



# **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

## **MAGNETOHIDRODINÂMICA INCOMPRESSÍVEL DE FLUIDOS CONDUTORES EM ESCOAMENTOS LAMINARES INTERNOS**

Por

**Leonardo Afonso da Silva Inácio**

Brasília, 6 de outubro de 2022

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

## PROJETO DE GRADUAÇÃO

# MAGNETOHIDRODINÂMICA INCOMPRESSÍVEL DE FLUIDOS CONDUTORES EM ESCOAMENTOS LAMINARES INTERNOS

Por

**Leonardo Afonso da Silva Inácio**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

### **Banca Examinadora**

Prof. Francisco Ricardo da Cunha (Orientador) \_\_\_\_\_

Prof. Andre von Borries Lopes \_\_\_\_\_

Prof. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues \_\_\_\_\_

Brasília 6 de outubro de 2022

# Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de agradecer profundamente ao meu orientador, professor e amigo Francisco Ricardo da Cunha por todo suporte dado ao longo deste trabalho e de outros, por todas as incríveis disciplinas ministradas (incluindo as conversas no fim de cada aula), por todas reuniões, pelo incentivo contínuo e por todo o tempo dedicado à minha formação, afinal, não é qualquer um que pararia tudo que está fazendo para fazer uma reunião comigo às 22h30, se estendendo até às 2h da manhã de um dia de semana, para me ajudar a aprimorar a primeira etapa deste trabalho. Meu mais sincero obrigado, Professor.

Gostaria de agradecer também ao professor e amigo André von Borries Lopes, o qual, desde a primeira oportunidade que tive de trabalhar com ele, sempre confiou em mim, me auxiliando e continuamente me dando diversas oportunidades de crescer. Obrigado pelas longas conversas, pelos conselhos, pelas oportunidades, pelo imensurável incentivo, que muitas vezes foi essencial, e pela amizade.

Agradeço aos meus pais, Edmar e Mirian, e ao meu irmão, Eduardo. Cada caminho que trilho na minha vida só é possível por que vocês constroem pontes para que eu atravessasse os vales, e ao longo de toda a minha trajetória acadêmica não foi diferente. Pai e mãe, o exemplo de vocês permeia toda minha existência. Obrigado por todo o suporte, em todos os aspectos possíveis, desde o início de minha vida, pela dedicação incondicional à tarefa de fazer eu e meu irmão felizes, e, principalmente, por todo o amor proporcionado durante essa jornada da vida.

Agradeço à minha namorada, Isabelle, que me inspira em todos aspectos. O seu suporte geral, em especial o emocional, foi estritamente essencial nos últimos anos. Você me tirou de vários buracos emocionais e abriu meus olhos para uma face mais bonita da vida. Eu te amo! Um sincero agradecimento, por absolutamente tudo, do seu mais sincero fã.

Agradeço aos colegas e amigos do grupo Vortex, Igor, Marcos, Yuri, Victor, Matheus, Érick, Luís, Gabriel, Jeferson, Olaf e Wildemberg, por terem tornado o ambiente de trabalho em um ambiente extremamente agradável. Em especial agradeço aos amigos Igor, Marcos, Yuri e Victor, que quando cheguei no grupo me acolheram, me fazendo sentir em casa. Igor, obrigado pelo imensurável suporte no laboratório e pela disposição infinita para ajudar, você foi essencial no desenvolvimento desse trabalho. Obrigado também ao Yuri por ter me ensinado a mexer na bancada de bomba de seringa, mesmo no momento que estava se organizando para ir morar fora do Brasil, e pelo suporte a distância quando

a bancada experimental não estava se comportando corretamente.

Agradeço a todos familiares e amigos próximos que forneceram suporte de qualquer tipo. Em especial, agradeço às minhas primas, Juliana e Mariana, por toda empolgação e incentivo em todas as vezes que eu contava algo que estava fazendo, aos meus amigos Lucas Rocha, André Cássio e Gabriel Rizzo, pelas diversas horas em que eu estava escrevendo este trabalho e vocês estavam comigo no discord, tornando tudo mais leve, e ao meu amigo Juan Linhares, por todas as matérias que fizemos juntos e por todas as discussões construtivas.

Agradeço aos membros da banca, professores André von Borries Lopes e José Luiz da Fontoura Rodrigues, por todas sugestões e contribuições dadas para a melhoria deste trabalho.

Por fim, agradeço aos diversos professores que impactaram positivamente a minha trajetória acadêmica.

# Resumo

Neste trabalho, propõe-se examinar escoamentos internos de fluidos eletricamente condutores sob a ação de um campo magnético uniforme e transversal aplicado, tanto do ponto de vista teórico quanto utilizando experimentos com microescoamentos em tubo capilar. As equações governantes baseadas nas equações de Maxwell para a magnetohidrodinâmica (MHD) e na de Navier-Stokes com força de campo de Lorentz são descritas em termos de quantidades adimensionais para os casos de geometria de placas paralelas e em tubo capilar, determinando assim os parâmetros físicos adimensionais relevantes no presente estudo de magnetohidrodinâmica. Posteriormente, essas equações governantes adimensionais são resolvidas e soluções analíticas exatas para o perfil de velocidades, para a densidade de fluxo magnético e para a viscosidade efetiva são desenvolvidas e discutidas. Em adição, descreve-se a bancada experimental do tipo bomba de seringa que possibilita a realização do experimento com escoamentos magnetohidrodinâmicos em tubos capilares. Resultados experimentais são obtidos a partir da metodologia experimental apresentada. Compara-se resultados teóricos e dados experimentais do incremento magnetohidrodinâmico da viscosidade efetiva e observa-se uma excelente concordância quantitativa dentro das barras de erro experimentais. Por fim, descreve-se o tema de dispersão induzida por cisalhamento em escoamentos magnetohidrodinâmicos incompressíveis na presença de estruturas cristalinas em solução de cloreto de sódio, o qual pretende-se explorar em trabalhos futuros.

**Palavras-chaves:** magnetohidrodinâmica, fluido eletricamente condutor, escoamentos internos, viscometria capilar, viscosidade efetiva

# Abstract

In this work, we examine the internal flows of electrically conducting fluids under the influence of a uniform and transversal applied magnetic field, both from a theoretical point of view and from microflows experiments in capillary tube. The governing equations based on Maxwell's equations for magnetohydrodynamics (MHD) and on Navier-Stokes equation with Lorentz force are described in terms of non-dimensional quantities for the cases of parallel plates geometry and in a capillary tube, determining the relevant non-dimensional physical parameters for the magnetohydrodynamic flows explored here. The non-dimensional governing equations are solved analytically for the coupled hydrodynamic-magnetic problem, finding exact solutions for velocity profile, magnetic flux density and effective viscosity. In addition, a syringe pump type experimental setup that allows us carry out microflow in a capillary tube of a conducting liquid is also described. Experimental results are obtained from the described experimental methodology. Theoretical results and experimental data for the magnetohydrodynamic increment of the effective viscosity are compared, showing an excellent quantitative agreement within the experimental error bar. Finally, we introduce the topic of shear induced diffusion in incompressible magnetohydrodynamic flows in the presence of crystalline structures in sodium chloride solutions, which is intended to explore in future works.

**Key-words:** magnetohydrodynamics, electrically conducting fluid, internal flows, capillary viscometry, effective viscosity

# Lista de Figuras

Figura 1	– Fluxo magnético arqueando para cima da fotosfera solar. Retirado de Davidson (2017).	1
Figura 2	– Simulação computacional mostrando a estrutura do campo magnético gerado pelo escoamento magnetohidrodinâmico no interior da terra. Retirado de Davidson (2017).	2
Figura 3	– Comparação entre cristais de aço de peças fundidas não misturadas (à esquerda) e misturadas (à direita) através de um campo magnético rotativo. Retirado de Davidson (2017).	3
Figura 4	– Esquema para o escoamento MHD entre placas paralelas.	26
Figura 5	– Perfis de velocidades adimensionalizados pela velocidade média do escoamento magnetohidrodinâmico entre placas paralelas para diferentes números de Hartmann. Nesta — representa $Ha = 0$ , - - - - - $Ha = 0.1$ , - · - · - $Ha = 1$ , · · · · · $Ha = 5$ , - · - · - $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima em função do número de Hartmann.	32
Figura 6	– Perfis de densidade de fluxo magnético induzido para o escoamento magnetohidrodinâmico entre placas paralelas com diferentes números de Hartmann e $Re_m = 1$ . Nesta — representa $Ha = 0.1$ , - - - - - $Ha = 1$ , - · - · - $Ha = 5$ , · · · · · $Ha = 10$ .	33
Figura 7	– Fator de atrito em função do número de Hartmann para o escoamento magnetohidrodinâmico entre placas paralelas. Nesta, utilizando a reescala adequada, obtém-se o valor conhecido para $Ha = 0$ .	34
Figura 8	– Esquema para o escoamento MHD em um tubo axissimétrico.	35
Figura 9	– Perfis de velocidades adimensionalizados pela velocidade média do escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular para diferentes números de Hartmann e $\theta = 0$ . Nesta — representa $Ha = 0.1$ , - - - - - $Ha = 1$ , - · - · - $Ha = 5$ , · · · · · $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima em função do número de Hartmann.	41

Figura 10 – Perfis de velocidades adimensionalizados pela velocidade média do escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular para diferentes números de Hartmann e $\theta = \pi/2$ . Nesta — representa $Ha = 0.1$ , - - - - - $Ha = 1$ , - - - - - $Ha = 5$ , - - - - - $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima em função do número de Hartmann. . . . .	41
Figura 11 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido para o escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular com diferentes números de Hartmann, $Re_m = 1$ e $\theta = 0$ . Nesta — representa $Ha = 0.1$ , - - - - - $Ha = 1$ , - - - - - $Ha = 5$ , - - - - - $Ha = 10$ . . . . .	42
Figura 12 – Viscosidade efetiva adimensional em função do número de Hartmann para o escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular. . . . .	42
Figura 13 – Gráficos das isolinhas de velocidade para (a) $Ha = 0.1$ , (b) $Ha = 2$ , (c) $Ha = 5$ e (d) $Ha = 10$ . Nestas, a linha mais externa representa a parede do tubo e, da linha mais externa para a mais interna, tem-se linhas com velocidade de, respectivamente, $0.15u_{\max}$ , $0.3u_{\max}$ , $0.45u_{\max}$ , $0.6u_{\max}$ , $0.75u_{\max}$ e $0.9u_{\max}$ . . . . .	43
Figura 14 – Gráficos das isolinhas de densidade de fluxo magnético para (a) $Ha = 0.1$ , (b) $Ha = 2$ , (c) $Ha = 5$ e (d) $Ha = 10$ . Nestas, a linha mais externa representa a parede do tubo e, das linhas mais externas para as mais internas, tem-se linhas com intensidade de densidade de fluxo magnético de, respectivamente, $0B_{\max}$ , $0.15B_{\max}$ , $0.3B_{\max}$ , $0.45B_{\max}$ , $0.6B_{\max}$ , $0.75B_{\max}$ e $0.9B_{\max}$ . . . . .	44
Figura 15 – Esquema para o experimento em tubo capilar. Nesta (1) representa o reservatório de fluido, (2) a bomba de seringa já com a seringa instalada, (3) o transdutor de pressão, (4) o ímã permanente, (5) e (6) as tomadas de pressão e (7) o computador equipado com o sistema de aquisição de dados. . . . .	47
Figura 16 – Foto da bancada experimental utilizada. Nesta (1) representa o reservatório de fluido, (2) a bomba de seringa já com a seringa instalada, (3) o transdutor de pressão, (4) o ímã permanente, (5) e (6) as tomadas de pressão, (7) o computador, (8) o sistema de aquisição de dados ligado ao computador e (9) o tubo capilar. . . . .	48
Figura 17 – Tubos capilares de vidro da marca <i>Hildenberg</i> . . . . .	48
Figura 18 – Bomba de seringa modelo KDS 101 da marca <i>Cole &amp; Parmer</i> . . . . .	49
Figura 19 – Transdutor de pressão de relutância variável modelo DP-15 da marca <i>Valydine</i> . . . . .	49
Figura 20 – Banho térmico modelo ECO SILVER RE 415 da marca <i>LAUDA</i> . . . . .	50
Figura 21 – Gaussímetro modelo 5070 da marca <i>F. W. Bell</i> . . . . .	50
Figura 22 – Comparação dos resultados experimentais e analíticos do incremento magnético da viscosidade efetiva adimensional para o escoamento magnetohidrodinâmico em duto circular. . . . .	52



# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros adimensionais que regem a magnetohidrodinâmica. Aqui $u_c$ é uma velocidade característica, $\ell_c$ é um comprimento característico, $\nu$ é o coeficiente de difusão hidrodinâmico e $B_c$ é uma densidade de fluxo magnético característica. . . . .	24
Tabela 2 – Fração de empacotamento máximo de várias configurações de esferas monodispersas. Adaptada do proposto por Barnes, Hutton e Walters (1989). . . . .	54

# Lista de símbolos

MHD	Magnetohidrodinâmica
$\mathbf{f}_L$	Força de Lorentz por unidade de volume
$\rho_e$	Densidade de carga elétrica
$\mathbf{u}$	Campo de velocidades
$\mathbf{J}$	Densidade de corrente elétrica
$\mathbf{B}$	Campo de densidade de fluxo magnético
$\rho$	Massa específica
$\mathbf{x}$	Coordenada espacial ou Euleriana
$\mathbf{X}$	Coordenada material ou Lagrangiana
$t$	Variável paramétrica do tempo
$\delta V$	Volume material de um elemento fluido
$\delta(\mathbf{y})$	Distribuição delta de Dirac centrada em $\mathbf{y}$
$J$	Jacobiano da transformação de coordenadas $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada material ou Lagrangiana
$\nabla$	Operador diferencial nabla
$d\mathbf{x}$	Elemento de arco
$d\mathbf{S}$	Elemento vetorial de superfície
$\mathbf{F}$	Tensor gradiente de deformação
$m$	Massa
$\mathbf{P}$	Momento linear
$\Sigma \mathbf{F}$	Força resultante

$F_S$	Forças de superfície
$F_C$	Forças de campo
$\hat{n}$	Vetor ortonormal externo à superfície $S$
$b$	Forças de campo por unidade de volume
$\sigma$	Tensor de tensões
$L$	Momento angular
$\Sigma T$	Torque resultante
$T_C$	Torque gerado pelas forças de campo
$T_S$	Torque gerado pelas forças de superfície
$T_I$	Torque internos
$t_I$	Torque interno por unidade de volume
$\epsilon$	Tensor permutação de terceira ordem de Levi-Civita
$Q$	Tensor ortogonal
$\tau$	Parte deviatória do tensor de tensões
$D$	Tensor taxa de deformação
$\eta$	Tensor viscosidade de quarta ordem
$p_0$	Pressão termodinâmica
$p$	Pressão mecânica
$\kappa$	Segundo coeficiente de viscosidade
$I$	Tensor identidade
$\eta$	Viscosidade dinâmica
$\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$	Base canônica
$Re$	Número de Reynolds
$\dot{Q}_e$	Fluxo de carga elétrica
$F_L$	Força de Lorentz
$E$	Campo elétrico
$\sigma_e$	Tensor condutividade elétrica

$\sigma_e$	Condutividade elétrica
$\varepsilon_0$	Permissividade elétrica do vácuo
$\hat{\mathbf{t}}$	Vetor tangente ao circuito $C$
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo
$\tau_e$	Tempo de relaxação de carga elétrica
$\nu_m$	Coefficiente de difusão magnética
$N$	Parâmetro de interação
$Ha$	Número de Hartman
$Re_m$	Número de Reynolds magnético
$f_w$	Fator de atrito
$\eta_{ef}$	Viscosidade efetiva
$r, \theta, z$	Sistema de coordenadas cilíndrico
$a$	Raio do tubo circular
$Q$	Vazão
$\sigma$	Tensão de cisalhamento
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento
$\Delta P$	Diferença de pressão ao longo do capilar
$L$	Comprimento do tubo capilar
$\eta^*$	Viscosidade efetiva de uma suspensão
$\eta_0$	Viscosidade do fluido base de uma suspensão
$\phi$	Concentração
$\phi_m$	Fração de empacotamento máximo
$\{\eta\}$	Viscosidade intrínseca

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Visão Geral da Magnetohidrodinâmica	1
1.2	Objetivos	4
1.3	Estrutura do Trabalho	5
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>6</b>
2.1	Hipótese do Contínuo	6
2.2	Teorema da Localização	6
2.3	Relações de Euler	7
2.4	Relação Temporal para Elementos de Superfície	7
2.5	Teoremas do Transporte	8
2.5.1	Teorema do Transporte de Reynolds	8
2.5.2	Teorema do Transporte para uma Integral de Fluxo	9
2.6	Equações de Balanço	9
2.6.1	Balanço de Massa	9
2.6.2	Balanço de Momento Linear	10
2.6.3	Balanço de Momento Angular	11
2.7	Equações Constitutivas	12
2.7.1	Formalismo Constitutivo	12
2.7.2	Modelo Constitutivo para um Fluido Newtoniano	13
2.7.3	Equação de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis	14
2.8	Escoamentos Unidirecionais	15
2.8.1	Escoamento de Fluido Newtoniano Não Condutor Entre Placas Paralelas	15
2.8.2	Escoamento de Fluido Newtoniano Não Condutor em Tubo	16
2.9	Eletrodinâmica	16
2.9.1	Balanço de Carga Elétrica	16
2.9.2	Força de Lorentz	17
2.9.3	Lei de Ohm	17
2.9.4	Lei de Gauss	18
2.9.5	Natureza Solenoidal do Campo de Densidade de Fluxo Magnético	18

2.9.6	Lei de Faraday . . . . .	19
2.9.7	Lei de Ampère . . . . .	20
2.9.8	Equações de Maxwell . . . . .	20
<b>2.10</b>	<b>Magnetohidrodinâmica . . . . .</b>	<b>21</b>
2.10.1	Aproximações da MHD . . . . .	21
2.10.2	Equação do Transporte de Densidade de Fluxo Magnético . . . . .	23
2.10.3	Conjunto Completo de Equações da Magnetohidrodinâmica Incompressível . . . . .	24
2.10.4	Parâmetros Adimensionais da Magnetohidrodinâmica Incompressível . . . . .	24
 <b>3 MAGNETOHIDRODINÂMICA DE ESCOAMENTOS INTER-</b>		
	<b>NOS . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>Escoamento Entre Placas Paralelas . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1.1	Equações Governantes do Problema . . . . .	26
3.1.2	Forma Adimensional das Equações Governantes . . . . .	27
3.1.3	Campo de Velocidades . . . . .	28
3.1.4	Limite Assintótico para o Campo de Velocidades . . . . .	28
3.1.5	Densidade de Fluxo Magnético . . . . .	29
3.1.6	Campo de Pressão . . . . .	29
3.1.7	Vazão . . . . .	30
3.1.8	Expressão para o Campo Elétrico Adimensional . . . . .	30
3.1.9	Soluções Completas . . . . .	31
3.1.10	Fator de Atrito . . . . .	31
3.1.11	Viscosidade Efetiva . . . . .	31
3.1.12	Resultados e Análise . . . . .	32
<b>3.2</b>	<b>Escoamento em Tubo Axissimétrico . . . . .</b>	<b>34</b>
3.2.1	Equações Governantes do Problema . . . . .	34
3.2.2	Forma Adimensional das Equações Governantes . . . . .	36
3.2.3	Mudança de Variável . . . . .	36
3.2.4	Solução por Separação de Variáveis . . . . .	37
3.2.5	Solução para o Campo de Velocidades e para a Densidade de Fluxo Magnético Induzida . . . . .	39
3.2.6	Limite Assintótico para o Campo de Velocidades . . . . .	39
3.2.7	Solução para a Vazão . . . . .	39
3.2.8	Viscosidade efetiva . . . . .	40
3.2.9	Resultados e Análises . . . . .	40
 <b>4 EXPERIMENTO COM ESCOAMENTO MAGNETOHIDRO-</b>		
	<b>DINÂMICO EM TUBO CAPILAR . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Reologia e Reometria . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4.2</b>	<b>Viscosimetria Capilar . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4.3</b>	<b>Metodologia Experimental . . . . .</b>	<b>47</b>

4.3.1	Tubos Capilares . . . . .	47
4.3.2	Bomba de Seringa . . . . .	47
4.3.3	Transdutor de Pressão . . . . .	48
4.3.4	Banho Térmico . . . . .	49
4.3.5	Ímã Permanente . . . . .	49
4.3.6	Fluido Condutor . . . . .	50
4.3.7	Gaussímetro . . . . .	50
4.3.8	Calibração . . . . .	51
4.3.9	Propagação de Erro . . . . .	51
4.3.10	Medidas do Número de Hartmann . . . . .	51
4.3.11	Resultados e Análises . . . . .	52
	<b>5 TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>5.1</b>	<b>Escoamento Magnetohidrodinâmico Particulado . . . . .</b>	<b>53</b>
5.1.1	Dependência da Viscosidade na Concentração de Partículas . . . . .	53
5.1.1.1	Suspensões Diluídas . . . . .	53
5.1.1.2	Fração de Empacotamento Máximo . . . . .	54
5.1.1.3	Suspensões Newtonianas Concentradas . . . . .	54
5.1.2	Difusão Induzida por Cisalhamento . . . . .	55
	<b>6 CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>57</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>60</b>
	<b>APÊNDICE A – RELAÇÕES MATEMÁTICAS . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>A.1</b>	<b>Derivada Lagrangiana do Tensor Gradiente de Deformação e de seu Inverso . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>A.2</b>	<b>Espaço de Funções . . . . .</b>	<b>61</b>
A.2.1	Produto interno no espaço de funções . . . . .	61
A.2.2	Ortogonalidade de funções . . . . .	62
A.2.3	Completeness de um conjunto de funções . . . . .	62

# 1 Introdução

## 1.1 Visão Geral da Magnetohidrodinâmica

Magnetohidrodinâmica (MHD) é o estudo da interação entre campos magnéticos e fluidos condutores de eletricidade, como plasma, metais líquidos e água salgada, em movimento. Diversas aplicações práticas são conhecidas, as quais variam desde fenômenos físicos naturais à fenômenos metalúrgicos industriais, abrangendo tanto escoamentos de pequenas escalas quanto escoamentos de escalas astronômicas. Dentre as principais aplicações conhecidas e amplamente estudadas, destacam-se:

- Escoamento de plasma na astrofísica: Fenômenos astrofísicos, de larga escala, são repletos de plasma, de modo que diversos desses podem ser bem descritos pela MHD. Em particular, cita-se os ventos solares, que são correntes de partículas carregadas liberadas da corona solar. Um exemplo de um fenômeno astrofísico é apresentado pela Figura 1.



