro estado do sistema.

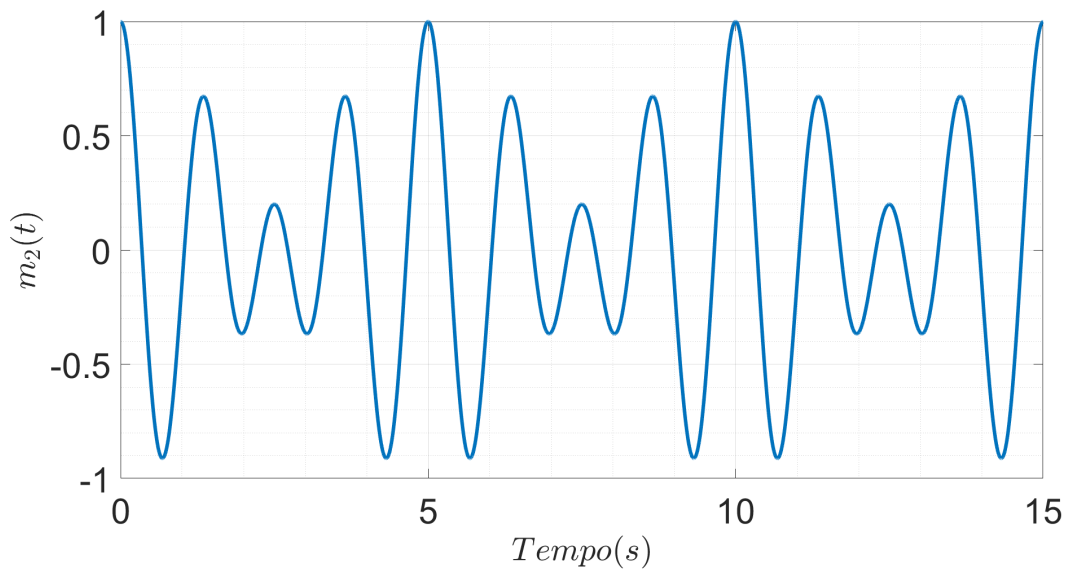


Figura 4.2: Sinal mensagem  $m_2(t)$  inserido no terceiro estado do sistema.

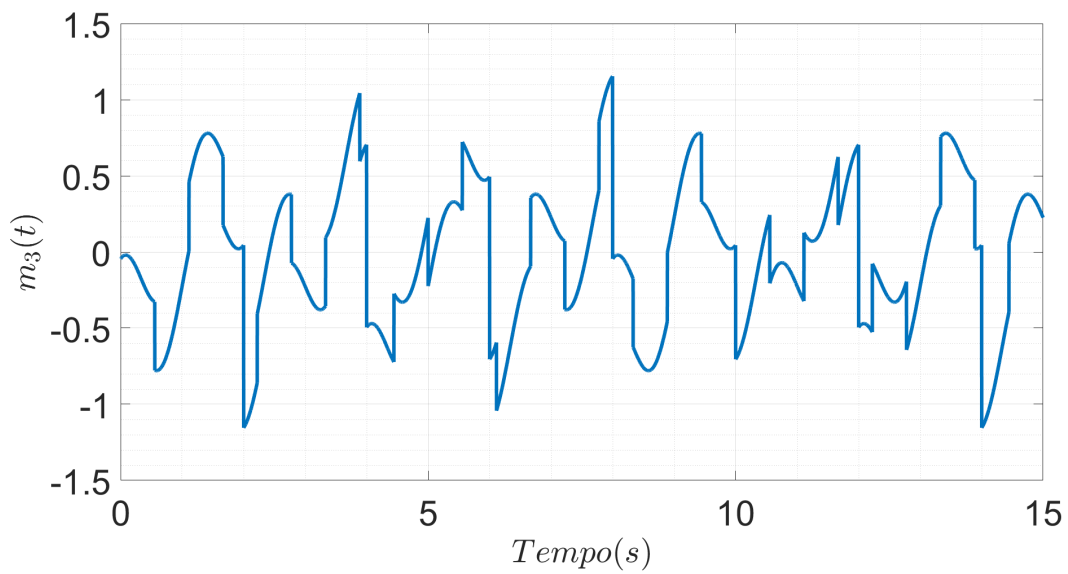


Figura 4.3: Sinal mensagem  $m_3(t)$  inserido no quarto estado do sistema.

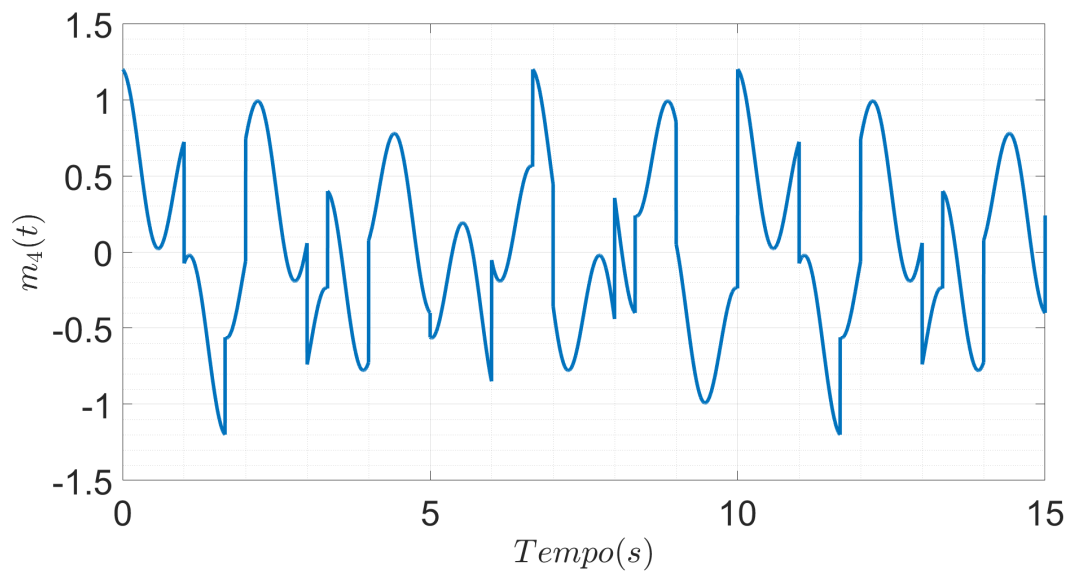


Figura 4.4: Sinal mensagem  $m_4(t)$  inserido no quinto estado do sistema.

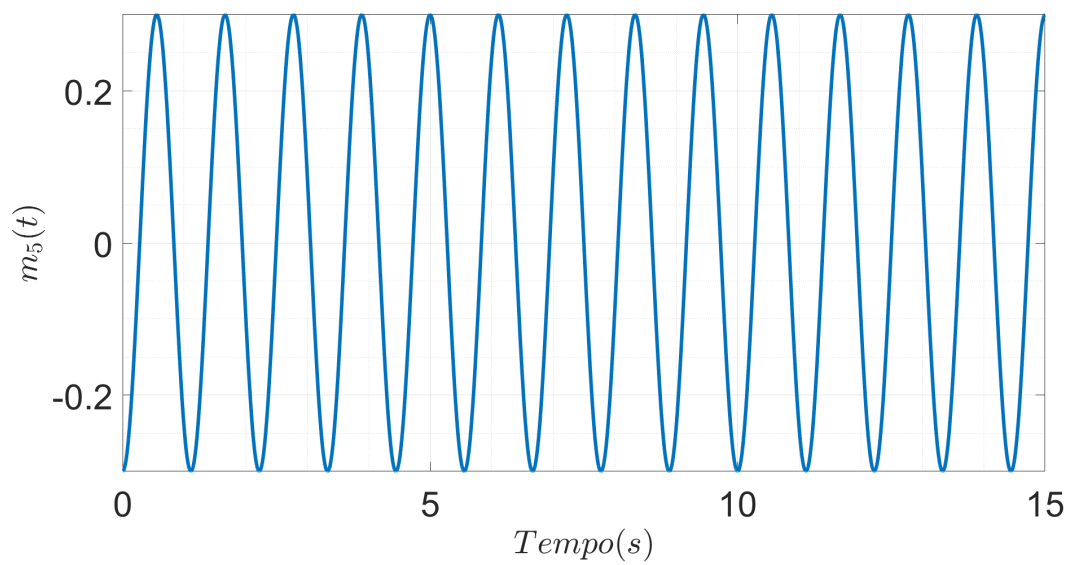


Figura 4.5: Sinal mensagem  $m_5(t)$  inserido no sexto estado do sistema.



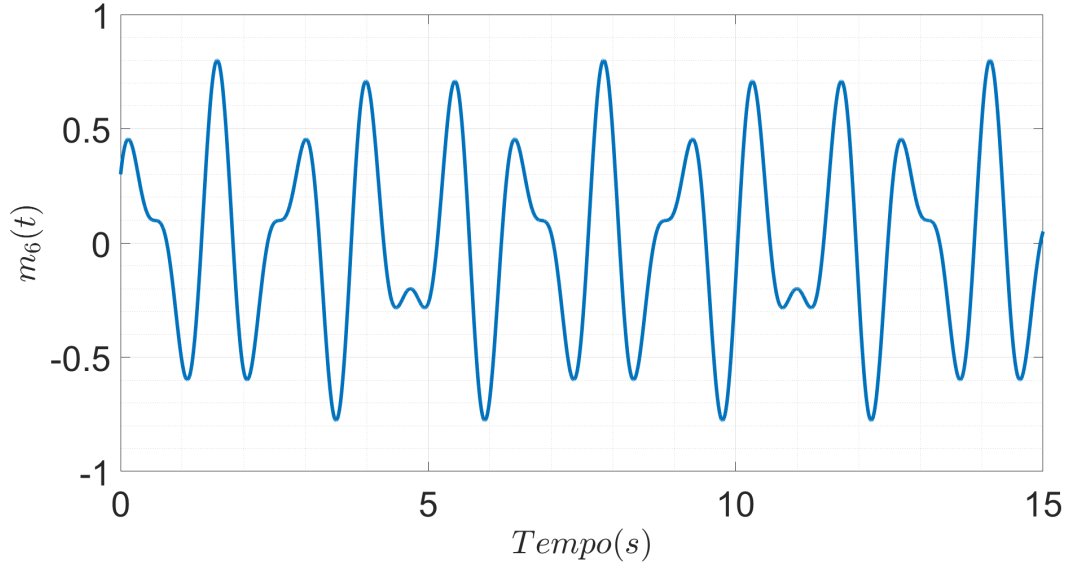


Figura 4.6: Sinal mensagem  $m_6(t)$  inserido no sétimo estado do sistema.

Para representar a presença de distúrbios limitados, foram considerados os três sinais a seguir:

$$\begin{aligned}
 \text{disturbio1}(t) &= 0.2[0.15\text{sen}(2\pi 5t) + 0.05\text{cos}(2\pi 12t) + 0.1\text{square}(2\pi 3t) \\
 &\quad + 0.05\text{cos}(2\pi 20t) - 0.05\text{sawtooth}(2\pi 7t) + 0.2\text{sen}(2\pi 4t) \\
 &\quad - 0.2\text{cos}(2\pi 9t) - 0.1\text{cos}(2\pi 37t) + 0.1\text{sen}(2\pi 60t + \frac{\pi}{17})] \\
 \text{disturbio2}(t) &= 0.15[0.15\text{sen}(2\pi 17t) + 0.15\text{cos}(2\pi 6t) + 0.1\text{square}(2\pi 2t) \\
 &\quad + 0.15\text{cos}(2\pi 23t) - 0.05\text{sawtooth}(2\pi 9t) + 0.1\text{sen}(2\pi 40t) \\
 &\quad - 0.1\text{cos}(2\pi 50t) - 0.1\text{cos}(2\pi 2t) + 0.1\text{sen}(2\pi 9t + \frac{\pi}{17})] \\
 \text{disturbio3}(t) &= 0.08[0.15\text{sawtooth}(2\pi 6t) + 0.15\text{sen}(2\pi 25t) \\
 &\quad - 0.15\text{sawtooth}(2\pi 14t) - 0.15\text{square}(2\pi 3t) + 0.05\text{cos}(2\pi 2t) \\
 &\quad + 0.05\text{sen}(2\pi 42t) + 0.2\text{cos}(2\pi 7t + \pi) + 0.1\text{sen}(2\pi 13t)]
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sendo que o  $\text{disturbio1}(t)$  foi inserido no primeiro estado do sistema, ou seja,  $h_1(t) = \text{disturbio1}(t)$ , o  $\text{disturbio2}(t)$  foi inserido no terceiro e no quinto estado do sistema escravo, ou seja,  $h_3(t) = h_5(t) = \text{disturbio2}(t)$ , e o  $\text{disturbio3}(t)$  foi inserido no quarto, no sexto e no sétimo estado do sistema escravo, ou seja,  $h_4(t) = h_6(t) = h_7(t) = \text{disturbio3}(t)$ . Os distúrbios foram escolhidos de modo que contivessem componentes espectrais em diversos valores de frequências, de forma que se aproximassem melhor de um sinal de natureza ruidosa encontrado no mundo real.

### 4.1.1 Desempenho de sincronização

A seguir, são apresentados os resultados das simulações que mostram o desempenho da sincronização entre os estados do sistema escravo e os estados do sistema mestre (4.7 a 4.13).

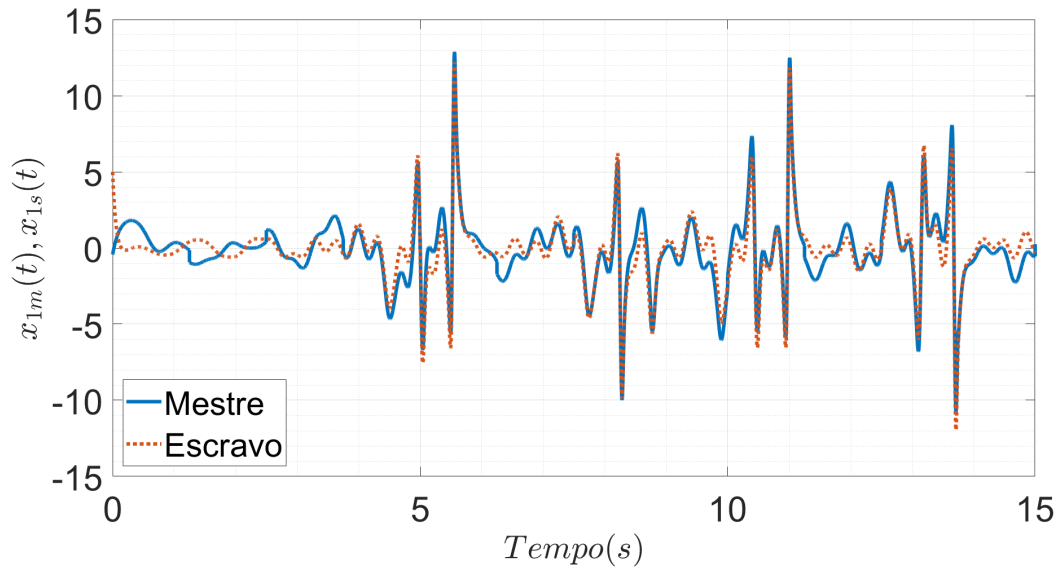


Figura 4.7: Desempenho da sincronização de  $x_{1s}$ .

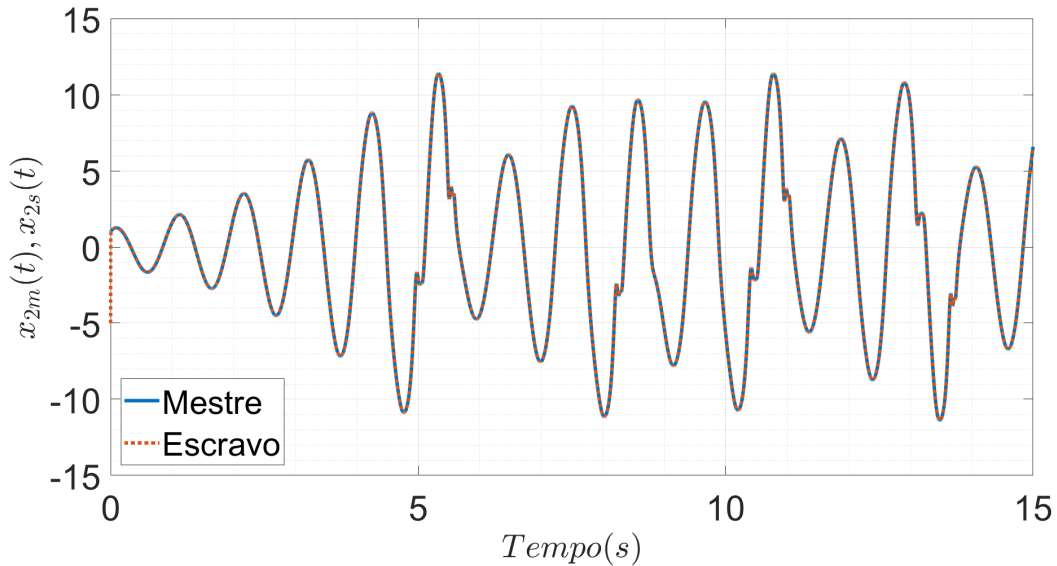


Figura 4.8: Desempenho da sincronização de  $x_{2s}$ .

