



Universidade de Brasília  
IE - Departamento de Estatística  
Estágio Supervisionado 2

## **Fundos de Pensão: Um Estudo Atuarial**

**Dauglish Sales Alves  
Giordano Pedreira Pérez da Silveira**

Projeto Final

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Claudete Ruas

Brasília

Julho de 2011

Dauglish Sales Alves

07/12043

Giordano Pedreira Pérez da Silveira

06/85135

## **Fundos de Pensão: Um Estudo Atuarial**

Relatório apresentado à disciplina Estágio Supervisionado II da Graduação em Estatística, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para o grau de Bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. Claudete Ruas

Brasília

**2011**

# Agradecimentos

À professora Claudete Ruas, por nos orientar durante toda a realização deste trabalho. A todos que contribuíram de alguma forma para a consecução dos objetivos do trabalho.

# Resumo

Este trabalho trata da abordagem atuarial dos fundos de pensão. O enfoque específico é a análise da evolução de um ativo financeiro aplicado em um fundo de pensão, no sentido de verificar qual o parâmetro aplicado ao plano do participante terá maior influência no benefício a ser recebido por ele quando o mesmo se aposentar.

Outra questão abordada no trabalho é a utilização de diferentes tábuas de vida para o cálculo do benefício de aposentadoria, o que representa diferentes estruturas de mortalidade e ocasionam alterações nos custos dos planos.

O trabalho trata, pois, de um estudo atuarial acerca de planos previdenciários administrados por fundos de pensão.

# Sumário

<b>RESUMO</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	4
1.2 Metodologia . . . . .	5
<b>2 Breve Histórico</b>	<b>6</b>
2.1 Origens . . . . .	6
2.2 Histórico da Previdência no Brasil . . . . .	8
<b>3 Fundos de Pensão</b>	<b>11</b>
3.1 Introdução . . . . .	11
3.2 Regulamentação dos Fundos de Pensão . . . . .	11
3.3 Funcionamento dos Fundos de Pensão . . . . .	12
3.3.1 Método de Financiamento . . . . .	13
3.3.2 Planos de Benefícios . . . . .	15

3.4	Parâmetros de Interesse em Fundos de Pensão . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Conceitos Demográficos</b>	<b>25</b>
4.1	Introdução . . . . .	25
4.2	Definições Básicas . . . . .	26
4.3	Construção das Tábuas de Vida . . . . .	28
4.3.1	Variáveis Discretas Utilizadas . . . . .	29
4.4	Tábuas de Comutação . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Cálculo Financeiro e Atuarial</b>	<b>37</b>
5.1	Introdução . . . . .	37
5.2	Modelagem Atuarial . . . . .	38
5.2.1	Cálculo para Benefícios Previdenciários . . . . .	40
5.2.2	Cálculo Atuarial Utilizando Tábuas de Comutação . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Comparação dos Parâmetros da Evolução Patrimonial</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>Simulação</b>	<b>56</b>
7.1	Introdução . . . . .	56
7.2	Premissas do Fundo de Pensão . . . . .	57
7.3	Parâmetros a Serem Analisados na Simulação . . . . .	59
7.4	Resultados . . . . .	60

<b>8 Conclusão</b>	<b>66</b>
<b>A Probabilidades de Morte</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Aposentadoria é um assunto que interessa a todos os segmentos da sociedade. Hoje em dia fala-se muito em planejamento financeiro para poder, ao final da vida profissional ativa, parar de trabalhar com segurança e qualidade de vida. A previdência é um mecanismo do mercado financeiro criado no intuito de fazer com que as pessoas conquistem esse objetivo. Além disso, em um país onde, nas últimas décadas, a esperança de vida vem aumentando e a taxa de fecundidade, caindo, ou seja, a população envelhecendo, os sistemas de previdência passaram a desempenhar um papel muito importante e necessitam de eficiência para atender a crescente demanda por planos que contemplem as mais variadas situações dos inativos.

Existem três regimes de previdência no Brasil segundo sua estruturação e legislação: *geral*, *próprio* e *de previdência complementar*.

A previdência social, *sob regime geral*, tem base legal no art. 201 da



Constituição Federal, é gerenciada pelo Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS) e oferece outros benefícios além da aposentadoria aos seus contribuintes, como, por exemplo, seguro-desemprego e pensão por morte. A adesão é obrigatória e a contribuição é cobrada sob forma de imposto dos empregados e empregadores do setor privado, empregados públicos, servidores sem vínculo e servidores efetivos de municípios sem regime próprio. A previdência social é um sistema de repartição simples, que não acumula fundos e os benefícios pagos aos aposentados e pensionistas dependem da contribuição dos trabalhadores ativos.

O segundo regime de previdência é o *regime próprio*, que envolve os servidores públicos titulares de cargo efetivo da União, Estados, DF e cerca de 2200 Municípios, suas autarquias e fundações. A adesão também é obrigatória e o regime está previsto no art. 40 da Constituição Federal.

Outro regime de previdência é a *previdência complementar* (ou privada), que pode ser contratada por quem deseje obter um complemento para a sua aposentadoria ou mesmo por quem não contribui com nenhum dos outros dois regimes de previdência e deseja garantir uma aposentadoria que lhe proporcione segurança e tranquilidade. Essa modalidade de previdência, prevista no art. 202 da Constituição Federal, tem natureza contratual e engloba planos diferentes que se adequam ao perfil do contratante, podendo

ser mais ou menos onerosa.

A previdência privada no Brasil se divide em duas categorias principais: *aberta*, operada por Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC's) e que pode ser contratada por qualquer cidadão; *fechada*, operada por Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC's) e destinada a grupos específicos, como funcionários de uma empresa, por exemplo. Tanto as Entidades Abertas de Previdência Complementar como as Entidades Fechadas de Previdência Complementar funcionam em regime de capitalização, ou seja, investem o dinheiro acumulado em renda fixa, renda variável, imóveis, entre outros, tendo em vista a valorização dos mesmos, porém aquelas são sociedades anônimas com fins lucrativos, enquanto estas são fundações privadas ou sociedades civis e não tem fins lucrativos.

O cálculo dos valores envolvidos em um plano de previdência, tanto pagos como recebidos pelos contratantes, envolve tábuas biométricas, juros, tempo de contribuição, idade fim da contribuição e outros fatores variáveis que são objeto de estudo das instituições que oferecem o serviço. Como as contribuições são feitas, na maior parte das vezes, mensalmente e durante um longo prazo para que se tenha benefícios financeiros, único ou periódicos ao final desse prazo, as variações de valores monetários no tempo é peça fundamental no campo previdenciário.

É de interesse entender o funcionamento de um plano de previdência e a evolução financeira da quantia nele investida, bem como quais os fatores que mais influenciam nessa evolução. Esclarecer essas questões é o objetivo deste trabalho.

## 1.1 Objetivos

### 1. Objetivo geral:

- Analisar a evolução de um ativo financeiro aplicado em um fundo de pensão que tem por objetivo o pagamento de aposentadoria, de acordo com diferentes parâmetros.

### 2. Objetivos específicos:

- Descrever as influências nos custos de um plano previdenciário, geradas pelas variações de parâmetros, como juros e longevidade da população;
- Estudar essas variações para verificação de quais são significativas;
- Fazer a simulação de um plano previdenciário e interpretar seus valores.

## 1.2 Metodologia

Primeiramente, será realizado um estudo sobre as técnicas para construção de uma Tábua de Vida, seus conceitos, bem como suas funções ( ${}_tq_x$ ,  ${}_tp_x$ ,  $l_x$ ,  ${}_td_x$ ,  $T_x$ ,  ${}_tL_x$ ,  $\dot{e}_x$ ) e acerca de cálculo atuarial para o aprendizado da notação utilizada e dos principais conceitos. Logo após, através da variação de alguns parâmetros envolvidos no cálculo do custo de um plano de previdência, será testada a influência de cada um no valor a ser cobrado e recebido pelo indivíduo que recebe aposentadoria. Por fim, técnicas computacionais serão aplicadas com o objetivo de fazer uma simulação de um fundo de pensão fictício para mostrar a evolução de um ativo patrimonial.

# Capítulo 2

## Breve Histórico

### 2.1 Origens

Segundo Mendes(1977), todo e qualquer evento aleatório que pode acarretar prejuízo econômico é denominado risco. Desde que o homem tomou conhecimento da importância da gestão do risco para a tomada de decisões, a história da atuária começou a ser escrita. Reservas financeiras, seguros, regimes previdenciários, entre outros, são importantes ferramentas desenvolvidas no intuito de diminuir o impacto financeiro negativo de acontecimentos imprevistos na vida das pessoas.

Existem registros de que na Babilônia, aproximadamente 23 séculos antes de Cristo, comerciantes que faziam longas trajetórias de uma cidade à outra, com medo dos perigos enfrentados no caminho, tinham um acordo: se alguém do grupo perdesse um camelo durante a travessia, ganharia outro animal pago

pelos colegas(Guimarães, 2007). Está claro neste ponto que, frente ao perigo e às incertezas da situação, as pessoas procuravam algo que lhes oferecesse segurança.

Na época do Mercantilismo, com a expansão das navegações, surgiu o Contrato de Dinheiro a Risco Marítimo, onde o navegador tinha sua viagem financiada por um investidor e deixava a embarcação e o valor da carga como hipoteca. Se a embarcação e a carga viessem a ser perdidas na viagem, o investimento não era devolvido, mas se o navegador chegasse ao destino, o valor era devolvido pelo navegador, acrescido de juros.

Mas foi John Graunt (1620-1674) que, segundo Bernstein (1997), desenvolveu as primeiras técnicas estatísticas sólidas, que deram ao ramo dos seguros base científica, possibilitando o seu aprimoramento até os dias de hoje. Graunt utilizou registros de mortalidade disponíveis na época para construir poderosas ferramentas para estimativas de valores de seguros para a população.

No século XVII, houve um aprofundamento do conhecimento atuarial graças ao desenvolvimento do cálculo de probabilidade, estudado por grandes nomes como Kolmogorov, Fermat, Markov, Bayes, entre outros. Em 1693, Edmund Halley apresentou a primeira tábua de vida elaborada com padrões científicos.

## 2.2 Histórico da Previdência no Brasil

No Brasil, os primeiros registros previdenciários são do século XVI, mas o ramo começou a ganhar notoriedade a partir da vinda da família real portuguesa em 1808, vez que esse fato foi fundamental para o desenvolvimento econômico do país. Desde então, começaram a surgir no Brasil companhias de seguro que seguiam a legislação portuguesa, prática que perdurou enquanto o Brasil foi colônia de Portugal.

A previdência no Brasil, como em qualquer outro lugar, teve suas origens apoiada na idéia de solidariedade daquela parte da população para com os que, por circunstâncias diversas e alheias às suas vontades, sofressem algo que lhes prejudicasse ou incapacitasse economicamente, como por exemplo, invalidez ou velhice. Instituições como a Marinha começaram a contar com sistemas de previdência (Organização do Montepio dos Oficiais da Marinha da Corte) que tinham por objetivo prover dignidade às famílias que perdiam seu chefe a serviço do estado. Algum tempo depois, a mesma prática foi adotada entre grupos de trabalhadores de risco, como ferroviários.

