UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

EMANUEL PAIVA

TÉCNICA DE FORCING:

esboço sobre uma noção geral de forçamento

Brasília

2021

EMANUEL PAIVA

TÉCNICA DE FORCING:

esboço sobre uma noção geral de forçamento

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Filosofia da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Filosofia.

Orientador: Rodrigo Freire

Brasília
2021

EMANUEL PAIVA

TÉCNICA DE FORCING:
esboço sobre uma noção geral de forçamento

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Filosofia da Universidade de Brasília como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Filosofia.

Aprovado em:_____/_____/______

BANCA EXAMINADORA

Rodrigo Freire
Universidade de Brasília
Nota atribuída _____

Professor
Universidade de Brasília
Nota atribuída _____

Professor
Universidade de Brasília
Nota atribuída _____

Pedi tão pouco à vida e esse mesmo pouco a vida me negou.

- Fernando Pessoa

RESUMO

Procuramos investigar, neste breve trabalho, a noção de forçamento como uma noção geral. Para isto, tentamos extrair o que há de fundamental nesta ideia do ponto de vista conceitual e técnico. Nossa intuição inicial foi pensar o forcing como uma ferramenta para lidar com questões limites não somente na teoria de conjuntos, mas em outros possíveis contextos. Com despeito à nossa intuição generalizante, procuramos investigar o caráter fundamental da ideia ainda no escopo da Teoria de Conjuntos que foi onde esta ideia se desenvolveu inicialmente. Alguns resultados fundamentais e questões técnicas presentes na literatura usual foram enunciados e esclarecidos, bem como algum desenvolvimento inicial no que se refere ao trabalho conceitual foi oferecido como abordagem filosófica da ideia.

Palavras-chave: Forcing. Conjuntos. Conceitual. Fundamento.

ABSTRACT

We seek to investigate, in this brief work, the notion of forcing as a general notion. For this, we try to extract what is fundamental in this idea from a conceptual and technical point of view. Our initial intuition was to think of forcing as a tool to deal with boundary issues not only in set theory, but in other possible contexts. Despite our generalizing intuition, we sought to investigate the fundamental character of the idea even within the scope of Set Theory, which was where this idea first developed. Some fundamental results and technical issues present in the usual literature were enunciated and clarified, as well as some initial development regarding conceptual work was offered as a philosophical approach to the idea.

Key-words: Forcing. Sets. Conceptual. Foundation.

SUMÁRIO

1 PREFÁCIO

Os estudos de fundamentos são, em geral, exercícios que estão fados a nunca lograr êxito em esgotar seus objetos de investigação. Talvez isto esteja ligado diretamente à incompletude epistemológica inerente à condição existencial de todos nós, seres humanos, que nos colocamos a investigar os fundamentos mais profundos. Por algum motivo, por vezes — na grande maioria delas — estou lidando com questões que ultrapassam infinitamente minha competência para saná-las. Assim eu e muitos outros temos tentado caminhar a curtos passos, em paulatinas e insignificantes progressões em alguma direção que não sabemos ao certo qual é. A grande verdade é que estamos todos perdidos.

É bem verdade que o fato de não lograr êxito em esgotar questões é mais um álibi que um obstáculo para as boas questões filosóficas. E nisto, em alguma medida, nossa condição precária de competência é levianamente justificada. Além disso, prosseguindo nesta reflexão, muitas das grandes investigações filosóficas já produzidas durante o tempo e existência da humanidade estiveram envolvidas, de alguma maneira, com questões de fundamento. É nisto que fundamos e emprestamos indignamente o teor filosófico deste trabalho como uma discussão de fundamento. Por outro lado, como nas ciências, pretendíamos investigar, também, algumas questões técnicas sobre o nosso objeto inicial. Tendo isto em mente, nossa intenção era desenvolver esta investigação sob duas abordagens fundamentais que foram descritas agora.

O teor filosófico deste trabalho estava a cargo do caráter investigativo que se preocupa com a questão do fundamento que está diretamente envolvida com o universo da Teoria de Conjuntos que é a teoria de base onde levantaremos as questões técnicas — e mesmo algumas das questões filosóficas. Assim como dissemos anteriormente, este exercício é complexo o suficiente para que este trabalho não seja minimamente expressivo e até mesmo trivial diante das questões que são levantadas por ele mesmo. Além dos motivos epistemológicos que mencionamos brevemente, nos deparamos com uma teoria formal muito robusta e largamente desenvolvida que, como consequência, torna ainda mais distante a realidade técnica dos problemas de fundamentos e limites que se apresentam em seu interior.

Desta maneira, entramos no quesito técnico que seria o segundo pilar investigativo deste trabalho. Se por um lado nos preocupamos com questões especulativas de fundamento, em filosofia da matemática, não podemos nos abster, sem grandes prejuízos, de um fundamento técnico robusto que nos possibilite lidar minimamente com as questões que nos propomos. E, neste segundo quesito, também chegamos atrasados. A parte técnica da teoria de conjuntos é realmente muito robusta e intrincada justamente pelo esforço de fundamento que ela expressa e, além disso, pelo grande desenvolvimento que ela experimentou. Se por um lado temos a capacidade técnica à disposição para expressar, na linguagem da teoria, os grandes problemas e conceitos que não podem ser expressos em outras linguagens matemáticas menos conceituais, por outro lado, o exercício de lidar com estes grandes problemas formalmente exige um domínio da teoria que não é tão acessível. Mesmo assim nos aventuramos neste terreno difícil, tanto do ponto de vista filosófico, quanto do ponto de vista técnico.

A bem da verdade, se propus as duas abordagens, este trabalho falha em ambas. Nem há um corpo conceitual robusto para lidar com a faceta filosófica da questão e, muito menos, um desenvolvimento técnico à altura do que exige a investigação. O trabalho filosófico é certamente apressado e o trabalho técnico é trivial. Não há originalidade alguma na medida em que todos os resultados foram emprestados e o rigor filosófico foi deixado de lado pela falta de prazo e competência. Mas isto não pode ser um empecilho real visto que raramente haverá prazo, ou competência, para bons problemas. Se há falha em resolver os problemas, há ao menos algum critério de escolha das questões. E a técnica do forcing parece uma boa desculpa para exercitar ambas as propostas de investigação.

A técnica de forcing, de acordo com aquilo que procuramos apresentar neste trabalho, serve de boa investigação na medida em que se desenvolve em um recorte bastante profícuo no que se refere a expressar questões que julgamos ser de fundamental importância para entender não apenas o caráter expressivo da teoria em questão, mas também muitos fundamentos conceituais, boa parte do conhecimento técnico inicial, os limites e o ideal de objeto dentro da teoria. O trabalho com o forcing leva ao extremo a capacidade expressiva da linguagem de ZF — mesmo que não esgote — na medida em que trabalha com ideias que estão nos limites da teoria exigindo todo o tempo um esforço técnico e conceitual sem o qual não se é capaz de entender o esforço envolvido na técnica de Cohen. Assim, o tipo de objeto com o qual estamos lidando ao estudar a técnica é bastante desafiador pois tanto a natureza destes objetos quanto as suas relações não se apresentam de forma intuitiva em muitas circunstâncias no decorrer do desenvolvimento da ideia. Como exemplo do caráter criativo da noção de forcing, mesmo a relação de pertencimento não permanece inalterada pelas ideias inovadoras que surgem neste contexto.

Do ponto de vista filosófico a ideia é ainda mais instigante, sobretudo em relação a um certo tipo de olhar ontológico sobre a Teoria de Conjuntos que vê surgir tipos variados de objetos sob novas formas de determinação e definição que causam a impressão de uma proliferação dos objetos existentes na teoria. Em geral, a Teoria de Conjuntos apresenta diferentes tipos de objetos com os quais está lidando e o trânsito entre estas diferentes "ontologias"se dá pelos diferentes tipos de realizações da teoria que são feitas por pensadores diversos. Na ideia do forcing, como uma espécie de gerador de universos para essa teoria, não é diferente.

O próprio fato de sermos capazes de gerar modelos para ZFC através dessa ferramenta já a torna, em nossa perspectiva, uma ferramenta técnica com um caráter ontológico bastante direto. Embora a teoria seja bastante geral e, portanto, tenha um caráter fortemente abstrato, gerar modelos, realizações, não é algo trivial. Não é como se pudéssemos gerar modelos para ZFC a todo tempo. Todas as vezes que um modelo novo é gerado, o ato não se concretiza sem um grande esforço intelectual que envolve, mesmo que não explicitamente, os dois aspectos que citamos como fundamentais, a saber, o aspecto técnico e o aspecto filosófico.[1]

Por questões filosóficas procuramos fazer uma abordagem conceitual da ideia de forcing atentando para um desenvolvimento técnico embasado explicitamente pelas ideias fundamentais e, além disso, procurando desenvolver um trato conceitual construtivo culminando numa espécie de introdução ao estudo da técnica geral de forçamento. Para pensar na ideia geral, trouxemos resultados que julgamos fundamentais e deixamos de lado tecnicalidades e aplicações que não diziam respeito, em nossa visão, ao que era essencial para extrais o conceito geral de forcing. De acordo com o que temos, não conseguimos lograr êxito suficiente para oferecer uma ideia geral, mas já traçamos um escopo inicial que pode servir a esforços posteriores para conseguir o esperado.