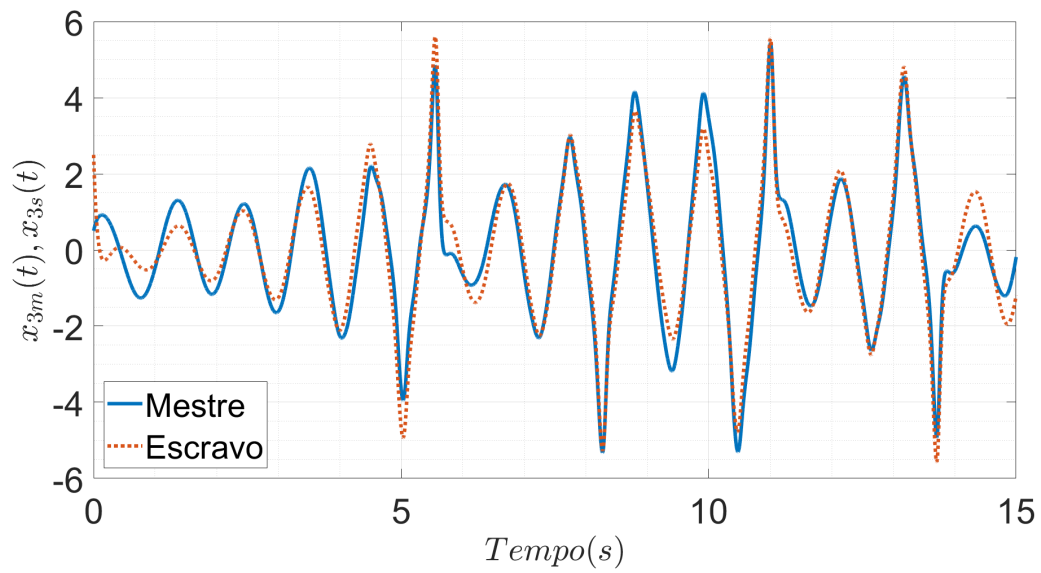


Figura 4.9: Desempenho da sincronização de  $x_{3s}$ .

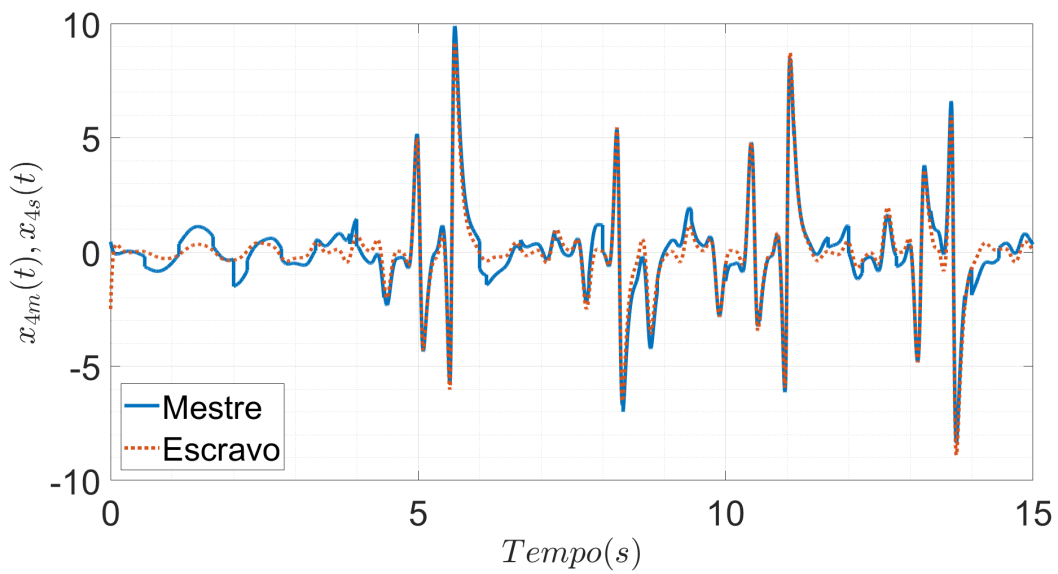


Figura 4.10: Desempenho da sincronização de  $x_{4s}$ .

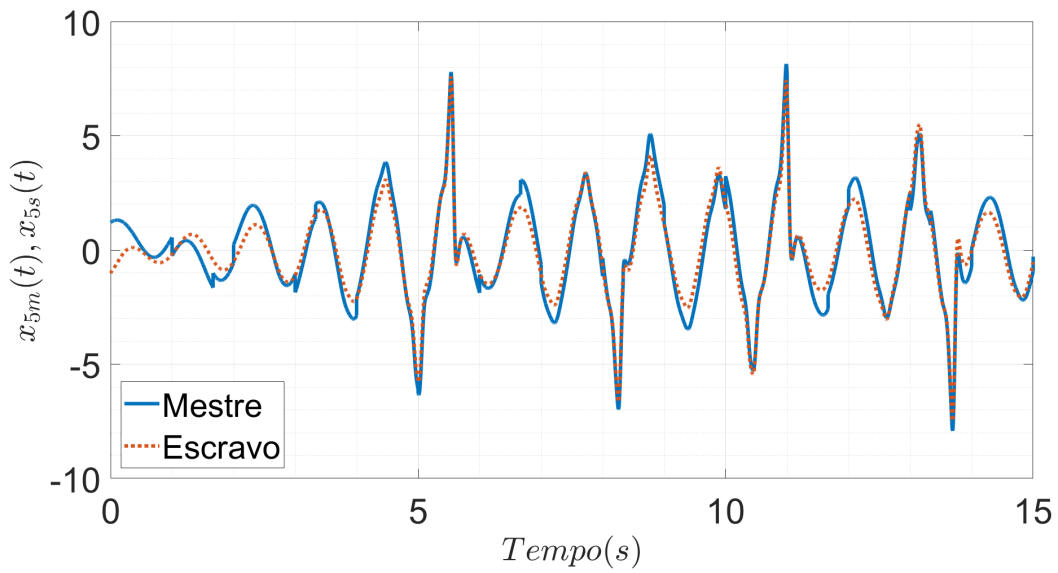


Figura 4.11: Desempenho da sincronização de  $x_{5s}$ .

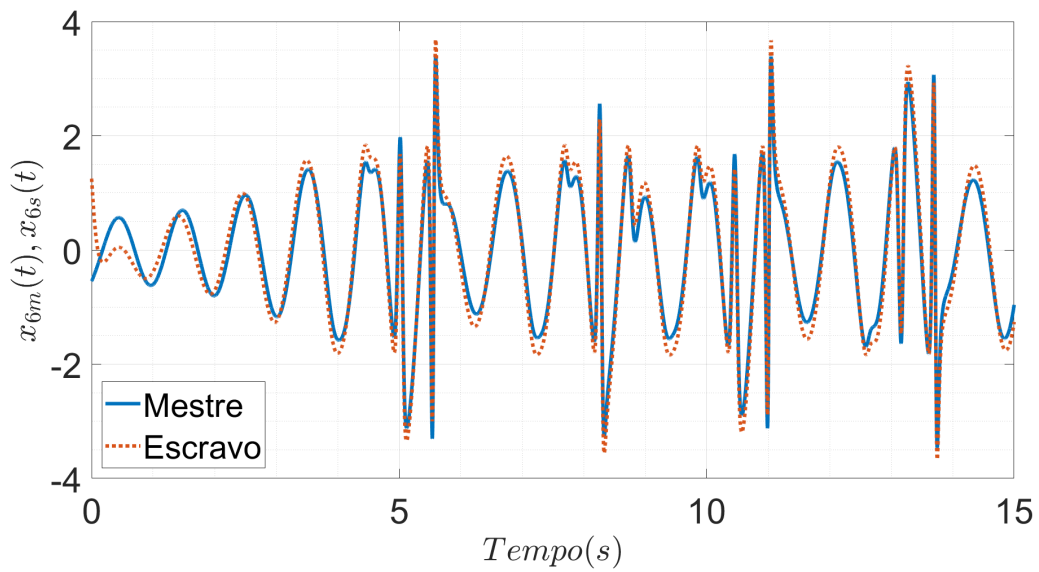


Figura 4.12: Desempenho da sincronização de  $x_{6s}$ .

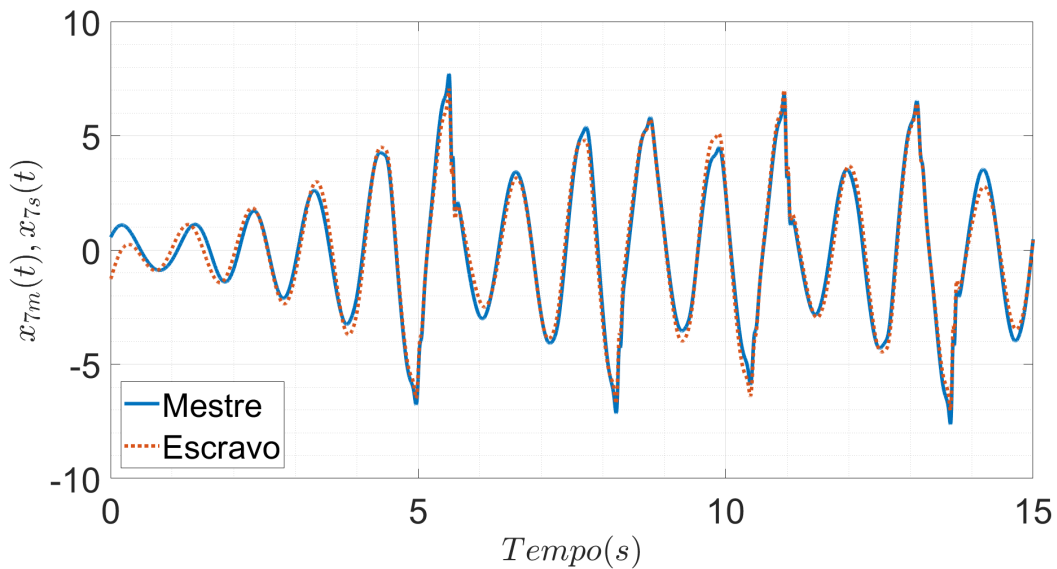


Figura 4.13: Desempenho da sincronização de  $x_{7s}$ .

Observe que a sincronização é realizada de forma bem sucedida apesar de haver algumas diferenças pequenas entre os estados dos sistemas mestre e escravo que são causadas pela presença dos distúrbios limitados. Conforme será mostrado adiante, estas pequenas diferenças não são prejudiciais à sincronização a ponto de impedir a recuperação dos seis sinais mensagem no receptor (sistema escravo) de maneira satisfatória.

#### 4.1.2 Mensagens originais e mensagens criptografadas

Nas figuras a seguir temos os gráficos que mostram as curvas de cada sinal mensagem plotadas juntas com as suas respectivas versões criptografadas pelo esquema de sincronização baseado em caos, para fins de comparação (4.14 a 4.19).

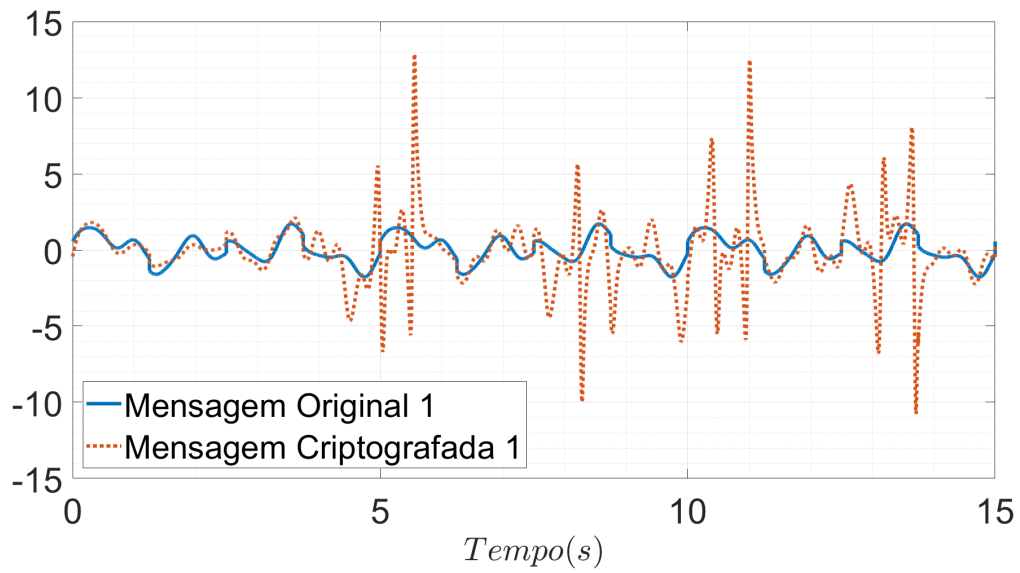


Figura 4.14: Comparação entre a mensagem original  $m_1(t)$  e a mensagem criptografada  $r_1(t)$ .

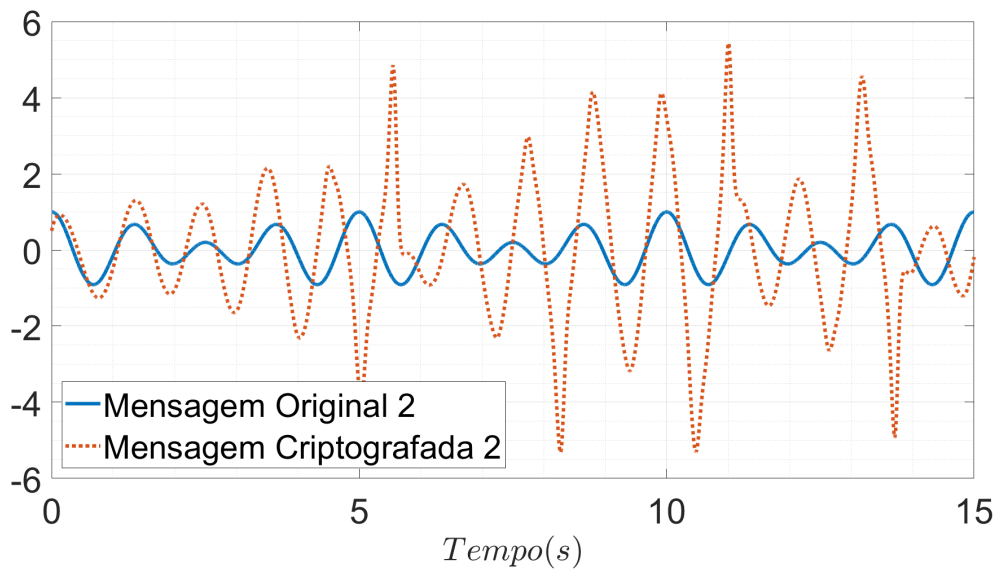


Figura 4.15: Comparação entre a mensagem original  $m_2(t)$  e a mensagem criptografada  $r_2(t)$ .

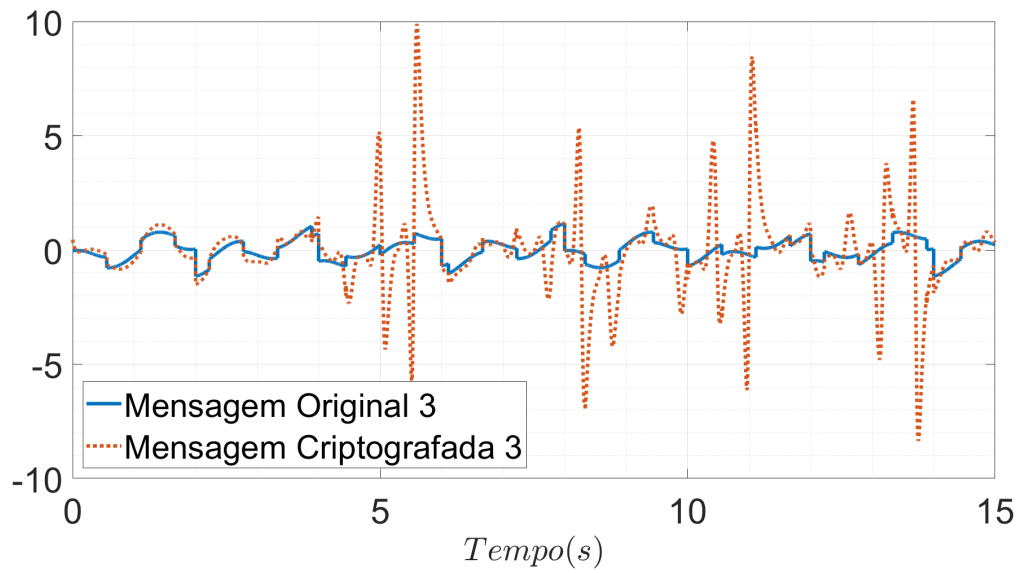


Figura 4.16: Comparação entre a mensagem original  $m_3(t)$  e a mensagem criptografada  $r_3(t)$ .

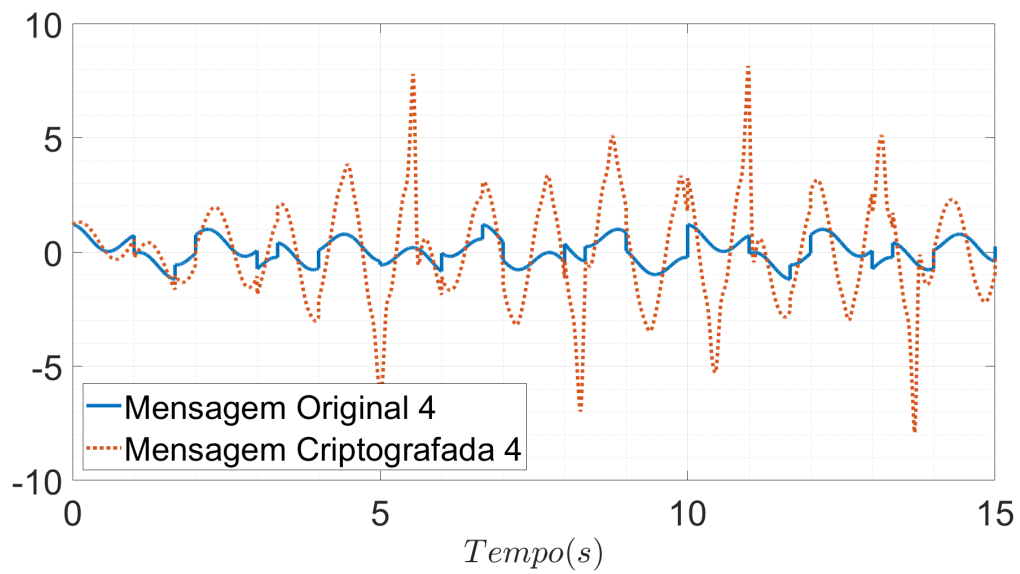


Figura 4.17: Comparação entre a mensagem original  $m_4(t)$  e a mensagem criptografada  $r_4(t)$ .