Figura 1 – Fluxo magnético arqueando para cima da fotosfera solar. Retirado de [Davidson \(2017\)](#).



- Campo magnético terrestre: De modo geral, há uma concordância que o campo magnético da terra é gerado pelo escoamento de ferro em seu núcleo. A energia mecânica é convertida em energia magnética através do estiramento e da torção de linhas de campo magnético (DAVIDSON, 2017).

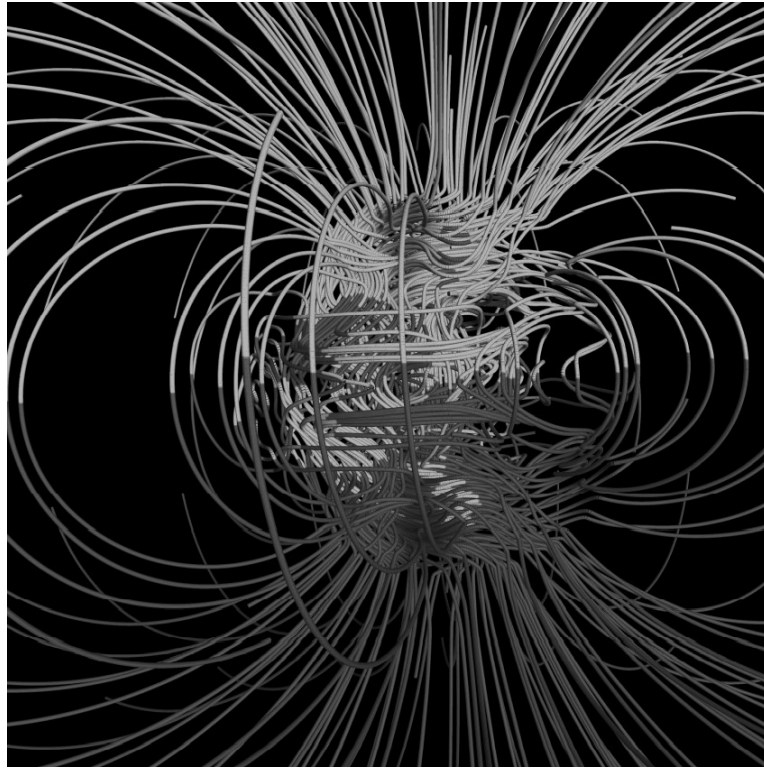


Figura 2 – Simulação computacional mostrando a estrutura do campo magnético gerado pelo escoamento magnetohidrodinâmico no interior da terra. Retirado de Davidson (2017).

- Escoamentos gerados artificialmente na indústria metalúrgica: Diversos processos metalúrgicos e problemas em aberto podem ser descritos pela MHD. Em particular pode-se utilizar de campos magnéticos para aquecer, bombear e misturar metais líquidos (DAVIDSON, 2017). Um problema de natureza industrial é a instabilidade magnetohidrodinâmica gerada em células de redução de alumínio. Ao se produzir alumínio por eletrólise (grande parte do alumínio é produzido por este meio), gera-se ondas interfaciais de gravidade que tendem a crescer dependendo da configuração da célula de redução, o que limita o uso de configurações com eficiência energética maior. A solução de tal problema com instabilidades poderia gerar economia de milhões para a indústria do alumínio (URATA, 1994). Outra aplicação de natureza industrial que é de interesse da MHD é a realização da mistura de metais líquidos através de campos magnéticos rotativos. Pode-se usar tais campos para misturar por exemplo aço no processo de solidificação, evitando estruturas com pouca homogeneidade, as quais podem não ser desejáveis. Um exemplo de cristais de aços formados com e sem a aplicação de campos magnéticos rotativos são apresentados

pela Figura 3. As principais aplicações na indústria metalúrgicas são discutidas a fundo por Davidson (1999).

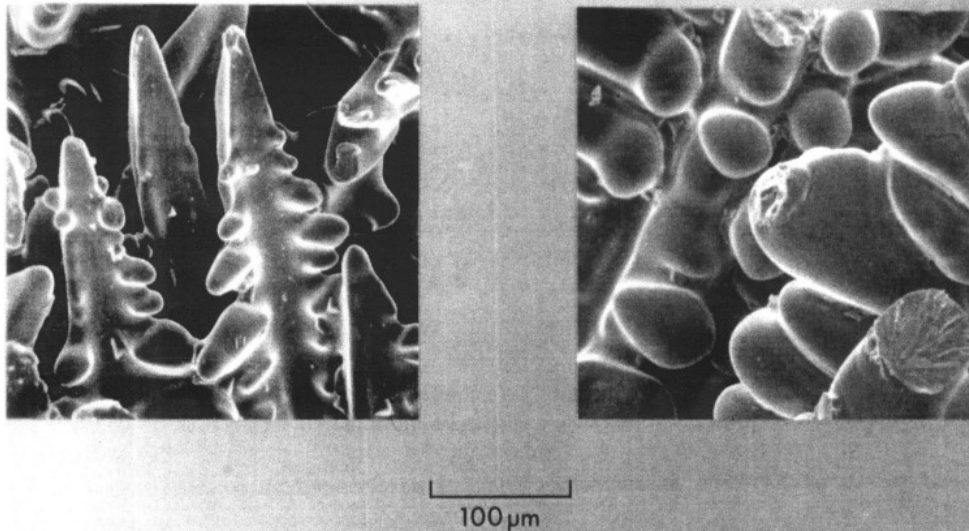


Figura 3 – Comparação entre cristais de aço de peças fundidas não misturadas (à esquerda) e misturadas (à direita) através de um campo magnético rotativo. Retirado de Davidson (2017).

A MHD modela o escoamento de fluidos eletricamente condutores acoplando as equações de Maxwell com as equações da hidrodinâmica (KNAEPEN; MOREAU, 2008). Em tal contexto, a densidade de cargas livres é invariavelmente muito pequena. Ora, dado que a velocidade característica do escoamento em geral é muito menor que a velocidade dos elétrons no fluido condutor e o fluido é um bom condutor, qualquer desbalanço entre carga de elétrons e cargas positivas é removido de modo quase instantâneo pelo campo elétrico criado por esse desbalanço (CUNHA, 2012). O acoplamento direto do eletromagnetismo na hidrodinâmica é feito introduzindo nas equações dela a força eletromagnética de Lorentz por unidade de volume para contexto da MHD,

$$\mathbf{f}_L = \rho_e \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1.1)$$

em que  $\rho_e$  é a densidade de carga elétrica,  $\mathbf{u}$  é o campo de velocidades,  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente e  $\mathbf{B}$  é a densidade de fluxo magnético.

A forma da força de Lorentz é especialmente vantajosa para aplicações em escoamentos internos. Ora, essa força é ditada apenas por duas grandezas eletromagnéticas que são ambas perfeitamente controláveis, a densidade de corrente e o campo magnético, de modo que o efeito da força eletromagnética pode ser usado para controlar escoamentos internos. Tal controle pode ser utilizado de modo a frear/acelerar escoamentos de maneiras convenientes à diversas aplicações diferentes (MULLER; BUHLER, 2001), como por exemplo para bombear fluidos condutores em dutos e canais. Nota-se que o inverso também pode ser feito, o escoamento pode ser utilizado como um gerador. Por conseguinte, nota-se que a investigação de escoamentos magnetohidrodinâmicos internos é um tema de enorme relevância devido às suas inúmeras aplicações práticas.

O estudo da magnetohidrodinâmica de escoamentos internos nasceu com o estudo de [Hartmann \(1937\)](#), o qual descreveu completamente o escoamento MHD entre placas paralelas com campo externo normal às paredes. Posteriormente, [Shercliff \(1952\)](#) resolveu o problema mais geral do escoamento MHD em um duto retangular. No que se refere ao escoamento MHD em tubo circular, diversos trabalhos desenvolveram estudos para diversas configurações de condutividade e espessura da parede e para diversos limites de números de Hartmann, que é o parâmetro físico adimensional que mede a razão entre força de Lorentz e força viscosa. Dentre esses destacam-se os trabalhos de [Shercliff \(1956\)](#), [Chang e Lundgren \(1961\)](#), [Uhlenbusch e Fischer \(1961\)](#), [Tanazawa \(1962\)](#), [Gold \(1962\)](#), [Ihara, Matsushima e Tajima \(1967\)](#) e [Samad \(1981\)](#), os quais em conjunto descrevem completamente o escoamento MHD em tubo circular com campo magnético uniforme vertical.

Os estudos mais recentes na área da magnetohidrodinâmica de escoamentos internos diversificam-se em áreas distintas, com um enfoque nos temas de escoamentos MHD turbulentos e escoamentos em diferentes geometrias. Na primeira linha, destacam-se os trabalhos numéricos de [Zikanov et al. \(2014\)](#), [Taheri, Askari e Mahdavi \(2020\)](#) e [Boeck, Krasnov e Zienicke \(2007\)](#). Já na segunda linha, cita-se o recente trabalho de [Kweyu, Manyonge e Bitok \(2021\)](#), que desenvolve numericamente soluções para o campo de velocidades magnetohidrodinâmico em tubo elíptico.

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral a investigação de maneira teórica e experimental de escoamentos magnetohidrodinâmicos internos permanentes sob a ação de um campo magnético externo uniforme e vertical, em particular escoamentos entre placas paralelas e em tubos circulares. Visa-se desenvolver modelos matemáticos analíticos que descrevam tais escoamentos, de modo a se analisar como o campo magnético e outras grandezas relevantes influenciam e podem possivelmente controlar o escoamento. Experimentalmente procura-se realizar, em uma bancada de bomba de seringa, o escoamento em tubo circular, de modo a se comparar os resultados experimentais de maneira qualitativa com os resultados teóricos. Por fim, visa-se propor um tema para futuros trabalhos. Desse modo, descreve-se, agora no contexto de líquidos condutores, uma metodologia para examinar o fenômeno de difusão de partículas induzida por cisalhamento, conforme já explorado por [Cunha e Hinch \(1996\)](#) em suspensões de partículas rugosas não magnéticas e mais recentemente por [Sinzato e Cunha \(2021\)](#) para fluidos polares.

Os objetivos específicos do trabalho são:

1. Obter as equações governantes para os escoamentos magnetohidrodinâmicos entre placas paralelas e em tubo circular utilizando as hipóteses de escoamento permanente e campo externo uniforme e vertical;

2. Adimensionalizar as equações governantes e obter os parâmetros físicos adimensionais que regem os escoamentos de interesse;
3. Obter solução analítica para o escoamento entre placas paralelas;
4. Gerar gráficos para escoamento entre placas paralelas e realizar a devida análise;
5. Obter solução analítica para o escoamento em tubo axissimétrico;
6. Gerar gráficos para escoamento em tubo e realizar a devida análise;
7. Utilizar a bancada de bomba de seringa presente no Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia - MicroReo/VORTEX na Universidade de Brasília para ensaiar água com NaCl, que é um fluido condutor, em tubos capilares sob a atuação de um campo magnético externo;
8. A partir dos experimentos realizados, gerar e analisar gráficos representativos das grandezas físicas de relevância, comparando resultados teóricos e experimentais quando possível;
9. Propor um tema a ser explorado em trabalhos futuros.

## 1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho divide-se em seis capítulos, os quais são dispostos em uma sequência lógica, isto é, a leitura de cada capítulo pressupõe a leitura dos anteriores.

O capítulo dois incorpora os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento integral do trabalho, demonstrando e apresentando pontos chave necessários das teorias hidrodinâmica, eletrodinâmica e magnetohidrodinâmica (que une as duas primeiras).

O capítulo três adentra a parte de escoamentos magnetohidrodinâmicos internos. Nesse discute-se os escoamentos MHD entre placas paralelas e em tubo, de modo que apresenta-se as hipóteses tomadas, encontra-se as equações governantes adimensionais e resolve-se os problemas de maneira analítica. Por fim, mostra-se os resultados analíticos obtidos de forma gráfica.

Já no quarto capítulo, descreve-se a bancada experimental de bomba de seringa, utilizada para realização de escoamentos magnetohidrodinâmicos com água salgada, assim como os resultados experimentais para o escoamento MHD em tubo.

O quinto capítulo apresenta ideias preliminares para trabalhos futuros, os quais podem aproveitar deste trabalho como base.

Por fim, o sexto capítulo apresenta as conclusões gerais obtidas por esse trabalho.

## 2 Fundamentos Teóricos

### 2.1 Hipótese do Contínuo

A hipótese do contínuo estabelece a possibilidade de se descrever grandezas físicas como funções contínuas de um ponto  $\mathbf{x}$  qualquer do espaço e do tempo. De acordo com tal hipótese, uma propriedade qualquer  $G(\mathbf{x}, t)$  é definida como a média volumétrica de uma propriedade microscópica no volume  $\delta V$  contido nos arredores do ponto  $\mathbf{x}$ , de tal modo que, no caso da massa específica,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V' \rightarrow \delta V} \frac{1}{\delta V'} \int_{\delta V'} \sum_k m_{(k)} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_k) d\mathbf{y}, \quad (2.1)$$

em que  $m_{(k)}$  é a massa da  $k$ -ésima molécula no volume  $\delta V$ ,  $\mathbf{x}_k$  representa a posição da  $k$ -ésima molécula e  $\mathbf{y}$  é o vetor posição que varre o volume  $\delta V$  nos arredores de  $\mathbf{x}$ . Observa-se que para a hipótese ser válida matematicamente e fisicamente,  $\delta V$  precisa ter tamanho para conter um número grande o suficiente de moléculas para que a média volumétrica das propriedades seja bem definida e confiável, mas deve ser pequeno o suficiente para ser considerado um ponto em comparação com a escala global do meio contínuo. Ou seja, se  $\lambda$  representa uma escala de comprimento molecular e  $L$  uma escala de comprimento global do escoamento,

$$\lambda^3 \ll \delta V \ll L^3. \quad (2.2)$$

A escala em que a hipótese do contínuo é válida é chamada de escala do contínuo e a porção de material contida em  $\delta V$  é chamada de partícula material ou elemento material.

### 2.2 Teorema da Localização

O teorema da localização estabelece que, sendo  $f(\mathbf{x}, t)$  uma função contínua na região  $\mathcal{V}$  e  $V$  um volume arbitrário tal que  $V \subseteq \mathcal{V}$ , então se

$$\int_V f(\mathbf{x}, t) dV = 0, \quad \forall V \subseteq \mathcal{V}, \quad (2.3)$$

tem-se que

$$f(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (2.4)$$

O teorema pode ser verificado notando-se que caso  $f(\mathbf{y}, t) \neq 0$  para algum ponto  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ ,  $V$  não poderia ser arbitrário, já que na região  $\Omega \subset \mathcal{V}$  que descreve os arredores de  $\mathbf{y}$  a integral seria diferente de zero, gerando uma contradição. Nota-se que formalmente tal teorema é uma consequência direta da continuidade de  $f$ .

## 2.3 Relações de Euler

Seja  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  a trajetória de um elemento material qualquer, em que a coordenada material  $\mathbf{X}$  representa uma condição de consistência tal que  $\mathbf{X} = \mathbf{x}(t = 0)$ , então,

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.5)$$

é o Jacobiano da transformação  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$ . Desse modo,

$$dV = JdV_0 \quad (2.6)$$

em que  $dV_0$  representa o volume no estado de referência fixo. Tal relação é conhecida como a primeira relação de Euler. Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}(\delta V) = \frac{d}{dt} \int_{\delta V} dV = \int_{\delta V_0} \frac{DJ}{Dt} dV_0 \quad (2.7)$$

e, pelo teorema da divergência,

$$\frac{d}{dt}(\delta V) = \oint_{\delta S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\delta V} (\nabla \cdot \mathbf{u}) J dV_0, \quad (2.8)$$

em que  $\frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla^1$  é o operador derivada material ou Lagrangiana, que representa a taxa de variação temporal observada por um referencial que translada com o elemento material. Por conseguinte,

$$\int_{\delta V_0} \left( \frac{DJ}{Dt} - J \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV_0 = 0, \quad (2.9)$$

de modo que, pelo teorema de localização,

$$\frac{DJ}{Dt} = J \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) é conhecida como a segunda relação de Euler.

## 2.4 Relação Temporal para Elementos de Superfície

Seja um elemento material de área (pertencente ao contínuo  $\mathcal{V}$ ) em um tempo  $t$  arbitrário,  $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ , e sua forma em um tempo de referência,  $d\mathbf{S}_0 = dS_0\mathbf{N}$ , em que  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{N}$  são os respectivos vetores normais exteriores. Assim,

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{x} \times d\tilde{\mathbf{x}} \quad (2.11)$$

<sup>1</sup> Observa-se que a notação  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}}$  refere-se à derivada tomada com  $\mathbf{X}$  constante, ou seja,  $X_1, X_2, X_3$  devem aparecer explicitamente no computo de tal derivada parcial.

e

$$d\mathbf{S}_0 = d\mathbf{X} \times d\widetilde{\mathbf{X}}, \quad (2.12)$$

em que  $d\mathbf{x}$  e  $d\widetilde{\mathbf{x}}$  são os elementos de arco geradores da superfície elementar e  $d\mathbf{X}$  e  $d\widetilde{\mathbf{X}}$  suas respectivas formas no tempo de referência. Então, usando o mapa  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ , que fisicamente representa as trajetórias, tem-se que

$$d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} \right) \times \left( \frac{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}{\partial \widetilde{\mathbf{X}}} \cdot d\widetilde{\mathbf{X}} \right), \quad (2.13)$$

em que  $\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ . Mas,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}{\partial \widetilde{\mathbf{X}}} = \mathbf{F}, \quad (2.14)$$

em que  $\mathbf{F}$  é conhecido como o tensor gradiente de deformação, já que  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ . Por outro lado, define-se o tensor cofator de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^*$ , a partir da relação

$$(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \times (\mathbf{F} \cdot d\widetilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}^* \cdot (d\mathbf{X} \times d\widetilde{\mathbf{X}}) \quad (2.15)$$

e mostra-se que (CHANDRASEKHARAI AH; DEBNATH, 1994)

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^* = \mathbf{J}\mathbf{I}, \quad (2.16)$$

ou ainda,

$$\mathbf{F}^* = J(\mathbf{F}^T)^{-1} = J\mathbf{F}^{-T}, \quad (2.17)$$

em que  $\mathbf{I}$  representa o tensor identidade. Por conseguinte,

$$d\mathbf{S} = dS_0 \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{N} = J dS_0 \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}. \quad (2.18)$$

## 2.5 Teoremas do Transporte

### 2.5.1 Teorema do Transporte de Reynolds

Seja  $G(\mathbf{x}, t)$  um campo arbitrário contínuo e diferenciável e  $V$  uma superfície arbitrária pertencente a um meio contínuo, então,

$$\frac{d}{dt} \int_V G(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \frac{D}{Dt} (GJ) dV_0, \quad (2.19)$$

de modo que, derivando e utilizando ambas as relações de Euler,

$$\frac{d}{dt} \int_V G(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left( \frac{DG}{Dt} + G \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV, \quad (2.20)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \int_V G(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left[ \frac{\partial G}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}G) \right] dV. \quad (2.21)$$

O resultado apresentado pela Equação (2.21) é conhecido como o teorema do transporte de Reynolds.