No máximo, conseguimos uma modesta abordagem sobre o que é indispensável para se entender qual é a motivação para pensar uma ideia geral de forçamento. Embora ainda se esteja muito longe de conseguir uma abordagem satisfatória da questão, o trabalho desenvolvido aqui serviu pedagogicamente ao intuito de ganhar intuição sobre os ingredientes que estão envolvidos no cerne de nossa proposta inicial. Fazemos, inicialmente, uma contextualização sobre como chegamos até o trabalho de Cohen passando por questões de fundamento desde Cantor até Gödel com algum trato conceitual e técnico inicial onde o essencial era esclarecer as motivações que levaram à criação do forcing e o trâmite conceitual envolvido no desenvolvimento da questão.

Daí passamos a explanar com alguma ênfase questões técnicas que são padrão para tratar questões de forcing, ou seja, resultados que estão em todos os manuais com abordagens que lidam diretamente com a noção. Não fazemos qualquer consideração sobre as construções do forcing que usam álgebras booleanas pois, embora sejam abordagens mais intuitivas, demandam

[1] Evidentemente que o aspecto técnico é sempre explícito nestes contextos. Aqui nos referimos à não explicitação do aspecto filosófico.

um volume muito grande de informações e resultados intermediários que são, justamente, aquilo que queremos evitar neste trabalho. Prova disto é que mesmo nesta abordagem mais direta evitamos enfocar em resultados que não fossem considerados fundamentais ou se encaixassem de alguma forma, mesmo que periférica, na ideia central de forçamento.

Por fim, voltamos à abordagem conceitual do forcing procurando reinterpretar os resultados técnicos em uma linguagem conceitual básica. Além disso abordamos de maneira *en passant* a abordagem axiomática do forcing trazendo apenas os elementos que estavam em maior diálogo com as questões deste trabalho. Resumidamente, o que enfocamos da abordagem axiomática foi a Dualidade Fundamental que era um conceito interessante para dialogar com a concepção que estávamos construindo. Como já destacado, ainda fica muito a desejar o trato conceitual que foi oferecido neste trabalho — assim como o técnico. Algumas questões que foram pensadas para estar no escopo deste trabalho não puderam entrar. Pretendíamos falar sobre questões de completude, lógica universal, aritmética e algumas características interessantes da relação de forcing que acabaram por não constarem neste trabalho.

Embora pareça injusto citar questões que não estão presentes explicitamente neste trabalho, ainda assim, podem ser úteis para dar uma ideia de como entendemos alguns poucos aspectos da noção geral de forçamento e algumas de suas aplicações. Estes elementos poucos que conseguimos trazer para o diálogo, de alguma maneira, compõem um esqueleto inicial de um trabalho que pode tomar corpo em outras ocasiões mais apropriadas. Poucos trabalhos sobre a questão do forcing trazem uma abordagem realmente conceitual e filosófica como numa espécie de "filosofia do forcing". Infelizmente o presente trabalho também falha neste quesito, mas abre caminho para discussões posteriores que podem, por que não, se estender a questões epistemológicas e metafísicas para além das questões puramente formais e técnicas.

Gostaríamos de defender, em segunda ordem, que o forcing diga respeito à expansão controlada em geral, à lida com questões que exigem um tipo apropriado de restrição das possibilidades de expansão para tratar problemas que embora se ponham num dado escopo, o extrapolam de alguma forma e, epistemologicamente, esta ocasião é o caso muitas vezes. Não só na epistemologia, mas na filosofia e nas ciências em geral. De alguma maneira, a ideia de forçamento pode modelar certos tipos interessantes de lógicas para lidar com esses casos e mesmo para aplicações menos ousadas.

2 O FUNDAMENTO

Por vários séculos a matemática foi feita de forma fragmentária por diferentes civilizações e de maneiras bastante variadas. Essa forma de fazer matemática, de certa maneira, carecia de fundamentos na medida em que não se tinha uma sistematização que pudesse arregimentar sob seu domínio os vários tipos de matemáticas que eram feitos pelo mundo afora e em períodos históricos diferentes. Assim, a matemática foi se desenvolvendo de maneira independente em diferentes subáreas — a questão acerca da independência se dirige às questões de fundamento com as quais estamos lidando e não quero dizer, com isso, que a realidade da prática das matemáticas fosse totalmente desligada. Isto significa dizer que, embora pudesse haver algum diálogo entre as matemáticas que eram feitas nos vários lugares do mundo por várias civilizações diferentes, não se tinha uma coesão do ponto de vista fundacional.

Fato é que, do ponto de vista da prática corriqueira, a matemática não carecia de um fundamento formal. Haja vista o desenvolvimento que esta ciência obteve ao longo do tempo sem um exercício mais detido de fundamentação, ao menos até Euclides. Para uma parcela dos matemáticos, inclusive, a questão sobre um fundamento é simplesmente desconhecida ou ignorada ainda hoje. A bem da verdade, para a matemática corriqueira, as questões de fundamento não são questões que realmente interessam e, mais que isso, sua existência ou ausência não influenciam diretamente. Alguns campos menos abstratos da matemática não seriam radicalmente afetados caso faltasse um fundamento teórico como a própria teoria de conjuntos.

Mas mesmo na antiguidade já se podia falar em uma certa preocupação acerca do caráter ontológico dos números o que, em certa medida, se configura como uma preocupação de fundamento. Algumas escolas gregas de notória importância para a história do pensamento ocidental discutiam sobre as questões metafísicas que envolviam os objetos matemáticos. Duas figuras bastante conhecidas desse contexto são Pitágoras e Platão. Estes dois filósofos investigaram com afinco e elaboraram algumas teorias com respeito à realidade metafísica da matemática. Para Pitágoras, a questão tinha um papel ontogênico notório onde — embora não se saiba muito sobre sua teoria — os números exerciam papel fundamental. Ao que parece, o entendimento era bastante relacionado à geometria e à sua capacidade de expressão das formas e planos. O que trouxe a reboque um entendimento dimensional matemático da estrutura fundamental do cosmos, uma espécie de ontologia matematizada sem, é claro, haver esta concepção clara de separação onde as duas se confundiam mutuamente.

Para Platão — e com alguma influência do filósofo anterior — os objetos matemáticos possuíam uma existência direta como ideias. Como é sabido, a ideia platônica gozava do privilégio de ser a expressão máxima das verdades o que, de certa forma, prescindiria de um fundamento exterior à sua própria natureza ontológica. De certa maneira, a aproximação entre matemática e ontologia nega o fundamento na forma como o entendemos. Tanto na concepção platônica quanto na pitagórica a questão de fundamento perde parte de seu sentido uma vez que a prática matemática é melhor descrita como uma espécie de vislumbre da própria coisa em si, uma verdade objetiva, ao invés de aproximar-se de uma criação, ou uma espécie de linguagem. Estes dois tipos de abordagem dão um caráter empírico à Matemática que prescinde fortemente de um fundamento no sentido que queremos defender.

Com despeito a todo o desenrolar histórico desta digressão inicial, a preocupação com o fundamento foi se acentuando com o passar dos séculos e com o desenvolvimento da matemática onde cada vez mais se entendia a matemática enquanto uma ciência pura e não uma ciência empírica como nas visões que abordamos anteriormente.[1] Muitas escolas de filosofia da matemática se propuseram a investigar o caráter fundamental desta área de conhecimento lhe oferecendo, ou negando, um fundamento específico. A investigação acerca do fundamento se impôs de forma bastante oportuna na medida em que os problemas limites da matemática indicavam cada vez mais para a necessidade de uma sistematização — um fundamento — que possibilitasse a lida com problemas que estavam para além das questões ordinárias.

