

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Automotiva

**Título: MODELAGEM E SIMULAÇÃO
COMPUTACIONAL DA FRENAGEM Á DISCO
DE UM VEÍCULO AUTOMOTIVO**

Autor: Victor de Oliveira Gonçalves Bezerra
Orientador: Prof.Dr.: Fábio Alfaia da Cunha

Brasília, DF
2023



Victor de Oliveira Gonçalves Bezerra

**Título:MODELAGEM E SIMULAÇÃO
COMPUTACIONAL DA FRENAGEM A DISCO DE UM
VEÍCULO AUTOMOTIVO**

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Automotiva) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Automotiva).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof.Dr.: Fábio Alfaia da Cunha

Brasília, DF

2023

Victor de Oliveira Gonçalves Bezerra

Título:MODELAGEM E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DA FRENAGEM A DISCO DE UM VEÍCULO AUTOMOTIVO/ Victor de Oliveira Gonçalves Bezerra. – Brasília, DF, 2023-

60 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof.Dr.: Fábio Alfaia da Cunha

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2023.

1. Modelagem numérica. 2. Transferência de calor. I. Prof.Dr.: Fábio Alfaia da Cunha. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Título:MODELAGEM E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DA FRENAGEM A DISCO DE UM VEÍCULO AUTOMOTIVO

CDU 02:141:005.6

Victor de Oliveira Gonçalves Bezerra

**Título: MODELAGEM E SIMULAÇÃO
COMPUTACIONAL DA FRENAGEM A DISCO DE UM
VEÍCULO AUTOMOTIVO**

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Automotiva) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Automotiva).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 15 de fevereiro de 2023:

Prof.Dr.: Fábio Alfaia da Cunha
Orientador

Prof.Dr.: Luciano Gonçalves Noletto
Convidado 1

Profa.Dra.: Himilsys H. González
Convidado 2

Brasília, DF
2023

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer ao meu orientador Fábio Alfaia, por sua mentoria durante todo o processo de escrita deste trabalho, por ter me recomendado o tema trabalhado neste documento. Também gostaria de agradecer aos meus pais pelo apoio que me deram durante todo o período que estive cursando Engenharia Automotiva. Por fim agradeço a UNB por me proporcionar a possibilidade de estudar engenharia.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

O sistema de freio é um dos principais sistemas do veículo que garante a segurança do motorista, então ele deve funcionar nas mais diversas condições de forma segura e eficiente. O aprimoramento do sistema de freio possibilitou que os veículos alcançassem velocidades cada vez maiores sem colocar em risco a vida dos passageiros. Uma falha muito comum para o sistema de freio é o efeito fade, onde o sistema de freio é exigido em excesso causando o aquecimento do fluido de freio e do disco ou das lonas de freio, fazendo com que elas percam suas propriedades e assim o veículo perca poder de parada. Tais falhas podem ser reduzidas se o projeto do freio for melhorado. Ante o exposto, neste estudo é apresentado um modelo teórico computacional da frenagem de um disco de freio do tipo sólido, de um FIAT Uno 1995, onde é detalhado como a energia cinética de movimento de veículo automotivo é convertida em energia térmica, e como esta energia térmica é rejeitada para o meio ambiente em regime permanente de transferência de calor. Além de ser realizada uma verificação de código pelo modelo proposto pela ASME para garantir que as equações calculadas na simulação estejam sendo calculadas de forma correta. Após a realização das simulações foi identificado que a temperatura média do disco variou entre 450 e 465 °C.

Palavras-chaves: Sistema de freio, Dissipação de calor, Disco de Freio, Simulação Computacional, Análise Termodinâmica.

Abstract

The brake system is one of the main systems of the vehicle that guarantee the safety of the driver, so it must work in the most diverse conditions in a safe and efficient way. The improvement of the brake system made it possible for vehicles to reach ever-increasing speeds without endangering the lives of passengers. A very common fault for the brake system is the fade effect, where the brake system is demanded in excess causing the heating of the brake fluid and the disc or brake linings, causing them to lose their properties and thus the vehicle, lose stopping power. Such failures can be reduced if the brake design is improved. In view of the above, this study presents a computational theoretical model of braking of a solid-type brake disc, of a FIAT Uno 1995, where it is detailed how the kinetic energy of movement of an automotive vehicle is converted into thermal energy, and how this Thermal energy is rejected to the environment in a steady state of heat transfer. In addition, a code check is performed using the model proposed by ASME to ensure that the equations calculated in the simulation are being calculated correctly. After carrying out the simulations, it was identified that the average temperature of the disk varied between 450 and 465 °C.

Key-words: Brake system, Heat dissipation, Brake disc, Computational simulation, Thermodynamics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema de freios convencional	19
Figura 2 – Componentes de um freio a tambor	20
Figura 3 – Diferentes modelos de freio a disco	21
Figura 4 – Representação do elemento geométrico utilizado para calcular a condução térmica,e balanço de energia da equação	25
Figura 5 – Representação dos fluxos de calor devido a condução, a convecção e ao atrito das pastilhas com o disco	26
Figura 6 – Diagrama de corpo livre	28
Figura 7 – Coeficientes a e b em função do tipo de pneu	29
Figura 8 – Coeficiente de atrito pneu/pista diversas condições	30
Figura 9 – Esquema problema analítico	34
Figura 10 – Malha refinada do problema de referência	36
Figura 11 – Resultados simulação do problema analítico	37
Figura 12 – (a) Elemento finito,(b) Superfície interna ao elemento,(c) Volume centrado no vértice 1.	38
Figura 13 – Dimensões disco de freio sólido Fiat Uno	39
Figura 14 – Área de aplicação do fluxo de calor na área externa do disco	40
Figura 15 – Área de aplicação do fluxo de calor na área interna do disco	41
Figura 16 – Área de aplicação da convecção forçada.	41
Figura 17 – Malha aplicada ao disco de freio	42
Figura 18 – Simulação dissipação de calor freio a disco sólido	43
Figura 19 – Teste de sensibilidade de malha	45

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados da simulação	42
Tabela 2 – Sensibilidade de malha	44

Lista de símbolos

Q_{cond}	Calor transferido
K	Condutividade térmica
A	Área da superfície
Δ_T	Variação de temperatura
Δ_x	Variação de espessura
h	Coefficiente de convecção
T_s	Temperatura superfície
T_∞	Temperatura meio ambiente
σ	Constante de Boltzman
ε	Emissividade
ρ	Massa específica
c	Calor específico
q''	Fluxo de calor
k_a	Condutividade térmica do ar
D	Diâmetro Externo
Re	Número de Reynolds
μ_{ar}	Viscosidade do ar
W	Peso do veículo
R_a	Resistência aerodinâmica
a_x	Desaceleração do veículo
F_{bf}	Força de frenagem do eixo dianteiro
F_{br}	Força de frenagem do eixo traseiro
R_{rf}	Resistência a rolagem do pneu dianteiro

R_{rr}	Resistência a rolagem do pneu traseiro
R_r	Força de resistência a rolagem
f_r	Coefficiente de resistência a rolagem
ϑ	Velocidade
A_f	Área frontal
C_x	Coefficiente de arrasto
ρ_a	Massa específica do ar
F_b	Força de frenagem
μ	Coefficiente de atrito
m	Massa do veículo
d	Distância
t_f	Tempo de frenagem
E_b	Energia cinética
$\vartheta(t)$	Velocidade
E_{bd}	Energia cinética usada por um disco de freio
P_{bd}	Potência de Frenagem
ϑ_i	Velocidade inicial
L	Espessura
$A_{contato}$	Area varrida pela pastilha

Sumário

	Introdução	15
	Objetivos	17
1	SISTEMAS DE FREIOS AUTOMOTIVOS	18
1.1	Sistema de freios hidráulico	19
1.2	Freio a tambor	20
1.3	Freio a disco	21
1.4	Problemas com freios	22
2	MODELAGEM FÍSICA E MATEMÁTICA DA FRENAGEM A DISCO	23
2.1	Condução	23
2.2	Convecção	23
2.3	Radiação	24
2.4	Equação da difusão de calor em regime permanente	24
2.5	Condições de contorno	25
2.6	Cálculo do coeficiente de transferência de calor por convecção	26
2.7	Cálculo do fluxo de calor devido a frenagem	27
2.7.1	Máxima desaceleração	28
2.7.2	Distância e tempo de frenagem	30
2.7.3	Potência de frenagem e fluxo térmico	31
3	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	33
3.1	Verificação e Validação	33
3.2	Verificação do código	34
3.3	Método computacional	37
3.3.1	Discretização do domínio	38
3.4	Definição do problema de simulação computacional	38
3.5	Contornos do disco onde são aplicados os fluxos térmicos	40
3.6	Resultados	41
4	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	47

	APÊNDICES	50
	APÊNDICE A – CÓDIGO COMPUTACIONAL	51
A.1	Código Simulação	51

Introdução

Ao longo das décadas a indústria vem melhorando a mobilidade de seus veículos, por meio do aumento de potência. Mas para esse aumento de potência ser viável, é necessário que o sistema de freio seja capaz de parar completamente o veículo, o que fez a indústria melhorar o sistema de freio para comportar o aumento de potência que os veículos vinham ganhando. Um veículo é conectado a pista por meio das forças trativas produzidas pelos pneus, qualquer frenagem, curva ou força de aceleração devem ser geradas pela área de contato do pneu com a pista (R.LIMPERT, 2011). Até mesmo se for utilizado um sistema de freio ideal, ele só é capaz de utilizar a quantidade máxima de tração fornecida pelo pneu e pista.

Então para uma condução segura de um veículo, é necessário o ajuste da direção como da velocidade para se adaptar as mudanças do tráfego. Deste modo o sistema de direção e o sistema de freios junto com os pneus são os componentes críticos mais importantes para evitar acidentes. São sistemas que devem funcionar de forma segura sob uma grande variedade de condições como : pista molhada, veículo totalmente carregado, com disco molhado entre outras condições (R.LIMPERT, 2011).

Conforme a potência dos veículos vem aumentando com o passar dos anos, o sistema de freio é obrigado a acompanhar esse aumento para garantir a segurança dos veículos. De acordo com (STEPHENS, 2006) conforme os veículos ganhavam potência, a dissipação de calor que o sistema de freio é obrigado a realizar aumentou significativamente, gerando problemas para o freio a tambor. Devido à altas temperaturas no material de fricção, o coeficiente de atrito entre o material de fricção e o tambor diminuía, reduzindo a efetividade do sistema a um ponto capaz de provocar a falha total da função.

Para contornar esse problema foi desenvolvido o sistema de freio a disco. Seu funcionamento consiste em deslocar um êmbolo, que por sua vez provoca o contato da pastilha de freio com as duas faces do disco, deste modo gerando atrito e a força necessária para reduzir a velocidade (GARDINALLI, 2005). O estudo realizado por este trabalho abrange o sistema de freios de um carro elétrico ou híbrido.

De acordo com Li.X Xu.L e Ouyang.M (2008) o sistema de freio de um veículo elétrico inclui um modo de frenagem hidráulico, um modo de frenagem elétrico e um modo híbrido. O modo tradicional de frenagem por fricção também é conhecido como modo de frenagem hidráulico, ele faz com que o veículo desacelere por meio da fricção das pastilhas de freio. A energia cinética gerada durante a frenagem rapidamente é convertida em energia térmica, o que é um desperdício já que essa energia não pode ser recuperada.

Quando o veículo utiliza o modo de frenagem elétrico, a energia da frenagem pode ser recuperada devido o motor elétrico estar realizando a frenagem. Como é o motor elétrico que esta a realizar a frenagem ele passa a atuar como um gerador elétrico, assim diminuindo a velocidade do veículo. Mas neste modo o tempo de frenagem necessário aumenta devido as limitações do motor elétrico (XU.G XU.K; ZAHID.T, 2011). Deste modo muitos veículos elétricos se utilizam do modo híbrido de frenagem onde é combinado o uso do motor elétrico, com o sistema de freio hidráulico para obter o melhor balanço entre segurança durante a frenagem e a regeneração da maior quantidade de energia possível (XU.G XU.K; ZAHID.T, 2011).

As primeiras modelagens da combustão e de outros fenômenos de transferência de calor se iniciaram nas décadas de 40 e 50 do século 20, mas os avanços dessa área de estudo foram limitados devido a capacidade de computação e das técnicas de medida. Resultados mais confiáveis começaram a surgir nas décadas de 60 e 70 devido em parte ao aumento da capacidade computacional (RAGLAND K.W.;BORMAN, 1998).

Então a partir deste ponto surgiu uma nova área de conhecimento que consistia na análise de sistemas, utilizando computadores, envolvendo escoamento de fluidos, transferência de calor e fenômenos associados passou a ser chamado de Dinâmica dos Fluidos Computacional(CFD). Deste modo este trabalho irá modelar a frenagem de um disco sólido de freio, utilizando CFD para a modelagem dos fenômenos. A simulação que será realizada será uma simulação tridimensional da troca de calor durante a frenagem de um veículo.

