



École Nationale Supérieure des Arts et Métiers  
Laboratório DynFluid  
Relatório final de **Master Recherche**

Orientadores: Jean-Christophe **ROBINET** et Xavier **MERLE**

# Análise e modelagem de um escoamento sobre uma cavidade

Pedro Márcio **DE LIMA PAIVA**

Paris, 10 de junho de 2010

CENTRE DE RATTACHEMENT PE : ENSAM Paris

AUTEURS : Pedro Márcio DE LIMA PAIVA

TITRE : ANALYSE ET MODÉLISATION D'UN ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ

ENCADREMENT DU PE : Jean-Christophe ROBINET, Xavier MERLE  
DynFluid

NOMBRES DE PAGES : 77 NOMBRE DE REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES : 17

RESUME : Ce projet de master recherche est dédié à l'étude des instabilités d'un écoulement affleurant une cavité ouverte par des simulations numériques. À partir d'une modélisation basée sur la théorie de la stabilité linéaire, l'objectif est de retrouver les principaux modes instables dans les cas d'un cavité ouverte 2D et 3D, afin de valider les simulations menées avec le code version *staggered* du laboratoire, appelé SZebulon, et de analyser les résultats pour mieux comprendre la physique qu'engendre ces instabilités.

MOTS CLES : SIMULATION NUMERIQUE / CAVITE / STABILITE LINEAIRE / DNS / STAGGERED /

]

**PARTIE A REMPLIR PAR LE PROFESSEUR RESPONSABLE DU PROJET**

ACCESSIBILITE DE CE RAPPORT (entourer la mention choisie) :

Classe 0 = accès libre

Classe 1 = Confidentiel jusqu'au \_\_\_\_\_

Classe 2 = Hautement confidentiel

Date :

Nom du signataire :

Signature :

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 APRESENTAÇÃO GERAL E MOTIVAÇÃO .....	1
1.2 CLASSIFICAÇÃO DAS CAVIDADES .....	1
1.2.1 Classificação geométrica .....	2
1.2.2 Classificação física .....	2
1.3 ESTADO DA ARTE .....	2
1.3.1 Fenômeno físico .....	2
1.3.2 Resultados existentes .....	4
1.4 OBJETIVOS .....	7

# SÍMBOLOS E ABREVIações

## Símbolos Latinos

$a_n$	Frequência do n-ésimo modo das perturbativo	
$b_n$	Taxa de crescimento/amortecimento do n-ésimo modo perturbativo	
$c_p$	Calor específico à pressão constante	[J/kg.K]
<b>D</b>	Profundidade da cavidade	[m]
$e$	Energia interna	[J]
$f$	Frequência	[Hz]
$i$	Número complexo	
<b>L</b>	Comprimento da cavidade	[m]
<b>M</b>	Número de Mach à montante da cavidade no infinito	
$n$	Número do modo de Rossiter	
$p$	Pressão	[Pa]
$q$	Propriedade qualquer do escoamento	
$q_i$	Fluxo de calor	[W]
$q'$	Componente perturbativa de uma propriedade qualquer do escoamento	
$\tilde{q}_n$	N-ésimo modo complexo perturbativo	
$\overline{Q}$	Valor médio de uma propriedade do escoamento	
<b>Re</b>	Número de Reynolds	
<b>St</b>	Número de Strouhal	
$u, u_1$	Componente em x da velocidade das perturbações	[m/s]
$U$	Velocidade à montante da cavidade no infinito	[m/s]
$U_c$	Velocidade de convecção em direção à jusante	[m/s]
$\overline{U}$	Velocidade média do escoamento segundo x	[m/s]
$v, u_2$	Velocidade das perturbações segundo y	[m/s]
$\overline{V}$	Velocidade média do escoamento segundo y	[m/s]
$w, u_3$	Velocidade das perturbações segundo z	[m/s]
<b>W</b>	Largura da cavidade	[m]
$\overline{W}$	Velocidade média do escoamento segundo z	[m/s]

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Retardo de fase da fórmula de Rossiter	[rad]
$\beta$	Número de onda transversal	[1/m]
$\varepsilon$	Fator da decomposição em campo de base e perturbação	
$\gamma$	Razão de calor específico	
$\kappa$	Velocidade média de convecção das perturbações vorticiais	[m/s]
$\lambda$	Comprimento de onda transversal	[m]
$\mu$	Viscosidade dinâmica	[Pa.s]
$\omega_n$	N-ésimo auto-valor complexo das perturbações	
$\rho$	Masse específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Número de Prandtl	
$\tau$	Tensor de tensões viscosas	[Pa]

## Subscritos

$\infty$	Escoamento no infinito
$i, j, k$	Índices da notação de Einstein
$x, y, z$	Referência aos eixos do referencial cartesiano
$n$	Referência ao n-ésimo modo

## Sobrescritos

$-$	Valor médio
$\sim$	Modo de uma propriedade do escoamento
$'$	Componente perturbativa
$n$	N-ésima iteração temporal

## Abreviações

DNS	<i>Direct Numerical Simulations</i>
DRP	<i>Dispersion Relation Preserving</i>
DynFluid	Laboratório de Dinâmica dos Fluidos (ENSAM)
ENSAM	École Nationale Supérieure des Arts et Métiers (Arts et Métiers – ParisTech)
SINUMEF	Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos (ENSAM)
K-H	Instabilidade do tipo Kelvin-Helmholtz
N-S	Equações de Navier-Stokes

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 APRESENTAÇÃO GERAL E MOTIVAÇÃO

As cavidades são elementos geométricos de base presentes em todos os tipos de veículos e equipamentos submetidos a escoamentos internos e externos, que tem efeitos marcáveis sobre o escoamento que não são completamente compreendidos até hoje em dia. Dessa forma, na indústria aeronáutica, sabemos que os compartimentos de bomba e trem de aterrissagem não tem apenas um efeito importante sobre a própria aerodinâmica, quanto também sobre o ruído gerado pelo veículo. De forma semelhante, na indústria automobilística, os efeitos produzidos por um teto solar ou mesmo eventuais pequenas cavidades da carroceria podem ser importantes tanto para a eficiência do veículo, quanto para o conforto sonoro dos passageiros. Ainda, na indústria ferroviária, o pantógrafo ou os espaços que separam os vagões podem se comportar como uma cavidade quanto aos efeitos produzidos sobre o escoamento. Todos esses efeitos não são negligíveis economicamente porque eles influenciam diretamente a qualidade dos veículos. Por consequência, existe um interesse crescente pelas simulações numéricas de escoamentos sobre cavidades a fim de melhor compreender a dinâmica que regi tal escoamento.

Um número considerável de estudos já foi feito sobre cavidades e a compreensão do fenômeno físico é muito mais clara hoje do que antes. No entanto, o fenômeno não é ainda completamente compreendido. O fenômeno físico é extremamente complexo, e ainda são necessárias respostas a fim de se pensar técnicas de controle do escoamento que sejam mais eficientes.

Neste capítulo, primeiramente são apresentados os diferentes tipos de classificação das cavidades. Na próxima seção, uma visão geral do fenômeno físico que se desenvolve nos escoamentos de cavidade é apresentada, e os principais resultados da bibliografia para este tipo de escoamento.

## 1.2 CLASSIFICAÇÃO DAS CAVIDADES

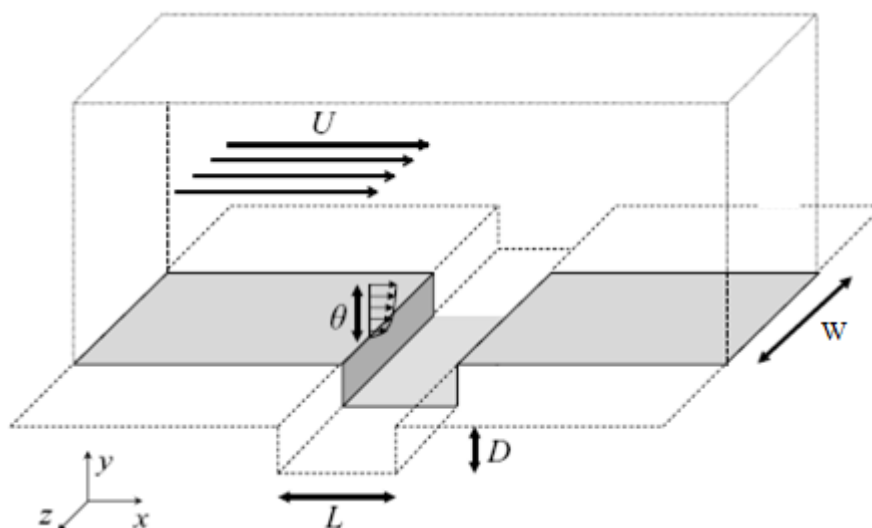


Figura 1.1: Vista geral de uma cavidade retangular para simulações numéricas. A caixa representada por linhas pontilhadas é o domínio computacional [2].

As cavidades reais podem ter inúmeras formas, entretanto na indústria, uma das formas mais encontradas é a forma retangular. No que concerne este estudo, as cavidades são retangulares e podem

ser essencialmente descritas por duas classificações principais, uma geométrica, e uma física, que são descritas abaixo.

## 1.2.1 Classificação geométrica

Do ponto de vista de sua forma, as cavidades retangulares são classificadas utilizando suas dimensões principais: largura  $W$ , comprimento  $L$ , e profundidade  $D$  (Fig. 1.1). Se a razão  $L/W < 1$ , trata-se, em geral, de um estudo 2D, se a razão  $L/W > 1$ , trata-se, em geral, de um estudo 3D. Neste estudo, as cavidades, em geral, serão consideradas infinitas no sentido da largura (o método de estabilidade linear utilizado aqui permite capturar os efeitos 3D com um escoamento de base 2D). As cavidades são também classificadas em relação à razão  $L/D$ , razão que é mais importante neste projeto. Se  $L/D < 1$ , a cavidade é dita profunda e pouco profunda, se  $L/D > 1$  (Fig. 1.2). Existe um caso particular no qual  $D = 1$ , isto é, uma cavidade quadrada. Não se trata de um caso particular apenas para a classificação geométrica, mas também do ponto de vista físico [2].

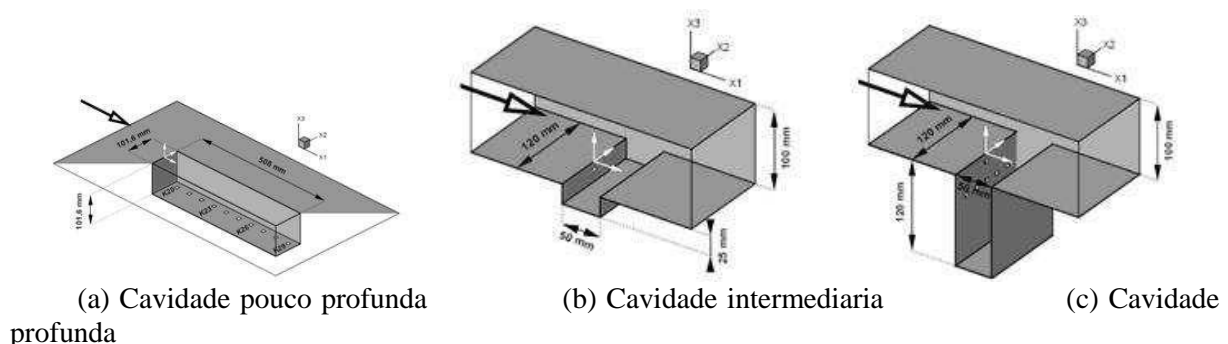


Figura 1.2: Classificação geométrica das cavidades [8].

## 1.2.2 Classificação física

De um ponto de vista físico, as cavidades podem também ser distinguidas quanto ao tipo de escoamento ao qual elas são submetidas (natureza da zona de recirculação, origem das oscilações, estabilidade). A cavidade será classificada como sendo aberta, transicional, ou ainda fechada em função da relação entre a tendência do coeficiente de pressão e o recolamento da camada de mistura sobre o fundo da cavidade. As cavidades abertas dão lugar a oscilações auto-entretidas, que não é o caso para cavidades fechadas. Inclusive, essas oscilações podem atingir amplitudes muito grandes, caso que é muito perigoso para estruturas internas da cavidade. Trata-se de um fenômeno de ressonância devido ao acordo entre as frequências de impacto dos vórtices e do batimento da cavidade.

As oscilações podem ter origens diferentes dependendo da estrutura da cavidade. Elas podem ser geradas por um modo de esteira (escoamento recirculante ejetado periodicamente em direção ao exterior), ou ainda por um modo de camada de cisalhamento (podendo ser causadas por um acordo de frequência entre as instabilidades da camada de mistura e os modos próprios acústicos da cavidade, dentro de um mecanismo de retroação).

## 1.3 ESTADO DA ARTE

### 1.3.1 Fenômeno físico

Antes de apresentar os resultados já obtidos para o escoamento sobre cavidades dentro da bibliografia, o fenômeno físico básico por trás dos escoamentos de cavidades é apresentado. À grosso modo, podemos dizer que se trata de um escoamento de camada de cisalhamento livre que interage com o canto à jusante da cavidade (Figure 1.3). Como ilustrado na figura 1.3, o encontro do

escoamento que passa sobre a cavidade com o fluido inicialmente em repouso dentro da cavidade gera uma camada de mistura ou de cisalhamento sobre a cavidade. A presença de tal ponto de inflexão no perfil de velocidade do escoamento de base já é uma condição para a manifestação de instabilidades. A camada de mistura sendo incondicionalmente instável observa-se, então, a aparição das instabilidades de Kelvin-Helmholtz. As perturbações emitidas pelo canto superior à montante da cavidade são convectadas até atingir o canto superior à jusante, com o qual elas interagem. O canto à jusante tem um papel de “quebrar” e “desviar” os vórtices que chegam até ele, gerando novos vórtices e oscilações de pressão, resultantes do fenômeno de redistribuição de uma parte da energia cinética em energia de pressão, que é propagada através da cavidade. Essas oscilações de pressão remontam o escoamento até o canto superior à montante onde elas criam novas perturbações na camada de cisalhamento. Este processo de retroação conduz à seleção e evolução de uma ou mais frequências de ressonância.

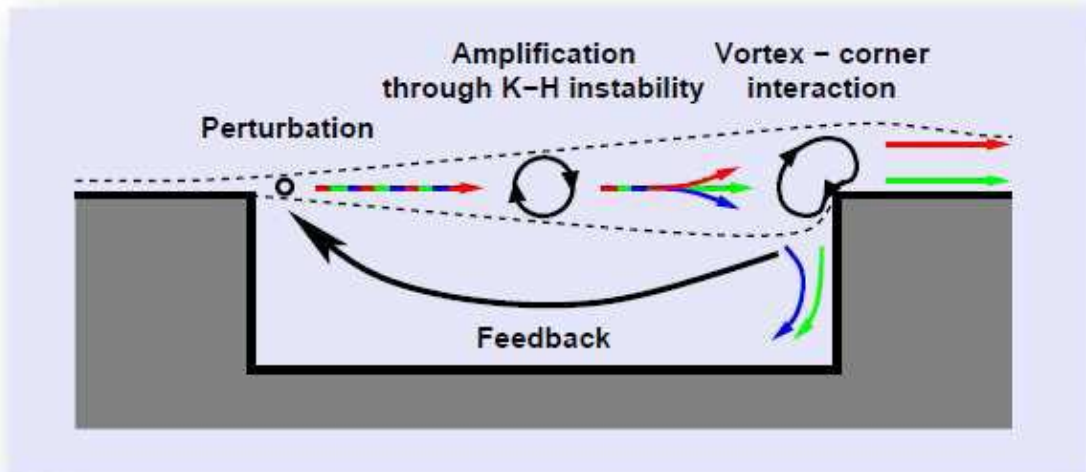


Figura 1.3: Fenômeno físico no interior de uma cavidade [8].

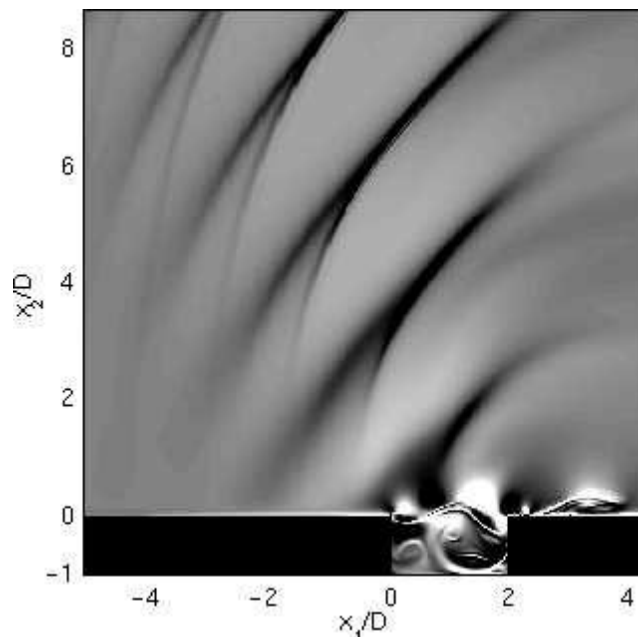


Figura 1.4: Simulação numérica ilustrativa da acústica dos escoamentos compressíveis para uma cavidade aberta ( $L/D=2$ ,  $Mach = 0,7$ ,  $\delta = 0,2D$ ) [7].



Para os escoamentos incompressíveis (velocidade do som tendendo ao infinito), o fechamento do ciclo se efetua pela via hidrodinâmica dado que a cavidade se situa no campo próximo acústico. Para os escoamentos compressíveis, a retroação se efetua pela via acústica. Isto quer dizer que, neste caso, as oscilações de pressão são de fato ondas acústicas propagadas (Figura 1.4).

Ainda sobre esse fenômeno de retroação, pesquisadores mostraram que existe uma diferença de escala entre os pequenos vórtices situados na proximidade do canto à montante (ligados à instabilidade de Kelvin-Helmholtz), e aqueles grandes situados mais adiante da cavidade no seio da camada de mistura (que apresentam uma frequência mais baixa) [12]. Dois regimes de instabilidades distintos são reconhecidos, um parametrizado pela espessura da quantidade de vorticidade da camada, e outro pela sua espessura de quantidade de movimento, o que caracteriza uma “interação coletiva”. Isto quer dizer que duas escalas de instabilidade interagem no escoamento, e o resultado é uma modulação complexa entre os dois fenômenos.

### 1.3.2 Resultados existentes

#### 1.3.2.1 Estudos teóricos e experimentais

Nestas últimas décadas, os escoamentos sobre cavidades receberam uma atenção considerável. As principais motivações para estudar o escoamento sobre cavidades foram a redução do ruído e o controle do escoamento. Várias pesquisas fundamentais foram conduzidas recentemente a fim de examinar como o controle ativo (de ciclo fechado e aberto) dos escoamentos pode ser utilizado para substituir os tradicionais dispositivos passivos como *spoilers*, rampas, etc [2].

Rowley decompôs os fenômenos hidrodinâmicos que causam as oscilações auto-entretidas em duas grandes classes [12]:

- **Modo de esteira:** Caracterizado pela presença de uma grande zona recirculante ejetada periodicamente ao exterior da cavidade. Este fenômeno é responsável por um aumento considerável do arrasto;
- **Modo da camada de cisalhamento:** É devido a um acordo frequencial entre as instabilidades da camada de mistura e uma frequência própria acústica, ou seja à partir das oscilações do ciclo de retroação.

Rossiter foi um dos primeiros a propor uma modelagem frequencial do ciclo de retroação (grandes números de Reynolds) [2]. Ele elaborou a clássica fórmula semi-empírica que permite prever as frequências de ressonância para um escoamento compressível (1964):

$$St = \frac{fL}{U} = \frac{n - \alpha}{M + 1/\kappa} \quad (1.1)$$

Onde  $n = 1, 2, \dots$  conduz ao número de Strouhal  $St$  dos modos I, II, etc,  $M$  e  $U$  são respectivamente, o número de Mach e a velocidade à montante da cavidade, e  $L$  é o comprimento da cavidade. As constantes empíricas  $\kappa$  e  $\alpha$  correspondem à velocidade média de convecção das perturbações vorticiais dentro da camada de cisalhamento (adimensionalizada pela velocidade à montante da cavidade), e um retardo de fase, respectivamente.

Ele, assim, pode prever com alguma precisão as frequências de ressonância, principalmente em regimes sônico e transônico. Posteriormente, outros trabalhos foram realizados a fim de eliminar os parâmetros empíricos desta fórmula, e esta modelagem também foi desenvolvida à ajuda de outros elementos que caracterizam a estabilidade da camada de mistura.

Posteriormente, outros trabalhos foram realizados a fim de eliminar os parâmetros empíricos desta fórmula e esta modelagem foi também desenvolvida com base em outros elementos que caracterizam a estabilidade da camada de mistura. Por exemplo, Bilanin e Covert (1973) propuseram uma modelagem desta camada de mistura por uma camada de vorticidade infinitamente fina que é excitada no canto à montante por uma perturbação de pressão [12]. Powell (1973) também propôs uma modelagem incompressível [8]:

$$f = \frac{U_c}{L} \left( n + \frac{1}{4} \right) \quad (1.2)$$

onde  $U_c$  é a velocidade de convecção no sentido do escoamento.

Apesar do fato de que o modelo de Rossiter já explica uma parte da física de um escoamento sobre uma cavidade, ainda se trata de uma análise bidimensional do escoamento, e, por consequência, incompleta. Ela não leva em conta os efeitos não paralelos e tridimensionais. Assim sendo, foi observado ao longo de experiências passadas [5] que existem instabilidades 3D e elas têm efeitos não negligíveis. Faure e al. constataram tais estruturas tridimensionais (Fig.1.5). Podemos observar na figura uma periodicidade na direção  $z$  (transversal ao escoamento).

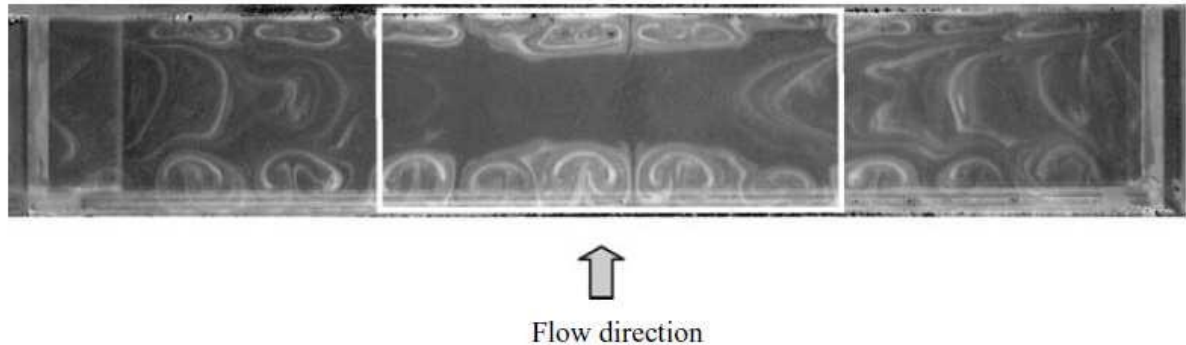


Figura 1.5: Visualização de um escoamento sobre uma cavidade. A imagem mostra em especial a formação das estruturas 3D dentro da cavidade [5].

### 1.3.2.2 Simulações numéricas

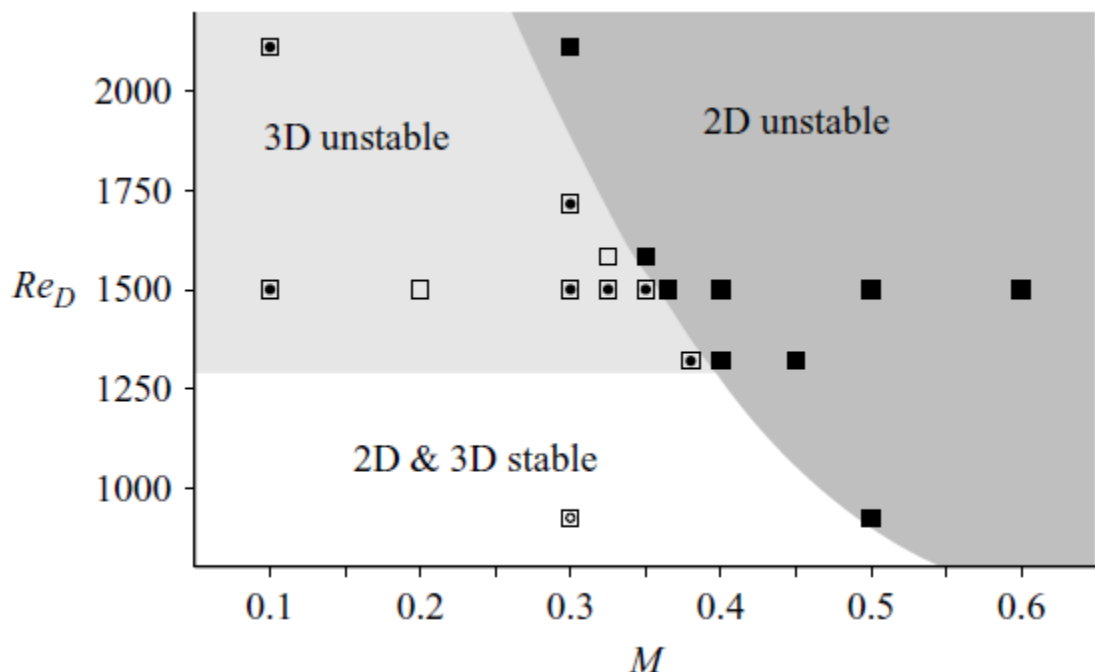


Figure 1.6: Curvas neutras de estabilidade 2D e 3D [2].

Vários estudos baseados nas simulações numéricas dos escoamentos sobre cavidades são apresentados na bibliografia, mas vários deles são ainda dedicados á análises 2D. Por outro lado, um trabalho recente de Brès e Colonius (2008) [2] se propõe a fazer um estudo das instabilidades

tridimensionais. Os autores fizeram um estudo tridimensional do escoamento sobre uma cavidade procurando essencialmente saber de as instabilidades 3D surgem antes da aparição de instabilidades bidimensionais (caso subcrítico 2D) e quais são suas características (Figura 1.6). Dentro desse estudo, os autores chegaram a várias conclusões interessantes que são apresentadas abaixo.

De início, eles notaram que a aparição de um comprimento de onda associado à profundidade  $D$  da cavidade. Esse achado permite distinguir entre os modos de Rossiter (2D), que têm por comprimento característico a largura da cavidade  $L$  da cavidade, e os modos observados em 3D. Assim, eles propõem que isto é devido ao fato que, diferentemente das instabilidades de Rossiter, que são pilotadas pelo processo acústico à montante e turbilhonário à jusante ao longo da cavidade, as instabilidades tridimensionais são pilotadas pelo escoamento de recirculação dentro da cavidade, o qual é caracterizado pela dimensão  $D$ . Adicionalmente, o estudo do espectro que eles obtiveram (Fig. 1.7) dessas instabilidades mostra que elas aparecem a frequência de uma ordem de grandeza inferior a aquela dos modos de Rossiter. Nota-se também, a partir da Figura 1.7, o desaparecimento por efeitos não-lineares do primeiro modo de Rossiter, e a conservação do segundo modo unicamente (de fato, eles capturaram efeitos não-lineares porque esses são resultados das simulações DNS).

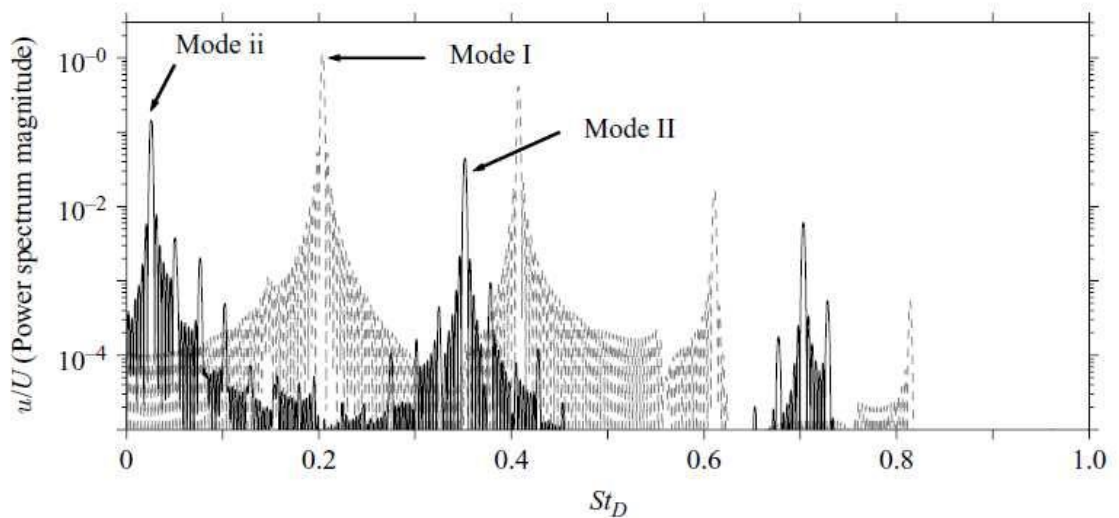


Figura 1.7: Comparação dos modos observados no caso de uma cavidade aberta ( $L/D = 2$ ) em 2D (linha pontilhada) e 3D (linha cheia). Observa-se a aparição do modo ii 3D numa frequência muito baixa e o desaparecimento do modo I de Rossiter [2].

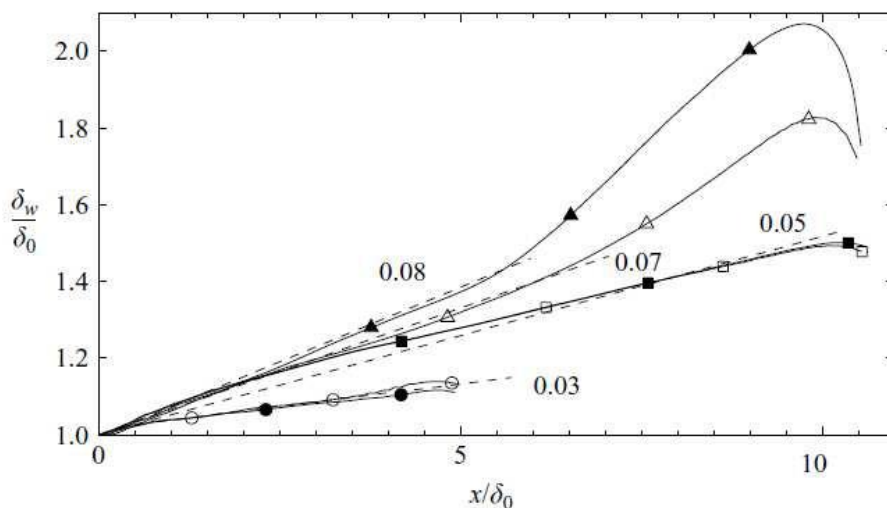


Figura 1.8: Evolução da espessura da camada de mistura em função da posição ao longo da cavidade para diferentes parâmetros:  $M = 0,6$  para os triângulos,  $M = 0,325$  para os quadrados e  $M = 0,6$  com uma cavidade quadrada ( $L/D = 1$ ) para os círculos [2].

Eles também fizeram um estudo da evolução da espessura da camada de mistura acima da cavidade para diversos números de Mach (fig. 1.8), os quais aqui podem ser compreendidos simplesmente como várias velocidades do escoamento. O resultado deles sugere uma interação entre a zona de recirculação e a camada de mistura (variação da inclinação para a porção à jusante da cavidade para maiores velocidades).

Uma última importante constatação de Brès e Colonius para as instabilidades do caso 3D que mais uma vez difere do caso 2D, que apresenta uma dependência do número de Reynolds e do número de Mach do escoamento, é uma independência do número de Mach. Este último resultado constatado sugere que a instabilidade 3D não é ligada aos efeitos de compressibilidade [2].

A partir dessa constatações, os autores suportam a idéia de que o mecanismo de instabilidade tridimensional é uma instabilidade centrífuga genérica associada às linhas de corrente fechadas dentro do escoamento turbilhonário recirculante perto da parede à jusante da cavidade. Argumento que eles defendem em seu artigo com uma análise formal utilizando o discriminante de Rayleigh, e análises de outros tipos de escoamentos associados que apresentam o mecanismo centrífugo a fim de caracterizar a instabilidade tridimensional em questão como sendo centrífuga [2].

## 1.4 OBJETIVOS

Tendo apresentado um introdução dos fundamentos do fenômeno físico do escoamento sobre uma cavidade, os objetivos deste projeto efetuados dentro do contexto da tese de Master Recherche são apresentados. A idéia do projeto é de, continuando a adaptar o código de estabilidade linear Szebulon (versão *staggered*) para o caso da cavidade aberta, gerar e analisar os resultados detal análise linear a fim de melhor compreender o fenômeno complexo do escoamento sobre uma cavidade tanto para o caso 2D, quanto para o caso 3D. O objetivo é caracterizar as principais instabilidades 2D e 3D que se desenvolvem em tal escoamento para diferentes regimes.

À grosso modo, o fenômeno poderia ser visto como uma camada livre que interage com o canto à jusante de uma cavidade, mas como se dá essa interação exatamente, como se dá a relação entre o espectro local e o espectro global, e qual é exatamente o papel das escalas dimensionais da cavidade na seleção dos modos principais a partir de um espectro contínuo de uma camada de mistura livre são ainda questões à responder. E o objetivo final deste projeto é justamente de melhor compreender o fenômeno a fim de poder começar a responder a essas questões.

Devido à limitação temporal do projeto, este estudo foi conduzido somente para o caso incompressível. Sabendo-se que segundo Brès [2] o número de Mach não tem muita influência nas instabilidades tridimensionais, e que, mesmo que este não seja o caso para as instabilidades bidimensionais, o modelo de Rossiter também é válido para o caso incompressível fazendo-se algumas mudanças na sua fórmula, os resultados incompressíveis gerados neste projeto podem elucidar muito a compreensão do fenômeno. Lembrando-se que a diferença física entre o caso incompressível e o compressível é que no primeiro caso a retroação se efetua pela via hidrodinâmica, como já explicado anteriormente.



École Nationale Supérieure des Arts et Métiers  
Laboratoire DynFluid  
Rapport final de **Master Recherche**

Tuteurs de stage: Jean-Christophe **ROBINET** et Xavier **MERLE**

# Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité

Pedro Márcio **DE LIMA PAIVA**

Paris, le 10 juin 2010

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1 INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
1.1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE ET MOTIVATION	3
1.2 CLASSIFICATION DES CAVITÉS	3
1.2.1 Classification géométrique	4
1.2.2 Classification physique	4
1.3 ETAT DE L'ART	4
1.3.1 Phénomène physique	4
1.3.2 Résultats existants	6
1.4 OBJECTIFS	9
<b>2 MÉTHODE</b>	<b>10</b>
2.1 THÉORIE DE LA STABILITÉ LINÉAIRE	10
2.2 OBTENTION DU CHAMP DE BASE	12
2.2.1 Méthode de filtrage temporel	13
2.3 MAILLAGE STAGGERED	15
2.4 SCHÉMAS DRP	16
2.5 MAILLAGE ET CRÉATION DU FICHIER CHAMP DE BASE	18
2.6 INTERPOLATION	20
2.7 CODE DE STABILITÉ LINÉAIRE	22
2.7.1 Description du code	22
2.7.2 Version <i>staggered</i>	24
<b>3 RÉSULTATS ET ANALYSE</b>	<b>26</b>
3.1 PARAMÈTRES DES SIMULATIONS	26
3.1.1 Cas DNS	26
3.1.2 Cas Barbagallo <i>et al.</i> [1]	26
3.2 ÉTUDE DE CONVERGENCE DE MAILLAGE	27
3.3 VALIDATION 2D	28
3.3.1 Cas DNS	28
3.3.2 Cas Barbagallo <i>et al.</i> [1]	29
3.4 ANALYSE DES RÉSULTATS 2D	31
3.4.1 Fonction propres	31
3.4.2 Comparaison avec Rossiter	33
3.4.3 Comparaison avec Michalke [10]	36
3.4.4 Comparaison avec l'analyse locale	37
3.5 ANALYSE DES RÉSULTATS 3D	38
3.5.1 Spectres	38
3.5.2 Fonctions propres	43
<b>4 CONCLUSION</b>	<b>46</b>
<b>5 ANNEXES</b>	<b>47</b>
5.1 FONCTIONS PROPRES DES MODES PRINCIPAUX 2D	47
5.2 SPECTRES AU TOUR DU MODE PRINCIPAL 3D POUR PLUSIEURS $\beta$	50
5.3 FONCTIONS PROPRES DU MODE PRINCIPAL 3D POUR PLUSIEURS $\beta$	66
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>76</b>

# 1 INTRODUCTION

## 1.1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE ET MOTIVATION

Les cavités sont des éléments géométriques de base présents dans toutes sortes de véhicules et d'équipements soumis à des écoulements internes et externes, qui ont des effets remarquables sur l'écoulement qui ne sont pas complètement maîtrisés jusqu'à présent. Ainsi, dans l'industrie aéronautique, on sait que les soutes à bombes ou les trappes de train d'atterrissage n'ont des effets importants pas seulement sur l'aérodynamique en lui-même, mais aussi sur le bruit produit par l'appareil. Aussi dans l'industrie automobile les effets produits par un toit ouvrant ou même des éventuelles petites cavités dans la carrosserie peuvent avoir une importance tant pour l'efficacité du véhicule, que pour le confort sonore des passagers. De même, dans l'industrie ferroviaire, le pantographe ou les espaces séparant les wagons peuvent jouer le rôle d'une cavité par rapport aux effets produits sur l'écoulement. Tous ces effets-là sont non négligeables au niveau économique parce qu'ils influencent directement la qualité des véhicules. Par conséquent, il y a un intérêt croissant pour les simulations numériques des écoulements affleurants des cavités afin de mieux comprendre la dynamique qui régit un tel écoulement.

Un nombre considérable d'études ont été déjà fait sur les cavités et la compréhension du phénomène physique est beaucoup plus claire aujourd'hui qu'avant. Mais malgré ça, le phénomène n'est pas encore entièrement compris. Le phénomène physique est très complexe, et demande encore des réponses afin d'envisager des techniques de contrôle de l'écoulement qui soient plus efficaces.

Dans ce premier chapitre, tout d'abord, sont présentés les différents types de classification des cavités. Dans le paragraphe suivant, un aperçu général du phénomène physique qui se développe dans les écoulements de cavité est présenté, et les principaux résultats de la bibliographie pour ce type d'écoulement.

## 1.2 CLASSIFICATION DES CAVITÉS

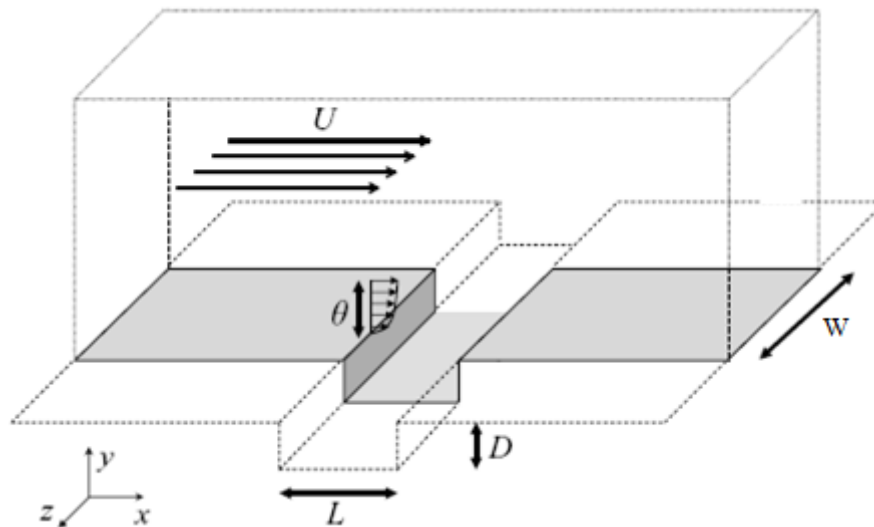


Figure 1.1: Vue générale d'une cavité rectangulaire pour des simulations numériques. La caisse représenté en traits pointillés est le domaine computationnelle [2].