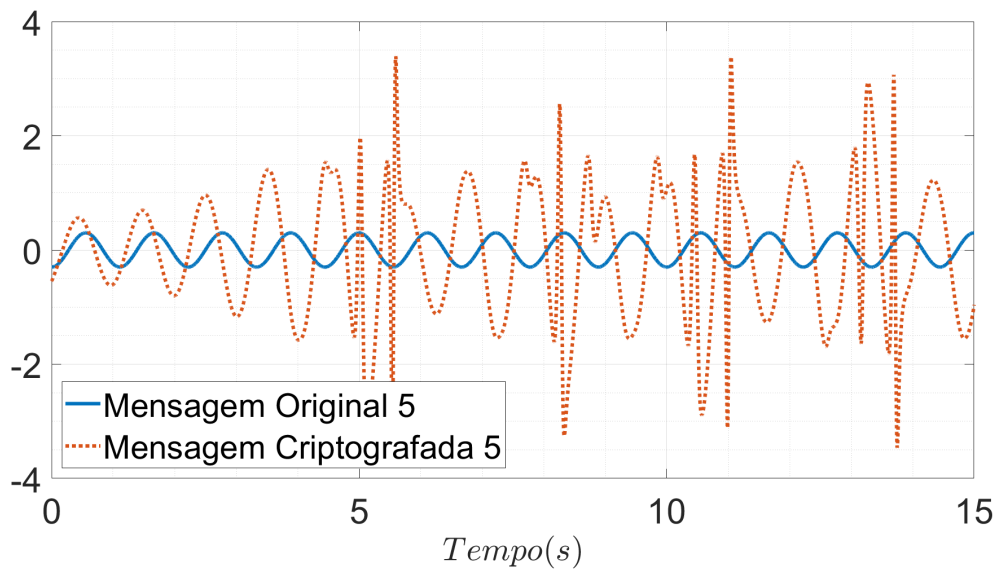


Figura 4.18: Comparação entre a mensagem original  $m_5(t)$  e a mensagem criptografada  $r_5(t)$ .

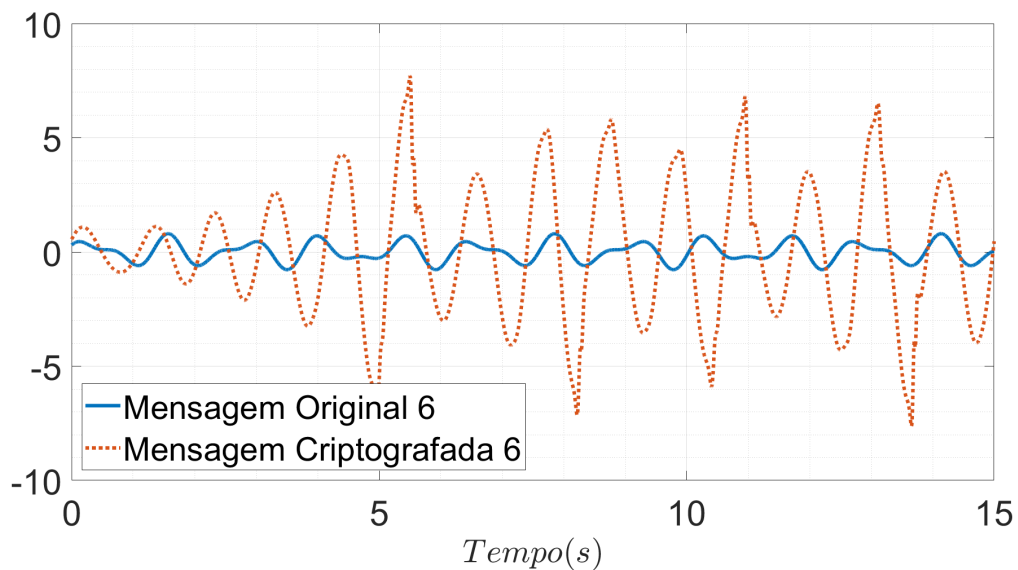


Figura 4.19: Comparação entre a mensagem original  $m_6(t)$  e a mensagem criptografada  $r_6(t)$ .

Observe que as mensagens criptografadas são bem distintas das mensagens originais de forma que é praticamente impossível extrair as mensagens originais a partir das mensagens criptografadas sem que se conheça a chave para se quebrar a criptografia do sistema. Isso mostra que a criptografia dos sinais mensagem utilizados foram realizadas de maneira bem sucedida.



### 4.1.3 Mensagens originais e mensagens recuperadas

As próximas figuras mostram a plotagem das mensagens originais  $m_k(t)$  e das mensagens recuperadas  $\hat{m}_k(s)$ ,  $k = 1..6$  (4.20 a 4.25).

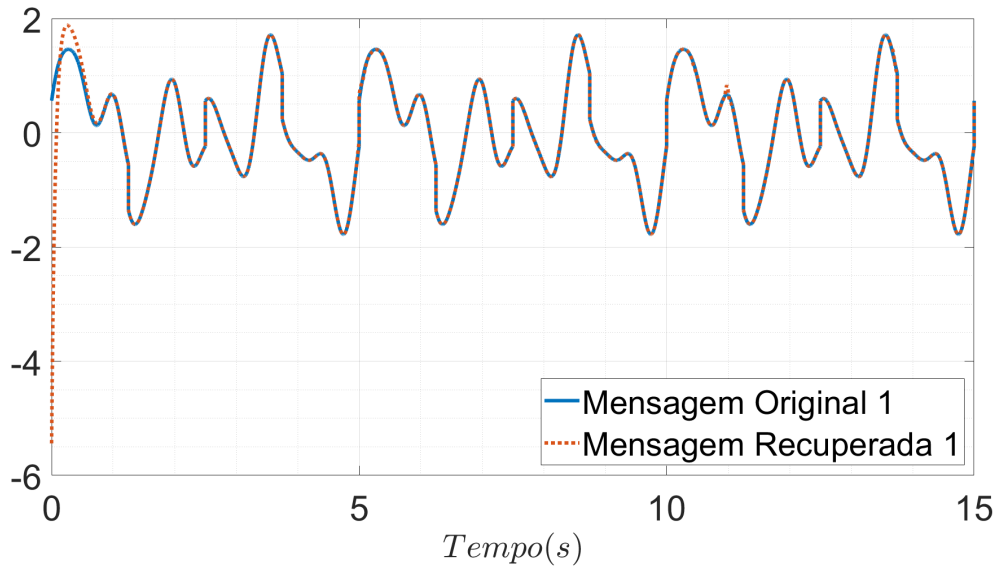


Figura 4.20: Comparação entre a mensagem original  $m_1(t)$  e a mensagem recuperada  $\hat{m}_1(t)$ .

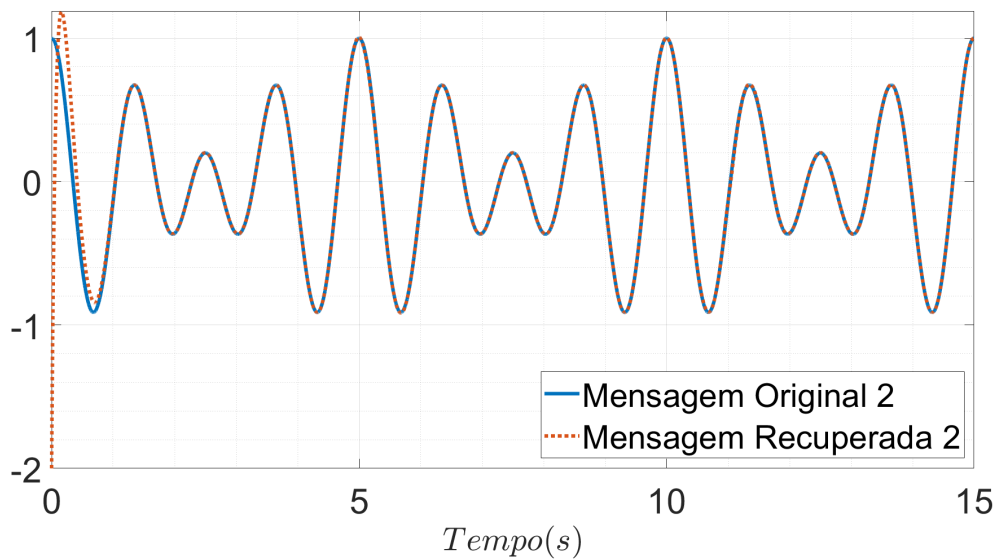


Figura 4.21: Comparação entre a mensagem original  $m_2(t)$  e a mensagem recuperada  $\hat{m}_2(t)$ .

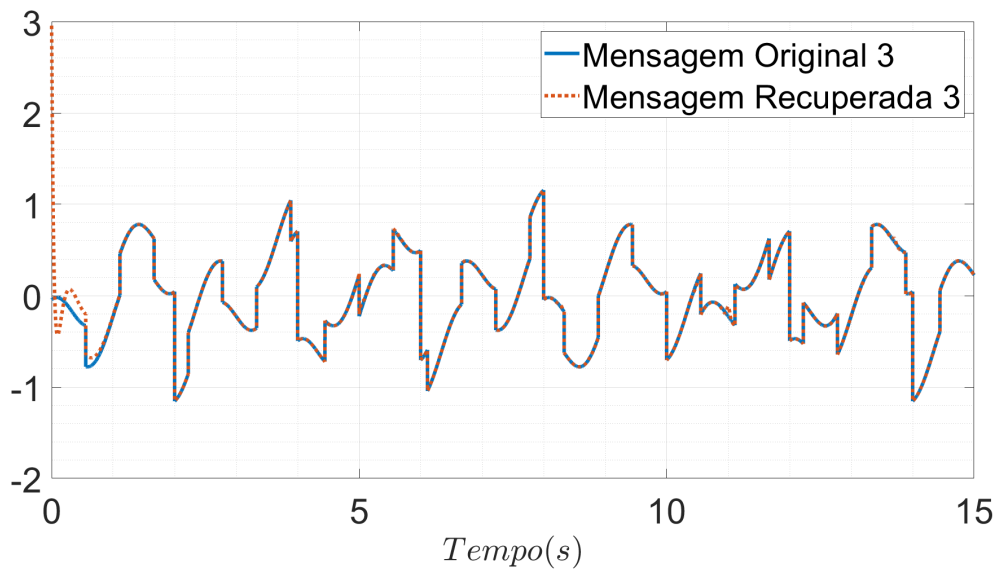


Figura 4.22: Comparação entre a mensagem original  $m_3(t)$  e a mensagem recuperada  $\hat{m}_3(t)$ .

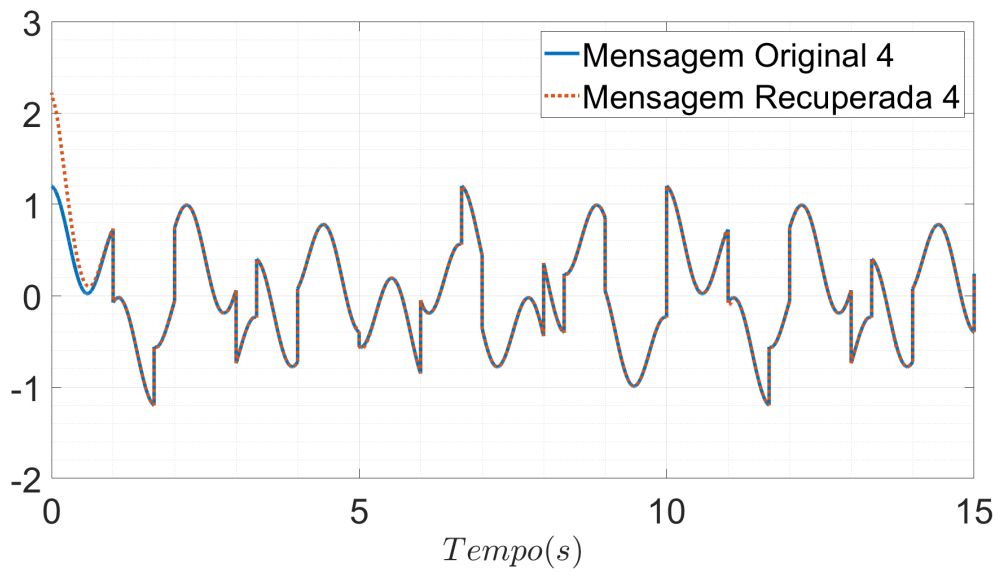


Figura 4.23: Comparação entre a mensagem original  $m_4(t)$  e a mensagem recuperada  $\hat{m}_4(t)$ .

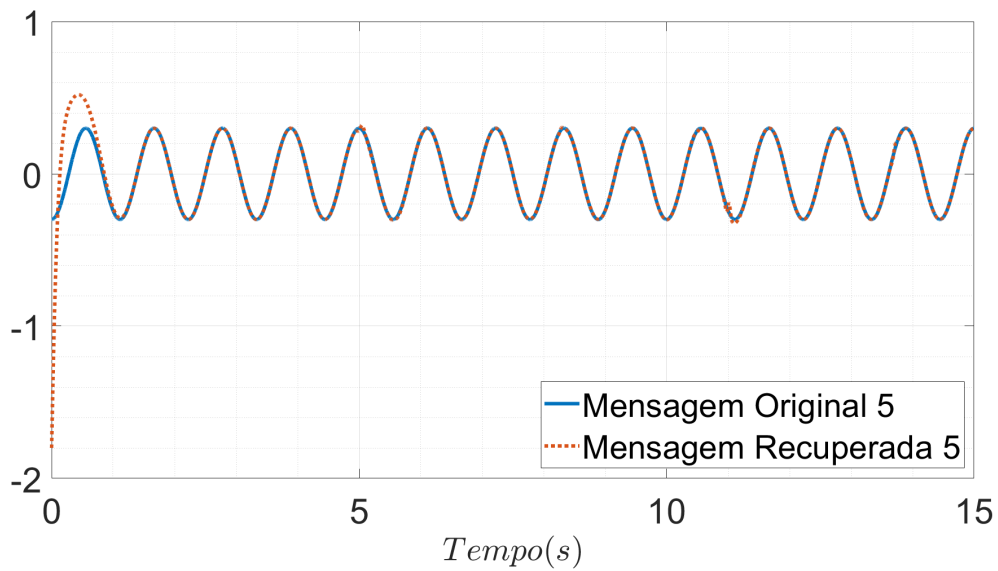


Figura 4.24: Comparação entre a mensagem original  $m_5(t)$  e a mensagem recuperada  $\hat{m}_5(t)$ .

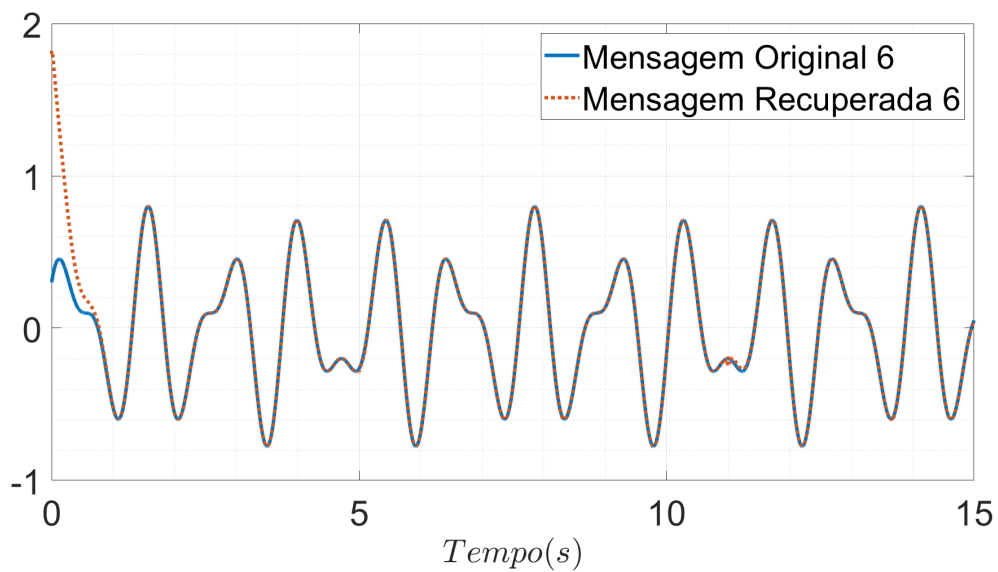


Figura 4.25: Comparação entre a mensagem original  $m_6(t)$  e a mensagem recuperada  $\hat{m}_6(t)$ .

Ao se comparar as mensagens recuperadas com as suas respectivas mensagens originais verifica-se que as mesmas são muito semelhantes após cerca de um segundo o que indica que a recuperação da mensagem se deu de maneira bem sucedida e que o esquema de sincronização pode ser utilizado para a aplicação em telecomunicação segura.

#### 4.1.4 Erros de sincronização

As figuras a seguir mostram as diferenças entre as mensagens originais e recuperadas (4.26 a 4.31).

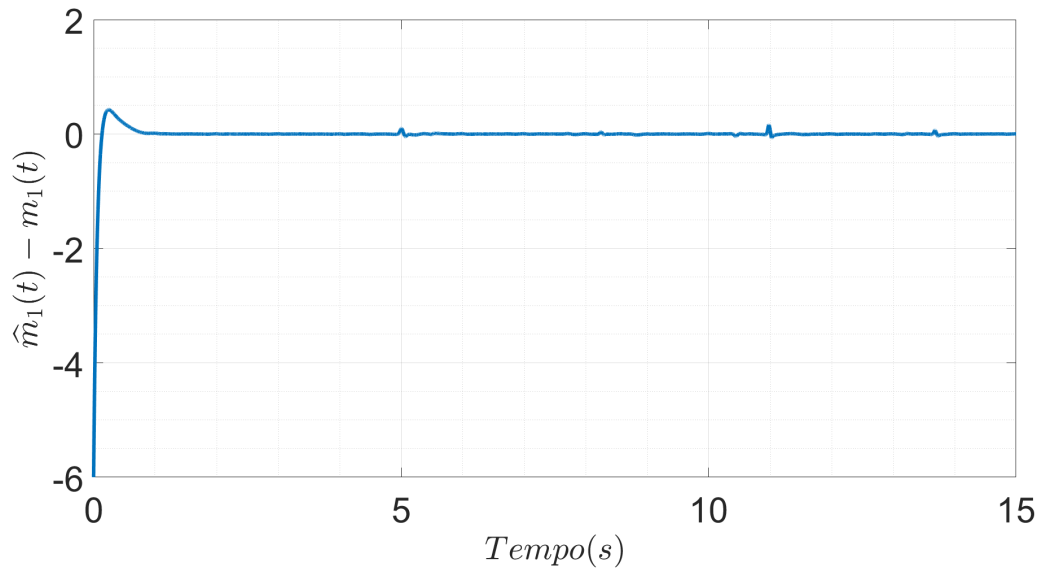


Figura 4.26: Erro entre  $\hat{m}_1(t)$  e  $m_1(t)$ .