O Código Civil Brasileiro de 1916, regulamentou todos os tipos de seguro, dando ao ramo estrutura legal. Além disso, com a Lei Eloy Chaves (1923), um passo fundamental para o desenvolvimento de uma consciência previdenciária

no Brasil, e o conseqüente surgimento de empresas de previdência privada, o governo precisou criar órgãos para controlar esse novo setor da economia.

Em 1934 foi criado o Departamento Nacional de Seguros Privados e Capitalização (DNSPC), o qual fez valer a lei que passou a reger os seguros no país. Para regular o setor, que contava com empresas nacionais e estrangeiras, o governo brasileiro criou uma série de órgãos públicos especializados no ramo de seguros, como a Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), o Conselho Nacional de Seguros Privados (CNSP) e o Instituto de Resseguros do Brasil (IRB), entre outros.

A despeito do sistema de previdência social oferecido pelo governo, que contava com outros benefícios financeiros além de aposentadoria, tornou-se cada vez mais comum a criação de instituições de previdência privada no país, que complementassem os benefícios oferecidos pela previdência social.

Em 1974 é criado o Ministério da Previdência e Assistência Social e em 1977, é elaborada a Legislação da Previdência Privada, que a subdivide em aberta e fechada. A aberta, como foi dito no capítulo anterior, é gerenciada por instituições financeiras podendo ser contratada individualmente por qualquer cidadão e a fechada é destinada a grupos específicos e tem caráter mutualista, ou seja, seu objetivo é conceder benefícios a todos que participem da constituição do fundo. No modelo de previdência privada fechada, o fundo



é constituído pelas contribuições de seus integrantes e da própria empresa patrocinadora que emprega esses contribuintes, assim como pelos rendimentos líquidos das aplicações dessas contribuições.

Hoje em dia, a atuação dessas instituições de previdência são de extrema importância, pois além de constituírem um poderoso instrumento para formação de poupança interna no país e possuírem ativos financeiros necessários ao desenvolvimentos de diversos setores da economia nacional, têm a responsabilidade de manter a qualidade de vida dos aposentados, o que não é uma tarefa fácil vez que a cada dia, no Brasil de um modo geral, aumenta o número de aposentados frente ao de contribuintes com a previdência.

## **Capítulo 3**

# **Fundos de Pensão**

### **3.1 Introdução**

Os fundos de pensão, como também são conhecidas as entidades fechadas de previdência complementar, são os operadores do regime de previdência complementar fechada. Os fundos de pensão são acessíveis aos empregados de uma empresa ou grupo de empresas e aos servidores da União, do Distrito Federal e dos Municípios, entes denominados patrocinadores e aos associados ou membros de pessoas jurídicas de caráter profissional, classista ou setoriais denominadas instituidoras. Essas instituições administram os recursos provenientes de contribuições que objetivam o pagamento de benefícios futuros como aposentadoria e pensão por morte, entre outros.

### **3.2 Regulamentação dos Fundos de Pensão**

Além de estarem previstos no art. 202 da Constituição Federal, os fundos

de pensão têm suas regras gerais estabelecidas nas Leis Complementares nº 108/01 e nº 109/01 de acordo com a natureza dos seus patrocinadores, pública ou privada.

A lei nº 12.154 de 23 de Dezembro de 2009 criou a Superintendência Nacional de Previdência Complementar(PREVIC), que tem como objetivo atuar na fiscalização e supervisão das entidades fechadas de previdência complementar e na execução das políticas para o regime de previdência complementar. Já o Decreto nº 7.123 de 03 de Março de 2010 criou a CNPC - Conselho Nacional de Previdência Complementar e a CRPC - Câmara de Recursos da Previdência Complementar. Ao CNPC cabe a função de órgão regulador do regime de previdência complementar. E a CRPC cabe a função de julgar os recursos interpostos contra decisões da PREVIC, encerrando a instância administrativa dos julgamentos.

### **3.3 Funcionamento dos Fundos de Pensão**

De acordo com a Secretaria de Previdência Complementar, a estrutura mínima para o funcionamento de um fundo de pensão é composta pelo Conselho Deliberativo, pelo Conselho Fiscal e pela Diretoria Executiva, sendo que o(a):

- Conselho Deliberativo define as diretrizes da entidade e a política de

investimento do patrimônio;

- Conselho Fiscal fiscaliza e controla as atividades internas do fundo de pensão;
- Diretoria Executiva é responsável pela administração financeira e patrimonial do fundo de pensão.

As Leis Complementares nº 108/01 e nº 109/01 definem a composição dos três órgãos acima citados segundo a natureza das entidades patrocinadoras, porém, sendo outro o foco do presente trabalho, nos limitamos a descrever as suas atividades principais como feito acima.

### **3.3.1 Método de Financiamento**

As contribuições feitas aos fundos de pensão, basicamente têm duas fontes: os participantes e os patrocinadores. Obviamente, os rendimentos líquidos das aplicações dessas contribuições também constituem receita para os fundos. Grosso modo, os participantes são os empregados e os patrocinadores, os empregadores.

Os regimes financeiros, também conhecidos por métodos de financiamento, são modelos orçamentários adotados pelo atuários nos planos de benefícios para viabilizar o cumprimento do fluxo de pagamentos dos benefícios. O método de financiamento estabelece a forma de ingresso das

contribuições e como serão capitalizadas, não tendo influência no custo real de um plano de benefícios. Este é afetado pelo nível de benefícios prometidos pelo plano e pelas hipóteses de mortalidade, invalidez, rotatividade, taxa de inflação, taxa de crescimento dos salários dos participantes, taxa de juros, etc.

Como relata Pinheiro(2007), o método de financiamento dos fundos de pensão é o regime de capitalização, previsto na Resolução do Conselho de Gestão da Previdência Complementar - CGPC n° 18, de 28/03/2006, o qual é obrigatório no financiamento de benefícios cujos pagamentos sejam realizados na forma de rendas programadas e continuadas (aposentadoria por tempo de serviço, idade, contribuição, especial etc.). Para as demais modalidades de benefícios, seja na forma de renda ou pagamento único, a adoção desse regime é facultativa. Nesse método determina-se a série de contribuições necessárias ao pagamento dos benefícios futuros de forma que toda a reserva necessária esteja totalmente integralizada na data da aposentadoria. Há formação de reservas matemáticas para os participantes ativos e inativos. Trata-se de método com elevada sensibilidade às taxas de juros e à longevidade da população de ativos e assistidos pelo plano.

### 3.3.2 Planos de Benefícios

Um plano de benefícios, segundo a Secretaria de Previdência Complementar(SPC), nada mais é do que um conjunto de regras que definem um rol de benefícios previdenciários, comum à totalidade dos participantes a ele vinculados, possuindo independência contábil, patrimonial e financeira em relação a quaisquer outros planos. São divididos em benefícios programados e benefícios de risco. Os benefícios programados são aqueles em que a data de ocorrência é definida. Os benefícios de risco são imprevisíveis, não há garantia de sua ocorrência. Pode ser pela ocorrência de doença, invalidez ou morte do participante. Existem três tipos de planos: benefício definido, contribuição definida e contribuição variável. A Resolução CGPC nº 16, de 22 de novembro de 2005, definiu estas modalidades da seguinte forma:

- Benefício definido: são aqueles planos de benefícios de caráter previdenciário cujos benefícios programados têm seu valor ou nível previamente estabelecidos, sendo o custeio determinado atuarialmente, de forma a assegurar sua concessão e manutenção;
- Contribuição definida: são aqueles planos de benefícios de caráter previdenciário cujos benefícios programados têm seu valor permanentemente ajustado ao saldo de conta mantido em favor do participante, inclusive

na fase de percepção de benefícios, considerando o resultado líquido de sua aplicação, os valores aportados e os benefícios pagos;

- Contribuição variável: aqueles planos de benefícios de caráter previdenciário que apresentem a conjugação das características das modalidades de contribuição definida e benefício definido.

Um dos benefícios mais comuns dos planos de previdência, que é o objeto de estudo deste trabalho, é o pagamento de aposentadoria por tempo de contribuição.

Sendo o regime de capitalização o método de financiamento dos fundos de pensão, fica claro que, dado seu caráter de investimento do ativo financeiro, uma série de parâmetros relacionados à valorização desse ativo são objetos de estudo dos profissionais que atuam nesse ramo econômico. As seções seguintes relacionam alguns destes parâmetros.

### **3.4 Parâmetros de Interesse em Fundos de Pensão**

Neste tópico iremos abordar algumas variáveis que influenciam a evolução patrimonial da conta investimento do participante. Tendo um foco atuarial, nos limitaremos a estudar aquelas variáveis de interesse para o pagamento, cuja obtenção será apresentada no Capítulo 5.

### **Taxa de administração e de carregamento:**

A taxa de administração é o percentual incidente sobre o montante dos recursos garantidores dos planos de benefícios no último dia do exercício a que se referir. Ela é cobrada pela instituição para custear a administração de um fundo de investimentos. Já a taxa de carregamento dos planos no exercício a que se referir, é descontada pela entidade de previdência complementar de toda e qualquer contribuição aos planos de previdência e serve para cobrir despesas de administração, corretagem, divulgação, etc.

A Resolução da CGPC nº 29 de 31 de Agosto de 2009 trata do assunto, traz algumas definições e estabelece limites de cobrança das taxas acima citadas. O artigo 6º da referida lei, determina que o limite anual a ser cobrado pelo conjunto de planos de benefícios executados pela entidade fechada de previdência complementar de que trata a lei complementar nº 108 de 2001, para o plano de gestão administrativa, observado o custo pelo patrocinador, participante e assistidos, é um entre os seguintes: I - taxa de administração de até 1% (um por cento); ou II - taxa de carregamento de até 9% (nove por cento).

### **Rentabilidade mensal real:**

A rentabilidade mensal é de suma importância na evolução patrimonial do ativo financeiro por motivos óbvios. Há de se destacar, contudo,



a diferença entre rentabilidade real e a rentabilidade bruta. A rentabilidade real é rentabilidade livre da inflação, ou seja, é a rentabilidade descontada a inflação. Um exemplo que podemos citar é a formação da rentabilidade da poupança, ela é formada pela TR (taxa referencial), que é um atualizador financeiro, mais 0.5% ao ano. Neste exemplo 0.5% representa a taxa real e a TR representa a taxa de inflação. O rendimento da poupança é a rentabilidade bruta.

Segundo a resolução CGPC nº 18 de 28 de Março de 2006, no item 4 do seu anexo, a taxa real máxima de juros admitida nas projeções atuariais do plano de benefícios é de 6% ao ano. Isso não quer dizer que todo o seu investimento renda no máximo 6% ao ano, e sim que quando da estimativa do valor futuro do patrimônio a taxa real máxima utilizada para a projeção será de 6% ao ano. Dessa forma, evita-se que o valor futuro seja estimado de forma supervalorizada.

### **Tributação:**

Com o advento da lei nº 11.053/2004, regulamentada pela instrução normativa SRF nº 497/2005, a partir de 1º de Janeiro de 2005, os rendimentos auferidos nos investimentos efetuados pelas entidades de previdência complementar e seguradoras, durante o prazo de acumulação dos planos, não estão sujeitos ao imposto de renda. A tributação apenas se dá no momento do

recebimento do benefício ou no resgate parcial ou total do valor acumulado.