## 2.5.2 Teorema do Transporte para uma Integral de Fluxo

Seja  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  um campo vetorial contínuo e diferenciável e  $S$  uma superfície arbitrária pertencente a um meio contínuo, então, usando a Equação (2.18), a integral do fluxo de  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  através de uma superfície arbitrária  $S(t)$  pode ser calculada por

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_0} \frac{D}{Dt} (\mathbf{P} \cdot J\mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{N} dS_0. \quad (2.22)$$

Usando a segunda relação de Euler, Equação (2.10), e a relação deduzida no Apêndice A.1, Equação (A.5), obtém-se que

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dS = \int_{S_0} \left[ \frac{D\mathbf{P}}{Dt} + \mathbf{P}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \right] \cdot J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dS_0, \quad (2.23)$$

ou seja, usando novamente a Equação (2.18),

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(t)} \left( \frac{D\mathbf{P}}{Dt} + \mathbf{P} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.24)$$

A relação dada pela Equação (2.24) é análoga ao teorema do transporte de Reynolds, mas para uma integral de fluxo através de uma superfície  $S$ . A Equação (2.24) ainda pode ser escrita, utilizando a identidade vetorial para  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{P})^2$ , como

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{P}) + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{P}) \right] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.25)$$

A Equação (2.25) é uma equação cinemática e relaciona a derivada temporal de uma integral de fluxo de uma certa quantidade física com a integral de fluxo de derivadas temporais e espaciais dessa mesma quantidade. De fato, Zangwill (2012) demonstra a mesma equação a partir de uma análise puramente cinemática, tomando a superfície  $S(t)$  em tempos diferentes e infinitesimalmente próximos.

## 2.6 Equações de Balanço

### 2.6.1 Balanço de Massa

Como um elemento material é definido como o material contido em um volume  $\delta V$  nas vizinhanças de um ponto  $\mathbf{x}$ , a massa de cada elemento material o define e deve ser conservada. Assim, um volume arbitrário  $V(t)$  com massa  $m$  formado sempre pelas mesmas partículas materiais também deve ter sua massa conservada, de modo que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (2.26)$$

<sup>2</sup>  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{P}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{P}) - \mathbf{P}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{P}$



Usando o teorema do transporte de Reynolds,

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho) \right] dV = 0. \quad (2.27)$$

Por fim, pelo teorema da localização,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.28)$$

A Equação (2.28) é a equação da continuidade de massa. No caso de fluidos incompressíveis tal equação reduz-se a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.29)$$

## 2.6.2 Balanço de Momento Linear

Da segunda lei de Newton para um elemento material, a variação temporal do momento linear deste elemento deve ser igual ao somatório das forças atuando sobre ele, isto é. Assim, para um volume arbitrário  $V(t)$ , cuja superfície é  $S(t)$ , formado sempre dos mesmos elementos materiais e com momento linear total  $\mathbf{P}$ ,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \sum \mathbf{F}, \quad (2.30)$$

em que  $\sum \mathbf{F}$  representa a força resultante em  $V(t)$ . Para um meio contínuo, a força resultante sobre um elemento material pode ser sintetizada por dois tipos de forças de naturezas diferentes, as forças de superfície e as forças de campo. A primeira recebe esse nome devido à sua natureza molecular e conseqüente decaimento acentuado com a distância. Como na escala molecular a força decai rapidamente, na escala do contínuo tal força é vista como uma força atuando na superfície. A segunda atua sobre todo volume material e é proporcional à ele, justificando seu nome. Por conseguinte,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_C, \quad (2.31)$$

em que  $\mathbf{F}_S$  representa as forças de superfície e  $\mathbf{F}_C$  representa as forças de campo. Por outro lado,

$$\mathbf{F}_S = \oint_{S(t)} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}; \mathbf{x}, t) dS \quad (2.32)$$

e

$$\mathbf{F}_C = \int_{V(t)} \mathbf{b} dV, \quad (2.33)$$

em que  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}; \mathbf{x}, t)$  é o vetor de tensões e representa a força atuando na superfície de um elemento material,  $\mathbf{b}$  representa as forças de campo por unidade de volume e  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário normal à  $S(t)$ .

O vetor de tensões, assim como foi escrito, não é fundamentalmente um campo, já que é função da normal à superfície. O primeiro a resolver esse problema com a apresentação das forças superficiais foi Cauchy, mostra-se que (LAI; KREML; RUBEN, 2010)

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}; \mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \quad (2.34)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}$  é conhecido como o tensor de tensões de Cauchy, um tensor de segunda ordem, e a Equação (2.34) define o que é conhecido como o teorema de Cauchy.

Então, das Equações (2.31), (2.32), (2.33) e (2.34),

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \oint_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS + \int_{V(t)} \mathbf{b} dV. \quad (2.35)$$

Aplicando o teorema do transporte de Reynolds junto com o teorema da divergência para tensores (ARIS, 1989),

$$\int_{V(t)} \left( \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \right) dV = 0, \quad (2.36)$$

de modo que, aplicando o teorema da localização,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (2.37)$$

A Equação (2.37) é a equação de Cauchy e representa o balanço de momento linear de um meio contínuo. Nota-se que o tensor de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$ , é dado por uma equação constitutiva caracterizada pelo material, sólido ou fluido, com que se deseja trabalhar.

### 2.6.3 Balanço de Momento Angular

Da segunda lei de Newton para o movimento de rotação de um elemento material, a variação de seu momento angular deve ser igual ao somatório de torques agindo sobre ele. Então, para um volume arbitrário  $V(t)$ , cuja superfície é  $S(t)$ , formado sempre dos mesmos elementos materiais e com momento angular total  $\mathbf{L}$ ,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV = \sum \mathbf{T}. \quad (2.38)$$

O torque resultante é dado por

$$\sum \mathbf{T} = \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_I \quad (2.39)$$

em que

$$\mathbf{T}_C = \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV \quad (2.40)$$

é o torque gerado pelas forças de campo,

$$\mathbf{T}_S = \oint_{S(t)} \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dS \quad (2.41)$$

é o torque gerado pelas forças de superfície e

$$\mathbf{T}_I = \int_{V(t)} \mathbf{t}_I dV \quad (2.42)$$

é o torque interno aos elementos materiais. Note que  $\mathbf{t}_I$  é o torque interno por unidade de volume. Por conseguinte,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV + \oint_{S(t)} \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dS + \int_{V(t)} \mathbf{t}_I dV. \quad (2.43)$$

Usando o teorema da divergência (ARIS, 1989), o teorema do transporte de Reynolds e manipulando algebricamente se obtém que

$$\int_{V(t)} \mathbf{x} \times \left( \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \right) dV - \int_{V(t)} (\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{t}_I) dV = 0, \quad (2.44)$$

Em que  $\boldsymbol{\epsilon}$  é o tensor permutação de terceira ordem de Levi-Civita. Usando a equação de Cauchy e aplicando o teorema da localização a Equação (2.44) reduz-se a

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{t}_I. \quad (2.45)$$

Torques internos são torques gerados no interior de um elemento material. O único caso conhecido em que se pode ter torque sendo gerado internamente à um elemento material é o caso de fluido polar, ou magnético, onde partículas magnéticas no interior de tal elemento podem gerar torques magnéticos. Neste caso, como no escopo desse trabalho não se trabalha com fluidos polares, apenas condutores,  $\mathbf{t}_I = \mathbf{0}$ , de modo que

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad (2.47)$$

ou seja, o tensor de tensões é simétrico.

## 2.7 Equações Constitutivas

### 2.7.1 Formalismo Constitutivo

Em geral, as Equações de balanço por si só não caracterizam um sistema físico. Ora, a equação de Cauchy e outras equações de balanço da mecânica dos meios contínuos são escrita de maneira geral, para material sólido ou fluido, mas para descrever completamente um sistema físico é necessário introduzir uma caracterização do material, incluindo as características intrínsecas de cada material. Tal caracterização é introduzida nas equações de balanço através de uma equação constitutiva para o tensor de tensões de Cauchy. Uma equação de balanço pode ser construída e proposta através de modelos teóricos e observações experimentais e, por consistência física, deve seguir alguns princípios listados por Cunha (2021a):

- Princípio da causalidade: Estabelece que a tensão em um momento qualquer depende dos estados de deformação do material em tempos  $t'$  anteriores. Desse modo, uma equação constitutiva geral deve relacionar o estado de tensões no tempo  $t$  aos eventos em tempos passados  $t'$ .
- Princípio da ação local: Estabelece que apenas moléculas nas vizinhanças de  $\mathbf{x}$  afetam o estado de tensão no ponto  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ ;

- Princípio da invariância de coordenadas: Estabelece que a forma funcional que define a tensão num ponto  $\mathbf{x}$  num instante  $t$  deve ser independente do sistema de coordenadas que se usa para descrevê-la;
- Princípio da *Fading Memory*: Estabelece que os eventos mais próximos, temporalmente, de  $t$  devem ter mais influência na tensão no tempo  $t$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ , do que eventos mais distantes;
- Princípio da objetividade (indiferença material do referencial): Estabelece que o funcional que define o estado instantâneo de tensão, ou a equação constitutiva, não deve depender do observador ou do referencial de observação, ou seja, independente do estado dinâmico do referencial, o material continua sendo o mesmo. Matematicamente, se  $\mathcal{F}\{\mathbf{G}\}$  é um funcional que define o tensor de tensões, então, sob uma transformação de corpo rígido da forma

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0^* + \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.48)$$

em que  $\mathbf{Q}(t)$  é um tensor ortogonal e  $\mathbf{x}_0^*$  é a distância entre os dois referenciais,  $\mathcal{F}$  deve transformar tal que (CUNHA, 2021a)

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \mathcal{F}\{\mathbf{G}\} \cdot \mathbf{Q}^T(t) = \mathcal{F}\{\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Q}^T(t)\}. \quad (2.49)$$

A Equação (2.48) representa a transformação homogênea de Truesdell e Noll (TRUESDELL, 1977).

Então, utilizando os princípios da causalidade e da ação local, uma equação constitutiva geral deve ter a forma apresentada por

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\left\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(t')\right\}; \quad -\infty < t' < t, \quad (2.50)$$

em que  $\mathcal{F}$  é uma forma funcional,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.51)$$

e o símbolo  $-\infty$  foi usado para representar todo o histórico anterior à  $t$ . Além disso, a equação constitutiva dada pela Equação (2.50) deve, sob uma transformação homogênea de Truesdell e Noll, transformar de acordo com

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(t')\right\} \cdot \mathbf{Q}^T(t) = \mathcal{F}\left\{\mathbf{Q}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(t') \cdot \mathbf{Q}^T(t)\right\}. \quad (2.52)$$

## 2.7.2 Modelo Constitutivo para um Fluido Newtoniano

Em geral, o tensor de tensões para um fluido pode ser escrito como (ARIS, 1989)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.53)$$

em que  $\boldsymbol{\tau}$  representa a parte deviatórica<sup>3</sup> de  $\boldsymbol{\sigma}$ . Generalizando a lei da viscosidade de Newton para uma proporcionalidade geral obtém-se que o tensor  $\boldsymbol{\tau}$  pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} : \mathbf{D}, \quad (2.54)$$

em que  $\boldsymbol{\eta}$  é um tensor viscosidade de quarta ordem e  $\mathbf{D}$  é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidades,  $\nabla \mathbf{u}$ , conhecido como tensor taxa de deformação. Considerando o material homogêneo e isotrópico,  $\boldsymbol{\eta}$  não deve ter dependência espacial e suas componentes devem permanecer as mesmas em qualquer sistema de coordenadas, ou seja (ARIS, 1989),

$$\eta'_{ijkl} = \eta_{ijkl} \quad (2.55)$$

e

$$\eta_{ijkl} = C_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + C_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + C_3 \delta_{il} \delta_{kj}, \quad (2.56)$$

em que  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes materiais e  $\eta'_{ijkl}$  representa as componentes de  $\boldsymbol{\eta}$  em um sistema de coordenadas transformado. Utilizando as Equações (2.56) e (2.54) na Equação (2.53), mostra-se que o tensor de tensões para um fluido Newtoniano é dado por (BATCHELOR, 1967)

$$\boldsymbol{\sigma} = - (p_0 - \kappa \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\eta \left[ \mathbf{D} - \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} \right], \quad (2.57)$$

em que  $\kappa$  é o segundo coeficiente de viscosidade e incorpora efeitos de dissipação devido à expansão e compressão volumétrica,  $p_0$  é a pressão termodinâmica e  $\eta$  é a viscosidade dinâmica. Um fluido cujo tensor de tensões é descrito pela Equação (2.57) é chamado de fluido Newtoniano não-Stokesiano. O nome de tal fluido faz sentido ao se apresentar o fluido Newtoniano Stokesiano, o qual se adota a hipótese de Stokes dada por  $\kappa \approx 0$  e assim

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\eta \left[ \mathbf{D} - \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} \right]. \quad (2.58)$$

Nota-se que no caso do fluido Stokesiano a pressão termodinâmica é igual a pressão mecânica  $p$ , ou seja,  $p = p_0$ . Por fim, se o fluido é incompressível o tensor de tensões se reduz à

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{D}. \quad (2.59)$$

### 2.7.3 Equação de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis

No caso de um fluido Newtoniano incompressível, usando o tensor de tensões dado pela Equação (2.59) na equação de Cauchy, obtém-se que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b}. \quad (2.60)$$

<sup>3</sup> Um tensor deviatórico é um tensor cujo traço é nulo. Um tensor qualquer de segunda ordem pode ser escrito como a soma de uma parte isotrópica com uma deviatórica.

A Equação (2.60) é a Equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível, que em conjunto com a equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.61)$$

descreve o movimento de um fluido Newtoniano incompressível.

## 2.8 Escoamentos Unidirecionais

Considere o escoamento bidimensional unidirecional permanente interno ao longo da direção  $x$ . Então, pela equação da continuidade,  $\mathbf{u} = u(y)\hat{\mathbf{e}}_x$ , e assim

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = u \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x = \mathbf{0}. \quad (2.62)$$

Nota-se que nesse caso  $y$  representa a direção do gradiente de velocidades e a hipótese de unidirecionalidade é caracterizada por  $\mathbf{u}$  ortogonal à  $\nabla \mathbf{u}$ . Por outro lado, da equação de Navier-Stokes para um escoamento incompressível permanente tem-se que

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b}. \quad (2.63)$$

Por conseguinte, é necessário que  $|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}| \ll |\eta \nabla^2 \mathbf{u}|$ , o que pode ser mostrado, através de uma análise de escala, como equivalente à

$$Re_h \frac{h}{\ell} \ll 1, \quad (2.64)$$

em que  $U$  é a velocidade média,  $h$  é o comprimento característico na direção do gradiente de velocidades,  $\ell$  é o comprimento característico na direção da velocidade e  $Re_h = \rho U h / \eta$  é o número de Reynolds em relação à  $h$ . A Equação (2.64) apresenta a condição para unidirecionalidade do escoamento em questão, ou seja, a hipótese para que  $\mathbf{u}$  seja ortogonal à  $\nabla u_i$ .

### 2.8.1 Escoamento de Fluido Newtoniano Não Condutor Entre Placas Paralelas

Para um fluido Newtoniano não condutor escoando em regime permanente entre duas placas paralelas imóveis, utilizando as hipóteses de incompressibilidade e unidirecionalidade, a equação de Navier-Stokes fornece

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}. \quad (2.65)$$

Nota-se que as placas são localizadas em  $y = \pm h$ , o escoamento ocorre na direção de  $x$  e o gradiente de velocidades está na direção de  $y$ . Pela condição de não deslizamento  $u(y = \pm h) = 0$ , de modo que, integrando e aplicando tal condição de contorno,

$$u = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2). \quad (2.66)$$

Por outro lado, a vazão por unidade de comprimento na direção de  $z$  é calculada como

$$\frac{Q}{\ell} = \int_{-h}^h u(y) dy, \quad (2.67)$$

ou seja,

$$\frac{Q}{\ell} = -\frac{2}{3\eta} \frac{dp}{dx} h^3. \quad (2.68)$$

A Equação (2.68) apresenta o resultado conhecido como a lei de Poisuille para escoamento entre placas paralelas.

## 2.8.2 Escoamento de Fluido Newtoniano Não Condutor em Tubo

No caso do escoamento de um fluido Newtoniano não condutor escoando em regime permanente em um tubo de seção circular de raio  $a$ , usando as hipóteses de unidirecionalidade e de incompressibilidade, a equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas fornece

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right). \quad (2.69)$$

Aplicando a condição de contorno de não deslizamento e impondo que a velocidade deve ser finita em  $r = 0$  obtém-se que o perfil de velocidades é dado por

$$u(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2). \quad (2.70)$$

Por outro lado, a vazão é calculada a partir de

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a u r dr d\theta, \quad (2.71)$$

de modo que

$$Q = -\frac{1}{8\eta} \frac{dp}{dz} \pi a^4. \quad (2.72)$$

A Equação (2.72) é conhecida como a lei de Hagen-Poiseuille.

## 2.9 Eletrodinâmica

### 2.9.1 Balanço de Carga Elétrica

Em geral, a carga elétrica total deve se conservar, de modo que sendo  $V$  uma região fixa arbitrária de um meio contínuo, a taxa de variação da carga elétrica dentro dessa região deve ser igual ao negativo do fluxo de carga deixando a região, isto é,

$$\int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV = -\dot{Q}_e, \quad (2.73)$$

em que  $\dot{Q}_e$  é o fluxo de carga elétrica saindo de  $V$ . Portanto, pela definição de fluxo,

$$\int_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.74)$$

Aplicando o teorema da divergência (ARIS, 1989) e o teorema da localização à Equação (2.74) obtém-se que

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.75)$$

A Equação (2.75) é a equação de balanço de carga elétrica.

## 2.9.2 Força de Lorentz

A força eletromagnética total sobre uma carga é dada pela soma das forças devido ao campo elétrico e ao campo magnético. Portanto (GRIFFITHS, 1999),

$$\mathbf{F}_L = q_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.76)$$

é conhecida como a força de Lorentz, em que  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico e  $q_e$  é a carga elétrica. Por conseguinte, a força de Lorentz por unidade de volume para um meio contínuo qualquer é dada por

$$\mathbf{f}_L = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.77)$$

## 2.9.3 Lei de Ohm

O campo densidade de corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  descreve o fluxo de carga elétrica em cada ponto do meio contínuo. Desse modo,  $\mathbf{J}$  deve ser definido por uma equação constitutiva, já que o modo com que as cargas elétricas se deslocam no meio contínuo é intrinsecamente dependente do tipo de material, de sua natureza molecular. Para haver uma corrente elétrica, é necessário que haja uma força motriz gerando o movimento das cargas, que em geral é a força eletromagnética. Então,

$$\mathbf{J} \propto \mathbf{F}_L. \quad (2.78)$$

A relação constitutiva linear dada pela Equação (2.78) é observada experimentalmente para vasta maioria dos materiais condutores, incluindo os materiais trabalhados neste trabalho no contexto da magnetohidrodinâmica. Como campos eletromagnéticos são uma manifestação relativística de campos elétricos (BARUT, 1980), utilizando um referencial no qual o condutor está em repouso a força eletromagnética é proporcional ao campo elétrico, o que implica em

$$\mathbf{J} \propto \mathbf{E}_r, \quad (2.79)$$

em que  $\mathbf{E}_r$  representa o campo elétrico visto de um referencial no qual se vê o condutor em repouso. A forma mais geral de se relacionar dois vetores é através de um tensor de segunda ordem (ARIS, 1989), então,

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \mathbf{E}_r, \quad (2.80)$$



em que  $\boldsymbol{\sigma}_e$  é o tensor condutividade elétrica. No caso do material ser homogêneo e isotrópico,  $\boldsymbol{\sigma}_e = \sigma_e \mathbf{I}$ , em que  $\sigma_e$  é a constante de condutividade elétrica. Por conseguinte, nesse caso,

$$\mathbf{J} = \sigma_e \mathbf{E}_r. \quad (2.81)$$

A Equação (2.81) representa a lei de Ohm.

Para utilizar a Equação (2.79) para um fluido condutor, onde o condutor propriamente dito não é estacionário, faz-se uma transformação de Lorentz para mudar o referencial para um que tenha a velocidade local do fluido,  $\mathbf{u}$ , em relação ao referencial utilizado para descrever a Equação (2.79). Assim, para um fluido condutor com velocidade  $|\mathbf{u}|$  muito menor que a velocidade da luz (DAVIDSON, 2017),

$$\mathbf{J} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.82)$$

A Equação (2.82) apresenta a forma da lei de Ohm para um fluido condutor.

#### 2.9.4 Lei de Gauss

A lei de Gauss na forma integral estabelece que, para uma superfície fechada qualquer  $S$ , o fluxo através dela é proporcional à carga em seu interior, denotada por  $Q_c$  (JACKSON, 1999). Matematicamente,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0}, \quad (2.83)$$

em que  $\varepsilon_0$  é a constante de permissividade elétrica do vácuo. Como a carga elétrica contida em  $S$  é dada por

$$Q_c = \int_V \rho_e dV, \quad (2.84)$$

utilizando o teorema da divergência (ARIS, 1989) e o teorema da localização a Equação (2.83) reduz-se à

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad (2.85)$$

que é a lei de Gauss na forma diferencial.

#### 2.9.5 Natureza Solenoidal do Campo de Densidade de Fluxo Magnético

Ao se calcular o fluxo do campo magnético sobre qualquer superfície fechada mostra-se que (JACKSON, 1999)

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (2.86)$$

Então, utilizando o teorema da divergência (ARIS, 1989) e o teorema da localização, a Equação (2.86) reduz-se a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.87)$$

A Equação (2.87) demonstra a natureza solenoidal<sup>4</sup> do campo de densidade de fluxo magnético.