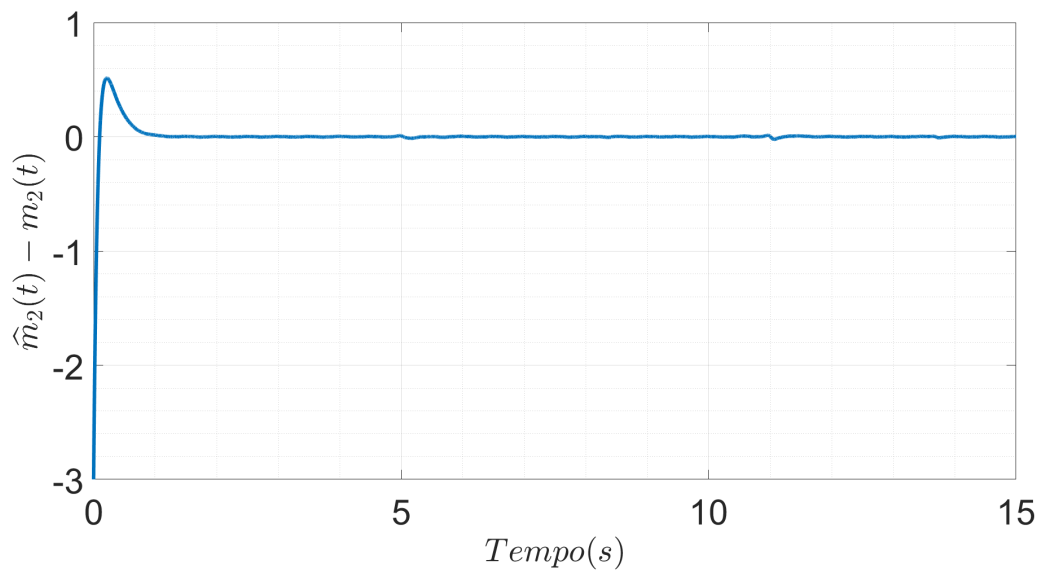


Figura 4.27: Erro entre  $\hat{m}_2(t)$  e  $m_2(t)$ .

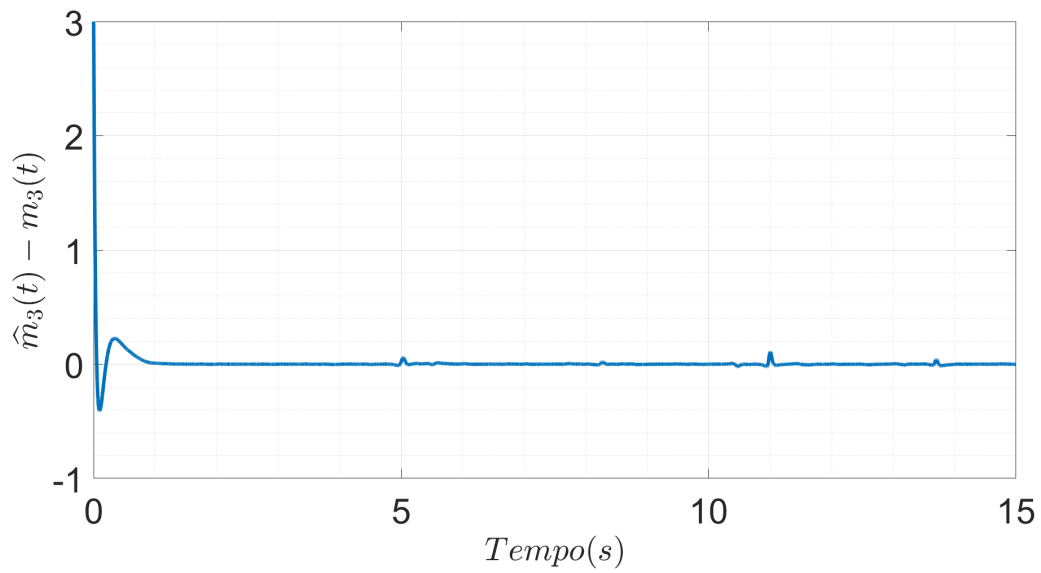


Figura 4.28: Erro entre  $\hat{m}_3(t)$  e  $m_3(t)$ .

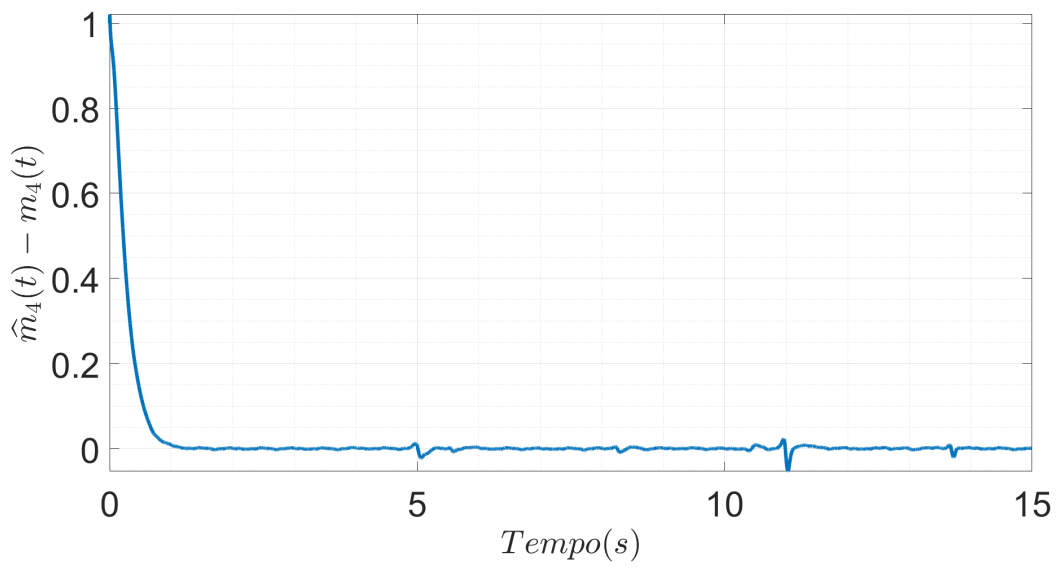


Figura 4.29: Erro entre  $\hat{m}_4(t)$  e  $m_4(t)$ .

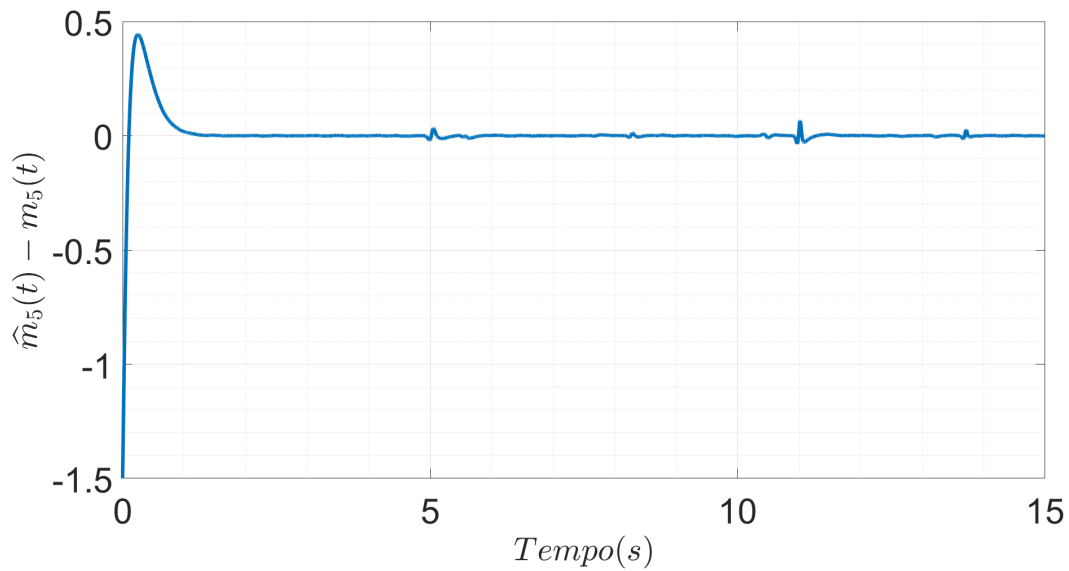


Figura 4.30: Erro entre  $\hat{m}_5(t)$  e  $m_5(t)$ .

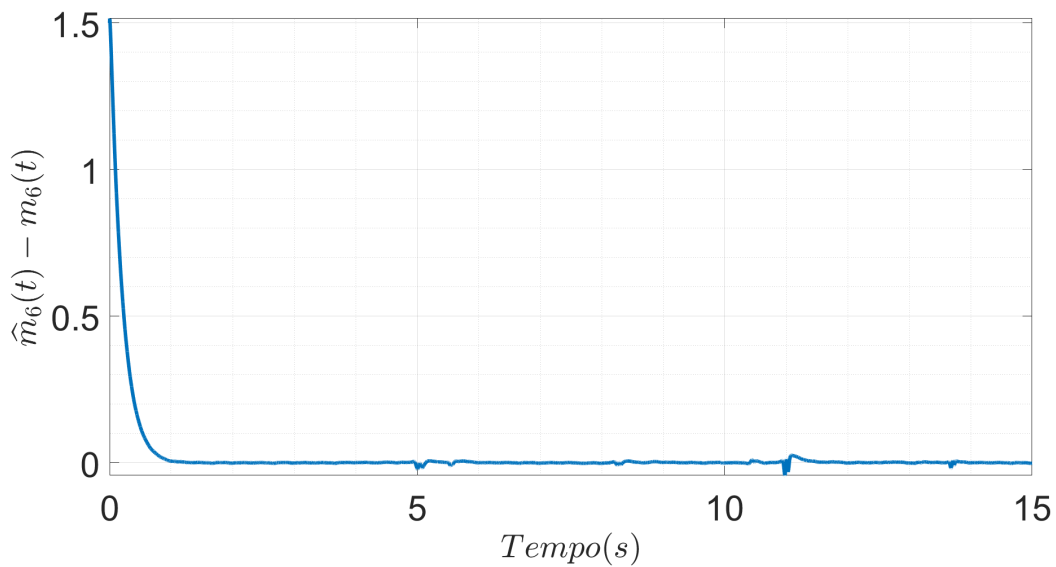


Figura 4.31: Erro entre  $\hat{m}_6(t)$  e  $m_6(t)$ .

Note que os erros de sincronização não convergem para zero mas se mantêm em valores próximos de zero com o passar do tempo. Este resultado valida o que foi demonstrado no capítulo 3 onde, pela teoria de estabilidade de Lyapunov, o erro de sincronização se mantém em valores limitados com o passar do tempo.

## 4.2 Simulação utilizando o Multisim

Nesta seção é mostrada a simulação de uma implementação circuital do esquema para telecomunicação segura baseado em caos proposto no capítulo 3, utilizando-se o *software* Multisim 14.1 da National Instruments em um computador Dell Inspiron 5421 com processador Intel Core i7-3537U, GPU NVIDIA GeForce GT 730M e sistema operacional Windows 10 Home Single Language versão 2004.

Com o intuito de se realizar uma simulação com os resultados mais fiéis possíveis a uma implementação prática do circuito utilizando-se componentes eletrônicos reais, o circuito implementado via *software* fez uso de amplificadores operacionais TL082CP, que são componentes que consideram as não idealidades e as limitações destes amplificadores durante a realização da simulação.

Para se adaptar os sinais gerados pelos sistemas mestre e escravo à uma faixa de melhor operação do amplificador operacional TL082CP, ou seja, a uma faixa de amplitude e frequência em que o seu comportamento se assemelhasse ao comportamento ideal evitando a saturação do amp-op e a supressão de componentes frequenciais dos sinais gerados pelos sistemas caóticos, foi realizado um escalonamento em amplitude e em frequência sobre o sistema hipercaótico (3.1) o qual o esquema para telecomunicação segura simulado se baseia.

Desta forma, ao se reduzir a amplitude em 20 vezes e a frequência em 20 vezes, o sistema (3.1) escalonado resulta em:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= -\frac{3}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_5 - 100X_5X_6X_7 \\ \dot{X}_2 &= -\frac{1}{40}X_2 - \frac{5}{4}X_6 + 20X_1X_6X_7 \\ \dot{X}_3 &= -\frac{3}{4}X_3 + \frac{3}{4}X_5 - 2X_1X_2X_7 \\ \dot{X}_4 &= -\frac{3}{4}X_4 + \frac{1}{2}X_1 + 20X_1X_2X_3 \\ \dot{X}_5 &= -\frac{3}{4}X_5 + \frac{1}{2}X_7 - 20X_2X_3X_4 \\ \dot{X}_6 &= -\frac{1}{2}X_6 + \frac{1}{2}X_5 + 20X_3X_4X_5 \\ \dot{X}_7 &= -\frac{1}{4}X_7 + \frac{1}{5}X_2 - 30X_4X_5X_6\end{aligned}\tag{4.3}$$

As condições iniciais utilizadas nesta simulação para o sistema mestre escalonado foram  $X_{1m}(0) = -0.05$ ;  $X_{2m}(0) = 0.05$ ;  $X_{3m}(0) = -0.025$ ;  $X_{4m}(0) = 0.025$ ;  $X_{5m}(0) = 0$ ;  $X_{6m}(0) = -0.0125$  e  $X_{7m}(0) = 0.0125$  e as condições iniciais consideradas para o sistema

escravo foram  $X_{1s}(0) = 0.25$ ;  $X_{2s}(0) = -0.25$ ;  $X_{3s}(0) = 0.125$ ;  $X_{4s}(0) = -0.125$ ;  $X_{5s}(0) = 0.05$ ;  $X_{6s}(0) = 0.0625$  e  $X_{7s}(0) = -0.0625$ . Estas condições iniciais são carregadas nos capacitores do circuito. No circuito de controle, o parâmetro utilizado foi  $\psi = 10$ .

Nesta simulação foi inserido somente um sinal mensagem  $m(t) = 20\text{sen}(2\pi 0.06t)[mV]$  na sexta equação de estado do sistema. A mensagem foi gerada utilizando-se um gerador de funções.

### 4.2.1 Esquemas dos circuitos

Os circuitos para a obtenção da mensagem criptografada  $s(t)$ , da mensagem recuperada  $\hat{m}(t)$ , do erro de sincronização  $e(t)$ , a planta do sistema mestre (transmissor) e a planta do sistema escravo (receptor) são mostrados, respectivamente, nas figuras (4.32 a 4.34) a seguir:

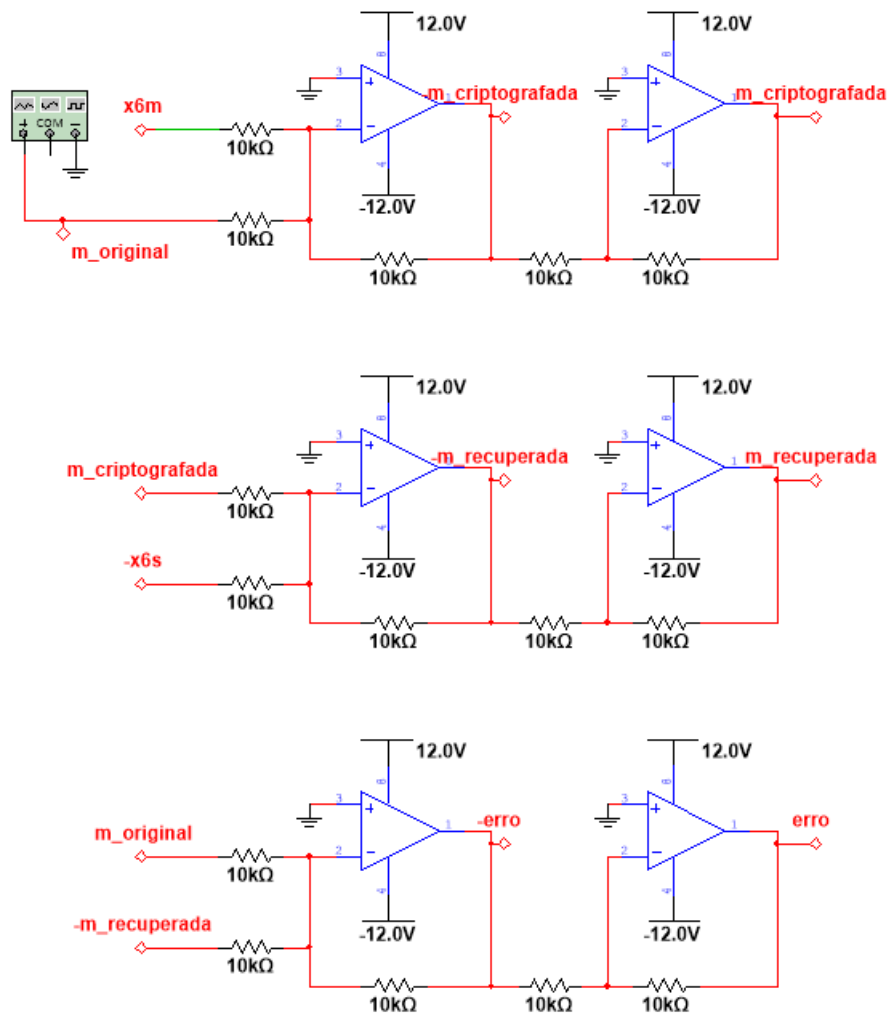


Figura 4.32: Circuitos para a obtenção da mensagem criptografada  $s(t)$ , da mensagem recuperada  $\hat{m}(t)$  e do erro  $e(t)$