Les cavités réelles peuvent avoir plusieurs formes, par contre dans l'industrie, une des formes les plus rencontrées c'est la forme rectangulaire. Dans ce qui cette étude est concernée, les cavités sont

rectangulaires et peuvent être essentiellement décrit par deux classifications principales, une géométrique, et une physique, qui sont décrites en dessous.

## 1.2.1 Classification géométrique

Du point de vue de leur forme, les cavités rectangulaires sont classées en utilisant ses dimensions principales : largeur  $W$ , longueur  $L$ , et profondeur  $D$  (Fig. 1.1). Si le rapport  $L/W < 1$ , il s'agit plutôt d'une étude 2D, si le rapport  $L/W > 1$ , il s'agit plutôt d'une étude 3D. Dans cette étude-là, les cavités seront plutôt considérées infinies dans le sens de la largeur (la méthode de stabilité linéaire utilisée ici permet de capturer des effets 3D avec un écoulement de base 2D). Les cavités sont classifiées aussi par rapport au ratio  $L/D$ , rapport qui est plus important dans ce projet. Si  $L/D < 1$ , la cavité est dite profonde et peu profonde, si  $L/D > 1$  (Fig. 1.2). Il y a un cas particulier défini dans lequel  $L/D = 1$ , c'est-à-dire une cavité carrée. Il ne s'agit pas d'un cas particulier que dans la classification géométrique, mais aussi du point de vu physique [2].

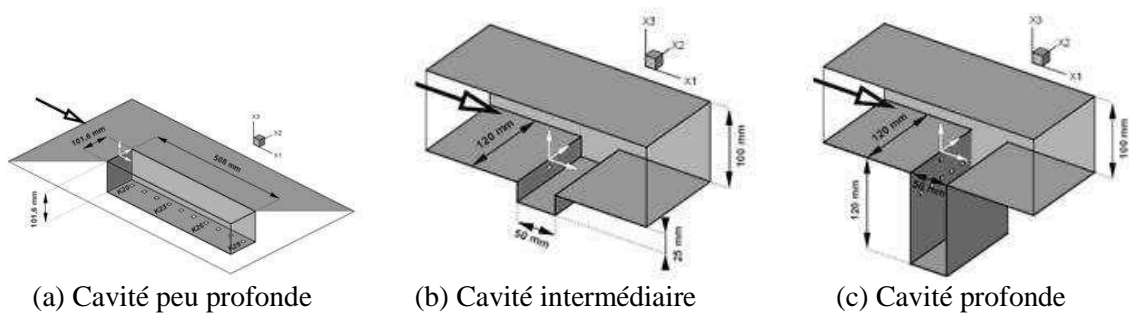


Figure 1.2: Classification géométrique des cavités [8].

## 1.2.2 Classification physique

D'un point de vue physique, les cavités peuvent aussi être distinguées par rapport au type d'écoulement auquel elles sont soumises (nature de la zone de recirculation, origine des oscillations, stabilité). La cavité sera classée comme étant ouverte, transitionnelle, ou encore fermée en fonction de la relation entre l'allure du coefficient de pression et le rattachement de la couche de mélange sur le fond de la cavité. Les cavités ouvertes donnent lieu à des oscillations auto-entretenues, ce qui n'est pas le cas pour les cavités fermées. En fait, ces oscillations peuvent atteindre de très grandes amplitudes, cas qui est vraiment dangereux pour les structures internes de la cavité. Il s'agit d'un phénomène de résonance à cause de l'accord des fréquences de l'impact des tourbillons et du bâti de la cavité.

Les oscillations peuvent avoir des origines différentes selon la structure de la cavité. Elles peuvent être issues d'un mode de sillage (écoulement recirculant éjecté périodiquement vers l'extérieur), ou encore d'un mode de couche de cisaillement (pouvant être dû à un accord de fréquence entre les instabilités de la couche de mélange et les modes propres acoustiques de la cavité, dans un mécanisme de rétroaction).

## 1.3 ETAT DE L'ART

### 1.3.1 Phénomène physique

Avant de présenter les résultats déjà obtenue pour l'écoulement affleurant une cavité dans la bibliographie, le phénomène physique basique derrière les écoulements des cavités est présenté. En gros, on peut dire qu'il s'agit d'un écoulement de couche de cisaillement libre qu'interagit avec le coin aval de la cavité (figure 1.3).



Comme illustrée dans la figure 1.3, la rencontre d'un écoulement qui passe au-dessus de la cavité avec le fluide initialement au repos dans la cavité génère une couche de mélange ou de cisaillement au-dessus de la cavité. La présence de tel point d'inflexion dans le profil de vitesse de l'écoulement de base est déjà une condition pour la manifestation des instabilités. La couche de mélange étant inconditionnellement instable, on observe, alors, l'apparition des instabilités de Kelvin-Helmholtz. Les perturbations émises par le coin supérieur amont de la cavité, sont convecté jusqu'à atteindre le coin supérieur aval, avec lequel elles vont interagir. Le coin aval va avoir un rôle de «casser» et «détourner» les tourbillons qui lui arrivent, en générant des nouveaux tourbillons et des oscillations de pression résultantes du phénomène de redistribution d'une partie de l'énergie cinétique en énergie de pression, qui est propagée à travers la cavité. Ces oscillations de pression remontent l'écoulement jusqu'au coin supérieur amont où elles viennent créer des nouvelles perturbations dans la couche de cisaillement. Ce processus de rétroaction conduit à la sélection et à l'évolution d'une ou plusieurs fréquences de résonance.

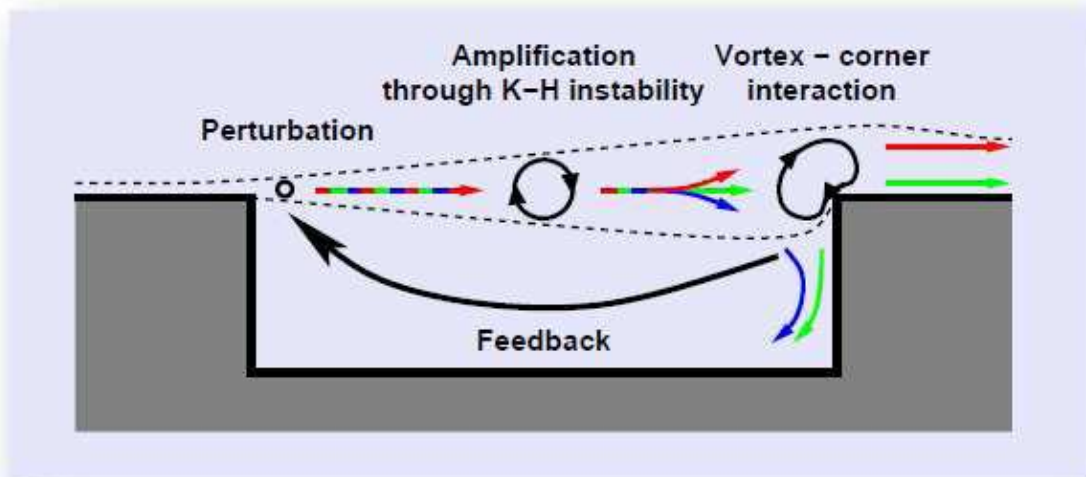


Figure 1.3: Phénomène physique à l'intérieur d'une cavité [8].

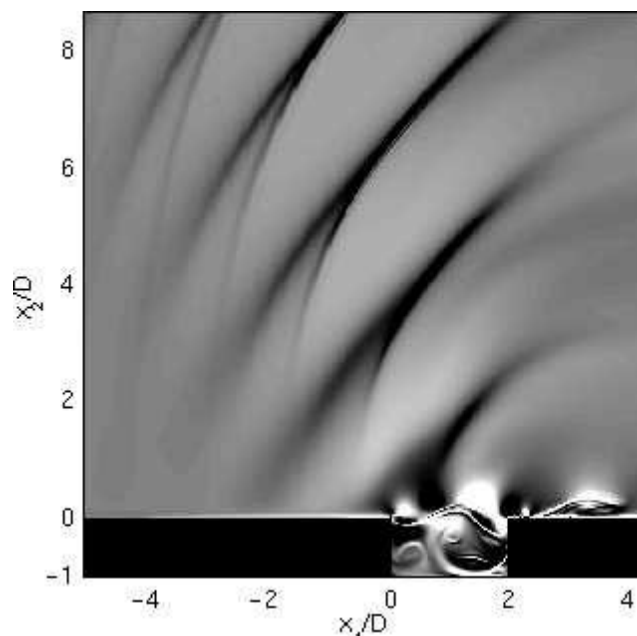


Figure 1.4: Simulation numérique illustrative du rayonnement des écoulements compressibles pour une cavité ouverte ( $L/D=2$ ,  $Mach = 0,7$ ,  $\delta = 0,2D$ ) [7].

Pour les écoulements incompressibles (célérité du son tend vers infini), la fermeture de la boucle s'effectue par voie hydrodynamique puisque la cavité se situe en champ proche acoustique. Pour les écoulements compressibles, la rétroaction s'effectue par voie acoustique. C'est-à-dire que, dans ce cas-là, les oscillations de pression sont en fait des ondes acoustiques propagées, ce qui revient à dire que le coin aval rayonne (figure 1.4).

Encore sur ce phénomène de rétroaction, des chercheurs ont montré qu'il existe une différence d'échelle entre les tourbillons situés à proximité du coin amont (liés avec l'instabilité de Kelvin-Helmholtz) de petite taille, et ceux de large taille situés plus en aval au sein de la couche de mélange (qui présentent une fréquence plus basse) [12]. Deux régimes d'instabilités distincts sont reconnus, un paramètre par l'épaisseur de quantité de vorticités de la couche, et un autre par son épaisseur de quantité de mouvement, ce qui caractérise une « interaction collective ». C'est-à-dire que deux échelles d'instabilités jouent dans l'écoulement, et le résultat est une modulation complexe entre les deux phénomènes.

### 1.3.2 Résultats existants

#### 1.3.2.1 Études théoriques et expérimentales

Ces dernières décennies, les écoulements affleurant les cavités ont reçu une attention considérable. Les principales motivations pour étudier l'écoulement sur les cavités ont été la réduction du bruit et le contrôle de l'écoulement. Plusieurs recherches fondamentales ont été menées récemment afin d'examiner comment le contrôle actif (en boucle ouverte et fermée) des écoulements peut être utilisé pour remplacer les traditionnels dispositifs passifs comme des spoliés, des rampes, etc [2].

Rowley a décomposé les phénomènes hydrodynamiques qui causent les oscillations auto-entretenues en deux grandes classes [12]:

- **Mode de sillage** : Caractérisé par la présence d'une grosse zone recirculante éjectée périodiquement à l'extérieur de la cavité. Ce phénomène est responsable pour une augmentation considérable de la traînée ;

- **Mode de la couche de cisaillement** : Est dû soit à un accord fréquentiel entre les instabilités de la couche de mélange et une fréquence propre acoustique, soit à partir des oscillations de la boucle de rétroaction.

Rossiter a été un des premiers à proposer une modélisation fréquentielle de la boucle de rétroaction (grands nombres de Reynolds) [2]. Il a élaboré la semi-classique formule empirique permettant de prédire les fréquences de résonance pour un écoulement compressible (1964):

$$St = \frac{fL}{U} = \frac{n - \alpha}{M + \frac{1}{\kappa}} \quad (1.1)$$

Où  $n = 1, 2, \dots$  conduit au nombre de Strouhal  $St$  des modes I, II, etc,  $M$  et  $U$  sont, respectivement, le nombre de Mach et la vitesse en amont de la cavité, et  $L$  est la longueur de la cavité. Les constantes empiriques  $\kappa$  et  $\alpha$  correspondent à la vitesse moyenne de convection des perturbations tourbillonnaires dans la couche de cisaillement (adimensionalisé par la vitesse en amont de la cavité), et un retard de phase, respectivement.

Il a ainsi pu prédire avec une certaine précision les fréquences de résonance notamment en régimes subsonique et transsonique. Après, d'autres travaux ont été réalisés afin d'éliminer les paramètres empiriques de cette formule, et cette modélisation a été aussi développée à l'aide d'autres éléments caractérisant la stabilité de la couche de mélange. Par exemple, Bilanin et Covert (1973) ont proposé une modélisation de cette couche de mélange par une nappe de vorticités infiniment mince qui est excitée au coin amont par une perturbation de pression [12]. Powell (1973) a aussi proposé une modélisation incompressible [8]:

$$f = \frac{U_c}{L} \left( n + \frac{1}{4} \right) \quad (1.2)$$

où  $U_c$  est la vitesse de convection vers l'aval.

Malgré le fait que le mode de Rossiter explique déjà une partie de la physique d'un écoulement affleurant une cavité, il s'agit encore d'une analyse bidimensionnelle de l'écoulement, et par conséquent incomplète. Elle ne prend pas en compte les effets non-parallèles et tridimensionnels. Ainsi, il a été observé lors d'expériences passées [5] qu'il y a des instabilités 3D et elles ont des effets non négligeables. Faure et al. ont reporté de telles structures tridimensionnelles (Fig.1.5). On peut observer dans la figure une périodicité dans la direction  $z$  (transversale à l'écoulement).

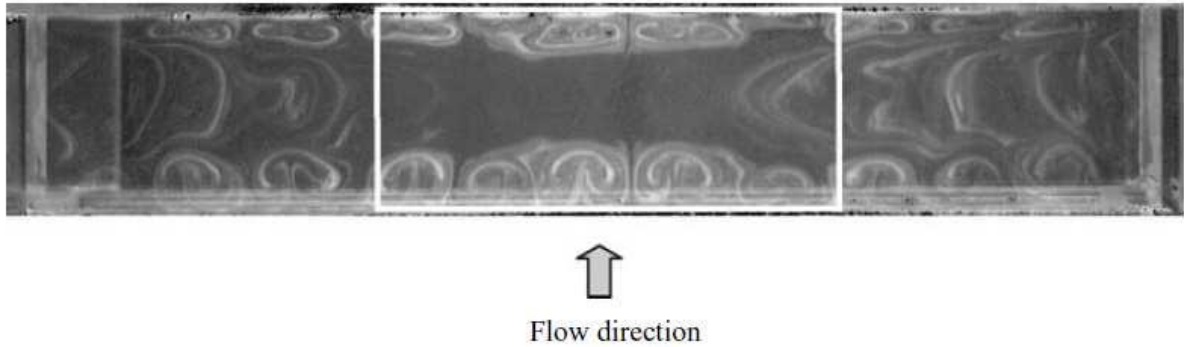


Figure 1.5: Visualisation d'un écoulement affleurant une cavité. L'image montre en spécial la formation des structures 3D dedans la cavité [5].

### 1.3.2.2 Simulations numériques

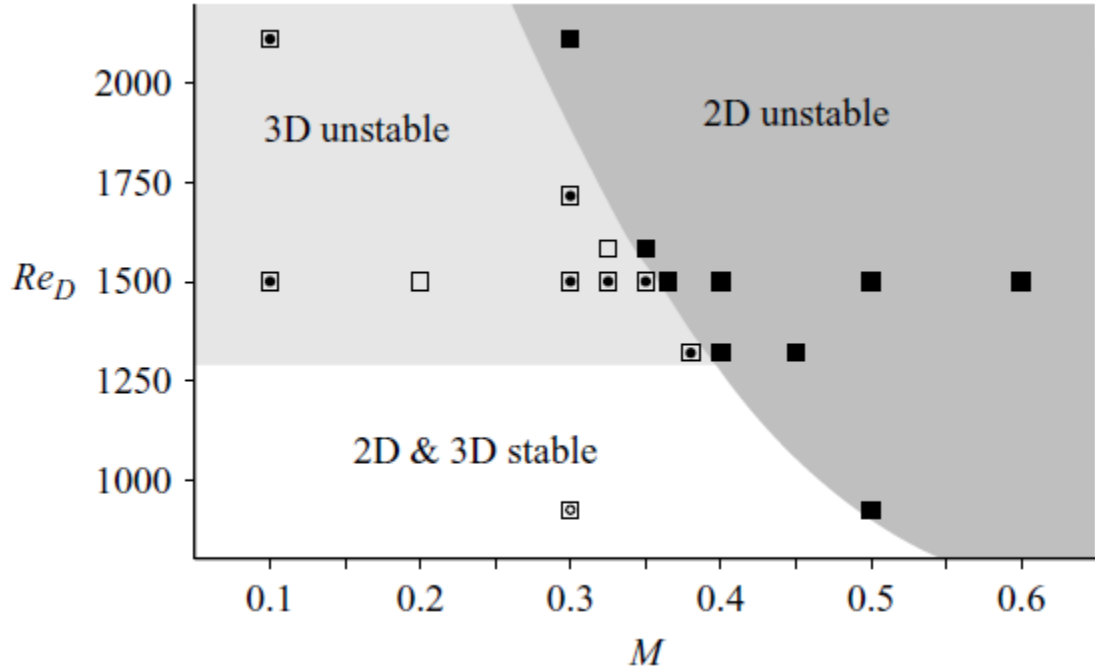


Figure 1.6: Tracé des courbes neutres de stabilité 2D et 3D [2].

Plusieurs études basées sur les simulations numériques des écoulements affleurants des cavités sont présentes dans la bibliographie, mais plusieurs encore dédiés à des analyses 2D. Par contre, une étude récente de Brès et Colonius (2008) [2] s'est proposée à faire une étude des instabilités tridimensionnelles. Les auteurs ont fait une étude tridimensionnelle de l'écoulement affleurant une

cavité en cherchant essentiellement à savoir si les instabilités 3D ont lieu avant l'apparition des instabilités bidimensionnelles (cas souscritique 2D) et quelles sont ses caractéristiques (1.6). Dans cette étude, les auteurs ont fait plusieurs conclusions intéressantes qui sont présentes en dessous.

Du coup, ils ont remarqué l'apparition d'une longueur d'onde associée à la profondeur  $D$  de la cavité. Cela permet de distinguer les modes de Rossiter (2D), qui ont pour longueur caractéristique la largeur  $L$  de la cavité, et les modes observés en 3D. Ainsi, ils proposent que ce soit à cause du fait que, différemment des instabilités de Rossiter, qui sont pilotés par le processus acoustique amont et tourbillonnaire aval sur la longueur de la cavité, les instabilités tridimensionnelles sont pilotées par l'écoulement de recirculation dedans la cavité, lequel est caractérisée par la dimension  $D$ . De plus, l'étude du spectre, qu'ils ont obtenues (Fig. 1.7), de ces instabilités montre qu'elles apparaissent à une fréquence d'un ordre de grandeur inférieur à celle des modes de Rossiter. Il est à noter aussi, de la figure 1.7, la disparition par des effets non linéaires du premier mode de Rossiter, et la conservation du second mode uniquement (en effet, ils ont capturé des effets non linéaires parce que ces sont des résultats des simulations DNS).

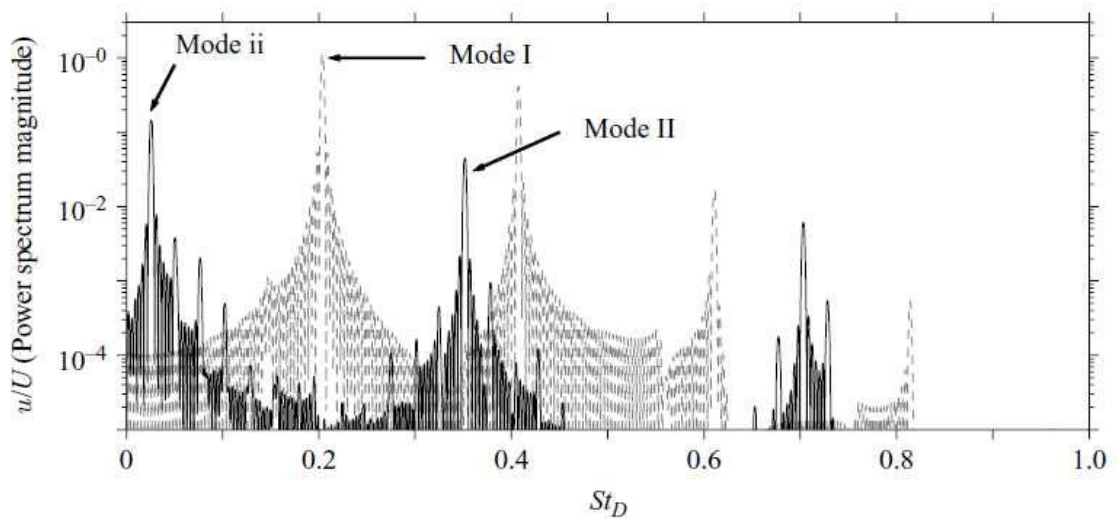


Figure 1.7: Comparaison des modes observés dans le cas d'une cavité ouverte ( $L/D = 2$ ) en 2D (tracé pointillé) et 3D (tracé plein). On observe l'apparition du mode ii 3D à très basse fréquence et la disparition du mode I de Rossiter [2].

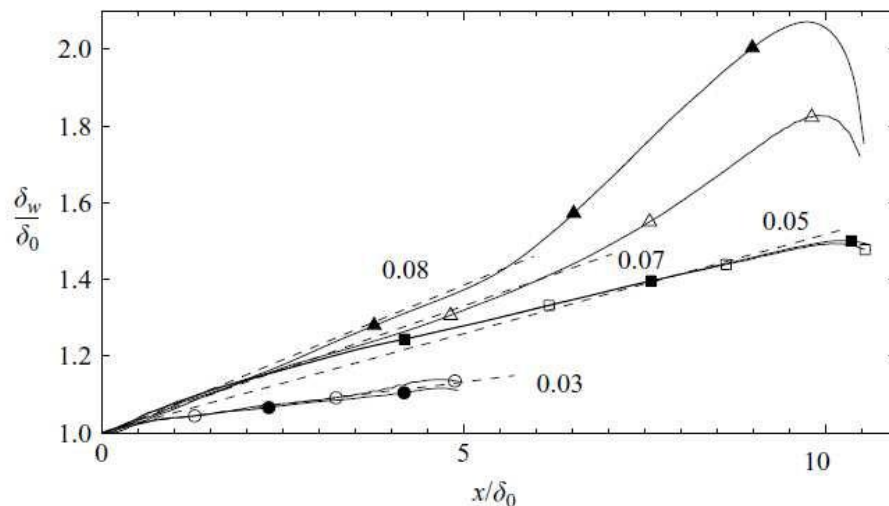


Figure 1.8: Tracé de l'évolution de l'épaisseur de la couche de mélange en fonction de la position au-dessus de la cavité pour différents paramètres:  $M = 0,6$  pour les triangles,  $M = 0,325$  pour les triangles et  $M = 0,6$  avec une cavité carré dans le cas des ronds [2].

Ils ont fait aussi une étude de l'évolution de l'épaisseur de la couche de mélange au-dessus de la cavité pour plusieurs nombres de Mach (Fig. 1.8), lesquels ici peuvent être compris comme plusieurs vitesses de l'écoulement tout simplement. Leur résultat suggère une interaction entre la zone de recirculation et la couche de mélange (variation de la pente pour la portion aval de la cavité pour des vitesses plus importantes). Et enfin, de nouveau différemment du cas 2D, qui présente une dépendance du nombre de Reynolds et du nombre de Mach de l'écoulement, dans le cas 3D, ils ont observé une indépendance du nombre de Mach. Ce dernier résultat suggère que l'instabilité 3D n'est pas liée avec les effets de compressibilité.

À partir de ces constatations les auteurs soutenant que le mécanisme de l'instabilité tridimensionnel est une instabilité centrifuge générique associée aux lignes de courants fermés dans l'écoulement tourbillonnaire recirculant près de la paroi aval de la cavité. Argument qu'ils ont défendu dans leur article avec une analyse formelle en utilisant le discriminant de Rayleigh, et des analyses des autres types d'écoulement associés qui présentent le mécanisme centrifuge afin de caractériser l'instabilité tridimensionnelle en question comme étant centrifuge [2].

## 1.4 OBJECTIFS

En ayant présenté une introduction des fondements du phénomène physique d'un écoulement affleurant une cavité, les objectifs de ce projet effectué dans le cadre du stage de master recherche sont présentés. L'idée du projet est de, en continuant l'adaptation du code de stabilité linéaire Szebulon (version *staggered*) pour le cas de la cavité ouverte, générer et analyser des résultats issues d'une telle analyse linéaire afin de mieux comprendre le phénomène complexe de l'écoulement affleurant une cavité tant pour le cas 2D, comme pour le cas 3D. L'objectif est de caractériser les principaux instabilités 2D et 3D que se développent dans des différents régimes dans un tel écoulement.

En *grosso modo*, on sait que le phénomène pourrait être vu comme une couche de mélange libre qu'interagit avec le coin aval, mais comment se donne cette interaction exactement, comment se donne la liaison entre le spectre local et le spectre global, et comment les échelles dimensionnelles de la cavité choisissent les modes principaux à partir d'un spectre continu d'une couche de mélange libre sont encore des questions à répondre. Et l'objectif final de ce projet est justement de mieux comprendre le phénomène afin de pouvoir commencer à répondre à ces questions.

À cause de la limitation temporelle du stage, cette étude a été menée seulement dans le cas incompressible. Sachant que selon Brès [2], le nombre de Mach n'a pas beaucoup d'influence dans les instabilités tridimensionnelles, et, même si cela n'est pas le cas pour les instabilités bidimensionnelles, aussi dites de Rossiter, on sait que son modèle est aussi valide pour le cas incompressible en faisant quelques changements dans sa formule. La différence physique étant que la réaction va s'effectuer par la voie hydrodynamique, comme déjà expliqué avant.

## 2 MÉTHODE

Plusieurs méthodes numériques peuvent être envisagées pour résoudre les équations régissant la mécanique des fluides et nous présenter les instabilités qui jouent dans un écoulement affleurant une cavité. Mais, en général, il y a deux principaux types d'approche numérique qui peuvent être mis en place pour étudier les instabilités des écoulements. Soit on utilise la simulation numérique direct (*Direct Numerical Simulation*), soit on utilise la théorie de la stabilité linéaire. Les deux approches sont présentées en dessous :

- **Calcul direct – DNS** Cette technique consiste tout simplement de discrétiser les équations de Navier-Stokes sur un maillage, puis de les résoudre. On résout les équations complètement et directement pour toutes les échelles de l'écoulement, sans employer aucun modèle de turbulence. Il s'agit d'une approche très simple au niveau théorique, parce qu'on résout complètement les équations de Navier-Stokes, mais c'est une approche très chère numériquement et peut nécessiter des temps de calcul assez longs [6]. En fait, le maillage doit être assez raffiné pour permettre la capture de toutes les échelles de l'écoulement, notamment celles issues de la turbulence.
- **Stabilité linéaire [15][16][17]** Une alternative, moins chère que cette dernière approche, est de considérer que l'écoulement est composé par deux parties, une partie laminaire et stationnaire appelée champ de base, et une partie instationnaire de nature perturbative. On linéarise les équations autour du champ de base, qui on suppose comme étant un donné du problème, et on résout le problème aux valeurs propres aux dérivées partielles. Cela permet de déterminer les modes propres et valeurs propres caractérisant les instabilités qui jouent dans l'écoulement. L'étude des signes des valeurs propres permet de déterminer si les solutions divergent.

Les simulations directes (DNS) des équations régissant la mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes) permettent de décrire toute la physique de l'écoulement, mais elles sont très coûteuses au niveau numérique (coût qui, en général, pour des simulations aérodynamiques à haut Reynolds est encore prohibitif).

Dans le cadre de ce projet, on applique plutôt la théorie de stabilité linéaire, même si on utilise des simulations DNS 2D (considérablement moins cher que 3D) ayant pour but l'obtention du champ de base. La théorie appliquée dans ce projet a pour but non seulement d'obtenir les résultats de l'écoulement, souvent instable, sur une cavité, mais aussi comprendre les mécanismes impliqués dans ce qui mène à ces instabilités. Cette compréhension plus profonde permet la mise en œuvre des méthodologies de contrôle beaucoup plus efficace, à partir du moment que nous comprenions les phénomènes physiques qui se développent dans l'écoulement.

### 2.1 THÉORIE DE LA STABILITÉ LINÉAIRE

Dans le cadre de la théorie de la stabilité linéaire, on considère que toutes les propriétés de l'écoulement affleurant la cavité peuvent être décomposées dans une partie bidimensionnelle stationnaire et une perturbation tridimensionnelle instationnaire de la manière suivante [14][9]:

$$q(x, y, z, t) = \bar{Q}(x, y) + \varepsilon q'(x, y, z, t), \text{ avec } \varepsilon \ll 1 \quad (2.1)$$

Où  $q$  c'est une propriété de l'écoulement,  $\bar{Q}$  est le champ de base bidimensionnelle stationnaire,  $q'$  est la perturbation, et  $\varepsilon$  est un facteur beaucoup plus petit que 1. L'application de ce facteur-là revient à dire que les perturbations ont des valeurs petites par rapport au champ de base.

Maintenant, si on injecte cette décomposition dans les équations régissant l'écoulement du fluide (notées N), les équations de Navier-Stokes, on obtient un système d'équations représenté par l'équation suivante :

$$\nabla N(\bar{Q}) \cdot q' = 0 \quad (2.2)$$

Après, en considérant que notre cavité est homogène dans la direction  $z$  (direction transversale de l'écoulement tout au long de la largeur), on suppose une perturbation périodique dans cette direction. Ainsi, on écrit notre perturbation 3D sous la forme d'une décomposition de Fourier spatiale et temporelle des modes discrets (cas numérique):

$$q'(x, y, z, t) = \sum_n \tilde{q}_n(x, y, \beta, \omega_n) e^{i(\beta z - \omega_n t)} + c.c \quad (2.3)$$

où le paramètre  $\beta$  est pris pour un nombre d'onde transversal réel et prescrit, lié à une longueur d'onde transversale dans la cavité par  $\lambda = 2\pi / \beta$ , avec  $\tilde{q}_n$  et  $\omega_n = a_n + ib_n$  les modes propres complexes inconnues et correspondant valeurs propres complexes, l'un et l'autre dépendant de  $\beta$ . Conjugaison complexe est requise dans (2.3), car  $q'$  est réel. La fréquence et le taux d'amplification/amortissement du mode sont donnés par  $a_n$  et  $b_n$ , respectivement.

Le comportement pour des temps longs de la solution linéaire sera dicté par le mode avec la valeur propre  $\omega = a + ib$  de la plus grande partie imaginaire. L'écoulement est dit sous-critique (stable) si  $b$  est strictement négative, neutrement stable si  $b = 0$ , et supercritique (instable) si  $b > 0$ . La détermination des modes moins amorties (ou plus instables), donnée une longueur d'onde  $\beta$ , consiste à trouver la valeur propre  $\omega$  et vecteur propre correspondant, par l'intégration des équations qui régissent l'écoulement directement dans le domaine temporel [2]. C'est intéressant de noter que ce cas-là, qui a été décrit, correspond à un cas de perturbations 3D. Pour passer au cas 2D, il suffit de prendre  $\beta = 0$ .

L'injection de la décomposition (2.1) avec des solutions  $q'$  du type (2.3) dans les équations de Navier-Stokes incompressibles (découplés de l'équation de l'énergie) adimensionnés fait apparaître, après la linéarisation autour du champ de base, le système d'équations ci-dessous. Cette linéarisation s'agit de considérée comme nulle les termes en ordre 2 des perturbations, puisque les perturbations sont déjà très petites devant l'écoulement de base [17].

$$[L - D_x \bar{U}] \cdot \tilde{u} - D_y \bar{U} \tilde{v} - D_x \tilde{p} + i\omega \tilde{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$-D_x \bar{V} \tilde{u} + [L - D_y \bar{V}] \cdot \tilde{v} - D_y \tilde{p} + i\omega \tilde{v} = 0 \quad (2.5)$$

$$-D_x \bar{W} \tilde{u} - D_y \bar{W} \tilde{v} + L \tilde{w} - i\beta \tilde{p} + i\omega \tilde{w} = 0 \quad (2.6)$$

$$D_x \tilde{u} + D_y \tilde{v} + i\beta \tilde{w} = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{Avec } L = \frac{1}{\text{Re}} (D_x^2 + D_y^2 - \beta^2) - \bar{U} D_x - \bar{V} D_y - i\beta \bar{W}, \quad D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{ et } D_\alpha^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

On peut alors mettre ce système sous la forme matricielle :

$$\left[ M_{2x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + M_{2y} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + M_{1x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + M_{1y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + M_{6-1} \right] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = -\omega \cdot M_{6-2} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Avec dans le cas général, c'est-à-dire en dehors des conditions limite :

$$M_{2,x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{2,y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{1,x} = \begin{bmatrix} -\bar{U} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\bar{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{U} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{1,y} = \begin{bmatrix} -\bar{V} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\bar{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{V} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{6,1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{\text{Re}} + i\beta\bar{W} + D_x\bar{U} & D_y\bar{U} & 0 & 0 \\ D_x\bar{V} & \frac{\beta^2}{\text{Re}} + i\beta\bar{W} + D_y\bar{V} & 0 & 0 \\ D_x\bar{W} & D_y\bar{W} & \frac{\beta^2}{\text{Re}} + i\beta\bar{W} & -i\beta \\ 0 & 0 & i\beta & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{6,2} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient ensuite un système matriciel unique que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$(amat - \omega \times cmat) \cdot q = 0 \quad (2.9)$$

Où  $q$  est le vecteur inconnue rassemblant tous les points du maillage. Ici, dans le cas 2D ( $\beta = 0$ ), on obtient  $q = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}]^T$ .

Dans le code numérique utilisé dans le contexte du laboratoire DynFluid, on discrétise ce système (2.7) avec un schéma DRP de haute précision. Après, un algorithme du type Arnoldi permet de calculer les valeurs propres de la matrice. L'analyse des parties réelles et imaginaires de ces valeurs propres permet de déterminer les instabilités et leur fréquence. Et avec l'obtention des valeurs propres on calcule les fonctions propres  $q$  pour obtenir le champ perturbatif pour les propriétés de l'écoulement liés à chaque valeur propre, c'est-à-dire lié à chaque instabilité.

## 2.2 OBTENTION DU CHAMP DE BASE

L'approche de calcul numérique par la théorie de stabilité linéaire considère le champ de base 2D stationnaire comme étant une donnée. Ainsi, avant de mettre en place un code de stabilité linéaire, il faut d'abord trouver le champ de base. Pour cela, il faut faire tourner un calcul DNS 2D.

Comme déjà mentionnée, l'approche DNS résout les équations de Navier-Stokes complètes. Les équations sont résolues directement, ce qui signifie qu'aucun modèle de turbulence n'est utilisé et que



toutes les échelles de l'écoulement sont calculées. Les équations résolues sont, donc, les équations de Navier-Stokes incompressibles 2D représenté par les équations suivantes:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \vec{U} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla E - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\bar{\bar{\Sigma}} \bullet \vec{U}) + \frac{\kappa_C}{\rho} \Delta T = 0 \quad (2.12)$$

où le vecteur  $\vec{U} = (u_1, u_2)^t$  représente les vitesses dans les directions x et y respectivement,  $\rho$  représente la masse volumique, p représente la pression,  $\nu = \mu/\rho$  représente la viscosité cinématique, E représente l'énergie totale,  $\bar{\bar{\Sigma}}$  représente le tenseur des contraintes visqueuses (voir équation 2.13 au dessous),  $\kappa_C$  représente le coefficient de conduction thermique et T représente la température.

$$\bar{\bar{\Sigma}} = -p\bar{I} + 2\mu\bar{S} \quad (2.13)$$

Il est important de noter que la première équation est issue de la conservation de la masse, la deuxième de la conservation de la quantité de mouvement et la troisième de la conservation de l'énergie, sachant encore que la troisième équation est complètement découplée des deux autres. Comme, dans le cadre de ce projet, on ne s'intéresse pas par les phénomènes de transfert de chaleur, on résout effectivement seulement les deux premières équations.

Par les équations à résoudre présentées, on s'assure déjà de la bidimensionalité de la solution du champ de base, mais il faut aussi que le calcul vienne à converger vers un champ de base stationnaire. Pour le faire, il y a plusieurs méthodes que peuvent être envisagés, mais dans le cadre de ce projet on utilise la méthode de filtrage temporel présenté ci-dessous.

## 2.2.1 Méthode de filtrage temporel

Considérons le système non linéaire  $\dot{q} = f(q)$ , avec de conditions initiales et aux limites appropriées pour la quantité  $q$  vecteur dans l'opérateur  $f(q)$ . Un point est utilisé ici pour désigner la dérivée par rapport au temps. Pour un problème de la mécanique des fluides, le système ci-dessus est le système d'équations de Navier-Stokes. Un état stationnaire  $q_s$  est alors donné par  $\dot{q}_s = f(q_s) = 0$ . Si  $f$  est instable, toute  $q \neq q_s$  rapidement s'écarte de  $q_s$ . Afin de stabiliser le système ci-dessus, on peut envisager l'utilisation d'une méthode de filtrage temporel. Cela revient à ajouter à la droite du système un terme linéaire (2.14) pour forcer vers une cible  $w$  solution :

$$- \chi(q - w) \quad (2.14)$$

où  $\chi$  est le coefficient de contrôle. La solution cible théorique pour le contrôle est bien sûr la solution stationnaire  $q_s$ , qui n'est cependant pas disponible *a priori*. Par conséquent, la véritable solution cible est une modification de  $q$  avec fluctuations temporelles réduites, c'est-à-dire, une solution temporairement filtrée par un filtre passe-bas du type  $w = T * q$ , défini comme le produit de convolution de  $q$  avec le noyau du filtre temporel  $T$ . Pour que la méthode converge asymptotiquement en temps vers une solution exacte de l'équation stationnaire, la fréquence de

coupure du filtre doit être inférieure à celle d'instabilités de l'écoulement. Avec ces définitions, la modification du système est écrite :

$$\dot{q} = f(q) - \chi(I - T) * q \quad (2.15)$$

où  $I$  est l'opérateur identité. Comme  $q$  se rapproche de  $q_s$ , la solution filtrée  $w = T * q$  va à son tour se rapprocher de  $q$ , par conséquent, réduisant l'influence du contrôle. Si  $q$  est la solution constante, la valeur  $w$  filtrée temporairement sera identique à  $q = q_s$ , produisant une diminution de forçage. D'où la solution stationnaire de  $q_s$  du système contrôlé (2.15) est également une solution stationnaire du problème original. Donc, il n'y a pas de génération de nouveaux états stationnaires artificielles.