Objetivos

Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo geral estudar de forma teórica a frenagem a disco de um veículo automotivo, detalhando como a energia cinética de movimento de um veículo automotivo é convertida em energia térmica, e como tal energia térmica é rejeitada para o meio ambiente.

Objetivos específicos

- Apresentar os sistemas de freios veiculares automotivos e tipos de problemas;
- Modelar física e matematicamente a frenagem a disco, o que envolve a derivação da equação da taxa de transferência de calor por condução e suas condições de contorno;
- Simular em regime permanente a frenagem a disco de um veículo automotivo;

1 Sistemas de Freios Automotivos

O sistema de freio tem como objetivo principal reduzir e/ou cessar o movimento de veículos e mecanismos. O freio é um elemento que faz parte de um sistema composto de diversos tipos de componentes mecânicos cujo objetivo consiste em gerar uma força de oposição ao movimento (BOSCH.R, 2005). A ABNT (2016), define o freio como sendo uma combinação de peças cujo objetivo é a redução progressiva da velocidade de um veículo que esteja em movimento, pará-lo ou mantê-lo estacionário caso o mesmo se encontre parado.

O sistema de freio deve ser capaz de suportar tanto as forças aplicadas no veículo como o peso do próprio. Quatro fatores são indispensáveis no sistema de freio, sendo imprescindíveis na hora de projetar o sistema: peso do automóvel, a velocidade, a desaceleração e a distância de frenagem. A energia cinética em relação a velocidade, se manifesta de forma quadrática na quantidade de calor gerada no momento da frenagem, ou seja se a velocidade do veículo for duplicada, se torna necessário quadruplicar a potência de frenagem (NICOLLAZI, 2012).

Outro parâmetro importante que deve ser levado em conta na hora de projetar o sistema de freio é a desaceleração. Uma desaceleração muito intensa pode ser prejudicial para a saúde dos ocupantes e ao contrário pode ocasionar acidentes. Mas essas informações, dependem do nível de conforto, segurança e dispositivos presentes no sistema de freio. A desaceleração média deverá ser próxima de $5,8 \text{ m/s}^2$ (NICOLLAZI, 2012).

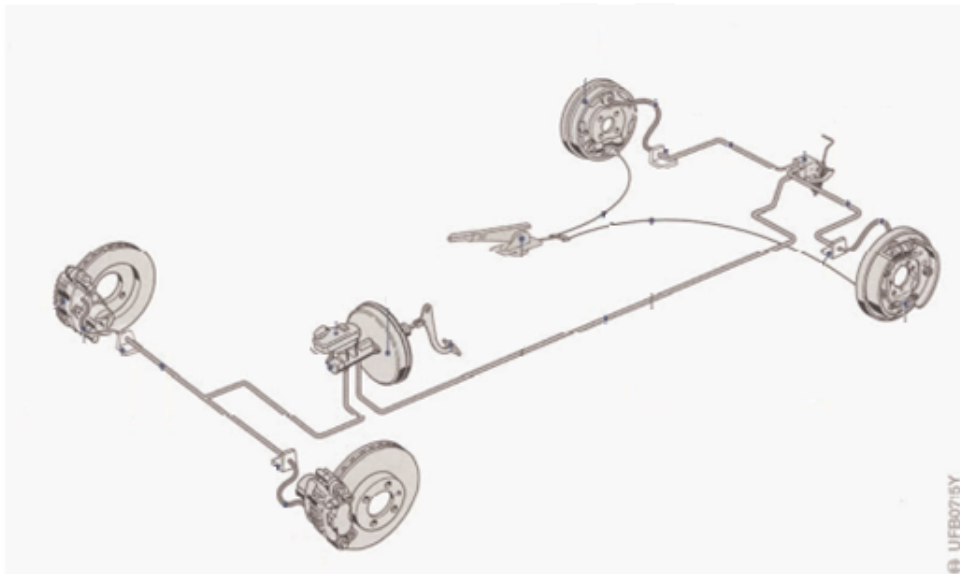
A distância de frenagem possui relação com todas as três características citadas anteriormente. Os coeficientes de atrito, a velocidade e a inércia do sistema possuem uma relação mais próxima com a distância de parada, já a desaceleração e a própria distância de frenagem, possuem uma maior importância na eficiência do freio (NICOLLAZI, 2012).

- Freio de serviço: A sua função é reduzir a velocidade do veículo até parar, de forma rápida, segura e eficaz tanto em pistas ascendentes quanto em descendentes (NICOLLAZI, 2012);
- Freio de emergência: Caso o freio de serviço venha a falhar, sua utilização deve possibilitar a para do veículo, em uma distância razoável (NICOLLAZI, 2012);

1.1 Sistema de freios hidráulico

O sistema de freio hidráulico é o mais utilizado atualmente pelos automóveis devido a diversas vantagens que este sistema apresenta como: ser silencioso, flexível, maior aplicação de força, no qual resulta em uma ação de frenagem mais equilibrada em cada roda (COSTA.P.G, 2002). Mesmo quando ocorre um desgaste irregular das lonas ou pastilhas, o esforço de frenagem só acontecerá quando todas as peças estiverem apoiadas na superfície de operação (CHOLLET.H, 2002). A força necessária para realizar a frenagem do veículo normalmente é muito maior do que o motorista é capaz de aplicar, sendo necessário um sistema auxiliar para amplificar a força inicial aplicada por meio da transmissão de pressões por meio do fluido. Na figura 1 se encontra um esquema do sistema de freios.

Figura 1 – Sistema de freios convencional



Fonte: Modificado de Bosch(2003)

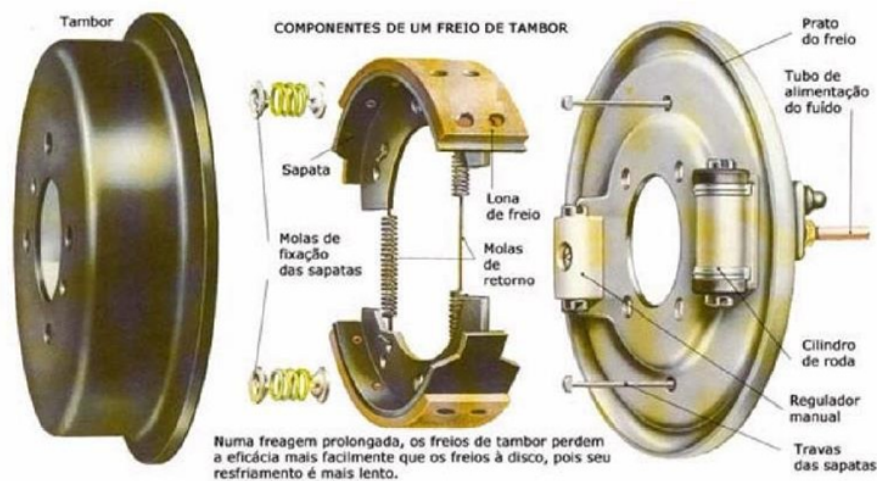
O funcionamento do freio hidráulico ocorre a partir da força aplicada pelo motorista no pedal, que é transmitida pela haste de entrada deste modo acionando o disco de reação. Depois a válvula de controle de vácuo se fecha e a válvula de ar se abre, assim fazendo com que a pressão atmosférica atue sobre o diafragma, ajudando a empurrar a haste, que empurra o pistão no cilindro mestre (GRADELLA, 2013).

1.2 Freio a tambor

Os freios a tambor são muito utilizados no eixo traseiro dos veículos populares brasileiros, por possuírem um baixo custo de produção em comparação ao freio a disco, além de possuírem uma baixa capacidade de dissipação de calor, pois a maior parte da energia durante a frenagem é transferida para o eixo dianteiro (GARDINALLI, 2005).

O conjunto do freio a tambor consiste basicamente em um tambor, comumente fabricado de ferro fundido, ligado a roda e gira concomitantemente com ela, possuindo a mesma velocidade angular, apresentado na figura 2 (YOSHIDA, 2013). O seu funcionamento ocorre a partir da força de frenagem gerada por meio do contato das lonas que revestem as sapatas na superfície interna do tambor. Isto se deve à movimentação radial gerada pelo atuador hidráulico, o cilindro de roda (KAWAGUCHI, 2005).

Figura 2 – Componentes de um freio a tambor



Fonte:Costa(2002,p.139)

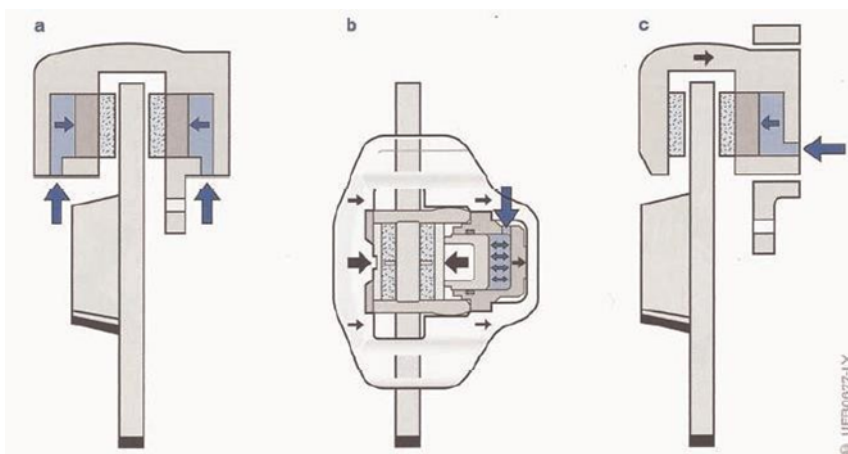
Os freios a tambor são sensíveis a temperaturas altas. A temperatura de trabalho não pode exceder um valor máximo entre 400 e 427°C. Devido ao excesso de temperatura os coeficientes de fricção são afetados e o diâmetro do tambor também aumenta com o aumento da temperatura. Devido ao aumento do diâmetro do tambor, acarreta em um contato incorreto da lona de freio com o interior do tambor, o que gera picos de pressão entre a lona e o tambor assim fazendo com que as temperaturas da lona de freio subam, deste modo perdendo eficácia na hora da frenagem (R.LIMPERT, 2011).

1.3 Freio a disco

Atualmente o tipo de freio mais utilizado pelos carros modernos é o freio a disco, graças a sua maior linearidade e eficiência. Este tipo de freio é utilizado tanto no eixo dianteiro como no traseiro, mas neste sendo menos comum no Brasil, por razões de custo (GARDINALLI, 2005). O princípio básico de funcionamento do freio a disco consiste na geração de força de frenagem através do contato das pastilhas na superfície lateral do disco devido a uma movimentação axial provida pelo êmbolo do conjunto freio a disco ou caliper (KAWAGUCHI, 2005).

A maior vantagem apresentada pelo freio a disco é sua capacidade de trabalhar em temperaturas elevadas na casa de 800°C, sem a perda de propriedades mecânicas e desempenho durante a frenagem. Outra vantagem adicional é a relação linear entre o torque de frenagem e o coeficiente de atrito entre a pastilha e o disco (R.LIMPERT, 2011). A disposição de um conjunto de freio na roda pode ser dividida em : (a) caliper fixo; (b) caliper flutuante; (c) caliper do tipo deslizante, mostrado na figura 3.

Figura 3 – Diferentes modelos de freio a disco



Fonte: Gardinalli(2005)

O caliper fixo não possui movimento relativo ao disco de freio, sendo comumente utilizado em veículos esportivos ou de competições por ser mais robusto. Este tipo de caliper pode utilizar dois ou quatro êmbolos, que atuam simultaneamente em cada lado do disco, desta forma permitindo uma pressão uniforme e maior, graças a um consumo menor de fluido, já que utiliza êmbolos de diâmetro menor, propiciando deste modo um desgaste balanceado da pastilha. Inclusive, este caliper proporciona uma dissipação de calor melhor devido à grande área de troca disponibilizada pelos êmbolos e pelas pastilhas de freio (DIULGHEROGLO, 2007).

O caliper flutuante é comumente utilizado em veículos de passeio comuns por possuírem uma menor complexidade, um menor custo e ser mais leve. Pode possuir um ou dois êmbolos e fica localizado no lado interno do cilindro da roda, movimentando a pastilha interna contra o disco de freio, por meio da aplicação da pressão hidráulica (R.LIMPERT, 2011). Ao mesmo tempo, a pressão hidráulica desloca a carcaça no sentido oposto, fazendo com que a pastilha externa se movimente contra o disco de freio (KAWAGUCHI, 2005).

O caliper deslizante é comumente encontrado em veículos brasileiros, devido o mesmo possuir uma manutenção mais simples em relação ao caliper flutuante. Seu funcionamento é similar ao flutuante, a diferença entre os calipers está em seu acionamento que ocorre por meio de guias, ao invés de pinos (GARDINALLI, 2005).