Os planos contratados a partir de Janeiro de 2005 contam com duas opções de tributação: Imposto de Renda - IR com ajuste na declaração anual e IR definitivo com alíquota regressiva. O primeiro é o progressivo, indicado para quem pretende resgatar o dinheiro no curto prazo (menos de 10 anos). O segundo é o regressivo, ideal para quem deseja deixar os recursos aplicados por pelo menos 10 anos. A diferença entre as duas está na forma de incidência do imposto na hora do resgate dos recursos ou do recebimento do benefício. Na opção de tributação "IR com ajuste na declaração anual", o imposto devido será retido na fonte à taxa única de 15% sobre qualquer resgate e o cliente ficará responsável pelo ajuste na declaração anual do imposto de renda, de acordo com a tabela progressiva. Já na segunda hipótese a lei nº 11.053, de 29 de Dezembro de 2004, a regula. Esta lei regula a tributação na fase de resgate e recebimento do benefício previdenciário. Logo em seu artigo 1º ela dá a opção para quem entrou a partir de 1º de Janeiro de 2005 em planos de benefício de caráter previdenciário, estruturados na modalidade de contribuição definida ou contribuição variável poder optar pelo seguinte regime de tributação de imposto de renda retido na fonte quando do resgate ou recebimento do benefício:

I- 35 % (trinta e cinco por cento), para recursos com prazo de acumulação

inferior ou igual a 2 (dois) anos;

II - 30% (trinta por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 2 (dois) anos e inferior ou igual a 4 (quatro) anos;

III - 25% (vinte e cinco por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 4 (quatro) anos e inferior ou igual a 6 (seis) anos;

IV - 20% (vinte por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 6 (seis) anos e inferior ou igual a 8 (oito) anos;

V - 15% (quinze por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 8 (oito) anos e inferior ou igual a 10 (dez) anos; e

VI - 10% (dez por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 10 (dez) anos.

A lei define prazo de acumulação como sendo o lapso temporal entre o aporte de recursos e o recebimento do benefício. Ou seja, o prazo de acumulação dos recursos é contado individualmente para cada contribuição. Desta forma, não podemos confundir prazo de acumulação com data de ingresso no plano. Vale salientar, ainda, que para a contagem do prazo de acumulação é utilizado o critério contábil de avaliação de estoque, denominado de PEPS (iniciais da expressão Primeiro que Entra, Primeiro que Sai), desta forma, no caso de benefícios, será considerada a média ponderada do prazo de acumulação em relação aos valores acumulados, de tal forma, que

os depósitos iniciais sejam os primeiros a serem pagos, beneficiando-se de alíquotas mais favoráveis. Já o prazo de acumulação será contado a partir:

I - de 1º Janeiro de 2005, no caso de aporte de recursos realizados até 31 de Dezembro de 2004;

II - da data de aporte, no caso de aportes de recursos realizados a partir de 1º de Janeiro de 2005.

O artigo 2º estende o direito de opção pelas regras de incidência de imposto de renda referido no artigo 1º também aos que entraram até 1º de Janeiro de 2005. Desta forma todos que aderirem ou que aderiram aos planos de benefícios podem optar por esse regime de tributação. Na mesma lei o legislador alerta que quem não aderir a esse sistema de tributação e fizer algum resgate parcial ou total de recursos acumulados sofrerá incidência de imposto de renda de 15% incididos sobre o valor do resgate no caso de planos de previdência. A lei nº 11.196 de 21 de Novembro de 2005 trouxe algumas alterações na lei nº 11.053/2004. No artigo 93º da referida lei o legislador estabelece a regra de tributação no caso do pagamento de benefícios não programados para quem optou pelo regime de tributação previsto no artigo 1º e 2º da lei nº 11.053/2004, que institui a tabela regressiva de incidência de imposto de renda. A regra de tributação é a seguinte:

- 25% quando o prazo de acumulação for inferior a 6 (seis) anos;

- 20% (vinte por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 6 (seis) anos e inferior ou igual a 8 (oito) anos;

- 15% (quinze por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 8 (oito) anos e inferior ou igual a 10 (dez) anos; e

- 10% (dez por cento), para recursos com prazo de acumulação superior a 10 (dez) anos.

### **Contribuição patronal:**

Como o nosso estudo se refere a uma entidade fechada de previdência complementar instituída para servidores públicos, a lei Complementar nº 108 de 29 de Maio de 2001 é a que regula estas entidades. Isto posto se olharmos o artigo 6º da referida lei podemos afirmar que existe a paridade de contribuição entre o participante e o patrocinador. Dessa forma o valor da contribuição patronal é igual ao valor da contribuição ordinária do participante.

### **Tábua de Vida:**

A tábua de mortalidade é ferramenta básica nos cálculos atuariais que definem os fluxos futuros de benefícios e de contribuição das entidades fechadas de previdência complementar.

No Brasil, as seguradoras influenciaram muito as práticas atuariais. No âmbito da previdência complementar, mais especificamente nas EFPC (Entidades Fechadas de Previdência Complementar), em especial a tábua de

mortalidade, teve a mesma trajetória. E o uso das tábuas para grupos abertos é bastante recorrente nos planos de benefícios das EFPC. Porém, poucas tábuas foram criadas para a realidade brasileira em grupos fechados.

Essas tábuas de mortalidade têm por objetivo a avaliação periódica dos planos de previdência para projetar a evolução da população ao longo do tempo. Internacionalmente é de praxe a utilização de tábuas de mortalidade construídas com experiências que aproximem do grupo a ser avaliado. Assim, para avaliar planos coletivos são utilizadas tábuas com experiência de grupos. Para planos individuais, entidades abertas de previdência complementar, utilizam-se tábuas desenvolvidas a partir de experiência individual.

Após a avaliação atuarial da adequação da tábua a cada plano e a suavização da taxa de mortalidade, estaremos com a chamada tábua básica. Para chegarmos à tábua final faremos uma redução na taxa de mortalidade como forma de margem de segurança.

No Brasil temos algumas tábuas que são bastante recorrentes. Dentre elas podemos citar a AT-83. Essa tábua corresponde a experiências individuais das seguradoras, por isso não é utilizado em avaliação de planos coletivos nos EUA, porém no Brasil é indicada como padrão mínimo na legislação de previdência complementar. Vale lembrar que quanto menor a expectativa de vida da tábua utilizada, mais barato ficará o plano e ao mesmo tempo

maior será o risco de que a taxa de mortalidade dos participantes do plano seja menor que o previsto e os recursos acumulados pelo plano não sejam suficientes para arcar com todas as despesas de um maior prazo de pagamento dos benefícios. Com a fixação de uma tabela mínima, ou seja, com taxa de mortalidade abaixo do real, a legislação estabelece um limite de risco máximo a qual as entidades se submeterão. O limite mínimo será a própria concorrência do mercado que fixará.

A projeção da tábua AT-83 por 17 anos é conhecida como AT 2000.

Há ainda a RP-200, que é indicada na legislação americana como a tábua de mortalidade a ser utilizada na avaliação atuarial.

A resolução CGPC nº 18/2006 indicou a AT-83 como a tábua mínima a ser utilizada. Mais recentemente a CGPC nº 26/2009 mencionou a AT-2000 como parâmetro no cálculo para distribuição de superávit do plano, indicando assim uma provável alteração na tábua mínima.

A resolução CGPC nº 189 de 28 de Março de 2006, em seu item 2 do anexo, estabeleceu que as tábuas biométricas utilizadas para projeção de longevidade dos participantes e assistidos do plano de benefícios será sempre aquela mais adequada à respectiva massa, não se admitindo exceto para a condição de inválidos, tábuas biométricas que gerem expectativas de vida inferiores às resultantes da aplicação da tábua AT-83.

# Capítulo 4

## Conceitos Demográficos

### 4.1 Introdução

A Ciência Atuarial está intimamente ligada à Demografia. É necessário, pois, o conhecimento de aspectos populacionais como estrutura etária, taxa de mortalidade e de fecundidade de uma população para que se formulem estratégias a fim de minimizar o risco atuarial e financeiro de instituições operadoras de planos previdenciários.

As Tábuas de Vida são ferramentas fundamentais para o estudo atuarial. Elas contêm dados de mortalidade imprescindíveis aos cálculos de prêmios e custos previdenciários, assuntos abordados no capítulo 4.

O objetivo deste capítulo é descrever as funções presentes em Tábuas de Vida, ou Tabelas de Mortalidade, bem como as informações que delas podem ser extraídas.



## 4.2 Definições Básicas

Capelo, 1986, define *Coorte* como um grupo de pessoas nascidas vivas num mesmo local, durante o mesmo intervalo de tempo e fechada à migrações e que tem sua trajetória de vida analisada ao longo do tempo até que seu último integrante faleça. Existem coortes de grupos específicos, como um grupo social ou um só sexo. Chama-se Raiz de uma Coorte,  $l_0$ , seu número total de integrantes no início do ano base, ou seja, o primeiro ano de observação dessa coorte. A cada ano que passa, alguns integrantes dessa população vão morrendo e o número de sobreviventes dessa população no início de cada período da tábua,  $l_x$ , vai sempre diminuindo, com  $l_x \geq l_{x+a}, \forall a \in \mathbb{N}$ .

Cada coorte tem sua própria experiência de vida e morte, segundo os fatores que incidem sobre cada uma e provocam-lhes um decréscimo singular. Por isso, o ideal é que haja um acompanhamento regular das várias coortes que compõem uma população no intuito de se identificarem as mudanças demográficas expressas pelas variações nas diferentes taxas observadas.

As Tábuas de Vida, ou Tabelas de Mortalidade como também são conhecidas, ou ainda Tabelas de Sobrevivência, constituem importante instrumento da Demografia e sintetizam uma série de variáveis relacionadas à mortalidade e sobrevivência avaliadas numa população, que apresentam informações so-

bre a mortalidade por idade dos integrantes dessa população. As tabelas podem ser separadas por sexo, assim conterão informações independentes.

Além disso, pode haver outra classificação para as Tábuas de Vida, de acordo com o tipo de coorte utilizada em sua construção (Capelo, 1986). Podem ser feitas a partir de coortes sintéticas, que contém informações sobre a população em um determinado período incluindo indivíduos de diferentes grupos etários e se denominam Tabelas de Sobrevivência para um Período.

As Tabelas de Sobrevivência para uma Geração são construídas analisando-se coortes reais, ou seja, gerações inteiras.

De acordo com a evolução do número de sobreviventes de uma população, as tábuas de vida podem ser classificadas como de único decremento ou múltiplos decrementos. As tábuas de único decremento são mais comuns e só apresentam decréscimo no número de pessoas quando da morte de uma delas. Já a de múltiplos decrementos, utilizadas com objetivos mais específicos, revelam o decréscimo da população devido a mais de um fator. Por exemplo, uma tábua de vida relacionada à casamentos, apresenta diminuição no número de integrantes devido ao divórcio e à morte. Nos deteremos, neste trabalho, à análise de tábuas de único decremento, pois são as tábuas utilizadas por entidades que oferecem benefícios previdenciários.

### 4.3 Construção das Tábuas de Vida

A Análise de Sobrevivência pode ser feita a partir de funções contínuas ou discretas. A análise do caso contínuo é teórica e possui rigor científico, porém muitas vezes é impraticável por falta de precisão nos dados que atenda às funções contínuas. Por exemplo, no caso contínuo, é necessário saber o dia e hora exatos de morte de um indivíduo. Mas isso nem sempre é possível, podendo ser desconhecido até mesmo o dia em que houve o óbito.