Donc, pour atténuer les oscillations instables de haute fréquence temporelle et ainsi atteindre un état stationnaire, nous incluons dans les équations gouvernantes un terme de régularisation linéaire supplémentaire, l'expression (2.14). Ce terme amortit effectivement les hautes fréquences de  $q$ . D'ailleurs, deux paramètres doivent être choisis dans la procédure de stabilisation, la forme du filtre  $T$  et le gain de contrôle  $\chi$ . Pour une fonction continue  $q(t)$ , un filtre temporel passe-bas est défini comme :

$$\bar{q}(t) = \int_{-\infty}^t T(\tau - t; \Delta) q(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

où  $\bar{q}$  est la quantité filtrée temporairement,  $T$  est le noyau paramétré du filtre et  $\Delta$  sa largeur associée. Pour être admissible, le noyau  $T$  doit être positive et normalisé d'une façon appropriée. En outre, à la limite de la diminution de la largeur du filtre, le filtre (2.16) doit se rapprocher de la fonction delta de Dirac. Probablement l'exemple le plus simple d'un tel filtre est celui de noyau exponentiel :

$$T(\tau - t; \Delta) = \frac{1}{\Delta} \exp\left(-\frac{\tau - t}{\Delta}\right) \quad (2.17)$$

avec la fonction de transfert correspondante dans l'espace de Fourier-Laplace :

$$H(\omega, \Delta) = \int_{-\infty}^0 T(\tau; \Delta) \exp(i\omega\tau) d\tau = \frac{1}{1 + i\omega\Delta} \quad (2.18)$$

où  $\omega$  est la fréquence circulaire et  $i = \sqrt{-1}$ . La fréquence de coupure du filtre est défini comme  $\Re(H(\omega_c; \Delta)) = 1/2$  et est donnée par  $\omega_c = 1/\Delta$ . On note que la fonction de transfert a une partie imaginaire considérable, ce qui conduit à un décalage de phase dans le signal filtré par rapport au signal original. Pour des applications réelles, la formulation intégrale du filtre (2.16) est impossible, car elle nécessite du stockage complet de l'histoire chronologique du signal  $q$ . Par conséquent, l'équivalent forme différentielle est adoptée :

$$\dot{\bar{q}} = \frac{q - \bar{q}}{\Delta} \quad (2.19)$$

qui peut être avancée dans le temps en utilisant n'importe quel schéma d'intégration. Donc, en considérant le système (2.15) avec le filtre exponentiel (2.17), à savoir,  $w = \bar{q}$ , le système à résoudre devient :

$$\dot{q} = f(q) - \chi(q - \bar{q}) \quad (2.20)$$

$$\dot{\bar{q}} = \frac{q - \bar{q}}{\Delta}$$

En utilisant cette méthode, on arrive à générer un champ de base bidimensionnelle stationnaire même pour des régimes normalement instables, notamment pour des écoulements de nombre de Reynolds plus importantes. Dans le contexte du projet, on a un code DNS du laboratoire DynFluid écrit en FORTRAN, qui, employant cette méthode de filtrage temporel, est responsable de la génération du champ de base 2D stationnaire pour l'utilisation après par le code Szebulon, c'est-à-dire, le code de stabilité linéaire aussi du laboratoire. Notre étude étant plutôt centrée dans la partie stabilité linéaire et analyse des résultats issues de telle analyse, une description du code DNS responsable de la génération du champ de base n'est pas présenté ici.

### 2.3 MAILLAGE STAGGERED

Il y a plusieurs types de maillage que peuvent être envisagés pour un calcul *CFD* par une méthode de différences finies, mais essentiellement on peut déjà classer en deux les différents types de maillages, par rapport au choix des points d'évaluation des différentes propriétés : *collocated* et *staggered*. *Collocated* c'est le type traditionnel de maillage, c'est-à-dire que tous les différentes propriétés de l'écoulement sont évalués dans tous les points du maillage. Par contre, est dite du type *staggered* le maillage dans lequel les différentes propriétés de l'écoulement sont évalués dans des différents points du maillage. Donc, pour un maillage du type *staggered* on peut envisager évaluer la pression dans des points différents que les points dans lesquels on évalue les composantes de vitesse, par exemple.

Étant donné le fait que dans le passé on a eu des problèmes avec des conditions aux limites pour la pression, problèmes liés notamment avec des conditions limites au niveau des coins (qui entraînent des oscillations non négligeables de pression), on a choisit de développer une version *staggered* du code de stabilité linéaire du laboratoire. Donc, en travaillant avec tel type de maillage, on peut choisir de décaler les points d'évaluation des propriétés par rapport aux coins afin de « échapper » de l'obligation d'imposer des conditions aux limites aux coins de la cavité comme illustré dans la figure 2.1 ci-dessous.

En plus, on a choisi d'utiliser un maillage *staggered* du type MAC. Il s'agit d'un type spécifique de maillage *staggered* dans lequel, comme illustré dans la figure 2.1, la composante de vitesse  $u$  (dans la direction  $x$ ) est évaluée dans les segments verticaux des cellules, la composante de vitesse  $v$  (dans la direction  $y$ ) est évaluée dans les segments horizontales de la cellule et la pression et la composante de vitesse  $w$  sont évaluées au milieu des cellules. On a choisi ce type MAC de maillage *staggered* parce qu'il est assez employé et connu dans la bibliographie de *CFD*, il présente des résultats assez fiables et principalement, il minimise les interpolations, comme sera expliqué dans le paragraphe 2.7.2.

Donc pour qu'on puisse utiliser tel maillage on a eu besoin, bien évidemment, de changer le code de stabilité appelé Zebulon pour devenir compatible à un maillage *staggered* du type MAC. Ayant fait toutes les adaptations pertinentes, la version *staggered* du code Zebulon a été nommé SZebulon, version laquelle on a utilisé pour les études et analyses dans le cadre de projet.

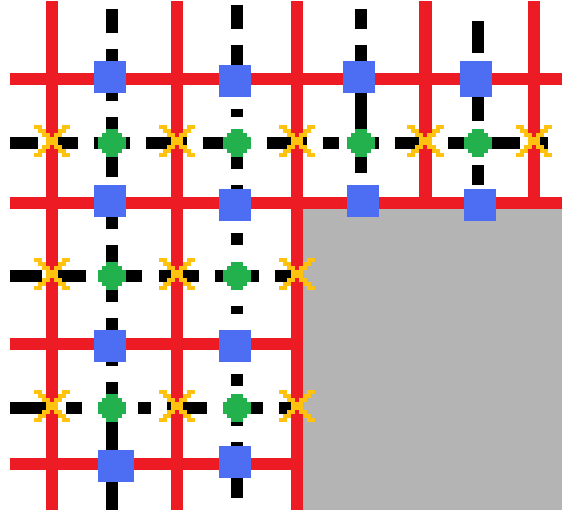


Figure 2.1: Représentation d'un maillage *staggered* du type MAC pour la région du coin aval de la cavité, le grille en rouge représente le maillage *collocated* original. Les croix jaunes représentent les points d'évaluation de la composante  $u$  de vitesse, les carrés bleus représentent les points d'évaluation de la composante de vitesse  $v$ , et les cercles verts représentent les points d'évaluation de la pression et de la composante de vitesse  $w$ .

## 2.4 SCHÉMAS DRP

Étant donné les équations de stabilité linéaire qui régissent la physique de l'écoulement à analyser, il faut être capable de les discrétiser sur le maillage généré. C'est-à-dire qu'il faut être capable de représenter les dérivées (représentées dans l'équation 2.8) par des schémas discrets aux différences finies qui fassent intervenir les points appropriés du maillage. Pour le faire, on peut envisager plusieurs schémas numériques. Dans le code Szebulon de stabilité linéaire, on a choisi de travailler avec les schémas DRP (*Dispersion Relation Preserving*, Tam & Webb [13]).

Traditionnellement, les schémas numériques sont seulement optimisés par rapport à l'erreur de troncature au sens de Taylor. Mais, les schémas DRP sont aussi optimisés par rapport à l'erreur de dispersion. C'est-à-dire, que les coefficients des schémas DRP sont calculés afin de non seulement minimiser l'erreur de troncature dans le plan des distances, mais aussi minimiser l'erreur de dispersion dans le plan des nombres d'onde, fait qui est particulièrement intéressant dans notre cas, étant donné que on résout nos équations dans le espace de Fourier [9].

Ainsi, on cherche la dérivée première de  $f(\xi)$  telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi) \cong \frac{1}{\Delta \xi} \sum_{j=-M}^M \tilde{a}_j f(\xi + j\Delta \xi) \quad (2.21)$$

La transformée de Fourier de  $f$  et son inverse étant de la forme :

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\alpha \xi} d\xi \quad (2.22)$$

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha \xi} d\alpha \quad (2.23)$$

La transformée de Fourier de (2.21) est alors de la forme :

$$i\alpha\tilde{f} \equiv \left( \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{j=-M}^M \tilde{a}_j e^{ij\Delta\xi} \right) \tilde{f} \quad (2.24)$$

et en posant  $\theta = \alpha\Delta\xi$ , le nombre d'onde réduit, il est clair que le nombre d'onde réduit de la transformée de Fourier du schéma aux différences finies s'écrit :

$$i\theta^* = \sum_{j=-M}^M \tilde{a}_j e^{ij\theta} \quad (2.25)$$

Afin d'avoir une erreur de dissipation nulle, on impose :

$$\tilde{a}_j = -\tilde{a}_{-j}, \quad \tilde{a}_0 = 0, \quad (2.26)$$

et le nombre d'onde réduit de la transformée de Fourier du schéma aux différences finies devient :

$$\theta^* = 2 \sum_{j=1}^M \tilde{a}_j \sin(j\theta) \quad (2.27)$$

Afin de s'assurer que la transformée de Fourier du schéma aux différences finies est une bonne approximation de celle de la dérivée de  $f(\xi)$ , les coefficients  $\tilde{a}_j$  sont choisis de manière à minimiser l'erreur de dispersion  $E$  sur une plage donnée de nombres d'onde réduits comme dans l'équation (2.28) ci-dessous. Il est important de noter que dans notre cas, la plage choisie est la plage  $|\theta| < \pi/2$ , c'est-à-dire les ondes comprenant au moins cinq points, i.e  $4\Delta\xi$ , par longueur d'onde.

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\theta - \theta^*|^2 d\theta, \quad (2.28)$$

c'est-à-dire :

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \theta - 2 \sum_{j=1}^M \tilde{a}_j \sin(j\theta) \right|^2 d\theta. \quad (2.29)$$

Enfin, pour que  $E$  soit minimale, on prend sa dérivée par rapport aux coefficients comme étant égal à zéro :

$$\frac{\partial E}{\partial \tilde{a}_j} = 0, \quad j = 1 \dots M \quad (2.30)$$

Selon Tam & Webb, on peut déterminer tout ou partie des coefficients par ce biais, le reste étant obtenu de manière traditionnelle en minimisant l'erreur de troncature au sens de Taylor. Dans la version DRP implantée dans le code de stabilité SZebulon, nous avons opté pour un *stencil* à 7 points ( $M=3$ ) dont deux des trois coefficients sont obtenus par minimisation de l'erreur de Taylor. On trouve :

$$\begin{cases} \tilde{a}_0 = 0 \\ \tilde{a}_1 = -\tilde{a}_{-1} = 0.79926643 \\ \tilde{a}_2 = -\tilde{a}_{-2} = -0.18941314 \\ \tilde{a}_3 = -\tilde{a}_{-3} = 0.02651995 \end{cases} \quad (2.31)$$

On peut alors construire une matrice de dérivation  $\tilde{D}_{DRP}$  telle que :

$$f' = \tilde{D}_{DRP} \cdot f, \quad (2.32)$$

Matrice telle que va être utilisé dans le code pour affecter les différents points du maillage avec les coefficients appropriés pour le calcul des dérivées. Dans le cas de la dérivée seconde la procédure est analogue de telle façon à trouver une matrice de dérivation  $\tilde{D}_{DRP}^{(2)}$  telle que :

$$f'' = \tilde{D}_{DRP}^{(2)} \cdot f \quad (2.33)$$

Par contre, il est important de noter que les coefficients (2.31) ne sont valables que pour les maillages cartésiens réguliers, ce qui n'est pas le cas dans notre étude. Dans notre étude, le maillage physique que l'on utilise est, en fait, cartésien non régulier, i.e, les cellules sont rectangulaires, mais pas forcément carrés. C'est-à-dire, que le maillage présente une progression du pas spatial, afin de avoir plus de raffinement près des zones d'intérêt (voir figure 2.2 au dessous). Alors, pour ce cas-là, il faut utiliser un système de transformations de coordonnées pour passer de la grille physique non régulier à la grille régulier de calcul. Cette transformation de coordonnées entraîne la modification des coefficients des matrices de dérivation  $\tilde{D}_{DRP}$  et  $\tilde{D}_{DRP}^{(2)}$  du schéma DRP [9].

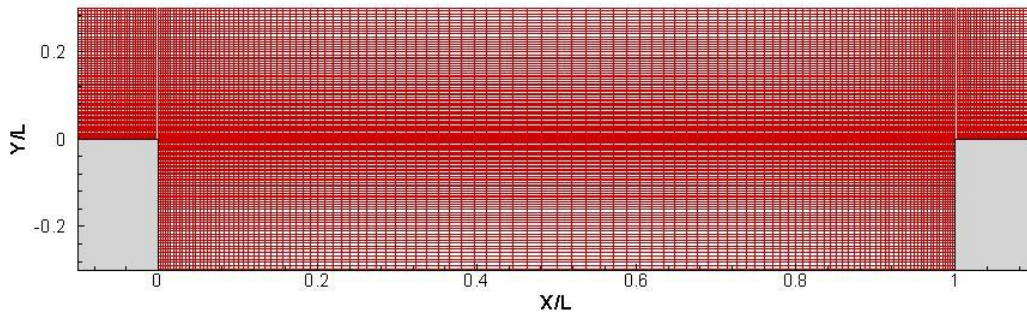


Figure 2.2 : Raffinement du maillage physique dans la region de la couche de mélange.

## 2.5 MAILLAGE ET CRÉATION DU FICHIER CHAMP DE BASE

Le champ de base qui sert de point de départ au code de stabilité linéaire est obtenu par le code DNS 2D. Néanmoins, le fichier issue du code DNS n'est pas prêt pour être directement utilisé par le code de stabilité linéaire, il faut d'abord passer par un processus approprié afin de générer un fichier champ de base compatible avec Szebulon.

En fait, il y a fondamentalement trois importantes adaptations à faire à partir du fichier issue du code DNS pour générer un fichier approprié à la lecture par Szebulon (voir figure 2.3 dessous):

- **Calculer les dérivées** En fait, le fichier généré par le code DNS 2D fournit tout simplement les positions en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , et les composantes de vitesse  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . Donc il faut calculer les dérivées premières de  $\mathbf{u}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , et de  $\mathbf{v}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  pour que Szebulon puisse s'en servir après pour le remplissage des matrices du problème aux valeurs propres.

- **Changer le nombre de points du maillage** C'est-à-dire, le nombre de point du maillage original issue de la DNS est beaucoup trop important pour le code de stabilité, donc il faut générer un nouveau maillage avec moins de points, mais en gardant toujours les zones de raffinement près des parois et de la couche de mélange.
- **Changer le type de maillage** Le type de maillage généré par le code DNS est un maillage *collocated*, c'est-à-dire, un maillage dans lequel toutes les propriétés de l'écoulement sont évaluées dans les mêmes points du maillage. Par contre, le code de stabilité linéaire travaille avec un maillage *staggered*, c'est-à-dire, un maillage dans lequel les différentes propriétés de l'écoulement sont calculés dans des différents point du maillage (voir paragraphe 2.3). Donc, on doit générer un maillage *staggered* à partir d'un maillage *collocated*.

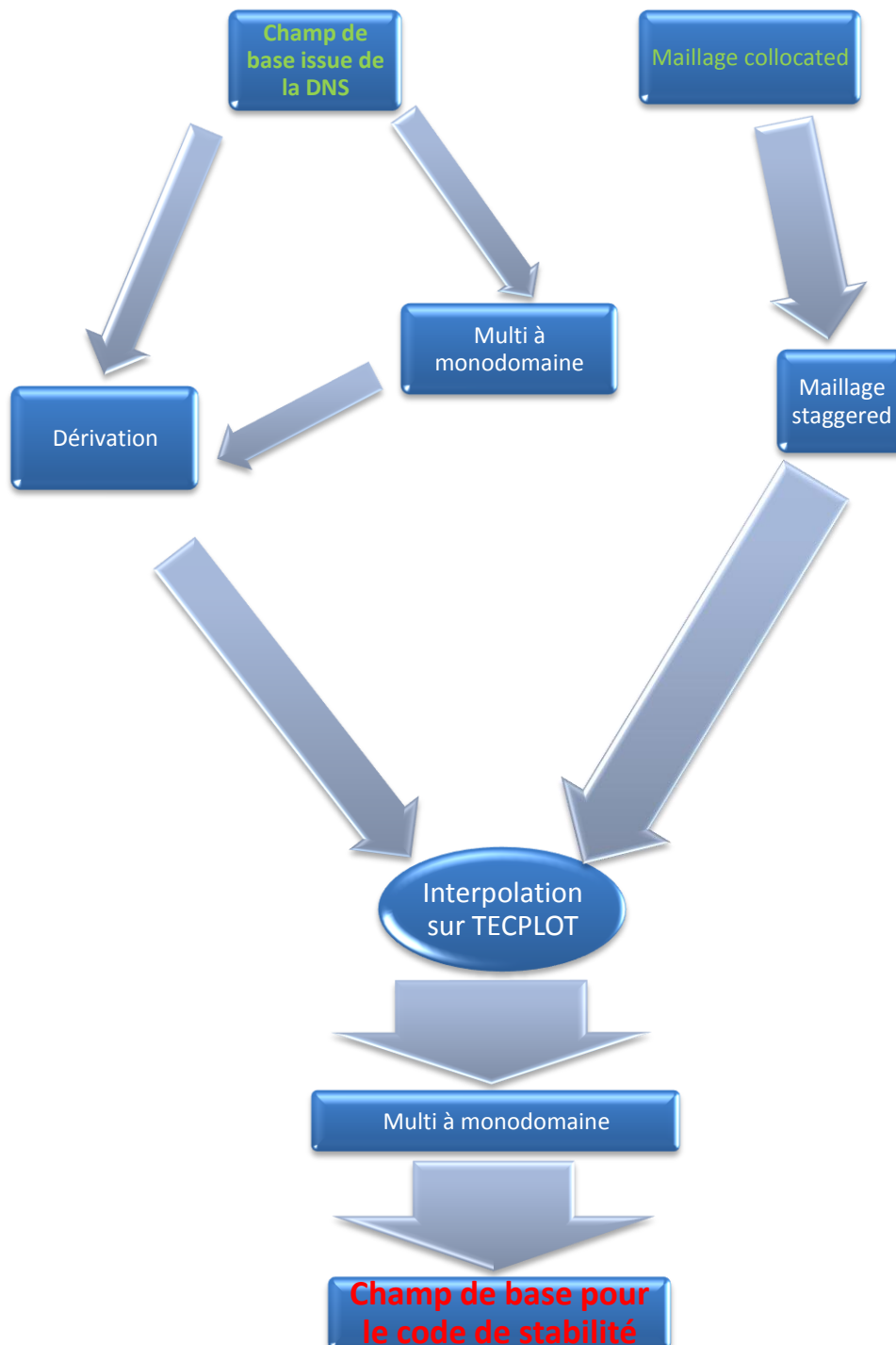


Figure 2.3: Représentation du processus de création du fichier de champ de base approprié à la lecture par le code de stabilité à partir d'un fichier de champ de base issue du code DNS 2D.

D'abord, en partant du fichier issue de la DNS, en dépendant de son type, c'est-à-dire, s'il est mono-domaine ou multidomaine, on doit s'en servir d'une routine, appelé `multi2mono.f90`, pour lui transformer d'une configuration multidomaine à une configuration mono-domaine pour le calcul des dérivées. La configuration mono-domaine revient à dire que le domaine est considéré entièrement en considérant toutes les zones de la cavité. La configuration multidomaine revient à dire que, en fait, les différentes zones du domaine sont considérées séparément, donc dans un premier moment la partie amont de la cavité est considérée dans le fichier, après la partie exactement au-dessus de la cavité, après la partie dans la cavité et enfin la partie aval de la cavité. On doit s'en servir de tel routine, parce que le fichier d'entrée dans la routine de dérivation, appelé `derive_cb.f90`, doit être un fichier mono-domaine. Donc, après, en utilisant tel routine de dérivation on génère un fichier non seulement avec  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , mais aussi avec les dérivées premières de  $\mathbf{u}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , et de  $\mathbf{v}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

En parallèle, en utilisant la routine `mailleur.f90`, on construit le maillage *collocated* qui servira après pour la génération du maillage *staggered*. Pour la génération du maillage *collocated*, il faut générer zone par zone du domaine, utilisant à chaque fois la routine `mailleur.f90`. En gros, il suffit de choisir des valeurs de  $x$  et  $y$  initial et final pour la zone, les nombres des points en  $x$  et en  $y$ , la taille de la première maille et le type de progression désirée, c'est-à-dire, progression simple (progression géométrique du pas entre les points), ou symétrique (pas symétrique par rapport au milieu de la zone).

Donc, après avoir généré les quatre zones rectangulaires de calcul du domaine, on part à la partie génération du maillage *staggered*. Pour le faire, il suffit d'utiliser la routine appelée `staggered.f90` qui génère un maillage *staggered* avec environ quatre fois plus de points au total. Aussi comme dans l'utilisation de la routine `mailleur.f90`, la routine `staggered.f90` crée un maillage *staggered* pour chaque zone à partir de chaque fichier de chaque zone issue de la routine `mailleur.f90`.

Ayant fait tout ce-là, il suffit d'ouvrir d'abord le fichier issue de la routine `derive_cb.f90` et tous les quatre fichiers issues de la routine `staggered.f90` sur le programme commercial TECPLOT et utilisant l'outil appelé « *interpolate* », faire une interpolation du type linéaire des valeurs de la grille original issues de la DNS pour les nouvelles quatre maillages qui ensemble couvrent tout le domaine de calcul. Après avoir fait cette interpolation du fichier issue de la routine `derive_cb.f90` à chacune des quatre zones du maillage *staggered*, il suffit d'utiliser l'option « *write file* » fournit par TECPLOT pour écrire un seul fichier de sortie avec les valeurs de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , et toutes ses dérivées premières sur la grille *staggered*, mais quand même un fichier encore multidomaine.

Donc, pour finir le processus, il faut utiliser encore une fois de plus la routine `multi2mono.f90` pour transformer la configuration multidomaine en configuration mono-domaine pour que le fichier soit lisible par SZeulon.

## 2.6 INTERPOLATION

Comme expliqué avant, après l'obtention du champ de base par le code DNS 2D, il faut passer du maillage original du type *collocated* vers un maillage pour le code de stabilité qui est du type *staggered*. Pour le faire, il faut faire une interpolation des toutes les valeurs des propriétés d'un maillage à l'autre. Ainsi, dans cette partie, je présente la base théorique de l'interpolation linéaire lequel on a employé, en utilisant TECPLOT, pour le faire.

Aditionellement, c'est important de noter qu'on utilise des interpolations linéaires aussi dedans le code de stabilité pour calculer les valeurs d'une propriété connues dans un point dans un autre point dans lequel elles sont demandées pour les calculs.

L'interpolation est une méthode mathématique qui permet, à partir d'un nombre fini de valeurs, de trouver les valeurs en d'autres points d'une fonction. Il s'agit, en fait, d'approximer les valeurs des points discrets par une fonction continue, de façon à permettre l'utilisation de la fonction pour le calcul des valeurs dehors des points prévus originellement. Donc, d'abord, on s'intéresse à la technique d'interpolation de Lagrange qui permet d'écrire une fonction, dont les valeurs sont connues sur une grille, sur une deuxième grille intermédiaire.

Soit un groupe de  $n + 1$  points  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , on cherche un polynôme qui passe par tous ces points. Ainsi, il ne restera plus qu'à évaluer ce polynôme aux points de la nouvelle grille [4]. Un polynôme connu est le polynôme de Lagrange. Il s'écrit :



$$L(X) = \sum_{i=0}^n y_i l_j \text{ avec } l_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \quad (2.34)$$

Cette méthode est basée sur les développements de Taylor-Lagrange. À l'ordre 2, par exemple, le développement de Taylor s'écrit comme :

$$f(x_i) = f(x_{i+1/2}) + (x_i - x_{i+1/2})f'(x_{i+1/2}) + \frac{(x_i - x_{i+1/2})^2}{2!} f^{(2)}(x_0) \quad (2.35)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_{i+1/2}) + (x_{i-1} - x_{i+1/2})f'(x_{i+1/2}) + \frac{(x_{i-1} - x_{i+1/2})^2}{2!} f^{(2)}(x_0) \quad (2.36)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i+1/2}) + (x_{i+1} - x_{i+1/2})f'(x_{i+1/2}) + \frac{(x_{i+1} - x_{i+1/2})^2}{2!} f^{(2)}(x_0) \quad (2.37)$$

Alors, en écrivant une combinaison linéaire, on obtient :

$$a_i f(x_i) + a_{i-1} f(x_{i-1}) + a_{i+1} f(x_{i+1}) = (a_i + a_{i-1} + a_{i+1})f(x_{i+1/2}) + [a_i(x_i - x_{i+1/2}) + a_{i-1}(x_{i-1} - x_{i+1/2}) + \dots + a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1/2})]f'(x_{i+1/2}) + \dots$$

Sachant que notre but est de exprimer la valeur de la fonction  $f$  dans une autre grille, on cherche à avoir  $a_i f(x_i) + a_{i-1} f(x_{i-1}) + a_{i+1} f(x_{i+1}) = f(x_{i+1/2})$ , i.e, on cherche à exprimer  $f$  dans des valeurs intermediaires de  $x$  en utilisant des coefficients apropiés pour l'affectation des valeurs de la fonction  $f$  dans la grille original. Ce nous mène au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_i + a_{i-1} + a_{i+1} = 1 \\ a_i(x_i - x_{i+1/2}) + a_{i-1}(x_{i-1} - x_{i+1/2}) + a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1/2}) = 0 \\ a_i(x_i - x_{i+1/2})^2 + a_{i-1}(x_{i-1} - x_{i+1/2})^2 + a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1/2})^2 = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Dans le cas à l'ordre 2, cela revient numériquement à résoudre le problème matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x_{i-1} - x_{i+1/2}) & (x_i - x_{i+1/2}) & (x_{i+1} - x_{i+1/2}) \\ (x_{i-1} - x_{i+1/2})^2 & (x_i - x_{i+1/2})^2 & (x_{i+1} - x_{i+1/2})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

De cette manière, pour obtenir la valeur en un point décalé, il n'y a plus qu'à effectuer  $f(x_{j+1/2}) = \sum a_j f(x_j)$ .

Bien entendu, dans le cas de la cavité 2D, nous partirons d'un champ de base 2D. Il est donc nécessaire de se pencher plus précisément sur le cas de l'interpolation 2D. Pour le faire, il est nécessaire de repartir de la décomposition de Taylor afin de trouver le système matriciel à résoudre numériquement pour obtenir les coefficients d'interpolation. La première solution est de considérer une double interpolation 1D. Cette solution est facile à mettre en oeuvre, mais un peu plus coûteuse numériquement. La deuxième solution est de considérer une molécule 2D directement et d'y appliquer une méthode d'interpolation [4].

Considérons pour ce-là la décomposition de Taylor en un point bidimensionnel  $x_0$  :

$$\begin{aligned}
 f(x_i, y_i) &= f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + (x_i - x_{i+1/2}) \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + (y_i - y_{i+1/2}) \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + \dots \\
 &\dots \frac{(x_i - x_{i+1/2})(y_i - y_{i+1/2})}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + \frac{(x_i - x_{i+1/2})^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + \dots \\
 &\dots \frac{(y_i - y_{i+1/2})^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})
 \end{aligned}$$

En écrivant cette décomposition pour chaque  $f(X_j)$ , notre interpolation sera une combinaison linéaire  $f(X_{j+1/2}) = \sum a_j f(X_j)$  telle que les  $a_j$  sont solution du système matriciel suivant (exemple pris à l'ordre 2) :

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 (x_1 - x_0) & (x_2 - x_0) & (x_3 - x_0) & (x_4 - x_0) \\
 (y_1 - y_0) & (y_2 - y_0) & (y_3 - y_0) & (y_4 - y_0) \\
 (x_1 - x_0)(y_1 - y_0) & (x_2 - x_0)(y_2 - y_0) & (x_3 - x_0)(y_3 - y_0) & (x_4 - x_0)(y_4 - y_0)
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 a_4
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Donc, de cette façon on arrive à interpoler les valeurs d'un maillage à un autre, notamment afin de travailler dans un maillage *staggered*. Et c'est, alors, exactement de cette façon qu'on interpole dans le code de stabilité les valeurs, par contre dans le code la formulation est un peu plus compliquée à cause d'un changement de coordonnées qui est fait à cause du fait que le maillage physique employé est non régulier (i.e, elle possède une progression du pas spatial).

## 2.7 CODE DE STABILITÉ LINÉAIRE

Dans ce paragraphe, d'abord on présente une description générale du fonctionnement du code de stabilité linéaire employé dans ce projet et après on présente quelques remarques sur sa version *staggered*.

### 2.7.1 Description du code

Après l'obtention du champ de base, on s'intéresse à résoudre numériquement l'équation (2.7) afin de trouver les modes instables de la cavité. Pour cela, un code appelé SZebulon a été développé dans le laboratoire DynFluid. Le code utilise un schéma de haute précision DRP7 [13] dans les directions  $x$  et  $y$ . Il calcule les matrices des coefficients de dérivation, après il constitue la matrice complète du problème aux valeurs propres. Ce dernier est ensuite résolu en utilisant une méthode du type Arnoldi.

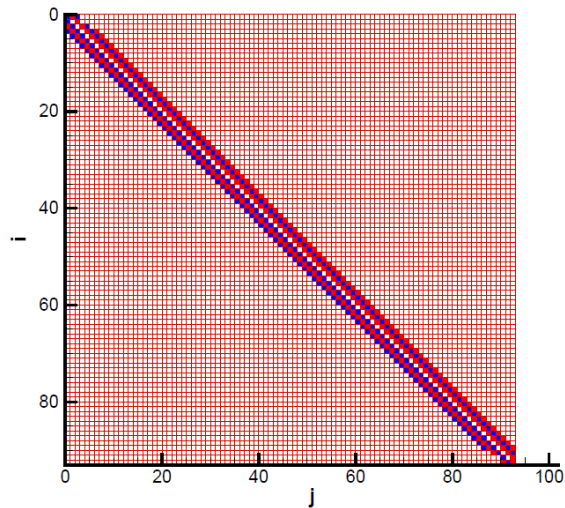


Figure 2.4: Forme d'une matrice de dérivation première [4].

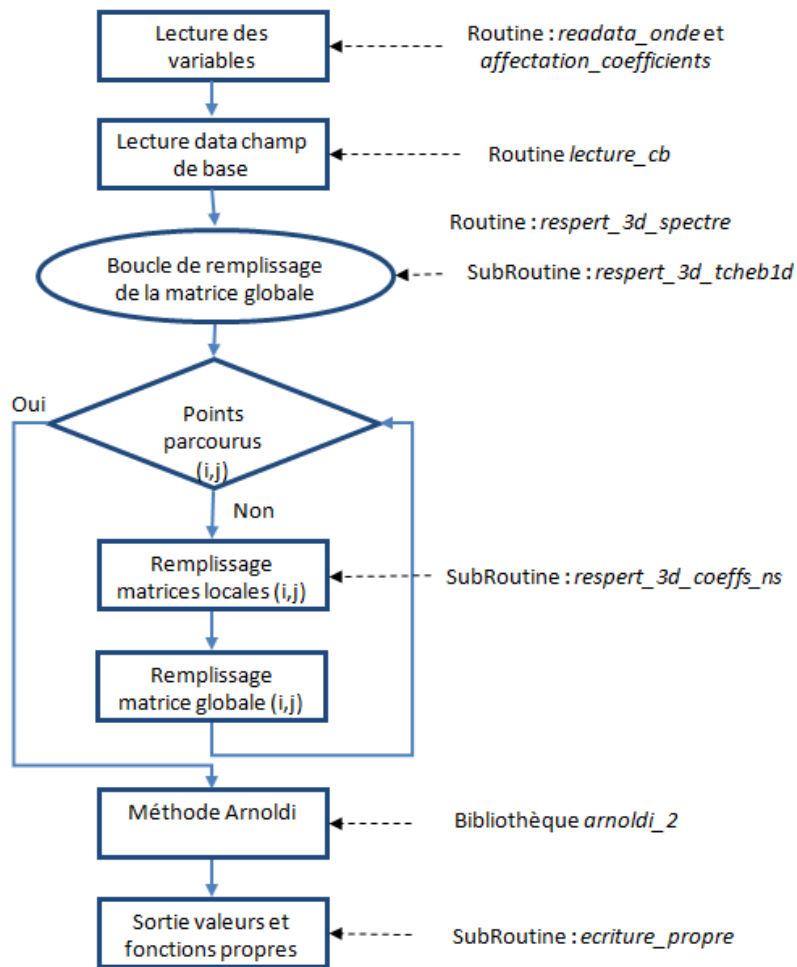


Figure 2.5: Algorithme général du code [4].

La première étape du code est de constituer les matrices de dérivation qui serviront à compléter la matrice **amat** pour chaque point du maillage. Il y a une boucle qui passe pour tous les points du maillage et affecte pour chaque point et ses voisins les coefficients correspondants. Les schémas de dérivation utilisés sont des schémas du type différences finies DRP à sept points. Aux bords du domaine, le code utilise des schémas avec un stencil plus petit, en dégradant l'ordre du schéma près

des bords. Pour remplir ces matrices, le code utilise une sous-routine pour fournir les matrices des dérivées suivants  $x$  et  $y$ . Les matrices que sont obtenus sont du type diagonal comme illustré dans la figure 2.4.

Une fois que les matrices de dérivation sont définies, le code passe au remplissage de la matrice du problème aux valeurs propres. Du coup, une première boucle parcourt tous les points du maillage, puis une seconde boucle parcourt à son tour le maillage en affectant les coefficients aux points. Le code présente une structure de fonctionnement générale comme celle de la figure 2.5.

### 2.7.2 Version *staggered*

Comme expliqué avant, le code SZebulon est un code de stabilité linéaire version *staggered*. C'est-à-dire qu'il résout le problème (2.7) pour un maillage du type *staggered*, avec un champ de base de maillage du type *staggered*. Alors, quand on résout les équations sur un maillage *staggered*, il faut souvent avoir les valeurs de une variable sur la grille d'une autre, afin de pouvoir effectuer les calculs, fait que demande des interpolations. Pour le cas incompressible 2D par exemple, on a besoin des valeurs des variables suivantes en chaque grille (évidemment en plus des valeurs de la propre variable par laquelle la grille est nommée):

- **Grille  $u$  :**
  - Dérivées de  $u$  par rapport à  $x$  et  $y$  ;
  - $v$  ;
  - Dérivée de  $p$  par rapport à  $x$ .
  
- **Grille  $v$  :**
  - $u$  ;
  - Dérivées de  $v$  par rapport à  $x$  et  $y$  ;
  - Dérivée de  $p$  par rapport à  $y$ .
  
- **Grille  $p$  :**
  - Dérivée de  $u$  par rapport à  $x$  ;
  - Dérivée de  $v$  par rapport à  $y$ .

Alors, pour calculer ces valeurs, on utilise des interpolations du type Lagrange dans le code comme expliqué avant. Pour le cas d'un maillage *staggered* du type MAC, comme est notre cas, la procédure, en terme d'interpolation, est le suivant (voir figure 2.1). Dans le cas de la grille  $u$ , il faut faire deux interpolations pour  $v$  (une interpolation en  $x$  et un autre en  $y$ ), la dérivée de  $p$  par rapport à  $x$  étant calculé directement sur la grille  $u$  sans interpolation (évidemment que ce-là est le cas aussi pour les dérivées de  $u$ ). Dans le cas de la grille  $v$ , il faut faire deux interpolations pour  $u$  (une interpolation en  $x$  et un autre en  $y$ ), la dérivée de  $p$  par rapport à  $y$  étant calculé directement sur la grille  $v$  sans interpolation interpolation (évidemment que cela est le cas aussi pour les dérivées de  $v$ ). Et dans le cas de la grille  $p$ , il y a pas besoin de faire aucune interpolation, car tant la dérivée de  $u$  par rapport à  $x$  comme la dérivée de  $v$  par rapport à  $y$  sont calculées directement sur la grille  $p$ . Donc au total, il faut faire quatre interpolations pour une grille MAC, deux sur  $u$  et deux sur  $v$ . Cas qui est intéressant par rapport à des autres types de grilles *staggered*, parce qu'il minimise le nombre d'interpolations due à la possibilité de calculer directement les dérivées d'une variable sur la grille d'une autre sans interpolation.

Une autre question que demande aussi des soins particuliers, c'est le fait que le maillage physique qu'on utilise est, en fait, cartésien non régulier, comme expliqué dans le paragraphe 2.4. Alors, quand on effectue les interpolations on pourrait peut-être avoir des problèmes à cause de la transformation de coordonnées effectué du maillage physique non régulier vers un maillage de calcul régulier. Mais comme tant dans le cas du maillage physique, comme dans le cas du maillage de calcul, les points

d'intérêt se trouvent toujours au milieu des segments, l'interpolation effectuée n'influence pas la transformation de coordonnées. C'est-à-dire, même si les cellules du maillage physique soient plus allongées par rapport aux cellules du maillage de calcul, cela n'entraîne pas de problème par rapport à la transformation de coordonnées, car la symétrie de la localisation des points dans la cellule est conservée.

## 3 RÉSULTATS ET ANALYSE

Dans ce chapitre, les résultats des simulations 2D et 3D sont présentés et analysés. D'abord, sont présentés les divers paramètres des simulations pour le deux cas physiques considérés, après les résultats d'une étude de convergence de maillage, après des comparaisons de validation sont menées et finalement les résultats 2D et 3D sont présentés et analysés. Il est important de noter que, comme déjà dit avant, toutes les simulations qui ont été faites dans le cadre de ce projet sont des simulations incompressibles.

### 3.1 PARAMÈTRES DES SIMULATIONS

Alors, deux cas généraux de simulations ont été menés, un cas avec un domaine plus haut, i.e avec un « toit » plus haut et un nombre de Reynolds plus haut, et un cas avec un domaine et nombre de Reynolds plus bas. Ces deux cas ont été simulés, parce que chacun correspond à un cas par rapport auquel on a validé nos simulations 2D. Le premier correspond au cas des simulations de validation menées par un doctorant du laboratoire, Frédéric Alizard, avec le code DNS du laboratoire DynFluid. Et l'autre correspond au cas de l'article « *Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models* » de Barbagallo, Sipp, et Schmid [1].

#### 3.1.1 Cas DNS

Le domaine de simulation du cas DNS est celui représenté par la figure 3.1 au dessous. En fait, le domaine va de -0.3 à 4 en x, et de -1 à 2 en y, sachant que la cavité va de 0 à 1 en x et de -1 à 0 en y, tout étant adimensionalisé par la longueur de la cavité L. Le nombre de Reynolds de l'écoulement calculé par rapport à la longueur L de la cavité est de 8.140. Donc, le ratio L/D est de 1, et le nombre de Mach est égal à 0 (incompressible).