1.4 Problemas com freios

Os problemas com freios devem ser tratados com muita seriedade, já que caso a temperatura do sistema fique muito elevada isso pode acarretar, na falha parcial ou completa do sistema de frenagem trazendo consequências e reduzindo a segurança do veículo. Alguns problemas são apresentados a seguir:

- Efeito fade: É a perda temporária de frenagem que ocorre no material de atrito quando o mesmo atinge temperaturas muito altas. A alta temperatura reduz o coeficiente de atrito entre a pastilha e o disco (STEPHENS, 2006).
- Desgaste: Quando o disco de freio atinge temperaturas elevadas, é alterada a forma que a pastilha entra em contato com o disco de freio, tornando irregular o desgaste do material de fricção diminuindo a vida útil da pastilha.
- Trincas no disco: Ocorrem devido a pressão não uniforme e à grandes taxas de trabalhos aplicadas ao disco quando a pastilha entra em contato com o disco (IOMBRILLER, 2002).
- Aquecimento do cubo de roda: Devido a forma construtiva do disco de freio, é ocasionado o aquecimento do cubo de roda, prejudicando a lubrificação (NICOLLAZI, 2012).

2 Modelagem Física e Matemática da Frenagem a Disco

Na etapa de modelagem os fenômenos físicos associados a frenagem são aproximados por equações matemáticas. As propriedades físicas dos materiais também são devidamente apresentadas. Para poder analisar o processo de modelagem realizado neste trabalho, é necessário uma pequena explicação de como funcionam as principais formas de transporte de calor e energia.

2.1 Condução

A condução é a transferência de energia a partir das partículas mais energéticas de uma substância para suas vizinhas com menos energia, devido a interação entre elas. A condução pode ocorrer em sólidos, como líquidos ou gases. Nos líquidos e gases a condução ocorre a partir das colisões e difusão das moléculas em seus movimentos aleatórios. Já nos sólidos ocorre devido a uma combinação das vibrações das moléculas em uma rede e a energia é transportada pelos elétrons livres (ÇENGEL.YUNUS, 2013). As equações abaixo descrevem a taxa de condução e sua forma diferencial:

$$\dot{Q}_{cond} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2.1)$$

$$\dot{Q}_{cond} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

2.2 Convecção

A convecção é definida como o modo de transferência de energia entre uma superfície sólida e uma líquida ou gás adjacente, que está em movimento e envolve os efeitos combinados da condução e do movimento de um fluido. Quanto mais rápido for o movimento do fluido, maior será a transferência de calor por convecção. Se não houver movimentação de uma massa de fluido, a transferência de calor entra uma superfície sólida e o fluido próximo se dará por condução (ÇENGEL.YUNUS, 2013). A equação abaixo representa a taxa de transferência de calor por convecção:

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s (T_s - T_\infty) \quad (2.3)$$

2.3 Radiação

A energia emitida pela matéria na forma de ondas eletromagnéticas ou fótons devido a mudanças nas configurações eletrônicas dos átomos ou moléculas, é chamada de radiação. Diferente da convecção e da condução, a radiação não precisa da presença de um meio interveniente. Deste modo a transmissão de calor por radiação é mais rápida, e não sofre atenuação no vácuo (ÇENGEL.YUNUS, 2013). A equação 2.4 representa a taxa de radiação máxima:

$$\dot{Q}_{emissmax} = \sigma A_s T_s^4 \quad (2.4)$$

A equação 2.5 representa a taxa de radiação real dos corpos:

$$\dot{Q}_{emissmax} = \varepsilon \sigma A_s T_s^4 \quad (2.5)$$

2.4 Equação da difusão de calor em regime permanente

Podemos derivar a equação geral da condução de calor considerando um elemento geométrico retangular com comprimento Δx , largura Δy , e altura Δz (ÇENGEL.YUNUS, 2013). Com um massa específica ρ e calor específico c , o balanço de energia em um pequeno tempo Δt pode ser expresso pela equação 2.6:

$$Q_x + Q_y + Q_z - Q_{x+\Delta x} - Q_{y+\Delta y} - Q_{z+\Delta z} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad (2.6)$$

A energia do elemento de volume é dada a seguir:

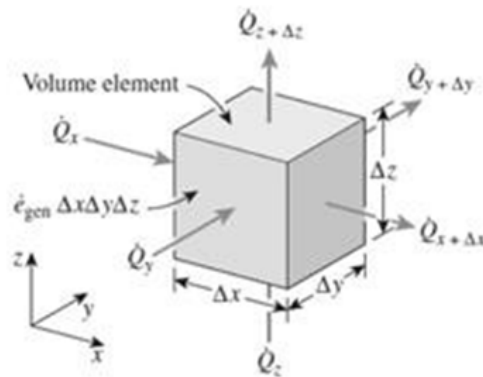
$$Q_x + Q_y + Q_z - Q_{x+\Delta x} - Q_{y+\Delta y} - Q_{z+\Delta z} = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (2.7)$$

Assim, a equação de balanço térmico fica como segue:

$$Q_x + Q_y + Q_z - Q_{x+\Delta x} - Q_{y+\Delta y} - Q_{z+\Delta z} = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Figura 4 – Representação do elemento geométrico utilizado para calcular a condução térmica, e balanço de energia da equação

$$\left(\begin{array}{c} \text{Taxa de condução} \\ \text{de calor em } x, y \text{ e } z \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de condução} \\ \text{de calor em} \\ x+\Delta x, y+\Delta y \text{ e } z+\Delta z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Taxa de} \\ \text{variação da} \\ \text{energia do} \\ \text{elemento} \end{array} \right)$$



Fonte: Çengel (2013)

Dividindo a expressão acima por $\Delta x \Delta y \Delta z$, obtemos:

$$-\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (2.9)$$

Deste modo, tomando o limite em que Δx , Δy , Δz e Δt tendem a zero, observando-se a definição de derivada e a Lei de condução de calor de Fourier, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.10)$$

Nesta primeira parte do trabalho de conclusão de curso será assumido o regime permanente. Então a equação 5 pode ser reescrita desconsiderando a acumulação transiente de energia térmica, o que resulta na seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.11)$$

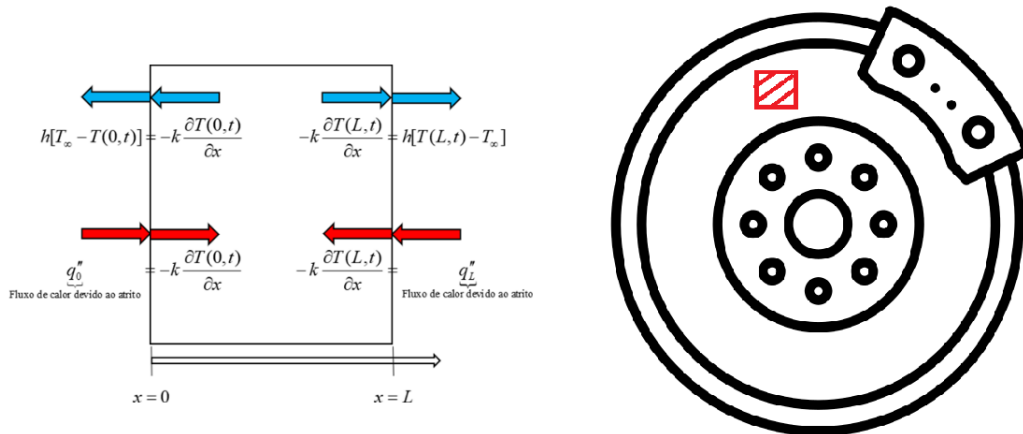
2.5 Condições de contorno

As condições de contorno associadas ao fenômeno de frenagem são de fluxos de calor aplicados na região de contato entre a pastilha e o disco:

- Fluxo de calor devido a convecção, que ocorre da superfície do sólido para o fluido adjacente ao disco, que resfria o sólido e ocorre do sólido para o meio fluido;

- Fluxo de calor devido ao atrito das pastilhas com o disco de freio, que aquece o disco sólido;

Figura 5 – Representação dos fluxos de calor devido a condução, a convecção e ao atrito das pastilhas com o disco



Fonte: Fluxo:própria, Disco:Vectoricon disponível em: flaticon.com.br

A pesar do fluxo de calor devido a convecção estar destacado no mesmo local, onde ocorre o fluxo de calor devido ao atrito na figura acima, todas as superfícies expostas do disco devem perder calor por convecção, o que foi devidamente ajustado nas simulações.

Os parâmetros mais importantes para modelagem da transferência de calor na frenagem são o coeficiente de transferência de calor por convecção h e o fluxo de calor devido a frenagem (q''). O cálculo de ambos parâmetros é detalhado a seguir.

2.6 Cálculo do coeficiente de transferência de calor por convecção

Para realização de uma simulação computacional da transferência de calor realista é necessária a obtenção do coeficiente de transferência de calor por convecção. Para o cálculo do coeficiente de transferência de calor por convecção são necessários os seguinte parâmetros:

- Propriedades do fluido (massa específica, condutividade térmica, viscosidade e calor específico);
- Geometria da superfície (Cilíndrica ou Plana);
- Condição de escoamento (Turbulento ou laminar);

As equações desta parte do trabalho foram obtidas de maneira experimental e não se aplicam para os freios a disco que não estão obstruídos pelo pneu, pelo aro ou pela pinça (R.LIMPERT, 2011). No entanto, o autor afirma que os resultados obtidos são apenas uma aproximação e que podem ser obtidos valores que estejam de 10 a 30% fora da realidade.

Para calcular o valor do coeficiente de convecção (h) por meio das equações 2.12 e 2.13, dependerá do tipo de escoamento (laminar ou turbulento) (R.LIMPERT, 2011).

- Escoamento Laminar

$$h = 0,70 \left(\frac{k_a}{D} \right) R_e^{0,55} \quad (2.12)$$

- Escoamento Turbulento

$$h = 0,04 \left(\frac{k_a}{D} \right) R_e^{0,8} \quad (2.13)$$

Onde (D) é o diâmetro externo; (k_a) condutividade térmica do ar; e o (R_e) número de Reynolds, sendo que , para o escoamento turbulento o valor deve ser de $R_e > 2,4 \cdot 10^5$. O número de Reynolds pode ser calculado por $R_e = \frac{\rho D \omega}{\mu_a}$, mas R.Limpert (2011) utiliza a proposta apresentada por Kreith et al.(2016) para utilizar o número de Reynolds rotacional, assim bastando ter a velocidade rotacional inicial do pneu, pode-se obter o número de Reynolds e calcular o coeficiente convectivo.

$$R_{ew} = \frac{w_{inicial} D \rho}{\mu_{ar}} \quad (2.14)$$

Onde (D) diâmetro da peça; (ω) velocidade angular; (μ_{ar}) viscosidade do ar; (R_e) número de Reynolds e (ρ) é a massa específica do fluido.

2.7 Cálculo do fluxo de calor devido a frenagem

A dinâmica de frenagem é uma das características mais importantes do comportamento de um veículo que afetam sua segurança. Com a ênfase global em segurança de tráfego diversas ações estão sendo tomadas ao redor do globo para aumentar o desempenho da dinâmica de frenagem, em prol de atender os padrões de segurança impostos ao sistema de freio em todo o planeta (J.Y.WONG, 2008).

Os aspectos de maior interesse na dinâmica de frenagem são:

- Máxima desaceleração;

- Distância de Frenagem;
- Tempo de Frenagem;

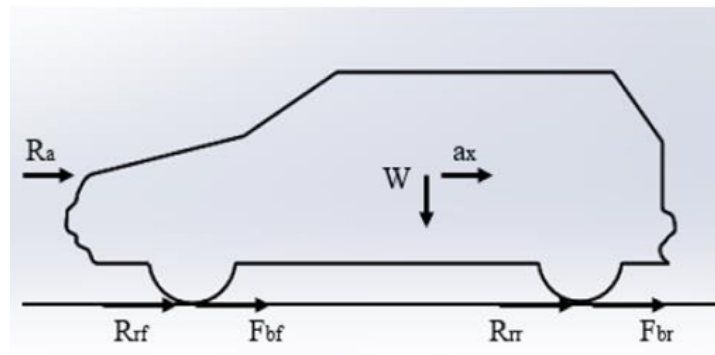
Estes parâmetros dependerão de fatores como o tipo de freio usado, distribuição da força de frenagem, geometria do veículo e as características do pneu/pavimento (NETO, 2000).

2.7.1 Máxima desaceleração

Na hora de se projetar um sistema de freio, é importante impedir que ocorra o travamento antecipado das rodas em um dos eixos. Principalmente o traseiro já que de acordo com J.Y.Wong (2008), isso pode acarretar na perda de estabilidade de direção do veículo. Caso ocorra o travamento antecipado do eixo dianteiro, irá ocasionar uma perda do controle de direção, impedindo ao condutor do veículo a realização de manobras neste determinado instante, porém não haverá uma perda de estabilidade direcional.