Com alguma justiça, talvez, tenhamos de falar brevemente a respeito da concepção matemática que herda de Kant um teor transcendental forte. Se por um lado a filosofia grega poderia pretender um fundamento ontológico externo ao intelecto para os objetos da matemática, com Kant — que tomaremos como representante da modernidade — o conceito de conhecimento matemático se consagra de maneira mais radical como um exercício intelectual puro e, em muitos sentidos, desligado da vertente que estamos chamando de platonismo matemático. Na filosofia de Kant a matemática pura ganha força e se estabelece como uma discussão filosófica na medida em que o autor — assim como outros filósofos antes dele — começa a discutir aspectos epistemológicos e ontológicos desta área do conhecimento de forma mais explicita. Sobre isto, Kant diz: "Tem de ser notado primeiramente: que proposições verdadeiramente matemáticas são

[1] Aqui chamamos de empírica a visão que aproxima a matemática de uma ciência de objetos mais ou menos concretos, isto é, que pudessem estar disponíveis como um fenômeno subjacente ou intrínseco à natureza, como causa formal, ou qualquer coisa que se assemelhe. Além disso, talvez seja verdadeiramente questionável entender a filosofia de Platão como defensora de que as ideias possam ser experienciadas de maneira mais próxima com uma experiência empírica visto que o conceito de ideia para Platão é alcançado por um processo intelectual de abstração, todavia, dizemos mais a respeito de uma impressão sobre o platonismo matemático que pretender investigar com rigor exegético o teor dos objetos matemáticos na filosofia de Platão.

sempre juízos *a priori*, e não empíricos, porque trazem consigo uma necessidade que não pode ser derivada da experiência."(Kant, 2015, p.54)

O fato sobre filosofias modernas como a de Kant é que houve um direcionamento da compreensão do universo dos objetos da matemática para um tipo de existência abstrata e majoritariamente fundamentado no exercício intelectual tanto para a pesquisa, quanto para o fundamento. O transcendentalismo da filosofia kantiana legou para a concepção matemática contemporânea um conceito teórico — ligeiramente determinado — sobre o caráter dos conhecimentos matemáticos, sobretudo no que se refere à aprioricidade das asserções e como isto influenciou na concepção contemporânea de lógica e matemática de maneira geral. O discernimento entre questões puras e aplicadas trouxe um uma bifurcação entre tipos específicos de abordagens dos conhecimentos matemáticos que possibilitou o entendimento de questões de fundamento como demanda basilar sem a qual o conhecimento matemático permaneceria à deriva como um conglomerado de conhecimentos fragmentários cuja coesão era dada por critérios pouco definidos.

É neste contexto que a matemática pura ganha terreno e mais tarde culminará em teorias de cunho fundacional como a lógica matemática e a teoria de conjuntos. Ela foi um importante avanço na construção teórica de um aparato técnico que possibilitasse tratar de forma mais ou menos homogênea as diferentes áreas do conhecimento matemático. Através desta teoria, toda a matemática pôde, enfim, ser traduzida sob um único sistema formal. Por outro lado, embora parecesse um paraíso formal onde as concepções basilares da matemática pudessem ter um tipo de realização comum, alguns ajustes técnicos precisaram ser feitos com o decorrer do desenvolvimento desta teoria. Um dos grandes problemas iniciais, e talvez o mais importante, foi o impasse que ficou conhecido como o "Paradoxo de Russel"que, basicamente, tornava claro o fato de que a noção intuitiva de conjunto adotada não era adequada.[2]

Felizmente para os adeptos da Teoria de Conjuntos, dentre os quais está Hilbert, autor da célebre frase sobre o "paraíso"de Cantor, os principais problemas conceituais da teoria puderam ser contornados mais tarde com o avanço técnico do corpo teórico. Entre estes avanços está a axiomatização da teoria que foi inicialmente proposta por Zermelo e depois estendida por alguns outros axiomas. O fato é que embora ainda existam inúmeros problemas envolvidos na concretização da Teoria de Conjuntos, ela se mostra como uma teoria de um tipo particular de

[2] Outras formalizações que podem aceitar conjuntos cuja definição seja paradoxal no sentido de Russell. Contemporaneamente existem várias lógicas "dispostas"a lidar com tipos de conjuntos e entidades não consistentes com teorias standard.

plasticidade na medida em que consegue contornar, mesmo que muito especificamente, vários dos problemas que se impõem ao seu exercício.

De uma maneira ou outra, esta teoria revolucionou a concepção de matemática que se tinha antes de sua realização. Além disso, o empreendimento conjuntista tem um fator importante a seu favor que é o fato de ter como fundamento uma ideia bastante intuitiva, mesmo que com alguns ajustes, que se presta a funções técnicas muito profundas. Muito embora seja verdade que seu desenvolvimento colossal tenha tornado esta área de pesquisa muito difícil e com problemas que demandam uma habilidade técnica muito apurada, ainda assim, é uma teoria cuja base intuitiva ainda tem presença muito forte, mesmo em estágios muito avançados.

Como veremos posteriormente, muito ainda há de ser feito no corpo da teoria. Muitos buracos teóricos permanecem em aberto e, além disso, boa parte das grandes ideias da lógica surgiram de problemas de contexto conjuntista. Problemas que envolvem o infinito tiveram um trato bastante aprofundado dentro da Teoria de Conjuntos e isto proporcionou um ganho de intuição considerável no que se refere a questões infinitárias. A própria ideia central deste trabalho — que será tratada nas próximas seções e capítulos — surge de um contexto semelhante a estes que acabamos de mencionar.

3 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

3.1 FUNDAMENTO DO APARATO FORMAL

A base formal da axiomatização de ZF é uma linguagem de primeira ordem. Assim, é suficiente que tenhamos apenas os conectivos da lógica clássica, os quantificadores e as regras de inferência usuais. Caso seja desejável que haja a igualdade, podemos adicioná-la como uma relação primitiva ou defini-la a partir dos outros conectivos. Há ainda um símbolo de relação específico do contexto conjuntista que é o símbolo de pertencimento ($\in$). Ainda em acordo com as linguagens de primeira ordem, exigimos os "nomes"indeterminados e próprios que são as variáveis que instanciaremos com as entidades do nosso universo. Para isso, exigimos uma quantidade infinita delas. Por último, usamos os parênteses como ferramentas de desambiguação.

Daí em diante as exigências se desenvolvem de acordo com os interesses de uma linguagem de primeira ordem no que se refere aos termos, fórmulas e assim por diante. Além disso, o comportamento de interdefinibilidade dos conectivos é preservado no uso da linguagem para ZF.

Desta maneira, ao adicionarmos uma relação específica — a relação de pertencimento — à linguagem de primeira ordem, obtemos uma linguagem adequada para lidar com toda a teoria de conjuntos. Se somarmos a isso nossos postulados específico, isto é, os axiomas não-lógicos, temos os rudimentos da Teoria de ZF. Os axiomas não-lógicos de ZF são[1]:

1. Axioma da Extensionalidade. $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$.

2. Axioma do Par. $\forall y \exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$.

3. Esquema da Separação. Seja $F(x)$ uma fórmula de ZF e $x \neq y$.
$\forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow F(x) \wedge x \in z)$.

4. Axioma da União. $\forall x \exists y \forall t(t \in y \leftrightarrow \exists z(t \in z \wedge z \in x))$

5. Axioma das Partes. $Set_y(z \in y \rightarrow z \in x)$.

6. Axioma do Infinito. $\exists x(\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \notin y)) \wedge$
$\forall y(y \in x \rightarrow \exists z(z \in x \wedge \forall w(w \in z \leftrightarrow (w \in y) \vee (w = y)))))$

7. Esquema da Substituição. $\forall x \exists z \forall y(A \leftrightarrow y \in z) \rightarrow Set_y \exists x(x \in w \wedge A)$

8. Axioma da Regularidade. $\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))$

[1] Usaremos $Set_x A$ como abreviação para $\exists y \forall x(A \rightarrow x \in y)$. Onde a variável $y \neq x$ e não ocorre em A.

Há outras formas de axiomatização da Teoria de Conjuntos, além disso, diferentes abordagens podem mudar quanto à quantidade de axiomas. Estes postulados são responsáveis pela estrutura basilar de toda a teoria e nos dão pistas de como devemos pensar estes tipos de objetos, seja lá o que forem. Eles nos dizem como se comportam, como estabelecem suas relações, e um pouco sobre sua natureza ontológica enquanto objetos da teoria.

Dois postulados em especial são nomeados como *esquemas*. Eles são assim chamados pois cada fórmula presente em sua estrutura dá origem a um axioma de ZF, por isso, são entendidos enquanto um conglomerado, um esquema, de vários axiomas. Também vale chamar atenção para dois outros axiomas, a saber, o Axioma do Infinito, que fala explicitamente sobre um tipo de entidade bastante intrigante, isto é, a existência de um conjunto infinito. E o Axioma da Regularidade, que fala sobre a fundação de um conjunto.[2]

Se hoje parece trivial a existência de conjuntos infinitos com os quais estamos lidando corriqueiramente desde a matemática mais básica, ontologicamente estes tipos de conjuntos estão assegurados por uma sentença relativamente arbitrária, contudo, "necessária", para a prática da matemática usual. Além disso, o Axioma da Regularidade exige que aja uma fundação no conjunto na medida em que deve haver um elemento seu totalmente disjunto dele. Se por um lado é desejável que a noção de conjunto seja algo altamente intuitivo, estas questões mostram um certo endurecimento da intuição primordial.

3.2 PROBLEMAS E LIMITES

Ainda de acordo com os problemas intrínsecos à teoria, temos como exemplo o fato de que o próprio Zermelo, quem ofereceu uma axiomatização para a Teoria de Conjuntos em 1908, não foi capaz de sanar o problema de fornecer uma prova cabal da consistência de sua axiomatização. O que foi levado em conta para a relevância de seu trabalho é que os principais paradoxos descobertos anteriormente não podiam ser provados como consequência dos axiomas dados por ele . Mesmo tendo este fato importante a seu favor, a axiomatização não foi poupada das críticas, principalmente por não estarem evidentes alguns elementos centrais de sua formalização que usava conceitos ainda não tão estabelecidos. Como exemplo deste problema, temos sua formulação do Axioma da Separação que usava o conceito de definibilidade de uma função proposicional cuja ideia central era diretamente dependente de conceitos que, embora fossem amplamente usados em seu trabalho, ainda careciam de um rigor técnico mais apurado

[2] Não passaremos à análise detalhada de cada axioma na medida em que este esforço já foi exaustivamente contemplado na literatura especializada. cf. JECH 2002.

que pudesse torná-los claros. Uma outra questão bastante central para a crítica de Skolem à axiomatização de Zermelo é o fato de os axiomas não fixarem um domínio da teoria. Assim, sentenças como $x^2 = 2$ permaneceriam indeterminadas.