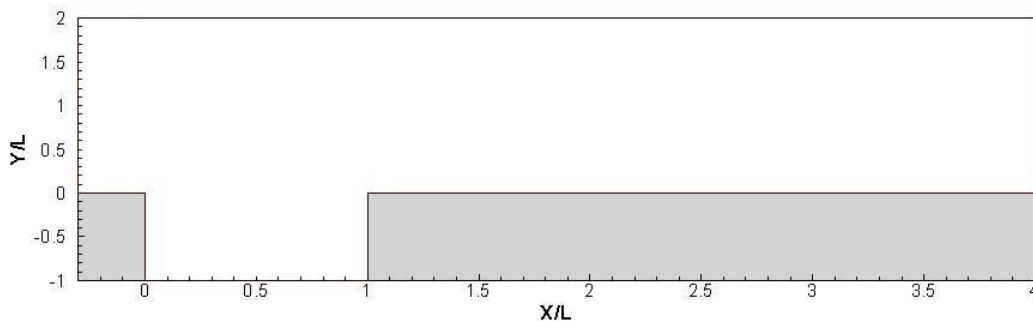


Figure 3.1 : Représentation du domaine de calcul utilisé dans le cas DNS.

#### 3.1.2 Cas Barbagallo *et al.* [1]

Le domaine de simulation du cas de la bibliographie (Barbagallo *et al.* [1]) est celui représenté par la figure 3.2 au-dessous. Le domaine va de -0.3 à 4 en x, et de -1 à 0.5 en y, sachant que la cavité va de 0 à 1 en x et de -1 à 0 en y, tout étant, comme dans le cas précédent, adimensionalisé par la longueur de la cavité L. Le nombre de Reynolds de l'écoulement calculé par rapport à la longueur L de la cavité est de 7.500. Alors, comme dans le cas précédent, le ratio L/D est de 1, et le nombre de Mach est égal à 0 (toujours incompressible).

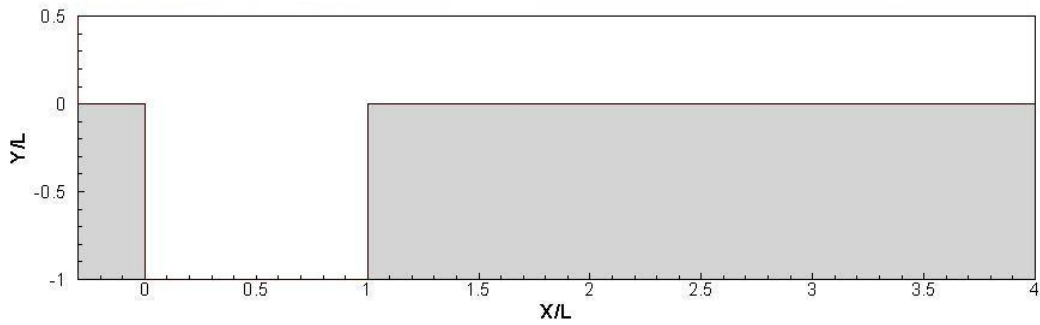


Figure 3.2 : Representation du domaine de calcul utilisé dans le cas de Barbagallo *et al* [1].

### 3.2 ÉTUDE DE CONVERGENCE DE MAILLAGE

Alors, avant d'aller chercher les résultats 2D et 3D des instabilités qui jouent dans la dynamique de l'écoulement complexe de la couche de mélange, on a fait une petite étude de la convergence des résultats obtenus par rapport au raffinement du maillage. Pour le faire, on s'est placé dans le cas DNS par rapport aux paramètres de simulation. Et comme toute étude de convergence de maillage, on a commencé avec un maillage moins raffiné, pour après le raffiné progressivement et analyser l'écart entre les résultats. Dans notre cas, les résultats cherchés pour l'analyse étaient les valeurs du taux d'amplification/amortissement des quatre modes principaux.

Le premier maillage considéré a été celui présenté dans la figure 3.3 ci-dessous. Il s'agit d'un maillage avec 251 points en  $x$  par 204 en  $y$  au total. Et le deuxième maillage considéré a été celui présenté dans la figure 3.4. Il s'agit d'un maillage avec 301 points en  $x$  par 284 en  $y$  au total.

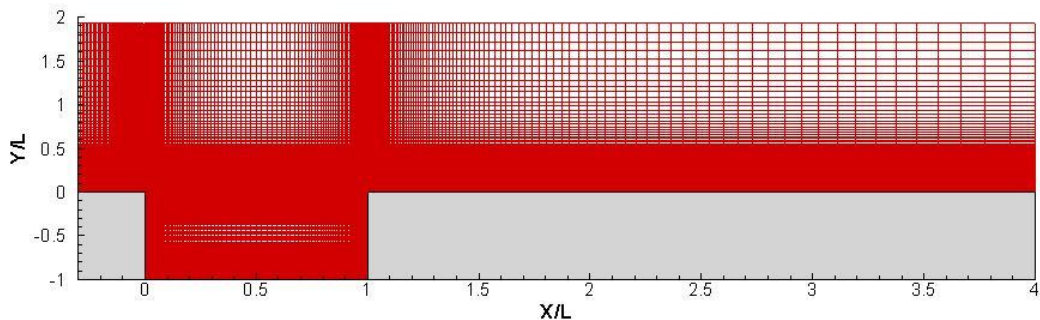


Figure 3.3 : Maillage 1.

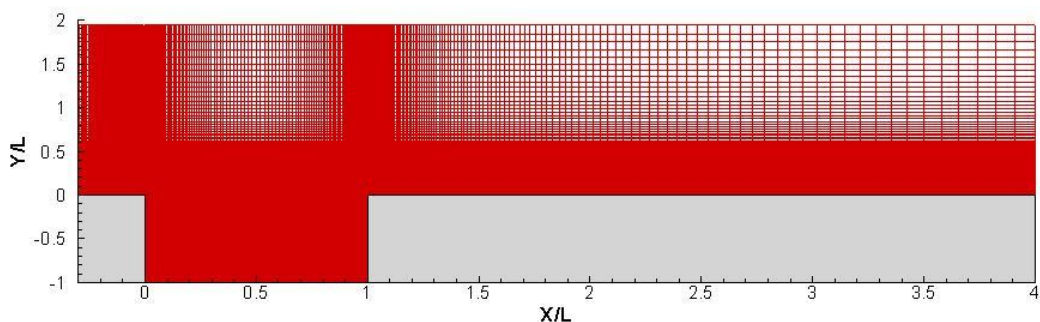


Figure 3.4 : Maillage 2.

Il est important de noter trois aspects. Le premier est que pour les deux maillages il y a un raffinement important dans la région de la couche de mélange comme a été déjà montré avec plus de détail dans la figure 2.2, mais que peut aussi être vue les figures ci-dessus. Le deuxième c'est que pour

le deux maillages on a maintenu une même proportion des points par zone de manière à ne pas influencer le résultat, bien évidemment. Et le troisième est que les nombres des points donnés sont les nombres de points pour le maillage *collocated* de base pour la génération du maillage staggered d'après, de cette manière on peut avoir une idée du maillage de stabilité linéaire par rapport au maillage *collocated* de la DNS qui génère le champ de base (384 points en x par rapport à 284 en y). Les résultats obtenus pour les deux modes de taux d'amplification plus importants sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Taux d'amplification	Maillage 1	Maillage 2	Erreur relatif (%)
Mode 1	1,19744	1,23206	2,81
Mode 2	1,15937	1,14778	1,01

Tableau 3.1 : Taux d'amplification des maillages 1 et 2 pour les deux modes principaux et l'erreur relatif entre les résultats des deux maillages.

Comme on peut voir dans le tableau, l'erreur relatif n'est pas très important, en fait, il est assez faible, fait que nous indique que le maillage est assez raffiné pour que plus de raffinement n'entraîne pas d'amélioration des résultats. Quand même, on a essayé de faire un troisième maillage encore plus raffiné, mais on a eu des problèmes avec la mémoire qu'on avait disponible sur le serveur de calcul appelé obelix du laboratoire DynFluid. En fait, après on a remarqué que cela n'était pas vraiment à cause d'une limitation de mémoire sur le serveur, mais plutôt sur un problème de gestion de mémoire des simulations par le programme chargé de cela sur obelix.

En tout cas, nos nombres de points pour le deuxième maillage était déjà assez près de ces de le maillage *collocated* utilisé pour les simulations DNS 2D (faites pour générer les champs de base), donc on pourrait pas envisager raffiner beaucoup plus (avoir un maillage plus raffiné que celui de la DNS n'a pas de sense, en gros, il s'agirait de générer information à partir de rien). Donc a décidé de utilisé ce dernier maillage, maillage 2, pour toutes nos simulations dans le cas de domaine DNS. Pour les simulations dans le cas Barbagallo, on utilise en fait exactement le même maillage mais avec un domaine que va jusqu'à 0.5 en y au lieu de 2.

### 3.3 VALIDATION 2D

La validation des simulations effectués est faite dans le cadre 2D. Elle est faite d'abord par rapport à la DNS, avec les paramètres du cas DNS, et par rapport à la bibliographie représenté par l'article de Barbagallo *et al.* [1], avec les paramètres de tel cas. On parle en validation en ce qui concerne plutôt ces simulations, c'est-à-dire, validation de la méthode complete employé ici pour cette application de la cavité ouverte, ou validation de l'utilisation du code SZebulon pour tel cas de la cavité ouverte. Parce que le code de stabilité linéaire Zebulon, version *collocated* de SZebulon, a été déjà largement validé dans le passé.

#### 3.3.1 Cas DNS

Dans le contexte de la validation des simulations effectuées par la DNS, on a fait plusieurs simulations avec SZebulon afin de retrouver les quatres modes instables principaux et les modes principaux issues des simulations effectués avec le code DNS du laboratoire. Les résultats des deux simulations sont présentés dans une même figure ci-dessous. Comme on peut voir dans la figure, les résultats issues des deux types de simulations sont assez proches. Du coup, les deux types de simulations, linéaire ou non, révèlent tous les mêmes quatres modes principaux avec exactement les mêmes fréquences et presque les mêmes taux d'amplification, en suivant la même tendance. L'erreur absolue étant de l'ordre de 0,1 en chaque cas, et l'erreur relatif étant de l'ordre de 5% dans le cas du mode avec le taux d'amplification plus important. C'est-à-dire que, non seulement le code de stabilité linéaire arrive à capturer chaque'un des quatre modes principaux, mais aussi qu'il les prévoit avec



exactement la même fréquence et avec un erreur au tour de 5% pour le taux d'amplification par rapport à la DNS, erreur tel qui est acceptable.

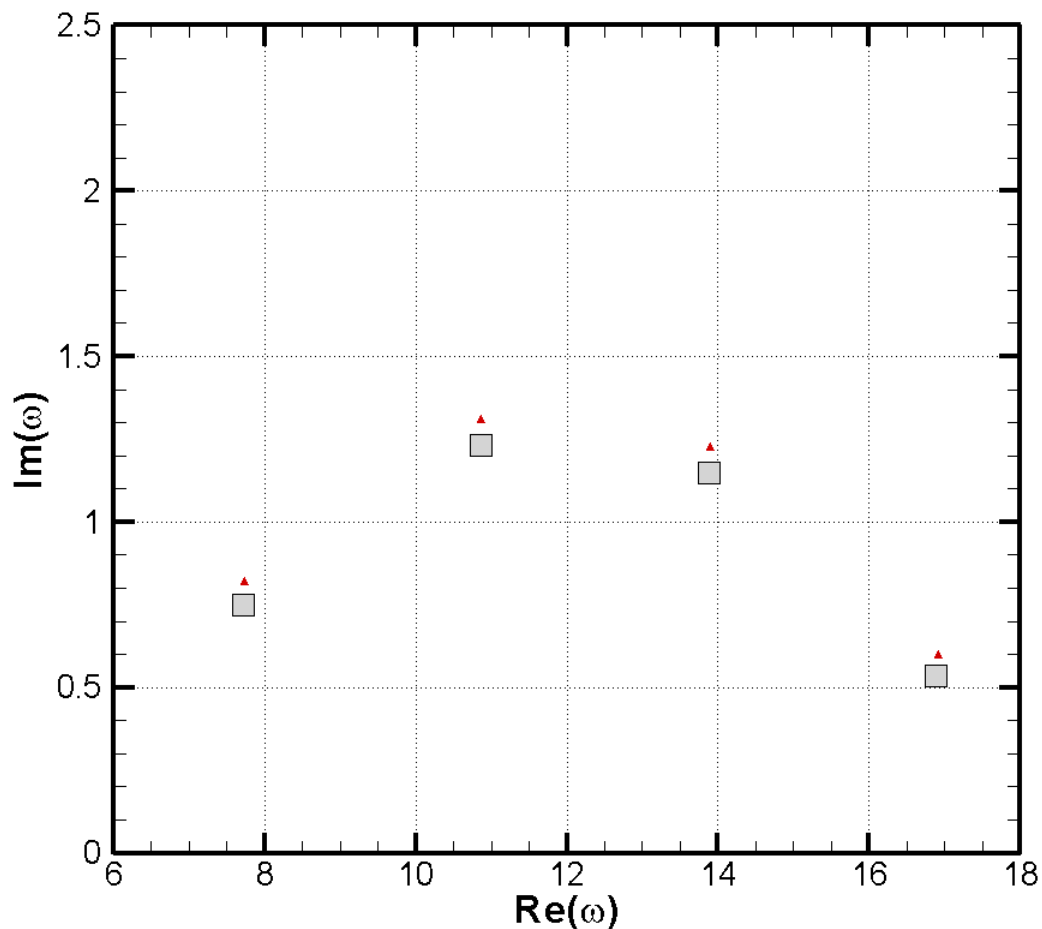


Figure 3.5 : Spectre issu des simulations 2D pour la cavité ouverte. Modes issues du code de stabilité linéaire représentés par les carrés gris, modes issues du code DNS représentés par les triangles rouges.

Néanmoins, on s'aperçoit qu'est bien vrai qu'il y a une sousévaluation du taux d'amplification apparemment presque régulière pour tous les quatre modes par rapport aux modes issues de la DNS. La source de ce erreur n'est pas très claire, mais donné la fait que l'erreur semble être régulière par rapport à la fréquence du mode, cela nous fait penser qu'il s'agit de quelque chose plutôt lié à la partie numérique que à la partie physique. On pense que c'est peut-être les conditions aux limites de la DNS qui diffèrent légèrement de notre cas, notamment dans la frontière au dessus du domaine. Tel différence même que légère dans les conditions aux limites est certainement capable de causer cette influence dans les résultats.

### 3.3.2 Cas Barbagallo *et al.* [1]

Pour le cas de la validation par l'article de Barbagallo *et al.*, la procédure générale est la même d'avant, sauf que cette fois ci, bien évidemment, on se met dans le cas de l'article [1] en ce qui concerne les paramètres de simulation (voir paragraphe 3.1.2). Donc, on a fait des simulations pour capturer les quatre modes principaux avec le code SZebulon. Cette fois ci, par contre, on a généré plus des modes afin de générer un spectre plus complet de la physique des instabilités de la cavité ouverte. C'est-à-dire qu'on a demandé la génération de plus des valeurs propres par le code, afin de

capturer non seulement les quatre modes principaux mais aussi les modes plus stables liés avec des instabilités secondaires issues de l'intérieur de la cavité. Dans la figure 3.6 ci-dessous, on a superposé les spectres issues du code Szebulon et les 4 modes principaux décrits dans l'article de Barbagallo *et al.*, pour mieux voir l'écart entre les deux groupes des résultats.

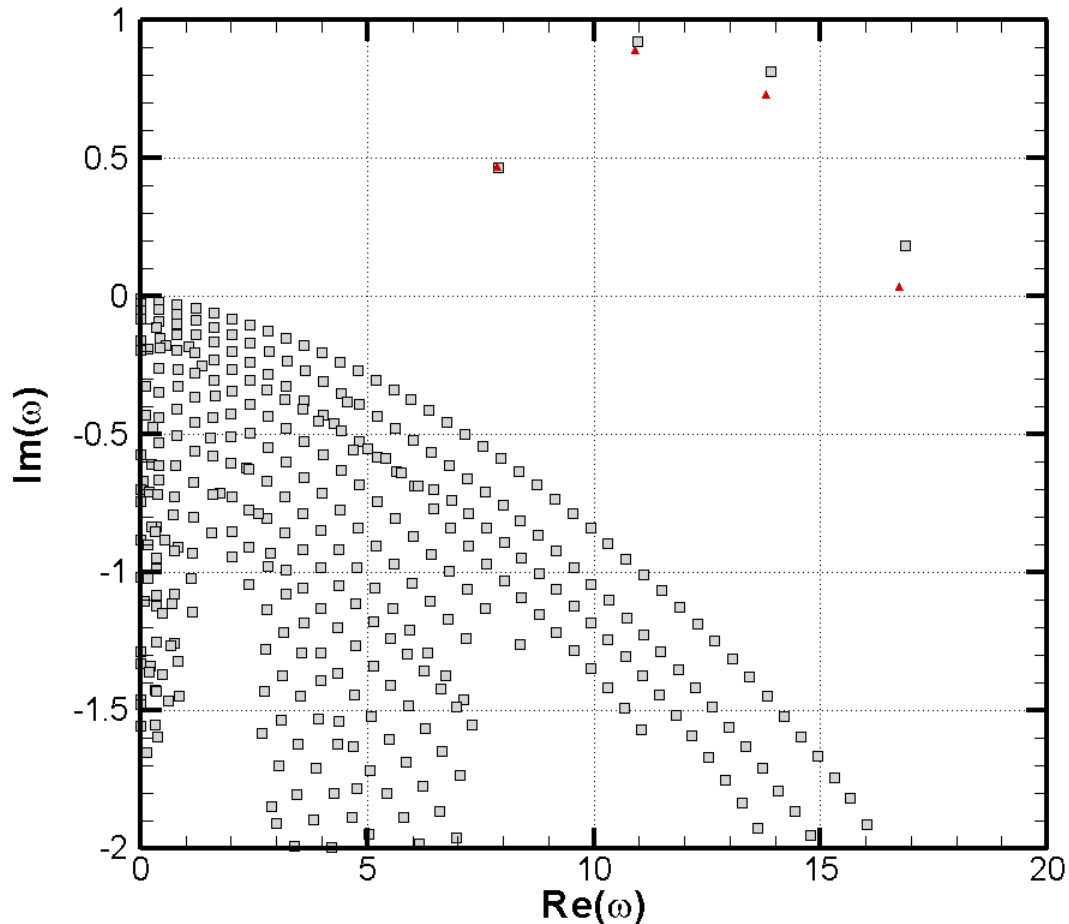


Figure 3.6 : Spectre issue des simulations 2D pour la cavité ouverte. Modes issues du code de stabilité linéaire représentés par les carrés gris, modes de l'article de Barbagallo *et al.* [1] représentés par les triangles rouges.

On peut voir dans la figure 3.6 que encore les résultats issues du code SZEbulon pour la cavité ouverte sont d'accord avec ces de l'article. On voit que le code SZEbulon prévoit les quatres mode principaux bien d'accord avec ces issues de l'article au niveau de la fréquence, et que, par contre, au niveau du taux d'amplification il y a des écarts. Pour les deux modes principaux de plus petites fréquences les écarts sont complètement acceptables, il s'agit de 0,004% et 3,84% d'erreur relatif respectivement. Par contre, pour les modes principaux de fréquence plus élevé, on remarque que l'erreur devient plus important. On peut dire que ce comportement est déjà attendu car on sait que au fur et à mesure que la fréquence augmente, due à la vitesse de phase que reste constante, le nombre d'onde augmente aussi, et, donc, la longueur d'onde devient petite, et comme on a un pas spatial qui est figé, les instabilités perturbatives du champ de l'écoulement commence à être moins bien traités. C'est-à-dire, les oscillations perturbatives du champ deviennent trop petites spatialement pour que la grille soit capable de les capturer. Donc, à la limite c'est possible que le taux d'amplification des modes principaux de fréquence plus importante calculé par SZEbulon soit faux, mais on peut aussi considerer la possibilité que, en fait, c'est l'inverse que se passe. C'est-à-dire, la possibilité que c'est le

code de Barbagallo *et al.* qui génère des résultats faux pour les modes de fréquence plus importante. Et, en plus, comme sur leur article ils utilisent un maillage non-structuré, la comparaison des maillages n'est pas évidente pour savoir qui est plus proche de la vérité. Mais en tout cas, on peut pas trop raffiner le maillage ni pour les codes de stabilités, ni pour les codes DNS parce que on a toujours un limite de puissance de calcul, donc il y a pas beaucoup à faire sur cela.

Aussi il y a un autre cause possible pour les écarts entre les simulations de Barbagallo et celles à nous, qui est, encore une fois, les conditions aux limites qui ne sont pas exactement les mêmes. Dans leur article, ils utilisent une condition de symmétrie au dessus du domaine, condition telle qui n'est pas la même considéré par nous. On considère une condition du type Von Neuman au dessus du domaine.

Pour conclure cette partie de validation là, on peut dire que, comme pour les modes principaux de fréquence plus petite l'écart entre les résultats générés par Szebulon et les résultats obtenus par Barbagallo *et al.* n'est pas grand, nos résultats sont d'accord avec ceux de la bibliographie. Même si on sait qu'il y a un écart non négligeable entre les taux d'amplification des modes principaux de fréquence plus élevée, due à la limitation de raffinement des maillages à nous et, sûrement, de ceux à eux aussi, et à la différence entre les conditions aux limites considérées par eux et par nous.

### 3.4 ANALYSE DES RÉSULTATS 2D

Après avoir fait une étude de convergence de maillage et des analyses de validation des simulations du code de stabilité linéaire SZebulon, version *staggered*, pour la cavité ouverte, les résultats complets des simulations bidimensionnelles sont présentés et analysés dans cette partie du chapitre. Désormais, on se place toujours dans le cadre des paramètres du cas de Barbagallo *et al.* tant pour ce paragraphe 3.4 comme pour le suivant 3.5, qui présente les résultats et analyses tridimensionnels. Le spectre du cas 2D est toujours celui présenté dans la figure 3.6. Donc, d'abord on présente les fonctions propres correspondantes aux quatre modes principaux instables, et après des analyses et considérations sont faites en utilisant des comparaisons avec des modélisations connues de la bibliographie.

#### 3.4.1 Fonction propres

Alors, pour le cas 2D, pour chacun des modes principaux on a généré des visualisations des fonctions propres correspondantes au champ perturbatif de  $u$ ,  $v$  et  $p$ . On présente d'abord la visualisation du champ perturbatif de  $u$  du premier mode principal, i.e, celui de taux d'amplification plus important (voir figure 3.7 ci-dessous).

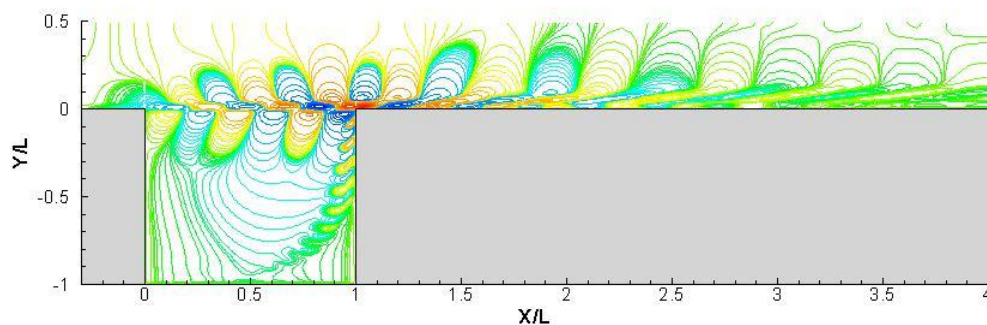


Figure 3.7 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $u$  de vitesse, relatif au premier mode principal.

En analysant la figure 3.7, on remarque tout de suite la formation des structures circulaires en alternant les couleurs qui apparaissent dans le coin amont de la cavité et vont jusqu'à la sortie du domaine. On voit aussi que il y a des structures similaires de plus petite tailles qui entrent dans la cavité suggérant un mouvement circulaire vers l'amont. Il s'agit, en fait, exactement des tourbillons

contrarotatifs qui sont générés dans la couche de mélange près du coin amont de la cavité et qui sont convectés vers l'aval. On peut voir clairement dans la figure, que au fur et à mesure que les tourbillons arrivent au coin aval, ils sont détournés ou cassés, étant que ceux qui sont détournés, sont soit détournés vers l'extérieur de la cavité, soit vers l'intérieur de la cavité, formant le tracé d'une boucle de rétroaction à l'intérieur de la cavité. C'est exactement ce qu'on s'attendait de la théorie du phénomène. C'est même intéressant de comparer la figure 3.7 au dessus, à la figure schématique du phénomène (figure 1.3), la correspondance est exacte. Au dessous sont présentés aussi dans les figures 3.8 et 3.9 les champs perturbatifs de la composante  $v$  de vitesse et de la pression respectivement.

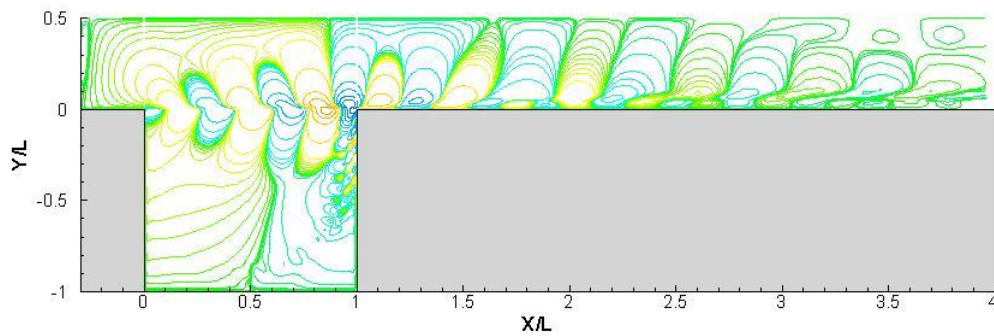


Figure 3.8 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $v$  de vitesse, relatif au premier mode principal.

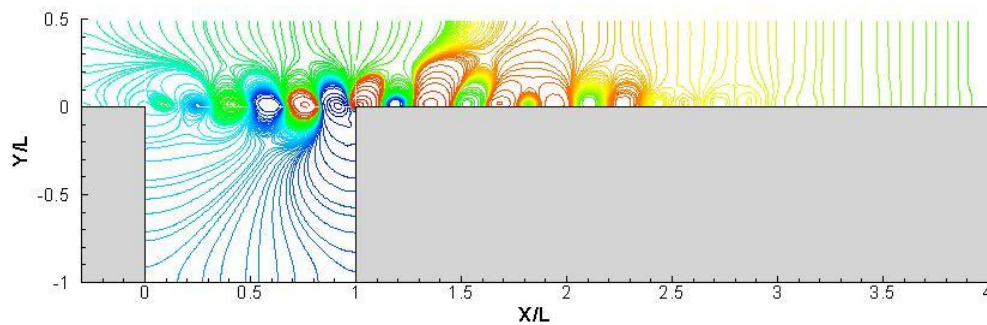


Figure 3.9 : Isolignes du champ perturbatif de pression  $p$ , relatif au premier mode principal.

Les figures 3.8 et 3.9 confirment le comportement des instabilités commenté pour la figure 3.7, sans contribuer beaucoup plus pour la compréhension du phénomène. Par contre, peut-être l'unique remarque intéressante c'est que le champ perturbatif de pression met plus en évidence une tendance de l'écoulement à se stabiliser dans la région de la sortie du domaine, fait qui est vu plus subtilement dans les figures 3.8 et 3.7 des champs perturbatifs des composantes des vitesses, ce qui nous indique un comportement plutôt d'instabilité absolue, et pas d'instabilité convective.

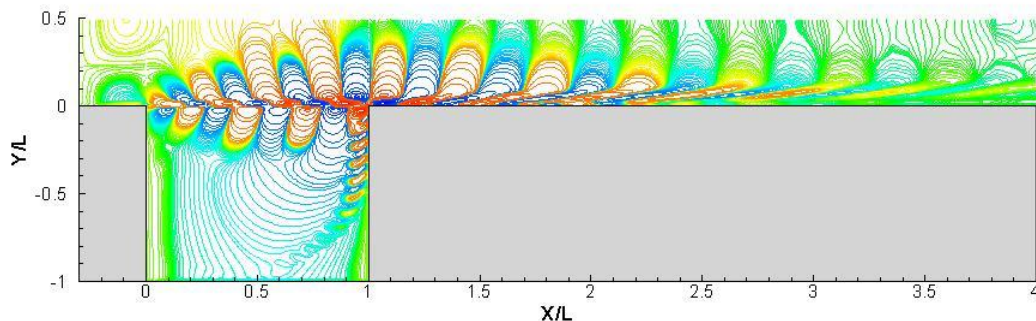


Figure 3.10 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $u$  de vitesse, relatif au quatrième mode principal.

Donc, l'analyse des figure 3.7, 3.8, et 3.9 au dessus nous confirme bien la nature de l'instabilité issue du mode principal de la cavité ouverte comme étant une instabilité issue de l'interaction de la couche de mélange avec le coin aval, qui génère une boucle de rétroaction à l'intérieur de la cavité. Les figures similaires pour les autres modes principaux sont présentés dans l'annexe. En général, le comportement des isolignes est exactement le même pour les trois propriétés de l'écoulement (u,v,p), l'unique différence par rapport au premier mode principal montré c'est le nombre d'onde des instabilités. Comme le nombre d'onde est relié à la fréquence par la vitesse de phase, bien sûr que le nombre d'onde des instabilités des autres mode va être différent de ce mode là (voir figure 3.10).

### 3.4.2 Comparaison avec Rossiter

Alors, comme on a bien confirmé la nature des instabilités principales de la couche de mélange comme étant des instabilités classiques de cavité ouverte due à l'interaction de la couche de cisaillement avec le coin aval, on peut envisager utiliser comparer nos résultats avec ces de la modélisation semi-empirique de Rossiter pour les fréquences principales du phénomène. Par contre pour le faire, on peut pas utiliser la formule 1.1 présenté dans le premier chapitre, parce que il s'agit d'un formule de Rossiter pour une modélisation compressible. La bonne formule de Rossiter à utiliser pour la comparaison c'est celle-ci [11]:

$$St = \kappa \cdot n \quad (3.1)$$

où les significations des variables dans la formule sont exactement les mêmes que dans le paragraphe 1.3.2.1 pour la formule de Rossiter (1.1) version compressible. C'est-à-dire,  $\kappa$  est la vitesse moyenne de convection des perturbations tourbillonnaires dans le couche de cisaillement,  $St$  est le nombre de Strouhal relié à la fréquence  $\omega$  par  $St = \omega L / 2\pi U$ , et  $n$  est le nombre du mode principal. La variable  $\kappa$  est définie mathématiquement comme étant :

$$\kappa = \frac{U_c}{U_\infty} \quad (3.2)$$

où  $U_c$  est la vitesse moyenne du profil de vitesse de la couche de mélange calculé comme étant  $U_c = U_1 + U_2 / 2$  selon la figure 3.11 au dessous, et  $U_\infty$  est la vitesse de l'écoulement à l'infinie, dans noter cas la vitesse d'entrée de l'écoulement dans le domaine.

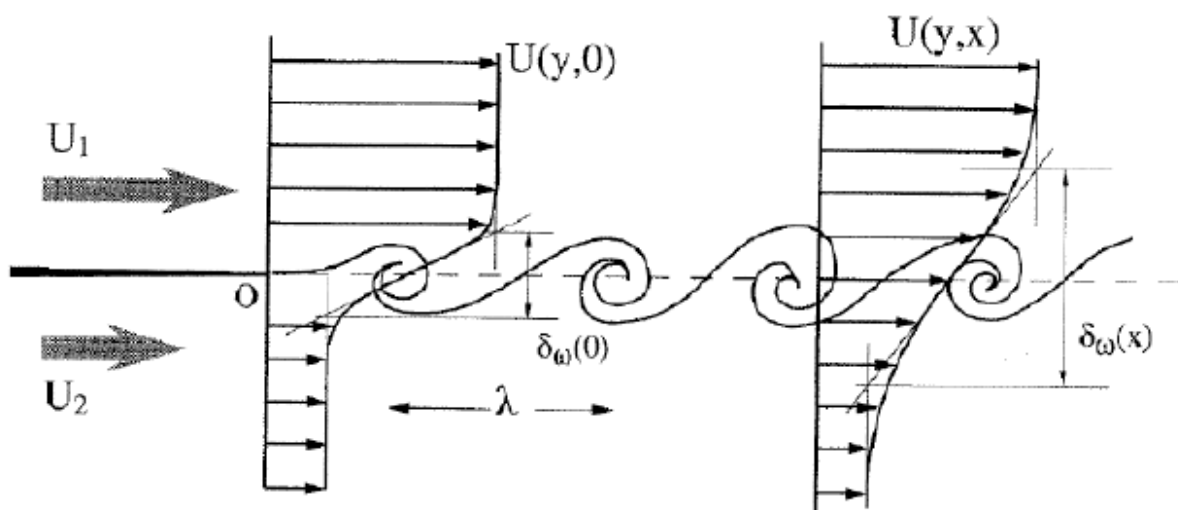


Figure 3.11 : Representation d'un profil de vitesse pour une couche de mélange.

Connaissant, alors, le profil de vitesse  $u$  dans la région de la couche de cisaillement (figure 3.12 au dessous), on peut évaluer l'évolution de  $\kappa$  au long de la couche de mélange par rapport à  $x$  (figure 3.13 au dessous).

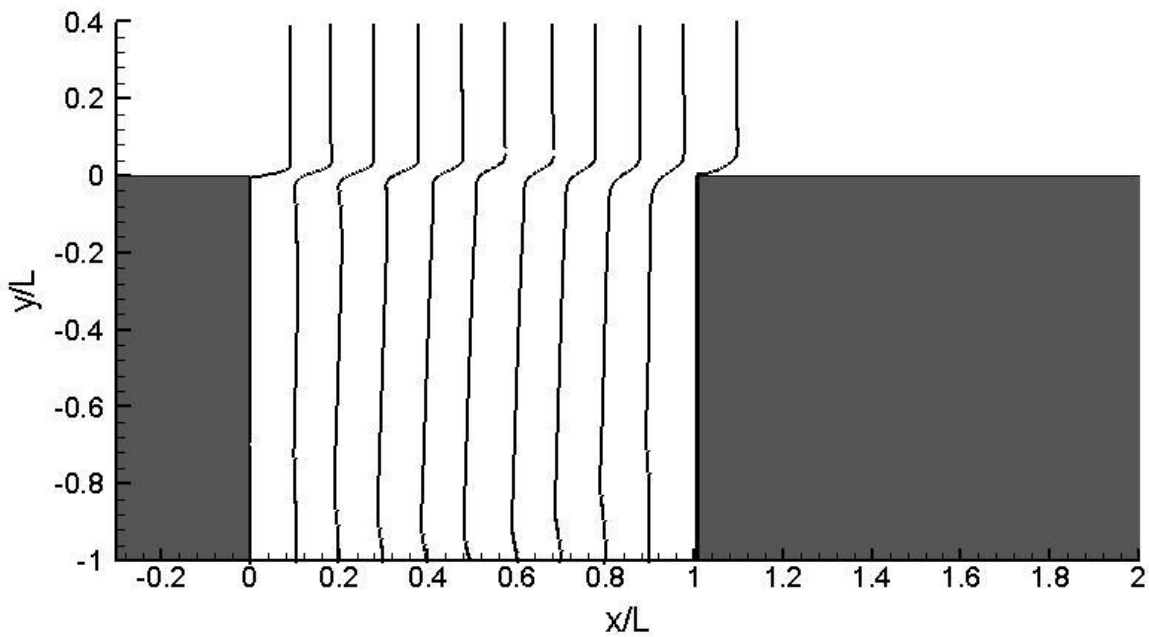


Figure 3.12 : L'évolution du profil de vitesse  $u$  par rapport à  $x$  tout au long de la couche de mélange.

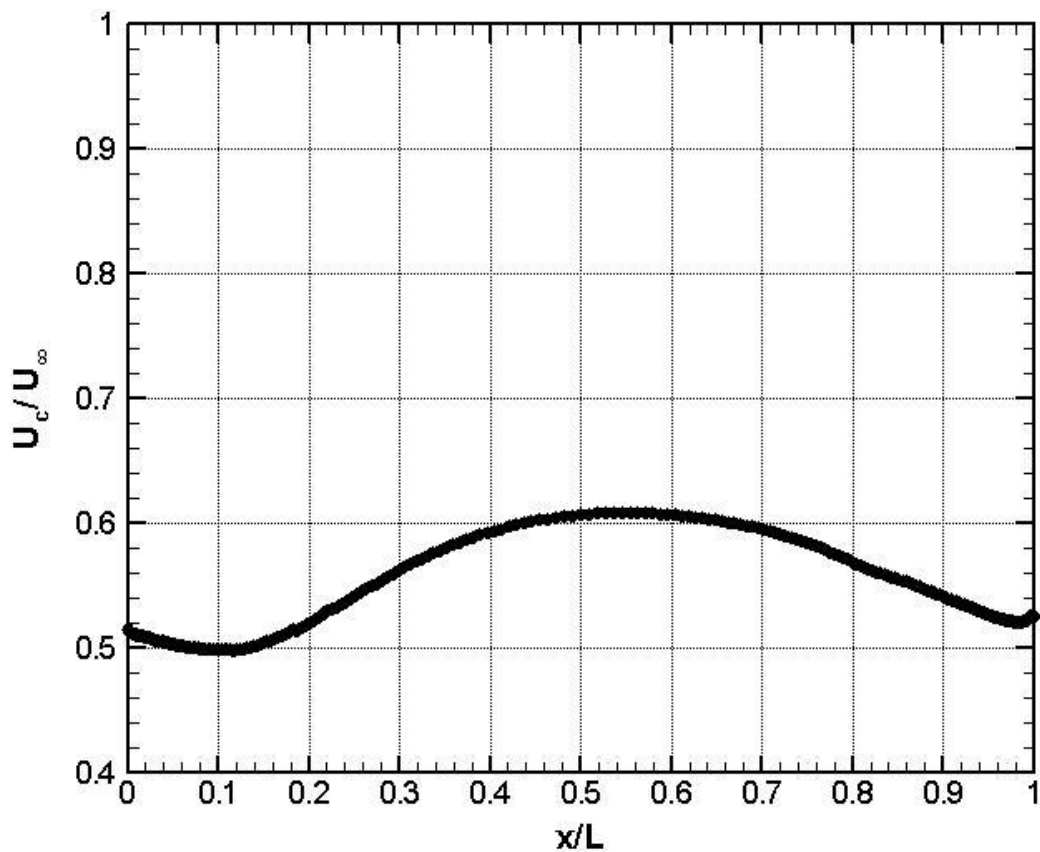


Figure 3.13 : Évolution de  $\kappa$ , la vitesse moyenne de convection des perturbations tourbillonnaires dans le couche de cisaillement, tout au long de la couche de mélange.

Et à partir du moment dans lequel on connaît l'évolution de  $\kappa$  tout au long de la couche de mélange, on peut calculer la fréquence de chaque mode principal avec le numero du mode en utilisant l'équation incompressible de Rossiter (3.1). En regardant la figure 3.13 au dessus, on remarque la valeur de  $\kappa$  reste, en gros, entre 0.5 et 0.6. Alors, on a choisit d'utiliser un  $\kappa$  moyen de 0.55 pour effectuer les calculs des fréquences des modes principaux avec la formule de Rossiter. La figure 3.14 au dessous montre les modes principaux obtenues par SZebulon avec les fréquences des modes principaux prévues par la formule de Rossiter.