Utilizando-se da segunda lei de Newton podemos modelar a desaceleração, sendo que as principais forças a serem consideradas nesse trabalho para o processo de desaceleração do veículo são: (W) peso do veículo, (R_a) resistência aerodinâmica; (a_x) desaceleração do veículo, (F_{bf}) força de frenagem do eixo dianteiro, (F_{br}) força de frenagem do eixo traseiro, (R_{rf}) resistência a rolagem do pneu dianteiro, (R_{rr}) resistência a rolagem do pneu traseiro, que são mostradas na figura abaixo:

Figura 6 – Diagrama de corpo livre



Fonte:Hoffman(2018)

Segundo Hoffman (2018) como simplificação, as forças de resistência a rolagem podem ser consideradas iguais para os dois eixos (R_r), que pode ser calculada com o coeficiente de resistência à rolagem (f_r) multiplicado pelo peso do veículo, segundo a equação 2.15:

$$R_r = f_r W \quad (2.15)$$

Segundo Nicollazi (2012) o coeficiente de resistência à rolagem, considerando o efeito da velocidade (v), pode ser calculado pela equação 2.16:

$$f_r = a + b \left(\frac{v}{100} \right)^2 \quad (2.16)$$

Os coeficientes a e b variam de acordo com tipo de pneu e são apresentados na figura x, onde os valores de a são maiores para pneus de alta histerese, que é a capacidade do pneu em deformar-se e aquecer quando entra em contato com a pista, consumindo energia em forma de calor. Neste trabalho serão utilizados os coeficientes para pneus normais.

Figura 7 – Coeficientes a e b em função do tipo de pneu

	a	b
Pneus normais	0,0150	0,052
Pneus de alta histerese	0,0258	0,052

Fonte:Nicolazzi et al.(2012)

De acordo com (J.Y.WONG, 2008), a resistência aerodinâmica pode ser calculada através da equação 2.17:

$$R_a = \frac{1}{2} \rho_a v^2 C_x A_f \quad (2.17)$$

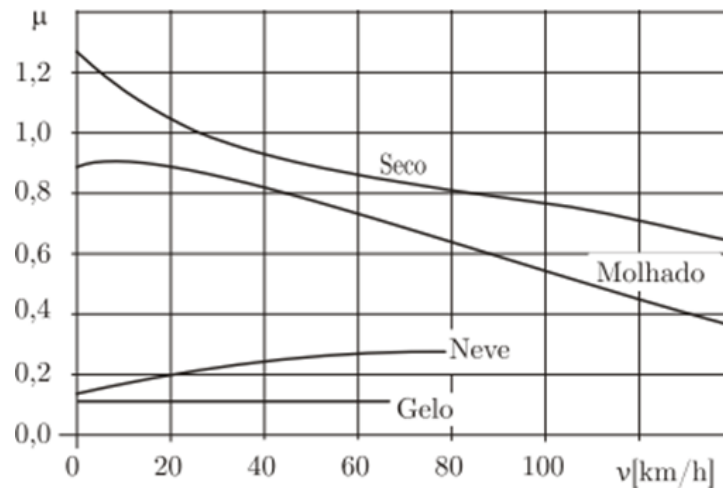
Já a força de frenagem pode ser calculada pela equação 2.18 (J.Y.WONG, 2008):

$$F_b = F_{bf} + F_{br} = W \mu \quad (2.18)$$

Onde (μ) representa o coeficiente de atrito entre pneu/pista. Neste trabalho será utilizada uma simplificação onde a força de frenagem, mostrada na equação 2.18, não ocasionará o travamento das rodas.

Diversos fatores afetam o coeficiente de atrito entre pneu/pista. Mas os principais que afetam o coeficiente são: o tipo de pista, tipo de pneu, velocidade do veículo e estado da banda de rodagem. Valores do coeficiente de atrito entre pneu/pista em função da velocidade para os diversos tipos de pista são apresentados na figura 8 (NICOLLAZI, 2012).

Figura 8 – Coeficiente de atrito pneu/pista diversas condições



Fonte: Nicolazzi et al. (2012)

Para este trabalho, o valor do coeficiente de atrito entre pneu/pista a ser utilizado será 0,8, que corresponde a uma velocidade aproximada de 100 km/h em pista seca. Com as informações obtidas, a expressão para calcular a desaceleração do veículo pode ser obtida ao se realizar o somatório das forças. A expressão se apresenta na equação 2.19.

$$a_x = \frac{R_a + R_r + F_b}{m} \quad (2.19)$$

Assumir que as forças atuando no veículo durante a frenagem são constantes, é uma simplificação válida (T.D.GILLESPIE, 1992). Esta simplificação será adotada neste trabalho.

2.7.2 Distância e tempo de frenagem

A distância de frenagem é um aspecto importante a se levar em consideração na hora de projetar o sistema de freio. Ela se relaciona diretamente com o tempo do processo de frenagem, que é a soma do tempo de reação do motorista com o tempo que os freios estão acionados. Como o foco deste trabalho é o estudo da dissipação térmica em um disco de freio, o tempo de reação não será levado em conta.

De acordo com (T.D.GILLESPIE, 1992), o cálculo da distância (d) e tempo de frenagem (t_f) podem ser expressados pelas equações 2.20 e 2.21 respectivamente:

$$d = \frac{v^2}{2a_x} \quad (2.20)$$

$$t_f = \frac{v}{a_x} \quad (2.21)$$

2.7.3 Potência de frenagem e fluxo térmico

Durante a frenagem, a energia cinética do veículo é convertida em energia térmica devido ao atrito gerado entre a pastilha e o disco. A energia cinética (E_b) pode ser calculada pela equação 2.22 (R.LIMPERT, 2011).

$$E_b = \frac{km\vartheta(t)^2}{2} \quad (2.22)$$

No qual $\vartheta(t)$ é a velocidade do veículo variando com o tempo e (k) indica uma correção para a massa de inércia dos componentes do veículo que sofrem rotação, variando entre 1,05 e 1,15 para veículos leves. Neste trabalho, será utilizado um valor intermediário de $k = 1,10$.

O foco da análise deste trabalho é analisar apenas um disco, assim a equação 2.22 pode ser reescrita multiplicando por $\frac{1}{4}$ caso a frenagem se mantenha igual nas quatro rodas. No entanto, (NETO, 2000) fala que os freios dianteiros são responsáveis por 65 – 85% do trabalho em uma frenagem de emergência. Já Silva (2016), fala que os freios são responsáveis por 70% da frenagem total aproximadamente.

Deste modo a porcentagem de energia cinética que será usada por um disco de freio (E_{bd}) é 35%, portanto a equação 2.22 pode ser reescrita como:

$$E_{bd} = \frac{(0,7E_b)}{2} \quad (2.23)$$

Aplicando a energia cinética em apenas um disco de freio, é possível obter a (P_{bd}) potência de frenagem, que é a (E_{bd}) energia cinética no eixo dianteiro sobre o (t_f) tempo de frenagem, conforme a equação 2.24:

$$P_{bd} = \frac{(dE_{bd})}{dt} = \frac{E_{bd}}{t_f} \quad (2.24)$$

Como a desaceleração é previamente calculada, ela será considerada constante durante todo o processo de frenagem. A velocidade $\vartheta(t)$ é mostrada na equação 2.25:

$$\vartheta(t) = \vartheta_i - a_x t_f \quad (2.25)$$

Realizando as substituições pertinentes nas equações 2.14 - 2.16 possibilita obter a potência de frenagem final aplicada no disco, mostrada na equação 2.26:

$$P_{bd} = \frac{0,7kma_x(\vartheta_i - a_x t_f)}{2} \quad (2.26)$$

Um ponto importante para se levar em conta é que as pastilhas de freio não trabalham de maneira igual na parte externa e interna do disco, devido à uma perda de paralelismo causada pelo contato com o disco de freio, sendo que há uma maior tendência de haver um contato maior na parte externa do disco, gerando deste modo mais fluxo de calor nessa região (CIOLFI, 2010).

Neste projeto, as áreas de contato externa e interna são consideradas iguais, mas o fluxo de calor calculado em cada pista irá seguir os resultados do autor citado, no qual a potência de frenagem tanto na pista externa quanto na interna correspondem a 57,5 e 42,5% respectivamente. Portanto a equação 2.26 pode ser reescrita como:

$$P_{bdexterna} = 0,575P_{bd} \quad (2.27)$$

$$P_{bdinterna} = 0,425P_{bd} \quad (2.28)$$

Com as equações 2.27 e 2.28, se torna possível obter o fluxo de calor aplicado em cada uma das pistas do disco de freio durante a frenagem. No qual a potência de frenagem em cada pista deve ser dividida pela ($A_{contato}$) área do disco onde é aplicada a fricção, obtendo:

$$q''_{externo} = \frac{P_{bdexterna}}{A_{contato}} \quad (2.29)$$

$$q''_{interno} = \frac{P_{bdinterna}}{A_{contato}} \quad (2.30)$$

3 Simulação Computacional

As simulações computacionais foram realizadas com um código programado na linguagem do software Matlab, desenvolvido em [Els \(2016\)](#) e aprimorado em [Els P.P.D \(2020\)](#). Algumas adaptações tiveram que ser realizadas no código computacional original para uso no presente estudo. Todas as etapas da simulação são apresentadas a seguir. Antes de aprofundar a explicação sobre as etapas da simulação, será necessário informar alguns dados que foram utilizados para obter o fluxo de calor e o coeficiente de convecção:

3.1 Verificação e Validação

Antes de iniciar a simulação da frenagem do disco, é necessário realizar uma verificação para saber se o código está conseguindo resolver as equações da simulação de forma correta. A "ASME"(Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos) propôs um padrão para a verificação e validação (V&V) em dinâmica dos fluidos computacional (CFD) e em transferência de calor computacional (CHT). A preocupação do V&V é a avaliação da precisão atingida pela simulação computacional([ASME, 2009](#)).

No V&V o objetivo principal é a validação, que pode ser definida como o processo de que determina o quão próximo, o modelo da simulação está de representar o mundo real a partir da perspectiva do uso pretendido do modelo. No entanto a validação precisa ser precedida por uma verificação do código e uma verificação da solução gerada. A verificação do código garante que o código resolve precisamente o modelo matemático usado no mesmo e que está livres de erro no código([ASME, 2009](#)).

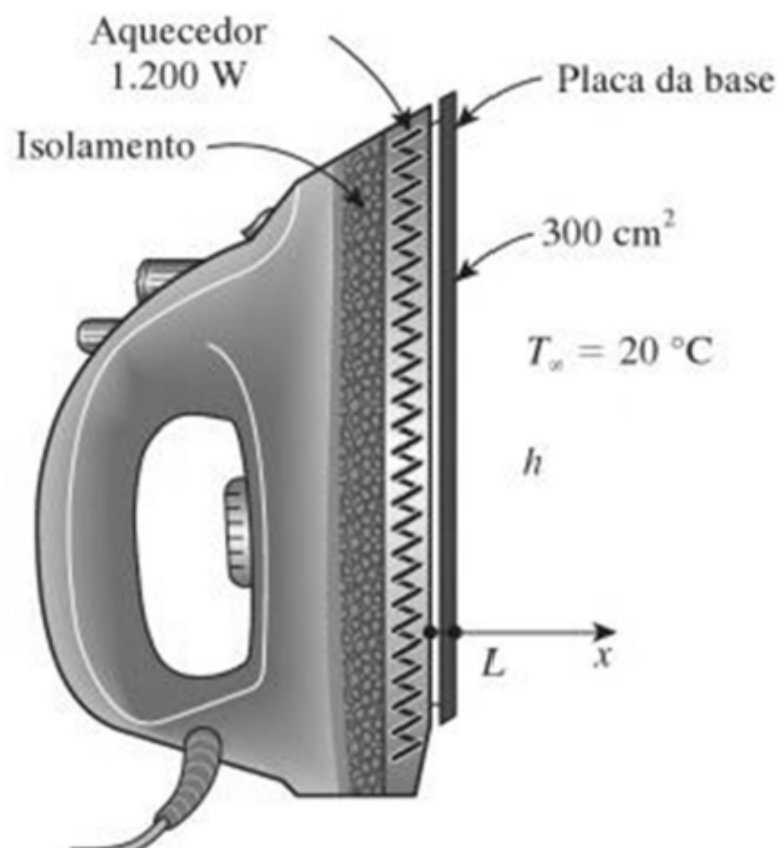
A verificação de solução estima a precisão numérica dos resultados dos cálculos feito pela simulação. Para determinar a veracidade do código, deve ser feito por meio de testes sistemáticos de discretização de convergência e monitorando a convergência das soluções para uma solução referência. A melhor solução referência que pode ser usada é uma solução analítica([ASME, 2009](#)).