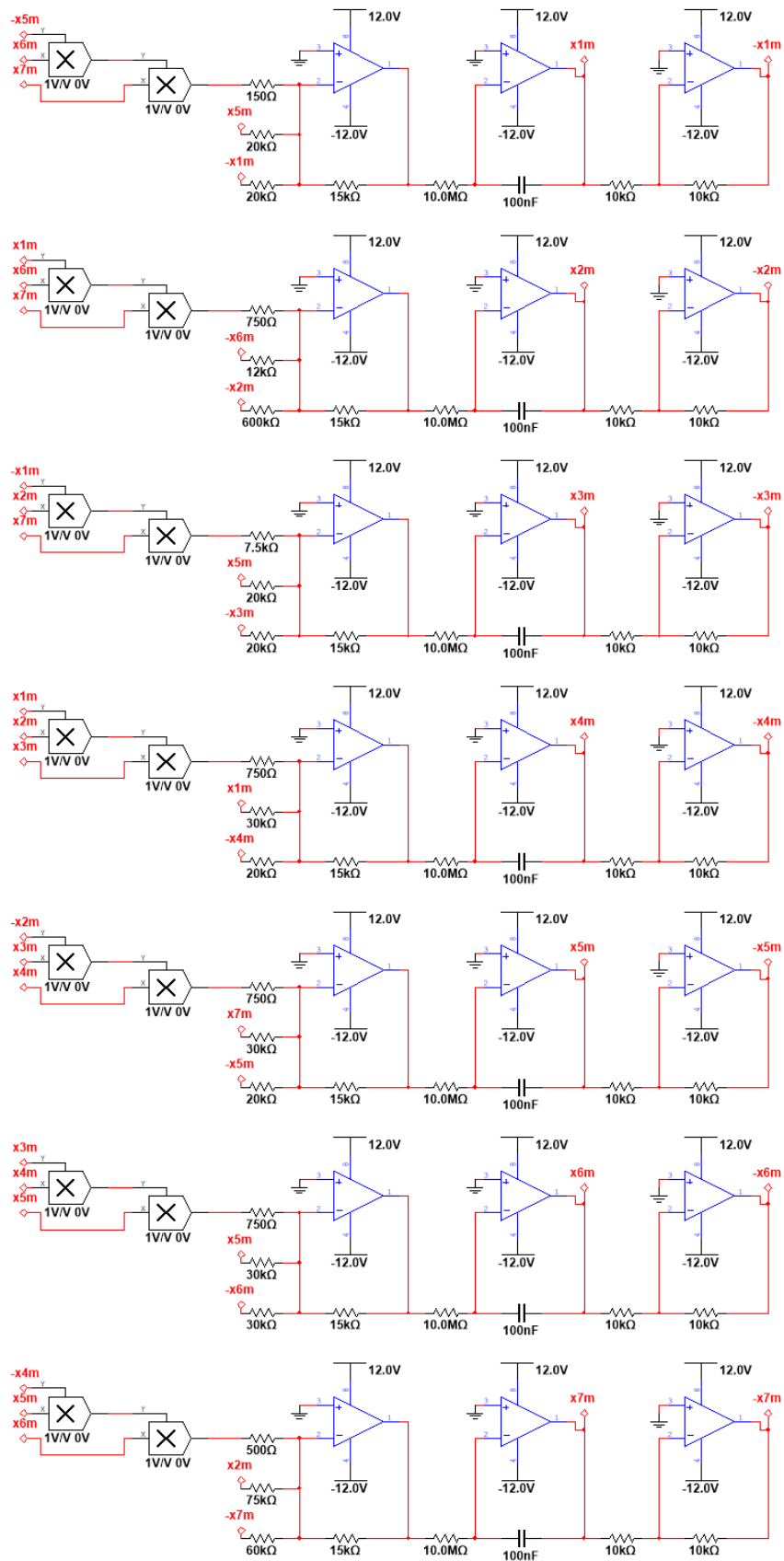


Figura 4.33: Planta do sistema mestre

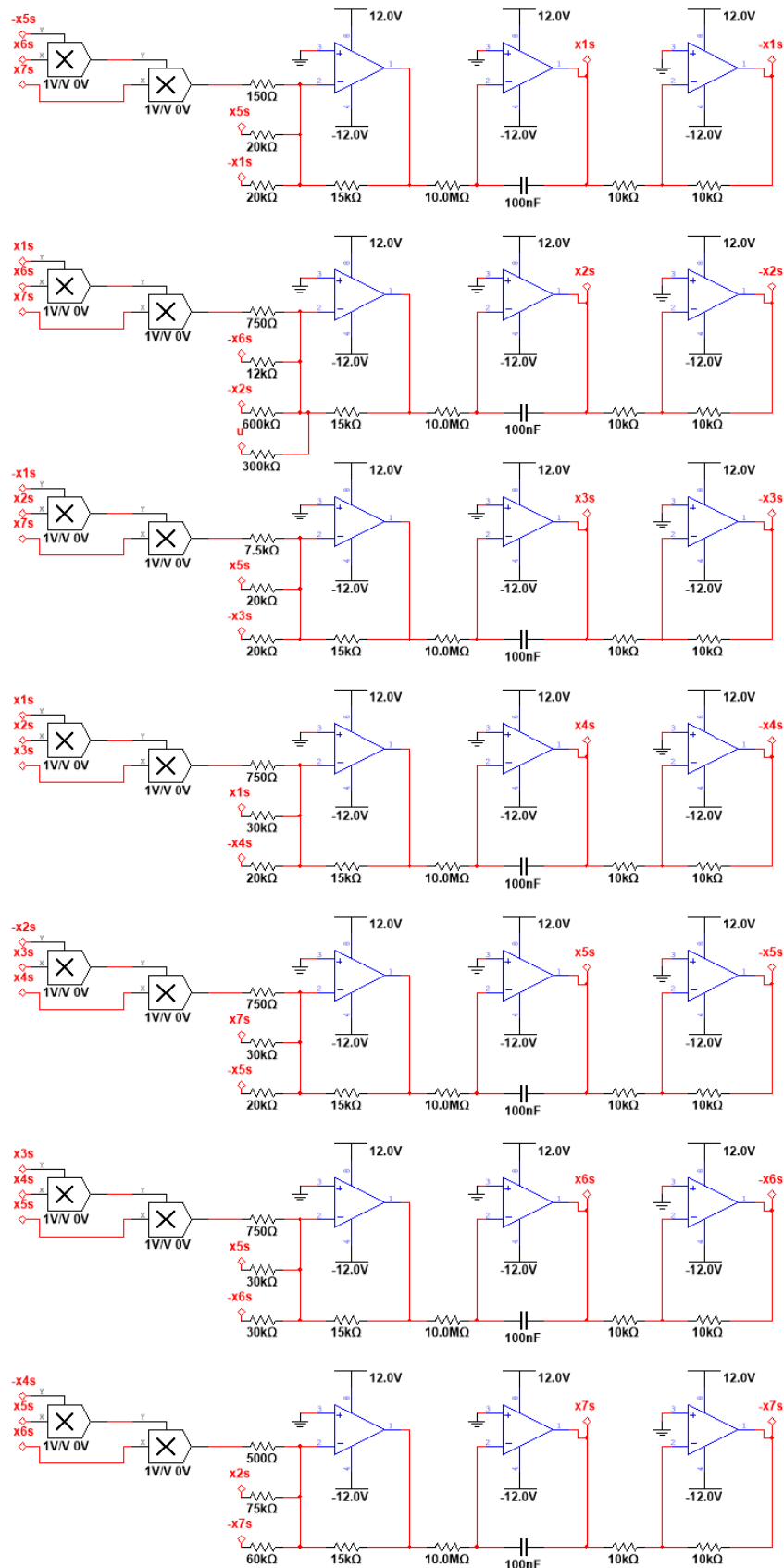


Figura 4.34: Planta do sistema escravo

Observe que na figura (4.32) As escritas “m\_original”, “m\_criptografada”, “m\_recuperada” e “erro” referem-se a mensagem original  $m(t)$ , a mensagem criptografada  $s(t)$ , a mensagem recuperada  $\hat{m}(t)$  e ao erro entre a mensagem original e a mensagem recuperada  $e(t)$ , respectivamente.

Já na figura (4.33) as escritas “x1m”, “x2m”, “x3m”, “x4m”, “x5m”, “x6m” e “x7m” referem-se aos estados do sistema mestre escalonado  $X_{1m}(t)$ ,  $X_{2m}(t)$ ,  $X_{3m}(t)$ ,  $X_{4m}(t)$ ,  $X_{5m}(t)$ ,  $X_{6m}(t)$  e  $X_{7m}(t)$ , respectivamente.

E na figura (4.34) do sistema escravo escalonado foi inserido o sinal de controle “u” ( $u(t)$ ) no segundo estado do sistema e, de maneira análoga às figuras anteriores as escritas “x1s”, “x2s”, “x3s”, “x4s”, “x5s”, “x6s” e “x7s” referem-se aos estados do sistema escravo  $X_{1s}(t)$ ,  $X_{2s}(t)$ ,  $X_{3s}(t)$ ,  $X_{4s}(t)$ ,  $X_{5s}(t)$ ,  $X_{6s}(t)$  e  $X_{7s}(t)$ , respectivamente.

Todos os sinais apresentados nas figuras anteriores possuem a sua versão negativa quando estão acompanhados do sinal “-”. A seguir tem-se a figura (4.35) que mostra a montagem do circuito que gera o sinal de controle  $u(t)$ :

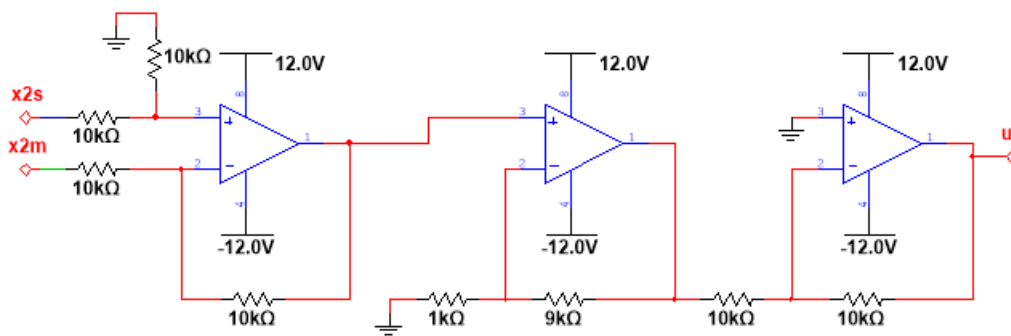


Figura 4.35: Circuito de controle

Observe que, da esquerda para a direita, temos um amplificador subtrator, um amplificador não-inversor e um amplificador inversor, que resultam em um sinal de controle  $u(t) = 10(X_{2s}(t) - X_{2m}(t))$ .

## 4.2.2 Resultados das simulações

A seguir temos os resultados da simulação com o desempenho de sincronização exibido no osciloscópio (4.36 a 4.42). Foram utilizados os dois canais em cada osciloscópio, sendo que os sinais exibidos em azul referem-se aos sinais gerados pelo sistema escravo, enquanto que os sinais exibidos em verde referem-se aos sinais gerados pelo sistema mestre.