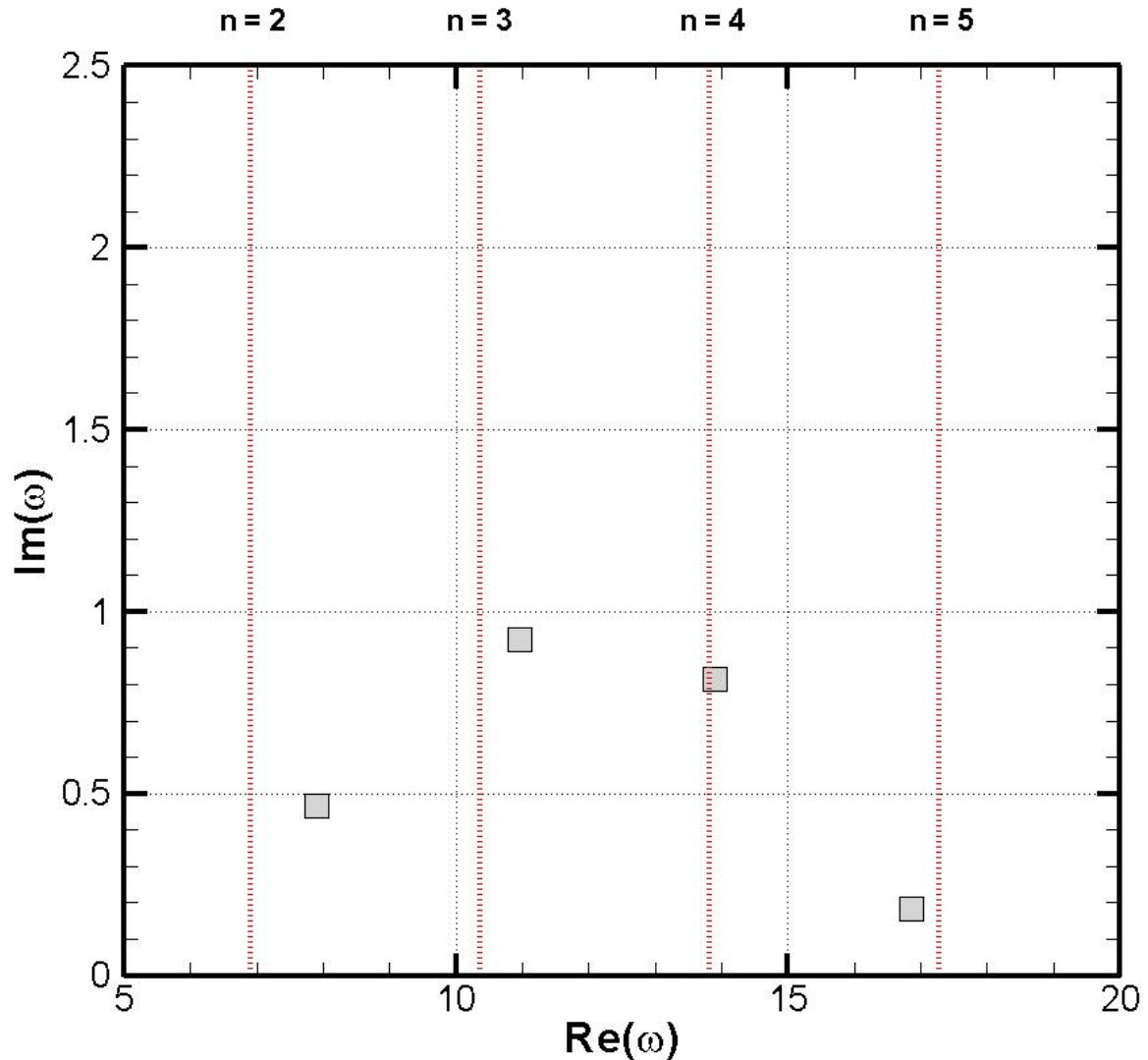


Figure 3.14 : Modes principaux 2D trouvés par SZebulon représentés par les carrés gris et fréquences  $n=2,3,4$ , et  $5$  prévues par la modélisation incompressible de Rossiter pour tel écoulement représenté par les lignes verticales rouges.

En analysant la figure 3.14, on voit bien qu'il y a une correspondance entre les fréquences prévues par la formule de Rossiter et les fréquences des instabilités retrouvées par les simulations avec le code de stabilité linéaire. C'est vrai que la correspondance n'est pas exacte, mais les erreurs relatives pour les modes 2, 3, 4, et 5 sont, respectivement, 14,38%, 5,8%, 2,43%, et 2,416%. Donc, sauf pour le mode 2, les erreurs ne sont pas très importantes, ce que nous montre que l'application de la modélisation semi-empirique de Rossiter reste valable comme une première prévision des fréquences des modes principaux d'une cavité ouverte bidimensionnelle, avec une erreur encore grande pour des applications de performance, mais compensée par un coût extrêmement bas par rapport à effectuer une simulation. Le



problème c'est que la modélisation Rossiter se limite aux fréquences, et nous ne révèle rien sur les taux d'amplification et sur la nature physique des instabilités afin de les contrôler.

### 3.4.3 Comparaison avec Michalke [10]

Une autre étude comparative qu'on peut mener, c'est basée sur la modélisation de Michalke [10]. Par contre cette modélisation est une modélisation pour la stabilité locale d'une couche de mélange libre, différemment de notre étude qui est menée dans le cadre de la stabilité globale d'un écoulement affleurant une cavité ouverte. Néanmoins, comme, à grosso modo, on peut analyser les instabilités de la cavité ouverte comme étant les instabilités d'une couche de mélange libre qui interagit avec le coin aval, on peut envisager analyser les résultats de la modélisation de Michalke pour notre écoulement afin de voir la relation des fréquences qu'elle prévoit pour une analyse locale avec les fréquences des modes principaux globales.

En gros, la modélisation de Michalke dit que la fréquence du mode plus instable pour chaque tranche de la couche de mélange par rapport à  $x$  tout au long d'une couche de mélange libre peut être calculé par la formule :

$$f_0(x) = 0,132 \frac{U_c(x)}{\delta_\omega(x)} \quad (3.3)$$

où  $f_0$  est la fréquence du mode plus instable,  $U_c$  est la vitesse convective de l'écoulement comme vu dans le paragraphe 3.4.2 antérieur, et  $\delta_\omega$  est l'épaisseur de vorticité de la couche de mélange. En connaissant l'évolution de  $U_c$  (figure 3.13) et de  $\delta_\omega$  (voir figure 3.15) par rapport à  $x$  pour le cas des nos simulations, on peut calculer  $f_0$  (voir figure 3.16).

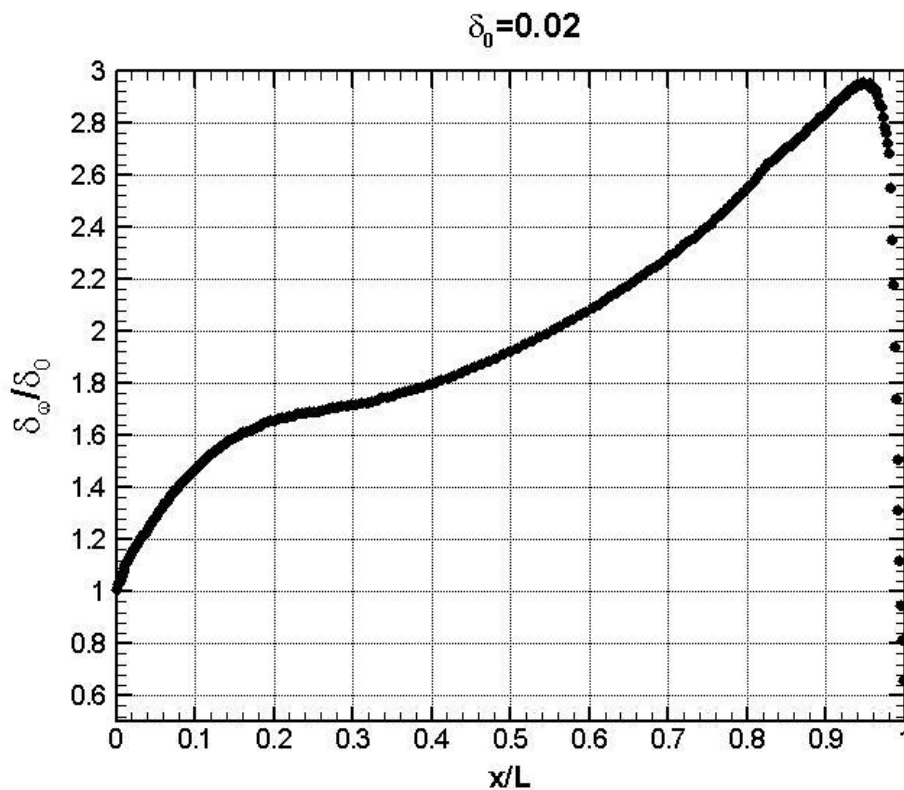


Figure 3.15 :  volution de l'épaisseur de vorticité de la couche de mélange de la cavité ouverte considéré.



$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 0.132 U_c / \delta_\infty \text{ (Michalke)}$$

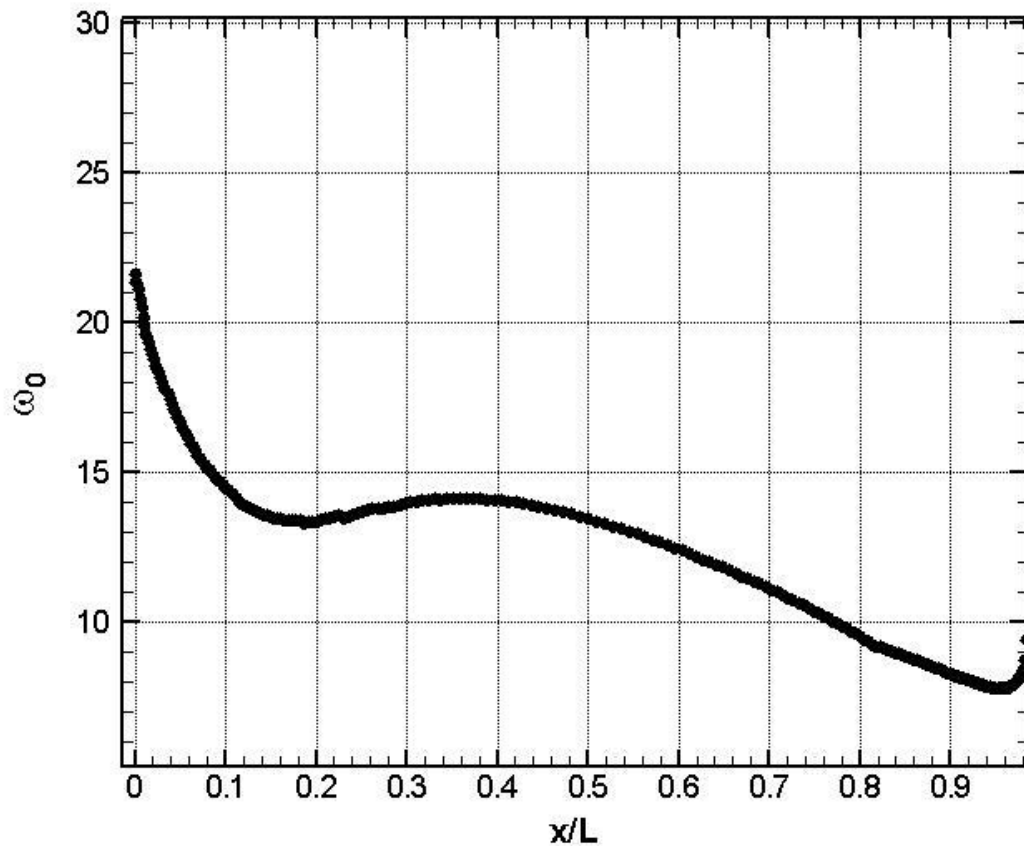


Figure 3.16 : Évolution de la fréquence du mode plus instable par rapport à  $x$ , selon Michalke [10].

En analysant la figure 3.16 ci dessus, on remarque tout de suite toutes les fréquences des quatre modes principaux retrouvés par l'analyse de stabilité linéaire globale pour la cavité ouverte sont comprises dans la plage de fréquence de la modélisation de stabilité locale de la couche de mélange. Ce fait est très intéressant parce qu'il nous suggère que, peut-être, il y a quelque type de liaison entre le spectre local et le global d'une couche de mélange au dessus d'une cavité ouverte.

### 3.4.4 Comparaison avec l'analyse locale

Dans cette partie, on a mené des simulations de stabilité locale pour la couche de mélange de la cavité ouverte, afin de retrouver le spectre par rapport à  $x$  tout au long de la cavité. Quand on fait des simulations de stabilité locales, en fait on utilise, bien évidemment, pas exactement la formulation présentée au paragraphe 2.1. Quand on fait de la stabilité locale, on considère qu'il s'agit d'une couche de mélange libre, parce que c'est locale, l'influence des parois et coins n'est, *a priori*, pas « ressentie » par l'écoulement local. Alors, en étant comme cela, dans le cas de la stabilité locale on considère que la direction  $x$  est aussi, comme la direction  $z$ , homogène, et, donc, on peut la modéliser comme pour la direction  $z$  :

$$q'(x, y, z, t) = \sum_n \tilde{q}_n(\alpha, y, \beta, \omega) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c.c \quad (3.4)$$

où  $\alpha$  est un nombre d'onde en  $x$  représentatif d'une perturbation initiale en  $x$  laquelle on rajoute au système.

Donc, étant donné le fait que pour le cas 2D dans lequel on se trouve le  $\beta$  est nulle, on a fait des simulations pour plusieurs valeurs de  $x$  tout au long de la couche de mélange, et pour plusieurs  $\alpha$  pour

chaque valeur de  $x$ . Le résultat obtenu est synthétisé dans la figure 3.17 ci dessous. Il s'agit d'une figure complexe à entendre, mais en fait c'est une représentation par rapport à  $x$  adimensionalisé par  $L$ , par rapport aussi au nombre d'onde  $\alpha$  en  $x$  des taux d'amplifications représentés par les couleurs. Les isolignes pointillés représentés, sont des isolignes de fréquence, i.e la partie réel de  $\omega$ , et les isolignes continues sont des isolignes de la courbe du spectre par rapport à  $x$ .

Il y a deux aspects intéressants à remarquer à partir de la figure 3.17. le premier c'est que si on prend le maximum taux d'amplification pour chaque position en  $x$ , on arrive à retrouver presque exactement la courbe de Michalke de la figure 3.16. Ce qui nous dit que, en fait, la modélisation de Michalke est assez bonne par rapport à une vraie analyse de stabilité locale. Le deuxième aspect intéressant c'est que, en fait, on arrive pas à retrouver un spectre local dans lequel on peut trouver tous les quatre modes principaux du spectre issue de l'analyse globale, c'est-à-dire, que la dynamique locale est vraiment différente de la dynamique globale. Les modes globales ne sont pas choisis par les échelles caractéristiques de la cavité parmi les modes locaux, il s'agit vraiment d'un phénomène différent.

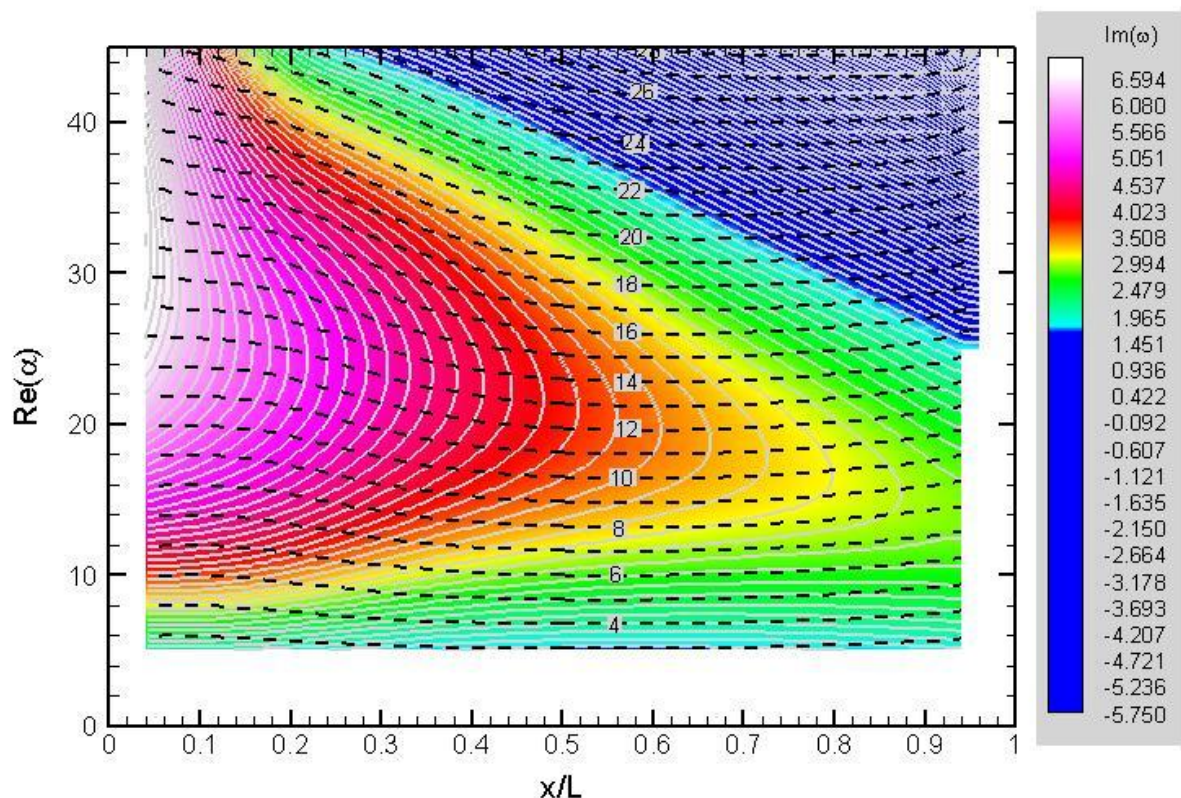


Figure 3.17 : Spectre par rapport à  $x$  de l'analyse de stabilité locale de la couche de mélange.

### 3.5 ANALYSE DES RÉSULTATS 3D

Ayant déjà bien analysé les instabilités bidimensionnelles, on s'intéresse maintenant aux instabilités tridimensionnelles. Pour le faire, d'abord les spectres pertinentes aux simulations 3D sont présentés et commentés, et après les fonctions propres correspondantes aux propriétés de l'écoulement sont présentés et commentés.

#### 3.5.1 Spectres

Alors, dans le cas des simulations 3D, comme déjà expliqué dans le paragraphe 2.1, on introduit une perturbation de nombre d'onde  $\beta$  non nulle dans la troisième direction de la cavité et résout les

équations de la stabilité linéaire afin d'analyser les instabilités tridimensionnelles de l'écoulement affleurant un cavité. Donc, afin de montrer la transformation progressive du spectre quand on passe 3D, on présente le spectre obtenu pour un  $\beta$  égal à 2 dans la figure 3.18 ci dessous.

Si on analyse la figure 3.18, on remarque bien deux différences par rapport à la figure 3.6 du spectre complet pour  $\beta$  nulle (bidimensionnel). La première différence c'est que les modes bidimensionnelles sont encore là, mais leur taux d'amplification a significativement diminué. Ça deuxième c'est que il y a des modes dans la région proche du (0,0), c'est-à-dire, des modes presque stationnaires qui commencent à subtilement augmenter en taux d'amplification.

Et maintenant si on s'intéresse aux cas tridimensionnelles avec  $\beta$  égal à 4 et 6 (figures 3.19 et 3.20 respectivement), on va voir que la tendance qui avait commencé avec  $\beta$  égal à 2 se confirme de plus en plus, au fur et à mesure qu'on augmente la valeur de  $\beta$ . Pour un  $\beta$  égal à 4, les taux d'amplification des modes principaux bidimensionnelles sont encore plus bas que pour  $\beta$  égal à 2, et il y a même un des modes principaux qui est disparu, celui de fréquence plus basse. Aussi pour  $\beta$  égal à 4, on voit que dans la région (0,0) il apparaît déjà un mode instable. Et dans le cas avec  $\beta$  égal à 6, on voit que tous les mode principaux bidimensionnelles sont disparus, et les modes de la région stationnaire continuent à grandir progressivement.

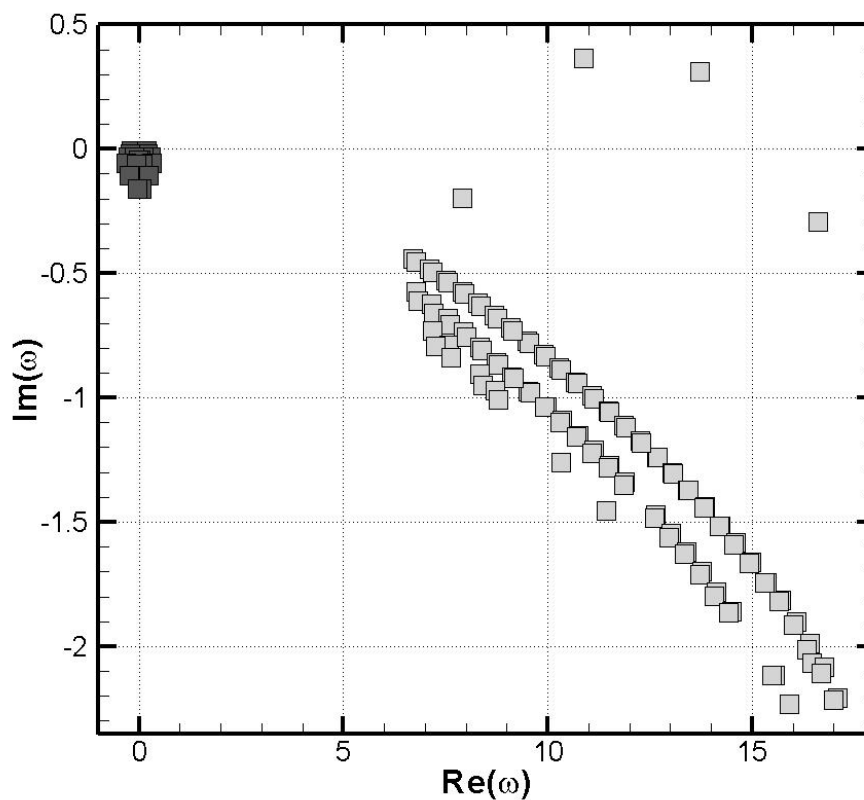


Figure 3.18 : Spectre 3D complet pour une valeur de  $\beta$  égal à 2.

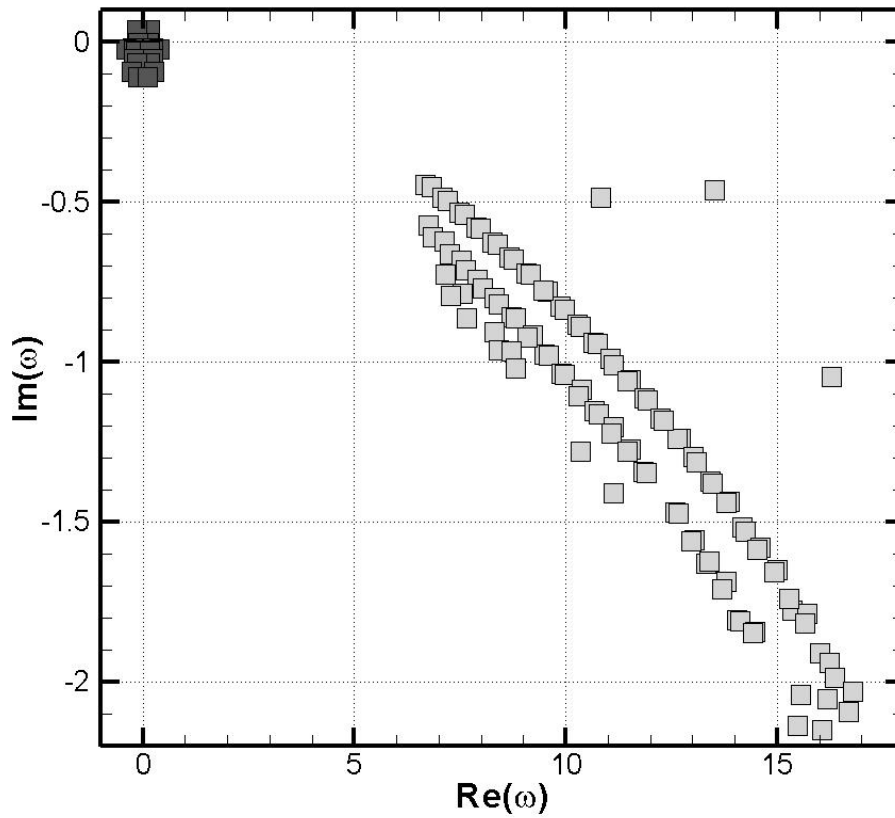


Figure 3.19 : Spectre 3D complet pour une valeur de  $\beta$  égal à 4.

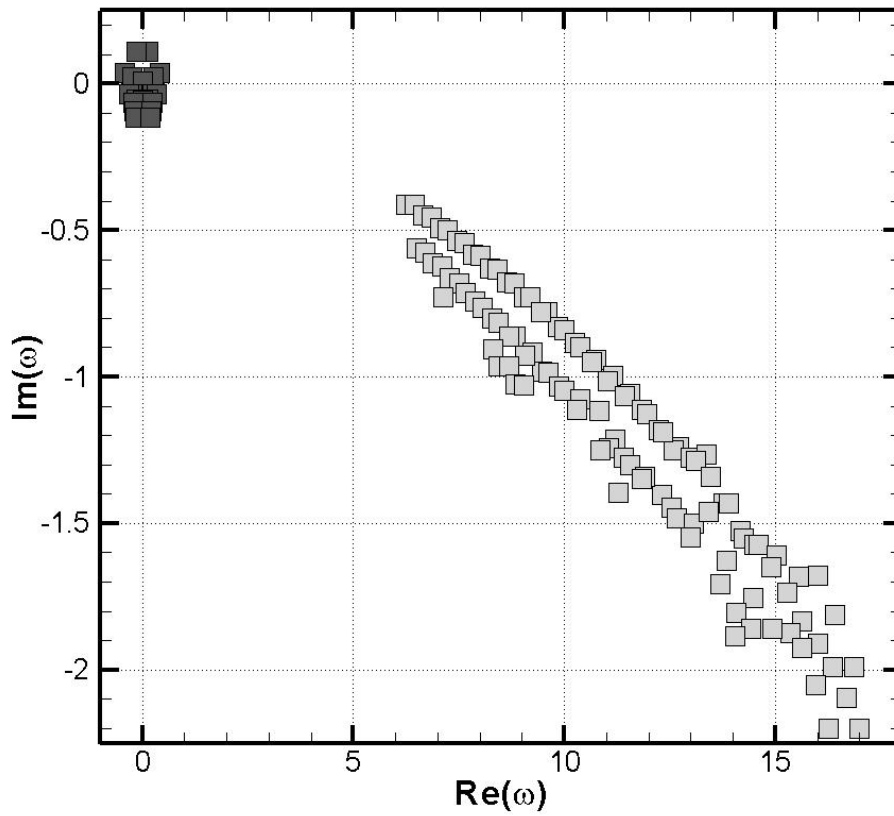


Figure 3.19 : Spectre complet pour une valeur de  $\beta$  égal à 6.

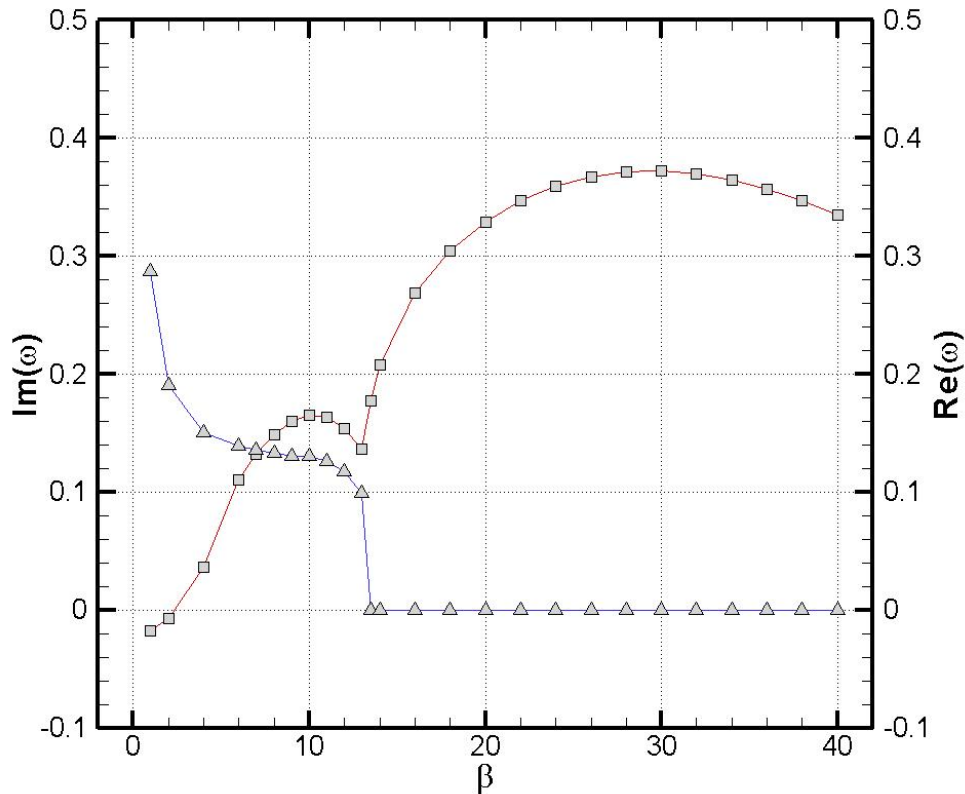


Figure 3.20 : Taux d'amplification et fréquence du mode plus 3D plus instable par rapport à la valeur de  $\beta$ .

Ce comportement de disparition des modes bidimensionnels, vu dans les figures 3.17, 3.18, et 3.19, était déjà prévue, parce que on sait que la tridimensionalité casse la cohérence bidimensionnelle de l'écoulement. C'est-à-dire, l'instabilité centrifuge (à voir dans le prochain paragraphe) va influencer la couche de mélange au-dessus de façon périodique en  $z$ , en détruisant la symétrie de la couche de mélange en  $z$  de façon à amortir les instabilités 2D.

Alors, maintenant, on peut s'intéresser plutôt à la partie en gris plus foncée, c'est-à-dire la région autour de l'origine des axes, sachant que de cette région sortent les modes plus instables à partir de  $\beta$  égal à 6. Les spectres pour tous les  $\beta$  de 8 à 34 sont présentés dans l'annexe. Si on fait un graphique du comportement du taux d'amplification et de la fréquence du mode plus instable par rapport à la valeur de  $\beta$ , on obtient la figure 3.20, présentés ci dessus.

En analysant la figure 3.20 ci dessus, on remarque quelques aspects intéressants des instabilités 3D. Du coup, on remarque qu'il y a deux régimes de comportement de l'instabilité tridimensionnelle, un régime jusqu'à  $\beta$  égal à 13, et un régime au-delà. Ces deux régimes sont notamment différents non seulement à cause de changement de comportement de la courbe du taux de croissance en  $\beta$  égal à 13, mais aussi à cause du changement de comportement qui lui accompagne dans la courbe de la fréquence du mode. Jusqu'à  $\beta$  égal à 13 on a une instabilité qui est instationnaire de fréquence qui diminue avec l'augmentation de  $\beta$ , jusqu'à 13 quand l'instabilité 3D principal devient stationnaire. Dans un deuxième moment, on remarque aussi une tendance générale de croissance, stabilisation et décroissance du taux d'amplification avec l'augmentation de  $\beta$ , ce qui revient à dire, qu'il existe un  $\beta$  optimal pour le taux d'amplification et qu'il a lieu dans le régime stationnaire. Pour pouvoir mieux analyser c'est que se passe avec l'évolution du mode 3D principal avec l'augmentation de  $\beta$ , on présente les figures 3.21 et 3.22 des spectres au tour du mode principal pour  $\beta$  égal à 12 et 14 respectivement.

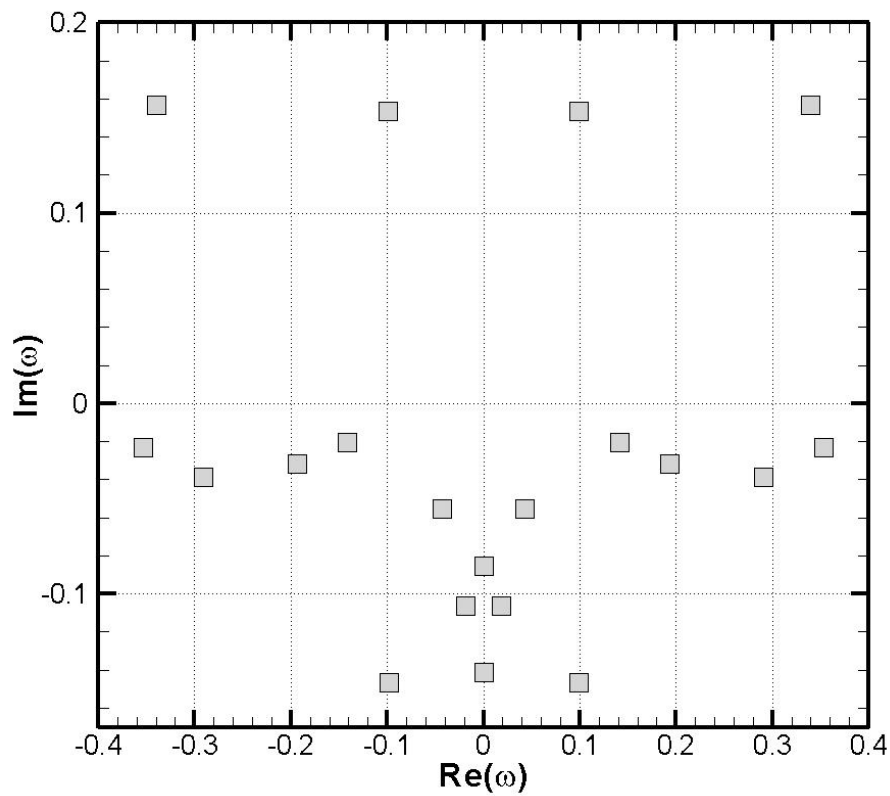


Figure 3.21 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 12.

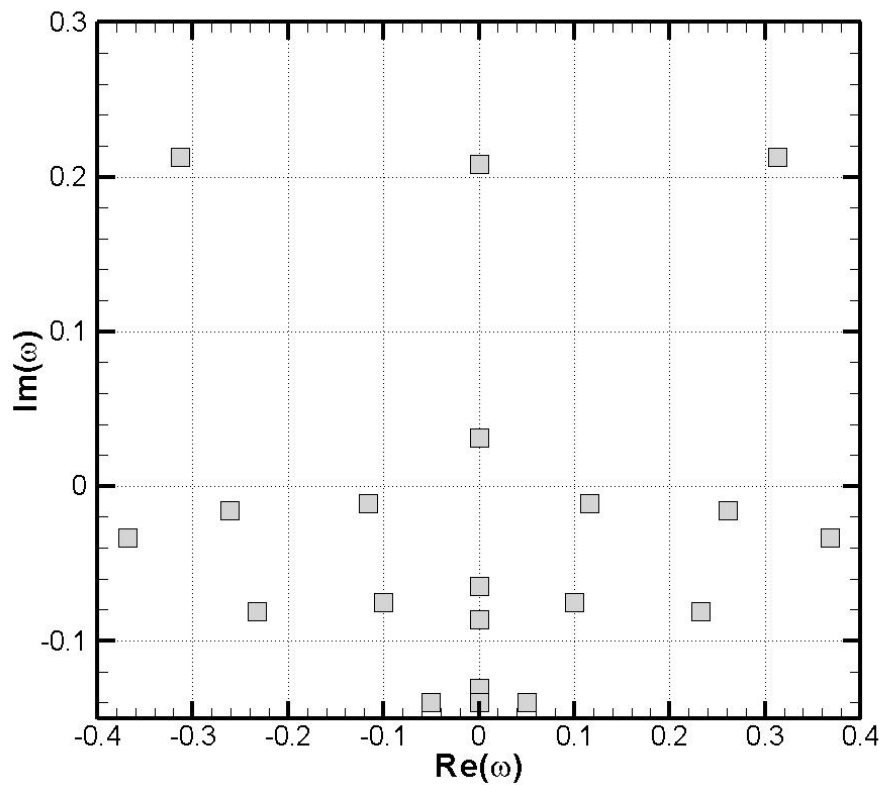


Figure 3.22 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 14.

Alors, ce phénomène là n'est pas évident de tout d'expliquer, et sûrement on a besoin de plus d'étude pour vraiment envisager le répondre. À la limite il pourrait même être une anomalie



numérique pas de tout lié avec la physique. Parce que à Reynolds de 7.500 nous sommes probablement assez éloignés du sol d'apparition de l'instabilité tridimensionnelle, ayant vu que sur l'article de Brès [2], il fait des simulations à Reynolds égal à 300 et retrouve déjà l'instabilité tridimensionnelle. Donc, c'est possible que à notre nombre de Reynolds l'écoulement est déjà turbulent, et tel instabilité est, en fait pas vraiment représentative de la physique de l'écoulement réel. Pas contre, c'est aussi possible que il s'agit d'un phénomène physique d'interactions des modes par exemple. C'est difficile à dire avec le peu des données qu'on a.

La deuxième remarque qui a été faite est plus intuitive, et il s'agit de reconnaître qu'il y a une perturbation optimale capable de générer un taux d'amplification plus important (voir figure 3.23). Cela est en fait, cause par la viscosité de l'écoulement, c'est-à-dire que quand les nombres d'onde deviennent suffisamment petits, la viscosité agit afin de stabiliser le système. Dans notre cas cette perturbation optimale est de  $\beta$  égal à 30, qui revient à un  $\lambda = 0,21$ . Il s'agit d'un  $\beta$  qui est le double de celui présenté par Brès [2] dans son article, mais par contre, ses paramètres sont assez différents car il s'agit d'un écoulement compressible, avec un nombre de Reynolds beaucoup plus bas (environ 300), et avec un épaisseur de vorticités de la couche de mélange qui est beaucoup plus importante. D'ailleurs, en fait, c'est bien probable, qu'à cause de avoir un nombre de Reynolds plus bas, leur écoulement est plus susceptible aux effets visqueux, et son  $\beta$  optimal est, alors plus petit.

Un dernier aspect intéressant c'est que même pour le taux d'amplification plus important, les instabilités 3D ont des taux d'amplification significativement moins importants que ceux des instabilités bidimensionnelles,  $b_{2D}^{MAX} = 0,92420 \geq 0,37194 = b_{3D}^{MAX}$ , fait que revient à dire que instabilités 3D sont plus « stables » que les instabilités 2D.

### 3.5.2 Fonctions propres

Tous les fonctions propres de  $\beta$  égal à 2 jusqu'à 34, ont été générées. Mais ici sont présentés seulement les fonctions propres de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $p$  pour un  $\beta$  égal à 30, i.e, le  $\beta$  optimal dans les figures 3.23, 3.24, 3.25 et 3.26 au dessous.