### 2.9.6 Lei de Faraday

Observa-se experimentalmente que a variação da densidade de fluxo magnético através um circuito fechado (formado por um condutor) em repouso induz corrente elétrica nele, de tal modo que essa corrente deve ser proporcional à tal variação de fluxo de  $\mathbf{B}$ . Por outro lado, para movimentar os elétrons inicialmente estacionários através do circuito condutor é necessário que seja gerado um campo elétrico tangente à trajetória que os elétrons percorrem. Por conseguinte, a variação da densidade de fluxo magnético através de uma superfície  $S$  deve gerar um campo elétrico tangencial ao circuito  $C$  formado pelo bordo de  $S$ <sup>5</sup>. Matematicamente tem-se que

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -k \frac{d}{dt'} \int_S \mathbf{B}' \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (2.88)$$

ou ainda, usando uma transformação de Lorentz (ZANGWILL, 2012) para mudar para um referencial geral no qual  $S = S(t)$  se move com o campo de velocidades do meio contínuo,  $\mathbf{u}$ ,

$$\oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (2.89)$$

em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade,  $\hat{\mathbf{t}}$  é o vetor tangente à  $C$  e  $\mathbf{E}'$  e  $\mathbf{B}'$  são, respectivamente, o campo elétrico e o campo de densidade de fluxo magnético vistos pelo referencial no qual  $S$  está em repouso. Nota-se que o sinal negativo posto na Equação (2.89) é colocado para que o sentido da corrente gerada esteja de acordo com observações experimentais. A necessidade de tal sinal é conhecida como lei de Lenz. Impondo uma covariância Lorentziana<sup>6</sup> à Equação (2.89) ela reduz-se a (JACKSON, 1999)

$$\oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.90)$$

Usando o teorema de Stokes (ARIS, 1989) e a relação cinemática dada pela Equação (2.25) na Equação (2.90) obtém-se que

$$\int_{S(t)} [\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.91)$$

de modo que, pelo teorema da Localização e pela solenoidalidade de  $\mathbf{B}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.92)$$

As Equações (2.90) e (2.92) representam a lei de Faraday nas formas integral e diferencial, ambas para superfícies materiais com movimento arbitrário. É possível mostrar que a

<sup>4</sup> Um campo solenoidal é um campo cujo divergente é nulo.

<sup>5</sup> Michael Faraday, um físico britânico, foi o primeiro a perceber, experimentalmente, tal fenômeno.

<sup>6</sup> Covariância Lorentziana neste contexto é sinônimo de concordância com a transformação de Lorentz ao se mudar de um sistema de referencia inercial para outro inercial.

Equação (2.92) é covariante em relação a transformações de Lorentz<sup>7</sup> Nota-se que, devido aos efeitos relativísticos intrínsecos da teoria eletromagnética, o tratamento da lei de Faraday para uma superfície com movimento genérico envolve diversos pontos em que uma análise detalhada é necessária. O tema é discutido com toda cautela necessária por Gelman (1991).

### 2.9.7 Lei de Ampère

Observa-se experimentalmente que uma corrente passando por uma área  $S$  é geradora de um campo de densidade de fluxo magnético que circula tal área. Utilizando esse fato, se  $C$  é o circuito formado pelo bordo de  $S$ , mostra-se que (JACKSON, 1999)

$$\int_C \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} dl = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (2.93)$$

em que  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo. Aplicando o teorema de Stokes (ARIS, 1989) e o teorema da localização,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.94)$$

As Equações (2.93) e (2.94) apresentam a lei de Ampère nas formas integral e diferencial, respectivamente.

### 2.9.8 Equações de Maxwell

Observa-se que o experimento que foi utilizado como base para a dedução da lei de Ampère é feito para uma corrente estacionária, de modo que não há motivos para crer que ela seja válida fora dessa condição. De fato, a hipótese de corrente estacionária está contida na lei de Ampère, já que tomando o divergente da Equação (2.94) obtém-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.95)$$

que é a equação da continuidade de cargas elétricas para correntes estacionárias, em que  $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ . Para corrigir essa limitação, Maxwell impôs que a lei de Ampère estivesse em acordo com a forma mais geral da continuidade. Substituindo a lei de Gauss na forma diferencial na equação da continuidade de carga elétrica se obtém que

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.96)$$

de modo que para a lei de Ampère obedecer a Equação (2.96), que é uma forma alternativa da equação geral da continuidade de carga, é necessário fazer a substituição

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.97)$$

<sup>7</sup> Ou invariante a uma transformação de Lorentz. Tais equações mantêm a mesma forma ao sofrer uma transformação de Lorentz.

Por conseguinte, impondo a continuidade geral na lei de Ampère, a Equação (2.94) se torna

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.98)$$

que é conhecida como a equação de Ampère-Maxwell.

O conjunto da Lei de Gauss, da natureza solenoidal do campo de densidade de fluxo magnético, da lei de Faraday e da lei de Ampère-Maxwell, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad (2.99)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.100)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.101)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.102)$$

descrevem o conjunto de equações conhecido como as equações de Maxwell, conjunto o qual rege a dinâmica de campos eletromagnéticos e é invariante às transformações de Lorentz. Nota-se que tais equações incluem implicitamente a equação da continuidade de carga, já que ela foi imposta à lei de Ampère. Isso pode ser notado também tomando o divergente da lei de Ampère-Maxwell e substituindo a lei de Gauss, o que recupera a equação da continuidade.

## 2.10 Magnetohidrodinâmica

### 2.10.1 Aproximações da MHD

Alguns termos das equações que regem a eletrodinâmica podem ser desprezados no contexto de escoamentos magnetohidrodinâmicos não-relativísticos, isto é, em regimes que a velocidade do escoamento é muito menor do que a velocidade típica de elétrons viajando dentro de condutores. Os escoamentos explorados através deste trabalho estão englobados nesse grupo de casos, já que o tempo típico de relaxação de cargas em um condutor é notavelmente menor do que os tempos característicos dos escoamentos atribuídos às aplicações aqui exploradas.

Substituindo a lei de Ohm para fluidos condutores, Equação (2.82), e a lei de Gauss, Equação (2.99), na equação da continuidade de carga, Equação (2.75), se obtém que

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\rho_e}{\tau_e} + \sigma_e \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.103)$$

em que  $\tau_e = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_e}$  é um tempo de relaxação de carga elétrica, o qual pode ser interpretado como o tempo característico necessário para que ocorra a relaxação de desbalanços elétricos. Tal interpretação para  $\tau_e$  pode ser feita observando-se que no caso de repouso, isto é,

$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , a Equação (2.103) reduz-se à

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\frac{\rho_e}{\tau_e}, \quad (2.104)$$

de modo que

$$\rho_e = \rho_e(t=0)e^{-t/\tau_e}. \quad (2.105)$$

A Equação (2.105) mostra que, passado tempo o suficiente, qualquer carga no interior do condutor é movida para a superfície. O tempo característico de tal processo é  $\tau_e$ . Mostra-se que no caso de condutores metálicos típicos o tempo de relaxação de carga é de aproximadamente  $10^{-18}$  s (DAVIDSON, 2017), ou seja, em um condutor estacionário as cargas vão praticamente de forma imediata para sua superfície.

Retornando ao caso onde há movimento, a Equação (2.103) pode ser escrita como

$$\rho_e = -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.106)$$

já que os escoamentos de grande interesse da magnetohidrodinâmica têm tempos característicos muito menores que os tempos de relaxação de cargas e assim

$$\left| \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\rho_e}{\tau_e} \right|. \quad (2.107)$$

Realizando uma análise da escala de  $\rho_e$  na Equação (2.106) e de  $|\mathbf{E}|$  na lei de Ohm se mostra que

$$|\rho_e \mathbf{E}| \ll |\mathbf{J} \times \mathbf{B}|, \quad (2.108)$$

em que  $u_c$ ,  $\ell_c$ ,  $J_c$  e  $B_c$  são, respectivamente, a velocidade, o comprimento, a densidade de corrente e o campo de densidade de fluxo magnético característicos. Por conseguinte, no contexto da magnetohidrodinâmica a força de Lorentz é simplificada para

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.109)$$

Nota-se que da Equação (2.106) que no caso onde há movimento, o escoamento pode até manter cargas no interior do condutor e não nas bordas, mas essas cargas são tão poucas que o campo elétrico geradas por elas é pequeno o suficiente para que a força gerada por ele, isto é,  $\rho_e \mathbf{E}$ , seja desprezível.

Por outro lado, pelo tempo de relaxação de carga ser extremamente pequeno, mostra-se através de uma análise de escala que

$$\left| \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{J}|. \quad (2.110)$$

de modo que a equação da continuidade, Equação (2.75), e a lei de Ampère-Maxwell, Equação (2.102), para o contexto da magnetohidrodinâmica podem ser escritas, respectivamente, como

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.111)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.112)$$

Nota-se que a Equação (2.111) é equivalente à

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad (2.113)$$

e que, apesar de ser necessária para descrever diversos fenômenos físicos importantes, como ondas eletromagnéticas, a correção de Maxwell pode ser desconsiderada sem prejuízo significativo no contexto da magnetohidrodinâmica.

## 2.10.2 Equação do Transporte de Densidade de Fluxo Magnético

Para completar o conjunto de equações que regem a magnetohidrodinâmica, é necessário uma equação de evolução para o campo de densidade de fluxo magnético,  $\mathbf{B}$ . Usando a lei de Ohm e a lei de Faraday dentro da lei de Faraday obtemos que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0 \sigma_e} \nabla \times \mathbf{B} \right). \quad (2.114)$$

Como  $\mathbf{B}$  é solenoidal, a Equação (2.114) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.115)$$

em que  $\nu_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma_e}$  é o coeficiente de difusão de densidade de fluxo magnético. Utilizando a identidade vetorial para  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ <sup>8</sup> e a solenoidalidade de  $\mathbf{B}$  mostra-se que a Equação (2.115) é análoga à

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.116)$$

Os termos presentes na Equação (2.116) podem ser interpretados como:

- $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ : variação temporal de  $\mathbf{B}$  vista observando-se um ponto fixo do espaço;
- $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}$ : Transporte convectivo de  $\mathbf{B}$ ;
- $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u}$ : Estiramento e rotação das linhas de campo magnético pelo escoamento;
- $\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u})$ : Efeito da expansão volumétrica de um elemento material sobre as linhas de campo magnético;
- $\nu_m \nabla^2 \mathbf{B}$ : Transporte difusivo de  $\mathbf{B}$ .

Nota-se que no caso explorado neste trabalho, de MHD incompressível,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , de modo que não há expansão volumétrica de elementos materiais.

<sup>8</sup>  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

### 2.10.3 Conjunto Completo de Equações da Magnetohidrodinâmica Incompressível

O conjunto de equações que regem a magnetohidrodinâmica é formado pelo acoplamento das leis da dinâmica de fluidos com as leis da eletrodinâmica e as aproximações cabíveis ao contexto. Então, como a força eletromagnética é uma força de campo, as equações que regem o comportamento de fluidos condutores incompressíveis na presença de campos eletromagnéticos são:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.117)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.118)$$

e

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.119)$$

em conjunto com as equações da eletrodinâmica para o contexto de MHD, dadas pelas Equações (2.82), (2.85), (2.87), (2.92), (2.111) e (2.112).

### 2.10.4 Parâmetros Adimensionais da Magnetohidrodinâmica Incompressível

Alguns parâmetros físicos adimensionais importantes regem a magnetohidrodinâmica incompressível, os principais, utilizados no decorrer deste trabalho, são descritos pela Tabela 1, a qual foi construída de acordo com Davidson (2017) e Cunha (2021b). Além

Tabela 1 – Parâmetros adimensionais que regem a magnetohidrodinâmica. Aqui  $u_c$  é uma velocidade característica,  $\ell_c$  é um comprimento característico,  $\nu$  é o coeficiente de difusão hidrodinâmico e  $B_c$  é uma densidade de fluxo magnético característica.

Nome do Parâmetro Símbolo e Definição	Significado físico
Número de Reynolds $Re = u_c \ell_c / \nu$	Razão entre forças de inércia e forças viscosas
Parâmetro de Interação $N = \sigma_e B_c^2 \ell_c / \rho u_c$	Razão entre força de Lorentz e força inercial
Número de Hartman $Ha = B_c \ell_c \sqrt{\sigma_e / \rho \nu}$	Razão entre força de Lorentz e força viscosa
Número de Reynolds Magnético $Re_m = u_c \ell_c / \nu_m$	Razão entre tempo de difusão e tempo de advecção de $\mathbf{B}$

dos parâmetros adimensionais destacados pela Tabela 1, neste trabalho alguns outros parâmetros de interesse são explorados, como o campo elétrico externo,  $E_0$ , e a concentração de partículas,  $\phi$ .

Nota-se que o número de Reynolds magnético define o regime magnético. Se  $Re_m \gg 1$ , o fluido é um condutor perfeito, isto é, não há difusão molecular de densidade de fluxo magnético e diz-se que as linhas de campo de  $\mathbf{B}$  estão congeladas no escoamento, isto é análogo às linhas de vórtice no caso de fluido ideal. Já no caso em que  $Re_m \ll 1$ , tem-se o regime puramente difusivo, onde a evolução de  $\mathbf{B}$  é dada basicamente pela difusão dele (DAVIDSON, 2017). Esses regimes podem ser notados observando a equação de evolução para a densidade de fluxo magnético, Equação (2.119).



# 3 Magnetohidrodinâmica de Escoamentos Internos

## 3.1 Escoamento Entre Placas Paralelas

Para se construir o modelo de escoamento magnetohidrodinâmico incompressível entre placas paralelas apresentado nesta seção, a metodologia utilizada é similar à apresentada por Cunha (2021b) e Muller e Buhler (2001), ou seja, utiliza-se um campo uniforme e transversal aplicado, permite-se a existência de um campo longitudinal induzido pelo escoamento e resolve-se as equações governantes na forma adimensional.

### 3.1.1 Equações Governantes do Problema

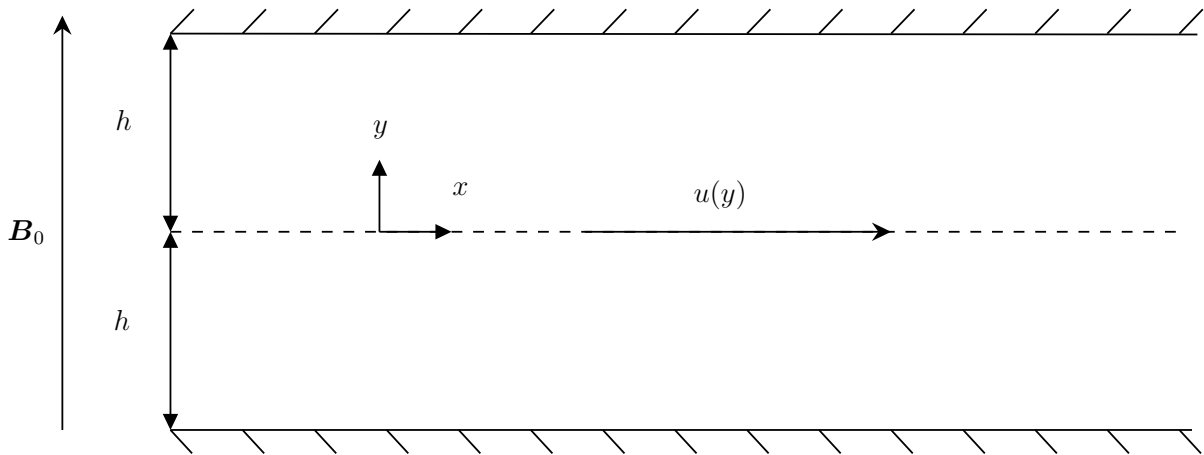


Figura 4 – Esquema para o escoamento MHD entre placas paralelas.

O escoamento unidirecional entre placas paralelas com um campo magnético aplicado uniforme e transversal é descrito pela Figura 4. Observa-se que a gravidade exerce efeito apenas estático no escoamento, de modo que ela pode ser adicionada à pressão, gerando uma pressão modificada dada por  $p = p^* - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ .

Neste escoamento a densidade de fluxo magnético pode ser escrita como a soma da contribuição de um campo externo aplicado com a de um campo induzido, ou seja,

$$\mathbf{B} = B_x(y)\hat{\mathbf{e}}_x + B_0\hat{\mathbf{e}}_y, \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{B}_x = B_x(y)\hat{\mathbf{e}}_x$  é o campo induzido. Mostra-se que o campo induzido é dessa forma,  $B_x(y)$  na direção do escoamento, fazendo para o campo induzido o mesmo que se fez no desenvolvimento do perfil de velocidades para hipótese de unidirecionalidade, utilizando a equação de evolução de  $\mathbf{B}$  e sua solenoidalidade. Por outro lado, da lei de Faraday para o caso permanente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

de modo que  $E_z = E_0$  é uma constante. Assim, como a componente  $z$  da densidade de corrente é dada pela lei de Ohm como

$$J_z = \sigma_e (E_0 + uB_0), \quad (3.3)$$

tem-se que a força de Lorentz é dada por

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma_e (E_0 + uB_0) (-B_0\hat{\mathbf{e}}_x + B_x\hat{\mathbf{e}}_y). \quad (3.4)$$

Utilizando a força de Lorentz, dada pela Equação (3.4), à equação de Navier-Stokes modificada, dada pela Equação (2.117), encontra-se que

$$G + \eta \frac{d^2 u}{dy^2} - \sigma_e E_0 B_0 - \sigma_e u B_0^2 = 0 \quad (3.5)$$

e

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \sigma_e B_x (E_0 + B_0 u) = 0, \quad (3.6)$$

em que  $G = -\frac{\partial p}{\partial x}$ . As Equações (3.5) e (3.6) são as equações diferenciais que determinam os campos de velocidades e de pressão, respectivamente.

Por outro lado, da equação de transporte de densidade de fluxo magnético para um fluido incompressível, Equação (2.119), tem-se que

$$B_0 \frac{du}{dy} + \nu_m \frac{d^2 B_x}{dy^2} = 0. \quad (3.7)$$

A Equação (3.7) é a equação diferencial que determina o campo de densidade de fluxo magnético induzido.

### 3.1.2 Forma Adimensional das Equações Governantes

Se as escalas típicas de comprimento, velocidade, pressão, densidade de fluxo magnético e de campo elétrico são, respectivamente, a largura de metade do canal  $h$ , a velocidade média  $U$ , a escala viscosa  $\eta U/h$ , o módulo do campo aplicado  $B_0$  e a escala dada pela lei de Ohm  $UB_0$ , então as grandezas adimensionais, representadas pelo sobrescrito \*, são

$$u^* = \frac{u}{U}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad p^* = \frac{ph}{\eta U}, \quad B_x^* = \frac{B_x}{B_0} \quad \text{e} \quad E_0^* = \frac{E_0}{UB_0}. \quad (3.8)$$

Então, as equações diferenciais governantes do problema, Equações (3.5), (3.6) e (3.7), se tornam, respectivamente,

$$G^* + \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} - Ha^2 E_0^* - Ha^2 u^* = 0, \quad (3.9)$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + Ha^2 B_x^* (E_0^* + u^*) = 0 \quad (3.10)$$

e

$$\frac{d^2 B_x^*}{dy^{*2}} + Re_m \frac{du^*}{dy^*} = 0. \quad (3.11)$$

A partir deste ponto até o fim da solução do problema entre placas paralelas a notação de grandeza adimensional será suprimida a fim de aliviar a notação.

### 3.1.3 Campo de Velocidades

O campo de velocidades adimensional é determinado pela Equação (3.9), que é uma equação diferencial ordinária linear, cuja solução geral é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular. Portanto, a solução geral para  $u$  é dada por

$$u = \frac{G}{Ha^2} - E_0 + C_1 \sinh(Hay) + C_2 \cosh(Hay), \quad (3.12)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. Aplicando a condição de contorno de não deslizamento nas paredes se obtém que

$$C_1 = 0 \quad (3.13)$$

e

$$C_2 = \frac{E_0 - Ha^{-2}G}{\cosh(Ha)}. \quad (3.14)$$

Por conseguinte, o perfil de velocidade é dado por

$$u(y) = \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) \left[ 1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right]. \quad (3.15)$$

### 3.1.4 Limite Assintótico para o Campo de Velocidades

Expandindo as funções trigonométricas hiperbólicas da Equação (3.15), ou seja, fazendo

$$\cosh(Hay) = 1 + \frac{1}{2}(Hay)^2 + \mathcal{O}[(Hay)^4] \quad (3.16)$$

e tomando o limite para  $Ha \rightarrow 0$ , i.e. campo magnético externo nulo, obtém-se que

$$\lim_{Ha \rightarrow 0} u(y) = \frac{G}{2} (1 - y^2), \quad (3.17)$$

que é o resultado do campo de velocidades adimensional para um fluido Newtoniano escoando entre placas paralelas.