Tanto a ambiguidade da axiomatização de Zermelo com relação à indeterminação de um domínio fixo para o seu sistema, quanto os problemas de independência para alguns axiomas e hipóteses foram de fundamental importância para que lógicos e matemáticos como Fraenkel e Skolem fizessem suas críticas e apontassem problemas estruturais que instigaram ainda mais o desenvolvimento da teoria. Frenkel propôs uma primeira reflexão bastante importante para despertar a investigação sobre o problema da independência do Axioma da Escolha com relação ao sistema axiomático de Zermelo. A ideia é bastante simples: supondo uma hierarquia de conjuntos infinitos $[X_0, X_1, ..., X_n]$ tais que X_{n+1} seja o conjunto das partes de X_n, então teríamos, pela teoria de Zermelo, o conjunto $J = \{X_0, X_1, ..., X_n\}$ cujos elementos são estes conjuntos infinitos. O fato destacado por Fraenkel é sobre se o sistema de Zermelo era capaz de provar a existência da união do conjunto J. Caso o sistema de Zermelo não fosse capaz de provar coisas do tipo, então a existência de grandes cardinais tais como $\aleph_\omega$ não seriam, também, prováveis no sistema. [3]

Um outro problema bastante central, tanto para a técnica de forcing quanto para a Teoria de Conjuntos como um todo, é a investigação feita por Skolem, também comentada por Moore. Skolem nota, entre outras coisas, que, além de não haver uma categoricidade na axiomatização de Zermelo, existe um procedimento bastante peculiar, qual seja, tomando um modelo enumerável da teoria de conjuntos e adicionando a ele um subconjunto dos números naturais, a extensão obtida pela adição do novo subconjunto é, também, um modelo da Teoria de Conjuntos. O fato é que, por esta descoberta de Skolem, sabemos que, fora o fato de existirem modelos enumeráveis para a teoria de conjuntos, há, ainda, uma outra característica muito importante que será central para nosso entendimento da técnica de forcing, qual seja, que para um modelo M transitivo, embora os elementos de seus elementos também estejam em M, isto não vale para os subconjuntos.[4]

Fato é que estas fervorosas investigações trabalhadas diretamente no fundamento da Teoria de Conjuntos trouxeram à tona alguns dos principais problemas de independência da teoria.

---

3 cf. MOORE, 1988

4 Embora Cantor tivesse a pretensão de construir um universo altamente intuitivo com característica bastante simples, a Teoria de Conjuntos está repleta de armadilhas teóricas não intuitivas. Um exemplo bastante corriqueiro, mas que causou muito alvoroço entre os teóricos mais antigos foi o fato de que alguns conjuntos infinitos possuem subconjuntos de mesma cardinalidade. Esta ideia, embora seja bastante conhecida no campo da Teoria de Conjuntos contemporânea, ainda assim, possui um caráter altamente contraintuitivo.

Ninguém menos que Gödel também esteve trabalhando arduamente em problemas conjunstistas logo depois de ter legado seus principais teoremas da lógica, a saber, o teorema da completude e os dois teoremas de incompletude. Os dois principais problemas trabalhados por Gödel diziam respeito à Hipótese do Contínuo proposta pelo próprio Cantor, e o Axioma da Escolha que foi adicionado posteriormente à axiomatização inicial de Zermelo.

3.3 A HIPOTESE DO CONTÍNUO

Para a construção do universo da Teoria de Conjuntos, vamos usar a noção de hierarquia cumulativa de von Neumann. O processo de construção por esta noção é alicerçado na existência de um conjunto vazio. A partir daí todo o universo da Teoria é construído a partir dos axiomas de ZFC. Para a concepção iterativa, os números ordinais são obtidos através de um processo bastante simples. Dada a existência do conjunto vazio, fazemos que ele seja o conjunto que corresponde ao número 0. Daí em diante, fazemos que a operação de sucessão seja dada pela construção do sucessor imediato pela tomada do conjunto das partes do conjunto predecessor, isto significa que o conjunto correspondente ao sucessor de zero será o conjunto unitário do vazio, de forma análoga, o sucessor do sucessor de zero será o conjunto que contém o vazio e o unitário do vazio, e assim por diante. Esta ideia especulativa pode ser formalizada por indução transfinita. Tomando V para o universo de von Neumann, $\mathscr{P}$ para o conjunto das partes, α para ordinais e β para ordinais limites, temos:

(I) $V_0 := \varnothing$

(II) $V_{\alpha+1} := \mathscr{P}(V_\alpha)$

(III) $V_\beta := \bigcup\limits_{\alpha<\beta} V_\alpha$

Desta maneira, teremos que um dado número ordinal será o conjunto de todos os seus predecessores. Dada a construção padrão por iterações operadas pela operação de construir o conjunto das partes dos predecessores podemos, a partir dela, passar de conjuntos de iterações do vazio para seus equivalentes de forma que tenhamos a seguinte imagem intuitiva dos números como conjuntos dos números predecessores.

$$0 = \varnothing$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, 1\}$$

$$\vdots$$

O conjunto dos números ordinais é a "espinha dorsal"do nosso universo. Ao chegar no primeiro ordinal limite ω, temos o conjunto de todos os números naturais. No entanto, não precisamos parar nossa adição quando atingimos ω, podemos prosseguir com o processo de sucessão infinitamente, adicionando elementos ao conjunto predecessor e obtemos a continuação da estrutura com o seguinte aspecto:

$$0 = \varnothing$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, 1\}$$

$$\vdots$$

$$n = \{1, 2, ..., n - 1\}$$

$$\vdots$$

$$\omega = \{1, 2, 3, ...\}$$

$$\omega + 1 = \{1, 2, 3, ..., \omega\}$$

$$\omega + 2 = \{1, 2, 3, ..., \omega + 1\}$$

$$\vdots$$

O curioso sobre esta parte da teoria é que nenhuma dessas adições a ômega é capaz de extrapolar sua cardinalidade. É possível construir uma bijeção entre ômega e seus sucessores tomados desta forma. Assim, tomando $\aleph_0 = \text{card}(\omega)$, há sempre uma função $f : \omega \to (\omega + n)$ bijetora. Este tipo de método de verificação de equipotência é bastante conhecido na Teoria de Conjuntos e é usado para verificar o fato e que $\text{card}(\omega) = \text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. Via de regra, o que queremos dizer com o fato de não haver um aumento na cardinalidade destes conjuntos infinitos é que, para efeito de avanço na hierarquia dos conjuntos, nenhuma das passagens mencionadas anteriormente foi capaz de subir um grau na hierarquia no sentido de que é necessário que exista uma superioridade cardinal.

O ponto que realmente interessa, então, é sobre os conjuntos infinitos que não podem estar em bijeção com o conjunto dos números naturais. Não foi precisamente por isso que a hipótese do contínuo surgiu, mas ela é uma consequência de se atingir conjuntos de números com cardinalidade maior que a de ômega. Em particular, a preocupação surge na passagem dos números racionais para os números reais. Desde Cantor já se sabia que o conjunto dos números reais é maior que o conjunto dos números naturais e que, portanto, não pode haver uma bijeção entre eles. Mais que isso, desconfiava-se que o conjunto dos números reais fosse um contínuo, uma espécie de conjunto cuja topologia não possuísse tantas "brechas"como nos conjuntos de números de cardinalidade menor.

Isso foi uma descoberta bastante instigante para a matemática da época. Além disso, Cantor havia mostrado que um conjunto nunca poderia ser equipotente ao conjunto das suas partes. Daí, se não se podia alterar a cardinalidade de ômega por tomar seus sucessores pelo processo mencionado anteriormente, então isso poderia ser feito por tomar o conjunto das partes de ômega. Todas estas questões levaram Cantor a se questionar sobre se a cardinalidade dos reais seria a próxima cardinalidade na hierarquia logo depois da cardinalidade de ômega, isto é, se $\mathrm{card}(\omega) = \aleph_0$, que conjunto poderia corresponde a $\aleph_1$? Como fato, Cantor sabia que a cardinalidade dos reais é equipotente à cardinalidade do conjunto das partes de ω e, também, que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathrm{card}(P(\omega))$. O que Cantor conjectura, finalmente, é que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Assim chegamos, então, à formulação da Hipótese do Contínuo segundo a qual o próximo cardinal infinito seria $2^{\aleph_0}$. O fato é que esta hipótese não foi provada nem por Cantor, nem por nenhum matemático posterior. Ainda não sabermos como se comporta essa “sucessão” de cardinais desse tamanho. Poderia muito bem acontecer que o salto fosse bem maior que a passagem de $\aleph_0$ para o que denotamos como $\aleph_1$, ou mesmo que houvesse algum cardinal entre estes dois.