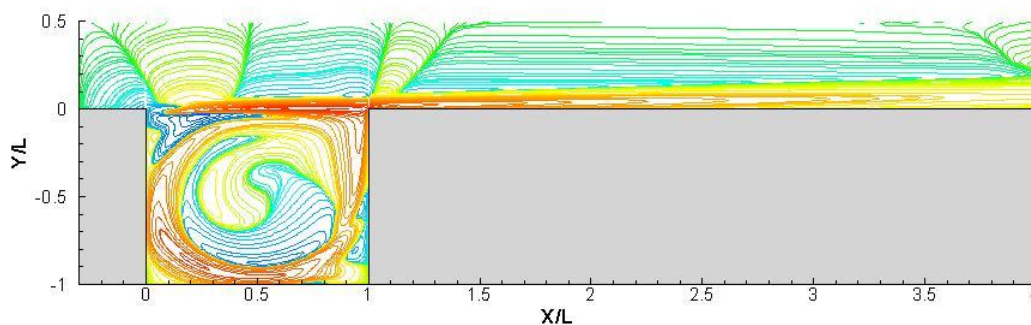


Figure 3.23 : Isolignes du champ perturbatif de la composante u de vitesse, relatif au mode 3D principal ( $\beta=30$ ).

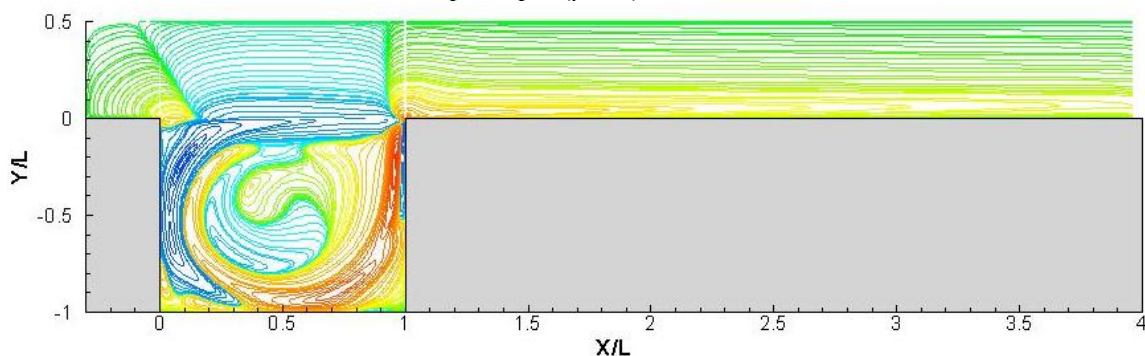


Figure 3.24 : Isolignes du champ perturbatif de la composante v de vitesse, relatif au mode 3D principal ( $\beta=30$ ).

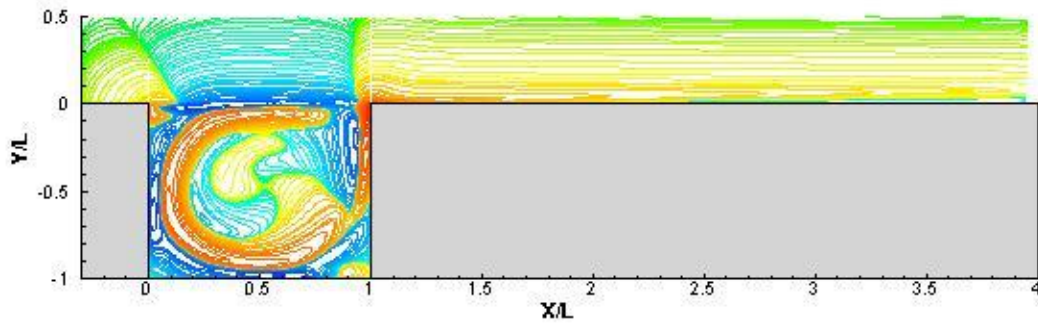


Figure 3.24 : Isolignes du champ perturbatif de la composante w de vitesse, relatif au mode 3D principal ( $\beta=30$ ).

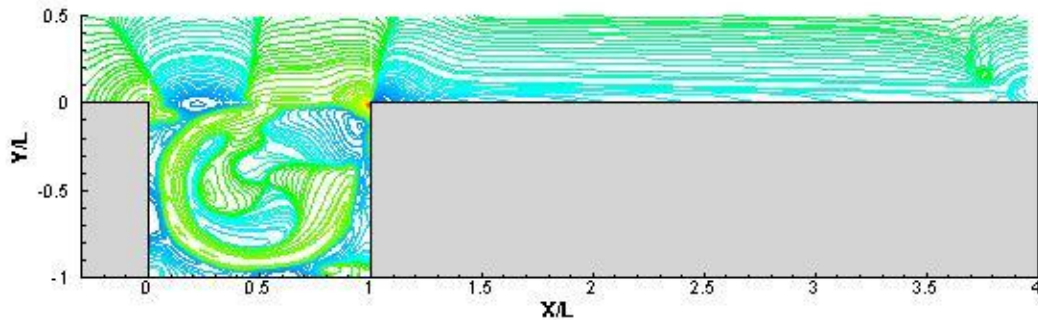


Figure 3.23 : Isolignes du champ perturbatif de la composante u de vitesse, relatif au mode 3D principal ( $\beta=30$ ).

On remarque que les fonctions propres du mode 3D principal sont complètement différent de ces issues des modes principaux 2D, il s'agit vraiment d'un autre phénomène physique. Au lieu de présenter des structures tourbillonnaires originés à la couche de mélange comme dans le cas 2D, les fonctions propres pour le mode principal 2D présente des isolignes fermées dans la cavité, en suggérant un mode centrifuge, dans lequel il y a l'instabilité principal représenté par le grand tourbillon dans la cavité, et des instabilités secondaires qui correspondent aux tourbillons de plus petite taille dans les coins de la cavité. On peut voir aussi que l'existence de ce tourbillon dans la cavité influence la couche de mélange au dessus.

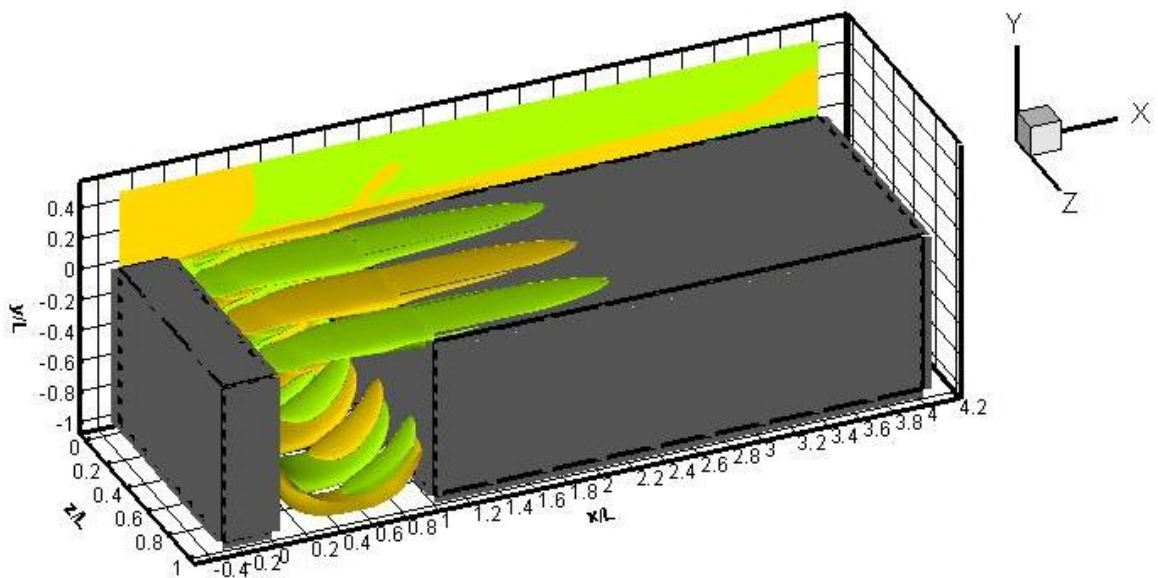


Figure 3.24 : Reconstruction 3D des fonctions propres de la composante de vitesse u pour  $\beta$  égal à 10.



On peut aussi envisager analyser la reconstruction 3D des champs de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , et  $p$  pour les deux régimes de la instabilité 3D reconnues dans l'analyse des spectres du paragraphe précédent, afin de mieux les comprendre. Les figures 3.24, et 3.25 représentent les reconstructions 3D des champs de la composante de vitesse  $u$  pour le mode principal 3D à  $\beta$  égal à 10 pour le régime instationnaire, et  $\beta$  égal à 30 pour le régime stationnaire. Les reconstructions 3D pour tous les autres propriétés pour  $\beta$  égal à 10 et 30 sont dans l'annexe.

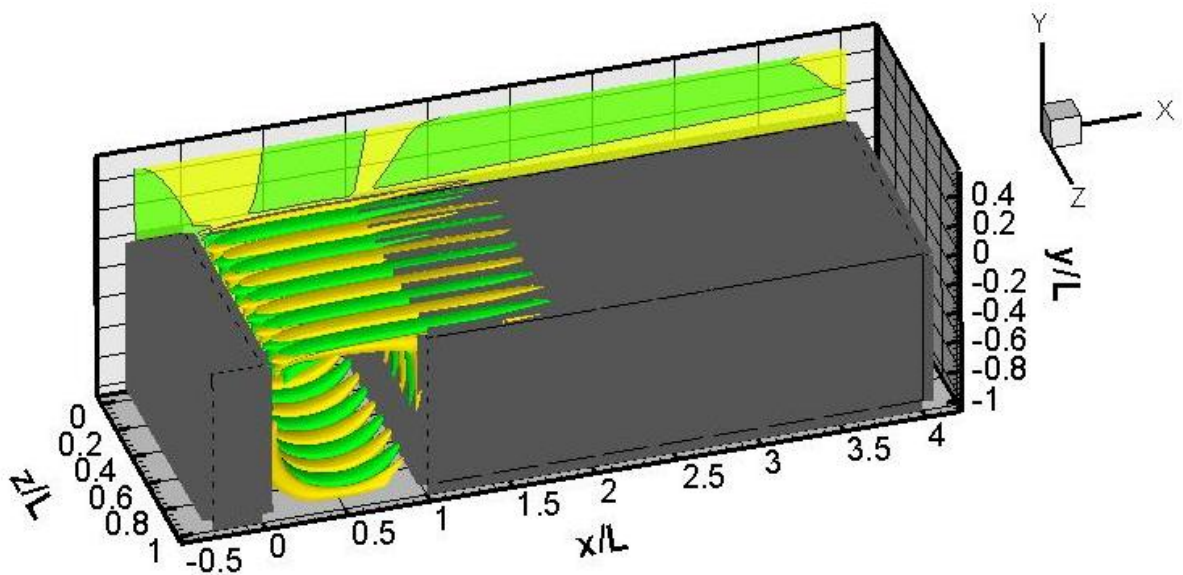


Figure 3.24 : Reconstruction 3D des fonctions propres de la composante de vitesse  $u$  pour  $\beta$  égal à 30.

En analysant les dernières figures, 3.23 et 3.24, on voit bien les structures cohérentes dont lesquelles Brès [2] parle dans son article. On peut aussi remarque qu'il s'agit exactement des instabilités centrifuges comme proposé par Brès [2] et visualisé en experiment [5] qui est montré dans la figure 1.5 de l'introduction de ce rapport. Et, enfin, il est important de noter aussi, qu'à part de la longueur d'onde, les structures cohérentes de la figure 3.23 et 3.24 ont le même type, i.e, il s'agit d'un même phénomène physique avec des comportements différents en temps due à différentes perturbations  $\beta$ .

## 4 CONCLUSION

Ce projet présente une étude introductive au phénomène des instabilités 2D et 3D dans l'écoulement incompressible affleurant une cavité ouverte, en faisant déjà une validation de l'application du code SZebulon de stabilité linéaire version *staggered* pour tel cas. Et on a présenté aussi des résultats et commentaires intéressants et pertinents avec la bibliographie.

Pour le cas des instabilités bidimensionnelles, on a eu l'occasion de faire la validation des simulations par rapport à la DNS et par rapport à la bibliographie. Et on a bien retrouvé les 4 modes principaux reliés avec les instabilités de la boucle rétroactive de la couche de mélange, en les comparant après avec plusieurs types de modélisations et avec l'analyse locale que finalement nous a indiqué que les modes globaux sont pas forcément liés aux modes locales.

Pour le cas des instabilités tridimensionnelles, on a eu l'occasion de faire plusieurs simulations pour plusieurs valeurs de  $\beta$ , en retrouvant bien le mode tridimensionnelle stationnaire de Brès [2] et son évolution par rapport à  $\beta$ . Par contre, différemment de Brès, on a remarqué que, pour notre cas, les instabilités tridimensionnelles ne coexistent pas avec les instabilités bidimensionnelles que pour une plage assez réduite des valeurs de  $\beta$ . Et, enfin, on a bien retrouvé par les reconstructions 3D de fonction propres, la caractéristique centrifuge des instabilités 3D dont Brès parle.

Par contre, il y a beaucoup encore à faire dans l'étude de ce écoulement, notamment on peut envisager faire des simulations pour des nombres de Reynolds plus bas afin de retrouver le sol de l'apparition de l'instabilité 3D et aussi faire des simulations pour des cavités d'aspect  $L/D$  différents d'un, afin de voir l'influence des échelles caractéristiques dans l'écoulement. Il serait intéressant aussi de faire des simulations compressibles, afin d'étudier l'effet de la compressibilité sur les instabilités 2D et 3D. Et, dernièrement, on pourrait pour l'avenir du projet penser à étudier le phénomène remarqué dans la figure 3.20, c'est-à-dire, la possibilité de l'existence des régimes stationnaires et instationnaires des instabilités 3D avec des comportements « découplés ».

## 5.1 FONCTIONS PROPRES DES MODES PRINCIPAUX 2D

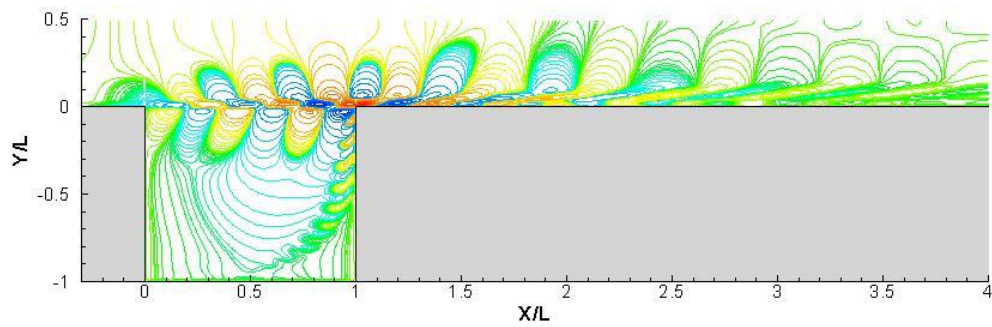


Figure 5.1 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $u$  de vitesse, relatif au premier mode principal.

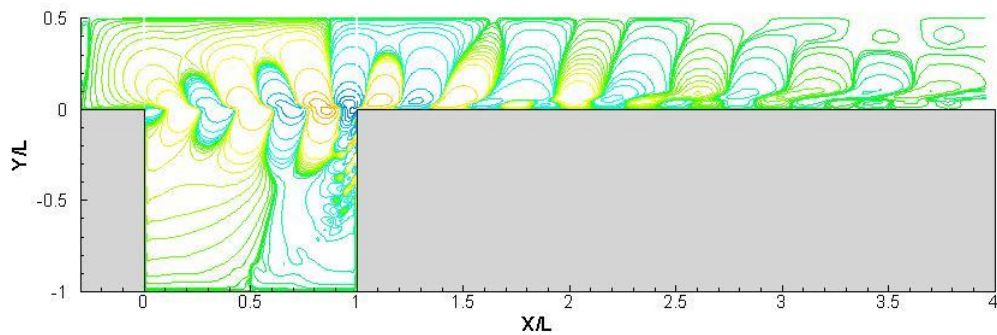


Figure 5.2 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $v$  de vitesse, relatif au premier mode principal.

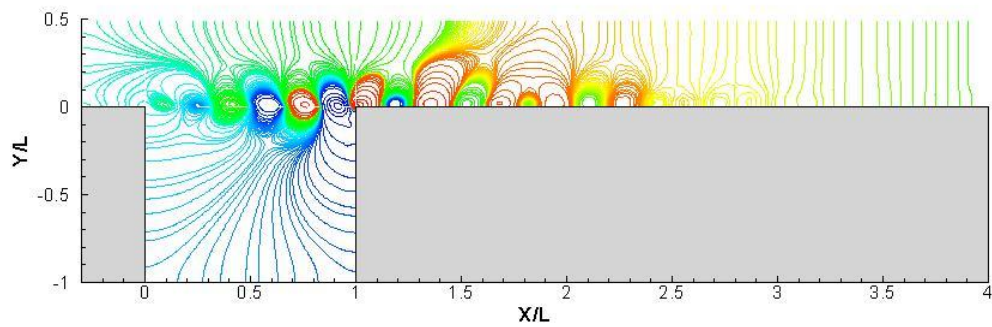


Figure 5.3 : Isolignes du champ perturbatif de la pression  $p$ , relatif au premier mode principal.

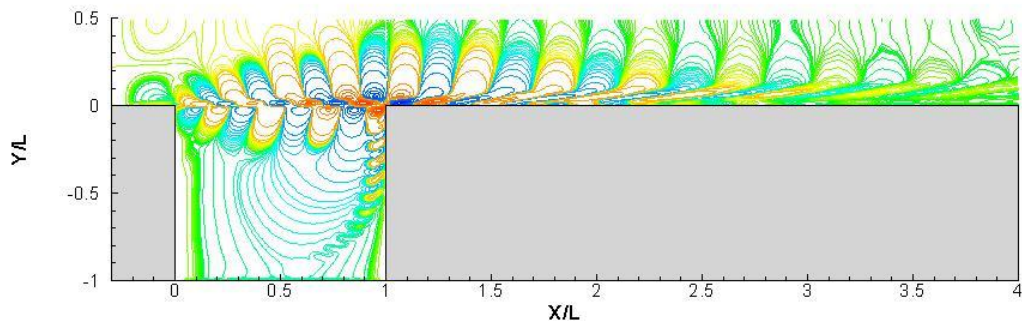


Figure 5.4 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $u$  de vitesse, relatif au deuxième mode principal.

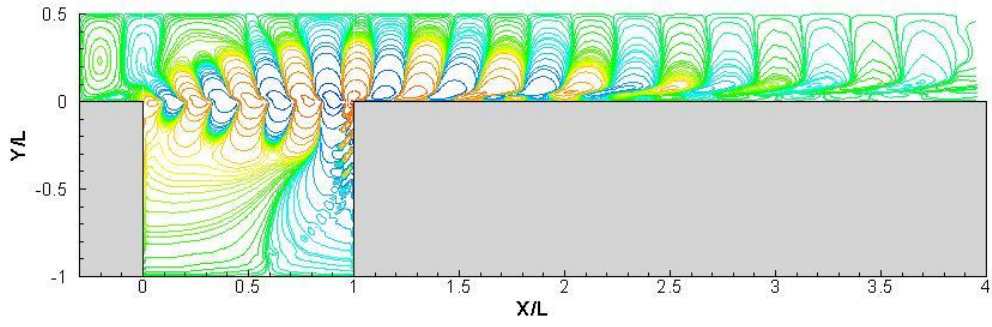


Figure 5.5 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $v$  de vitesse, relatif au deuxième mode principal.

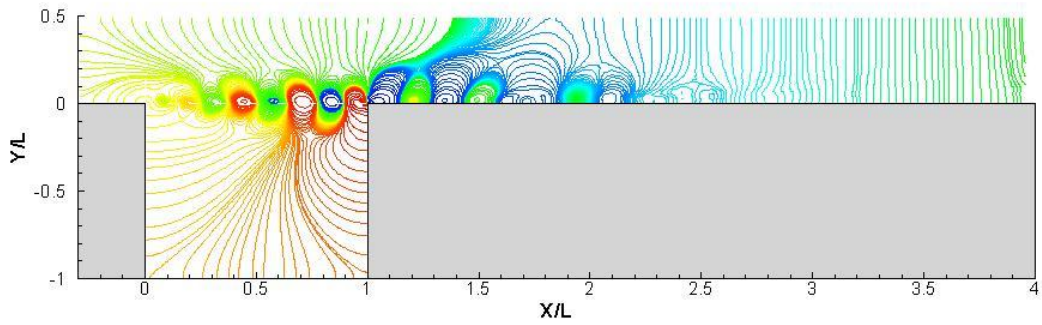


Figure 5.6 : Isolignes du champ perturbatif de la pression  $p$ , relatif au deuxième mode principal.

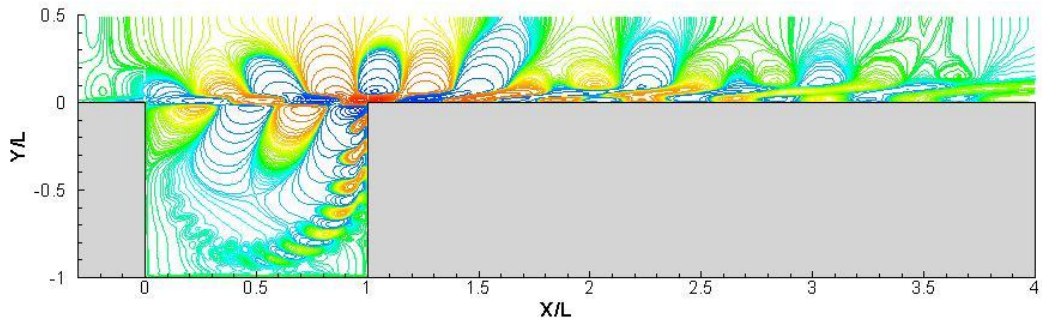


Figure 5.7 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $u$  de vitesse, relatif au troisième mode principal.

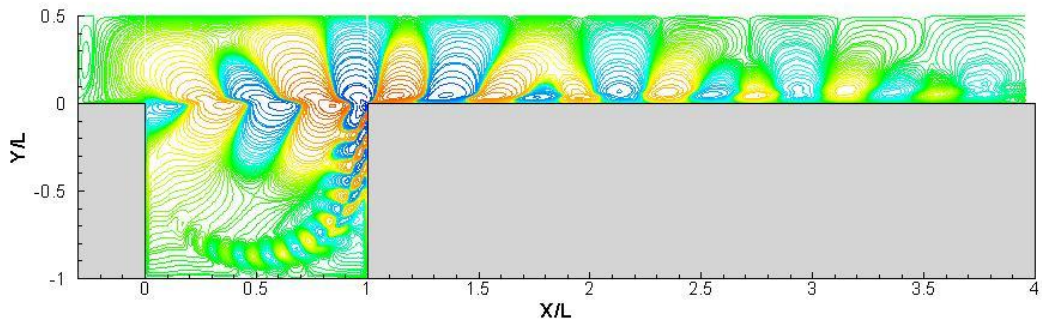


Figure 5.8 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $v$  de vitesse, relatif au troisième mode principal.



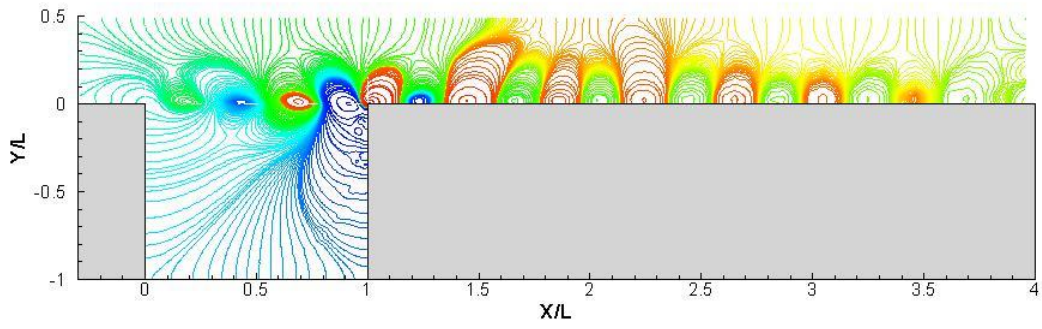


Figure 5.9 : Isolignes du champ perturbatif de la pression  $p$ , relatif au deuxième mode principal.

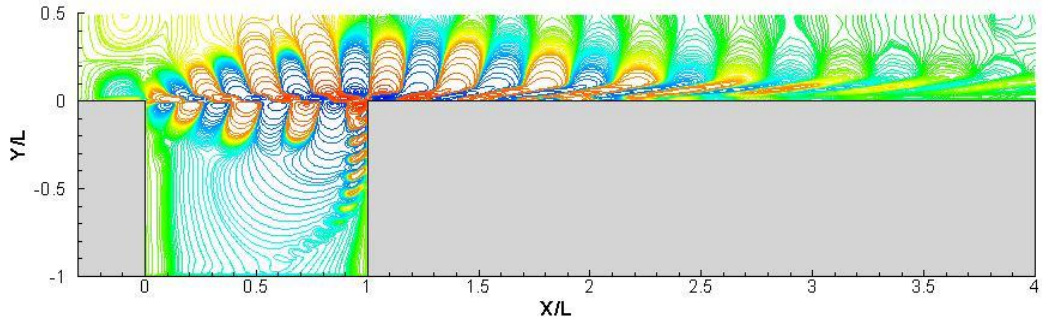


Figure 5.10 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $u$  de vitesse, relatif au quatrième mode principal.

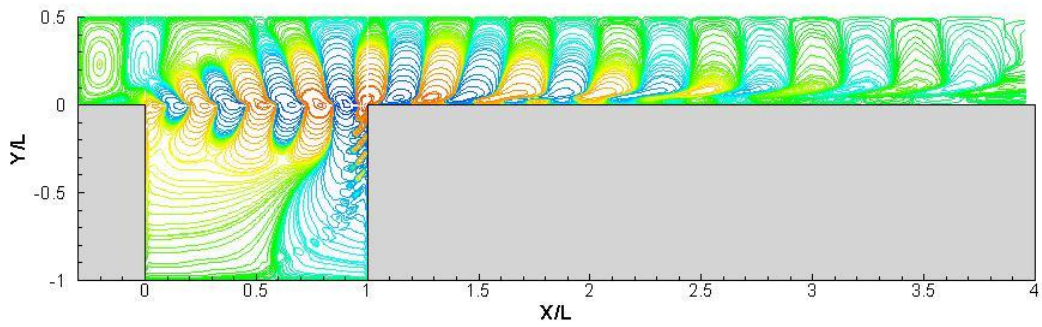


Figure 5.11 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $v$  de vitesse, relatif au quatrième mode principal.

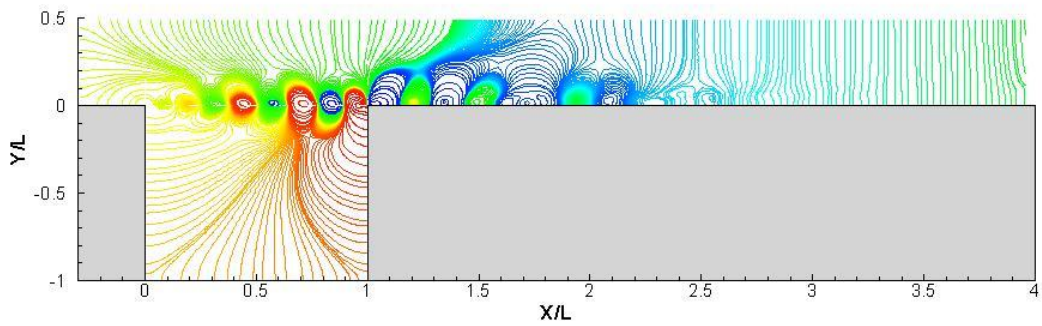


Figure 5.12 : Isolignes du champ perturbatif de la pression  $p$ , relatif au deuxième mode principal.

## 5.2 SPECTRES AU TOUR DU MODE PRINCIPAL 3D POUR PLUSIEURS $\beta$

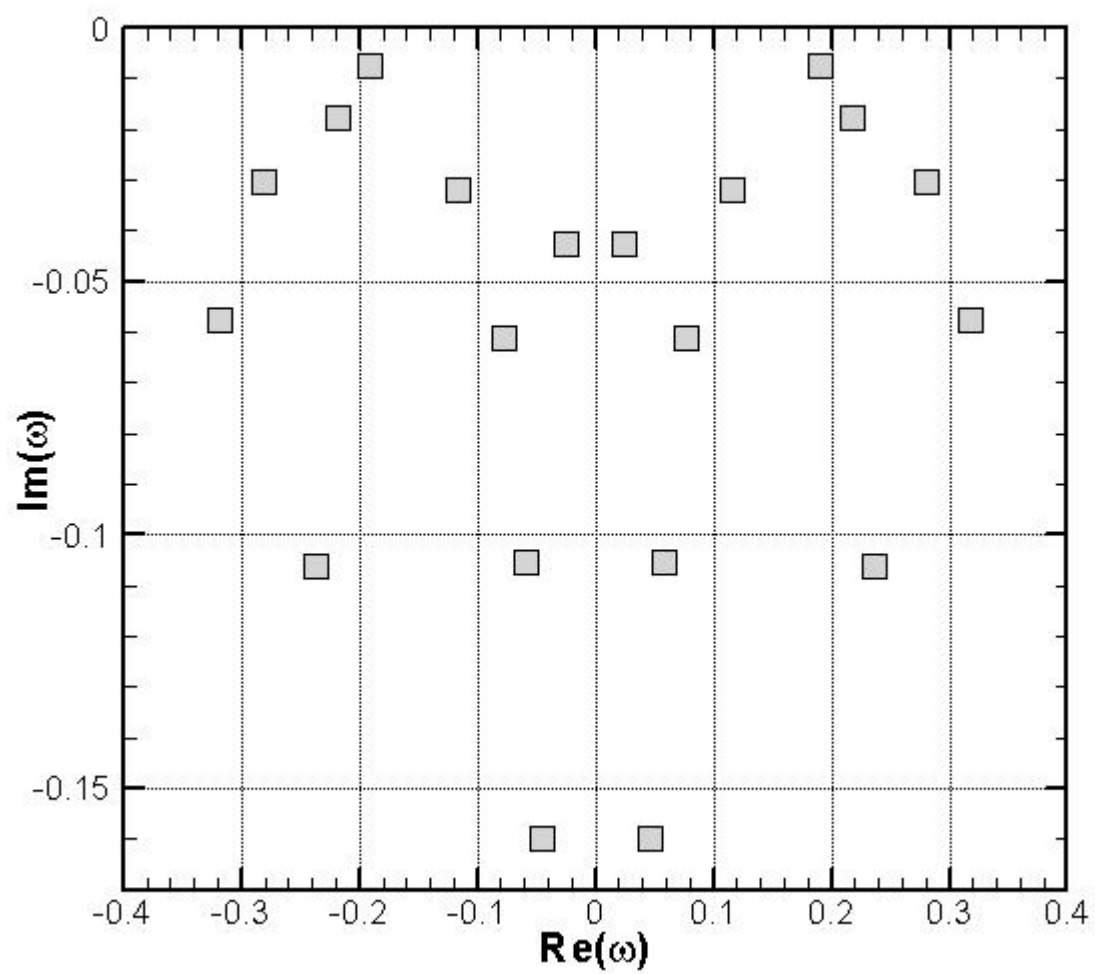


Figure 5.13 : Spectre du mode 3D pour  $\beta$  égal à 2.

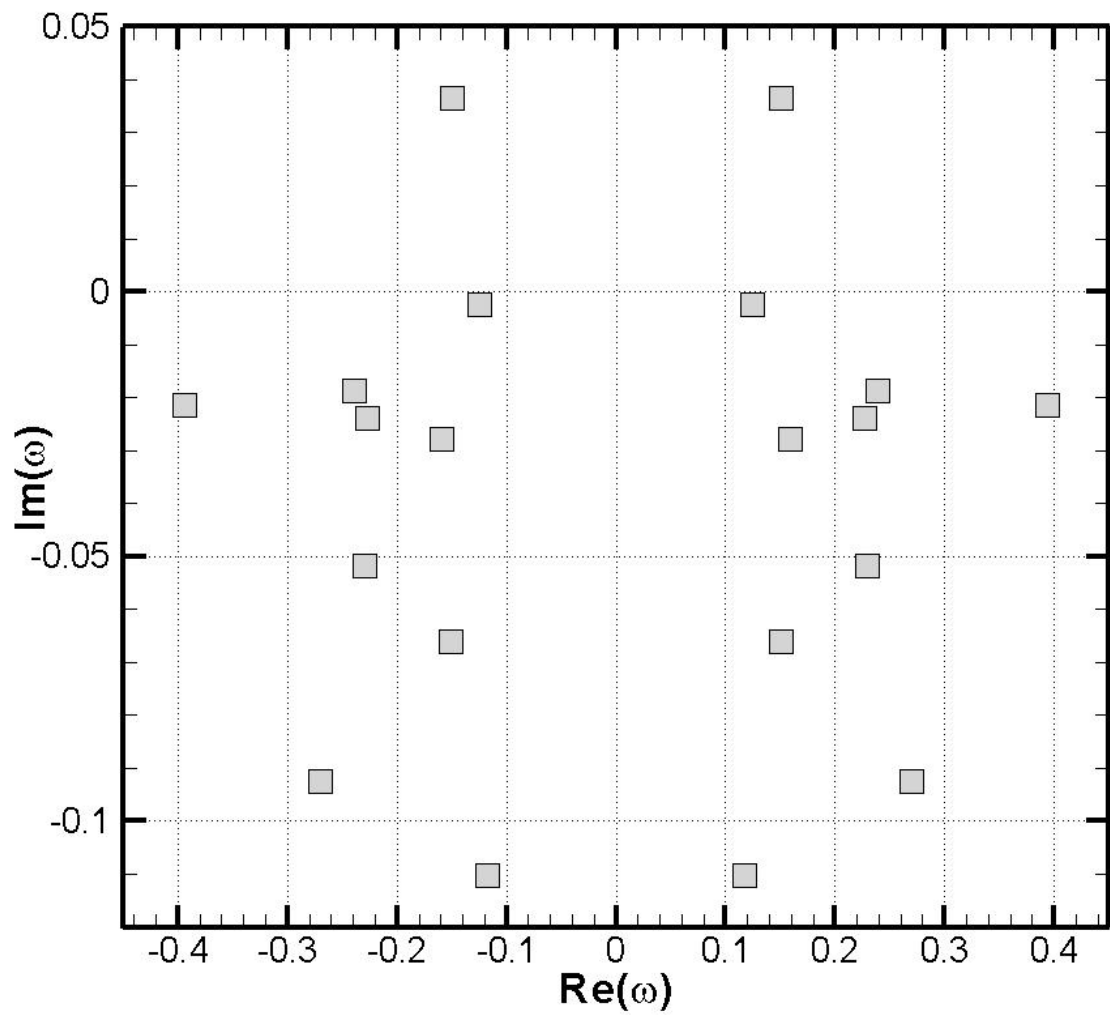


Figure 5.14 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 4.

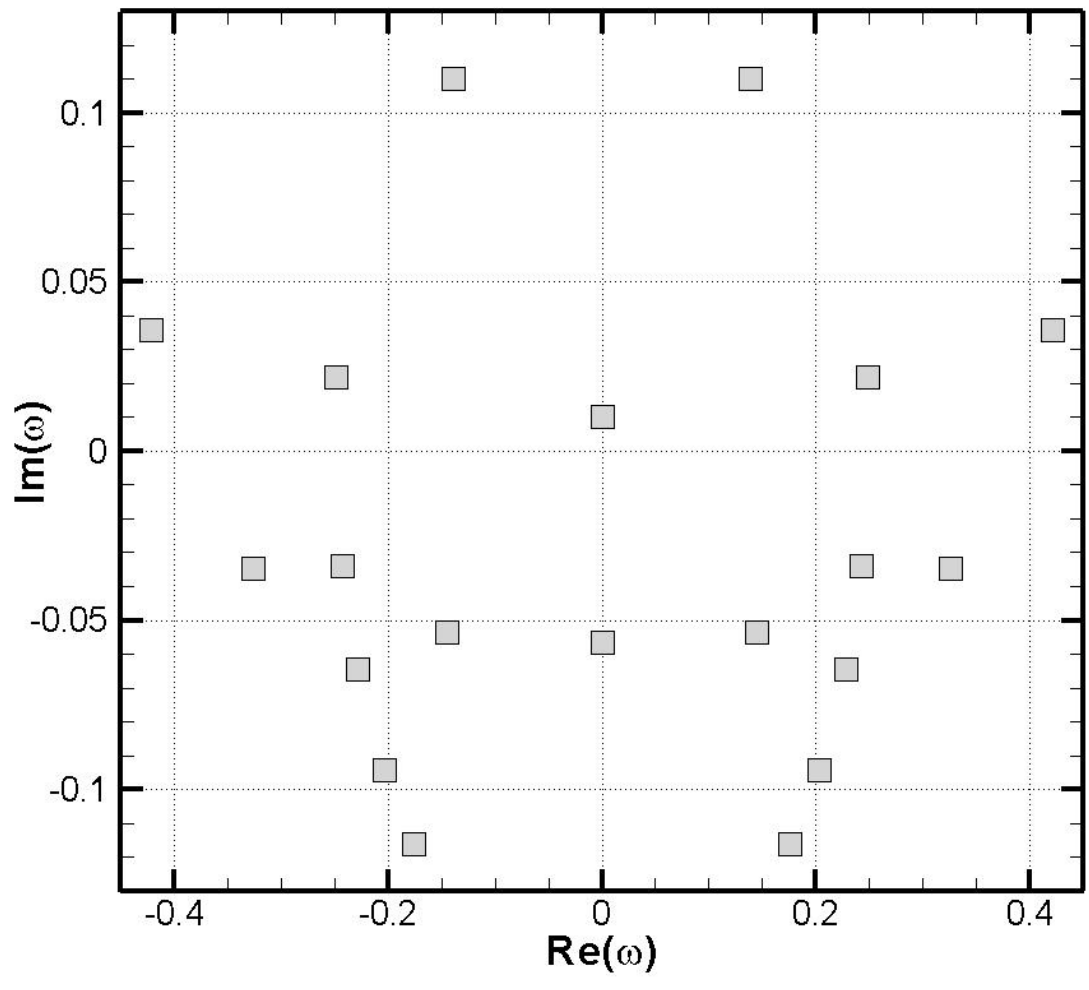


Figure 5.15 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 6.