3.2 Verificação do código

Para verificar se o código da simulação está realizando os cálculos corretamente, será utilizado um problema com solução analítica, para ser resolvido pelo código e assim ser possível comparar o resultado entregue pela simulação.

O problema que será resolvido será o seguinte: Considerando uma placa de base de um ferro de passar de 1200W possuindo uma espessura de $L=0,5\text{cm}$, área de base $A=300\text{cm}^2$ e condutividade térmica de $k=15\text{W/m.k}$. A superfície externa perde calor para o ambiente a $T_\infty=20^\circ\text{C}$ por convecção, de acordo com a figura 9. Considerando que o coeficiente de transferência de calor por convecção é igual a $h=80\text{W/m}^2.\text{K}$ e desconsiderando a perda de calor devido a radiação. Pode-se obter uma expressão para calcular as temperaturas nas superfícies interna e externa da base do ferro de forma analítica e comprar com o resultado da simulação (ÇENGEL.YUNUS, 2012).

Figura 9 – Esquema problema analítico



Fonte:Çengel (2012)

Para começar a resolver o problema deve-se analisar, quem é o responsável pelo aquecimento da base. Analisando os dados do problema, pode-se concluir que o fluxo de calor é responsável pelo aquecimento da placa. O cálculo do fluxo é representado pela equação 3.1 (ÇENGEL.YUNUS, 2012).

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{1200W}{0,03m^2} = 40000W/m^2 \quad (3.1)$$

Após o cálculo do fluxo de calor, o próximo passo a se seguir é a identificação da equação e das condições de contorno do problema. A equação que será utilizada para aproximar a placa da base do ferro será a equação da condução de calor unidimensional para uma parede plana (ÇENGEL.YUNUS, 2012). A equação 3.2

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + e_{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

Como não há geração de energia no problema, o termo de geração de energia na equação é zero e o como tudo está ocorrendo em regime permanente o termo de acumulação transiente de energia térmica também será zero. Para condutividade térmica constante tem-se a equação 3.3:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3.3)$$

As seguintes condições de contorno serão usadas:

- $x = 0 \Rightarrow -k \frac{dT}{dx}(0) = \dot{q}_0 = 40000W/m^2$
- $x = L \Rightarrow -k \frac{dT}{dx}(L) = h[T(L) - T_\infty]$

Resolvendo a equação do caso temos a equação 3.4:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad (3.4)$$

Integrando a equação 3.4 obtemos a equação 3.5

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (3.5)$$

As constantes podem ser determinadas aplicando as condições de contorno $x = 0 \Rightarrow -k \frac{dT}{dx}(0)$ e $C_1 = \frac{dT}{dx}$, assim $-kC_1 = \dot{q}_0$ resultando na equação 3.6:

$$C_1 = \frac{-\dot{q}_0}{k} \quad (3.6)$$

Agora aplicando $x = L \Rightarrow -k \frac{dT}{dx}(L) = h[T(L) - T_\infty]$ e $T(L) = C_1L + C_2$ e $C_1 = \frac{dT}{dx}$, combinando os termos obtém-se a equação 3.7:

$$-k \frac{dT}{dx}(L) = h[T(L) - T_\infty] \Rightarrow -kC_1(L) = h[C_1L + C_2 - T_\infty] \quad (3.7)$$

Utilizando $C_1 = \dot{q}_0/k$ na equação 3.7 obtém-se a equação 3.8:

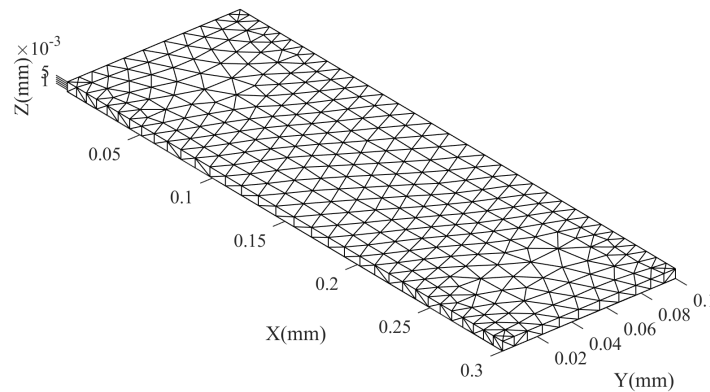
$$C_2 = T_\infty + \frac{\dot{q}_0}{h} + \frac{\dot{q}_0}{k}L \quad (3.8)$$

Por fim substituindo C_1 e C_2 na equação 3.5 obtém-se a equação 3.9:

$$T(x) = T_\infty + \dot{q}_0 \left(\frac{L-x}{k} + \frac{1}{h} \right) \quad (3.9)$$

Aplicando os dados fornecidos pelo problema, a temperatura na superfície interna é igual a $T_{interna} = 533\text{C}^\circ$ e a temperatura na superfície externa é $T_{externa} = 520\text{C}^\circ$. Na figura 10 é mostrada a malha utilizada na simulação, como esse problema analítico é unidimensional é realizada uma interpolação linear para o cálculo da simulação. Então o grau de refinamento da malha não importa para o resultado final, já que a equação calculada será linear possuindo um resultado analítico.

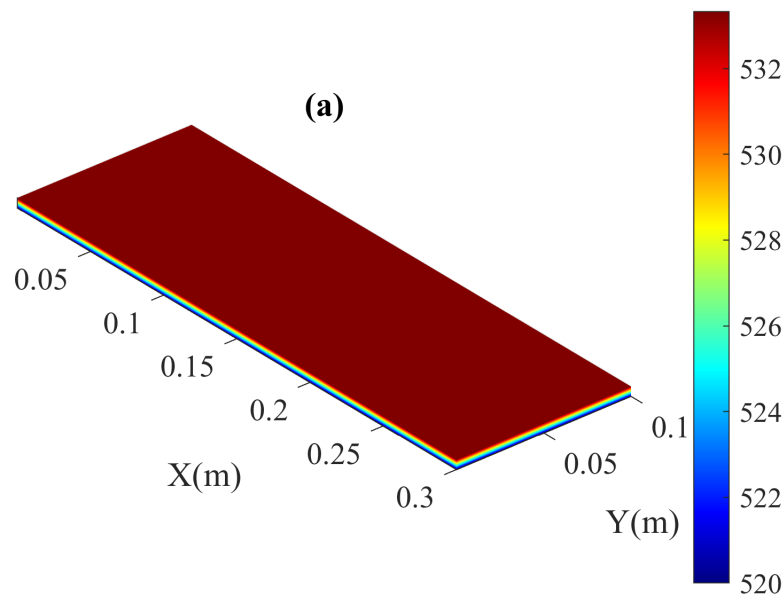
Figura 10 – Malha refinada do problema de referência



Fonte:Própria

Foi utilizada uma placa retangular análoga ao ferro de passar, já que a forma da placa onde ocorre a condução não importa para o problema referência. Então para facilitar a visualização da malha como exemplificar foi utilizada uma placa retangular para o cálculo do problema referência. Na figura 10 aparecem os resultados obtidos pela simulação ao resolver o problema da verificação de código, os resultados obtidos estão de acordo com a solução analítica do problema o que demonstra que o código está resolvendo as equações utilizadas na simulação de forma correta.

Figura 11 – Resultados simulação do problema analítico



Fonte:Própria

3.3 Método computacional

Para começar a criar a simulação computacional, é importante analisar o método computacional a ser utilizado para a realização da simulação. O método computacional a ser utilizado neste trabalho será o método de volumes de controle baseado em elementos finitos. O método de volumes de controle mescla e amplia os conceitos abordados no método dos elementos finitos e do método de volumes finitos (SAABAS; BALIGA, 1994). A formulação do método envolverá os seguintes passos:

- Discretização do domínio em elementos e discretização em volumes de controle que estão associados aos vértices dos elementos;

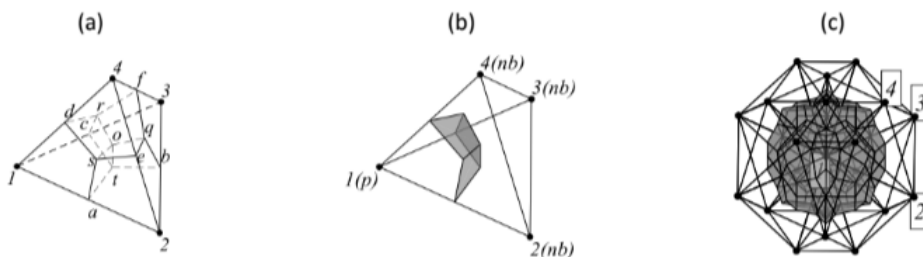
- Definir funções de interpolação baseadas nos elementos para as variáveis dependentes;
- Realizar a derivação de equações discretizadas (para obter aproximações algébricas das equações diferenciais governantes);

3.3.1 Discretização do domínio

Tanto em problemas de três dimensões como em problemas de duas dimensões o domínio de cálculo é dividido em elementos. Em problemas tridimensionais são utilizados elementos tetraédricos para discretização do domínio geométrico e para a interpolação das incógnitas (SAABAS; BALIGA, 1994). Utilizando os elementos finitos como base são formados volumes de controle poliédricos, centrados nos vértices, para serem utilizados na integração das equações diferenciais (ELS P.P.D, 2020). Na figura 12 (a) é apresentado um elemento tetraédrico, como é a divisão interna deste elemento para a formação dos volumes de controle e são destacados os pontos utilizados para a integração numérica.

Na figura 12 (b) a parte sombreada destacada representa a subsuperfície de controle interna ao elemento 1234, que está associada ao volume 1. Outros elementos que compartilhem do vértice 1 irão fornecer outras subsuperfícies. Na figura 12 (c) é apresentado um volume de controle centrado no vértice 1 e todos os elementos utilizados para compô-lo (ELS P.P.D, 2020).

Figura 12 – (a) Elemento finito, (b) Superfície interna ao elemento, (c) Volume centrado no vértice 1.

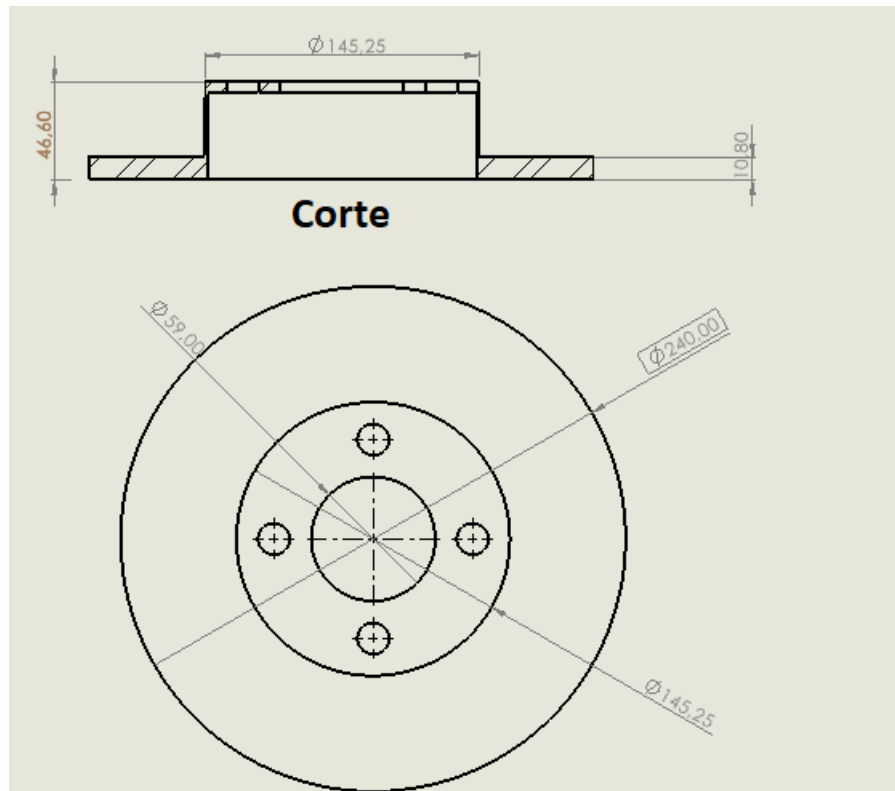


Fonte: Van Els et al. 2020

3.4 Definição do problema de simulação computacional

O caso escolhido para a simulação é um disco do tipo sólido, utilizado num Fiat Uno 1.0, da montadora Fiat entre os anos 1995-2010. O disco deste modelo foi escolhido devido a grande popularidade do veículo no Brasil, assim sendo fácil obter informações técnicas sobre o mesmo graças a grande oferta no mercado. A seguir a figura 13 contém as dimensões do disco de freio utilizado nas simulações deste trabalho:

Figura 13 – Dimensões disco de freio sólido Fiat Uno



Fonte:Própria

Os seguinte dados foram utilizados para a obtenção do fluxo de calor e do coeficiente de convecção:

- A massa específica do ar (ρ_a) é de $1,165\text{kg}/\text{m}^3$;
- A massa total do veículo (m) é 840kg , com 4 passageiros a bordo cada um pesando 80kg , totalizando uma massa de 1160kg ;
- A velocidade inicial (v_i) no processo de frenagem é de $100\text{km}/\text{h}$;
- O veículo está a trafegar em uma pista plana;
- A velocidade do ar será desconsiderada;
- O coeficiente de arrasto (C_x) é de $0,36$;
- A área projetada da seção frontal do veículo (A_f) é de $1,9\text{m}^2$;
- A área de varrida pela pastilha que fricciona a pista do disco ($A_{contato}$) é de $0,0273\text{m}^2$ para cada face;

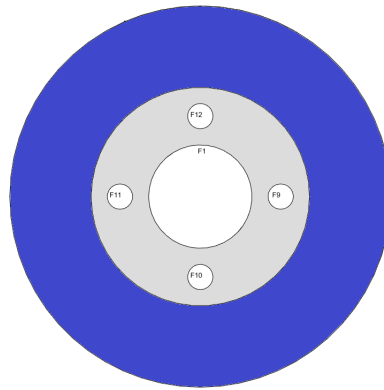
As seguintes simplificações e dados foram adotados nas simulações:

- Toda a energia cinética do veículo é convertida em energia térmica através do contato pastilha e disco de freio;
- A transferência de calor para o ar ambiente ocorre somente por convecção;
- Não ocorre deslizamento entre pneu/pista;
- A condutividade térmica do ar k_a é constante e igual a $0,026W/mK$;
- A massa específica do ar é constante;
- A viscosidade do ar μ_a é constante e igual a $17,2 \cdot 10^{-6} Pa_s$

3.5 Contornos do disco onde são aplicados os fluxos térmicos

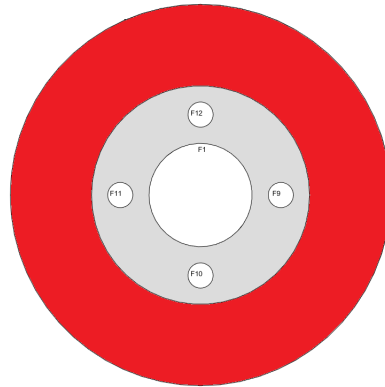
As áreas de aplicação do fluxo de calor são as áreas de contato da pastilha tanto a externa como a interna. A área externa é representada pelo código F3 na simulação e está na cor azul na figura 14 e a área interna é representada pelo código F4 na simulação e está na cor vermelha na figura 15, este fluxo de calor iguala a energia cinética do automóvel durante a frenagem devido ao atrito entre a pastilha de freio e o disco de freio. Deste modo temperatura do disco se eleva.

Figura 14 – Área de aplicação do fluxo de calor na área externa do disco



Fonte:Própria

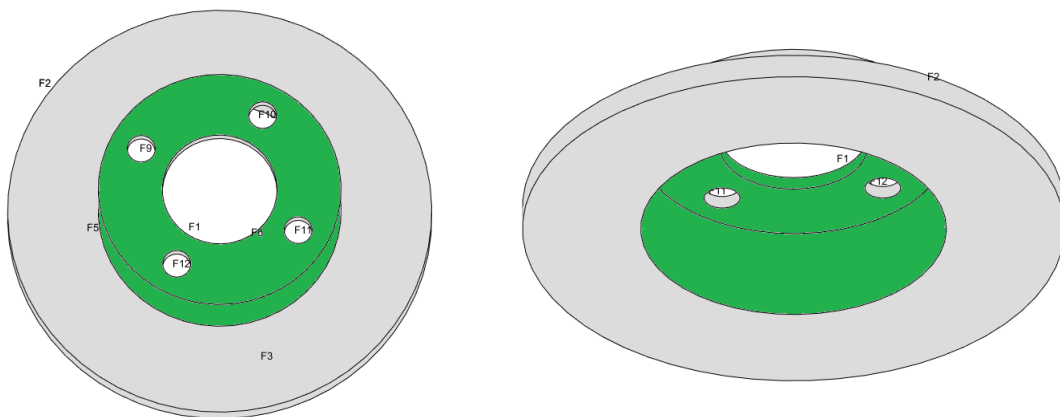
Figura 15 – Área de aplicação do fluxo de calor na área interna do disco



Fonte:Própria

O processo de resfriamento do disco, ocorre por meio da convecção forçada para o ar ambiente. Assim as superfícies representadas pelo código F3 e F4 e pelas cores azul e vermelha também são usadas para a convecção. As superfícies destacadas em verde foram escolhidas para a atuação da convecção forçada.

Figura 16 – Área de aplicação da convecção forçada.



Fonte:Própria

3.6 Resultados

Nesta parte são apresentados os resultados das simulações computacionais tridimensionais de frenagem. Inicialmente serão apresentados os parâmetros calculados que permitiram a realização das simulações, que descrevem a dinâmica de frenagem como também a própria dinâmica de aquecimento e resfriamento do disco sólido. Os resultados são apresentados na tabela 1.

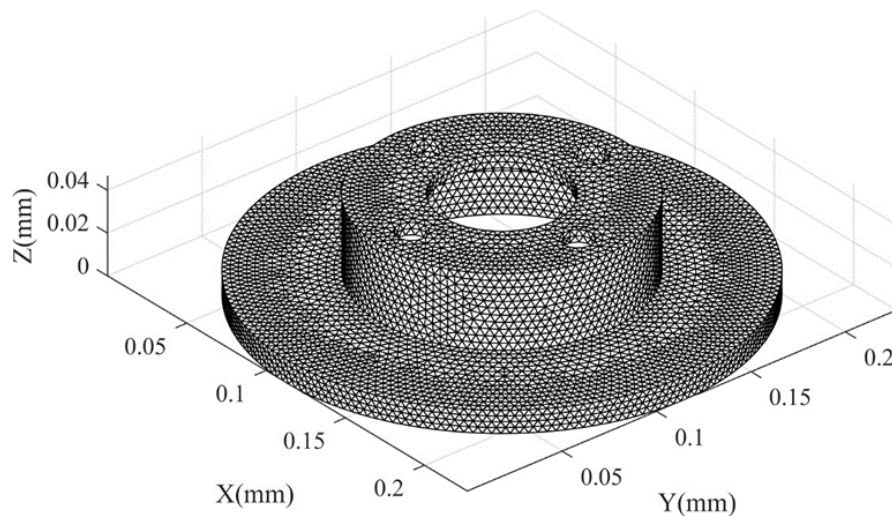
Resultados	Valores
$v_i(m/s)$	27,78
$a_x(m^2/s)$	8,16
$t_f(s)$	3,40
$F_b(N)$	9094,4
$d(m)$	47,29
$q''_{externa}(W/m^2)$	$2763,16e^3$
$q''_{interna}(W/m^2)$	$2042,34e^3$
$h(W/m^2k)$	361,39
$T_\infty(C^\circ)$	25

Tabela 1 – Resultados da simulação

Quando um problema é resolvido por meio de solução numérica, a malha utilizada para esta resolução é muito importante. As malhas utilizadas nas simulações foram geradas no software Matlab. A função “importGeometry” do Matlab foi utilizada para importar o arquivo com os parâmetros que definem a geometria do disco, a qual deve estar no formato “stl”. O formato STL é muito utilizado para impressões 3d, então utilizá-lo na simulação já se mostra uma vantagem devido a facilidade para posteriormente imprimir um protótipo do disco de freio e comparar os resultados da simulação com os resultados da prática. A função “GenerateMesh” do Matlab foi então utilizada para geração das malhas.

Tal função permite o controle do tamanho dos elementos. Uma das malhas utilizadas nas simulações é mostrada na figura 17, possui 61416 elementos tetraédricos e 15055 nós. O número de equações algébricas é associada ao número de nós da malha.

Figura 17 – Malha aplicada ao disco de freio

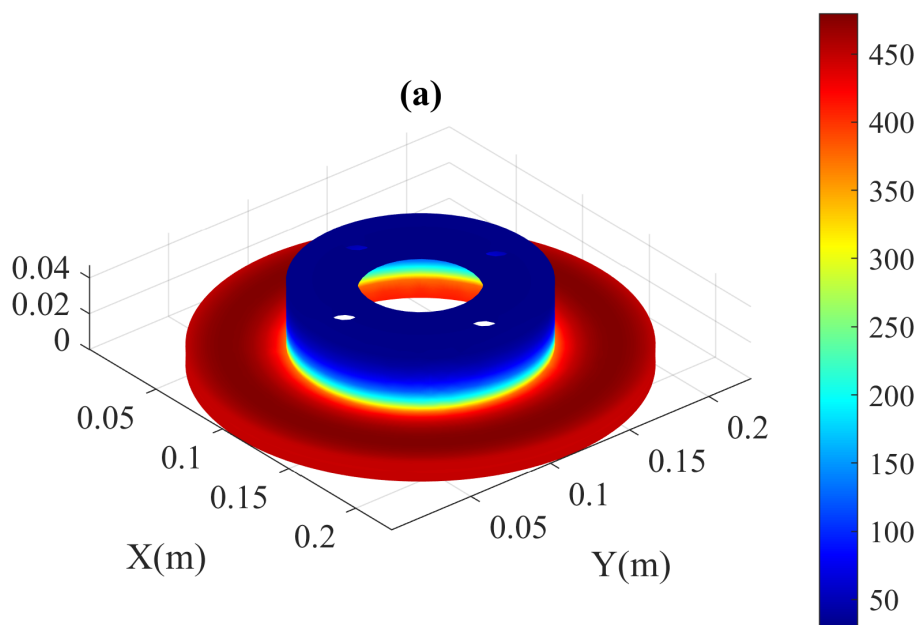


Fonte:Própria

O coeficiente de convecção de calor foi calculado com método de (R.LIMPERT,

2011) se mostrou correto após sua aplicação na simulação. Com a simulação validada, foi aplicado o valor do coeficiente de convecção calculado pelo método de (R.LIMPERT, 2011), e os resultados obtidos se mostraram condizentes com os trabalhos de (SILVA, 2016) inclusive o valor do coeficiente de convecção de silva é bem próximo do valor calculado neste trabalho.

Figura 18 – Simulação dissipação de calor freio a disco sólido



Fonte:Própria

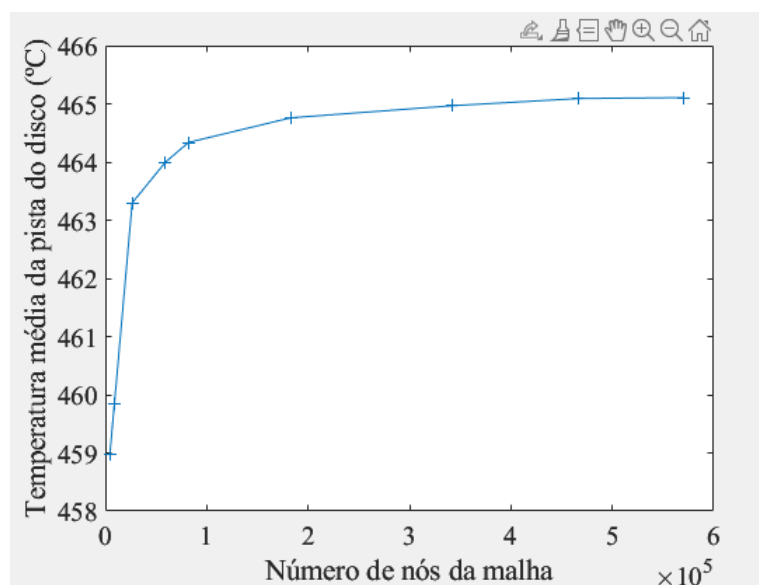
Quanto mais refinada for a malha computacional, via de regra melhor é a qualidade dos resultados obtidos, mais também maior é o esforço computacional envolvido. Por isso é essencial a realização de testes de sensibilidade dos resultados com o refinamento da malha. Um teste foi executado com os resultados de 6 malhas, conforme apresentado a seguir:

Número de nós da malha	Temperatura média da pista do disco
4489	458,98
8995	459,85
26495	463,30
59189	463,99
81968	464,34
182281	464,76
342119	464,97
467133	465,09
569977	465,10

Tabela 2 – Sensibilidade de malha

Na figura 19 é apresentado um gráfico comparativo da temperatura média da pista de freio pelo número de nós da malha, onde se evidencia que a utilização de uma malha com 467133, entrega um resultado preciso e que com malhas mais finas há uma linearização do aumento da precisão do resultado. Desta forma não há um ganho real em refinar mais a malha, pois irá consumir mais tempo e recursos para um ganho inexpressivo no resultado.