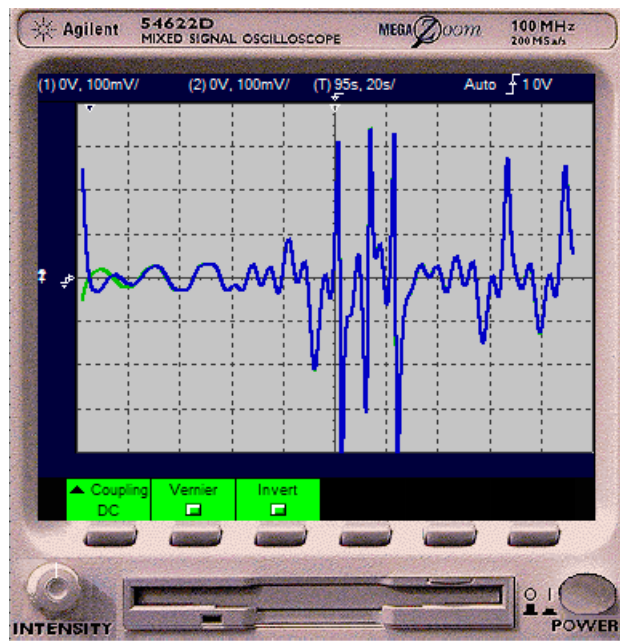


Figura 4.36: Desempenho de sincronização de  $x_{1s}(t)$

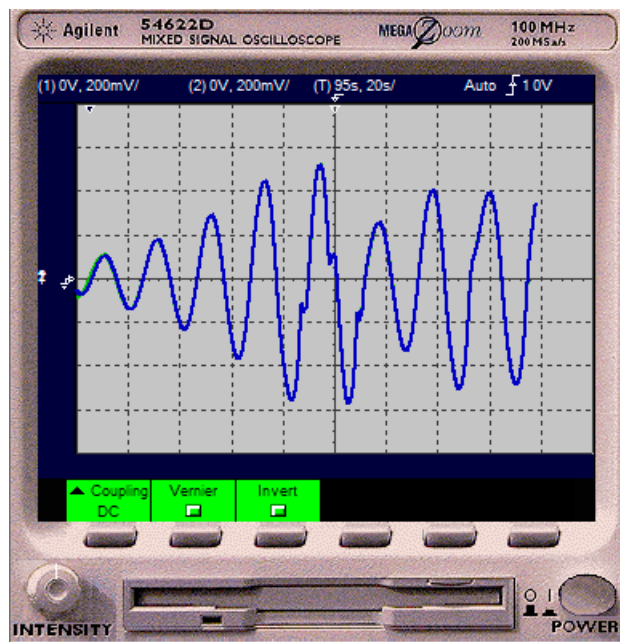


Figura 4.37: Desempenho de sincronização de  $x_{2s}(t)$

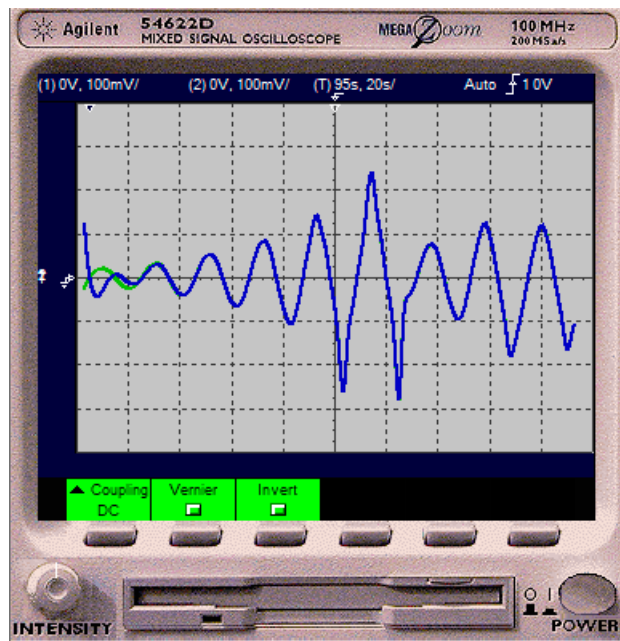


Figura 4.38: Desempenho de sincronização de  $x_{3s}(t)$

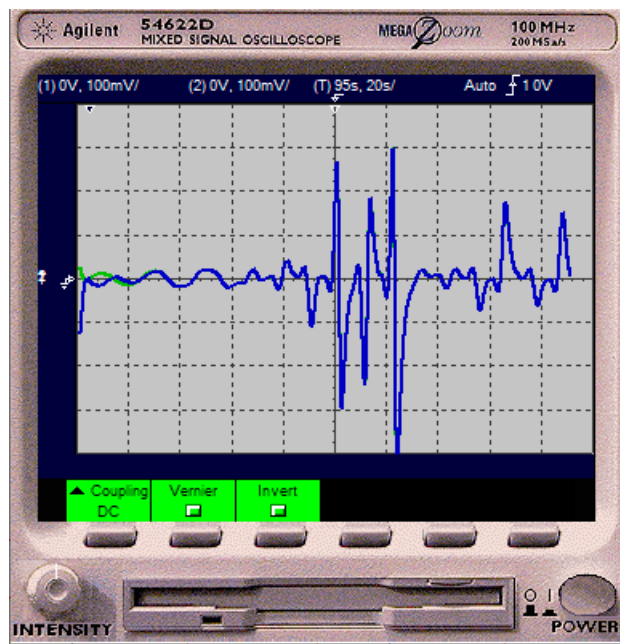


Figura 4.39: Desempenho de sincronização de  $x_{4s}(t)$

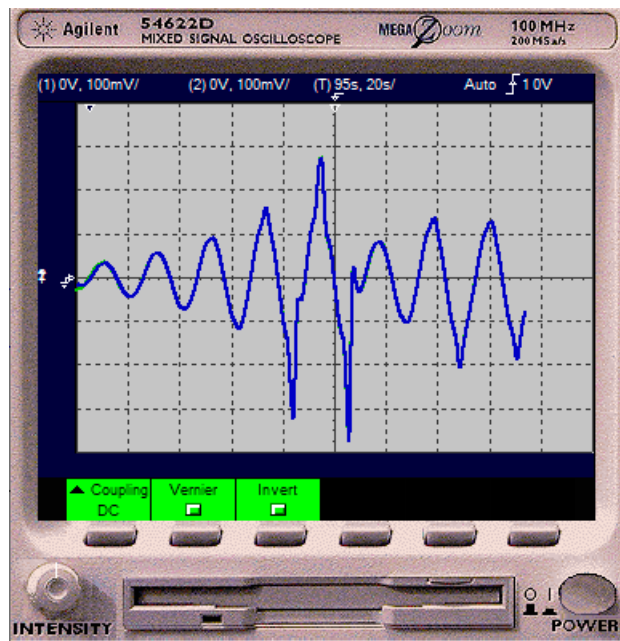


Figura 4.40: Desempenho de sincronização de  $x_{5s}(t)$

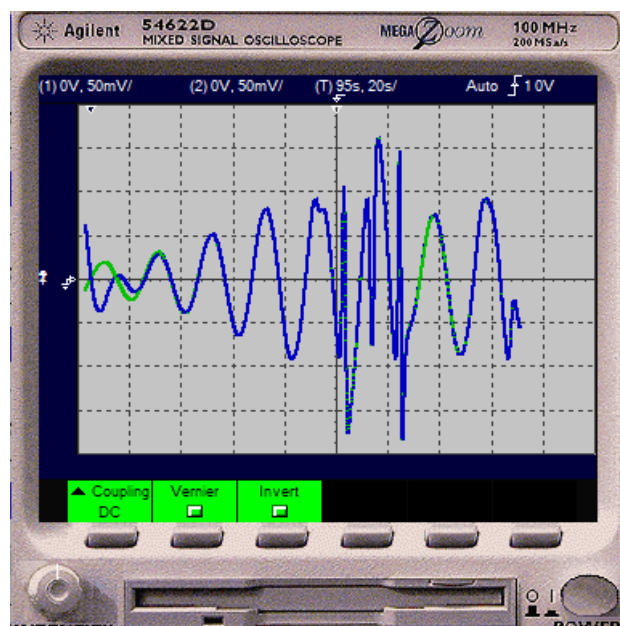


Figura 4.41: Desempenho de sincronização de  $x_{6s}(t)$

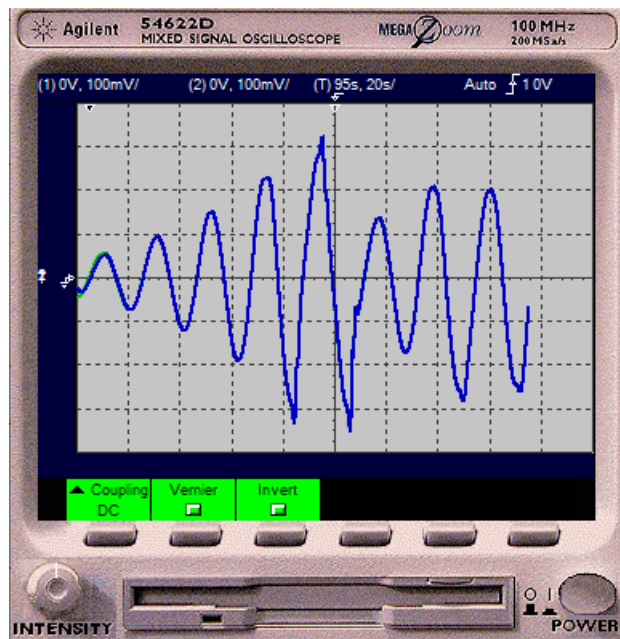


Figura 4.42: Desempenho de sincronização de  $x_{7s}(t)$

Observe que em todos os estados os sinais gerados pelo sistema escravo, em azul, se sobrepõem aos sinais gerados pelo mestre, em verde. Este resultado nos mostra que a sincronização pela convergência do sistema escravo para o sistema mestre foi realizada de maneira bem sucedida.

A próxima figura (4.43) nos mostra os sinais referentes à mensagem original (em verde) e à mensagem criptografada (em azul).

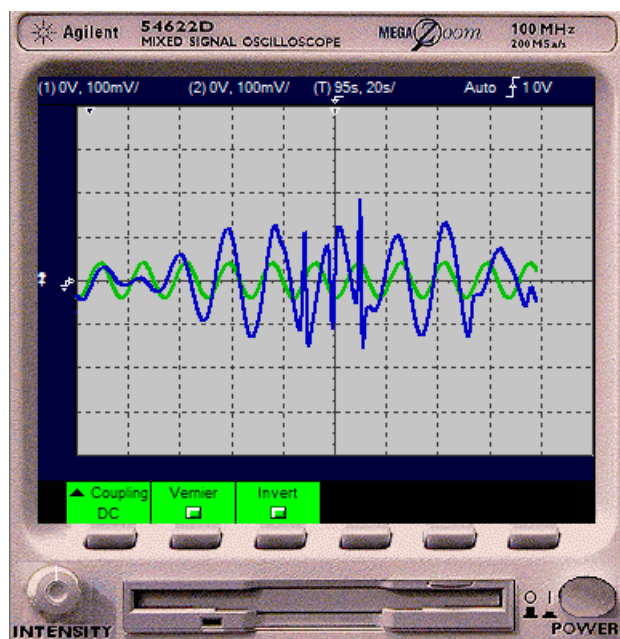


Figura 4.43: Mensagem original  $m(t)$  e mensagem criptografada  $s(t)$

Ao se realizar uma comparação entre os dois sinais, pode-se observar que ambos são bem distintos um em relação ao outro, o que torna a mensagem original  $m(t)$  irreconhecível em relação à sua versão criptografada  $s(t)$ . Assim, conclui-se que a criptografia do sinal foi realizada de maneira bem sucedida.

Na imagem a seguir (4.44) temos uma comparação entre a mensagem original  $m(t)$ , em verde, e a mensagem recuperada  $\hat{m}(t)$ , em azul. O erro entre estes dois sinais é mostrado na imagem seguinte (4.45).

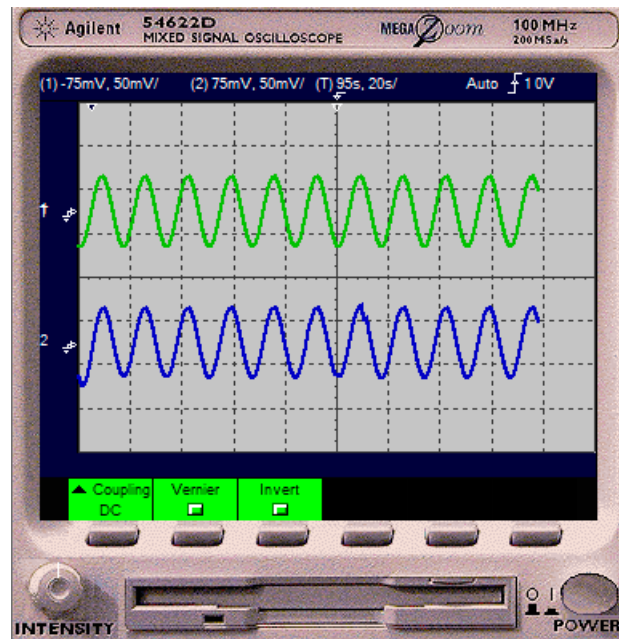


Figura 4.44: Mensagem original  $m(t)$  e mensagem recuperada  $\hat{m}(t)$



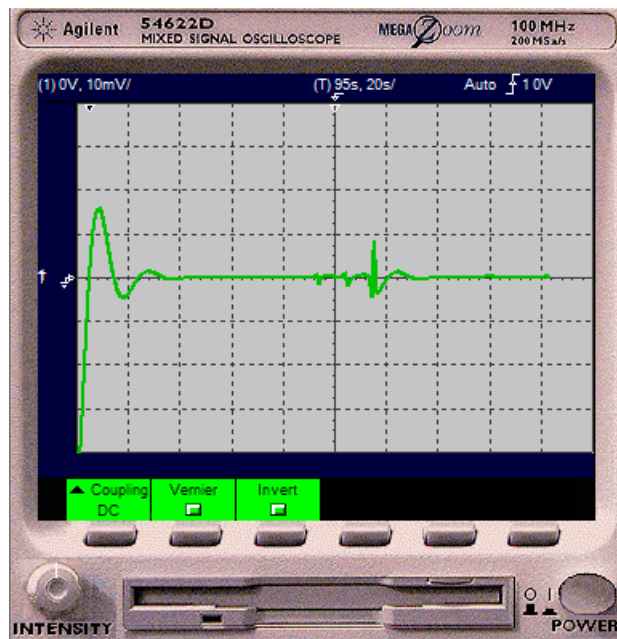


Figura 4.45: Erro entre a mensagem original  $m(t)$  e mensagem recuperada  $\hat{m}(t)$

Observe que a mensagem recuperada  $\hat{m}(t)$  é muito próxima à mensagem original  $m(t)$  e o erro entre as mensagens se mantém em valores muito próximos de zero com o passar do tempo. Desta forma, conclui-se que o esquema circuitual para telecomunicação segura baseado em caos implementado via Multisim funciona e foi implementado de maneira bem sucedida, mesmo sendo construído utilizando componentes que consideram as não idealidades dos amplificadores operacionais TL082CP reais. Estes resultados validam o que foi demonstrado matematicamente no capítulo 3 e mostram uma possível viabilidade de se realizar uma implementação circuitual deste esquema na prática.

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho foi proposto um esquema de sincronização subatuado para telecomunicação segura baseado em um sistema hipercaótico heptadimensional. É raro de se encontrar esquemas de sincronização subatuados para sistemas caóticos na literatura e é ainda mais raro quando a sincronização subatuada faz uso de somente um sinal de controle. Este trabalho se destaca por propor um esquema de sincronização subatuado com somente um sinal de controle para um sistema hipercaótico heptadimensional de terceira ordem que, por possuir uma dimensão alta, é considerado um sistema de alta complexidade, mesmo quando comparado com outros sistemas caóticos ou hipercaóticos de dimensões menores.

Além disso, este estudo leva em conta a presença de distúrbios limitados e analisa a robustez do esquema proposto a incertezas desta natureza, o que é uma característica essencial para eventuais aplicações, como em sistemas para telecomunicação segura. Esta característica é mais um ponto de destaque deste trabalho, visto que muitos estudos não consideram a presença de distúrbios.

A convergência do erro de sincronização para valores dentro de um intervalo, mesmo na presença de distúrbios limitados, foi demonstrada fazendo uso da teoria de estabilidade de Lyapunov e, a dinâmica do erro, bem como o comportamento do sistema quando aplicado há um esquema para telecomunicação segura foi verificada e validada por meio das simulações no MATLAB/Simulink e no Multisim.

Baseado nos resultados obtidos por meio das simulações, podemos concluir que o esquema de sincronização proposto pode ser utilizado para implementar um esquema para telecomunicação segura de forma que seja possível aproveitar os estados sem atuação para criptografar e se transmitir até seis sinais mensagem. O comportamento na presença de distúrbios também pôde ser verificado nestas simulações e o desempenho do sistema ocorreu conforme o esperado.

Outro resultado importante obtido a partir da simulação no Multisim foi que o esquema para comunicação segura funcionou de maneira bem sucedida mesmo quando implementado com componentes que simulassem o comportamento não ideal de amplificadores operacionais TL082CP. Por meio deste resultado, conclui-se que há uma grande possibilidade de o esquema

proposto poder ser construído e implementado na prática utilizando elementos de eletrônica analógica de baixo custo. Assim, como objeto de um trabalho futuro, planeja-se implementar o circuito do esquema proposto neste trabalho na prática.

Este trabalho foi apresentado no 25º Congresso de Iniciação Científica da Universidade de Brasília (PIBIC/UnB 2018-2019), ainda em uma fase menos madura que a apresentada aqui, e foi agraciado com a premiação de Menção Honrosa.

# Referências

- ALI, T. et al. Chaos and complexity in quantum mechanics. *Physical Review D*, APS, v. 101, n. 2, p. 026021, 2020.
- AWAL, N. M.; BULLARA, D.; EPSTEIN, I. R. The smallest chimera: Periodicity and chaos in a pair of coupled chemical oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 29, n. 1, p. 013131, 2019.
- BIGDELI, N.; ZIAZI, H. A. Design of fractional robust adaptive intelligent controller for uncertain fractional-order chaotic systems based on active control technique. *Nonlinear Dynamics*, v. 87, n. 3, p. 1703–1719, 2017.
- BOCCALETTI, S. et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics reports*, Elsevier, v. 366, n. 1-2, p. 1–101, 2002.
- CAO, Y. Chaotic synchronization based on fractional order calculus financial system. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 130, p. 109410, 2020.
- CHEN, Y.-J. et al. A polynomial-fuzzy-model-based synchronization methodology for the multi-scroll Chen chaotic secure communication system. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 87, p. 103251, 2020.
- CHENG, A. et al. Multiple sources and multiple measures based traffic flow prediction using the chaos theory and support vector regression method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 466, p. 422–434, 2017.
- ÇIÇEK, S.; KOCAMAZ, U. E.; UYAROĞLU, Y. Secure communication with a chaotic system owning logic element. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, Elsevier, v. 88, p. 52–62, 2018.
- DELAVARI, H.; MOHADESZADEH, M. Robust finite-time synchronization of non-identical fractional-order hyperchaotic systems and its application in secure communication. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, IEEE, v. 6, n. 1, p. 228–235, 2016.
- DEVANEY, R. *An introduction to chaotic dynamical systems*. [S.l.]: Westview press, 2008.
- DIANESE, A. *Computacao e simulacao analogica e hibrida*. [S.l.]: McGraw Hill, 1977.
- ESHMAWI, A. A.; MAHMOUD, E. E. Secure communications via complex phase synchronization of pair complex chaotic structures with a similar structure of linear terms with modifying in nonlinear terms. *Alexandria Engineering Journal*, Elsevier, 2020.

- FARAH, M. B. et al. A novel chaos based optical image encryption using fractional Fourier transform and DNA sequence operation. *Optics & Laser Technology*, Elsevier, v. 121, p. 105777, 2020.
- GULARTE, K. H.; RÊGO, L. N.; VARGAS, J. A. Scheme for chaos-based encryption and Lyapunov analysis. In: IEEE. 2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA). [S.l.: s.n.], 2018. p. 1–7.
- HARDY, G. et al. *Inequalities*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1952. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521358804.
- HASSAN, M. F.; HAMMUDA, M. A new approach for constrained chaos synchronization with application to secure data communication. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 356, n. 12, p. 6697–6723, 2019.
- AL-HAZAIMEH, O. M. et al. Image encryption algorithm based on Lorenz chaotic map with dynamic secret keys. *Neural Computing and Applications*, Springer, p. 1–11, 2019.
- HE, S.; SUN, K.; WANG, H. Dynamics and synchronization of conformable fractional-order hyperchaotic systems using the Homotopy analysis method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 73, p. 146–164, 2019.
- HU, Z.; CHAN, C.-K. A 7-D hyperchaotic system-based encryption scheme for secure fast-OFDM-PON. *Journal of Lightwave Technology*, IEEE, v. 36, n. 16, p. 3373–3381, 2018.
- HUANG, C.; CAO, J. Active control strategy for synchronization and anti-synchronization of a fractional chaotic financial system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 473, p. 262–275, 2017.
- HUESO, M. et al. ALUminating the path of atherosclerosis progression: chaos theory suggests a role for Alu repeats in the development of atherosclerotic vascular disease. *International journal of molecular sciences*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 19, n. 6, p. 1734, 2018.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust adaptive control*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- JAHANSHAH, H. et al. A financial hyperchaotic system with coexisting attractors: Dynamic investigation, entropy analysis, control and synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 126, p. 66–77, 2019.
- JOVIC, B. *Synchronization techniques for chaotic communication systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. W. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002. v. 3.
- KOUAGOU, J.; DLAMINI, P.; SIMELANE, S. On the multi-domain compact finite difference relaxation method for high dimensional chaos: The nine-dimensional Lorenz system. *Alexandria Engineering Journal*, Elsevier, 2020.
- LAGMIRI, S.; ELALAMI, N.; ELALAMI, J. New Eight Dimensional Hyperchaotic Cryptosystem. *International Journal of Computer Application*, v. 07, n. 05, p. 2250–1797, 2017.

- LI, M.; ZHANG, X. et al. Confidentiality-enhanced chaotic optical communication system with variable RF amplifier gain. *Optics express*, Optical Society of America, v. 27, n. 18, p. 25953–25963, 2019.
- LI, Y.; LI, C. Complete synchronization of delayed chaotic neural networks by intermittent control with two switches in a control period. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 173, p. 1341–1347, 2016.
- LIN, Z.; YU, S.; LÜ, J. A novel approach for constructing one-way hash function based on a message block controlled 8D hyperchaotic map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 27, n. 07, p. 1750106, 2017.
- LIU, D.; ZHU, J.; SUN, H. Design and application of a new seven-dimensional hyperchaotic system. *International Journal of Control and Automation*, v. 7, n. 4, p. 385–394, 2014.
- LIU, H.; KADIR, A.; LIU, J. Color pathological image encryption algorithm using arithmetic over Galois field and coupled hyper chaotic system. *Optics and Lasers in Engineering*, Elsevier, v. 122, p. 123–133, 2019.
- LIU, J.; LIU, S. Complex modified function projective synchronization of complex chaotic systems with known and unknown complex parameters. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 48, p. 440–450, 2017.
- LIU, L.; WANG, D.; LEI, Y. An image encryption scheme based on hyper chaotic system and DNA with fixed secret keys. *IEEE Access*, IEEE, v. 8, p. 46400–46416, 2020.
- LIU, Z. Design of nonlinear optimal control for chaotic synchronization of coupled stochastic neural networks via Hamilton–Jacobi–Bellman equation. *Neural Networks*, Elsevier, v. 99, p. 166–177, 2018.
- LORENZ, E. Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas? *Paper delivered at the American Association for the Advancement of Science, Washington*, 1972.
- LORENZ, E. N. Can chaos and intransitivity lead to interannual variability? *Tellus A*, Wiley Online Library, v. 42, n. 3, p. 378–389, 1990.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- MAHMOUD, E. E.; AL-HARTHI, B. H. A hyperchaotic detuned laser model with an infinite number of equilibria existing on a plane and its modified complex phase synchronization with time lag. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 130, p. 109442, 2020.
- MANGIAROTTI, S. et al. Chaos theory applied to the outbreak of Covid-19: an ancillary approach to decision-making in pandemic context. *Epidemiology & Infection*, Cambridge University Press, p. 1–29, 2020.
- MEZATIO, B. A. et al. A novel memristive 6D hyperchaotic autonomous system with hidden extreme multistability. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 120, p. 100–115, 2019.
- NWACHIOMA, C. et al. A new chaotic oscillator—properties, analog implementation, and secure communication application. *IEEE Access*, IEEE, v. 7, p. 7510–7521, 2019.