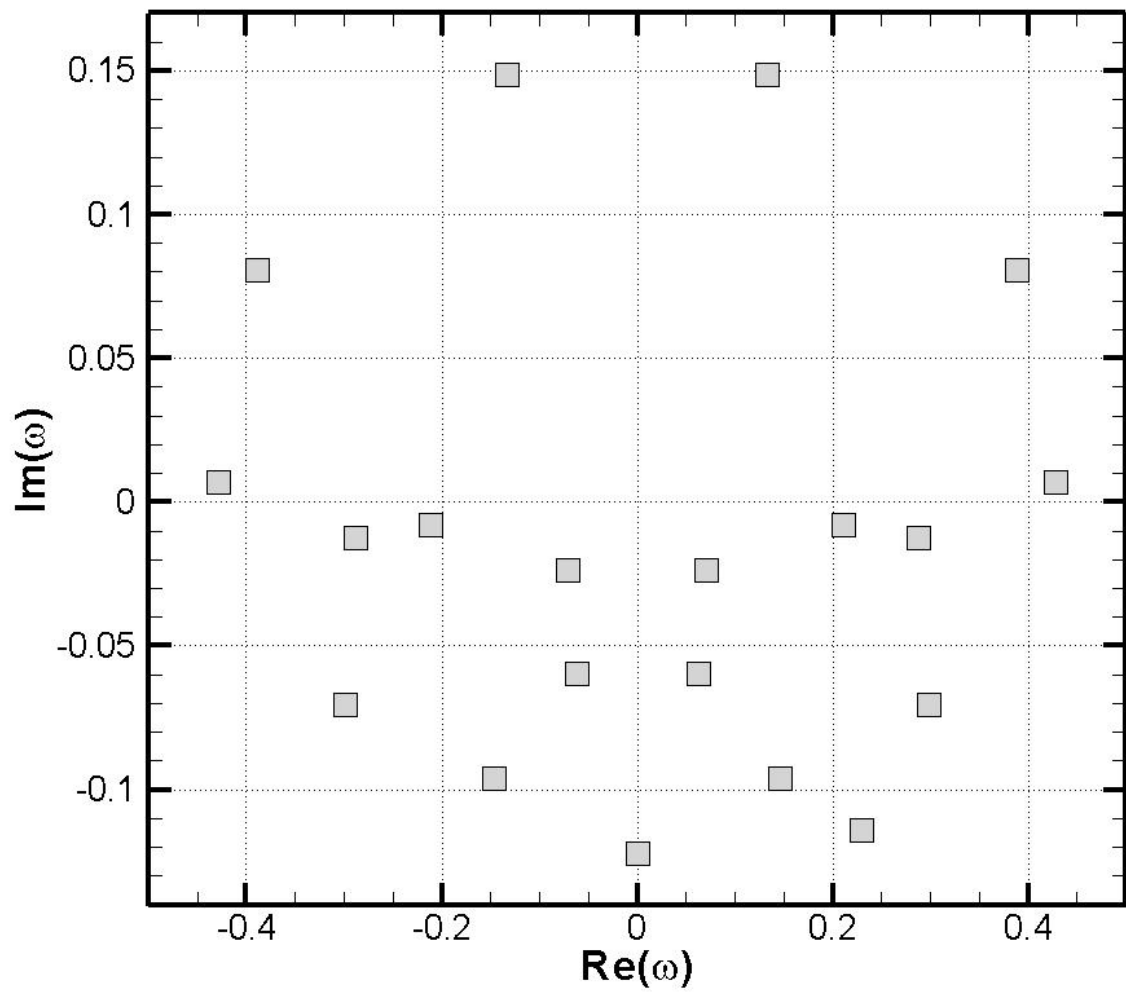


Figure 5.16 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 8.

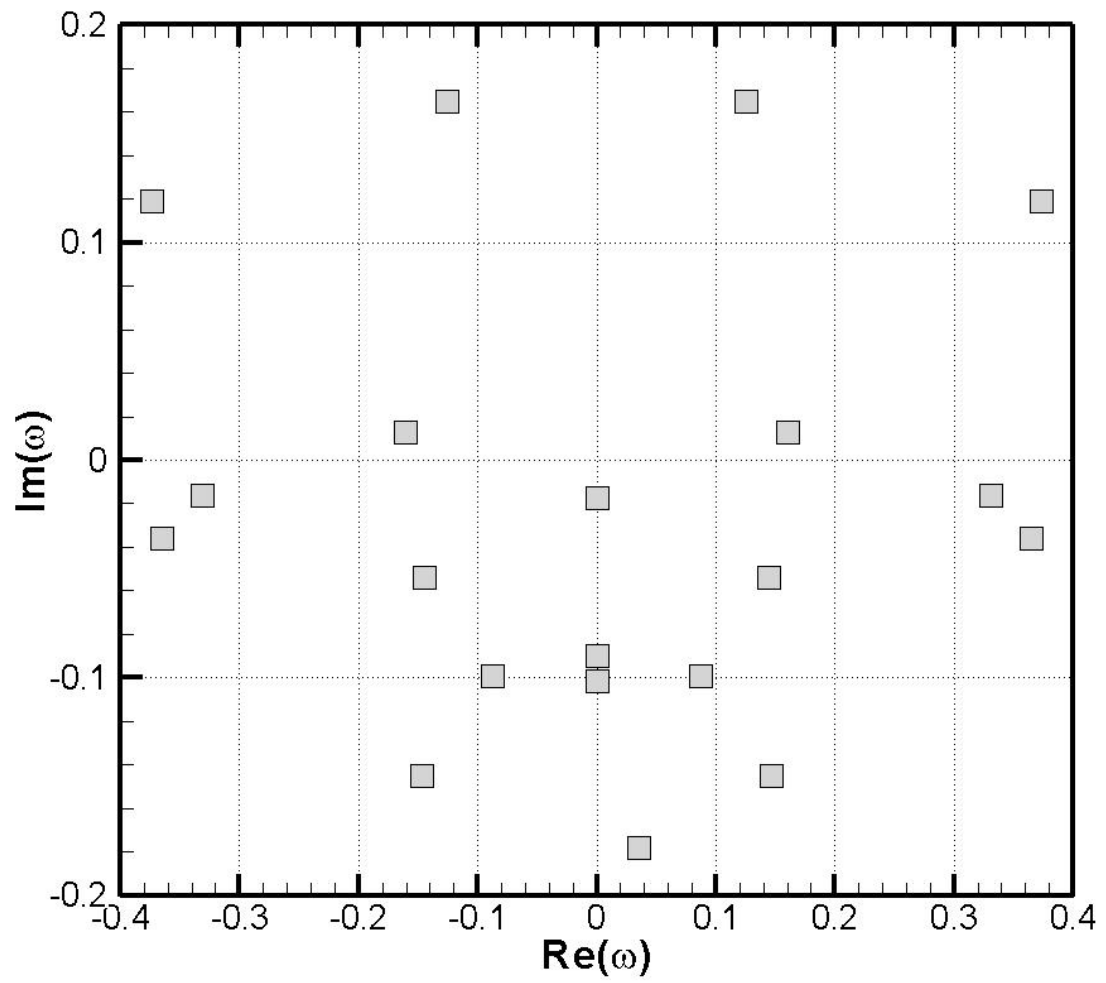


Figure 5.17 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 10.

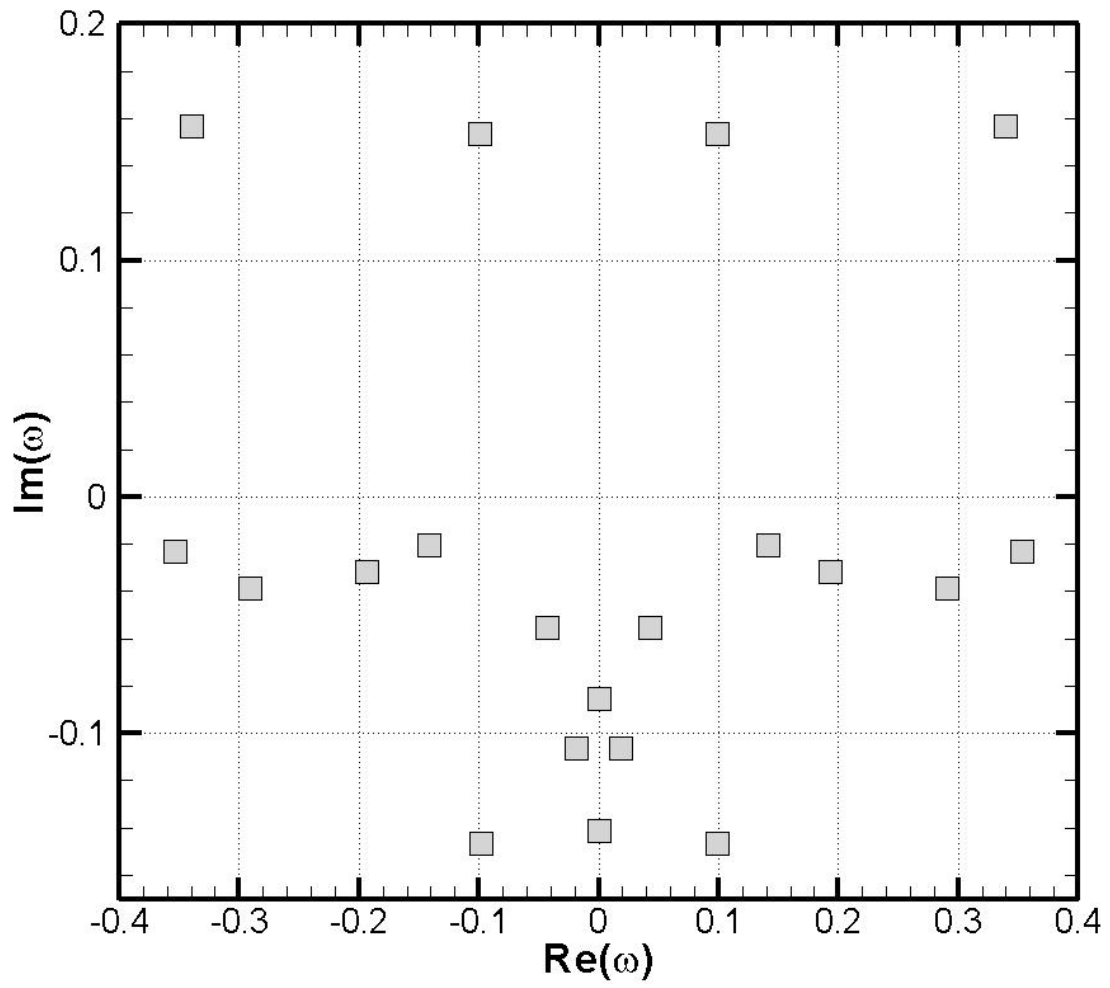


Figure 5.18 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 12.

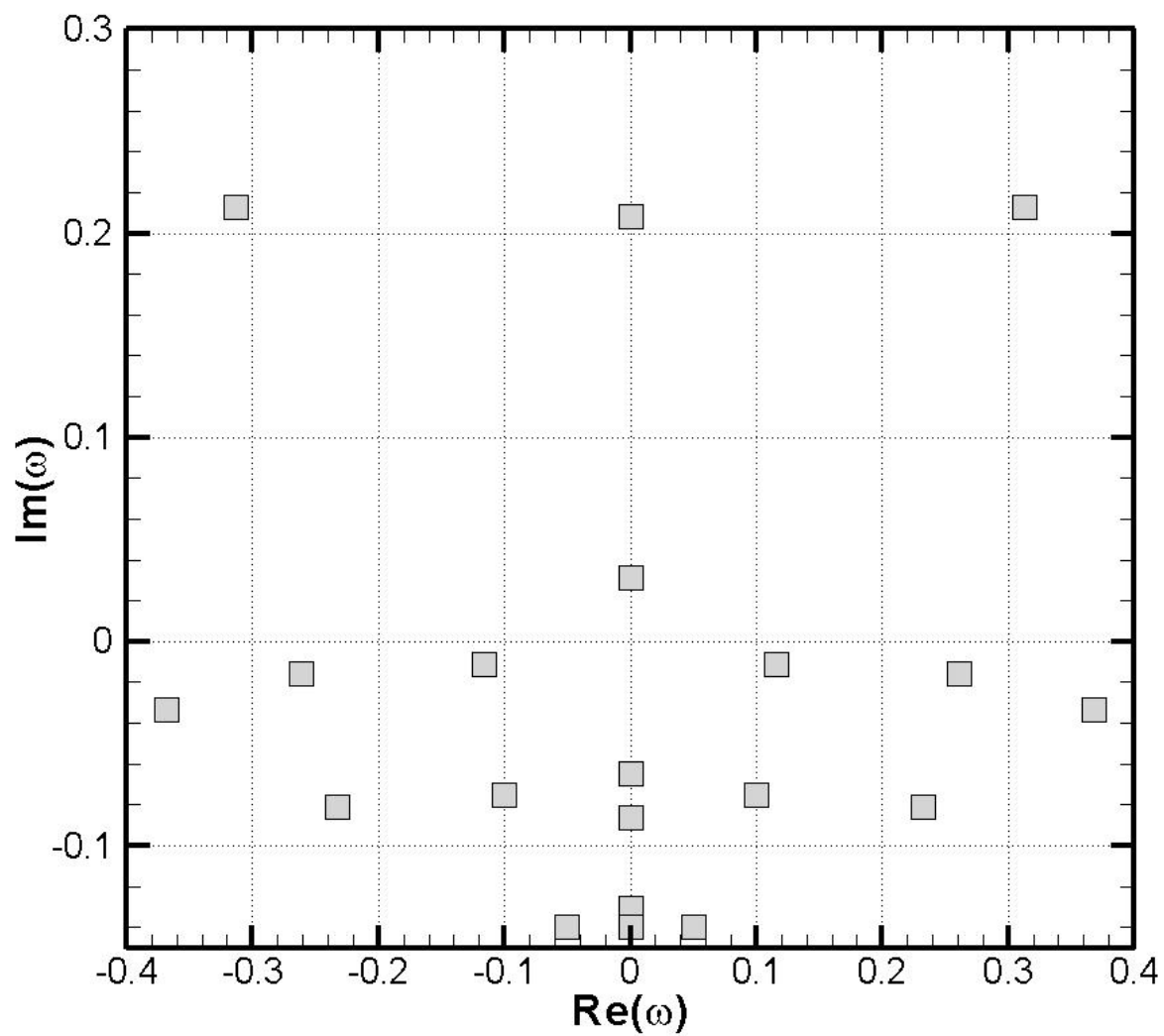


Figure 5.19 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 14.

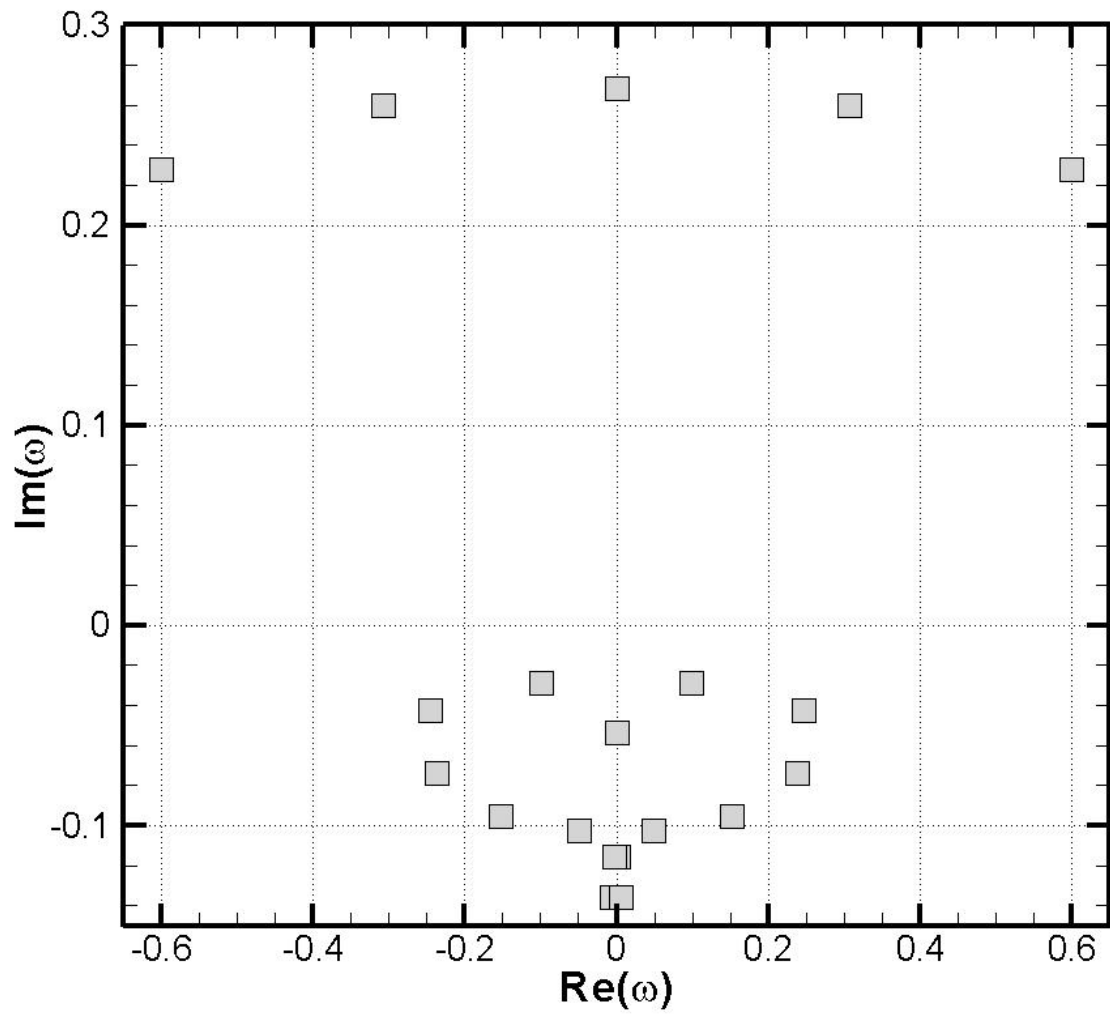


Figure 5.20 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 16.

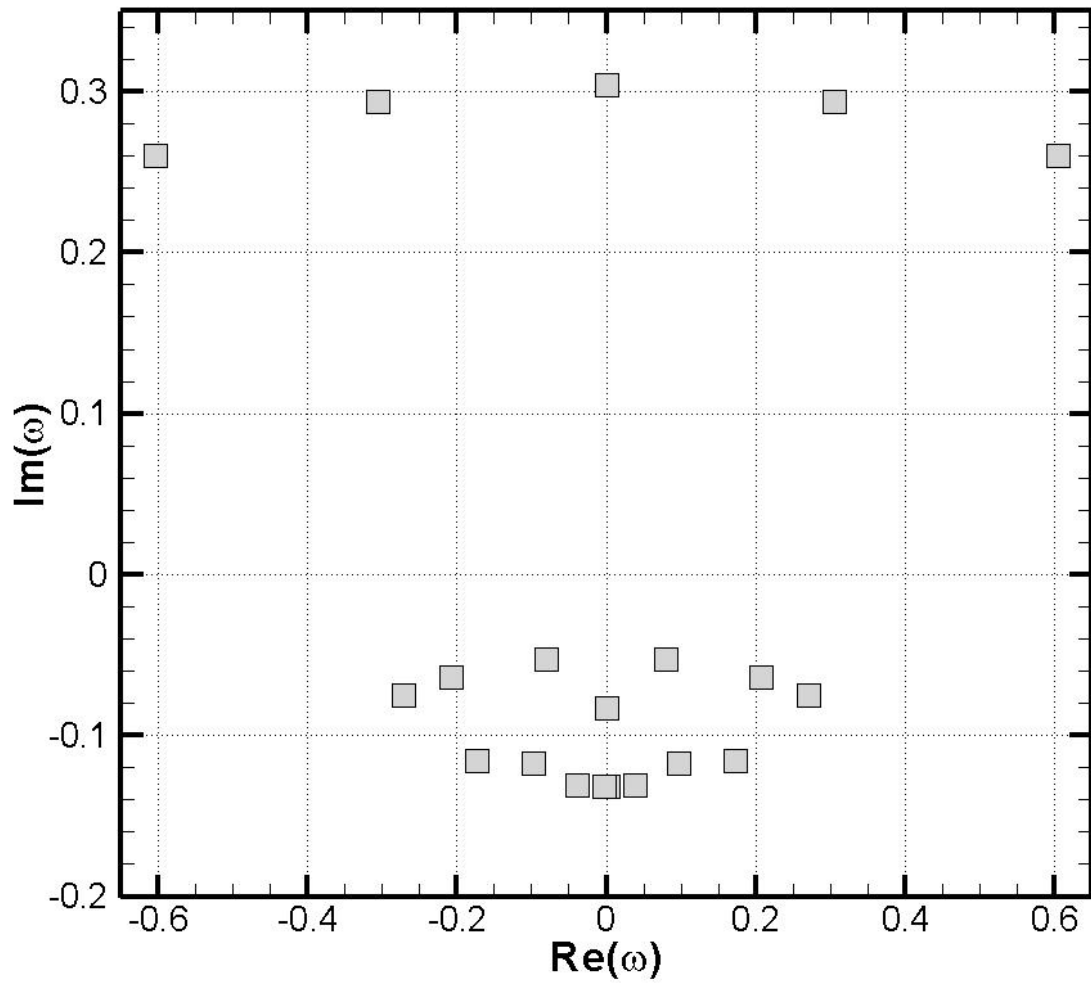


Figure 5.22 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 18.

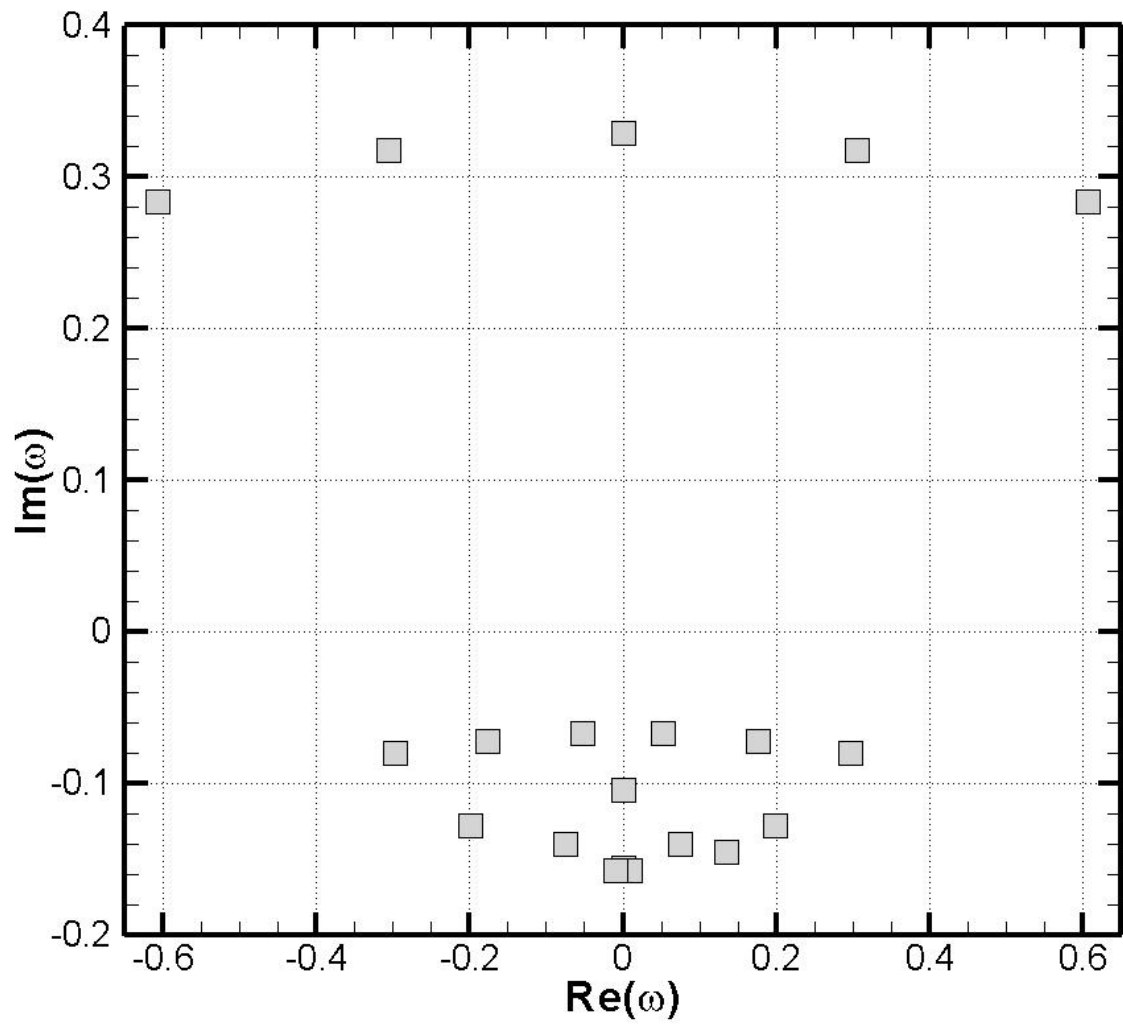


Figure 5.23 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 20.

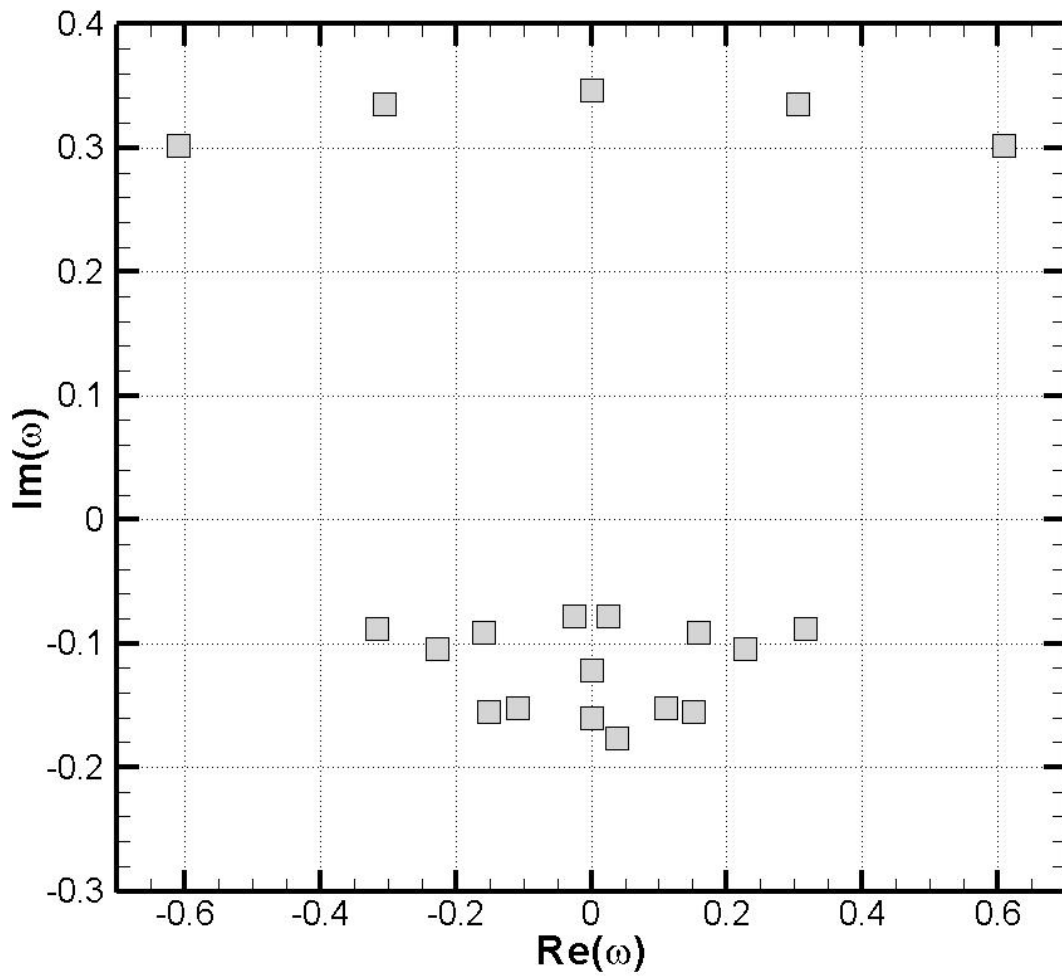


Figure 5.24 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 22.



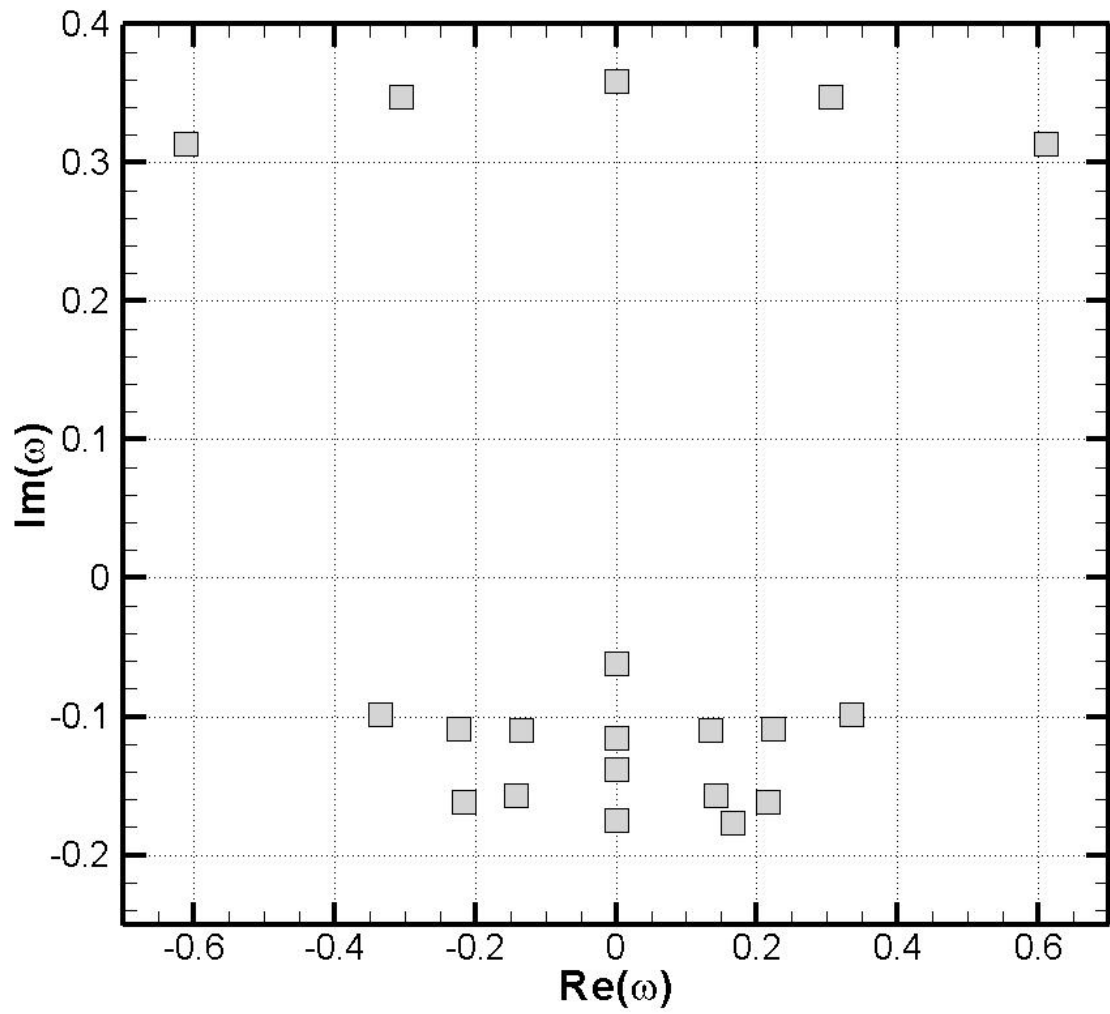


Figure 5.24 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 24.

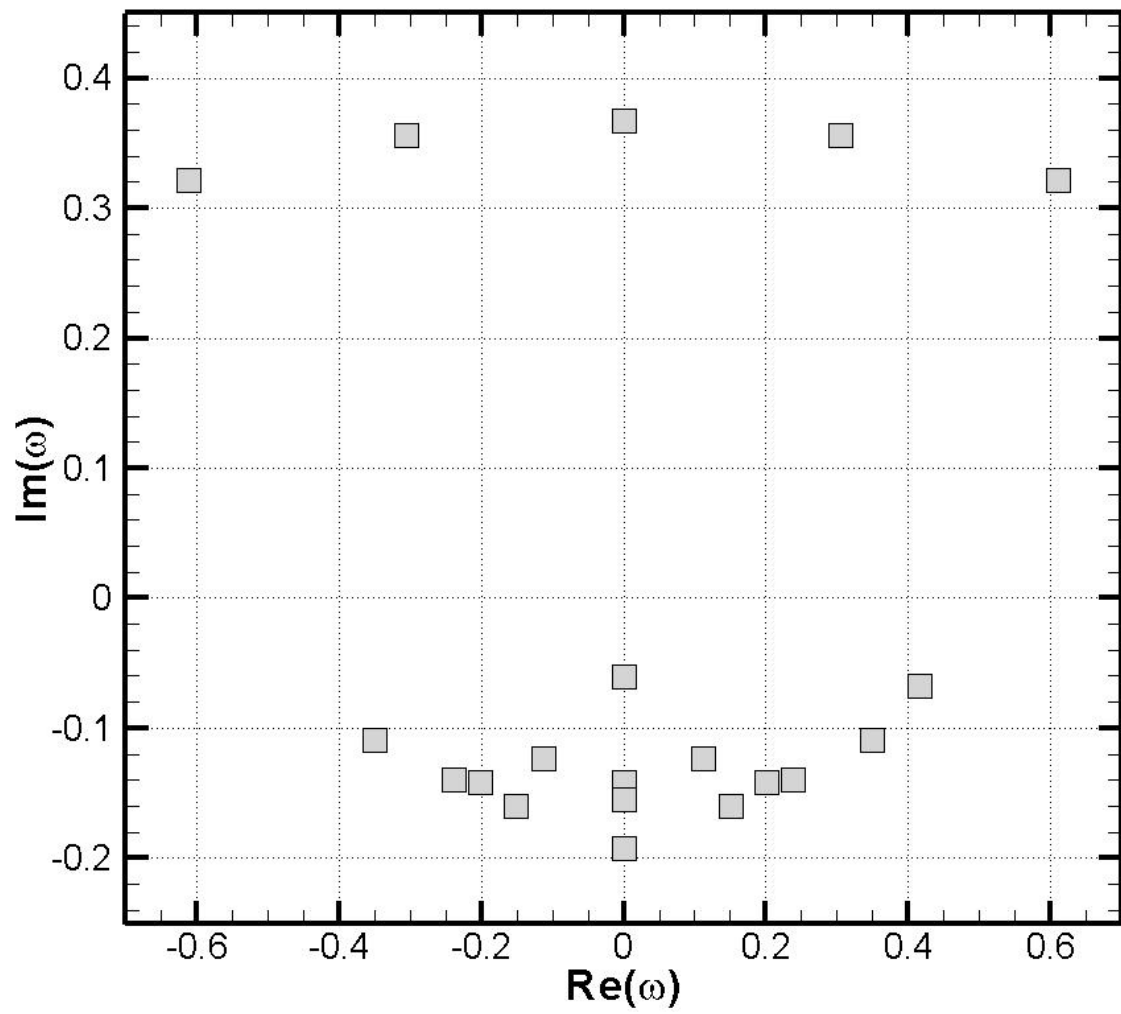


Figure 3.25 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 26.

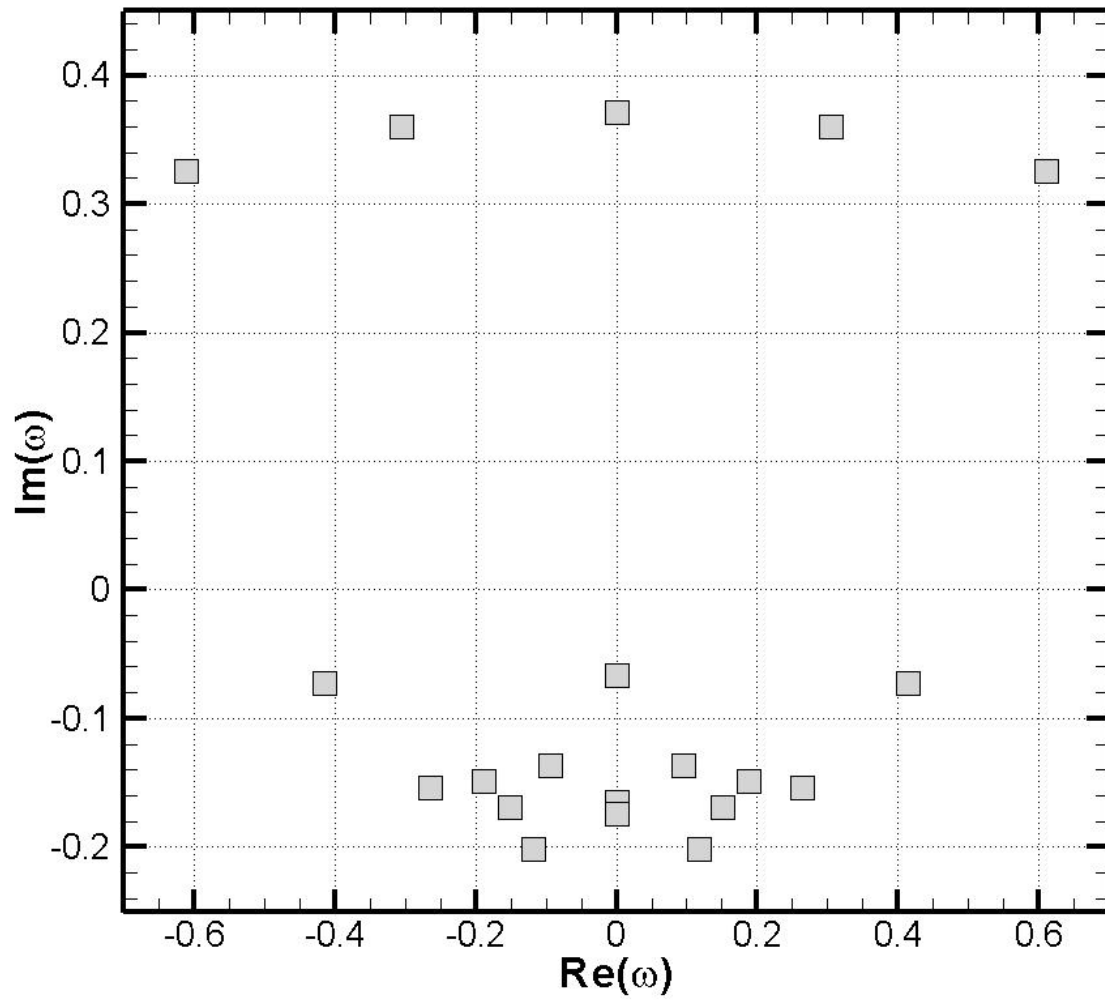


Figure 3.26 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 28.