Apresentaremos funções que utilizam variáveis discretas para construção de tábuas de vida e apesar da característica de continuidade do tempo, definem-se duas variáveis, ano-calendário e idade, que são consideradas discretas.

O ano-calendário vai de 1º de janeiro até 31 de dezembro e a nomenclatura considera ano  $1$ , ano  $2$ , ano  $n$  cada ano que se segue ao ano tomado como base para o estudo. Escolhe-se o dia 1º de julho como melhor data para coleta de dados sobre a mortalidade da população, pois, supondo uniformidade na distribuição dos aniversários durante o ano-calendário, o ideal é que o início do ano-calendário coincida com o início da idade dos integrantes da coorte.

A construção, propriamente dita, de uma tábua de vida consiste em calcular as probabilidades de morte da coorte em cada intervalo etário definido

para a tábua e, considerando um número inicial fictício de integrantes dessa população, geralmente 100.000 ou 1.000.000, encontrar o valor de todas as outras funções presentes na tabela, uma vez que estas são obtidas a partir de relações entre a probabilidade de morte e o número de integrantes. Dessa forma, mesmo tendo-se coletado dados de mortalidade de uma população com um tamanho qualquer, quando tomam-se probabilidades, ocorre uma padronização que pode ser estendida para população de outro tamanho, no caso, o padrão utilizado.

### 4.3.1 Variáveis Discretas Utilizadas

As probabilidades de morte em um determinado ano-calendário, à idade  $x$  usando a definição de Capelo(1986)  $q_x$ , são obtidas através da razão entre o número de mortes ao longo do ano e o número de sobreviventes no início do ano. Se representarmos o número de mortes, à idade  $x$ , em um ano por  $D_x$  e a quantidade de pessoas vivas, também à idade  $x$ , em 1º de julho por  $K_x$ , definimos:

$$q_x = \frac{D_x}{K_x + \frac{1}{2}D_x}$$

E, sendo  $p_x$  a probabilidade complementar:

$$p_x = 1 - q_x = \frac{K_x - \frac{1}{2}D_x}{K_x + \frac{1}{2}D_x}$$

e, a partir destas, temos que

$${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}$$

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x.$$

onde  ${}_t p_x$  é a probabilidade de um indivíduo de  $x$  anos sobreviver aos próximos  $t$  anos, e  ${}_t q_x$  é a probabilidade complementar.

Para o cálculo de benefícios antecipados e postecipados, assunto abordado no Capítulo 5, definiremos neste momento a variável aleatória discreta  $K(x)$ , que representa o número de anos que um indivíduo ainda completará antes de morrer. Sua função densidade de probabilidade é:

$$f_K(k) = P[K = k] = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x$$

$$= {}_k p_x \cdot q_{x+k}, \text{ onde } k = 0, 1, 2, \dots$$

Sendo  $l_0$  a raiz da coorte, e  $l_x$  o número de sobreviventes à idade  $x$ , temos que

$$l_x = l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_{x-1}$$

e, conseqüentemente, o número de mortes em uma coorte entre as idade  $x$  e  $x+t$  é dado por

$${}_t d_x = l_x - l_{x+t}$$

Pode-se também chegar ao valor de  ${}_t d_x$ , multiplicando-se  $l_x$  por  ${}_t q_x$  e então,

$$l_{x+t} = l_x - {}_t d_x$$

Define-se  ${}_t L_x$  como a Exposição à Morte dos sobreviventes de  $l_0$  entre

as idades  $x$  e  $x+t$ . Basicamente a variável será igual ao número de anos vividos pelos indivíduos que viveram entre as idade  $x$  e  $x+t$ , incluindo os que morreram nesse período. Considera-se que a todo o momento que vive, uma pessoa está exposta ao risco de morte. Daí a exposição à morte de uma coorte em um determinado período ser igual a soma dos tempos que todos estiveram vivos neste período. Para exemplificar, suponhamos que o período  $t$  seja de 1 ano. Aqueles que sobreviveram ao período viveram 1 ano cada. Os que morreram durante o período, viveram cada um menos de um ano. Neste caso,  $L_x$  pode ser calculado através da expressão:

$$L_x = l_{x+1} + \frac{l_x - l_{x+1}}{2} = l_{x+1} + \frac{d_x}{2}$$

onde o termo  $\frac{d_x}{2}$  mostra que é feita a suposição de uniformidade da ocorrência de mortes durante o ano, e em média, cada um dos  $d_x$  indivíduos que morreram, viveram meio ano.

Para um caso mais geral, onde  $t$  pode assumir qualquer valor natural a expressão será

$${}_tL_x = \sum_{n=x}^{x+t} \left[ \frac{l_n + l_{n+1}}{2} \right]$$

Uma função de grande importância nos estudos de sobrevivência é a Força de Mortalidade,  ${}_t\mu_x$ . Para o caso discreto, é a razão entre o número de mortes e o quanto se esteve exposto ao risco de morte no período.

$${}_t\mu_x = \frac{{}_td_x}{{}_tL_x}$$

Quanto maior o valor de  ${}_t\mu_x$ , significa que no período entre  $x$  e  $x+t$ , maior a probabilidade de o risco de morte, efetivamente, se concretizar em morte.

$T_x$  é a variável que representa o tempo vivido por todos na idade atual e até a morte do último sobrevivente da população que integra a Tábua de Vida. Logo,  $T_x$  é obtida através de  $l_x$ .

$$T_x = \sum_{t=x}^w \left[ \frac{l_t + l_{t+1}}{2} \right],$$

onde  $w$  é a idade de morte do mais longo integrante da coorte.

Por fim, a expectativa de vida, à idade  $x$ , é calculada dividindo-se o valor de  $T_x$  por  $l_x$ .

$$\dot{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

É intuitiva a idéia de que o tempo de vida residual da coorte ( $T_x$ ) dividido pelo número de pessoas vivas presente, em média, o número de anos a ser vivido por cada um.

Retomando-se a idéia presente no início desta seção, percebe-se que obtendo-se os valores de  ${}_tq_x$  com base em dados reais e fixando-se para  $l_0$  uma quantidade padrão qualquer, é possível obter-se  ${}_tp_x$ ,  ${}_td_x$ ,  $l_x$ ,  ${}_tL_x$ ,  $T_x$  e  $\dot{e}_x$ , todas as funções de presentes em uma tábua de vida.

## 4.4 Tábuas de Comutação

Como veremos, os cálculos atuariais envolvem somatórios de informações

presentes nas tábuas de vida e de valores de desconto. Isso dificulta a obtenção dos valores dos benefícios previdenciários quando utilizadas para esse fim. Para contornar essa situação, são utilizadas as tábuas de comutação, que já apresentam funções resultantes de somatórios das funções das tábuas associados a uma certo fator de desconto.

As tabelas de comutação foram criadas pelo professor alemão Hans-Nicolas Titens, em 1785. Hans-Nicolas Titens provou que, com apenas seis tabelas, e utilizando uma taxa de juros qualquer, seria possível determinar com rapidez os valores dos prêmios dos possíveis planos de seguro sobre uma vida.

Uma tabela de comutação contém sete colunas, das quais seis são compostas por números de comutação. A sétima coluna contém as idades da mesma forma que numa tábua de mortalidade. Estes números são representados por sinais especiais denominados de sinais de comutação.

Os números de comutação são obtidos pelo produto entre as funções biométricas  $d_x$  e  $l_x$ , de uma tábua de mortalidade qualquer, e um fator de desconto à uma taxa de juros prefixada. Assim, há os números de comutação que formam as funções de sobrevivência (produto dos  $l_x$  pelo fator de desconto  $v^x$ ) e os números de comutação que representam as funções de mortalidade (produto dos  $d_x$  pelo fator de desconto  $v^x$ ). Daí, tem-se:



## Números de comutação das funções de sobrevivência

### Função $D_x$

A coluna dos  $D_x$  é a mais importante da tabela de comutação, pois as demais dependem direta ou indiretamente dela.

Fixaremos as seguintes condições acerca da função  $D_x$ :

- Considere que haja um montante de capital exatamente igual ao número de sobreviventes de uma tábua de mortalidade, da idade zero (do  $l_0$ , portanto) até a última idade da tábua ( $l_\omega$ ); assim, tem-se a seguinte série:  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_x, l_{x+1}, \dots, l_{\omega-1}, l_\omega$ .
- Suponha também que exista uma segunda série representando os valores atuais de cada unidade de real, pagável por antecipação, cujas épocas correspondam aos termos da série anterior, ou seja:  $1, v, v^1, \dots, v^x, v^{x+1}, \dots, v^{\omega-1}, v^\omega$ .
- A multiplicação dos termos das duas séries anteriores, cada termo com o seu correspondente, resulta nos números de comutação que compõem a coluna dos  $D_x$  da tabela de comutação, visto que resulta nas seguintes igualdades:

$$D_0 = l_0 \cdot v^0 \Rightarrow D_0 = l_0 \cdot 1 = l_0;$$

$$D_1 = l_1 \cdot v;$$

$$D_2 = l_2 \cdot v^2;$$

Em que  $v = \frac{1}{1+j}$ , onde  $j$  é a taxa de juros aplicada.

Esta rotina de cálculo, que corresponde à apuração da coluna dos descontados vivos de cada idade (do tipo *valor presente dos vivos* em sua respectiva idade), é replicada para cada idade da tábua de mortalidade. Isto implica na seguinte generalização:

$$D_x = l_x v^x; D_{x+1} = l_{x+1} v^{x+1}; \dots; D_{x+n} = l_{x+n} v^{x+n}; \dots; D_\omega = l_\omega v^\omega$$

### **Função $N_x$**

Do anteriormente exposto, deduziu-se que seria necessário fazer a soma de todos os elementos da série  $D_x$ , e esta operação ainda causaria trabalho demasiado, considerando-se que esta conta é feita em relação a cada grupo de segurado e em relação a cada idade segurada da tábua de mortalidade.

Para evitar este trabalho há o número de comutação  $N_x$ ,

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+n-1} + D_{x+n} + \dots + D_{\omega-1} + D_\omega = \sum_{k=x}^{\omega} D_k.$$

### **Função $S_x$**

A terceira função de comutação de sobrevivência é representada pelo símbolo  $S_x$ .

A sua equação é: 
$$S_x = \sum_{k=x}^{\omega} N_k.$$

As duas primeiras funções de sobrevivência são bastante utilizadas no cálculo das anuidades tanto nas entidades de previdência com nos cálculos

dos seguros pelas companhias afins. A terceira função só é empregada nos cálculos das anuidades.

# Capítulo 5

## Cálculo Financeiro e Atuarial

### 5.1 Introdução

Este capítulo apresentará os conceitos e notações atuariais utilizados para o cálculo dos preços e valores de fundos de previdência.

Como qualquer ciência do ramo econômico, a atuária considera o valor do dinheiro no tempo. Basicamente, os cálculos envolvidos nos preços de benefícios previdenciários, assim como de outros benefícios, estão relacionados à valorização do dinheiro durante um contrato previdenciário e à experiência de mortalidade a qual a população está sujeita. Dessa forma, a matemática atuarial utiliza os conceitos da matemática financeira associadas às funções presentes em tábuas de vida.