### 3.1.5 Densidade de Fluxo Magnético

A densidade de fluxo magnético adimensional é determinada pela Equação (3.11). Assim, substituindo a solução para o campo de velocidades e integrando duas vezes, encontra-se que

$$B_x(y) = -Re_m \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) \left[ y - \frac{\sinh(Ha y)}{Ha \cosh(Ha)} \right] + C_3 y + C_4, \quad (3.18)$$

em que  $C_3$  e  $C_4$  são constantes de integração. As condições de contorno para a densidade de fluxo magnético neste caso fornecem que  $B_x(y = \pm 1) = 0$ , o que implica em

$$C_3 = Re_m \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) \left[ 1 - \frac{\sinh(Ha)}{Ha \cosh(Ha)} \right] \quad (3.19)$$

e

$$C_4 = 0. \quad (3.20)$$

Por conseguinte, a densidade de fluxo magnético é dada por

$$B_x(y) = \frac{Re_m}{Ha \cosh(Ha)} \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) [\sinh(Ha y) - \sinh(Ha) y]. \quad (3.21)$$

### 3.1.6 Campo de Pressão

No caso do escoamento em questão, o gradiente de pressão é o que gera o escoamento e é constante, ou seja,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -G, \quad (3.22)$$

de modo que

$$p(x, y) = -Gx + f(y), \quad (3.23)$$

em que  $f$  é uma função de  $y$  que surge da integração. Derivando parcialmente a Equação (3.23) em relação à variável  $y$  se obtém que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy}. \quad (3.24)$$

Substituindo a Equação (3.10) obtém-se uma equação diferencial para  $f(y)$ , dada por

$$\frac{df(y)}{dy} = Ha^2 B_x (E_0 + u). \quad (3.25)$$

Substituindo os resultados para o campo de velocidades e para a densidade de fluxo magnético e integrando,

$$\begin{aligned} p(x, y) = -Gx + p_0 + \frac{Re_m}{\cosh(Ha)} \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) & \left\{ \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) \left[ \frac{1 - \cosh^2(Ha y)}{2 \cosh(Ha)} \right] \right. \\ & \left. + \tanh(Ha) \sinh(Ha y) y + \frac{\tanh(Ha)}{Ha} (1 - \cosh(Ha y)) \right\} \\ & + \frac{G}{Ha^2} \left[ \cosh(Ha y) - \frac{Ha}{2} \sinh(Ha) y^2 - 1 \right], \quad (3.26) \end{aligned}$$

é o campo de pressão do escoamento, em que  $p_0$  é a pressão na entrada do canal.

### 3.1.7 Vazão

A vazão adimensional é dada por

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy. \quad (3.27)$$

A adimensionalização foi feita utilizando a escala  $|Q| \sim 2Uhl$ , em que  $\ell$  é o comprimento das placas na direção de  $z$ . Por conseguinte, usando o campo de velocidades dado pela Equação (3.15),

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) \left[ 1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right] dy. \quad (3.28)$$

Integrando se obtém que

$$Q = \left( \frac{G}{Ha^2} - E_0 \right) \left[ 1 - \frac{\tanh(Ha)}{Ha} \right]. \quad (3.29)$$

Nota-se que, por definição, essa vazão adimensional deve ser igual a 1, já que a vazão dimensional é  $U(2h\ell)$ . Impor que tal vazão seja 1 garante que a velocidade característica usada seja realmente a velocidade média do perfil de velocidades para o número de Hartmann de análise.

### 3.1.8 Expressão para o Campo Elétrico Adimensional

O campo elétrico adimensional presente no problema,  $E_0$ , é acoplado ao campo magnético pela natureza das equações de Maxwell. Mesmo que não se aplique um campo elétrico externo,  $E_0$  existe e neste caso é o campo elétrico induzido pelo escoamento, assim como  $B_x$  é a densidade de fluxo magnético induzida pelo escoamento. Assim,  $B_x$ ,  $E_0$  e  $u$  estão amarrados entre si. De fato, aplicando um campo elétrico externo, o escoamento seria alterado e conseqüentemente o campo de densidade magnética induzido também, de modo que  $E_0$  e  $B_x$  não podem ser estabelecidos independentemente. Este fato é traduzido matematicamente utilizando a lei de Ohm, Equação (2.82), em conjunto com a lei de Ampère, Equação (2.112), que fornecem

$$\mathbf{E} = \frac{1}{Re_m} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (3.30)$$

em que tal equação já está escrita na forma adimensional. Substituindo os valores para o problema de placas paralelas obtém-se que

$$E_0 = \frac{1}{Re_m} \frac{dB_x}{dy} - u. \quad (3.31)$$

Como  $E_0$  é constante ele pode ser determinado avaliando a Equação (3.31) na parede, de modo a eliminar o perfil de velocidades, implicando em

$$E_0 = \frac{1}{Re_m} \frac{dB_x}{dy} \Big|_{y=\pm 1}. \quad (3.32)$$

Por conseguinte, substituindo a expressão obtida para a densidade de fluxo magnético,

$$E_0 = -\frac{G}{Ha^2} \left[ \frac{Ha}{\tanh(Ha)} - 1 \right]. \quad (3.33)$$

### 3.1.9 Soluções Completas

Utilizando a forma adimensional do campo elétrico dado pela Equação (3.33) nas equações para o campo de velocidades, para a densidade de fluxo magnético e para a pressão, se obtém, respectivamente,

$$u = \frac{G}{Ha \tanh(Ha)} \left[ 1 - \frac{\cosh(Ha y)}{\cosh(Ha)} \right], \quad (3.34)$$

$$B_x = \frac{Re_m}{Ha^2} \frac{G}{\sinh(Ha)} [\sinh(Ha y) - \sinh(Ha)y] \quad (3.35)$$

e

$$p = p_0 - Gx + \frac{Re_m}{Ha^2} G^2 \left[ -\frac{y^2}{2} + \frac{\sinh(Ha y)}{\sinh(Ha)} y - \frac{1}{2} \frac{\sinh^2(Ha y)}{\sinh^2(Ha)} \right]. \quad (3.36)$$

Nota-se que como a vazão adimensional foi definida de tal forma que  $Q = 1$  sempre,  $G$  não pode ser arbitrário e deve ser acoplado ao restante do problema de modo a satisfazer tal vazão. Desse modo, utilizando a equação para  $E_0$ , Equação (3.33), na expressão para a vazão, Equação (3.29), obtém-se que o  $G$  no problema em questão deve ser determinado por

$$G = \frac{Ha}{[\coth(Ha) - Ha^{-1}]}. \quad (3.37)$$

Nota-se que no problema em questão o escoamento está intrinsecamente acoplado às grandezas magnéticas.

### 3.1.10 Fator de Atrito

Em contraste com a definição de fator de atrito inercial, definido pela tensão de cisalhamento na parede adimensionalizada pela escala inercial de pressão,  $\rho U^2$ , aqui utiliza-se o fator de atrito definido como a tensão de cisalhamento adimensionalizado pela escala de Stokes,  $\eta U/h$ , já que esta foi a escala utilizada para adimensionalizar o problema. Nota-se que o fator de atrito assim definido está intimamente relacionado com a viscosidade de parede. Assim,

$$f_w = \frac{du}{dy} \Big|_{y=\pm 1}, \quad (3.38)$$

em que  $f_w$  é o fator de atrito descrito. Por conseguinte, usando o perfil de velocidades dado pela Equação (3.34) e a Equação (3.37) para  $G$ , obtém-se que

$$f_w = \frac{Ha}{[\coth(Ha) - Ha^{-1}]}. \quad (3.39)$$

### 3.1.11 Viscosidade Efetiva

Apesar do fluido ser condutor, a vazão na forma dimensional para o caso de fluido não condutor escoando entre placas paralelas pode ser usada para definir a viscosidade

efetiva, de modo que faz-se

$$Q^* = \frac{2G^*h^3\ell}{3} \frac{1}{\eta_{ef}}, \quad (3.40)$$

em que  $Q^*$  e  $G^*$  representam a vazão e o gradiente de pressão dimensionais (apenas nessa seção) e  $\eta_{ef}$  representa a viscosidade efetiva. Por definição, a viscosidade efetiva representa a viscosidade que um fluido não condutor deveria ter para que ele tivesse a mesma relação entre a vazão e o gradiente de pressão que o fluido condutor para um certo número Hartmann, de modo que a viscosidade naturalmente deve depender de  $Ha$ . Da vazão do fluido condutor,

$$Q^* = \frac{2G^*h^3\ell}{3} \left\{ \frac{3}{\eta Ha} \left[ \frac{1}{\tanh(Ha)} - \frac{1}{Ha} \right] \right\}, \quad (3.41)$$

de modo que, por comparação direta, a viscosidade efetiva adimensionalizada pela viscosidade do fluido condutor é dada por

$$\frac{\eta_{ef}}{\eta} = \frac{Ha}{3 [\coth(Ha) - Ha^{-1}]}. \quad (3.42)$$

### 3.1.12 Resultados e Análise

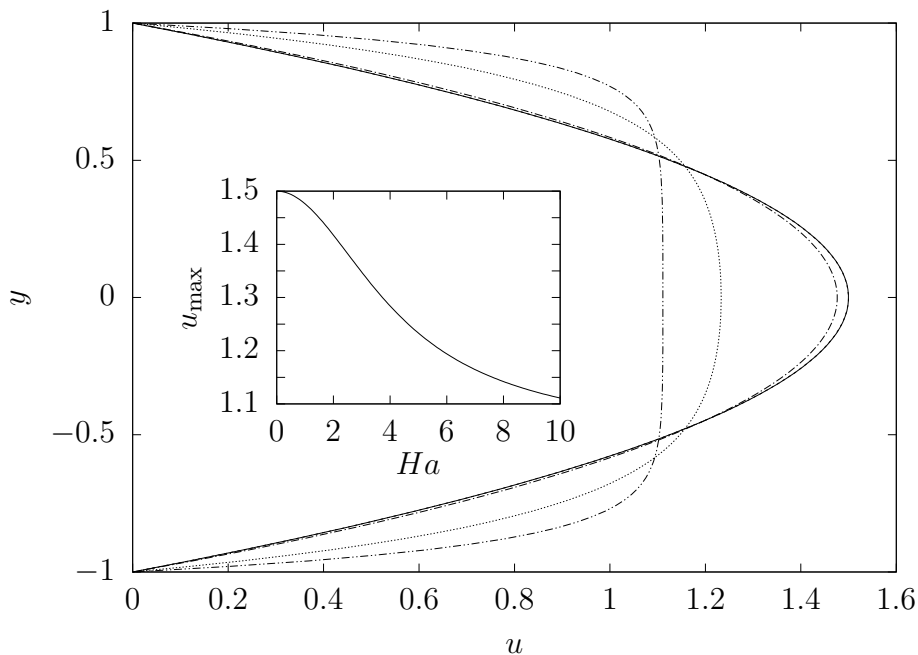


Figura 5 – Perfis de velocidades adimensionalizados pela velocidade média do escoamento magnetohidrodinâmico entre placas paralelas para diferentes números de Hartmann. Nesta — representa  $Ha = 0$ , - - - -  $Ha = 0.1$ , . . . .  $Ha = 1$ , - · - ·  $Ha = 5$ , - - - -  $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima em função do número de Hartmann.

As Figuras 5, 6 e 7 apresentam os resultados gráficos para os perfis de velocidade, para os perfis de densidade de fluxo magnético induzido e para o fator de atrito, respectivamente. Dessas figuras, percebe-se que aumentar os efeitos magnéticos, ou seja,

aumentar o número de Hartmann, causa um efeito de retardamento no escoamento. O comportamento de retardamento do escoamento devido aos efeitos magnéticos também é observado no fator de atrito, já que ao se aumentar o número de Hartmann ele aumenta consideravelmente. De fato, viu-se que a viscosidade efetiva adimensional é proporcional ao fator de atrito, que aumenta com o número de Hartmann, de modo que os efeitos magnéticos causam à vazão um efeito análogo ao que uma viscosidade maior causaria. Este efeito de retardamento que a força de Lorentz causa no escoamento é conhecido e tem diversos enfoques práticos na aplicação de engenharia. Por exemplo, a NASA<sup>1</sup> já utilizou do efeito de desaceleração magnética para frear foguetes na entrada da atmosfera (CUNHA, 2021b). Utiliza-se também tal efeito na indústria para frear escoamentos de metais líquidos (DAVIDSON, 1999). Nota-se, da Figura 6, o acoplamento intrínseco

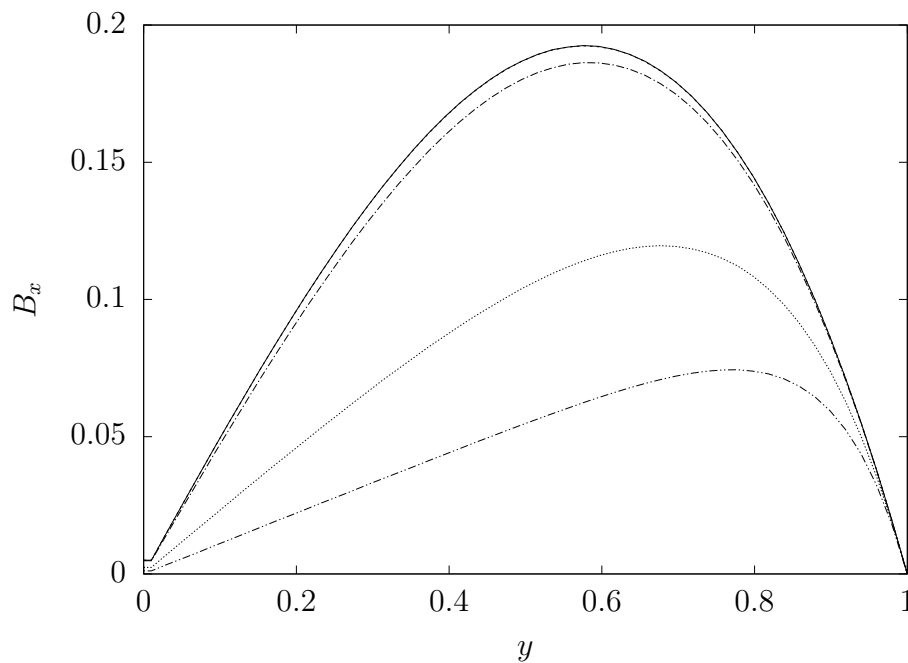


Figura 6 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido para o escoamento magnetohidrodinâmico entre placas paralelas com diferentes números de Hartmann e  $Re_m = 1$ . Nesta — representa  $Ha = 0,1$ , - - - - -  $Ha = 1$ , . . . . .  $Ha = 5$ , - · - · -  $Ha = 10$ .

entre a densidade de fluxo magnético induzido e a velocidade. À medida que se aumenta Hartmann, os efeitos da força de Lorentz desaceleram o escoamento e isso torna o módulo da densidade de fluxo magnético menor.

Apesar do campo magnético externo apenas frear o escoamento, nota-se que devido ao acoplamento entre o campo de velocidades, o de densidade de fluxo magnético e o campo elétrico, a existência de um escoamento de fluido condutor com o campo magnético descrito induz um campo elétrico. Desse modo, como consequência de tal acoplamento, pode-se inferir que o contrário é válido, ou seja, pode-se utilizar um campo elétrico para gerar um escoamento e uma densidade de fluxo magnético induzida, possibilitando gerar

<sup>1</sup> em inglês: National Aeronautics and Space Administration



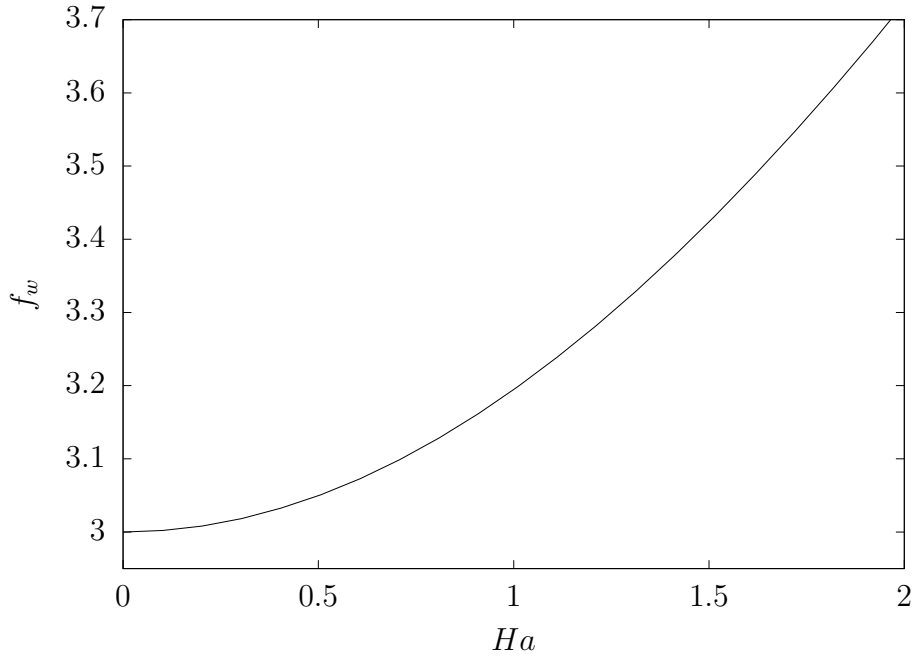


Figura 7 – Fator de atrito em função do número de Hartmann para o escoamento magnetohidrodinâmico entre placas paralelas. Nesta, utilizando a reescala adequada, obtém-se o valor conhecido para  $Ha = 0$ .

um efeito de bombeamento do fluido condutor através de um campo elétrico (ou uma corrente) aplicados (MULLER; BUHLER, 2001). De fato, o bombeamento magnético é um efeito conhecido e aplicado em casos específicos na indústria (DAVIDSON, 1999).

## 3.2 Escoamento em Tubo Axissimétrico

Para a construção do escoamento magnetohidrodinâmico incompressível em tubo circular presente nesta seção utilizou-se como base os estudos de Gold (1962), Samad (1981) e, principalmente para o desenvolvimento analítico, Uhlenbusch e Fischer (1961).

### 3.2.1 Equações Governantes do Problema

O escoamento de fluido condutor em um tubo circular com um campo magnético aplicado uniforme transversal é descrito pela Figura 8. Analogamente ao caso de placas paralelas, a gravidade exerce apenas efeito estático, de modo que pode ser incluída em uma pressão modificada. Nota-se que nesse escoamento as grandezas físicas dependem da direção do escoamento e de  $\theta$ , já que o campo magnético ser aplicado em apenas uma direção gera uma não homogeneidade em  $\theta$ . Então,  $\mathbf{u} = u(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_z$  e  $B_z = B_z(r, \theta)$ .

Analogamente ao caso do escoamento MHD entre placas paralelas, o campo de densidade de fluxo magnético pode ser escrito como a soma de uma parte externa aplicada

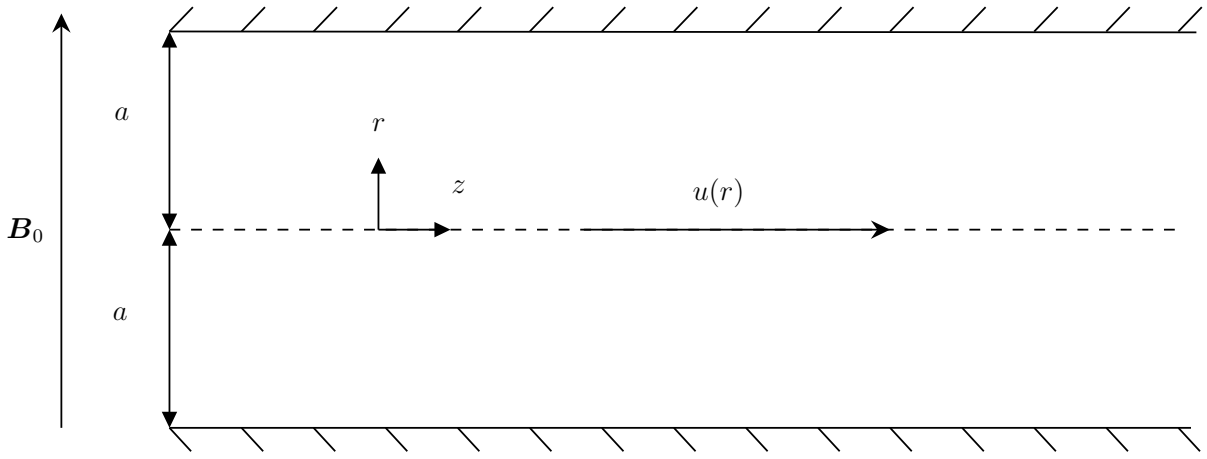


Figura 8 – Esquema para o escoamento MHD em um tubo axissimétrico.

com uma parte induzida, ou seja (GOLD, 1962),

$$\mathbf{B} = B_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - B_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + B_z(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (3.43)$$

em que  $B_0$  é o módulo do campo uniforme externo aplicado e  $B_z$  é o campo induzido. Nota-se então que a direção do campo externo é sempre paralela ao plano formado por  $\hat{\mathbf{e}}_r$  e  $\hat{\mathbf{e}}_z$  com  $\theta = 0$ . Além disso, utilizando a hipótese de unidirecionalidade e regime permanente, tem-se que a equação de evolução de  $\mathbf{B}$  para escoamentos incompressíveis é dada por

$$\frac{1}{\nu_m} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (3.44)$$

Assim, abrindo a componente  $z$ , substituindo a forma do campo de velocidades e da densidade de fluxo magnético obtém-se, em coordenadas cilíndricas, que

$$\nabla^2 B_z + \frac{1}{r\nu_m} \left[ B_0 \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (ru) - \frac{\partial}{\partial \theta} (uB_0 \sin \theta) \right] = 0, \quad (3.45)$$

ou ainda,

$$\nabla^2 B_z + \frac{B_0}{\nu_m} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \right) = 0. \quad (3.46)$$

Por outro lado, utilizando a hipótese de unidirecionalidade e de regime permanente na Equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis modificada pela força de Lorentz,

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p = 0. \quad (3.47)$$

Substituindo a lei de Ampère e utilizando identidades do cálculo vetorial obtém-se que

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) - \nabla p = 0. \quad (3.48)$$

Por fim, abrindo a componente  $z$ , substituindo a forma do campo de velocidades e da densidade de fluxo magnético,

$$\eta \nabla^2 u + \frac{B_0}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} \sin \theta \right) + G = 0. \quad (3.49)$$

É importante notar que as componentes  $r$  e  $\theta$  das Equações (3.44) e (3.48) são identicamente nulas. As Equações (3.46) e (3.49) são equações diferenciais parciais acopladas para  $u$  e  $B_z$ .