- PENG, X. et al. Non-fragile chaotic synchronization for discontinuous neural networks with time-varying delays and random feedback gain uncertainties. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 273, p. 89–100, 2018.
- PENG, Z. et al. Dynamic analysis of seven-dimensional fractional-order chaotic system and its application in encrypted communication. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, Springer, p. 1–19, 2020.
- POINCARÉ, H.; MAITLAND, F. *Science and method*. [S.l.]: Courier Corporation, 2003.
- RAJAGOPAL, K.; KARTHIKEYAN, A.; SRINIVASAN, A. K. FPGA implementation of novel fractional-order chaotic systems with two equilibriums and no equilibrium and its adaptive sliding mode synchronization. *Nonlinear Dynamics*, v. 87, n. 4, p. 2281–2304, 2017.
- ROSSLER, O. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 71, n. 2-3, p. 155–157, 1979.
- SHAMMAKH, W.; MAHMOUD, E. E.; KASHKARI, B. S. Complex modified projective phase synchronization of nonlinear chaotic frameworks with complex variables. *Alexandria Engineering Journal*, Elsevier, 2020.
- SHIRMOHAMMADI, F.; TOHIDI, A. Mixing enhancement using chaos theory in fluid dynamics: Experimental and numerical study. *Chemical Engineering Research and Design*, Elsevier, v. 141, p. 350–360, 2019.
- SINGH, P. P.; ROY, B. K. Comparative performances of synchronisation between different classes of chaotic systems using three control techniques. *Annual Reviews in Control*, v. 45, p. 152–165, 2018.
- SMAOUI, N.; ZRIBI, M.; ELMOKADEM, T. A novel secure communication scheme based on the Karhunen–Loève decomposition and the synchronization of hyperchaotic Lü systems. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 90, n. 1, p. 271–285, 2017.
- STANKEVICH, N. et al. Chaos and hyperchaos via secondary Neimark–Sacker bifurcation in a model of radiophysical generator. *Nonlinear dynamics*, Springer, v. 97, n. 4, p. 2355–2370, 2019.
- STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- SUN, S. A novel hyperchaotic image encryption scheme based on DNA encoding, pixel-level scrambling and bit-level scrambling. *IEEE Photonics Journal*, IEEE, v. 10, n. 2, p. 1–14, 2018.
- SUN, S.; GUO, Y.; WU, R. A novel image encryption scheme based on 7D hyperchaotic system and row-column simultaneous swapping. *IEEE Access*, IEEE, v. 7, p. 28539–28547, 2019.
- VAFAMAND, N.; KHORSHIDI, S.; KHAYATIAN, A. Secure communication for non-ideal channel via robust TS fuzzy observer-based hyperchaotic synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 112, p. 116–124, 2018.

- VAIDYANATHAN, S. et al. A new five-dimensional four-wing hyperchaotic system with hidden attractor, its electronic circuit realisation and synchronisation via integral sliding mode control. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, Inderscience Publishers (IEL), v. 32, n. 1, p. 30–45, 2019.
- VARAN, M.; AKGUL, A. Control and synchronisation of a novel seven-dimensional hyperchaotic system with active control. *Pramana*, Springer, v. 90, n. 4, p. 54, 2018.
- VARGAS, J. A.; GRZEIDAK, E.; HEMERLY, E. M. Robust adaptive synchronization of a hyperchaotic finance system. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 80, n. 1-2, p. 239–248, 2015.
- WANG, C. et al. Finite-time function projective synchronization control method for chaotic wind power systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 135, p. 109756, 2020.
- WANG, S.; CHEN, S.; JING, J. Effect of system energy on quantum signatures of chaos in the two-photon Dicke model. *Physical Review E*, APS, v. 100, n. 2, p. 022207, 2019.
- WANG, S. et al. Synchronization of fractional time-delayed financial system using a novel type-2 fuzzy active control method. *Chaos Solitons & Fractals*, v. 136, p. 109768, 2020.
- WANG, T.; WANG, D.; WU, K. Chaotic Adaptive Synchronization Control and Application in Chaotic Secure Communication for Industrial Internet of Things. *IEEE Access*, v. 6, p. 8584–8590, 2018.
- WANG, W. et al. Fixed-time synchronization control of memristive MAM neural networks with mixed delays and application in chaotic secure communication. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 126, p. 85–96, 2019.
- XIONG, Z.; QU, S.; LUO, J. Adaptive Multi-Switching Synchronization of High-Order Memristor-Based Hyperchaotic System with Unknown Parameters and Its Application in Secure Communication. *Complexity*, v. 2019, p. 1–18, 2019.
- YAN, W.; DING, Q. A new matrix projective synchronization and its application in secure communication. *IEEE Access*, IEEE, v. 7, p. 112977–112984, 2019.
- YANG, L.; YANG, Q.; CHEN, G. Hidden attractors, singularly degenerate heteroclinic orbits, multistability and physical realization of a new 6D hyperchaotic system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, p. 105362, 2020.
- YANG, Q.; BAI, M. A new 5D hyperchaotic system based on modified generalized Lorenz system. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 88, n. 1, p. 189–221, 2017.
- YANG, Q.; ZHU, D.; YANG, L. A new 7D hyperchaotic system with five positive Lyapunov exponents coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 28, n. 05, p. 1850057, 2018.
- YU, F.; LIU, L.; HE, B. et al. Analysis and FPGA realization of a novel 5D hyperchaotic four-wing memristive system, active control synchronization, and secure communication application. *Complexity*, Hindawi, v. 2019, 2019.
- YU, F.; LIU, L.; QIAN, S. et al. Chaos-based application of a novel multistable 5D memristive hyperchaotic system with coexisting multiple attractors. *Complexity*, Hindawi, v. 2020, 2020.



- YU, F.; LIU, L.; SHEN, H. et al. Dynamic Analysis, Circuit Design, and Synchronization of a Novel 6D Memristive Four-Wing Hyperchaotic System with Multiple Coexisting Attractors. *Complexity*, Hindawi, v. 2020, 2020.
- YU, F.; ZHANG, Z. et al. Secure communication scheme based on a new 5D multistable four-wing memristive hyperchaotic system with disturbance inputs. *Complexity*, Hindawi, v. 2020, 2020.
- YU, W.; WANG, J. et al. Design of a new seven-dimensional hyperchaotic circuit and its application in secure communication. *IEEE Access*, IEEE, v. 7, p. 125586–125608, 2019.
- ZELEŇÁKOVÁ, M. et al. Dynamic Analysis of Meteorological Parameters in Košice Climatic Station in Slovakia. *Water*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 6, p. 702, 2018.
- ZHANG, W. et al. Lag projective synchronization of fractional-order delayed chaotic systems. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 356, n. 3, p. 1522–1534, 2019.
- ZHONG, D. et al. Exploring new chaotic synchronization properties in the master-slave configuration based on three laterally coupled semiconductor lasers with self-feedback. *Optics Express*, Optical Society of America, v. 28, n. 18, p. 25778–25794, 2020.
- ZHOU, L.; TAN, F. A chaotic secure communication scheme based on synchronization of double-layered and multiple complex networks. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 96, n. 2, p. 869–883, 2019.
- ZHOU, L.; TAN, F.; YU, F. A robust synchronization-based chaotic secure communication scheme with double-layered and multiple hybrid networks. *IEEE Systems Journal*, IEEE, 2019.
- ZHOU, M.; WANG, C. A novel image encryption scheme based on conservative hyperchaotic system and closed-loop diffusion between blocks. *Signal Processing*, Elsevier, v. 171, p. 107484, 2020.

# Apêndice A

## Diagrama de blocos do Simulink

Diagrama de blocos no Simulink para a simulação do esquema de sincronização para telecomunicação segura.

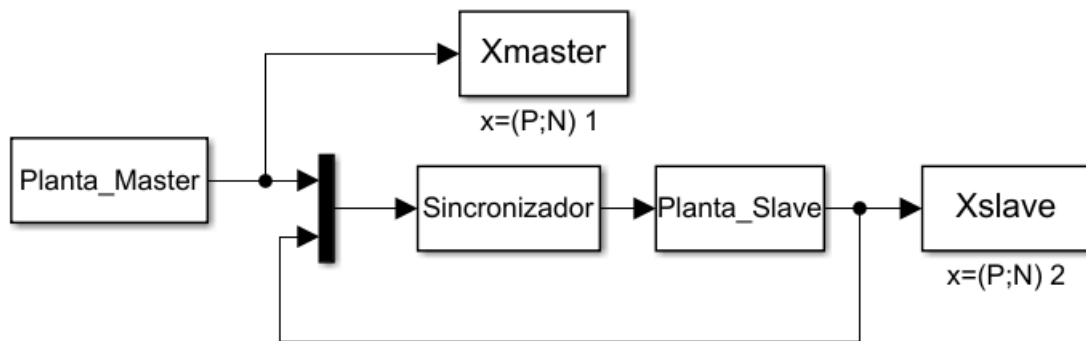


Figura A.1: Diagrama de blocos no Simulink

# Apêndice B

## Códigos das simulações no MATLAB

Nesta seção encontram-se os códigos das simulações em MATLAB utilizadas neste trabalho.

### B.0.1 Arquivo *Planta\_Master.m*

```
1 function [sys,x0,str,ts] = Sistema(t,x,u,flag)
2
3 a = 15;           %constantes
4 b = 5;
5 c = 0.5;
6 d = 25;
7 e = 10;
8 f = 4;
9 g = 0.1;
10 h = 1.5;
11
12 k = 0.3;
13 l = 0.5;
14 m = 0.2;
15 n = 0.4;
16
17 mensagem1 = m*(4*sin(2*pi*0.6*t) + 3*sin(2*pi*1.2*t) + 0.8*cos(2*pi*2*t) +
18 2*sqrt(2*pi*0.4*t));
19 mensagem2 = m*(3*sin(2*pi*0.8*t + pi/2) + 2*cos(2*pi*0.6*t));
20 mensagem3 = k*(2*sawtooth(2*pi*0.5*t)+0.75*sqrt(2*pi*0.9*t)+1.1*cos(2*pi
21 *0.75*t));
22 mensagem4 = n*(sqrt(2*pi*0.5*t)+1.2*cos(2*pi*0.9*t)-0.8*sawtooth(2*pi
23 *0.6*t));
24 mensagem5 = -k*cos(2*pi*0.9*t);
25 mensagem6 = k*cos(8*t)+l*sin(5*t);
26
27 switch flag,
28     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29     % Inicializacao %
```

```

27  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28  case 0,
29      sizes = simsizes;
30      sizes.NumContStates = 7; %Numero de estados continuos
31      sizes.NumDiscStates = 0; %Numero de estados discretos
32      sizes.NumOutputs = 7; %Numero de saidas
33      sizes.NumInputs = 0; %Numero de entradas
34      sizes.DirFeedthrough = 1;
35      sizes.NumSampleTimes = 1;
36      sys = simsizes(sizes);
37      x0=[-1 1 -0.5 0.5 0 -0.25 0.25]; %Condicoes iniciais
38      str=[];
39      ts=[0 0];
40  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41  % Diretivas %
42  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
43  case 1, %Sistema dado no enunciado do exercicio
44      sys = [-a*x(1)+a*x(5)-b*x(5)*x(6)*x(7);
45             -c*x(2)-d*x(6)+x(1)*x(6)*x(7);
46             -a*x(3)+a*x(5)-g*x(1)*x(2)*x(7);
47             -a*x(4)+e*x(1)+x(1)*x(2)*x(3);
48             -a*x(5)+e*x(7)-x(2)*x(3)*x(4);
49             -e*x(6)+e*x(5)+x(3)*x(4)*x(5);
50             -b*x(7)+f*x(2)-h*x(4)*x(5)*x(6)];
51  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
52  % Saidas %
53  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
54  case 3,
55      sys = [x(1) + mensagem1; x(2); x(3) + mensagem2; x(4) + mensagem3; x(5)
56             + mensagem4; x(6) + mensagem5; x(7) + mensagem6];
57  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
58  % Fim %
59  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
59  case {2,4,9},
60      sys = []; % Nao faz nada
61  otherwise
62      error(['unhandled flag = ', num2str(flag)]);
63  end

```

## B.0.2 Arquivo *Planta\_Slave.m*

```

1  function [sys,x0,str,ts] = Sistema(t,x,u,flag)
2
3  a = 15; %constantes
4  b = 5;
5  c = 0.5;
6  d = 25;
7  e = 10;
8  f = 4;
9  g = 0.1;

```

```

10 h = 1.5;
11
12 m = 0.2;
13 n = 0.15;
14 p = 0.08;
15
16 disturbio1 = m*(0.15*sin(2*pi*5*t) + 0.05*cos(2*pi*12*t) + 0.1*square(2*pi
    *3*t) + 0.05*cos(2*pi*20*t) - 0.05*sawtooth(2*pi*7*t) + 0.2*sin(2*pi*4*t
    ) - 0.2*cos(2*pi*9*t) - 0.1*cos(2*pi*37*t) + 0.1*sin(2*pi*60*t + pi/17))
    ;
17 disturbio2 = n*(0.15*sin(2*pi*17*t) + 0.15*cos(2*pi*6*t) + 0.1*square(2*pi
    *2*t) + 0.15*cos(2*pi*23*t) - 0.05*sawtooth(2*pi*9*t) + 0.1*sin(2*pi*40*
    t) - 0.1*cos(2*pi*50*t) - 0.1*cos(2*pi*2*t) + 0.1*sin(2*pi*9*t + pi/17))
    ;
18 disturbio3 = p*(0.15*sawtooth(2*pi*6*t) + 0.15*sin(2*pi*25*t) - 0.15*
    sawtooth(2*pi*14*t) - 0.15*square(2*pi*3*t) + 0.05*cos(2*pi*2*t) + 0.05*
    sin(2*pi*42*t) + 0.2*cos(2*pi*7*t + pi) + 0.1*sin(2*pi*13*t));
19 switch flag ,
20     %%%%%%%%%%%
21     % Inicializacao %
22     %%%%%%%%%%%
23 case 0,
24     sizes = simsizes;
25     sizes.NumContStates = 7; %Numero de estados continuos
26     sizes.NumDiscStates = 0; %Numero de estados discretos
27     sizes.NumOutputs = 7; %Numero de saidas
28     sizes.NumInputs = 7; %Numero de entradas
29     sizes.DirFeedthrough = 1;
30     sizes.NumSampleTimes = 1;
31     sys = simsizes(sizes);
32     x0=-5*[-1 1 -0.5 0.5 0.2 -0.25 0.25]; %Condicoes iniciais
33     str=[];
34     ts=[0 0];
35     %%%%%%%%%%%
36     % Diretivas %
37     %%%%%%%%%%%
38 case 1, %Sistema dado no enunciado do exercicio
39     sys = [-a*x(1)+a*x(5)-b*x(5)*x(6)*x(7)+u(1)+disturbio1;
40     -c*x(2)-d*x(6)+x(1)*x(6)*x(7)+u(2);
41     -a*x(3)+a*x(5)-g*x(1)*x(2)*x(7)+u(3)+disturbio2;
42     -a*x(4)+e*x(1)+x(1)*x(2)*x(3)+u(4)+disturbio3;
43     -a*x(5)+e*x(7)-x(2)*x(3)*x(4)+u(5)+disturbio2;
44     -e*x(6)+e*x(5)+x(3)*x(4)*x(5)+u(6)+disturbio3;
45     -b*x(7)+f*x(2)-h*x(4)*x(5)*x(6)+u(7)+disturbio3];%%+[2*sin(2*t)
        ;0.2*sin(5*t);0.1*cos(t);0.5*sin(3*t);0.4*sin(3*t);0.3*sin(4*t)
        ;sin(5*t)];
46
47     %%%%%%%%%%%
48     % Saidas %
49     %%%%%%%%%%%

```

```

50 case 3,
51     sys = [x(1); x(2); x(3); x(4); x(5); x(6); x(7)];
52     %%%%%%%%%%%
53     % Fim %
54     %%%%%%%%%%%
55 case {2,4,9},
56     sys = []; % Nao faz nada
57 otherwise
58     error(['unhandled flag = ', num2str(flag)]);
59 end

```

### B.0.3 Arquivo *Sincronizador.m*

```

1 function [sys,x0,str,ts] = Sincronizador(t,x,u,flag)
2
3 lambadazero1 = 0.1; %constantes
4 lambadazero2 = 5;
5 lambadazero3 = 5;
6 lambda1 = 0.5;
7 lambda2 = 0.5;
8 lambda3 = 0.5;
9 %e = 2.7183;
10 psi1 = 1000;
11 psi2 = 20;
12 psi3 = 20;
13
14 switch flag ,
15     %%%%%%%%%%%
16     % Inicializacao %
17     %%%%%%%%%%%
18 case 0,
19
20     sizes = simsizes;
21     sizes.NumContStates = 7; %Numero de estados constantes
22     sizes.NumDiscStates = 0; %Numero de estados discretos
23     sizes.NumOutputs = 7; %Numero de saidas
24     sizes.NumInputs = 14; %Numero de entradas
25     sizes.DirFeedthrough = 1;
26     sizes.NumSampleTimes = 1;
27     sys = simsizes(sizes);
28     x0=zeros(7,1); %Condicoes iniciais
29     x0(1)=0;
30     x0(2)=0;
31     x0(3)=0;
32     x0(4)=0;
33     x0(5)=0;
34     x0(6)=0;
35     x0(7)=0;
36     str=[];
37     ts=[0 0];