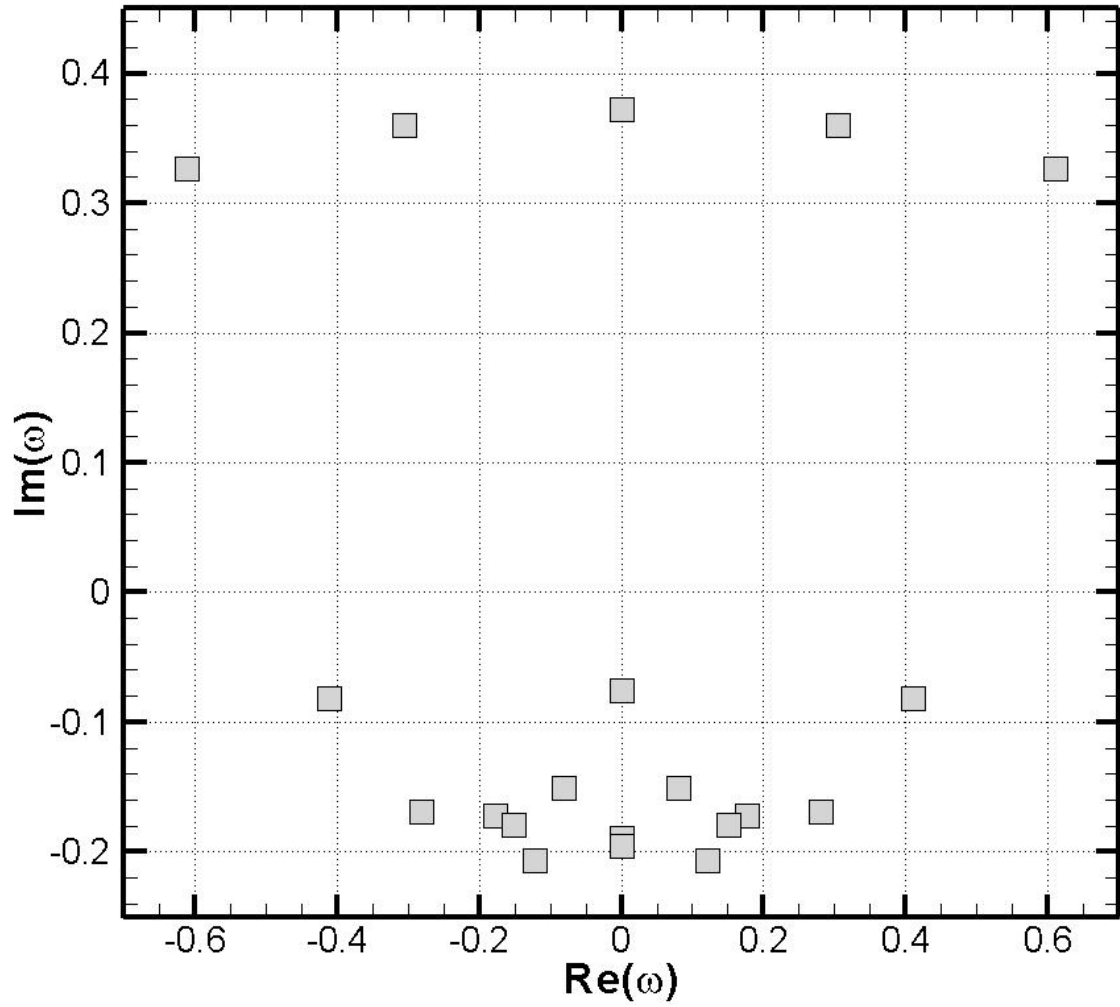


Figure 3.27 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 30.

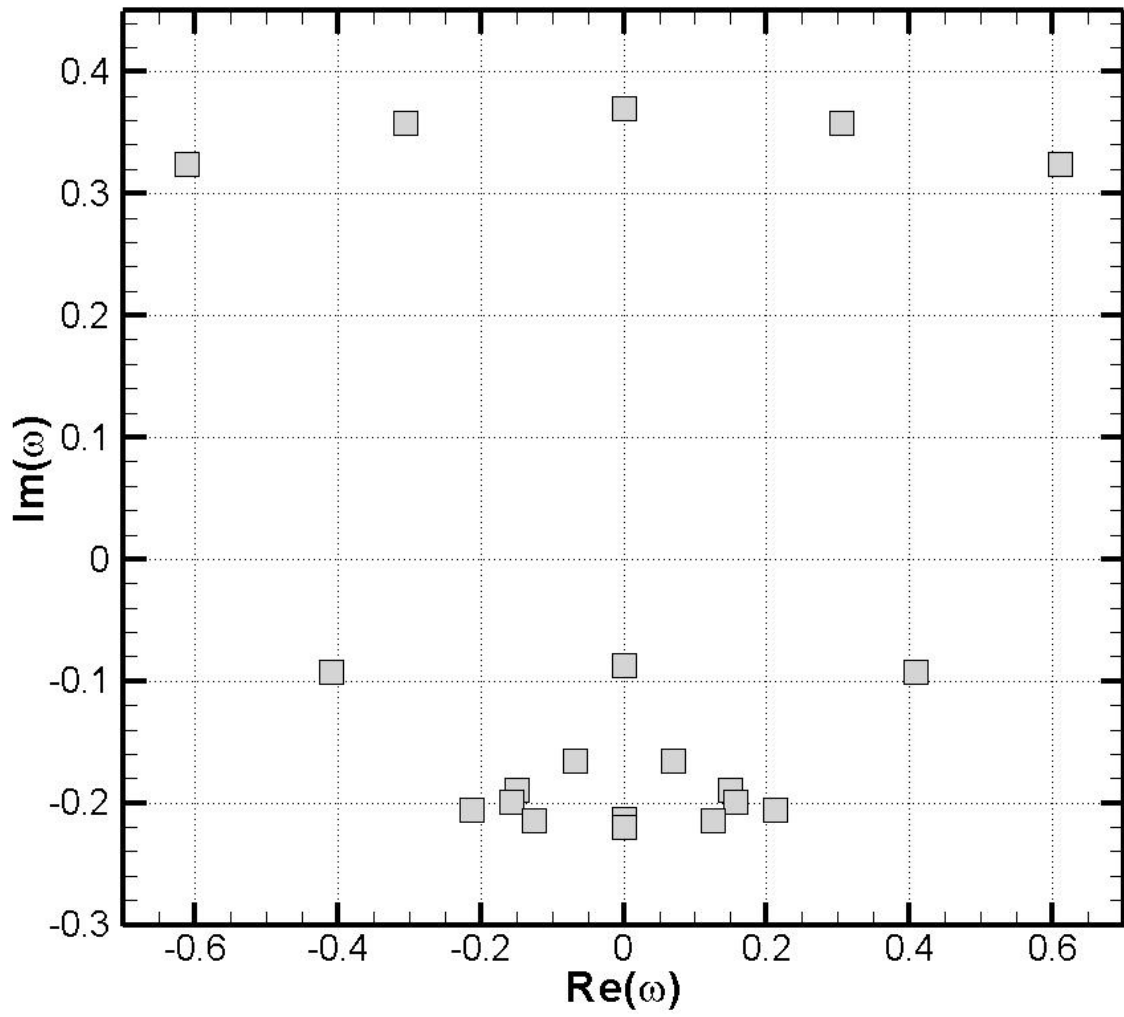


Figure 3.27 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 32.

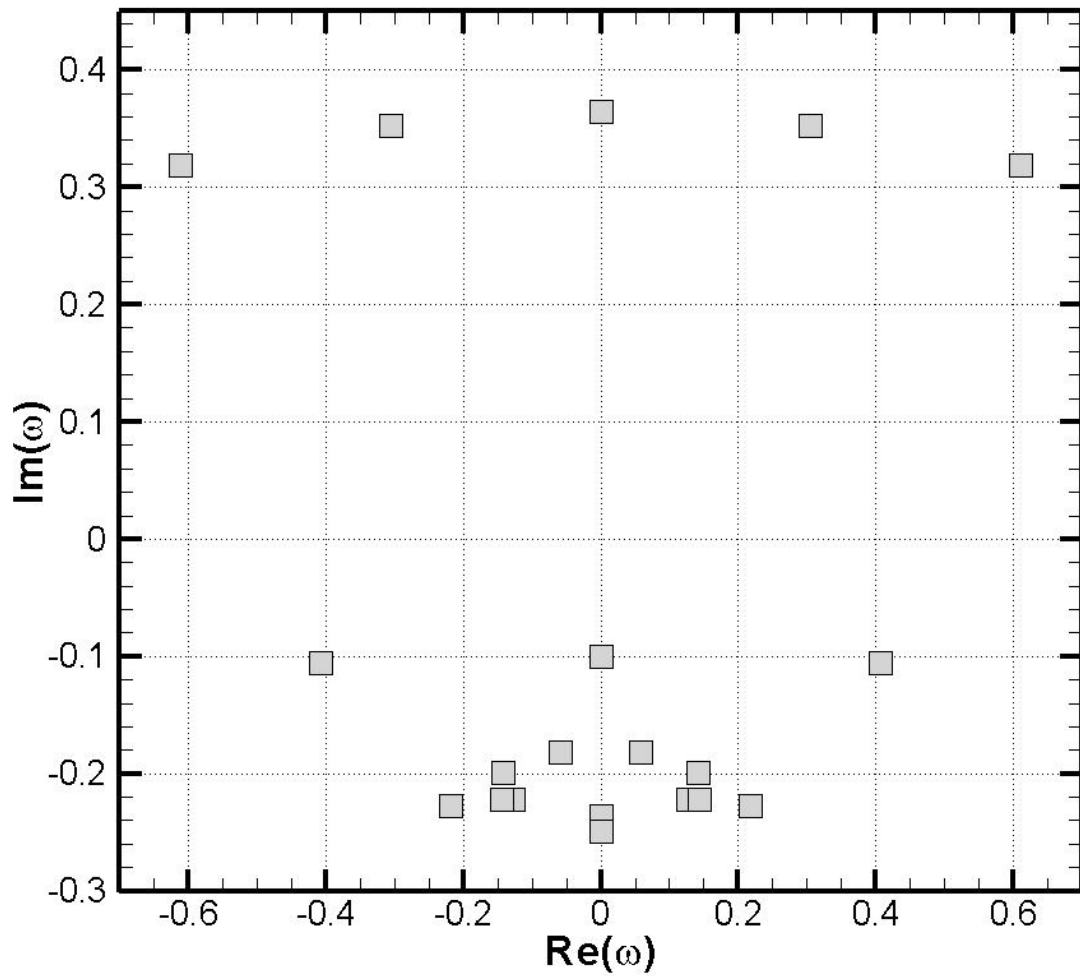


Figure 3.28 : Spectre 3D pour  $\beta$  égal à 34

### 5.3 FONCTIONS PROPRES DU MODE PRINCIPAL 3D POUR PLUSIEURS $\beta$

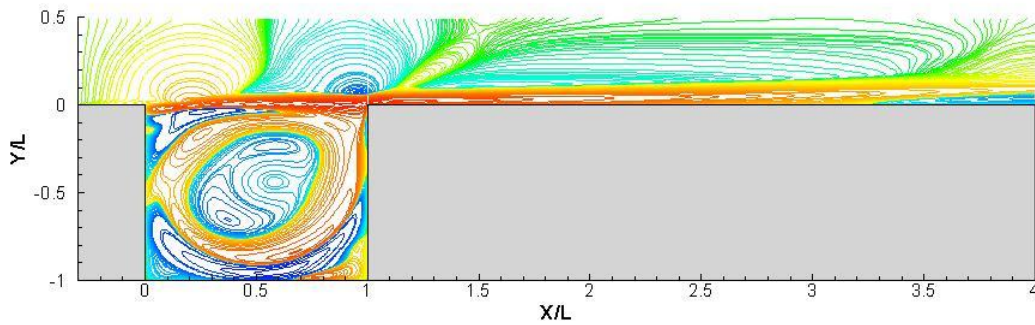


Figure 5.29 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $u$  de vitesse, relatif au mode principal ( $\beta=10$ ).

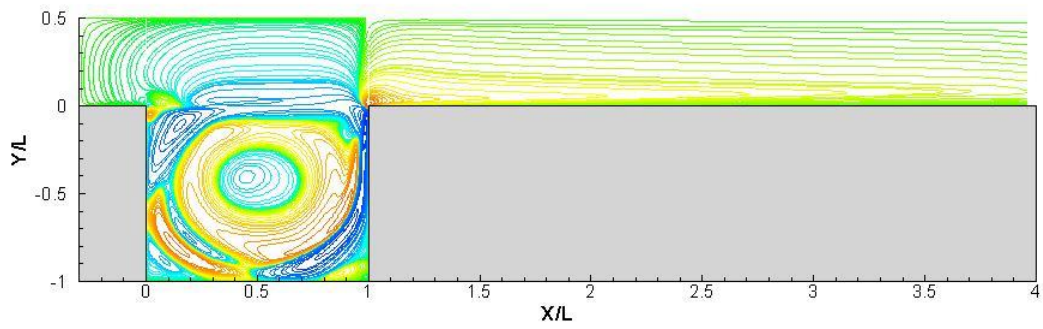


Figure 5.30 : Isolignes du champ perturbatif de la composante v de vitesse, relatif au mode principal ( $\beta=10$ ).

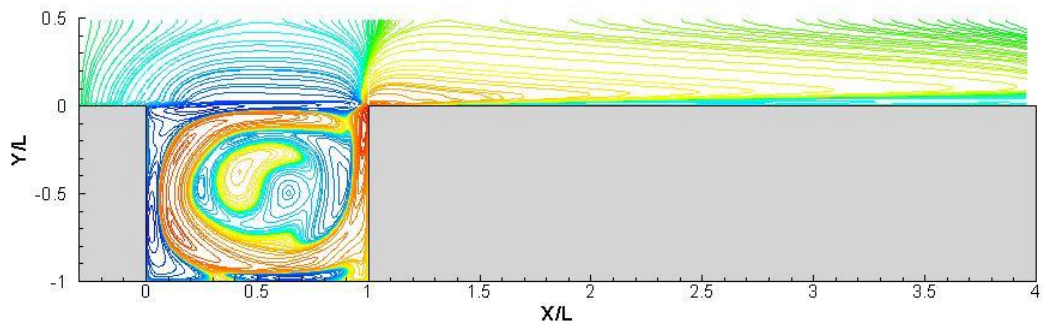


Figure 5.31 : Isolignes du champ perturbatif de la composante w de vitesse, relatif au mode principal ( $\beta=10$ ).

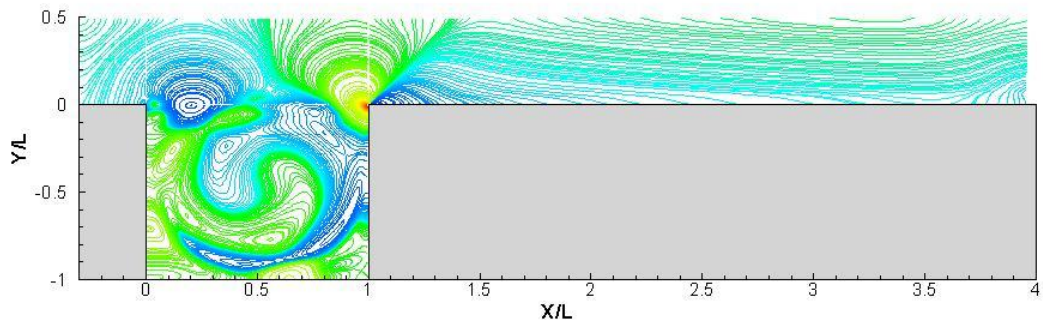


Figure 5.32 : Isolignes du champ perturbatif de la pression p, relatif au mode principal ( $\beta=10$ ).

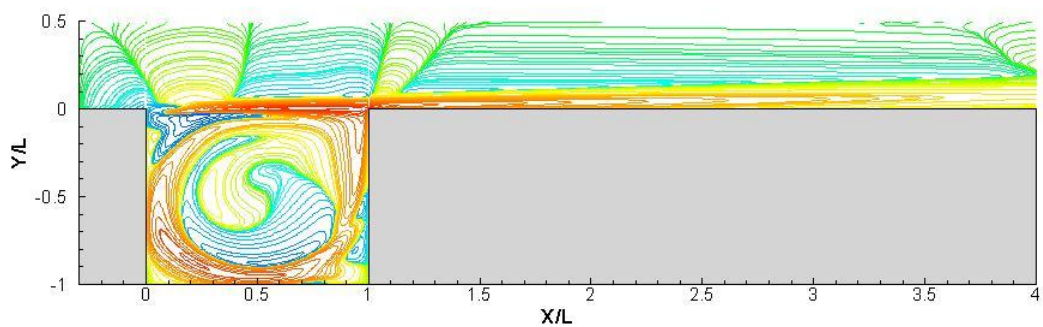


Figure 5.33 : Isolignes du champ perturbatif de la composante u de vitesse, relatif au mode principal ( $\beta=30$ ).

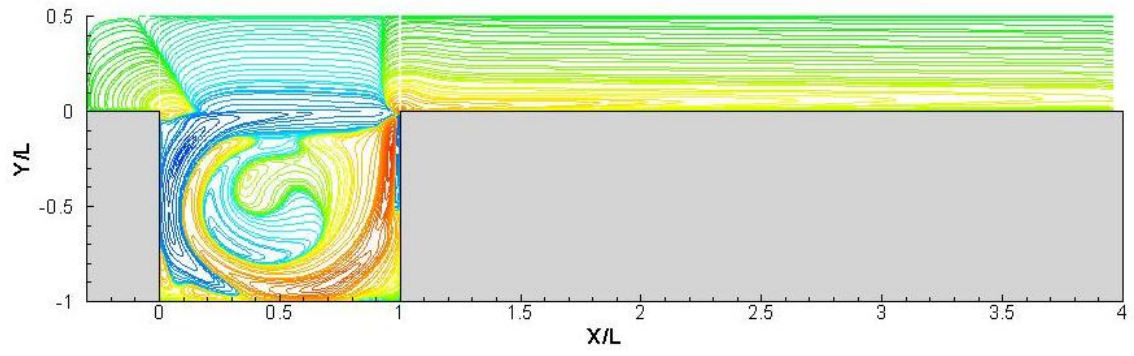


Figure 5.34 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $v$  de vitesse, relatif au mode principal ( $\beta=30$ ).

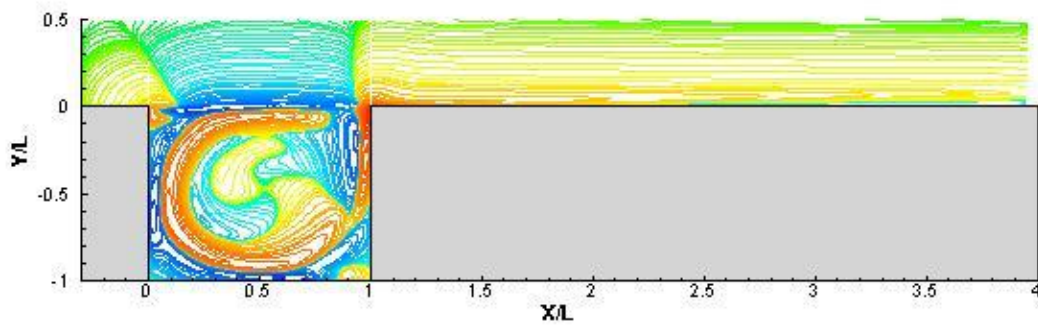


Figure 5.35 : Isolignes du champ perturbatif de la composante  $w$  de vitesse, relatif au mode principal ( $\beta=30$ ).

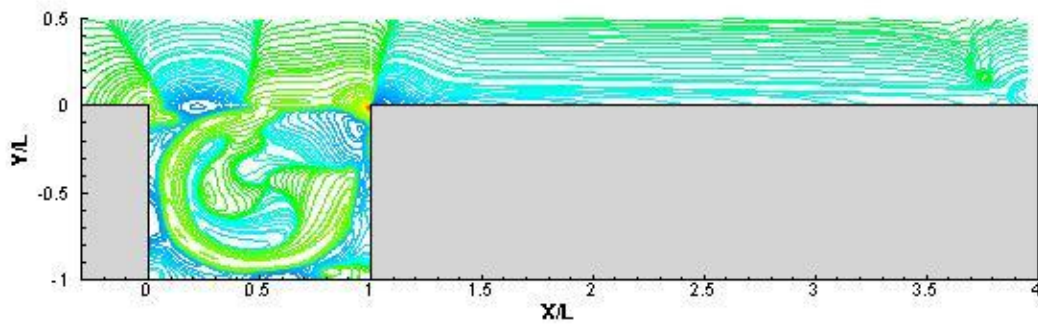


Figure 5.36 : Isolignes du champ perturbatif de la pression  $p$ , relatif au mode principal ( $\beta=30$ ).



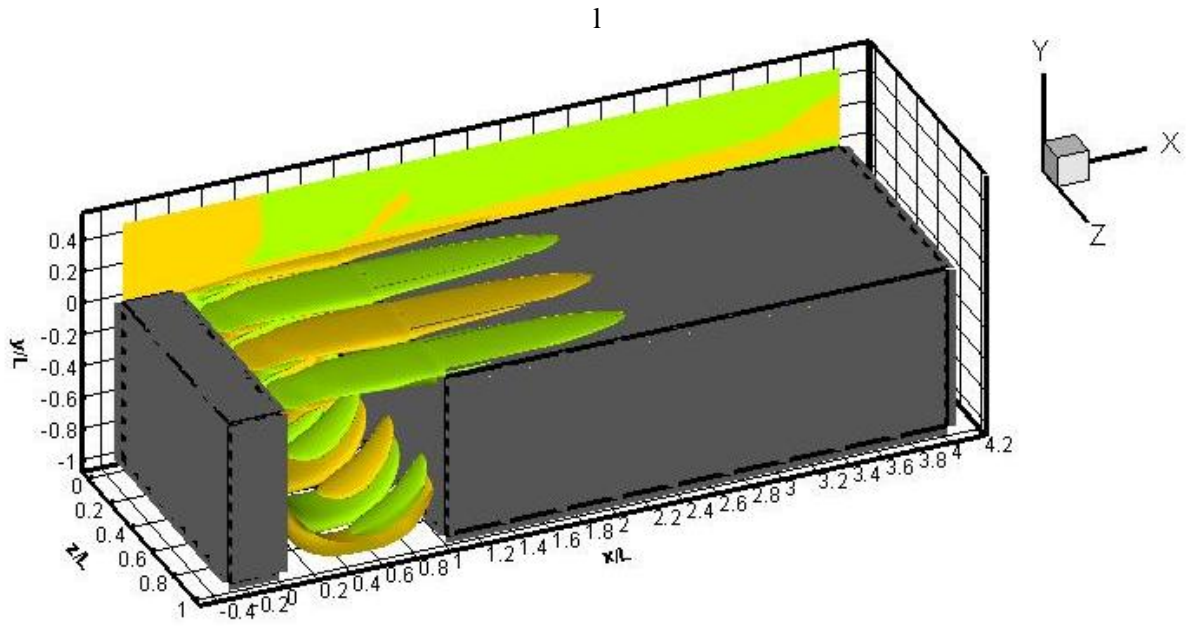


Figure 5.37: Reconstruction 3D des fonctions propres de  $u$  ( $\beta=10$ ) .

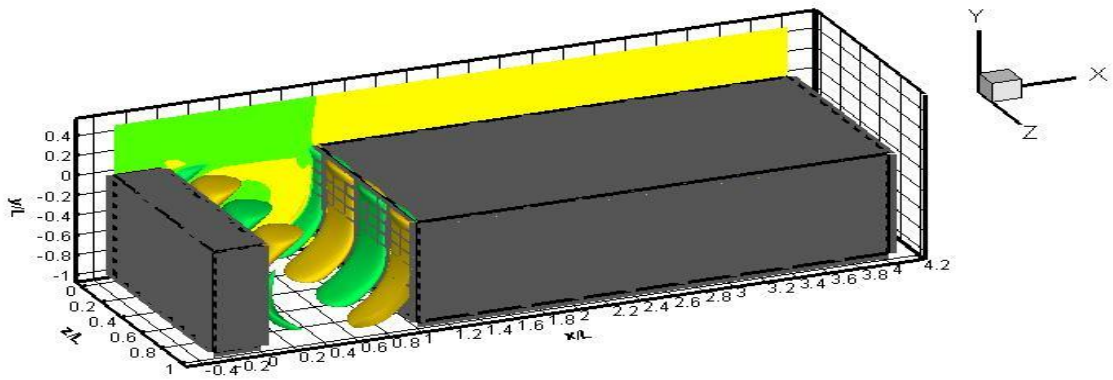


Figure 5.38 : Reconstruction des fonctions propres de  $v$  ( $\beta=10$ ) .

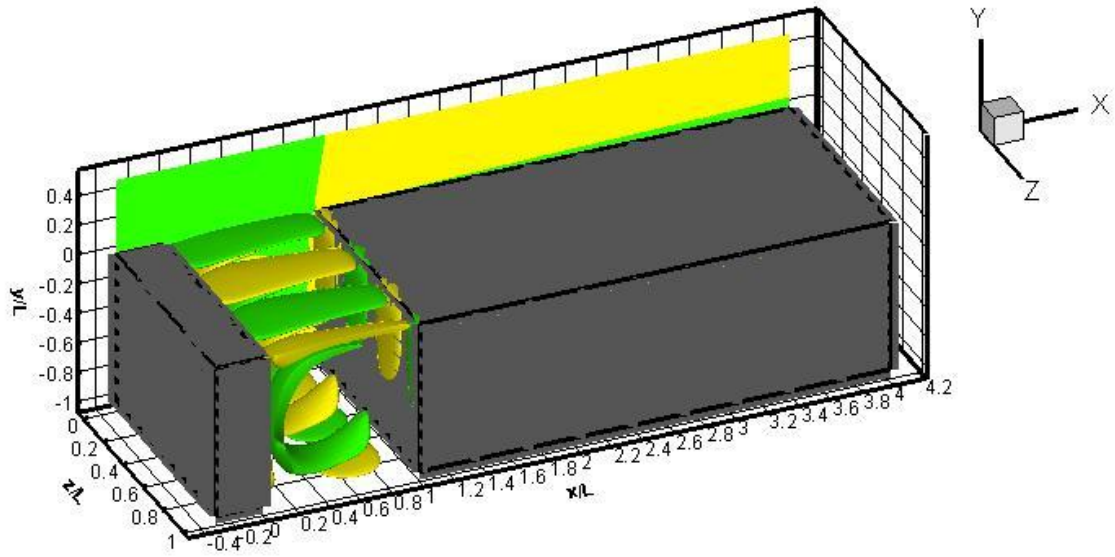


Figure 5.39 : Reconstruction des fonctions propres de  $w$  ( $\beta=10$ ) .

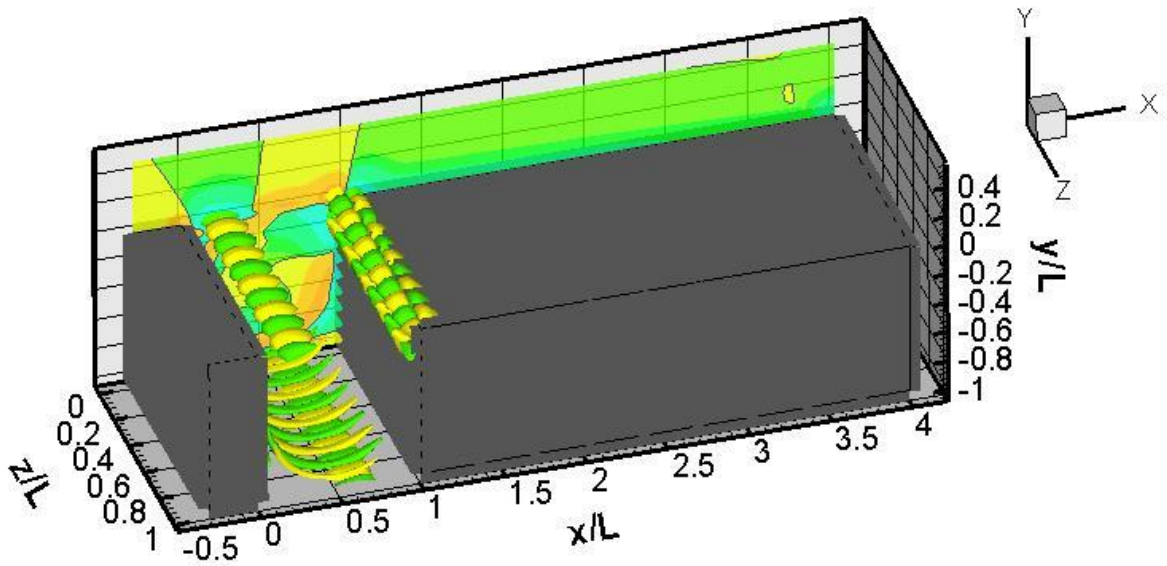


Figure 5.40 : Reconstruction des fonctions propres de  $p$  ( $\beta=10$ ) .

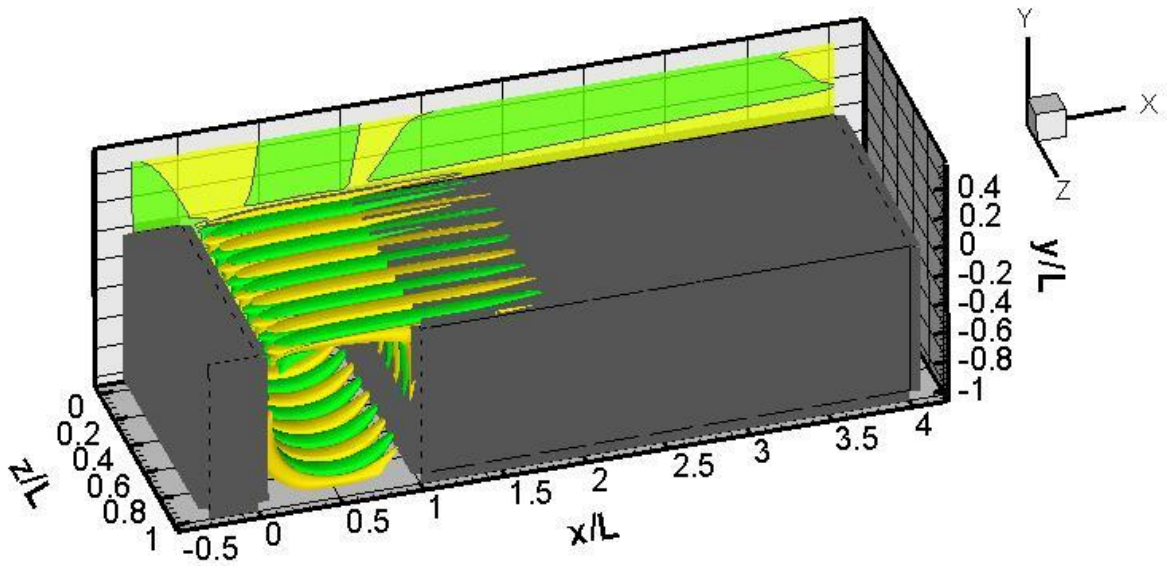


Figure 5.41 : Reconstruction des fonctions propres de  $u$  ( $\beta=30$ ) .

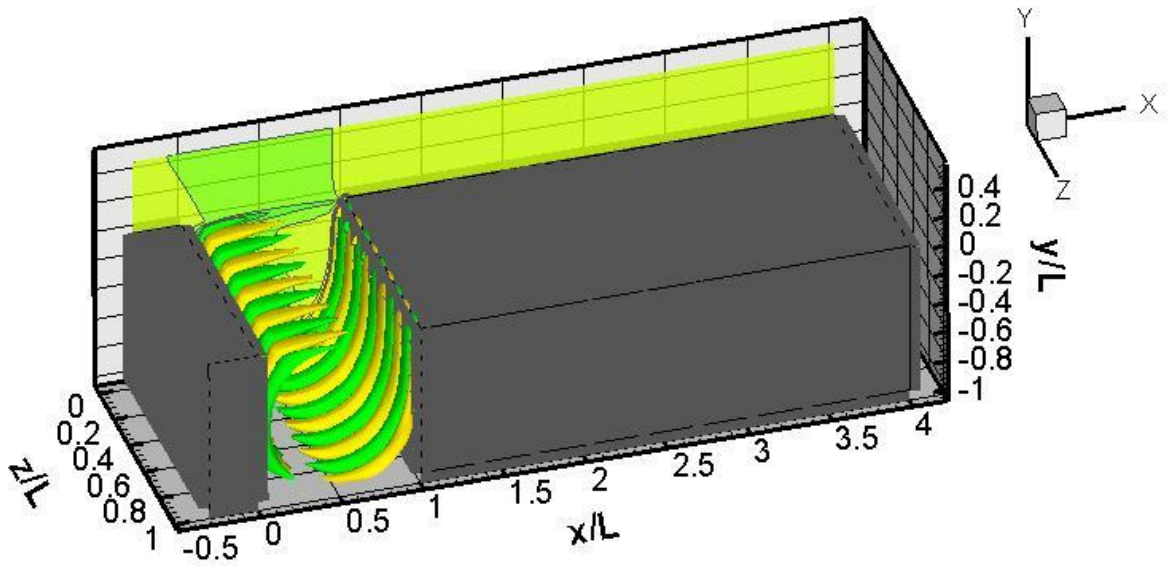
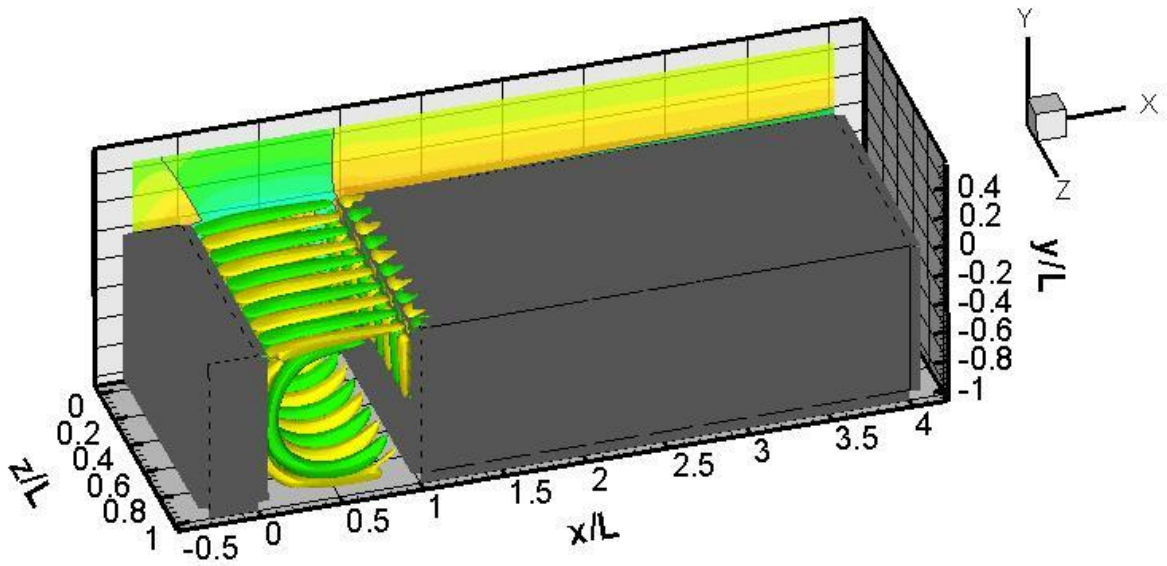


Figure 5.42 : Reconstruction des fonctions propres de  $v$  ( $\beta=30$ )



. Figure 5.43 : Reconstruction des fonctions propres de  $w$  ( $\beta=30$ ).

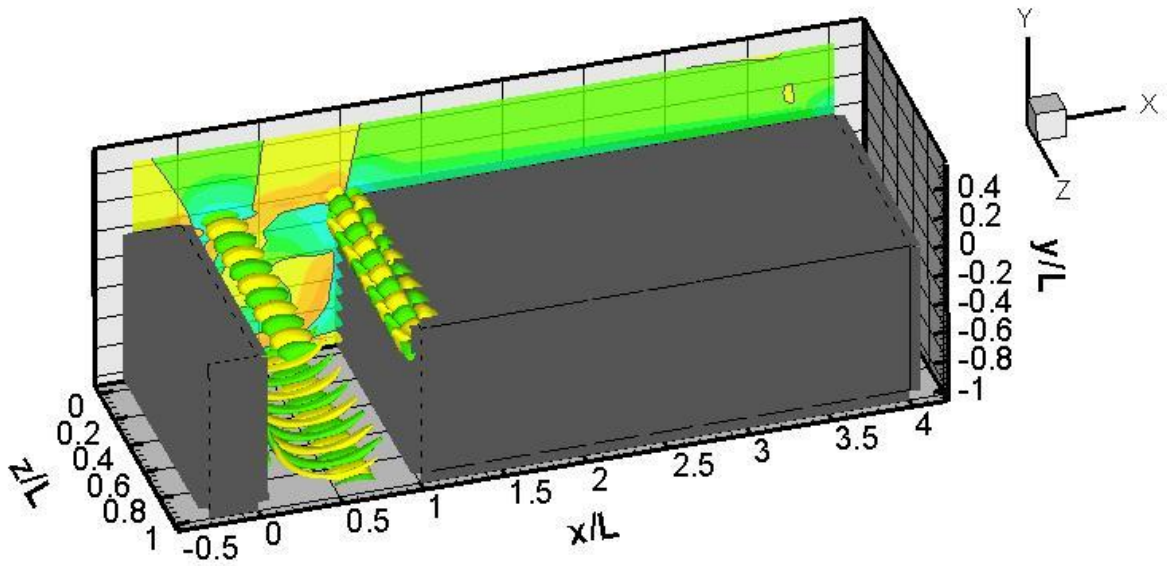


Figure 5.44 : Reconstruction des fonctions propres de  $p$  ( $\beta=30$ ).

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Barbagallo, A., Sipp, D., and Schmid, P. J., *Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models*, Under consideration for J. Fluid Mechanics.
- [2] Brès, G. A., & Colonius, T., 2008, *Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities*, J. Fluid Mechanics, 599, p. 309–339.
- [3] Corre, C., Méthodes numériques avancées pour l'aérodynamique – Schémas implicites. ENSAM, Laboratoire SINUMEF, Février 2006.
- [4] Delaporte, G., Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité. Rapport de projet de fin d'études, 2008. École Nationale Supérieur d'Arts et Métiers.
- [5] Faure, T. M., Adrianos, P., Lusseyran, F., and Pastur, L., 2007, Visualizations of the flow inside an open cavity at medium range Reynolds numbers, *Exps. Fluids*, 27, p. 2403-2411.
- [6] Gloerfelt, X., Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : simulation aéroacoustique directe et application des méthodes intégrales. Thèse de master. École Centrale de Lyon, 2001.
- [7] Gloerfelt, X., Aéroacoustique. Master FISE "Aérodynamique et Aéroacoustique", ENSAM – SINUMEF, 2009-2010.
- [8] Larchevêque, L., Simulation des Grandes Echelles de l'Écoulement au-dessus d'une cavité. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2003.
- [9] Merle, X., Résolution des équations de stabilité globale en régimes incompressible et compressible avec une méthode aux différences finies de haute précision. Thèse de doctorat. École Nationale Supérieur d'Arts et Métiers.
- [10] Michalke, *On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile*, 19 (Issue 4), 1964, 543 – 556.
- [11] Rossiter, J. E., *Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds*, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda n°3438, 1964.
- [12] Schwartz, H. & Degli-Esposti, P., Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité. Rapport de projet de fin d'études, 2008. École Nationale Supérieur d'Arts et Métiers.
- [13] Tam & Webb, 1993, *Dispersion-relation-preserving finite differences schemes for computational acoustics*. Journal of computational physics, 107, p. 262-281.
- [14] Theofilis, V., 2003, *Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows*. Progress in Aerospace Sciences, 39, p. 249-315.
- [15] Theofilis, V., *Globally unstable basic flows in open cavities*. In 6<sup>th</sup> Aeroacoustic Conference and Exhibit, 2000.
- [16] Theofilis, V. & Colonius, T., *An algorithm for the recovery of 2-and 3-D biglobal instabilities of compressible flow over 2-D open cavities*. In 33<sup>rd</sup> Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 2003.
- [17] Theofilis, V. & Colonius, T., *Three-dimensional instabilities of compressible flow over open cavities : direct solution of the biglobal eigenvalue problem*. In 34<sup>th</sup> Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 2004.