### 3.2.2 Forma Adimensional das Equações Governantes

Utilizando as escalas características dadas pela Equação (3.8) mas agora substituindo a escala de comprimento pelo raio  $a$  do tubo, tem-se as grandezas adimensionais dadas por

$$u^* = \frac{u}{U}, \quad r^* = \frac{r}{a}, \quad p^* = \frac{pa}{\eta U}, \quad \nabla^* = a\nabla \quad \text{e} \quad B_z^* = \frac{B_z}{B_0}, \quad (3.50)$$

de modo que as equações governantes do problema, Equações (3.46) e (3.49) se tornam, respectivamente,

$$\nabla^{*2} B_z^* + Re_m \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r^*} - \frac{\sin \theta}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u^* = 0 \quad (3.51)$$

e

$$\nabla^{*2} u^* + \frac{Ha^2}{Re_m} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r^*} - \frac{\sin \theta}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) B_z^* + G = 0. \quad (3.52)$$

A partir deste ponto até o fim da solução do problema em tubo circular a notação de grandeza adimensional será suprimida a fim de aliviar a notação.

### 3.2.3 Mudança de Variável

Observa-se que as equações diferenciais parciais que regem  $B_z$  e  $u$ , Equações (3.51) e (3.52), são acopladas. A fim de realizar o desacoplamento, introduz-se a mudança de variáveis dada por (UHLENBUSCH; FISCHER, 1961)

$$f(r, \theta) = e^{\frac{1}{2}Ha r \cos \theta} \left( u + \frac{Ha}{Re_m} B_z + \frac{Gr \cos \theta}{Ha} \right) \quad (3.53)$$

e

$$g(r, \theta) = e^{-\frac{1}{2}Ha r \cos \theta} \left( u - \frac{Ha}{Re_m} B_z - \frac{Gr \cos \theta}{Ha} \right), \quad (3.54)$$

que reduzem as Equações (3.51) e (3.52) respectivamente à

$$\nabla^2 f - \alpha^2 f = 0 \quad (3.55)$$

e

$$\nabla^2 g - \alpha^2 g = 0, \quad (3.56)$$

que são equações diferenciais parciais para  $f$  e  $g$  desacopladas, em que  $\alpha = Ha/2$ . Notando que as condições de contorno para  $u$  e  $B_z$  são dadas por  $u(r, \theta) = B_z(r, \theta) = 0$  (não deslizamento e campo magnético externo transversal), utiliza-se as Equações (3.53) e (3.54) para se obter as condições de contorno para  $f$  e  $g$ , que são dadas por

$$f(1, \theta) = e^{\alpha \cos \theta} \frac{G}{2\alpha} \cos \theta \quad (3.57)$$

e

$$g(1, \theta) = -e^{-\alpha \cos \theta} \frac{G}{2\alpha} \cos \theta. \quad (3.58)$$

Nota-se que apenas as hipóteses de unidirecionalidade, incompressibilidade e de regime permanente foram tomadas, de modo que as Equações (3.55) e (3.56) são válidas para quaisquer escoamentos magnetohidrodinâmicos em dutos que acatem tais hipóteses.

### 3.2.4 Solução por Separação de Variáveis

Usando a forma do operador Laplaciano em coordenadas cilíndricas<sup>2</sup>, a Equação (3.55) pode ser escrita como

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} - r^2 \alpha^2 g = 0, \quad (3.59)$$

que é uma equação diferencial parcial solucionável através da técnica da separação de variáveis. Propondo uma solução separável da forma  $g(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , mostra-se que

$$r^2 \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} - r^2 \alpha^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}. \quad (3.60)$$

Como o lado esquerdo da igualdade na Equação (3.60) é função só de  $r$  e o lado direito função só de  $\theta$ , ambos os lados devem ser iguais a uma mesma constante,  $\lambda$ , reduzindo assim o problema geral à duas equações diferenciais ordinárias,

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda \Theta = 0 \quad (3.61)$$

e

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - (r^2 \alpha^2 + \lambda) R = 0. \quad (3.62)$$

Da simetria do sistema de coordenadas utilizado,  $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ , de modo que  $\lambda \geq 0$ , já que a solução para a equação diferencial de  $\Theta$  só retorna soluções periódicas nesses casos, e  $\lambda = n^2$  com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Assim, a Equação (3.61) possui infinitas soluções, dadas por

$$\Theta_n(\theta) = C_n \cos(n\theta) + C'_n \sin(n\theta), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.63)$$

em que  $C_n$  e  $C'_n$  são constantes arbitrárias. Por outro lado, a Equação (3.62) é uma variação da equação de Bessel modificada. A solução de tal equação é amplamente conhecida e é obtida através do método de Frobenius para solução de equações diferenciais. As soluções particulares para tal equação com  $\lambda$  inteiro são as funções de Bessel modificadas de ordem  $n$  e argumento  $\alpha r$ , de primeira e segunda espécies,  $I_n(\alpha r)$  e  $K_n(\alpha r)$  (ARFKEN; WEBER, 2005). Então, a Equação (3.62) tem infinitas soluções dadas por

$$R_n(r) = D_n I_n(\alpha r) + D'_n K_n(\alpha r), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.64)$$

<sup>2</sup>  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

em que  $D_n$  e  $D'_n$  são constantes arbitrárias. Por conseguinte, a solução da Equação (3.59) é dada pela combinação linear de todas soluções  $g_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta)$ , isto é,

$$g(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos(n\theta) + C'_n \sin(n\theta)) (D_n I_n(\alpha r) + D'_n K_n(\alpha r)). \quad (3.65)$$

Pela consistência física,  $u$  e  $B_z$  devem ser finitas em  $r = 0$ , de modo que  $f$  e  $g$  também. Assim,  $D'_n = 0$ , já que  $K_n(\alpha r)$  é singular em  $r = 0$ . Por outro lado, aplicando a condição de contorno  $g(1, \theta)$ , dada pela Equação (3.58),

$$-e^{-\alpha \cos \theta} \frac{G}{2\alpha} \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + A'_n \sin(n\theta)) I_n(\alpha), \quad (3.66)$$

de modo que, por inspeção,  $A'_n = 0$  e

$$-e^{-\alpha \cos \theta} \frac{G}{2\alpha} \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_n(\alpha) \cos(n\theta). \quad (3.67)$$

Nota-se, da Equação (3.67) e dos conceitos desenvolvidos no Apêndice A.2, que  $A_n I_n(\alpha)$  são as projeções de  $-e^{-\alpha \cos \theta} \frac{G}{2\alpha} \cos \theta$  no conjunto completo dado por  $\{1, \cos n\theta\}$  (uma base do espaço de funções), ou seja, pela definição de produto interno de funções no intervalo  $[-\pi, \pi)$ ,

$$A_n I_n(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{G}{2\alpha} e^{-\alpha \cos \theta} \cos \theta \cos n\theta d\theta, \quad \forall n \neq 0, \quad (3.68)$$

e

$$A_0 I_0(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{G}{2\alpha} e^{-\alpha \cos \theta} \cos \theta d\theta. \quad (3.69)$$

As integrais dadas pelas Equações (3.68) e (3.69) são resolvidas utilizando-se de identidades trigonométricas e das propriedades da função de Bessel modificada dadas por (ARFKEN; WEBER, 2005)

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\alpha \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (3.70)$$

e

$$\frac{d}{d\alpha} I_n(\alpha) = I'_n(\alpha) = \frac{1}{2} [I_{n+1}(\alpha) + I_{n-1}(\alpha)], \quad (3.71)$$

de modo que obtém-se os coeficientes como

$$A_n = (-1)^n \frac{G I'_n(\alpha)}{\alpha I_n(\alpha)}, \quad \forall n \neq 0, \quad (3.72)$$

e

$$A_0 = \frac{G I'_0(\alpha)}{2\alpha I_0(\alpha)}. \quad (3.73)$$

As Equações (3.72) e (3.73) podem ser agrupadas em uma só expressão, isto é,

$$A_n = \Gamma_n (-1)^n \frac{G I'_n(\alpha)}{2\alpha I_n(\alpha)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.74)$$

em que  $\Gamma_0 = 1$  e  $\Gamma_n = 2 \forall n \neq 0$ . Por fim,

$$g(r, \theta) = \frac{G}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n (-1)^n \frac{I'_n(\alpha)}{I_n(\alpha)} I_n(\alpha r) \cos(n\theta). \quad (3.75)$$

De maneira totalmente análoga,  $f(r, \theta)$  pode ser calculada como sendo

$$f(r, \theta) = \frac{G}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \frac{I'_n(\alpha)}{I_n(\alpha)} I_n(\alpha r) \cos(n\theta). \quad (3.76)$$

### 3.2.5 Solução para o Campo de Velocidades e para a Densidade de Fluxo Magnético Induzida

De acordo com o desenvolvimento apresentado, as Equações (3.55) e (3.56) são resolvidas através da técnica de separação de variáveis. As soluções que são finitas em  $r = 0$ , periódicas em  $\theta$  com período  $2\pi$  e que obedecem as condições de contorno dadas por  $u(r = 1, \theta) = 0$  e  $B_z(r = 1, \theta) = 0$  podem ser obtidas invertendo as Equações (3.53) e (3.54) e substituindo as expressões para  $f$  e  $g$  dadas pelas Equações (3.76) e (3.75), de modo que obtém-se

$$B_z(r, \theta) = \frac{GRe_m}{2Ha^2} \left[ e^{-\frac{1}{2}Ha r \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \frac{I_n(\frac{1}{2}Ha r)}{I_n(\frac{1}{2}Ha)} I'_n \left( \frac{1}{2}Ha \right) \cos(n\theta) - e^{\frac{1}{2}Ha r \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma_n \frac{I_n(\frac{1}{2}Ha r)}{I_n(\frac{1}{2}Ha)} I'_n \left( \frac{1}{2}Ha \right) \cos(n\theta) - 2r \cos \theta \right] \quad (3.77)$$

e

$$u(r, \theta) = \frac{G}{2Ha} \left[ e^{-\frac{1}{2}Ha r \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \frac{I_n(\frac{1}{2}Ha r)}{I_n(\frac{1}{2}Ha)} I'_n \left( \frac{1}{2}Ha \right) \cos(n\theta) + e^{\frac{1}{2}Ha r \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma_n \frac{I_n(\frac{1}{2}Ha r)}{I_n(\frac{1}{2}Ha)} I'_n \left( \frac{1}{2}Ha \right) \cos(n\theta) \right], \quad (3.78)$$

Note que as Equações (3.77) e (3.78) são, respectivamente, o campo de velocidades e o campo de densidade de fluxo magnético induzido no escoamento em tubo circular com campo magnético externo uniforme e vertical aplicado.

### 3.2.6 Limite Assintótico para o Campo de Velocidades

Expandindo a Equação (3.78) para pequenos valores de  $Ha$ , depois tomando o limite para  $Ha \rightarrow 0$ , i.e. campo magnético externo nulo, e usando as propriedades da função de Bessel modificada obtém-se que (UHLENBUSCH; FISCHER, 1961)

$$\lim_{Ha \rightarrow 0} u = \frac{G}{4}(1 - r^2), \quad (3.79)$$

que é o resultado do campo de velocidades adimensional para um fluido Newtoniano escoando em um tubo circular.

### 3.2.7 Solução para a Vazão

A vazão adimensional é dada por

$$Q = \int_0^1 \int_0^{2\pi} ur dr d\theta. \quad (3.80)$$

Substituindo a Equação (3.78) e usando as propriedades da função de Bessel modificada (ARFKEN; WEBER, 2005),

$$I_n \left( \frac{1}{2}Har \right) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Har \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (3.81)$$

e

$$\int_0^1 r I_n^2 \left( \frac{1}{2} Ha r \right) dr + \frac{1}{2} I_n'^2 \left( \frac{1}{2} Ha \right) = \frac{1}{Ha^2} \left( \frac{1}{2} Ha^2 + 2n^2 \right) I_n^2 \left( \frac{1}{2} Ha \right), \quad (3.82)$$

mostra-se que a vazão adimensional é dada por

$$Q = G \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma_n \frac{I_n' \left( \frac{1}{2} Ha \right)}{Ha I_n \left( \frac{1}{2} Ha \right)} \left[ \left( 1 + \frac{4n^2}{Ha^2} \right) I_n^2 \left( \frac{1}{2} Ha \right) - I_n'^2 \left( \frac{1}{2} Ha \right) \right]. \quad (3.83)$$

Nota-se que assim como no caso de placas paralelas, a vazão aqui é adimensionalizada pela velocidade média, de modo que  $Q = 1$  e  $G$  é determinado a partir da Equação (3.83).

### 3.2.8 Viscosidade efetiva

Realizando o procedimento análogo ao realizado na [subseção 3.1.11](#) para este caso de escoamento em tubo, isto é, utilizando

$$Q^* = \frac{G^* \pi a^4}{8 \eta_{ef}}, \quad (3.84)$$

em que o asterisco representa a forma dimensional da quantidade, e comparando diretamente com a forma dimensional da Equação (3.83), obtém-se que a viscosidade efetiva adimensionalizada pela viscosidade do fluido condutor é dada por

$$\frac{\eta_{ef}}{\eta} = 1 / \left\{ 8 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma_n \frac{I_n' \left( \frac{1}{2} Ha \right)}{Ha I_n \left( \frac{1}{2} Ha \right)} \left[ \left( 1 + \frac{4n^2}{Ha^2} \right) I_n^2 \left( \frac{1}{2} Ha \right) - I_n'^2 \left( \frac{1}{2} Ha \right) \right] \right\}. \quad (3.85)$$

### 3.2.9 Resultados e Análises

As Figuras 9, 10, 11, 12, 13 e 14 apresentam os resultados gráficos para os perfis de velocidade para diferentes  $\theta$ , para os perfis de densidade de fluxo magnético e para a viscosidade efetiva do escoamento. É imediato perceber dessas que o comportamento no caso do escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular é completamente análogo ao do escoamento entre placas paralelas, o que era esperado devido às semelhanças físicas de ambos problemas. Apesar disso, uma diferença notável é observada, o efeito magnético afeta diferentemente o perfil de velocidades para diferentes valores de  $\theta$ . De fato, o campo externo é aplicado na direção na qual  $\theta = 0$  e sua projeção nos planos para diferentes  $\theta$  são diferentes, de modo que o escoamento não é simétrico na variável  $\theta$ . Para  $\theta = 0$ , percebe-se um amortecimento do escoamento e um achatamento do perfil no centro, causando uma uniformização nessa região. Em contraste, para  $\theta = \pi/2$ , o escoamento também é amortecido, mas igualmente para todo valor de  $r$ , de modo que a forma do perfil de velocidades é mantida. Percebe-se então que, para  $\theta = \pi/2$ , o efeito magnético não só comporta-se como um aumento de viscosidade para o computo da vazão, mas também para o perfil de velocidades. Nota-se que os encartes das Figuras 9 e 10 evidenciam o freamento do escoamento e que tanto o achatamento do perfil de velocidades (na direção do campo externo) quanto o deslocamento do máximo de  $B_z$  (com o número de Hartmann) são percebidos também nos gráficos das isolinhas, Figuras 13 e 14.

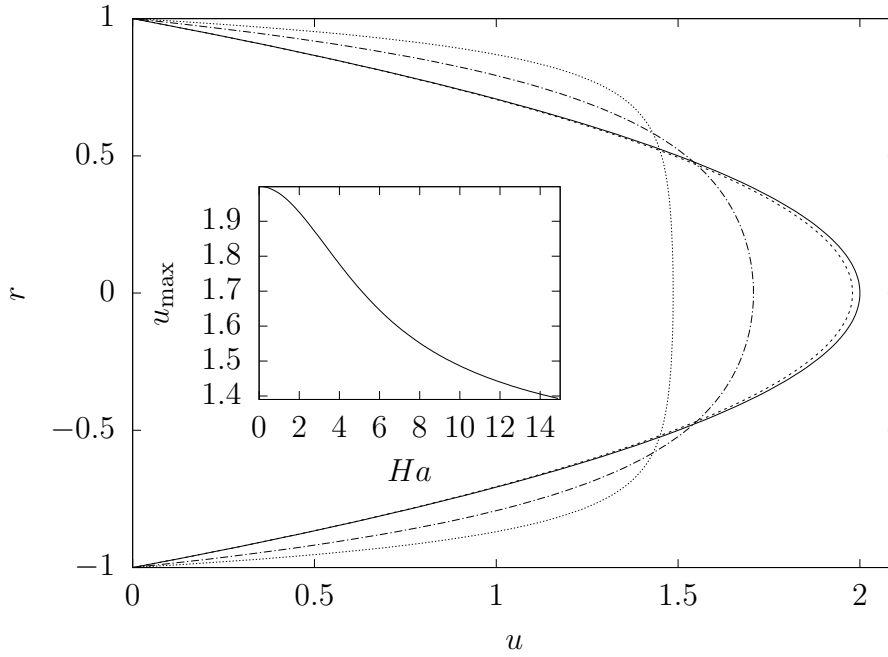


Figura 9 – Perfis de velocidades adimensionalizados pela velocidade média do escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular para diferentes números de Hartmann e  $\theta = 0$ . Nesta — representa  $Ha = 0.1$ , - - - - -  $Ha = 1$ , - · - · -  $Ha = 5$ , ······  $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima em função do número de Hartmann.

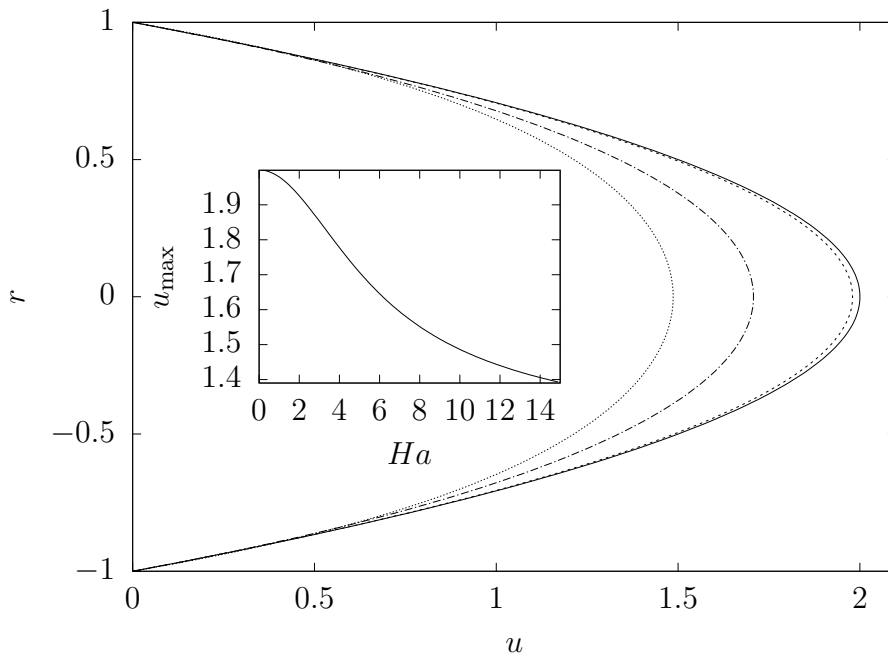


Figura 10 – Perfis de velocidades adimensionalizados pela velocidade média do escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular para diferentes números de Hartmann e  $\theta = \pi/2$ . Nesta — representa  $Ha = 0.1$ , - - - - -  $Ha = 1$ , - · - · -  $Ha = 5$ , ······  $Ha = 10$ . O encarte apresenta a velocidade máxima em função do número de Hartmann.