Figura 19 – Teste de sensibilidade de malha



Fonte:Própria

4 Conclusão

Como mostrado durante todo este documento, o sistema de freio é um dos sistemas mais importantes para a segurança dos passageiros de um veículo, e mesmo carros elétricos ou híbridos em parte ainda se utilizam de freios hidráulicos para complementar o poder de frenagem em conjunto com o freio regenerativo. Por isso este estudo visou criar uma simulação tridimensional, para estudar o comportamento térmico do disco de freio durante uma parada de emergência.

O freio utilizado para este estudo veio de um modelo de carro que foi muito comercializado no Brasil. O modelo escolhido foi o FIAT Uno 1995, devido a grande quantidade de peças no mercado como o número de veículos que ainda rodam no país. O tipo de frenagem realizada neste estudo foi a frenagem emergencial, que é uma frenagem brusca feita de 100 km/h até 0 km/h.

Com o uso da metodologia de validação criada pela ASME, foi possível verificar a validade do código utilizado para calcular a simulação de frenagem e foi possível verificar que o código utilizado está resolvendo de forma correta as equações de transferência de calor. Após as análises dos resultados, as temperaturas obtidas pela simulação estão condizentes com os resultados esperados para a situação que o sistema de freio foi colocado. Analisando a temperatura obtida pela simulação, o seu valor está condizente comparando ao resultado obtido por (SILVA, 2016).

A temperatura média no disco obtida pela simulação foi de 465 °C que está condizente com a temperatura obtida por (SILVA, 2016) em torno de 442 °C. Tanto o resultado de (SILVA, 2016) como o resultado da simulação estão condizentes com a realidade. Além dos valores de temperatura atingindo durante a frenagem estar abaixo dos 800 °C o que indica que o freio está dentro da margem de segurança de acordo com (R.LIMPERT, 2011).

Para trabalhos futuros seria interessante a modificação do código utilizado neste trabalho, para a realização da simulação em regime transiente de transferência de calor. Além da aplicação do efeito da radiação na simulação térmica, tanto no regime permanente como no regime transiente.

Referências

- ASME. *Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer*. New York, United States of America, 2009. 100 p. Citado na página 33.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 10966-1: Veículos rodoviários automotores - sistemas de freio*. Rio de Janeiro, 2016. 32 p. Citado na página 18.
- BOSCH.R. *Manual de tecnologia*. [S.l.]: São Paulo: Edgard Blucher, 2005. v. 25^oed. Citado na página 18.
- CHOLLET.H. *Curso prático e profissional para mecânicos de automóveis: o veículo e seus componentes*. [S.l.]: Curitiba: Hemus, 2002. Citado na página 19.
- CIOLFI, M. J. *Simulação computacional do comportamento térmico de um disco de freio ventilado*. 2010. 97 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia mecânica) — ,Centro Universitário da Fei, São Bernado do Campo, 2010. Citado na página 32.
- COSTA.P.G. *A bíblia do carro*. [S.l.]: São Paulo, 2002. Citado na página 19.
- DIULGHEROGLO, P. A história dos freios. Disponível em: <https://boechatfreios.files.wordpress.com/2014/01/a-histc3b3ria-dos-freios.pdf>, 2007. Citado na página 21.
- ELS, P. V. *Desenvolvimento de um código computacional para solução da equação de transferência de calor tridimensional utilizando o método de volumes de controle baseado em elementos*. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Energia) — Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Citado na página 33.
- ELS P.P.D, C. F. e. V. W. V. Aplicação do método de volumes de controle baseado em elementos para para solução da equação da transferência de calor em materiais compósitos. *Ripe*, UNB, v. 6, n. 2, p. 62–72, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 38.
- GARDINALLI, G. *Comparação do desempenho de frenagem simulada x experimental de um veículo de passeio com freios hidráulicos e ABS*. 2005. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Automotiva) — ,Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 15, 20, 21 e 22.
- GRADELLA, F. *Identificação das falhas utilizando FMEA no sistema de freios de carros de competição on-road-Fórmula-SAE*. 94 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013. Citado na página 19.
- HOFFMAN, G. *Análise numérica do desempenho térmico de discos de freio do tipo sólido e ventilado*. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Automotiva) — Centro Tecnológico de Joinville, Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, 2018. Citado na página 28.

- IOMBRILLER, S. F. *Análise térmica e dinâmica do sistema de freio a disco de veículos comerciais pesados*. 2002. 196 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002. Citado na página 22.
- J.Y.WONG. *Theory of ground vehicles*. [S.l.]: N.J. Willey, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 29.
- KAWAGUCHI, H. *Comparação da análise de conforto de frenagem subjetiva x objetiva de um veículo de passeio*. 2005. 118 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Automotiva) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.
- LI.X XU.L, H.; OUYANG.M. Fully electrified regenerative braking control for deep energy recovery and maintaining safety of electric vehicles. 2008. Citado na página 15.
- NETO, A. Dinâmica veicular. Escola de Engenharia de São carlos USP, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.
- NICOLLAZI, L. Uma introdução à modelagem quaseestática de veículos automotores. UFSC, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 18, 22 e 29.
- RAGLAND K.W.;BORMAN, G. Combustion engeneering. Mcgraw-Hill,USA, 1998. Citado na página 16.
- R.LIMPERT. *Brake design and safety*. [S.l.]: Warrandale: Society of Automotive Engineers Inc, 2011. v. 3ªed. Citado 8 vezes nas páginas 15, 20, 21, 22, 27, 31, 43 e 46.
- SAABAS, H. J.; BALIGA, B. R. Co-located equal-order control-volume finite-element method for multidimensional, incompressible. fluid flow -part i: Formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Taylor Francis, v. 26, n. 4, p. 381–407, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10407799408914936>>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- SILVA, F. *Dinâmica de frenagem e Análise térmica de freio a disco ventilado automotivo*. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasília, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.
- STEPHENS, A. *Aerodynamic cooling of automotive disc brakes*. 2006. 96 f. Dissertação (Master Engeneerign) — School of Aerospace, Mechanical e Manufacturing, RMIT, University Melbourne, Melbourne, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 22.
- T.D.GILLESPIE. *Fundamental of vehicles dynamics*. [S.l.]: Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers, 1992. Citado na página 30.
- XU.G XU.K, Z. Z.; ZAHID.T. Fully electrified regenerative braking control for deep energy recovery and maintaining safety of electric vehicles. 2011. Citado na página 16.
- YOSHIDA, L. *Projeto adaptativo de um sistema de freios para utilização em carro de competição classe Fórmula SAE*. 99 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) — Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013. Citado na página 20.

ÇENGEL.YUNUS, A. *Termodinâmica*. [S.l.]: Bookman, 2012. v. 6^oed. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

ÇENGEL.YUNUS, A. *Termodinâmica*. [S.l.]: Bookman, 2013. v. 7^oed. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

Apêndices

APÊNDICE A – Código computacional

A.1 Código Simulação

```

1  clc,clear,close all
2  %carregamento da malha
3  load malha_freio_3D P E T NF3 NF4 NF9 NF10 NF11 NF12 E_F3 E_F4
   model
4  %%apresenta o malha do caso
5  disp('n mero de nodes:'),length(P)
6
7  nb_frenagem=union(NF3,NF4);
8
9  nfuros910=union(NF9,NF10);
10 nb_conveccao=unique(E)';
11
12 E_frenagem=[E_F3;E_F4];
13 [Area_convec] = area_contorno_bc(E,P);
14 [Area_flux] = area_contorno_bc(E_frenagem,P)
15
16 qP=(8.25e5)/4;%W/m^2
17 k=ones(length(P),1)*50;%neste caso k tem a dimens o igual ao
   n mero de elementos
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 [A]=MONTA_DIF(k,P,T);
20 B=zeros(length(P),1);
21
22 %Ajuste condi o de contorno de convec o
23 T_inf=25;%(K)
24 h0=361.39;%W/(m^2*K)
25 for jj=nb_conveccao %ATEN O: tem que ser um vetor linha!!
26     A(jj,jj)=A(jj,jj)+h0*Area_convec(jj);
27     B(jj)=+h0*Area_convec(jj)*T_inf;
28 end
29 %fim

```

```
30
31
32 %Ajuste condico de contorno de fluxo de calor
33 % B(nb_frenagem)=QP*Area_flux(nb_frenagem)/sum(Area_flux)+B(
    nb_frenagem);
34 B(nb_frenagem)=qP*Area_flux(nb_frenagem)+B(nb_frenagem);
35
36 QP=sum(qP*Area_flux(nb_frenagem))
37 Areafreio=sum(Area_flux(nb_frenagem))
38 %fim
39
40 %Solucao sistema de equacoes
41 Temp=A\B;
42 %fim
43
44 %Taxa de transferencia de calor perdida pelo disco:
45 Q_convect=h0*sum(Area_convect.*(Temp-T_inf))
46 %fim
47 figure(1)
48 trisurf(E,P(:,1),P(:,2),P(:,3),Temp),shading interp,colormap jet,
    axis equal,view(0,90),colorbar
49 ylabel('Y(m)', 'fontsize',14,'FontName','times')
50 xlabel('X(m)', 'fontsize',14,'FontName','times')
51 title('(a)', 'fontsize',14,'FontName','times')
52 set(gca,'fontsize',14,'FontName','times')
53 view(50,30)
54 print(gcf,'figura_campo_temp.png','-dpng','-r300');
55 mean(Temp(nb_frenagem))
56
57 % mean(Temp(nb_frenagem))=411.9259,408.6774,402.6088
58 Temp_frenagem=mean(Temp(nb_frenagem))
59 figure(2)
60 plot([4489 8995 26495 59189 81968 182821 342119 467133
    569977],[458.9791 459.8463 463.2970 463.9950 464.3361 464.7593
    464.9672 465.0914 465.1067],'+-')
61 xlabel('Numero de ns da malha','fontsize',14,'FontName','times
    ')
62 ylabel('Temperatura media da pista do disco ( C )','fontsize'
    ,14,'FontName','times')
63 set(gca,'fontsize',14,'FontName','times')
64
65 print(gcf,'figura_sensibilidade_malha.png','-dpng','-r300');
```

```
66
67 % malha=          1307424    15055    43341 81968  307113
68 % Temp_frenagem=323.4  330.15  334.15 337.064
69
70 clc,clear all,close all
71
72 model = createpde(1);
73 importGeometry(model,'Freio_Uno_Tcc.stl');
74 % mesh=generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','Hmax',
75     ,2.5*1.5);
76 mesh=generateMesh(model,'GeometricOrder','linear','Hmax',
77     ,2.5*0.43);
78
79 [p,e,t] = meshToPet(model.Mesh);
80 p=p/1000;
81
82 figure(1)
83 pdegplot(model,'FaceLabels','on');
84 view(30,30);
85 title('Face Labels: view(30,30)');
86 print(gcf,'figura_01.png','-dpng','-r300');
87
88 figure(2)
89 pdegplot(model,'FaceLabels','on');
90 title('Face Labels: view(50,30)');
91 view(50,30);
92 print(gcf,'figura_02.png','-dpng','-r300');
93
94 figure(3)
95 % F3 e F4 s o as superf c i e s de frenagem
96 NF3 = findNodes(mesh,'region','Face',3);
97 NF4 = findNodes(mesh,'region','Face',4);
98
99 NF9 = findNodes(mesh,'region','Face',9);
100 NF10 = findNodes(mesh,'region','Face',10);
101 NF11 = findNodes(mesh,'region','Face',11);
102 NF12 = findNodes(mesh,'region','Face',12);
103
104 X=model.Mesh.Nodes(1,:);
105 Y=model.Mesh.Nodes(2,:);
106 Z=model.Mesh.Nodes(3,:);
107 plot3(X(NF3),Y(NF3),Z(NF3),'ok'),hold on
108 plot3(X(NF4),Y(NF4),Z(NF4),'om'),hold on
```

```
106 legend('superficie frenagem 1','superficie frenagem 2')
107 axis equal
108 print(gcf,'figura_03.png','-dpng','-r300');
109
110
111 P=p';
112 T=t';
113 [E,SAIDA] = monta_E(T);
114 figure(4)
115 trep = triangulation(T(:,1:4), P);
116 [tri xf] = freeBoundary(trep);
117 trisurf(tri,xf(:,1),xf(:,2),xf(:,3),'FaceColor','white'),axis
    equal%,shading flat;%shading interp
118 xlabel('X(mm)','fontsize',10,'FontName','Times')
119 ylabel('Y(mm)','fontsize',10,'FontName','Times')
120 zlabel('Z(mm)','fontsize',10,'FontName','Times')
121 set(gca,'fontsize',10,'FontName','Times')
122 view(50,30)
123 print(gcf,'figura_04.png','-dpng','-r300');
124
125
126
127 ind=1;
128 for ii=1:length(E)
129 if (ismember(E(ii,1),NF3)==1)&&(ismember(E(ii,2),NF3)==1)&&(
    ismember(E(ii,3),NF3)==1)
130     vnF3(ind)=ii;ind=ind+1;
131 end
132 end
133 E_F3=E(vnF3,:);
134
135 ind=1;
136 for ii=1:length(E)
137 if (ismember(E(ii,1),NF4)==1)&&(ismember(E(ii,2),NF4)==1)&&(
    ismember(E(ii,3),NF4)==1)
138     vnF4(ind)=ii;ind=ind+1;
139 end
140 end
141 E_F4=E(vnF4,:);
142
143 save malha_freio_3D P E T NF3 NF4 NF9 NF10 NF11 NF12 E_F3 E_F4
    model
```

```

144
145
146 size(P)
147
148 function [E,SAIDA] = monta_E(T)
149 nn=size(T);
150 if nn(1)<nn(2),T=T';end
151 sgmnts=[T(:, [2,1,3]);T(:, [1,2,4]);T(:, [2,3,4]);T(:, [3,1,4])];
152 Nsgmnts=[1:length(T) 1:length(T) 1:length(T) 1:length(T)];
153 sgmntsSORT=sort(sgmnts,2);
154 [~,ix,jx]=unique(sgmntsSORT,'rows');
155 vec=histc(jx,1:max(jx));
156 qx=(vec==1);
157 E=sgmnts(ix(qx),:);
158 SAIDA=Nsgmnts(ix(qx));
159 end
160 function [A]=MONTA_DIF(gmp,P,T)
161 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
162 %MONTA MATRIZ DE DIFUS O A, gmp O COEFICIENTE DE DIFUS O
163 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
164
165 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
166 %%COORDENADAS: GLOBAL=> LOCAL
167 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
168
169 T1=T(:,1); T2=T(:,2); T3=T(:,3); T4=T(:,4);
170 X=P(:,1); X_1=X(T1); X_2=X(T2); X_3=X(T3); X_4=X(T4
    );
171 Y=P(:,2); Y_1=Y(T1); Y_2=Y(T2); Y_3=Y(T3); Y_4=Y(T4
    );
172 Z=P(:,3); Z_1=Z(T1); Z_2=Z(T2); Z_3=Z(T3); Z_4=Z(T4
    );
173 gm1=gmp(T1); gm2=gmp(T2); gm3=gmp(T3); gm4=gmp(T4);
174
175 X_o=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4; Y_o=(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)/4; Z_o=(Z_1+Z_2+
    Z_3+Z_4)/4;
176 X_r=(X_4+X_3+X_1)/3; Y_r=(Y_4+Y_3+Y_1)/3; Z_r=(Z_4+Z_3+