Chamaremos Anuidades aqueles benefícios securitários recebidos em vida. Existem vários tipos de anuidades, entre eles o temporário imediato e o

diferido vitalício. O diferido vitalício é aquele recebido por toda vida após um certo número de anos de carência. Sendo esta modalidade de anuidade mais comum no cenário previdenciário, neste trabalho, nos limitaremos ao estudo da mesma.

## 5.2 Modelagem Atuarial

Um plano de previdência, na grande maioria das vezes, é constituído a partir de depósitos periódicos que ficam sob administração de uma determinada instituição financeira, que por sua vez aplica esse recurso em títulos de renda fixa, renda variável, imóveis, entre outros, tendo por objetivo sua valorização. Quando chega o momento estipulado no contrato, o montante gerado pelo capital investido é, em parte, devolvido ao contratante do serviço. A devolução pode ser periódica ou única, à escolha do cliente.

A grande questão que diferencia a matemática atuarial da financeira é que a segunda se limita a calcular variações do dinheiro no tempo para certas operações financeiras, enquanto a primeira leva em consideração as probabilidades de ocorrência dessas operações. Por exemplo, podemos através da matemática financeira fazer um cálculo para saber qual o montante gerado após quinze anos de depósitos mensais no valor de  $R\$1.000,00$ . Porém, se esses depósitos constituírem um plano de previdência, deve ser levada em

conta a probabilidade de morte do beneficiário do plano antes do término desses quinze anos, o que acarretaria o não pagamento, por parte da empresa, do montante acumulado.

Um outro exemplo claramente não determinístico é o contrato de seguro de vida. Não se sabe quanto tempo resta de vida a cada um e então, para pagar uma apólice num valor determinado, o valor a ser cobrado pela empresa vendedora do seguro passa a ser uma variável aleatória. Se o comprador ainda tiver muito tempo de vida, o preço é consideravelmente menor que o da apólice, já se o tempo restante de vida não for muito longo, o preço se aproxima do valor da apólice.

Bowers Jr.(1997) diz que matemática atuarial trabalha com essa dúvida quanto à concretização das operações financeiras e à duração de cada uma delas. Para isso, utiliza informações constantes em tábuas de vida, bem como suas funções e gráficos.

Consideremos um contrato de seguro de vida que pague um valor unitário a um indivíduo com idade  $x$  caso o mesmo sobreviva  $n$  anos após a realização do contrato. Em outras palavras, um segurado de  $x$  anos receberá uma unidade monetária se completar  $x + n$  anos. Nesse caso é necessário saber quanto se deve cobrar pelo seguro, ou seja, qual o valor presente da operação. É importante notar que o custo dessa operação para a empresa vendedora

do seguro pode ser zero, já que há possibilidade de o indivíduo morrer antes de completar  $x + n$  anos. Se definirmos  $Z$  como o valor presente, concluímos que o valor de  $Z$  é  $v^n = e^{-jn}$ , com probabilidade  ${}_n p_x$ , onde  $v^n$  é a atualização financeira de uma inidade monetária no tempo  $n$  para uma taxa de juros  $j$ , e zero com probabilidade  $1 - {}_n p_x$ . Esquemáticamente, temos:

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - {}_n p_x \\ v^n, & \text{com probabilidade } {}_n p_x \end{cases}$$

O *valor presente atuarial* da operação é obtido calculando-se a esperança de  $Z$ :

$$E[Z] = {}_n E_x = {}_n p_x \cdot v^n + (1 - {}_n p_x) \cdot 0 = {}_n p_x \cdot v^n$$

O termo  ${}_t E_x = v^t {}_t p_x$  representa o fator de atualização atuarial de uma unidade monetária a ser paga no tempo  $t$ , pois além de conter o fator de atualização financeiro  $v^t$ , apresenta a probabilidade  ${}_t p_x$  de o pagamento ser efetivamente realizado.

### 5.2.1 Cálculo para Benefícios Previdenciários

O que ocorre na realidade, para a grande maioria de planos de aposentadoria privada, é a contribuição mensal de uma determinada quantia durante a vida profissional ativa, e o posterior recebimento, mês a mês, do montante dessas aplicações e de parte de seus rendimentos. Como as tábuas de vida

trazem informações para períodos de, no mínimo, um ano, devem ser calculados os valores de anuidades anuais. Neste caso, estamos lidando com anuidades diferidas, sendo que o prazo de carência é geralmente o tempo até a entrada em inatividade laboral, e que têm seu pagamento fracionado em doze parcelas por ano.

Para essa situação, o valor presente da operação será zero, caso o beneficiário faleça antes de entrar na inatividade, pois não reaverá a quantia investida, ou será  $\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}$ , caso entre em inatividade, que equivale à diferença entre o que deverá ser pago e o terá sido recebido pela empresa gerenciadora do plano. Esquemáticamente, o valor presente é:

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - {}_n p_x \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{com probabilidade } {}_n p_x \end{cases}$$

Na função valor presente apresentada acima,  $n$  é o tempo de contribuição.

Como foi dito anteriormente, é muito difícil se ter informação precisa de  $T$  (tempo exato de vida até a morte) e, por questões práticas e computacionais, utilizam-se dados de uma tábua de vida referentes a distribuição de  $K$  (anos completos futuros), variável discreta, para os cálculos atuariais. Pela natureza da variável  $K$ , devem ser feitas alterações adequadas nas fórmulas objetivando-se a manipulação dessa variável discreta. A teoria é análoga a usada em cálculos com a variável  $T$ , contínua mas, por exemplo, lugar de



integrais, aparecem somatórios. A notação também é sutilmente modificada. Para o caso contínuo não faz diferença se o pagamento do benefício é antecipado (no início de cada período) ou postecipado (no fim de cada período) uma vez que o pagamento é considerado contínuo, já no caso discreto a diferença é considerada nos modelos utilizados. Sendo o modelo antecipado muito mais comum no mercado, começaremos estudando esse modelo.

A função valor presente para uma anuidade de valor unitário a ser paga antecipada e vitaliciamente, a partir do momento do contrato até a morte do beneficiário é  $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$  onde  $K$  é o número de anos a serem completos até a morte. O valor presente atuarial para o caso discreto,  $\ddot{a}_x$ , considera a distribuição de  $K$ , a qual tem f.d.p igual a  $f_K(k) = {}_k p_x q_{x+k}$ .

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= E[Y] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x\end{aligned}$$

Novamente,  $v^k {}_k p_x$  representa a atualização atuarial de uma unidade monetária a ser paga no tempo  $k$ .

No caso de pagamentos postecipados, aplica-se a fórmula:

$$\begin{aligned}a_x &= E[Y] = E[a_{\overline{K}|}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{k}|} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

Nota-se que a única diferença entre os modelos antecipado e postecipado são os limites dos somatórios.

Já sabemos que anuidades diferidas tem muito mais aplicabilidade do que a modalidade apresentada acima. Definamos, pois, as mesmas através da utilização de  $K$ .

Seguindo a mesma lógica do exemplo anterior, primeiramente é apresentada a função valor presente para o caso antecipado:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq K(x) < n \\ {}_n | \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|}, & \text{se } K(x) \geq n \end{cases}$$

O valor presente atuarial é:

$$\begin{aligned} {}_n | \ddot{a}_x &= E[Y] = {}_n E_x \cdot \ddot{a}_{x+n} \\ &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x \end{aligned}$$

Para o caso de pagamentos postecipados, a função valor presente é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq K(x) < n \\ {}_n | a_{\overline{K-n}|}, & \text{se } K(x) \geq n \end{cases}$$

O valor presente atuarial é:

$${}_n | a_x = E[Y] = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

Novamente, a única diferença entre as fórmulas dos casos antecipado e postecipado são os limites dos somatórios.

## **5.2.2 Cálculo Atuarial Utilizando Tábuas de Comutação**

Neste capítulo abordaremos o cálculo atuarial de rendas normalmente utilizadas no mercado para determinação dos custos de rendas por sobrevivência.

Comparativamente às anuidades certas, uma anuidade atuarial diferencia-se pela presença do fator probabilístico (probabilidade de sobrevivência extraída de uma tábua de sobrevivência) acrescentado à equação de uma renda certa.

Por captarem a expectativa média de vida, dão maior segurança e menos incertezas aos cálculos das rendas atuariais prometidas pelos fundos de pensão a seus participantes, pelas entidades abertas de previdência complementar e afins.

### **5.2.2.1 Valor atual de uma unidade de pagamento anual igual, vitalícia, imediata, antecipada e a contribuição única**

Neste arranjo,  $l_x$  pessoas, todas na idade  $x$ , constituem um fundo mediante uma única e imediata contribuição do tipo. Este aporte total que representa a receita da seguradora ou da entidade de previdência, proverá

a cada um dos participantes sobreviventes, a partir dos  $l_x$  até que o último indivíduo do grupo faleça, uma renda anual vitalícia de 1 (uma) unidade monetária, a partir do primeiro ano, no início de cada ano.

Algebricamente, para obter o mesmo fator atuarial  $\ddot{a}_x$  apresentado na seção anterior, mas com as funções das tábuas de comutação, tem-se a seguinte expressão, supondo-se sempre receita=despesa:

$$l_x \ddot{a}_x = l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + l_{x+3}v^3 + \dots + l_{\omega-1}v^{\omega-1-x} \quad \cdot (v^x)$$

$$l_x \ddot{a}_x v^x = l_x v^x + l_{x+1}v^{x+1} + l_{x+2}v^{x+2} + \dots + l_{\omega-1}v^{\omega-1}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x},$$

onde  $N_x$  e  $D_x$  são os termos definidos na seção 4.4 "Tábuas de Comutação".

### 5.2.2.2 Valor atual de uma unidade de pagamento, vitalícia, imediata, postecipada e a contribuição única

Este arranjo atuarial diferencia-se do anterior apenas no que concerne à época do início dos pagamentos das rendas. Ao postecipar cada pagamento para o fim de cada ano, o fundo aumenta sua capacidade de ganhar mais juros sobre as contribuições aplicadas.

Da mesma forma que obtivemos  $\ddot{a}_x$  com funções de tábuas de comutação tem-se a seguinte expressão para  $a_x$ , supondo-se sempre receita=despesa:

$$l_x a_x = l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + l_{x+3}v^3 + \dots + l_{\omega}v^{\omega-x} \quad \cdot (v^x)$$

$$l_x a_x v^x = l_{x+1} v^{x+1} + l_{x+2} v^{x+2} + l_{x+3} v^{x+3} + \dots + l_\omega v^\omega$$

$$a_x = \frac{l_{x+1} v^{x+1} + l_{x+2} v^{x+2} + l_{x+3} v^{x+3} + \dots + l_\omega v^\omega}{l_x v^x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x},$$

onde  $N_x$  e  $D_x$  são os termos definidos na seção 4.4 "Tábuas de Comutação".

Observe que a primeira renda da série será paga aos sobreviventes, ou seja, só no final do primeiro ano, ao contrário do arranjo anterior que paga a primeira renda aos sobreviventes no mesmo instante em que recebe a contribuição única deles.