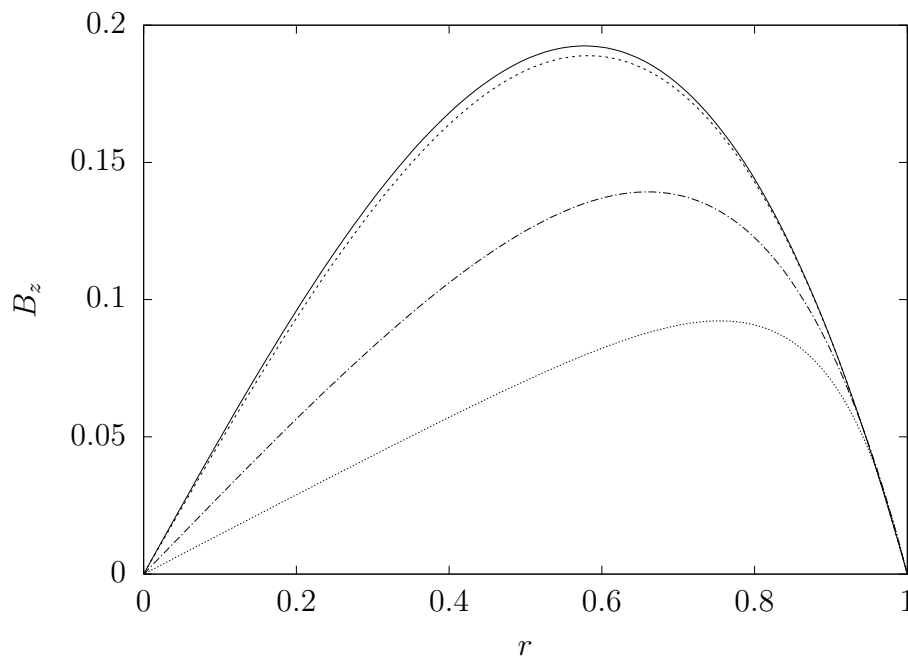


Figura 11 – Perfis de densidade de fluxo magnético induzido para o escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular com diferentes números de Hartmann,  $Re_m = 1$  e  $\theta = 0$ . Nesta — representa  $Ha = 0,1$ , - - - - -  $Ha = 1$ , . . . . .  $Ha = 5$ , - · - · -  $Ha = 10$ .

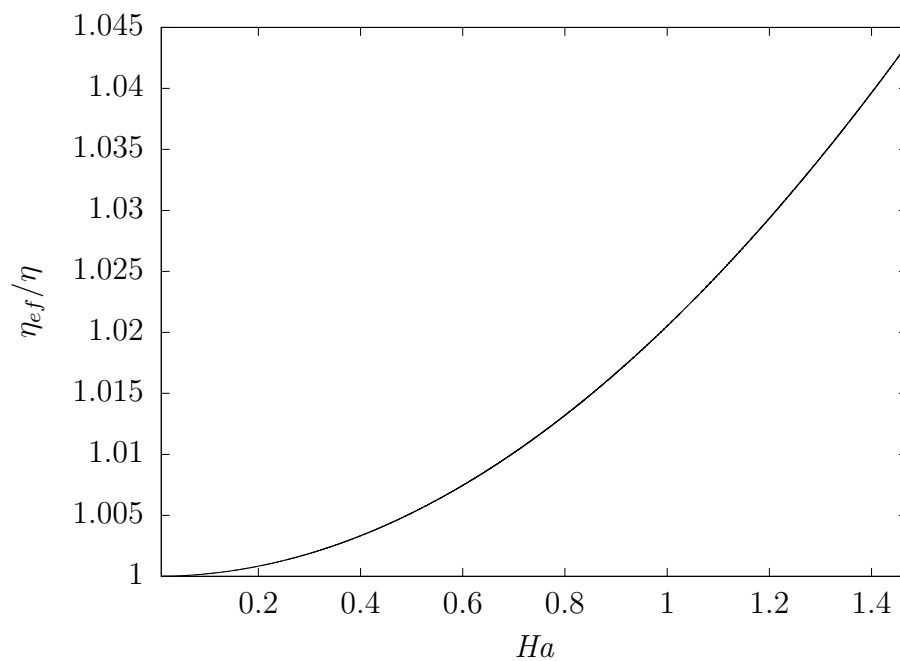
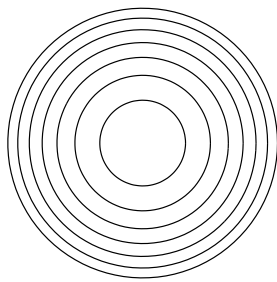
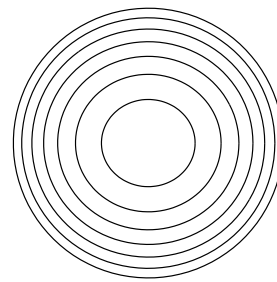


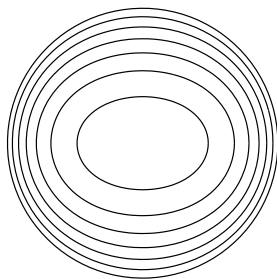
Figura 12 – Viscosidade efetiva adimensional em função do número de Hartmann para o escoamento magnetohidrodinâmico em tubo circular.



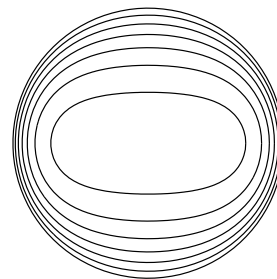
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 13 – Gráficos das isolinhas de velocidade para (a)  $Ha = 0.1$ , (b)  $Ha = 2$ , (c)  $Ha = 5$  e (d)  $Ha = 10$ . Nestas, a linha mais externa representa a parede do tubo e, da linha mais externa para a mais interna, tem-se linhas com velocidade de, respectivamente,  $0.15u_{\max}$ ,  $0.3u_{\max}$ ,  $0.45u_{\max}$ ,  $0.6u_{\max}$ ,  $0.75u_{\max}$  e  $0.9u_{\max}$ .

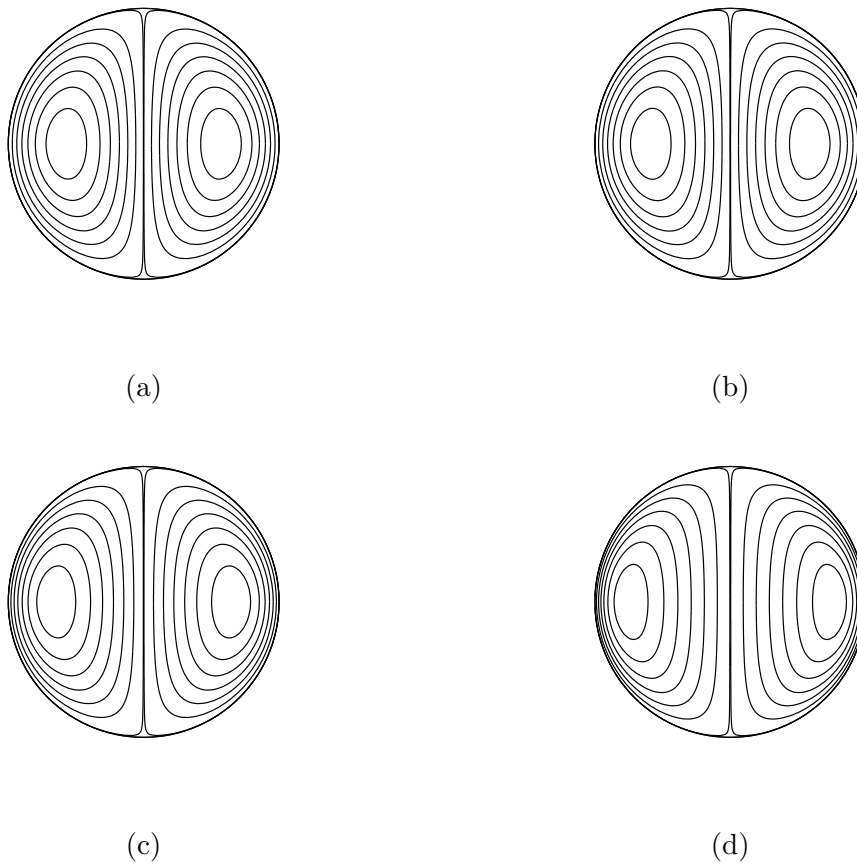


Figura 14 – Gráficos das isolinhas de densidade de fluxo magnético para (a)  $Ha = 0.1$ , (b)  $Ha = 2$ , (c)  $Ha = 5$  e (d)  $Ha = 10$ . Nestas, a linha mais externa representa a parede do tubo e, das linhas mais externas para as mais internas, tem-se linhas com intensidade de densidade de fluxo magnético de, respectivamente,  $0B_{\max}$ ,  $0.15B_{\max}$ ,  $0.3B_{\max}$ ,  $0.45B_{\max}$ ,  $0.6B_{\max}$ ,  $0.75B_{\max}$  e  $0.9B_{\max}$ .

# 4 Experimento com Escoamento Magnetohidrodinâmico em Tubo Capilar

Neste trabalho, além da modelagem do escoamento MHD em tubos circulares de maneira teórica, busca-se desenvolver uma metodologia experimental que retorne resultados passíveis de serem comparados ao modelo teórico. Para isso, utiliza-se o escoamento de água salgada em tubo capilar com um campo magnético uniforme vertical externo aplicado, que pode ser descrito pela Figura 8 com o raio  $a$  sendo muito pequeno. Tal escoamento capilar é um escoamento guiado pela pressão, isto é, o gradiente de pressão é o gerador de movimento, e é estudado em regime permanente unidirecional.

## 4.1 Reologia e Reometria

A reologia é caracterizada pelo estudo da deformação e do escoamento da matéria (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989). Em geral, no contexto da reologia, se quer descobrir a forma da dependência entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento, já que para fluidos Newtoniano essa relação é simples linear, mas para um vasto espectro de fluidos não.

A pesquisa em reologia pode ser dividida em várias sub-áreas, em particular, aqui destaca-se a reometria, a qual tem como interesse estudar o comportamento de diferentes materiais em escoamentos de referência, como o cisalhamento simples, cisalhamento oscilatório, escoamento extensional e o escoamento em tubo capilar.

## 4.2 Viscosimetria Capilar

Para o escoamento em um tubo capilar, em que o diâmetro do tubo é muito menor que seu comprimento, a hipótese de unidirecionalidade é válida, de modo que a equação

de Cauchy em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\sigma) = \frac{dp}{dz}, \quad (4.1)$$

em que  $\sigma = \sigma_{rz} = \sigma_{zr}$  é a tensão de cisalhamento. Por conseguinte, separando as variáveis, integrando e impondo que  $\sigma_{rz}$  seja finita em  $r = 0$ ,

$$\sigma = \frac{r}{2} \left( \frac{dp}{dz} \right). \quad (4.2)$$

Sabendo que  $\frac{\partial p}{\partial r}$  é constante e avaliando a Equação (4.2) na parede do tubo,  $r = a$ ,

$$r = -\frac{a}{\sigma_w} \sigma, \quad (4.3)$$

em que  $\sigma_w$  é a tensão de cisalhamento avaliada na parede do tubo. Por conseguinte,

$$dr = -\frac{a}{\sigma_w} d\sigma, \quad (4.4)$$

de modo que a equação para a vazão,

$$Q = \pi \int_0^a \dot{\gamma} r^2 dr, \quad (4.5)$$

pode ser reescrita, através da transformação de variáveis  $r \rightarrow \sigma$  da integral, como

$$\frac{\sigma_w^3 Q}{\pi a^3} = - \int_0^{-\sigma_w} \dot{\gamma}(\sigma) \sigma^2 d\sigma, \quad (4.6)$$

em que  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento. Consequentemente,

$$\frac{d}{d\sigma_w} \left( \frac{\sigma_w^3 Q}{\pi a^3} \right) = - \left[ \dot{\gamma}(\sigma) \sigma^2 \right]_0^{-\sigma_w}, \quad (4.7)$$

de modo que,

$$\dot{\gamma}_w = \frac{1}{\pi a^3} \left( 3Q + \sigma_w \frac{dQ}{d\sigma_w} \right). \quad (4.8)$$

Por fim, sendo  $\Delta p$  a diferença de pressões e  $L$  o comprimento do tubo,  $\sigma_w = -\frac{\Delta p a}{2L}$ , implicando que

$$\dot{\gamma}_w = \frac{Q}{\pi a^3} \left( 3 + \frac{d \ln Q}{d \ln \Delta p} \right) \quad (4.9)$$

A Equação (4.9) é conhecida como a relação de Weissenberg-Rabinowitsch ([BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987](#)) e em conjunto com

$$\eta_w = \frac{\sigma_w}{\dot{\gamma}_w} \quad (4.10)$$

permite calcular a viscosidade de parede para fluidos não-Newtonianos ou Newtonianos. Nota-se que tal equação não requer o conhecimento da expressão que relaciona a tensão de cisalhamento com a taxa de cisalhamento.

Alternativamente, é possível medir-se a viscosidade efetiva para o fluido através da viscosimetria capilar, sendo o fluido Newtoniano ou não, utilizando a lei de Hagen-Poiseuille, Equação (2.72), ou seja,

$$\eta_{ef} = \frac{\pi a^4 \Delta P}{8LQ}, \quad (4.11)$$

em que  $\Delta P$  é a queda de pressão e  $L$  é o comprimento do capilar.

## 4.3 Metodologia Experimental

A configuração experimental utilizada consiste de um viscosímetro capilar em conjunto com ímãs permanentes que possam aproximar um campo uniforme. As quantidades medidas são a queda de pressão ao longo do capilar e a vazão imposta.

O viscosímetro capilar utilizado para o estudo de escoamento em tubos é constituído de uma bomba de seringa, seringas, tubos capilares, mangueiras, ímãs permanentes, um transdutor de pressão e um sistema de aquisição de dados. A bancada experimental é localizada no Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia - MicroReo/VORTEX na Universidade de Brasília. A bomba de seringa em questão mantém uma vazão pré-determinada de fluido para o tubo capilar. Para medir-se a queda de pressão ao longo do tubo capilar, há um transdutor de pressão conectado à entrada e à saída dele. Os dados gerados pelo transdutor são recebidos por um sistema de aquisição de dados e armazenados. Para a aplicação do campo magnético, usa-se um suporte segurando um ímã permanente próximo ao tubo capilar. A Figura 15 apresenta um esquema do experimento em tubo capilar e a Figura 16 a foto real da bancada.

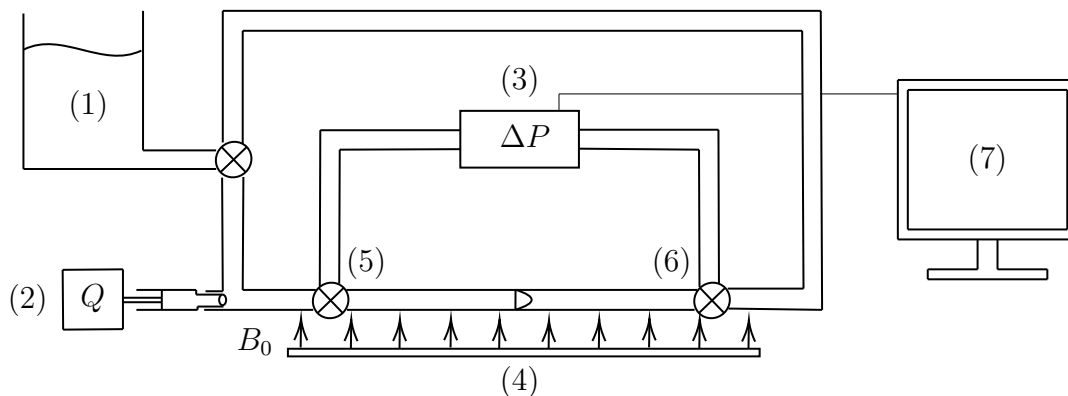


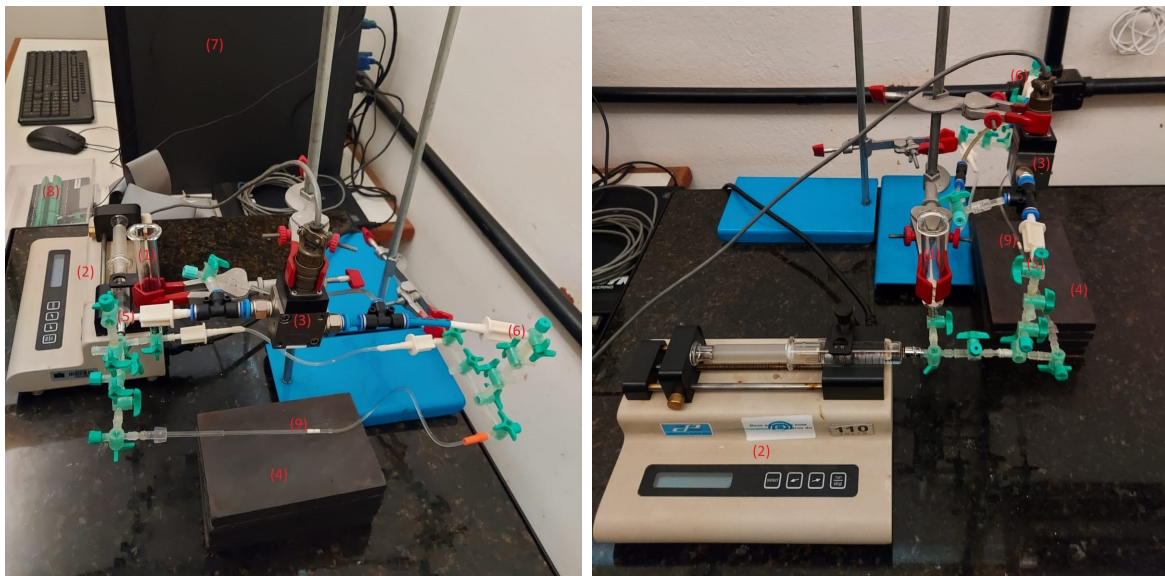
Figura 15 – Esquema para o experimento em tubo capilar. Nesta (1) representa o reservatório de fluido, (2) a bomba de seringa já com a seringa instalada, (3) o transdutor de pressão, (4) o ímã permanente, (5) e (6) as tomadas de pressão e (7) o computador equipado com o sistema de aquisição de dados.

### 4.3.1 Tubos Capilares

Os tubos capilares utilizados na bancada são fabricados em vidro pela marca *Hil-denberg*, apresentados pela Figura 17. O diâmetro interno é  $(1000 \pm 30) \mu\text{m}$ , o externo 3 mm e o comprimento do tubo é 150 mm.

### 4.3.2 Bomba de Seringa

A fim de fornecer uma vazão controlada, utiliza-se a bomba de seringa modelo KDS 101 da marca *Cole & Parmer*, apresentada pela Figura 18.



(a)

(b)

Figura 16 – Foto da bancada experimental utilizada. Nesta (1) representa o reservatório de fluido, (2) a bomba de seringa já com a seringa instalada, (3) o transdutor de pressão, (4) o ímã permanente, (5) e (6) as tomadas de pressão, (7) o computador, (8) o sistema de aquisição de dados ligado ao computador e (9) o tubo capilar.

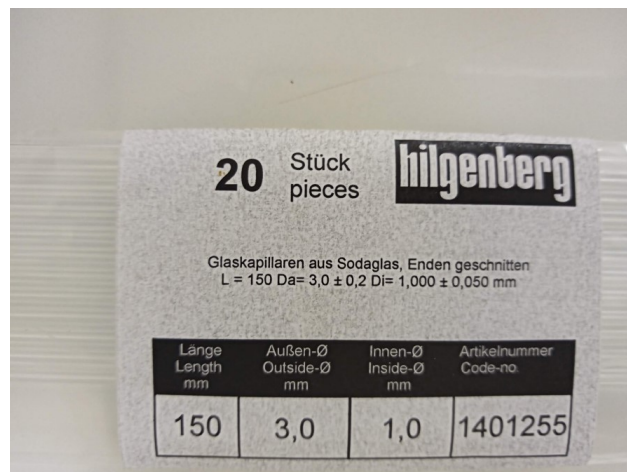


Figura 17 – Tubos capilares de vidro da marca *Hilgenberg*.

### 4.3.3 Transdutor de Pressão

Na bancada experimental é utilizado um transdutor de pressão de relutância variável modelo DP-15 da marca *Valydine*, apresentado pela Figura 19. A medida de pressão do transdutor é feita através da deformação de uma membrana de pressão em seu interior. É importante notar que existem membranas de pressão com espessuras diferentes, destinadas a diferentes faixas de pressão. A acurácia do transdutor é de 0,25% do fundo de escala.



Figura 18 – Bomba de seringa modelo KDS 101 da marca *Cole & Parmer*.



Figura 19 – Transdutor de pressão de relutância variável modelo DP-15 da marca *Validyne*.

#### 4.3.4 Banho Térmico

A fim de se manter a temperatura do fluido ensaiado constante, o tubo capilar é envolvido por um tubo de silicone no qual circula água com temperatura controlada. Para controlar a temperatura dessa água se utiliza o banho térmico modelo ECO SILVER RE 415 da marca *LAUDA*, apresentado pela Figura 20.

#### 4.3.5 Ímã Permanente

A fim de aproximar um plano infinito, o qual tem um campo uniforme, busca-se posicionar uma barra de ímã permanente, através de um suporte, o mais próximo possível do tubo capilar. A fim de que a aproximação de campo uniforme seja razoável no domínio do tubo capilar, o comprimento do ímã utilizado é muito maior do que o diâmetro do capilar.





Figura 20 – Banho térmico modelo ECO SILVER RE 415 da marca *LAUDA*.

#### 4.3.6 Fluido Condutor

A fim de escoar um fluido condutor no capilar, utiliza-se água salgada. A solução é sintetizada ao misturar NaCl puro em água destilada.

#### 4.3.7 Gaussímetro

A fim de se medir a densidade de fluxo magnético aplicado pelo imã permanente, utiliza-se um Gaussímetro modelo 5070 da marca *F. W. Bell*, mostrado pela Figura 21. Tal aparelho é capaz de detectar e medir densidade de fluxo magnético proveniente de diferentes fontes.