```

```

38  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
39  % Diretivas %
40  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41  case 1, %aqui ficariam estimadores dos pesos de uma rede neural caso
         houvesse , nesse caso nao ha
42      sys = [0;
43             0;
44             0;
45             0;
46             0;
47             0;
48             0];
49  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
50  % Saidas %
51  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
52  case 3, %controlador
53      sys = [-0*(psi1*(u(8) - u(1)))/(abs(u(8) - u(1)) + lambadazerol);
54             -1*(psi1*(u(9) - u(2)))/(%/(abs(u(9) - u(2)) + lambadazerol);
55             -0*(psi1*(u(10) - u(3)))/(abs(u(10) - u(3)) + lambadazerol);
56             -0*(psi1*(u(11) - u(4)))/(abs(u(11) - u(4)) + lambadazerol);
57             -0*(psi1*(u(12) - u(5)))/(abs(u(12) - u(5)) + lambadazerol);
58             -0*(psi1*(u(13) - u(6)))/(abs(u(13) - u(6)) + lambadazerol);
59             -0*(psi1*(u(14) - u(7)))];%/(abs(u(14) - u(7)) + lambadazerol
           );
60      %sys = [-1*(psi1*(u(4) - u(1)))/(abs(u(4) - u(1)) + lambadazerol
           );
61      case {2,4,9},
62      sys = [];
63
64      otherwise
65          error(['unhandled flag = ',num2str(flag)]);
66  end

```

## B.0.4 Arquivo *Gráficos.m*

```

1  %Executando esse arquivo —> automaticamente mostra os graficos da
2  %simulacao e salva na pasta em formato png (poderia ser escolhido
3  %formato jpg tambem)
4
5  clc
6  fsize=28;
7  fAxesSize=30;
8  k = 0.3;
9  l = 0.5;
10 m = 0.2;
11 n = 0.4
12
13 mensagem1 = m*(4*sin(2*pi*0.6*t) + 3*sin(2*pi*1.2*t) + 0.8*cos(2*pi*2*t) +
           2*sqrt(2*pi*0.4*t));
14 mensagem2 = m*(3*sin(2*pi*0.8*t + pi/2) + 2*cos(2*pi*0.6*t));

```

```

15 mensagem3 = k*(2*sawtooth(2*pi*0.5*t)+0.75*square(2*pi*0.9*t)+1.1*cos(2*pi
    *0.75*t));
16 mensagem4 = n*(square(2*pi*0.5*t)+1.2*cos(2*pi*0.9*t)-0.8*sawtooth(2*pi
    *0.6*t));
17 mensagem5 = -k*cos(2*pi*0.9*t);
18 mensagem6 = k*cos(8*t)+1*sin(5*t);
19
20 %Parametros para plotagem do espectro de frequencia
21 Fs = 865; %tamanho de t dividido pelo tempo de simulacao
22 T = 1/Fs;
23 L = 12975; %tamanho de t
24
25 %Figura 1
26 fig=figure;
27 plot(t,Xmaster(:,1),t, Xslave(:,1),':','LineWidth',3);
28 grid on
29 grid minor
30 %h=legend('Master','Slave','Location','southeast');
31 h=legend('Mestre','Escravo','Location','southwest');
32 set(h,'FontSize',fsize);
33 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
34 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
35 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
36 ylabel('$$x_{1m}(t), x_{1s}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
37 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
38 saveas(gcf,'FIG1.png');
39 close(fig)
40
41 %teste espectro frequencia
42 Y = fft(10*cos(2*pi*30*t));
43 P2 = abs(Y/L);
44 P1 = P2(1:L/2+1);
45 P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
46 f = Fs*(0:(L/2))/L;
47 fig = figure;
48 plot(f,P1);
49 grid on
50 grid minor
51 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
52 xlabel('\emph{Frequ{\^e}ncia (Hz)}','Interpreter','Latex','FontSize',
    fsize);
53 ylabel('$$X_{1m}(f)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
54 %saveas(gcf,'FIG32.png');
55 close(fig)
56
57 %Figura 2
58 fig=figure;
59 plot(t,Xmaster(:,2),t, Xslave(:,2),':','LineWidth',3);
60 grid on
61 grid minor

```



```

62 %h=legend('Master','Slave','Location','southeast');
63 h=legend('Mestre','Escravo','Location','southwest');
64 set(h,'FontSize',fsize);
65 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
66 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
67 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
68 ylabel('$$x_{2m}(t), x_{2s}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
69 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
70 saveas(gcf,'FIG2.png');
71 close(fig)
72
73 %Figura 3
74 fig=figure;
75 plot(t,Xmaster(:,3),t,Xslave(:,3),':', 'LineWidth',3);
76 grid on
77 grid minor
78 %h=legend('Master','Slave','Location','southeast');
79 h=legend('Mestre','Escravo','Location','southwest');
80 set(h,'FontSize',fsize);
81 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
82 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
83 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
84 ylabel('$$x_{3m}(t), x_{3s}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
85 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
86 saveas(gcf,'FIG3.png');
87 close(fig)
88
89 %Figura 4
90 fig=figure;
91 plot(t,Xmaster(:,4),t,Xslave(:,4),':', 'LineWidth',3);
92 grid on
93 grid minor
94 %h=legend('Master','Slave','Location','northeast');
95 h=legend('Mestre','Escravo','Location','southwest');
96 set(h,'FontSize',fsize);
97 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
98 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
99 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
100 ylabel('$$x_{4m}(t), x_{4s}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
101 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
102 saveas(gcf,'FIG4.png');
103 close(fig)
104
105 %Figura 5
106 fig=figure;
107 plot(t,Xmaster(:,5),t,Xslave(:,5),':', 'LineWidth',3);
108 grid on
109 grid minor
110 %h=legend('Master','Slave','Location','northeast');
111 h=legend('Mestre','Escravo','Location','southwest');

```

```

112 set(h,'FontSize',fsize);
113 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
114 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
115 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
116 ylabel('$$x_{5m}(t), x_{5s}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
117 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
118 saveas(gcf,'FIG5.png');
119 close(fig)
120
121 %Figura 6
122 fig=figure;
123 plot(t,Xmaster(:,6),t,Xslave(:,6),':', 'LineWidth',3);
124 grid on
125 grid minor
126 %h=legend('Master','Slave','Location','northeast');
127 h=legend('Mestre','Escravo','Location','southwest');
128 set(h,'FontSize',fsize);
129 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
130 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
131 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
132 ylabel('$$x_{6m}(t), x_{6s}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
133 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
134 saveas(gcf,'FIG6.png');
135 close(fig)
136
137 %Figura 7
138 fig=figure;
139 plot(t,Xmaster(:,7),t,Xslave(:,7),':', 'LineWidth',3);
140 grid on
141 grid minor
142 %h=legend('Master','Slave','Location','northeast');
143 h=legend('Mestre','Escravo','Location','southwest');
144 set(h,'FontSize',fsize);
145 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
146 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
147 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
148 ylabel('$$x_{7m}(t), x_{7s}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
149 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
150 saveas(gcf,'FIG7.png');
151 close(fig)
152
153 %Figura 8
154 fig=figure;
155 plot(t,mensagem1,'LineWidth',3);
156 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
157 grid on
158 grid minor
159 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
160 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
161 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);

```

```

162 ylabel('$$m_{1}(t)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
163 set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
164 saveas(gcf, 'FIG8.png');
165 close(fig)
166
167 %Figura 9
168 fig=figure;
169 plot(t, mensagem2, 'LineWidth', 3);
170 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
171 grid on
172 grid minor
173 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
174 %xlabel('$$Time (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
175 xlabel('$$Tempo (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
176 ylabel('$$m_{2}(t)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
177 set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
178 saveas(gcf, 'FIG9.png');
179 close(fig)
180
181 %Figura 10
182 fig=figure;
183 plot(t, mensagem3, 'LineWidth', 3);
184 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
185 grid on
186 grid minor
187 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
188 %xlabel('$$Time (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
189 xlabel('$$Tempo (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
190 ylabel('$$m_{3}(t)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
191 set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
192 saveas(gcf, 'FIG10.png');
193 close(fig)
194
195 %Figura 11
196 fig=figure;
197 plot(t, mensagem4, 'LineWidth', 3);
198 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
199 grid on
200 grid minor
201 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
202 %xlabel('$$Time (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
203 xlabel('$$Tempo (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
204 ylabel('$$m_{4}(t)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
205 set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
206 saveas(gcf, 'FIG11.png');
207 close(fig)
208
209 %Figura 12
210 fig=figure;
211 plot(t, mensagem5, 'LineWidth', 3);

```

```

212 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
213 grid on
214 grid minor
215 set(0,'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
216 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
217 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
218 ylabel('$$m_{5}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
219 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
220 saveas(gcf,'FIG12.png');
221 close(fig)
222
223 %Figura 13
224 fig=figure;
225 plot(t,mensagem6,'LineWidth',3);
226 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
227 grid on
228 grid minor
229 set(0,'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
230 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
231 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
232 ylabel('$$m_{6}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
233 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
234 saveas(gcf,'FIG13.png');
235 close(fig)
236
237 %Figura 14
238 fig=figure;
239 plot(t,mensagem1,t, Xmaster(:,1),':','LineWidth',3);
240 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
241 grid on
242 grid minor
243 %h=legend('Original Message 1','Encrypted Message 1','Location','northeast
    ');
244 h=legend('Mensagem Original 1','Mensagem Criptografada 1','Location','
    southwest');
245 set(h,'FontSize',fsize);
246 set(0,'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
247 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
248 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
249 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
250 saveas(gcf,'FIG14.png');
251 close(fig)
252
253 %Figura 15
254 fig=figure;
255 plot(t,mensagem2,t, Xmaster(:,3),':','LineWidth',3);
256 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
257 grid on
258 grid minor
259 %h=legend('Original Message 2','Encrypted Message 2','Location','northeast

```

```

    ');
260 h=legend('Mensagem Original 2','Mensagem Criptografada 2','Location','
        southwest');
261 set(h,'FontSize',fsize);
262 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
263 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
264 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
265 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
266 saveas(gcf,'FIG15.png');
267 close(fig)
268
269 %Figura 16
270 fig=figure;
271 plot(t,mensagem3,t,Xmaster(:,4),'-', 'LineWidth',3);
272 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
273 grid on
274 grid minor
275 %h=legend('Original Message 3','Encrypted Message 3','Location','northeast
        ');
276 h=legend('Mensagem Original 3','Mensagem Criptografada 3','Location','
        southwest');
277 set(h,'FontSize',fsize);
278 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
279 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
280 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
281 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
282 saveas(gcf,'FIG16.png');
283 close(fig)
284
285 %Figura 17
286 fig=figure;
287 plot(t,mensagem4,t,Xmaster(:,5),'-', 'LineWidth',3);
288 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
289 grid on
290 grid minor
291 %h=legend('Original Message 4','Encrypted Message 4','Location','northeast
        ');
292 h=legend('Mensagem Original 4','Mensagem Criptografada 4','Location','
        southwest');
293 set(h,'FontSize',fsize);
294 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
295 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
296 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
297 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
298 saveas(gcf,'FIG17.png');
299 close(fig)
300
301 %Figura 18
302 fig=figure;
303 plot(t,mensagem5,t,Xmaster(:,6),'-', 'LineWidth',3);

```

```

304 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
305 grid on
306 grid minor
307 %h=legend('Original Message 5','Encrypted Message 5','Location','northeast
        ');
308 h=legend('Mensagem Original 5','Mensagem Criptografada 5','Location','
        southwest');
309 set(h,'FontSize',fsize);
310 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
311 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
312 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
313 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
314 saveas(gcf,'FIG18.png');
315 close(fig)
316
317 %Figura 19
318 fig=figure;
319 plot(t,mensagem6,t,Xmaster(:,7),' ','LineWidth',3);
320 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
321 grid on
322 grid minor
323 %h=legend('Original Message 6','Encrypted Message 6','Location','northeast
        ');
324 h=legend('Mensagem Original 6','Mensagem Criptografada 6','Location','
        southwest');
325 set(h,'FontSize',fsize);
326 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
327 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
328 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
329 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
330 saveas(gcf,'FIG19.png');
331 close(fig)
332
333 %Figura 20
334 fig=figure;
335 aux = Xmaster(:,1) - Xslave(:,1);
336 plot(t,mensagem1,t,aux,' ','LineWidth',3);
337 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
338 grid on
339 grid minor
340 %h=legend('Original Message 1','Decrypted Message 1','Location','northeast
        ');
341 h=legend('Mensagem Original 1','Mensagem Recuperada 1','Location','
        southeast');
342 set(h,'FontSize',fsize);
343 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
344 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
345 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
346 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
347 saveas(gcf,'FIG20.png');

```

```

348 close( fig )
349
350 %Figura 21
351 fig=figure ;
352 aux = Xmaster(:,3) - Xslave(:,3);
353 plot(t,mensagem2,t, aux,':','LineWidth',3);
354 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
355 grid on
356 grid minor
357 %h=legend('Original Message 2','Decrypted Message 2','Location','northeast
          ');
358 h=legend('Mensagem Original 2','Mensagem Recuperada 2','Location','
          southeast');
359 set(h,'FontSize',fsize);
360 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
361 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
362 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
363 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
364 saveas(gcf,'FIG21.png');
365 close( fig )
366
367 %Figura 22
368 fig=figure ;
369 aux = Xmaster(:,4) - Xslave(:,4);
370 plot(t,mensagem3,t, aux,':','LineWidth',3);
371 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
372 grid on
373 grid minor
374 %h=legend('Original Message 3','Decrypted Message 3','Location','northeast
          ');
375 h=legend('Mensagem Original 3','Mensagem Recuperada 3','Location','
          northeast');
376 set(h,'FontSize',fsize);
377 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
378 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
379 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
380 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
381 saveas(gcf,'FIG22.png');
382 close( fig )
383
384 %Figura 23
385 fig=figure ;
386 aux = Xmaster(:,5) - Xslave(:,5);
387 plot(t,mensagem4,t, aux,':','LineWidth',3);
388 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
389 grid on
390 grid minor
391 %h=legend('Original Message 4','Decrypted Message 4','Location','northeast
          ');
392 h=legend('Mensagem Original 4','Mensagem Recuperada 4','Location','

```

```

        northeast ');
393 set(h,'FontSize',fsize);
394 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
395 %xlabel('$$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
396 xlabel('$$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
397 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
398 saveas(gcf,'FIG23.png');
399 close(fig)
400
401 %Figura 24
402 fig=figure;
403 aux = Xmaster(:,6) - Xslave(:,6);
404 plot(t,mensagem5,t,aux,':','LineWidth',3);
405 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
406 grid on
407 grid minor
408 %h=legend('Original Message 5','Decrypted Message 5','Location','northeast
        ');
409 h=legend('Mensagem Original 5','Mensagem Recuperada 5','Location','
        southeast');
410 set(h,'FontSize',fsize);
411 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
412 %xlabel('$$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
413 xlabel('$$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
414 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
415 saveas(gcf,'FIG24.png');
416 close(fig)
417
418 %Figura 25
419 fig=figure;
420 aux = Xmaster(:,7) - Xslave(:,7);
421 plot(t,mensagem6,t,aux,':','LineWidth',3);
422 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
423 grid on
424 grid minor
425 %h=legend('Original Message 6','Decrypted Message 6','Location','northeast
        ');
426 h=legend('Mensagem Original 6','Mensagem Recuperada 6','Location','
        northeast');
427 set(h,'FontSize',fsize);
428 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
429 %xlabel('$$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
430 xlabel('$$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
431 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
432 saveas(gcf,'FIG25.png');
433 close(fig)
434
435 %Figura 26
436 fig=figure;
437 aux = Xmaster(:,1) - Xslave(:,1) - mensagem1;

```



```

438 plot(t, aux, 'LineWidth', 3);
439 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
440 grid on
441 grid minor
442 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
443 %xlabel('$$Time (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
444 xlabel('$$Tempo (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
445 ylabel('$$\widehat{m}_{1}(t) - m_{1}(t)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize',
    'fsize');
446 set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
447 saveas(gcf, 'FIG26.png');
448 close(fig)
449
450 %Figura 27
451 fig=figure;
452 aux = Xmaster(:,3) - Xslave(:,3) - mensagem2;
453 plot(t, aux, 'LineWidth', 3);
454 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
455 grid on
456 grid minor
457 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
458 %xlabel('$$Time (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
459 xlabel('$$Tempo (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
460 ylabel('$$\widehat{m}_{2}(t) - m_{2}(t)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize',
    'fsize');
461 set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
462 saveas(gcf, 'FIG27.png');
463 close(fig)
464
465 %Figura 28
466 fig=figure;
467 aux = Xmaster(:,4) - Xslave(:,4) - mensagem3;
468 plot(t, aux, 'LineWidth', 3);
469 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
470 grid on
471 grid minor
472 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);
473 %xlabel('$$Time (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
474 xlabel('$$Tempo (s)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', fsize);
475 ylabel('$$\widehat{m}_{3}(t) - m_{3}(t)$$', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize',
    'fsize');
476 set(gcf, 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
477 saveas(gcf, 'FIG28.png');
478 close(fig)
479
480 %Figura 29
481 fig=figure;
482 aux = Xmaster(:,5) - Xslave(:,5) - mensagem4;
483 plot(t, aux, 'LineWidth', 3);
484 set(0, 'DefaultAxesFontSize', fAxesSize);

```

```

485 grid on
486 grid minor
487 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
488 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
489 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
490 ylabel('$$\widehat{m}_{4}(t) - m_{4}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize
    ',fsize);
491 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
492 saveas(gcf,'FIG29.png');
493 close(fig)
494
495 %Figura 30
496 fig=figure;
497 aux = Xmaster(:,6) - Xslave(:,6) - mensagem5;
498 plot(t, aux, 'LineWidth',3);
499 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
500 grid on
501 grid minor
502 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
503 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
504 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
505 ylabel('$$\widehat{m}_{5}(t) - m_{5}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize
    ',fsize);
506 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
507 saveas(gcf,'FIG30.png');
508 close(fig)
509
510 %Figura 31
511 fig=figure;
512 aux = Xmaster(:,7) - Xslave(:,7) - mensagem6;
513 plot(t, aux, 'LineWidth',3);
514 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
515 grid on
516 grid minor
517 set(0,'DefaultAxesFontSize',fAxesSize);
518 %xlabel('$$Time (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
519 xlabel('$$Tempo (s)$$','Interpreter','Latex','FontSize',fsize);
520 ylabel('$$\widehat{m}_{6}(t) - m_{6}(t)$$','Interpreter','Latex','FontSize
    ',fsize);
521 set(gcf,'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
522 saveas(gcf,'FIG31.png');
523 close(fig)

```