3.4 A CONSISTÊNCIA DA HIPÓTESE

Com o passar do tempo, a falta de uma prova para a hipótese de Cantor foi angustiando os teóricos conjuntistas. Sem conseguirem oferecer uma prova para esta hipótese, muitos começaram a desconfiar de sua veracidade. Mas o grande fato sobre a hipótese que Cantor formulou, é que era, de fato, desejável que fosse o caso. O conjunto dos números reais foi uma descoberta importante para a matemática sobretuto pelos fatores que lhe diferenciam ontologicamente dos outros conjuntos.

O avanço mais óbvio e esperado para o universo dos conjuntos é que ele fosse capaz de apontar uma relação ontológica entre os conjuntos de números precedentes e o conjunto dos reais. Isto seria o mais intuitivo para um conjuntista, mas não é tão simples assim. O conjunto dos números reais é, de fato, mais delicado tecnicamente e ontologicamente que seus predecessores no universo da teoria de Cantor. Haja vista que a passagem construtiva dos números racionais para os reais é a mais complicada do ponto de vista técnico. Qualquer um com algum contato básico com a Teoria de ZFC pode notar que o conjunto dos números reais tem algo de mais profundo com relação aos anteriores. Fora o fato da não-enumerabilidade dos números reais, que já é bastante intrigante do ponto de vista intuitivo, soma-se o fato de que a própria ontologia destes números envolve uma construção diferenciada com relação ao tipo de objeto que compõe o conjunto.

O conjunto dos números reais pode, de fato, ser construído partindo da construção dos antecedentes, mas esta construção não acontece de forma tão natural quanto as anteriores. Não existe apenas uma forma de construção dos números reais. Alguns manuais usam Sequências de Cauchy, outros usam os Cortes de Dedekind, entre outras formas de construção que vão além destas duas. Mas o grande fato que interessa ontologicamente é que a construção dos números reais muda radicalmente com relação aos conjuntos anteriores. A título de exemplificação, vejamos resumidamente os tipos de construção.

Dada a relação ~ binhária em ω x ω de forma que:

$\langle m, n \rangle \sim \langle p, q \rangle$ se, e somente se $m + q = n + p$.

Dizemos que as classes de equivalência $\mathbb{Z} = [\omega \text{ x } \omega]/\sim$ formam o conjunto dos números inteiros.Vemos que esta primeira extensão do conjunto dos números naturais para os inteiros se dá de maneira não tão dramática. Basta que ela seja oeparada pela definição de uma relação binária entre números naturais e a classe de equivalência entre esses pares. Assim já temos todos os ingredientes para recuperar ontologicamente todo o comportamento do conjunto.

De forma análoga, definimos a relação $\star$ binhária em $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}'$ de forma que:

$\langle a, b \rangle \star \langle c, d \rangle$ sse $a \cdot d = c \cdot b$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é dado por $[\mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z}']/\star$ para toda classe de equivalência de frações. Novamente a estratégia é análoga à usada anteriormente para fazer a extensão de passagem de um cnjunto ao outro. Aqui estamos de frente a uma questão filosófica interessante na medida em que, embora, ontologicamente, os elementos tenham mudado consideraelmente, a cardinalidade dos conjuntos permanece inalterada desde ω. Mas já podemos ver que a ontoloogia está povoada de novos objetos e, além disso, que há uma proliferação dos infinitos.

Finalmente estamos em condições de entender alguma coisa sobre a particularidade dos reais. Como já mencionado anteriormente, existem diferentes técnicas de construção deste conjunto. Adotaremos os cortes de Dedekind. Vejamos. Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais.

Definição. Um corte de Dedekind é um subconjunto x de $\mathbb{Q}$ tal que:

(D1) $\varnothing \neq x \neq \mathbb{Q}$

(D2) Se $q \in x$ e $r < q$, então $r \in x$

(D3) Se $p \in x$, então $\exists q \in x\ (q > p)$

Definimos, assim, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como o conjunto de todos os cortes de Dedekind. Além disso, dado que cada corte corresponde a um $r \in \mathbb{R}$ é fácil ver que a qualidade ontológica destes tipos de número é, no mínimo, intrigante. Embora não seja fundamental para nossa discussão, vale notar que mesmo existindo várias construções para $\mathbb{R}$ que diferem quanto aos objetos que compõem este conjunto, esta ambiguidade não afeta diretamente questões mais práticas na medida em que já é conhecida uma abordagem axiomática para o conjunto dos números reais que dispensa qualquer tipo de construção. Estes axiomas são largamente conhecidos e são chamados *axiomas de corpo*.

A Hipótese de Cantor não só formula um problema técnico para a Teoria de conjuntos, como também elege um problema ontológico estrutural com relação aos objetos matemáticos. O que ela faz parecer é que existem buracos na ontologia do universo matemático, ou qualquer espécie de limite relacionado com as questões que envolvem infinitos. Um fato bastante evidente é que a matemática, em geral — e esta é uma questão de fundamento por excelência e, portanto, filosófica — entra em embaraço quando lida com questões infinitárias. Daí a dificuldade da Teoria de lidar com problemas que estão em seu limite ontológico; a Hipótese do Contínuo é uma destas questões.[5]

Várias destas questões conceituais e técnicas podem servir de entendimento sobre a dificuldade de construir uma prova para a Hipótese do Contínuo. No mínimo, servem de entender que a falta desta prova não acontece por um motivo puramente técnico, mas da real possibilidade de as questões técnicas refletirem questões filosóficas como a ontologia e a epistemologia que estão envolvidas na matemática que fazemos. O grande fato é que não há uma prova para a

[5] Talvez o que estamos tratando aqui como questões ontológicas possam ser interpretadas como questões epistemológicas que refletem seu caráter limite nas questões da matemática que fazemos.

Hipótese. Muitos matemáticos trabalharam no problema, mas apenas com Gödel é que houve um real avanço técnico no que se refere às investigações sobre o assunto. Gödel consegue provar a consistência da Hipótese e sua estratégia consiste basicamente em criar um sistema Δ de conjuntos construtivos contido num sistema Σ que contém todos os axiomas de Zermelo, mais o Axioma da Separação e o Axiomada da Regularidade, mas não o Axioma da Escolha. A prova de Gödel consiste em demonstrar que tanto o Axioma da Escolha, quanto a Hipótese Generalizada do Contínuo são satisfeitos pelo sistema Δ e, além disso, é demonstrável em Σ que (1) as proposições que dizem que os axiomas de Σ são válidos para Δ são demonstráveis em Σ, e (2) as proposições que dizem que a Hipótese Generalizada do Contínuo e o Axioma da Escolha valem em Δ, também são demonstráveis em Σ.

A questão filosófica que permanece parcialmente aberta, mesmo após a prova de Gödel, é sobre, mais uma vez, o caráter ontológico da questão. Obviamente que o interesse principal de Gödel não estava em responder a questões conceituais sobre a natureza dos números, mas sim uma questão matemática técnica sobre a demonstração de um fato limite para a Teoria de Conjuntos. Mesmo assim, em seu artigo, Gödel oferece uma construção tanto do sistema Sigma, quanto do Sistema Delta, passando por conceitos importantes que culminam em sua prova. Embora, talvez, não estivesse plenamente ciente do trabalho ontológico de seu artigo, é um fato que a construtividade necessária para o trato técnico reflete questões filosóficas. Gödel opera uma verdadeira organização do universo da Teoria de Conjuntos pavimentando o ambiente para que pudesse lidar com o problema da consistência da Hipótese.

Além disso, várias ideias já presentes no trabalho de Gödel serão de fundamental importância para a construção da ferramenta do forcing. Como um exemplo bastante evidente, temos o Teorema Geral de Existência enunciado por Gödel que fundamenta — direta ou indiretamente — a ideia central do Lema da Definibilidade que será objeto da seção (3.2).

Definição. Uma *função proposicional primitiva* é uma fórmula contendo apenas símbolos para classes especiais[6] $(C_1, ..., C_k), \in$ e operadores lógicos cujas variáveis ligadas são variáveis que variam através de conjuntos.

6 Uma classe especial é introduzida no universo pela definição de um postulado $\psi(C)$, onde ψ é uma função proposicional contendo apenas símbolos definidos previamente e há uma prova de que exista exatamente uma classe C tal que $\psi(C)$.

Lema Geral de Existência. Se $\phi(x_1, ..., x_n)$ é uma função proposicional primitiva contendo como variáveis livres apenas $x_1, ..., x_n$, então existe uma classe C tal que:

$$< x_1, ..., x_n >\in C \equiv \phi(x_1, ..., x_n).$$

A prova deste lema é uma prova indutiva feita na complexidade de ϕ e não será reproduzida pois são necessários alguns resultados prévios, assim como outras definições cuja reprodução não seria tão útil ao intuito deste trabalho. A prova completa bem como os resultados e definições podem ser encontrados em (Gödel, 1940).