### 5.2.2.3 Valor atual de uma unidade de pagamento anual igual, subdividida em $m$ parcelas, vitalícia, ordinária, imediata e a prêmio único

Difere do caso anterior apenas quanto ao início do pagamento do benefício. Ou seja, o pagamento de cada  $\frac{1}{m}$  é realizado no final de cada subperíodo do ano. Daí, o valor atual dessa anuidade do tipo  $a_x^{(m)}$  corresponde à diferença entre  $\ddot{a}_x^{(m)}$  e  $\frac{1}{m}$ , pois este pagamento determinístico é postergado para o final do primeiro subperíodo, além de tornar-se probabilístico. Logo, a partir do acima exposto, tem-se:

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$$

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m}$$

$$a_x^{(m)} = a_x + 1 - \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{m}$$

$$a_x^{(m)} = a_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}$$

## Capítulo 6

# Comparação dos Parâmetros da Evolução Patrimonial

Dos capítulos anteriores, percebe-se que o tempo de contribuição, a taxa de juros aplicada, a estrutura de mortalidade do grupo, a tributação e as taxas cobradas geram influência no valor futuro a ser recebido à título de benefícios previdenciários.

Faremos um estudo para verificar a influência específica de cada uma dessas variáveis e, logo após, uma simulação de um plano previdenciário onde aplicaremos diferentes níveis dessas variáveis e ratificaremos os resultados da primeira etapa. Especificamente, a expressão a ser utilizada para essa verificação e consecução dos objetivos do trabalho é a do benefício mensal para um plano de contribuições definidas  $B_x = \frac{(1-T) \cdot K \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)}{13a_x}$ , onde  $T$  é a taxa de carregamento,  $K$  é a contribuição mensal,  $i$  é a rentabilidade mensal do fundo,  $n$  é o tempo, em meses, de contribuição e  $a_x$  é o fator atuarial

explicado na seção 5.2.2. A rigor, temos que,  $0 \leq T \leq 0,09$  (vide pg. 18),  $K > 0$ ,  $0 \leq i \leq 1$  e  $n > 0$ , mas, tomando como base as unidades de maior prática comercial, sabemos que, usualmente  $i \cong 6\%$  (vide pg. 19),  $n > 120$ . Já o valor de  $K$  depende do salário do contratante e de quanto ele desejará investir em um plano previdenciário

O cálculo de  $B_x$  é simples de ser compreendido. Sendo  $T$ , a taxa de carregamento e  $K$  a contribuição mensal,  $(1 - T) \cdot K$ , é a contribuição mensal líquida, e o produto desta contribuição líquida por  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$  resulta no montante acumulado após  $n$  contribuições mensais aplicadas a uma taxa  $i$ . O termo  $a_x$ , desenvolvido na seção anterior, é obtido das tábuas de comutação e define o montante anual a ser recebido pelo beneficiário. Já o número 13 aparece no denominador porque serão 13 benefícios anuais, 12 no início de cada mês e o décimo terceiro.

Para termos uma noção mais precisa da influência de cada um desses parâmetros, recorreremos à técnica de aproximação linear feita para cada variável através de suas derivadas parciais.

Afora a variável  $a_x$ , que provem da Tábua de Vida utilizada pelo fundo, as outras variáveis podem sofrer alterações sutis que, entretanto geram maior impacto no valor do benefício mensal. Isso porque, para um indivíduo,  $a_x$  só muda quando se utiliza outra tábua de vida, não podendo ser alterado à



vontade de nenhuma das partes envolvidas. Já as outras variáveis podem ser alteradas de acordo com os anseios do contratante ou do contratado, e por isso verificaremos o impacto causado por mudanças nessas quatro variáveis.

Os resultados obtidos são observados quando do uso das três tábuas de vida citadas anteriormente.

Consideremos novamente a fórmula  $B_x = \frac{(1-T) \cdot K \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]}{13a_x}$ . Tomando as derivadas parciais  $\frac{\partial B}{\partial i}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial K}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial T}$ , obtemos:

$$\frac{\partial B}{\partial i} = \frac{(1-T) \cdot K}{13a_x} \left( \frac{ni(1+i)^{n-1} + 1 - (1+i)^n}{i^2} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial K} = \frac{(1-T)}{13a_x} \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial n} = \frac{(1-T) \cdot K}{13a_x} \left( \frac{\ln(1+i) \cdot (1+i)^n}{i} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial T} = \frac{-1 \cdot K}{13a_x} \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right),$$

onde  $T$  é a taxa de carregamento,  $K$  é a contribuição bruta,  $n$  é o tempo de contribuição e  $i$  é a taxa de rendimento.

Uma vez obtidas as derivadas parciais de  $B_x$ , podemos verificar o quão sensível ela é em relação a pequenas variações das variáveis nas quais a mesma foi derivada. Se fizermos:

$$\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i$$

$$\frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K$$

$$\frac{\partial B}{\partial n} \cdot 0,01n$$

$$\frac{\partial B}{\partial T} \cdot 0,01T,$$

poderemos comparar os quatro termos dois a dois e observar qual é o maior e o menor.

Para determinados valores de  $i, T, K, n$ , teremos uma aproximação linear da variação sofrida por  $B_x$  quando cada uma das variáveis  $i, T, K, n$  varia 1%, ao passo que as outras permanecem constantes.

Mais interessante que fazer isso para valores fixos de  $i, T, K, n$  é verificar qual a ordem de intensidade com que cada uma delas influencia  $B_x$ . Para isso, comparemos  $\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i, \frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K, \frac{\partial B}{\partial n} \cdot 0,01n$  e  $\frac{\partial B}{\partial T} \cdot 0,01T$ . Por exemplo, para compararmos  $\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i$  com  $\frac{\partial B}{\partial n} \cdot 0,01n$ , observemos a razão:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i}{\frac{\partial B}{\partial n} \cdot 0,01n} = \frac{0,01i \left[ \frac{(1-T) \cdot K}{13a_x} \left( \frac{in(1+i)^{n-1} - (1+i)^n + 1}{i^2} \right) \right]}{0,01n \left[ \frac{(1-T) \cdot K}{13a_x} \left( \frac{\ln(1+i) \cdot (1+i)^n}{i} \right) \right]},$$

multiplicando o numerador e o denominador por  $\frac{13a_x i}{(1-T) \cdot K}$ , ficamos com:

$$\frac{0,01i \left[ \frac{in(1+i)^{n-1} - (1+i)^n + 1}{i} \right]}{0,01n \left[ \ln(1+i) \cdot (1+i)^n \right]},$$

dividindo o numerador e o denominador por  $(1+i)^n$ , fica:

$$\frac{0,01i \left[ \frac{in(1+i)^{n-1} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]}{0,01n[\ln(1+i)]},$$

ou seja

$$\frac{0,01i \left[ \frac{in(1+i)^{-1} - 1 + \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]}{0,01n[\ln(1+i)]},$$

que equivale à

$$\frac{in(1+i)^{-1} - 1 + \frac{1}{(1+i)^n}}{n \cdot \ln(1+i)},$$

Analisando a última comparação, como sabemos que  $0 < i \leq 1$ , percebemos que quando  $i=1$ , estaremos comparando

$$\frac{\frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{2^n}}{n \cdot \ln(2)}$$

Uma vez que  $\ln(2) \cong 0,69$ , concluímos que, para qualquer  $n$  natural,

$$\frac{\frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{2^n}}{n \cdot \ln(2)} < 1, \text{ o que implica que } \frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i < \frac{\partial B}{\partial n} \cdot 0,01n.$$

Por meio de cálculos computacionais, foi possível perceber que, de fato, para qualquer  $i$ ,

$$\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i < \frac{\partial B}{\partial n} \cdot 0,01n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso significa que para quaisquer  $i, n, T$  e  $K$ , uma variação de 1% no tempo de contribuição tem maior impacto no valor do benefício mensal a ser recebido do que uma variação de 1% na taxa de rentabilidade mensal.

Comparemos agora as variações de 1% na taxa de rentabilidade mensal e na taxa de contribuição. Pela aproximação linear, temos respectivamente  $\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i$  e  $\frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K$ . Então, vejamos o que acontece com a fração  $\frac{\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i}{\frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K}$

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i}{\frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K} = \frac{\frac{(1-T)K}{13ax} \left( \frac{ni(1+i)^{n-1} - (1+i)^{n+1}}{i^2} \right) \cdot 0,01i}{\frac{(1-T)}{13ax} \left( \frac{(1+i)^{n-1}}{i} \right) \cdot 0,01K}$$

Simplificando as partes comuns ao numerador e ao denominador, ficamos com:

$$\frac{ni(1+i)^{n-1} - (1+i)^{n+1}}{(1+i)^{n-1}}$$

Dividindo tudo por  $(1+i)^{n-1}$ , obtemos:

$$\frac{ni - \frac{1}{(1+i)^{-1}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}}{1} = ni - (1+i) + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}$$

Como  $ni - (1+i) + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} > 1$ , vez que  $0 < i \leq 1$  e que  $n > 0$ , temos que  $\frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i > \frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K$ . Isso implica que a variação percentual de 1% na taxa de juros tem maior impacto no benefício do que a variação de 1% na contribuição.

Para procedermos à comparação entre  $\frac{\partial B}{\partial K}$  e  $\frac{\partial B}{\partial T}$ , temos que levar em con-

sideração que  $\frac{\partial B}{\partial T} \cdot 0,01T \leq 0$ , pois  $\frac{\partial B}{\partial T} \leq 0$ , uma vez que à medida que aumenta a taxa de carregamento cobrada pelo fundo, diminui a contribuição líquida e, conseqüentemente, o benefício de aposentadoria. Como não estamos interessados no sentido do impacto, faremos a comparação entre

$\frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K$  e  $|\frac{\partial B}{\partial T} \cdot 0,01T|$ . Então, ficamos com:

$$\frac{\frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K}{|\frac{\partial B}{\partial T} \cdot 0,01T|} = \frac{\frac{(1-T)}{13ax} \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) \cdot 0,01K}{\frac{K}{13ax} \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) \cdot 0,01T}$$

Cancelando os termos iguais, ficamos com:

$$\frac{(1-T)}{T}.$$

Neste caso, podemos ter qualquer um dos dois termos maior que o outro, dependendo do valor da variável T. Mas como na prática temos que,  $0 \leq T \leq 0,09$ , então

$$\frac{(1-T)}{T} > 1$$

$\frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K > |\frac{\partial B}{\partial T} \cdot 0,01T|$ , e um impacto maior é gerado pela variação de 1% na contribuição do que na taxa de carregamento.

A partir dessas múltiplas comparações, conclui-se que

$$\frac{\partial B}{\partial n} \cdot 0,01n > \frac{\partial B}{\partial i} \cdot 0,01i > \frac{\partial B}{\partial K} \cdot 0,01K > \left| \frac{\partial B}{\partial T} \cdot 0,01T \right|.$$

Assim, tendo as outras três variáveis constantes, variações no tempo de contribuição terão maior reflexo no valor do benefício do que variações na taxa de rendimento do fundo, e assim sucessivamente.

Esse resultado analítico será verificado por meio da simulação apresentada no capítulo seguinte.

# Capítulo 7

## Simulação

### 7.1 Introdução

Após as explicações sobre os conceitos atuariais, tábuas de comutação e manipulação analítica do cálculo do benefício mensal, procedemos ao uso de ferramentas computacionais para simulações dos custos e valores de um fundo de pensão, de acordo com a fixação de alguns parâmetros e a variação de outros.