Figura 21 – Gaussímetro modelo 5070 da marca *F. W. Bell*.

### 4.3.8 Calibração

O transdutor de pressão utilizado, o *Valydine* DP-15, mede dados de voltagem causada pela deformação de uma membrana, os quais são relacionados com a queda de pressão através de uma constante de calibração, isto é,  $\Delta P \propto V$ , em que  $V$  é a voltagem medida pelo transdutor. Por conseguinte, colocando as constantes da bancada já dentro do coeficiente de calibração, tem-se que a viscosidade efetiva, dada pela Equação (4.11), pode ser calculada através dos dados fornecidos pelo transdutor fazendo

$$\eta_{ef} = K^* \frac{V}{Q}, \quad (4.12)$$

em que  $K^*$  é a constante de calibração, que pode ser obtida fazendo medições para um fluido o qual a viscosidade é conhecida.

### 4.3.9 Propagação de Erro

Se  $f(x_1, x_2)$  representa o valor obtido para uma grandeza através da medida de outras duas grandezas,  $x_1$  e  $x_2$ , o erro experimental associado à  $f$  pode ser obtido através dos erros de  $x_1$  e  $x_2$  fazendo

$$\delta f = \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta x_i, \quad (4.13)$$

em que  $\delta f$  e  $\delta x_i$  são os erros das medidas de  $f$  e  $x_i$ , respectivamente. Por conseguinte, aplicando a Equação (4.13) à Equação (4.12), o erro relativo da medida de viscosidade efetiva pode ser relacionado aos erros relativos das medidas de voltagem e vazão através de

$$\frac{\delta \eta_{ef}}{\eta_{ef}} = \sqrt{\left( \frac{\delta V}{V} \right)^2 + \left( \frac{\delta Q}{Q} \right)^2}. \quad (4.14)$$

Nota-se que, devido às flutuações das medidas de voltagem do transdutor de pressão, os erros aleatórios superam substancialmente os erros sistemáticos no caso do experimento em questão.

### 4.3.10 Medidas do Número de Hartmann

A fim de se estimar o número de Hartmann para os escoamentos aplicados, o campo magnético dos ímãs utilizados são medidos em baixo e em cima do capilar, fazendo assim uma média das duas medidas, e a condutividade elétrica da solução de NaCl é estimada através de

$$\sigma_e = \sigma_{ea} + \phi(\sigma_{es} - \sigma_{ea}), \quad (4.15)$$

em que  $\sigma_e$  é a condutividade elétrica da solução,  $\sigma_{ea}$  a da água e  $\sigma_{es}$  a do sal.

### 4.3.11 Resultados e Análises

A Figura 22 apresenta os dados de incremento de viscosidade efetiva adimensional obtidos experimentalmente sobrepostos com a curva fornecida pelo modelo analítico. Observa-se de imediato que, dentro do erro experimental previsto e com a devida calibração dos valores medidos para os números de Hartmann, os dados experimentais recuperam o comportamento da curva prevista pelo modelo analítico. De fato, observa-se de maneira clara o aumento da viscosidade efetiva com o número de Hartmann. Desse modo, valida-se a metodologia experimental empregada, mostrando a plena efetividade da viscosimetria capilar para captação de comportamentos físicos em escoamentos magnetohidrodinâmicos internos.

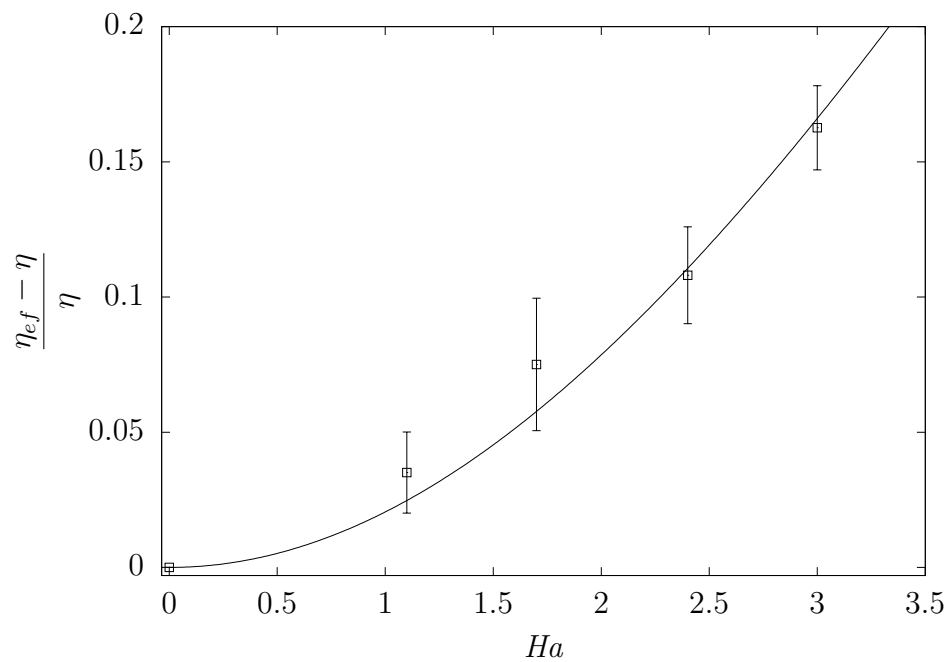


Figura 22 – Comparação dos resultados experimentais e analíticos do incremento magnético da viscosidade efetiva adimensional para o escoamento magnetohidrodinâmico em duto circular.

# 5 TRABALHOS FUTUROS

## 5.1 Escoamento Magnetohidrodinâmico Particulado

Em geral, ao se misturar água com NaCl pode haver a formação de cristais suspensos na solução. A fim de se modelar sistemas os quais há tal formação de cristais, busca-se utilizar um modelo para a viscosidade em função da concentração de partículas. Como a concentração de cristais também deve afetar a condutividade do fluido, há a necessidade de se propor um modelo para a condutividade elétrica também variando com a concentração. Para se obter resultados que relacionem a concentração de cristais às grandezas físicas hidrodinâmicas e magnéticas, pode-se aplicar os modelos em questão às soluções analíticas para escoamentos magnetohidrodinâmicos entre placas paralelas e em tubo circular obtidas neste trabalho.

### 5.1.1 Dependência da Viscosidade na Concentração de Partículas

#### 5.1.1.1 Suspensões Diluídas

Em geral, um avanço significativo foi feito na determinação da viscosidade de suspensões diluídas. Em particular, cita-se a viscosidade de uma suspensão diluída de partículas esféricas, na qual a viscosidade é calculada como (EINSTEIN, 1906)

$$\eta^* = \eta_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \phi \right), \quad (5.1)$$

em que  $\eta^*$  é a viscosidade da suspensão,  $\eta_0$  é a viscosidade do fluido base e  $\phi$  é a concentração de partículas. A viscosidade dada pela Equação (5.1) é denominada viscosidade de Einstein, em homenagem à Albert Einstein, que foi o primeiro a demonstrar tal equação. Diversas extensões do estudo de Einstein são feitas para levar em conta, por exemplo, diferentes formatos de partículas e interação hidrodinâmica. A presença de partículas na vizinhança de outra qualquer é levada em conta através de termos de ordem superior em  $\phi$ , como feito por Batchelor (1977).

### 5.1.1.2 Fração de Empacotamento Máximo

Com intuito de se desenvolver expressões que se correlacionem melhor com suspensões concentradas, é necessário introduzir a fração de empacotamento máximo,  $\phi_m$ , que é definida como a concentração de partículas para a qual a suspensão passa a ter contato tridimensional contínuo através de todo o seu volume, de modo que é impossível haver escoamento (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989), ou seja, a viscosidade tende ao infinito. Valores típicos da fração de empacotamento máxima variam de 0,5 a 0,75, como mostra a Tabela 2 para esferas monodispersas.

Tabela 2 – Fração de empacotamento máximo de várias configurações de esferas monodispersas. Adaptada do proposto por Barnes, Hutton e Walters (1989).

Configuração	Fração Máxima de Empacotamento
Cúbica simples	0,52
Mínima configuração termodinamicamente estável	0,548
Lâminas hexagonalmente empacotadas se encostando	0,605
Empacotamento fechado aleatório	0,637
Empacotamento cúbico de corpo centrado	0,68
Empacotamento cúbico de face centrada	0,74
Empacotamento hexagonal fechado	0,74

### 5.1.1.3 Suspensões Newtonianas Concentradas

A partir da fração de empacotamento máximo, Krieger e Dougherty (1959) desenvolvem uma teoria para viscosidade de suspensões Newtonianas concentradas, que descreve a viscosidade sendo

$$\eta^* = \eta_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-\{\eta\}\phi_m}, \quad (5.2)$$

em que  $\{\eta\}$  é denominada viscosidade intrínseca. Note que  $\{\eta\}$  é adimensional e os valores de  $\{\eta\}$  e  $\phi_m$  são determinados empiricamente. Para suspensão diluída, usando uma expansão obtém-se da Equação (5.2) que

$$\eta^* \sim \eta_0 (1 + \{\eta\}\phi), \quad (5.3)$$

ou seja, a viscosidade de Einstein é um caso especial da Equação (5.2) para suspensões diluídas com viscosidade intrínseca  $\{\eta\} = 5/2$ .

### 5.1.2 Difusão Induzida por Cisalhamento

A fim de se aprofundar ainda mais no estudo dos fluidos condutores particulados, visa-se estudar o fenômeno de difusão induzida por cisalhamento. Para isso, propõe-se a utilização, agora no contexto de líquidos condutores, do método utilizado por [Cunha e Hinch \(1996\)](#) no contexto de suspensões de partículas rugosas não magnéticas e por [Sinzato e Cunha \(2021\)](#) no contexto de fluidos polares. Tal método acopla o escoamento à difusão de partículas através de uma equação de evolução da concentração do tipo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathcal{Q}, \quad (5.4)$$

em que  $\mathcal{Q}$  representa o fluxo de partículas. Nota-se que o fluxo pode ter diferentes termos associados à diferentes mecanismos físicos.

As equações acopladas resultantes devem ser analisadas numericamente, tanto para o caso de placas paralelas quanto em tubo. Os resultados analíticos no limite não particulado podem ser utilizados como uma validação do código numérico empregado para solução do escoamento particulado.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, a fim de se estudar escoamentos magnetohidrodinâmicos internos, pontos de interesses das teorias hidrodinâmica, eletromagnética e magnetohidrodinâmica foram revisados. Adentrando no tema proposto, se determinou, adimensionalizou e resolveu analiticamente as equações governantes dos escoamentos magnetohidrodinâmicos entre placas paralelos e em tubos circulares. A partir das soluções, mostrou-se que, para o escoamento entre placas paralelas, os efeitos magnéticos causam uma desaceleração do escoamento e um achatamento do perfil de velocidades na região central do canal, similar ao que ocorre em perfis de escoamentos turbulentos e de fluidos pseudoplásticos. Além disso, mostrou-se também que a viscosidade efetiva aumenta com o número de Hartmann e que o campo de densidade de fluxo magnético tem pontos de máximo dependentes do número de Hartmann. Já no caso de escoamento em tubo circular, foi mostrado que ao analisar-se o plano paralelo à direção de aplicação do campo externo o comportamento obtido é completamente análogo ao do caso de placas paralelas e que, a medida que o plano de análise se torna perpendicular à direção do campo externo aplicado, perde-se o efeito de achatamento do perfil de velocidades, i.e., o perfil tende a mantêr-se parabólico.

Adicionalmente, apresenta-se uma metodologia experimental para examinar o escoamento magnetohidrodinâmico em tubo capilar. Dos referidos experimentos, obteve-se experimentalmente a viscosidade efetiva em função do parâmetro adimensional magnético, número de Hartmann. Foi notável observar que apenas com a calibração de uma constante usando os dados experimentais, a teoria MHD em tubo capilar foi capaz de ajustar os pontos experimentais com excelente concordância quantitativa, dentro das barras de incerteza. Então, atestou-se a plena confiabilidade da metodologia experimental aplicada para análise experimental de escoamentos magnetohidrodinâmicos.

Por fim, propôs-se estudar, em trabalhos futuros, o fenômeno de dispersão induzida por cisalhamento no caso magnetohidrodinâmico particulado, utilizando para isso o acoplamento da difusão de partículas com o escoamento, o que gera equações diferenciais que terão de ser resolvidas numericamente através de métodos como o de diferenças finitas ou o do tiro.

# Referências

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. San Diego: Elsevier Academic Press, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.
- ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. New York: Dover, 1989. Citado 8 vezes nas páginas 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19 e 20.
- BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, K. *An introduction to reology*. Amsterdam: Elsevier, 1989. Citado 3 vezes nas páginas viii, 45 e 54.
- BARUT, A. O. *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. New York: Dover, 1980. Citado na página 17.
- BATCHELOR, G. K. *Introduction to fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. Citado na página 14.
- BATCHELOR, G. K. The effect of Brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 83, p. 97–117, 1977. Citado na página 53.
- BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O. *Dynamics of polymeric liquids. Volume 1: fluid mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1987. Citado na página 46.
- BOECK, T.; KRASNOV, D.; ZIENICKE, E. Numerical study of turbulent magnetohydrodynamic channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 572, p. 179–188, 2007. Citado na página 4.
- BYRON, F. W.; FULLER, R. W. *Mathematics of classical and quantum physics*. New York: Dover Publication, 1992. Citado na página 62.
- CHANDRASEKHARAIHAH, D. S.; DEBNATH, L. *Continuum mechanics*. San Diego: Academic Press, 1994. Citado na página 8.
- CHANG, C. C.; LUNDGREN, T. S. Duct flow in magnetohydrodynamics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 12, p. 100–114, 1961. Citado na página 4.
- CUNHA, F. R. *Fundamentos da hidrodinâmica de fluidos magnéticos*. 2012. Turbulência (B. S. Carmo, G. R. Assi, J. R. Meneghini, J. A. P. Aranha, e E. V. Volpe, eds.), vol. 8, cap. 7, pp. 257–339, Brasil: ABCM. Citado na página 3.
- CUNHA, F. R. *Notas de aula do curso Dinâmica dos Fluidos Não-Newtonianos, Pós-Graduação em Ciências Mecânicas*. Brasília: Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- CUNHA, F. R. *Notas de aula do curso Magnetohidrodinâmica, Pós-Graduação em Ciências Mecânicas*. Brasília: Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 33.



- CUNHA, F. R.; HINCH, E. J. Shear induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 309, p. 211, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 55.
- DAVIDSON, P. A. Magnetohydrodynamics in materials processing. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 31, p. 273–300, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 3, 33 e 34.
- DAVIDSON, P. A. *Introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. Citado 8 vezes nas páginas vi, 1, 2, 3, 18, 22, 24 e 25.
- EINSTEIN, A. Eine neue bestimmung der molekuldimension. *Annalen der Physik*, v. 19, p. 289–306, 1906. Citado na página 53.
- GELMAN, H. Faraday’s law for relativistic and deformed motion of a circuit. *European Journal of Physics*, v. 12, p. 230, 1991. Citado na página 20.
- GOLD, R. R. Magnetohydrodynamic pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 13, p. 505, 1962. Citado 3 vezes nas páginas 4, 34 e 35.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall, 1999. Citado na página 17.
- HARTMANN, J. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. *Mathematisk-fysiske Meddelelser*, v. 6, p. 1–27, 1937. Citado na página 4.
- IHARA, S.; MATSUSHIMA, A.; TAJIMA, K. The flow of conducting fluids in circular pipes with finite conductivity under uniform transverse magnetic fields. *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, p. 29, 1967. Citado na página 4.
- JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 20.
- KNAEPEN, B.; MOREAU, R. Magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 40, p. 25–45, 2008. Citado na página 3.
- KRIEGER, I. M.; DOUGHERTY, T. J. A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid sphere. *Transactions of the Society of Rheology*, v. 3, p. 137–152, 1959. Citado na página 54.
- KWEYU, D.; MANYONGE, A. W.; BITOK, K. J. Velocity profile for magnetohydrodynamic flow in straight horizontal elliptical pipe. *Applied Mathematical Sciences*, v. 15, p. 283–295, 2021. Citado na página 4.
- LAI, M.; KREMPL, E.; RUBEN, D. *Introduction to continuum mechanics*. Massachusetts: Elsevier, 2010. Citado na página 10.
- MULLER, U.; BUHLER, L. *Magneto-fluid dynamics in channels and containers*. Berlin: Springer-Verlag, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 3, 26 e 34.
- SAMAD, A. The flow of conducting fluids through circular pipes having finite conductivity and finite thickness under uniform transverse magnetic fields. *International Journal of Engineering Science*, v. 19, p. 1221–1232, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 34.

- SHERCLIFF, J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 49(01), p. 136, 1952. Citado na página 4.
- SHERCLIFF, J. A. Magnetohydrodynamic pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 1, p. 644, 1956. Citado na página 4.
- SINZATO, Y. Z.; CUNHA, F. R. Capillary flow of magnetic fluids with effect of hydrodynamic dispersion. *Physics of Fluids*, v. 33, p. 10, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 55.
- TAHERI, M. H.; ASKARI, N.; MAHDAVI, M. H. Nprediction of entrance length for magnetohydrodynamics channels flow using numerical simulation and artificial neural network. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, v. 6, p. 582–592, 2020. Citado na página 4.
- TANAZAWA, I. The flow of conducting fluids through circular pipes having finite conductivity and finite thickness under uniform transverse magnetic fields. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, v. 27, 1962. Citado na página 4.
- TRUEDELLE, C. *A first course in rational continuum mechanics*. [S.l.]: Academic Press, 1977. Citado na página 13.
- UHLENBUSCH, J.; FISCHER, E. Hydromagnetische stromung im kreiszylindrischen rohr. *Zeitschrift fur Physik*, v. 164, p. 190–198, 1961. Citado 4 vezes nas páginas 4, 34, 36 e 39.
- URATA, N. Stability of aluminum reduction cell. In: *1st International Symposium on Electromagnetic Processing of Materials*. [S.l.: s.n.], 1994. Citado na página 2.
- ZANGWILL, A. *Modern electrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 19.
- ZIKANOV, O. et al. Laminar-turbulent transition in magnetohydrodynamic duct, pipe, and channel flows. *Applied Mechanics Reviews*, v. 66, p. 17, 2014. Citado na página 4.

# Apêndices

# A Relações Matemáticas

## A.1 Derivada Lagrangiana do Tensor Gradiente de Deformação e de seu Inverso

Como as componentes cartesianas do tensor gradiente de velocidades são dadas por  $(\mathbf{F})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ , a derivada Lagrangiana das componentes dele podem ser calculadas fazendo-se

$$\frac{D}{Dt}(F_{ij}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \right)_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_j} u_i(\mathbf{X}, t). \quad (\text{A.1})$$

Por conseguinte, tomando  $u_i = u_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$ , obtém-se que

$$\frac{DF_{ij}}{Dt} = \sum_k \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \quad (\text{A.2})$$

ou ainda, multiplicando os dois lados por  $\hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j$  e aplicando somatórios em  $i$  e em  $j$ ,

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{F}. \quad (\text{A.3})$$

A expressão dada pela Equação (A.3) fornece a forma explícita do tensor gradiente de deformação para um meio contínuo cujo campo de velocidades é  $\mathbf{u}$ . Por outro lado, como  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$ , tomando a derivada Lagrangiana,

$$-\mathbf{F} \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{Dt} = \frac{D\mathbf{F}}{Dt} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

de modo que, utilizando a expressão dada pela Equação (A.3),

$$\frac{D\mathbf{F}^{-1}}{Dt} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T. \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Espaço de Funções

### A.2.1 Produto interno no espaço de funções

Seja um espaço vetorial cujos elementos são, de maneira geral, funções complexas ou reais de uma variável real  $x$  definida no intervalo  $[a, b]$ . Pode-se definir o produto

interno entre dois elementos desse espaço,  $f_1$  e  $f_2$ , como

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) dx, \quad (\text{A.6})$$

em que  $f_1^*$  é o complexo conjugado de  $f_1$ . É possível mostrar que tal conjunto de funções forma um espaço vetorial se  $\int_a^b |f(x)|^2 dx$  existe e é finita e que tal definição de produto interno obedece todas as propriedades de um produto interno com norma definida por (BYRON; FULLER, 1992)

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle. \quad (\text{A.7})$$

### A.2.2 Ortogonalidade de funções

O conjunto de funções  $\{f_i\}$  é dito ortogonal em relação à uma função peso  $w(x)$  se

$$\langle f_i, f_j w \rangle = \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) w(x) dx = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (\text{A.8})$$

No caso especial em que

$$\langle f_i, f_j w \rangle = \int_a^b f_i^*(x) f_j(x) w(x) dx = \delta_{ij}, \quad (\text{A.9})$$

sendo  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, o conjunto de funções é dito ortonormal em relação a função peso  $w(x)$ .

### A.2.3 Completude de um conjunto de funções

Diz-se que um conjunto de funções ortogonais,  $\{f_i\}$ , é completo se existem coeficientes constantes  $\{a_i\}$  tais que a sequência de somas parciais  $g_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i$  converge na média para  $g(x)$  (BYRON; FULLER, 1992). No caso de convergência pontual ou uniforme, tem-se que (BYRON; FULLER, 1992)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle g, f_n \rangle}{\|f_n(x)\|^2} f_n(x). \quad (\text{A.10})$$