A prova sobre a existência de tais objetos é uma ideia muito útil para o contexto do forcing na medida em que é precisamente algo deste tipo que será usado para assegurar a existência e a relação entre modelos da relação de forçamento como uma classe no modelo de origem. De alguma maneira, o caminho ontológico está pavimentado por Gödel na medida em que ele tange a questão central do forcing claramente expressa num lema que envolve a existência. Embora não seja a única ideia útil para o forcing, procuramos enunciar este lema para evidenciar sua proximidade com as principais ideias do forcing. Sobretudo nas seções seguintes ficará mais evidente a importância deste lema para o aparato de controle que é exercido através do forcing com particular importância na existência de uma classe de forçamento cuja ideia principal, mesmo que potencialmente, já estava enunciada no Lema Geral de Existência.

É importante observar, por motivos filosóficos, que não somente os conjuntos são construtivos no universo de Gödel, como parte do caráter da proposta de seu trabalho é construtiva, não no sentido radical da construtividade, mas na postura adotada pelo autor durante a elaboração de seu trabalho procurando oferecer uma coesão técnica, mas, além disso, um pensamento conceitual básico, mesmo que sem grandes pretensões filosóficas, que procura certa fundamentação para as questões. Por vezes, ao que parece, Gödel está preocupado em estabelecer o mínimo comprometimento ontológico na medida em que cria novos objetos partindo de ideias paulatinamente cumulativas, sem realizar, dentro do possível, grandes saltos de existência.[7]

[7] Esta é uma impressão particular sobre o trabalho de Gödel.

4 ELEMENTOS FUNDAMENTAIS DO FORCING

4.1 ESTRUTURAS E OBJETOS

Extrair uma ideia fundamental do forcing desligado do universo da Teoria de Conjuntos é algo bastante difícil, principalmente pelo fato de que essa ferramenta foi criada justamente no contexto dessa teoria. O fato é que a técnica de forcing pode ir muito além do tratamento para modelos de ZF e, mais que isso, nossa intuição se dirige a uma ideia especulativa de forcing com implicações filosóficas que podem ir além de contextos matemáticos ou de lógica pura que, contudo, não estão no escopo deste trabalho. Por motivos de limitação de escopo, nos concentraremos no trato usual da ideia de forcing seguindo o roteiro dos manuais de referência que tratam desta ideia, portanto, nos atendo à teoria de ZF. Toda a linguagem será, desta maneira, a linguagem usada na teoria de conjuntos bem como todas as "entidades" aqui manipuladas fazem parte de um universo bastante específico.

Começamos com a ideia de modelo transitivo enumerável. Nossa ideia principal é construir um modelo $N \supseteq M$ que satisfaça $ZFC + \neg CH$. Para a construção de tal modelo precisamos de um conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ em M cujos elementos denotaremos com as variáveis p, q, r e s e uma relação de ordem $\leq$. Os elementos de $\mathbb{P}$ serão chamados condições. Além disso usaremos 1 para designar o maior elemento de $\mathbb{P}$. Uma *noção de forcing* é conjunto $\mathbb{P}$ com o maior elemento 1. Dadas duas condições $p, q \in \mathbb{P}$, se $p \leq q$, dizemos que p estende q, ou que p é mais forte que q. Cada conjunto de condições que escolhemos dá um conjunto N. Um subconjunto D de $\mathbb{P}$ é dito denso se toda condição de $\mathbb{P}$ tem uma extensão em D.

Precisamos ainda de um outro elemento fundamental do forcing que enunciaremos asseguir. Seja $\mathbb{P}$ um conjunto de condições e M um conjunto. Dizemos de um subconjunto G de $\mathbb{P}$ que ele é $\mathbb{P}$-genérico sobre M se satisfaz as seguintes condições:

(i) $1 \in G$

(ii) Para todo $p \in G$, se $q \geq p$, $q \in G$

(iii) Para todo $p, q \in G$, p e q têm uma extensão comum em G

(iv) Para todo conjunto denso D em M, $G \cap D \neq \varnothing$

Os requisitos (i), (ii) e (iii) são os requisitos de filtro e o requisito (iv) é o requisito de genericidade. Os filtros genéricos serão de fundamental importância para a construção do modelo N uma vez que apenas o conjunto de condições não seria capaz de assegurar uma série de requisitos necessários que, no entanto, são possíveis pela existência de tais filtros. A condição imediata mais oportuna que surge com a ideia de filtro é o fato de todas as condições no interior de um dado filtro serem compatíveis entre si - condição (iii). O Teorema que será enunciado a seguir lida diretamente com questões de existência. Mais que isso, se forçarmos o significado estas estruturas, podemos dizer que a existência de genéricos dada na forma deste teorema mostra que a corretude[1] das condições é relativa.

4.2 ALGUNS TEOREMAS

Nesta seção enunciaremos alguns resultados cujo escopo se restringe às estruturas fundamentais do forcing dentro do contexto de seu uso para modelos de ZFC que, no entanto, com algum esforço, podem ser generalizados especulativamente para uma ideia geral de forcing.

Lema da Existência. Seja M um modelo transitivo enumerável de ZF, e seja $\mathbb{P}$ uma noção de forcing. Então para todo $p \in \mathbb{P}$ existe um filtro G em $\mathbb{P}$ tal que $p \in G$ e G é $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Prova. Dado que M é enumerável, podemos tomar uma sequência $a_1, a_2, ...$ de elementos de M. Daí escolhemos p_n indutivamente de forma que:

(1) $p_0 = p$

(2) $p_{n+1} \leq p_n$

onde $p_n \in a_n$. Seja observado que $p_{n+1} < p_n$ se a extensão existe, $p_{n+1} = p_n$ caso contrário. Agora definimos $G = \{q : \exists n(p_n \leq q)\}$. Evidentemente G satisfaz (i) pois 1 é a maior condição. Para (ii) temos que se $p \in G$ é o caso e $q \geq p$, então $p = p_n \leq q$, portanto $q \in G$. Suponha duas condições quaisquer $p, q \in G$. Então existem $p_n \leq p$ e $p_r \leq q$ onde $n, r \in \omega$. Tomemos os casos não triviais, portanto, $p_n < p_r$ ou $p_r < p_n$. Em ambos os casos existirá uma extensão comum de p e q em G. Assim (iii) está satisfeita. Por ultimo, par um q qualquer em D temos que $q = p_n \leq q$ é o caso para algum $n \in \omega$, logo $q \in G$.

Isto mostra que o filtro genérico é uma ferramenta de organização do universo em questão. A existência dos filtros genéricos, portanto, formaliza em nosso universo a questão sobre o caráter das condições. Se toda condição do conjunto P pertence a algum filtro genérico, então estabelecemos uma relatividade da veracidade de uma dada condição. Em princípio isto

[1] Corretude aqui não é usada em sentido técnico, mas em sentido geral.

nos coloca diante de uma questão produtiva acerca do universo da teoria de conjuntos uma vez que os filtro que usamos na construção de modelos para ZFC podem divergir quanto à escolha de condições corretas.

Agora introduziremos uma *Linguagem de forcing* para o trato das relações entre M e N. Daqui em diante $N = M[G]$ que é o modelo resultante de adicionarmos G a M. Em outras palavras, $M[G]$ é o modelo transitivo enumerável que inclui M e contém G. Os símbolos da linguagem de forcing são os símbolos de ZFC e os elementos de M. Os elementos $a \in M$ são tomados como constantes que designam elementos $\overline{a} \in M[G]$. Dizemos que uma condição p força ϕ e escrevemos $p \Vdash \phi$, se $\vdash_G \phi$ para todo G que é $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Definimos a noção geral de forçamento da seguinte forma:

(a) $p \Vdash a \in b$ se $\exists c(\exists q \geq p)(< c, q >\in b$ e $p \Vdash a = c)$;

(b) $p \Vdash a \neq b$ se $\exists c(\exists q \geq p)(< c, q >\in a$ e $p \Vdash c \notin b)$ ou $\exists c(\exists q \geq p)(< c, q >\in b$ e $p \Vdash c \notin a)$;

(c) $p \Vdash \neg\phi$ se $(\forall q \leq p)\neg(q \Vdash \phi)$;

(d) $p \Vdash \phi \vee \psi$ se $p \Vdash \phi$ ou $p \Vdash \psi$;

(e) $p \Vdash \exists x\phi(x)$ se $\exists b(p \Vdash \phi(b))$;

Os casos atômicos da relação de forcing envolvem uma circularidade aparente que herdamos ao adotar as definições oferecidas por Shoenfield[2]. Felizmente esta circularidade pode ser contornada por redefinir os casos atômicos pela produção de um decaimento no ranking dos conjuntos que denotam as condições. A ideia principal, como elucidada por Shoenfield, é definir $p \Vdash a \neq b$ em termos de $p' \Vdash a' \neq b'$ e $p' \Vdash b' \neq a'$ para os quais $rk(a') < rk(a)$ e analogamente para b e b'. Daí basta fazer uma definição indutiva escolhendo apropriadamente uma cota superior entre $rk(a)$ e $rk(b)$. Daí basta usar a negação (c) para definir a igualdade e negação do pertencimento e, por fim, (a) para definir o pertencimento.