Para a simulação da evolução patrimonial e a fixação do valor do benefício recebido pelo participante, faremos algumas considerações. A população desse plano será considerada estacionária e o regime de financiamento é o de capitalização. Trabalharemos com contribuição definida, pois dessa forma analisaremos as diferenças entre os saldos de conta acumulados. Além disso, como já foi dito, todas as variáveis macroeconômicas, como inflação e renda

per capita por exemplo, serão mantidas constantes e apenas as variáveis objeto de estudo é que variarão dentro dos limites fixados pela a simulação.

Assim como em todo fundo de pensão, foram seguidas regras comuns a todos os seus integrantes. Essas regras são chamadas de premissas do fundo de pensão. Seguindo-as foi possível construir um fundo de pensão fictício com funcionamento semelhante a fundos reais, o qual, por adotar premissas simples permitiu a verificação dos objetivos deste trabalho.

A simulação foi feita em duas etapas. A primeira etapa é a etapa de acumulação, onde somente trabalhamos com matemática financeira, vez que como o objetivo do trabalho é verificar os parâmetros que influenciam o valor do benefício a ser recebido a título de aposentadoria, foi feita a suposição de que não haverá morte do contribuinte antes da idade de aposentadoria.

A segunda etapa é a etapa de recebimento do benefício, onde foram utilizadas diferentes tábuas de vida para apresentar as diferenças causadas por cada uma.

Para a simulação da evolução patrimonial do ativo investido foi utilizado o programa Microsoft Excel 2003.

## **7.2 Premissas do Fundo de Pensão**

O fundo de pensão hipotético a ser analisado é o da Cia Fundo de Pensão



DSGP. Como é de uso comum no mercado de fundos de pensão, admite-se que o fundo em questão fornece planos na modalidade de Contribuição Variável, em que a fase de acumulação é estruturada na modalidade Contribuição Definida e a fase de usufruto é estruturada sob a modalidade de Benefício Definido.

A simulação é estruturada em duas partes, a primeira se passa na fase de acumulação e a segunda na fase de usufruto. Na primeira fase iremos analisar qual o impacto que o tempo de contribuição e a taxa de rendimento real terão sobre a evolução do ativo.

Na segunda fase, analisaremos o impacto da tábua de mortalidade utilizada na estimação do valor do benefício. Os participantes do fundo de pensão hipotético serão todos do sexo masculino, divididos em três coortes (funcionários entrantes no fundo de pensão nas idades de 20, 25 e 30 anos), as contribuições realizadas ao plano, no fim de cada de mês (postecipadas), dar-se-ão na data de recebimento do salário, inclusive no 13º salário. As contribuições serão do tipo paritária, 7% de cada participante e 7% do patrocinador, incidentes sobre o salário de participação, que no caso em questão foi fixado em R\$ 5000,00 (salário mensal de cada funcionário).

A taxa de carregamento incidente sobre o valor de cada contribuição vertida por cada participante ao fundo de pensão hipotético será de 7%, um

valor semelhante ao observado nos casos reais. A idade de aposentadoria será aos 60 anos para todos os participantes do fundo de pensão, e, dessa forma como serão três coortes diferentes, teremos diferentes saldos de contas a serem analisados.

O benefício, o qual será pago no final de cada mês (postecipado) e no total de 13 benefícios por ano de aposentadoria, será vitalício, sem reversão em pensão e será requerido por todos os participantes do fundo de pensão aos 60 anos de idade. A vitaliciedade dos benefícios foi adotada, pois é de grande prática nos dias atuais e a ausência de reversão em pensão é uma hipótese que simplifica o funcionamento geral do fundo, sem, no entanto, prejudicar o objetivo do trabalho, apresentado no capítulo 1, seção 1.

Consideramos que todos os participante do fundo de pensão hipotético permanecerão vivos até a idade de aposentadoria, evitando assim considerações acerca de saldos de conta não revertidos a algum beneficiário.

### **7.3 Parâmetros a Serem Analisados na Simulação**

Na primeira fase, analisaremos o parâmetro "tempo de contribuição", que foi fixado em 30, 35 e 40 anos, sendo valores que bem representam a maioria dos tempos de contribuição praticados hoje por fundos de pensão reais, e a

”taxa de rendimento real” do fundo, sendo que 6% é o valor previsto em lei e 5% e 7% foram utilizados para análise das diferenças que ocorrem quando praticados esses rendimentos.

Na segunda fase, a partir da aplicação das tábuas de vida AT-83, AT-2000 e RP-2000, comparamos a diferença no valor da aposentadoria a ser recebida de acordo com cada tábua.

## 7.4 Resultados

A tabela a seguir é referente à fase de acumulação e apresenta três grupos distintos quanto ao tempo de contribuição, um com 30 anos de contribuição, outro com 35 anos e o último com 40 anos de contribuição. Dentro de cada grupo, foi feito o cálculo para 5%, 6% e 7% de rentabilidade anual do investimento. Esses parâmetros são resumidos na coluna ”Matrícula”, de forma que matrícula 35.6 é aquele grupo que contribui durante 35 anos com uma rentabilidade anual de 6%. Para todos os grupos, a contribuição líquida foi de R\$ 651,00.

Na coluna ”Saldo de Conta”, estão presentes os valores resultantes da fórmula  $SC = (1-T)K[\frac{(1+i)^n-1}{i}]$ , onde C é 651,00,  $i$  é o valor da rentabilidade mensal e  $t$  é o número de contribuições mensais baseado no tempo total de contribuição. Dessa tabela, percebemos que o saldo de conta cresce tanto à

medida que cresce o tempo de contribuição quanto à medida que cresce a rentabilidade anual.

Figura 7.1: Saldo de conta por tempo de contribuição e taxa de rendimento

Tempo de Contribuição	Saldo de Conta(R\$)		
	i=5%	i=6%	i=7%
30	575.133,85	687.403,74	824.935,48
35	781.865,85	968.915,28	1.207.236,47
40	1.045.714,09	1.345.641,22	1.743.433,37

Para cada tábua de vida, o benefício mensal é diferente. A tabela 7.2 mostra qual o valor do benefício mensal a ser recebido pelo participante do fundo de acordo com o seu saldo de conta e o fator atuarial, obtido através das tábuas de comutação referentes às tábuas de vida AT-83, AT-2000 e RP-2000, respectivamente.

Essa diferença se deve ao fato de que para diferentes tabelas, a expectativa de vida da população muda, e então, pelo fato de aumentar a probabilidade de um aposentados viver mais tempo, o benefício diminui, para minimizar o risco de perda do fundo.

O que podemos perceber claramente das três tabelas apresentadas é que o saldo de conta é o mesmo por hipótese e o que muda é o Fator Atuarial, pois o mesmo é obtido através de funções de tábuas de comutação, as quais, logicamente são diferentes para cada uma das três tábuas de vida utilizadas.

Figura 7.2: Benefício por saldo de conta e tábua utilizada

Saldo de Conta (R\$)	Benefício Mensal(R\$)		
	Tábua de Vida Utilizada		
	AT - 83	AT - 2000	RP - 2000
575.133,85	3.782,00	3.691,82	3.912,06
687.403,74	4.520,27	4.412,48	4.675,72
824.935,48	5.424,65	5.295,31	5.611,22
781.865,85	5.141,43	5.018,84	5.318,26
968.915,28	6.371,44	6.219,52	6.590,57
1.207.236,47	7.938,61	7.749,32	8.211,63
1.045.714,09	6.876,46	6.712,50	7.112,95
1.345.641,22	8.848,74	8.637,75	9.153,06
1.743.433,37	11.467,70	11.191,20	11.858,84

Em anexo, são apresentadas duas tabelas uma com a coluna  $q_x$  de cada uma das três tábuas de vida utilizadas na simulação e o gráfico relativo à tabela  $\log(q_x)$  que apresenta a diferenças nas estruturas de mortalidade de cada tábua de vida.

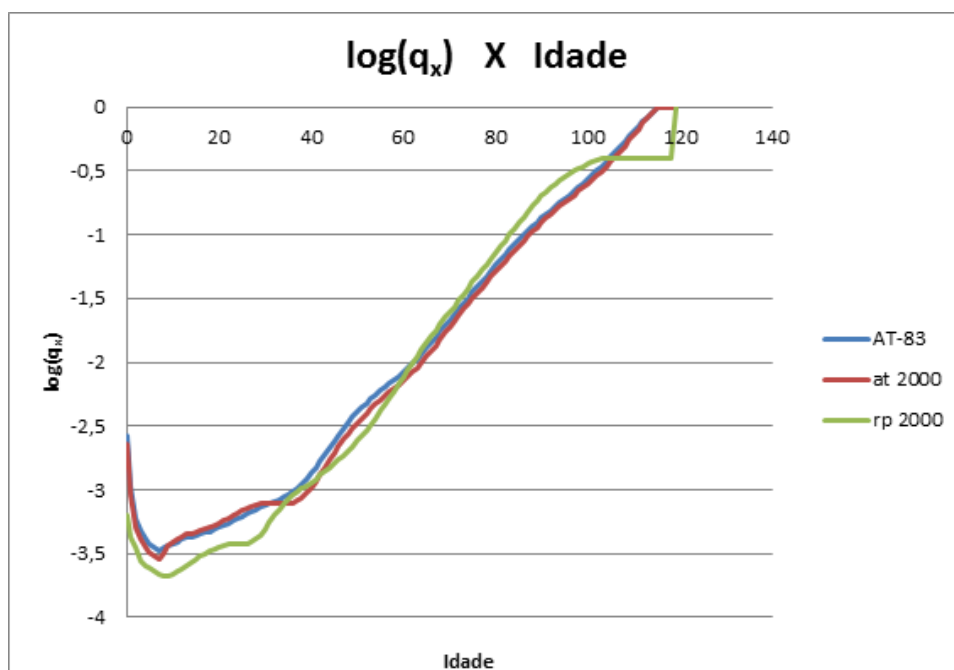


Figura 7.3: Gráfico  $\log(q_x) \times$  Idade

É interessante observarmos as diferenças na estrutura de mortalidade por idade estimada em cada uma das 3 tábuas e as probabilidades de morte ao longo das idades consideradas. Essas diferenças podem acarretar diferenças significativas no custo de um plano de benefício e, em consequência, no valor recebido a título de benefício. Vale lembrar também que quanto menor a

esperança de vida estimada maior será o risco de que a esperança de vida dos participantes do plano seja maior do que o previsto e os recursos acumulados pelo plano não sejam suficientes para arcar com todas as despesas de um maior prazo de pagamento dos benefícios.

Assim, quanto maior a esperança de vida estimada, mais conservadora ela será, refletindo, assim, num maior custo e num menor benefício a receber. No inverso, maior será o risco, o benefício a receber e menor será o custo de manutenção do plano. Concentrando a nossa análise a partir da idade de 60 anos, pois é a partir daí que se inicia a etapa de recebimento de benefício previdenciário e em consequência disso é a partir dessa idade que é estimada a esperança completa de vida,  $e_{60}^0$ .

Ao analisarmos o gráfico, perceberemos que a RP-2000 é a que possui maiores valores de probabilidade de morte dentre as três tábuas, seguida da AT-83 e por último a AT-2000. A principal consequência dessa diferença está no nível de benefício oferecido nas três hipóteses. A RP-2000 é a que apresenta o maior nível de benefício, seguida pela AT-83 e depois pela AT-2000.