```



```

    Z_1)/3;
177 X_s=(X_4+X_2+X_1)/3;      Y_s=(Y_4+Y_2+Y_1)/3;      Z_s=(Z_4+Z_2+
    Z_1)/3;
178 X_t=(X_3+X_2+X_1)/3;      Y_t=(Y_3+Y_2+Y_1)/3;      Z_t=(Z_3+Z_2+
    Z_1)/3;
179 X_q=(X_4+X_3+X_2)/3;      Y_q=(Y_4+Y_3+Y_2)/3;      Z_q=(Z_4+Z_3+
    Z_2)/3;
180 X_a =(X_1+X_2)/2;          Y_a =(Y_1+Y_2)/2;          Z_a =(Z_1+Z_2)
    /2;
181 X_b =(X_2+X_3)/2;          Y_b =(Y_2+Y_3)/2;          Z_b =(Z_2+Z_3)
    /2;
182 X_c =(X_3+X_1)/2;          Y_c =(Y_3+Y_1)/2;          Z_c =(Z_3+Z_1)
    /2;
183 X_d =(X_4+X_1)/2;          Y_d =(Y_4+Y_1)/2;          Z_d =(Z_4+Z_1)
    /2;
184 X_e =(X_4+X_2)/2;          Y_e =(Y_4+Y_2)/2;          Z_e =(Z_4+Z_2)
    /2;
185 X_f =(X_4+X_3)/2;          Y_f =(Y_4+Y_3)/2;          Z_f =(Z_4+Z_3)
    /2;
186 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
187 %%%% VETOR NORMAL
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
188 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
189 n_ax=((Y_s-Y_t).*(Z_a-Z_o))/2-((Y_a-Y_o).*(Z_s-Z_t))/2;
190 n_ay=((X_a-X_o).*(Z_s-Z_t))/2-((X_s-X_t).*(Z_a-Z_o))/2;
191 n_az=((X_s-X_t).*(Y_a-Y_o))/2-((X_a-X_o).*(Y_s-Y_t))/2;
192
193 n_bx=((Y_q-Y_t).*(Z_b-Z_o))/2-((Y_b-Y_o).*(Z_q-Z_t))/2;
194 n_by=((X_b-X_o).*(Z_q-Z_t))/2-((X_q-X_t).*(Z_b-Z_o))/2;
195 n_bz=((X_q-X_t).*(Y_b-Y_o))/2-((X_b-X_o).*(Y_q-Y_t))/2;
196
197 n_cx=((Y_c-Y_o).*(Z_r-Z_t))/2-((Y_r-Y_t).*(Z_c-Z_o))/2;
198 n_cy=((X_r-X_t).*(Z_c-Z_o))/2-((X_c-X_o).*(Z_r-Z_t))/2;
199 n_cz=((X_c-X_o).*(Y_r-Y_t))/2-((X_r-X_t).*(Y_c-Y_o))/2;
200
201 n_dx=((Y_r-Y_s).*(Z_d-Z_o))/2-((Y_d-Y_o).*(Z_r-Z_s))/2;
202 n_dy=((X_d-X_o).*(Z_r-Z_s))/2-((X_r-X_s).*(Z_d-Z_o))/2;
203 n_dz=((X_r-X_s).*(Y_d-Y_o))/2-((X_d-X_o).*(Y_r-Y_s))/2;
204
205 n_ex=((Y_e-Y_o).*(Z_q-Z_s))/2-((Y_q-Y_s).*(Z_e-Z_o))/2;

```

```

206 n_ey=((X_q-X_s).*(Z_e-Z_o))/2-((X_e-X_o).*(Z_q-Z_s))/2;
207 n_ez=((X_e-X_o).*(Y_q-Y_s))/2-((X_q-X_s).*(Y_e-Y_o))/2;
208
209 n_fx=((Y_q-Y_r).*(Z_f-Z_o))/2-((Y_f-Y_o).*(Z_q-Z_r))/2;
210 n_fy=((X_f-X_o).*(Z_q-Z_r))/2-((X_q-X_r).*(Z_f-Z_o))/2;
211 n_fz=((X_q-X_r).*(Y_f-Y_o))/2-((X_f-X_o).*(Y_q-Y_r))/2;
212 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
213 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
214
215 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
216 %%% CONSTANTES DAS FUNÇÕES DE FORMA
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
217 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
218 bL1=-(Y_2.*Z_3 - Y_3.*Z_2 - Y_2.*Z_4 + Y_4.*Z_2 + Y_3.*Z_4 - Y_4
    .*Z_3);
219 bL2=-(Y_3.*Z_1 - Y_1.*Z_3 + Y_1.*Z_4 - Y_4.*Z_1 - Y_3.*Z_4 + Y_4
    .*Z_3);
220 bL3=-(Y_1.*Z_2 - Y_2.*Z_1 - Y_1.*Z_4 + Y_4.*Z_1 + Y_2.*Z_4 - Y_4
    .*Z_2);
221 bL4=-(Y_2.*Z_1 - Y_1.*Z_2 + Y_1.*Z_3 - Y_3.*Z_1 - Y_2.*Z_3 + Y_3
    .*Z_2);
222
223 cL1=-(X_3.*Z_2 - X_2.*Z_3 + X_2.*Z_4 - X_4.*Z_2 - X_3.*Z_4 + X_4
    .*Z_3);
224 cL2=-(X_1.*Z_3 - X_3.*Z_1 - X_1.*Z_4 + X_4.*Z_1 + X_3.*Z_4 - X_4
    .*Z_3);
225 cL3=-(X_2.*Z_1 - X_1.*Z_2 + X_1.*Z_4 - X_4.*Z_1 - X_2.*Z_4 + X_4
    .*Z_2);
226 cL4=-(X_1.*Z_2 - X_2.*Z_1 - X_1.*Z_3 + X_3.*Z_1 + X_2.*Z_3 - X_3
    .*Z_2);
227
228 dL1=-(X_2.*Y_3 - X_3.*Y_2 - X_2.*Y_4 + X_4.*Y_2 + X_3.*Y_4 - X_4
    .*Y_3);
229 dL2=-(X_3.*Y_1 - X_1.*Y_3 + X_1.*Y_4 - X_4.*Y_1 - X_3.*Y_4 + X_4
    .*Y_3);
230 dL3=-(X_1.*Y_2 - X_2.*Y_1 - X_1.*Y_4 + X_4.*Y_1 + X_2.*Y_4 - X_4
    .*Y_2);
231 dL4=-(X_2.*Y_1 - X_1.*Y_2 + X_1.*Y_3 - X_3.*Y_1 - X_2.*Y_3 + X_3

```

```

    .*Y_2);
232
233 EL=-(X_1.*Y_2.*Z_3-X_1.*Y_3.*Z_2-X_2.*Y_1.*Z_3+X_2.*Y_3.*Z_1+X_3
    .*Y_1.*Z_2-X_3.*Y_2.*Z_1-X_1.*Y_2.*Z_4+X_1.*Y_4.*Z_2+...
234     X_2.*Y_1.*Z_4-X_2.*Y_4.*Z_1-X_4.*Y_1.*Z_2+X_4.*Y_2.*Z_1+X_1
    .*Y_3.*Z_4-X_1.*Y_4.*Z_3-X_3.*Y_1.*Z_4+X_3.*Y_4.*Z_1+...
235     X_4.*Y_1.*Z_3-X_4.*Y_3.*Z_1-X_2.*Y_3.*Z_4+X_2.*Y_4.*Z_3+X_3
    .*Y_2.*Z_4-X_3.*Y_4.*Z_2-X_4.*Y_2.*Z_3+X_4.*Y_3.*Z_2);
236 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
237 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

238 NL1bo=0.125; NL2bo=0.375; NL3bo=0.375; NL4bo=0.125;
239 NL1ao=0.375; NL2ao=0.375; NL3ao=0.125; NL4ao=0.125;
240 NL1co=0.375; NL2co=0.125; NL3co=0.375; NL4co=0.125;
241 NL1do=0.375; NL2do=0.125; NL3do=0.125; NL4do=0.375;
242 NL1eo=0.125; NL2eo=0.375; NL3eo=0.125; NL4eo=0.375;
243 NL1fo=0.125; NL2fo=0.125; NL3fo=0.375; NL4fo=0.375;
244 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

245 gmao=NL1ao.*gm1+NL2ao.*gm2+NL3ao.*gm3+NL4ao.*gm4;
246 gmco=NL1co.*gm1+NL2co.*gm2+NL3co.*gm3+NL4co.*gm4;
247 gmdo=NL1do.*gm1+NL2do.*gm2+NL3do.*gm3+NL4do.*gm4;
248 gmbo=NL1bo.*gm1+NL2bo.*gm2+NL3bo.*gm3+NL4bo.*gm4;
249 gmeo=NL1eo.*gm1+NL2eo.*gm2+NL3eo.*gm3+NL4eo.*gm4;
250 gmfo=NL1fo.*gm1+NL2fo.*gm2+NL3fo.*gm3+NL4fo.*gm4;
251 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

252 %% difus o
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

253 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

254 Aa1=-(gmao./EL).*(n_ax.*bL1+n_ay.*cL1+n_az.*dL1);
255 Aa2=-(gmao./EL).*(n_ax.*bL2+n_ay.*cL2+n_az.*dL2);
256 Aa3=-(gmao./EL).*(n_ax.*bL3+n_ay.*cL3+n_az.*dL3);
257 Aa4=-(gmao./EL).*(n_ax.*bL4+n_ay.*cL4+n_az.*dL4);
258 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

259 Ab1=-(gmbo./EL).*(n_bx.*bL1+n_by.*cL1+n_bz.*dL1);
260 Ab2=-(gmbo./EL).*(n_bx.*bL2+n_by.*cL2+n_bz.*dL2);
261 Ab3=-(gmbo./EL).*(n_bx.*bL3+n_by.*cL3+n_bz.*dL3);

```



```

291 DDs=[D11 D12 D13 D14 D21 D22 D23 D24 D31 D32 D33 D34 D41 D42 D43
      D44];
292 I=[T1 T1 T1 T1 T2 T2 T2 T2 T3 T3 T3 T3 T4 T4 T4 T4];
293 J=[T1 T2 T3 T4 T1 T2 T3 T4 T1 T2 T3 T4 T1 T2 T3 T4];
294 A=sparse(I,J,DDs);
295 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
296 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Listing A.1 – Código fonte Matlab