Definição. Uma *classe* em M é um conjunto $[a : a \in M$ e $\phi(a)^M]$ onde $\phi(x)$ contém apenas simbolos da linguagem de ZFC e simbolos para conjuntos em M.

Lema da Definibilidade. Se $\phi(x_1, ..., x_n)$ é uma fórmula de ZFC contendo apenas $x_1, ..., x_n$ como variáveis livres, então $[\{p, a_1, ..., a_n\} : p \Vdash \phi(a_1, ...a_n)]$ é uma classe em M.

[2] No forcing ramificado, tal como proposto por Cohen, não há o problema da circularidade. A vantagem da definição dada por Shoenfield é que ela pode ser feita de maneira direta. cf. COHEN, 1963.

Prova. Por indução na complexidade da fórmula. Suponha que $\phi(x_1, x_2)$ seja da forma $x_1 \in x_2$. Se restringirmos o domínio das variáveis da fórmula a elementos do modelo M, então $p \Vdash a_1 \in a_2$ se, e somente se, $\exists c(\exists q \geq p)(< c, q >\in a_2$ e $p \Vdash a_1 = c)$. Mas, pela definição de uma classe em M, esta fórmula designa uma classe em M. Agora suponha que $\phi(x_1, x_2)$ é da forma $x_1 = x_2$. Daí $p \Vdash a \neq b$ se, e somente se, $\exists c(\exists q \geq p)(< c, q >\in a$ e $p \Vdash c \notin b)$ ou $\exists c(\exists q \geq p)(< c, q >\in b$ e $p \Vdash c \notin a)$. Assim encerramos o passo base da prova. Façamos agora os casos para o passo indutivo. Uma vez que os conectivos são interdefiníveis entre si, provaremos apenas os casos para negação, disjunção e quantificador existencial.

Seja $\phi(x)$ uma negação. Então $p \Vdash \neg\psi$ se, e somente se, $\forall q \geq p(q \nVdash \psi)$. Por hipótese de indução, temos que $\neg(q \Vdash \psi)$ é o caso, logo $p \Vdash \neg\psi$. Agora para a disjunção temos que $p \Vdash \psi \vee \gamma$ se, e somente se, $p \Vdash \psi$ ou $p \Vdash \gamma$. Mas, por hipótese de indução, temos que $p \Vdash \psi$ é o caso e analogamente para $p \Vdash \gamma$. Finalmente, $p \Vdash \exists(x)\psi$ se, e somente se, $\exists c(p \Vdash \psi(c))$. Mas, pela definição de classe em M, esta fórmula designa uma classe em M.

Lema da Extensão. Se $p \Vdash \phi$ e $q \leq p$, então $q \Vdash \phi$.

Prova. Suponhamos que $p \Vdash \phi$ e $q \nVdash \phi$. Como a condição $q \leq p$ é uma condição qualquer, então temos, pela definição (c) de forçamento, que $p \Vdash \neg\phi$. O que contradiz nossa hipótese.

Lema da Verdade. Se G é genérico, então $\vdash_G \phi$ se, e somente se, $(\exists p \in G)(p \Vdash \phi)$.

A prova para o Lema da Verdade é mais longa que as dos outros lemas e, caso fosse dada aqui, seria reproduzida exatamente como foi feita no artigo (Shoenfiel, 1971). Portanto, para quem tenha interesse em ver a prova, basta consultá-la no próprio texto de Shoenfield.

Todos estes resultados que foram elencados nessa seção são entendidos, em nosso contexto, como resultados que dizem respeito puramente ao forcing, mesmo que as entidades usadas sejam todas interpretadas no universo de ZFC. Existe ainda uma série de lemas que poderiam ser enunciados como fundamentais os quais, todavia, não serão enunciados aqui como é o caso do *Teorema Principal* cuja prova envolve ainda alguns outros lemas. Estes resultados podem ser encontrados tanto no artigo mencionado acima quanto em outros manuais listados na bibliografia deste trabalho[3]. Estes lemas foram escolhidos por darem uma visão generalizante da noção de forcing que julgamos ser suficiente para este trabalho introdutório pois não entram

[3] cf. KUNEN, 1980 ou JECH, 2002.

em detalhes técnicos mais específicos da aplicação da ferramenta de forcing para lidar com o problema da Hipótese do Contínuo. Como o intuito deste trabalho não é reconstruir simplesmente a ideia original de forcing e sim entende-la como uma ferramenta técnica para lidar com questões um pouco mais gerais de forçamento, pensamos que estes resultados dão uma ideia justa, mesmo que possa não ser suficiente, do caráter fundamental da técnica.

O Lema da Definibilidade e o Lema da Verdade são duas pistas valiosas para a ideia de forcing como uma ferramenta geral. Se conseguirmos abstrair — em sentido positivo — seu caráter essencial, estes dois lemas nos mostram características fundamentais da pragmática envolvida na funcionalidade da técnica. Em poucas palavras, estes lemas são importantes pois evidenciam características essenciais da existência do forcing enquanto relação e, além disso, sobre como essa noção exerce sua influência prática sobre as questões de forçamento.

O Lema da Definiblidade estabelece o cerne do aparato de controle operado pela ferramenta do forcing na medida em que evidencia o fato de a relação estar previamente definida no modelo de partida. Esta concepção é valiosa pois a ideia mais importante envolvida nesta ferramenta é justamente a capacidade de controlar as validades na expansão a partir do modelo original. Esta ideia é revolucionária e tem lugar central em toda a construção das extensões genéricas a partir da relação de forçamento. Ainda neste mesmo sentido podemos entender a importância do Lema da Verdade, pois, se o primeiro lema traduz em técnica uma realização do objeto equivalente à ideia do aparato de controle, o segundo lema realiza a prática de forçamento a partir deste aparato, ou seja, vale na expansão aquilo que é forçado pelo controle do modelo de origem.

Estas observações a respeito dos dois lemas citados no parágrafo anterior nos indicam que, mesmo entre os resultados considerados fundamentais para a ideia do forcing, podemos destilar algo que é ainda mais fundamental. Neste sentido nossa ideia se conecta com aquilo que já havia sido percebido por Freire em sua abordagem axiomática da ideia de forcing (Freire, 2020). A despeito dos outros resultados obtidos no trabalho que recuperam pela via axiomática as ideias centrais da literatura usual construtiva do forcing, o que há de mais pedagógico é a notória ênfase no que vem a ser intitulado, no próprio artigo, como a *Dualidade Fundamental* enunciada como se segue:

(*) $$M \vDash p \Vdash \phi \iff \forall G \ni p; M[G] \vDash \phi$$

(**) $$M[G] \vDash \phi \iff \exists p \in G; M \vDash p \Vdash \phi$$

Estas sentenças expressam, evidentemente, as ideias dos dois lemas que destacamos anteriormente. O ganho de intuição que se tem com a Dualidade Fundamental é justamente a percepção direta do justo privilégio do qual gozam estes dois resultados com relação ao detalhe intuitivo da ideia de forçamento. Além disso, na forma em que foram escritas, as sentenças expressam a sutileza da distinção entre aquilo que vale no modelo de base e aquilo que vale na extensão genérica. Em outras palavras, podemos entender esta relação entre modelos como uma espécie de tensão num ponto específico do universo ocasionada pela existência de uma classe particular num dado modelo — modelo de base — que induz a estrutura de outros modelos em sua "órbita"— as extensões.

4.3 O CONCEITO

Ainda no espírito da axiomatização do forcing surge um tipo de abordagem diferente das demais abordagens feitas usualmente nos manuais. Não somente os conceitos fundamentais são explicitados pela redução de complexidade operada ao abrir mão de uma série de resultados intermediários que acabam por tornar a compreensão da ideia algo realmente dificultoso, mas a realização do conceito se dá de maneira mais direta pela satisfação dos axiomas e de um arcabouço técnico reduzido aos principais resultados. Assim como para uma centena de outros casos, na axiomatização do forcing, o ponto chave é atentar para a realização de um conceito delimitado pelos axiomas ao invés de uma construção paulatina e intrincada de toda a ideia partindo de um contexto onde sua existência não é dada e sim arranjada a partir de um esforço técnico dispendioso que pode ser evitado pela outra via.

A estratégia básica de axiomatixação é extrair o caráter comum que há entre as diferentes abordagens de construção da ideia de forçamento pela explicitação do que viriam a ser os conceitos fundamentais que, numa abordagem técnica, com sorte, traduzem-se num corpo coeso de axiomas realmente expressivos para a ideia a ser contemplada.

Como se poderia notar no enunciado sobre a Dualidade Fundamental, a primeira estratégia levada em conta para a axiomatização foi entender um conceito central que é dado pela soma do forcing e das extensões genéricas. Esse conceito composto é a base por detrás do corpo axiomático e, também, a base para entender o forcing como uma ferramenta que poderia estender este conceito para lidar com extensões genéricas que não dizem respeito, exclusivamente, a modelos de ZFC.