Numa primeira análise imediatista poderíamos afirmar que a RP-2000 é a melhor tábua a ser utilizada pelos fundos de pensão, mas essa análise preliminar está incompleta, visto que o mais importante na escolha das

tábuas biométricas é que a sua estrutura de mortalidade seja adequada para a projeção de longevidade dos participantes e assistidos do plano de benefícios, em outras palavras, deverá ser sempre aquela mais adequada à respectiva massa.



# Capítulo 8

## Conclusão

O estudo de assuntos previdenciários, tanto relacionado à questão administrativa, quanto ao seu funcionamento em si é um assunto que se torna cada vez mais presente na vida dos brasileiros, vez que esta população está envelhecendo.

O estudo realizado nesse trabalho teve como foco a análise da evolução de um ativo investido em um fundo de pensão, no qual verificamos o impacto que os parâmetros "tempo de contribuição", "taxa de rendimento", "taxa de carregamento" e "contribuição" aplicados a um participante de um fundo de pensão geram no benefício de aposentadoria a ser recebido pelo mesmo e verificamos que o parâmetro de maior influência é o "tempo de contribuição", sendo que quando alterado na mesma proporção dos outros, é o que causará maior diferença no benefício previdenciário.

Essa verificação é informativa tanto aos contratantes de planos previ-

denciários como às operadoras desses planos, no sentido de orientar quem tenha o intuito de começar a contribuir para um plano de previdência privada o quão é valioso que o início dessa contribuição se dê ainda na juventude, e de, quiçá auxiliar instituições que administram planos de previdência complementar quanto à modalidade de planos oferecidas pelas mesma para investidores com diferentes perfis e idades.

Para a realização desse trabalho nos detivemos ao estudo de planos previdenciários que ofereciam apenas benefício de aposentadoria sem reversão em pensão, contudo ressaltamos a importância de trabalhos com objetivos semelhantes que abordem planos de previdência com outras condições de benefícios, ou até mesmo a análise sob outra ótica para planos semelhantes. Isso porque hoje em dia, há uma gama muito extensa de planos previdenciários capazes de se adequar às mais diferentes situações dos interessados em algo que lhes proporcione segurança financeira futura. Um exemplo seria estudar o efeito de diferentes projeções populacionais no lucro das EAPC's.

Além disso, devido à diferença na estrutura de mortalidade apresentada em duas tábuas de vida distintas, o valor do benefício de aposentadoria também sofre alterações quando da utilização de uma ou outra tábua. Assim, dependendo do estrutura de mortalidade da população que forma um fundo de pensão, o mesmo pode pagar maiores o menores benefícios de aposen-

tadoria, sem, no entanto, cobrar mais por isso. Essa questão nos instiga a futuramente estudar especificamente a utilização de tábuas de vida na constituição de um fundo de pensão, e mais precisamente, quais são, de fato, os fatores que contribuem positiva ou negativamente para planos mais ou menos rentáveis para todos os envolvidos.

## Apêndice A

### Probabilidades de Morte

Figura A.1: Comparação das Tábuas Utilizadas

Idade	Probabilidades de morte( $q_x$ ) para as tábuas utilizadas		
	AT-83	AT-2000	RP-2000
0	0,00269	0,002311	0,00063700
1	0,001053	0,000906	0,00043000
2	0,000591	0,000504	0,00035700
3	0,000476	0,000408	0,00027800
4	0,000417	0,000357	0,00025500
5	0,00038	0,000324	0,00024400
6	0,00035	0,000301	0,00023400
7	0,00033	0,000286	0,00021600
8	0,00035	0,000328	0,00020900
9	0,00037	0,000362	0,00021200
10	0,00038	0,00039	0,00021900
11	0,00039	0,000413	0,00022800
12	0,00041	0,000431	0,00024000
13	0,00042	0,000446	0,00025400
14	0,00043	0,000458	0,00026900
15	0,00044	0,00047	0,00028400
16	0,00045	0,000481	0,00030100
17	0,00046	0,000495	0,00031600
18	0,00047	0,00051	0,00033100
19	0,00049	0,000528	0,00034500
20	0,00051	0,000549	0,00035700
21	0,00053	0,000573	0,00036600
22	0,00055	0,000599	0,00037300
23	0,00057	0,000627	0,00037600
24	0,0006	0,000657	0,00037600
25	0,00062	0,000686	0,00037800
26	0,00065	0,000714	0,00038200
27	0,00068	0,000738	0,00039300
28	0,0007	0,000758	0,00041200
29	0,00073	0,000774	0,00044400
30	0,00076	0,000784	0,00049900
31	0,00079	0,000789	0,00056200
32	0,00081	0,000789	0,00063100
33	0,00084	0,00079	0,00070200
34	0,00088	0,000791	0,00077300
35	0,00092	0,000792	0,00084100
36	0,00097	0,000794	0,00090400
37	0,00103	0,000823	0,00096400
38	0,00111	0,000872	0,00102100
39	0,00122	0,000945	0,00107900
40	0,00134	0,001043	0,00114200

Figura A.2: Comparação das Tábuas Utilizadas

Idade	Probabilidades de morte( $q_x$ ) para as tábuas utilizadas		
	AT-83	AT-2000	RP-2000
41	0,00149	0,001168	0,001215
42	0,00167	0,001322	0,00129900
43	0,00189	0,001505	0,00139700
44	0,00213	0,001715	0,00150800
45	0,0024	0,001948	0,00161600
46	0,00269	0,002198	0,00173400
47	0,00301	0,002463	0,00186000
48	0,00334	0,00274	0,00199500
49	0,00369	0,003028	0,00213800
50	0,00406	0,00333	0,00244900
51	0,00443	0,003647	0,00266700
52	0,00481	0,00398	0,00291600
53	0,0052	0,004331	0,00319600
54	0,00559	0,004698	0,00362400
55	0,00599	0,005077	0,00420000
56	0,00641	0,005465	0,00469300
57	0,00684	0,005861	0,00527300
58	0,00729	0,006265	0,00594500
59	0,00778	0,006694	0,00674700
60	0,00834	0,00717	0,00767600
61	0,00898	0,007714	0,00875700
62	0,00974	0,008348	0,01001200
63	0,01063	0,009093	0,01128000
64	0,01166	0,009968	0,01273700
65	0,01285	0,010993	0,01440900
66	0,0142	0,012188	0,01607500
67	0,01572	0,013572	0,01787100
68	0,01741	0,01516	0,01980200
69	0,0193	0,016946	0,02220600
70	0,02137	0,01892	0,02457000
71	0,02365	0,021071	0,02728100
72	0,02613	0,023388	0,03038700
73	0,02884	0,025871	0,03390000
74	0,03179	0,028552	0,03783400
75	0,03505	0,031477	0,04216900
76	0,03863	0,034686	0,04690600
77	0,04259	0,038225	0,05212300
78	0,04695	0,042132	0,05792700
79	0,05176	0,046427	0,06436800
80	0,05703	0,051128	0,07204100

Figura A.3: Comparação das Tábuas Utilizadas

Idade	Probabilidades de morte( $q_x$ ) para as tábuas utilizadas		
	AT-83	AT-2000	RP-2000
81	0,06279	0,05625	0,08048600
82	0,06908	0,061809	0,08971800
83	0,07591	0,067826	0,09977900
84	0,08323	0,074322	0,11075700
85	0,09099	0,081326	0,12279700
86	0,09912	0,088863	0,13604300
87	0,10758	0,096958	0,15059000
88	0,11632	0,105631	0,16642000
89	0,12539	0,114858	0,18340800
90	0,13489	0,124612	0,19976900
91	0,14487	0,134861	0,21660500
92	0,15543	0,145575	0,23366200
93	0,16663	0,156727	0,25069300
94	0,17854	0,16829	0,26749100
95	0,19121	0,180245	0,28390500
96	0,20472	0,192565	0,29985200
97	0,21912	0,205229	0,31529600
98	0,23474	0,218683	0,33020700
99	0,25189	0,233371	0,34455600
100	0,27091	0,249741	0,35862800
101	0,29211	0,268237	0,37168500
102	0,31583	0,289305	0,38304000
103	0,34238	0,313391	0,39200300
104	0,37209	0,34094	0,39788600
105	0,40528	0,372398	0,40000000
106	0,44228	0,40821	0,40000000
107	0,48341	0,448823	0,40000000
108	0,52899	0,494681	0,40000000
109	0,57935	0,546231	0,40000000
110	0,63481	0,603917	0,40000000
111	0,6957	0,668186	0,40000000
112	0,76234	0,739483	0,40000000
113	0,83506	0,818254	0,40000000
114	0,91417	0,904945	0,40000000
115	1	1	0,40000000
116	1	1	0,40000000
117	1	1	0,40000000
118	1	1	0,40000000
119	1	1	1,00000000

## Referências Bibliográficas

- Bernstein, P. L. **Desafi o aos Deuses: uma fascinante história do risco.** Rio de Janeiro: Campus, 1997. 389p.
- Capelo, Emílio Recamonde. **Fundos Privados de Pensão: Uma Introdução ao Estudo Atuarial.** São Paulo: Fundação Getúlio Vargas, 1986. 392 p.
- Carvalho, José Alberto Magno; Sawyer, Diana Oya; Rodrigues, Roberto do Nascimento. **Introdução a Alguns Conceitos Básicos e Medidas em Demografia.** 2. ed. 1998. 60 p.
- Gomes, Marília Miranda Forte; Okubo, Marina Harumi; Vasconcelos, Ana Maria Nogales. **Aplicações das Tábuas de Vida para a Previdência Complementar: Estimativas e Comparação com as Tábuas do Mercado.** *Revista Brasileira de Risco e Seguro.* Rio de Janeiro, v. 4, n. 7, p. 1-16, abr./set. 2008.
- Guimarães, Sérgio Rangel. **Polígrafo de Aula: Introdução à Atuária.** Porto Alegre, Universidade Federal do Rio grande do Sul, 2007, 97 p.
- Bowers Jr., Newton L., et al. **Actuarial Mathematics.** 2. ed.



Schaumburg: THE SOCIETY OF ACTUARIES, 1997. 753 p.

- Mendes, João José de Souza. **Bases técnicas do seguro**. São Paulo: Editora Manuais Técnicos de Seguros Ltda, 1977.
- Miranda G. **Entidades Fechadas de Previdência Complementar. Pprevidência Privada: O Caráter Complementar da Previdência Privada no Brasil**. Goiás. Universidade Católica de Goiás, 2004 p.12 - 26
- Pinheiro, Ricardo Pena. **A Demografia dos Fundos de Pensão. Brasília: Ministério da Previdência Social. Secretaria de Políticas de Previdência Social**, 2007. 292 p. (Coleção Previdência Social. Série estudos; v. 24)
- Previdência complementar: cartilha do participante Ministério da Previdência Social, Secretaria de Previdência Complementar. Brasília : MPS, SPC, 2008. 52 p.
- Santos, Ana Maria Alves. Mônico, Gabriel Santana. **Coletânea de Normas dos Fundos de Pensão.v 3 ed. 2007.** URL <http://www1.previdencia.gov.br/docs/pdf/coletanea-edicao-3.pdf>. Acesso em 15 out. 2010.