Talvez um empecilho de cunho mais filosófico que prático fosse o fato de que, embora tenhamos a intensão de trabalhar uma ideia geral de forçamento, nossa abordagem fundamental é sempre feita de forma ligada com o universo de ZFC que, mesmo sendo um universo verdadeiramente abrangente, com um escopo indireto de dimensões transfinitárias, parece reduzir nossa proposta a contextos mais ou menos traduzíveis em linguagem conjuntista, como já destacamos anteriormente em outara ocasião e de maneira mais positiva. No entanto, como se sabe atualmente, este não é um problema que se aplica ao universo da matemática, ao menos por enquanto, e, no que se refere a lógicas, isto também não parece um problema real. Sendo estas as principais áreas de interesse da ideia de forcing, a discussão deste quesito pode ser, no mínimo, adiada.

Desta maneira, uma abordagem conceitual robusta parece suficientemente elaborada a partir dos elementos fundamentais elencados na seção anterior. Este conceito esclarece alguns aspectos importantes sobre os conjuntos e suas relações. Mesmo assim, delimitar um conceito não é, muitas vezes, uma tarefa trivial, principalmente para questões de teoria de conjuntos como a do forcing que já possuem, de saída, um aspecto conceitual forte, mesmo que não seja a proposta inicial de elaboração da técnica. Falar sobre os conceitos sem incorrer numa redundância e conseguir trazer algo novo é dificultoso justamente pela complexidade do assunto e seu elevado nível técnico.

Embora hoje seja um resultado padrão da Teoria de Conjuntos, o forcing ainda lida com questões limites dentro da teoria e possui uma abordagem bastante difícil. Tudo o que falamos sobre o conceito de forçamento permanece num campo muito especulativo e traduzir esta abordagem conceitual em uma abordagem técnica ainda é uma realização muito distante para as intenções deste trabalho. Muito da discussão conceitual já foi adiantada pela axiomatização e, ao que parece, ainda há muito a ser feito no que se refere à elaboração de um conceito geral de forcing, embora os avanços sejam reais.

Muito desta dificuldade talvez esteja no fato que destacamos anteriormente sobre o forte caráter conceitual do forcing[4] que é explicito pela forma como a ideia foi elaborada. O que queremos atentar quando dizemos algo do tipo é o fato de que o forcing possui definições muito gerais no que se refere às suas estruturas e objetos fundamentais. Embora saibamos que os objetos são sempre conjuntos mais ou menos diferenciados pelos tipos de objetos que precisamos criar,

[4] Embora Cohen não seja um pensador profundamente conceitual - e já destacamos isto anteriormente - o próprio trabalho com questões de lógica, e particularmente na Teoria de Conjuntos, envolve, por si mesmo, um caráter conceitual intrínseco. Se por um lado destacamos que tanto Cohen quanto Gödel não tenham feito um trabalho declaradamente filosófico, as questões que ambos propuseram têm caráter conceitual filosófico naturalmente envolvido.

os conceitos de condições, por exemplo, que são matérias-primas para a noção de forçamento, têm um caráter bastante genérico que, embora seja desejável para os fins de aplicação técnica, podem causar um embaraço ao tentar apreender conceitualmente de forma precisa o objeto que estamos procurando delimitar.

O ponto nevrálgico, no entanto, da ideia de forcing é noção de controle que está envolvida na relação entre o modelo de base e aquele que será construído a partir dele. Os objetos que serão adicionados posteriormente na extensão do modelo inicial precisam responder a uma demanda específica que é definida ainda no modelo inicial. A verdadeira genialidade da ideia de Cohen é, não apenas o discernimento oportuno da intuição especulativa, mas também conseguir realizar esta ideia com o devido trato técnico que o problema exige.

Fato é que ao concretizar tal elaboração técnica, Cohen nos abre uma gama de novas possibilidades assim como propõe novas interpretações para a própria ideia de conjunto. Se por um lado queremos tratar a ideia de forcing como uma ferramenta geral cuja aplicação não se restringe a modelos de ZFC, por outro lado ela evidencia questões sobre a dinâmica estrutural e ontológica das ideias envolvidas no universo desta teoria. Realizações técnicas como as de Cantor, Gödel e Cohen nos apresentam de forma técnica espécies de realizações do universo da Teoria de Conjuntos. Ao oferecerem um trato técnico da problemáticas acabam por desvendar — ou criar — um pedaço específico do universo que estamos lidando, mesmo que a verdadeira motivação não seja ontológica, estas elaborações possuem um caráter profundamente filosófico neste sentido.

A bem da verdade, vemos o forcing como um conceito geral parcialmente abstraído de seu contexto inicial. Essencialmente a ideia de Cohen, mesmo quando abstraída e aplicada a outros contextos, parece induzir que o quadro seja levado imediatamente aos limites da estrutura, ela parece construir um simulacro especulativo de extensão do aparato preexistente para lidar com problemas que estão para além de seu limite natural. Embora nossa definição não seja precisa a respeito do funcionamento prático da técnica - aparentemente mais palpável - o trabalho conceitual por detrás da prática é realmente complexo e de difícil descrição.

Se fossemos capazes de traduzir o esforço da técnica em uma descrição informal de seu funcionamento, procuraríamos dizer a seu respeito que ela induz criativamente um contexto de condições controladas especificamente determinadas para lidar com um fenômeno bem delimitado, uma espécie de laboratório conceitual e técnico que cria o ambiente "ideal"de causas para estudar tipos particulares de efeitos. Não queremos dizer que este seja o único tipo de aplicação para a ideia de forçamento, mas, a bem da verdade, este é o espírito inicial intuitivo que motivou a sua criação e que dita o rumo das aplicações mais seguras e em consonância com a ideia conceitual inicial do forcing.

5 CONCLUSÃO

Algo já foi dito sobre a técnica de forcing neste trabalho e, sobretudo, sobre as ideias fundamentais que estão no corpo da ideia principal. Aplicações desta técnica são conhecidas em contextos tanto da Matemática quanto da Lógica. Mesmo que tenha sido desenvolvida num corpo teórico particular, que foi aquele discutido durante o nosso trabalho, a técnica se estendeu a vários campos e pôde ser empregada na solução e investigação de vários contextos muito diferentes daquele para o qual ela foi criada.

As aplicações da técnica de forcing podem ser usadas em estudos lógicos sobre conjuntos aritméticos ou mesmo para questões de teoria da prova. Acreditamos, além disso, que este escopo de aplicação possa ser estendido ainda mais, dados os interesses filosóficos e técnicos do forcing. Esta técnica nos permite estabelecer um novo tipo de relação extremamente interessante por envolver um caráter expansionista muito peculiar na medida em que nos permite tratar problemas de projeção partindo de entidades de base para a construção induzida de outras entidades que, embora mantenham a estrutura fundamental conceitual das anteriores, adicionam novos objetos à ontologia precedente.

Talvez não pareça realmente inovador que possamos adicionar objetos à "ontologia de base"ou mesmo que haja uma extensão de universos se tratarmos a questão sob um ponto de vista desligado de tudo que foi dito e demonstrado sobre o forcing. O verdadeiro avanço que dá o tom da originalidade da técnica é o fato de existir um aparato claro e bem definido de controle geral que é realizado pela relação de forçamento. Como observado no comentário sobre a Dualidade Fundamental, o que há de mais interessante é o fato de que a expansão seja controlada a partir do modelo de base - no caso da aplicação para modelos - de forma expressa tecnicamente e não apenas de maneira subjacente ou especulativa. Os lemas fundamentais do forcing evidenciam e formalizam toda a dinâmica de forçamento exercida nas estruturas usadas.

O que pode ser uma pista valiosa para a proliferação de aplicações da ideia de forcing é o fato de que esta ferramenta suporta o transito entre campos diferentes bastando, para isso, que se mudem as estruturas conceituais preservndo uma metateoria conjuntista. Nossa intuição diz que a ferramenta de forcing pode ser muito útil para trabalhos posteriores em lógica universal ou mesmo para trabalhos menos gerais de relações entre lógicas específicas.

Um esforço apropriado na direção da realização de um bom trabalho no que se refere ao forcing no contexto da teoria da prova que revelaria questões técnicas mais profundas referentes às pontes entre a relação de forçamento e a relação de prova poderia esclarecer aplicações desta técnica para relações entre lógicas no espírito da lógica universal. Esta é uma das aplicações de particular interesse que motivaram o estudo da técnica de forcing como uma ferramenta e que esperamos poder desenvolver posteriormente.

A técnica de forcing ainda pode proporcionar ocasiões de aplicações diversas dentro do universo do pensamento formal contemporâneo. A tendência expansionista de criar, cada vez mais, teorias com poder de abrangência partindo de adições específicas a universos preexistentes é mais real do que nunca. Adições estão sendo operadas todo o tempo e o esforço de expandir o universo e o escopo de teorias é o que tem ditado o ritmo dos sistemas formais em geral, bem como de grande parte das áreas do pensamento. Neste contexto, a ideia de forçamento não só é oportuna como já mostrou parte de seu potencial para lidar com problemas que demandam formas de expansão do universo da teoria em questão.

O esforço de pensar o forcing como uma ferramenta se dirige a abstrair dos contextos particulares e aplicação e procurar as estruturas e ideias fundamentais que operam as expansões com vistas a tornar concreta uma ideia generalizada de expansão que seja operada por intermédio de formas de controle a partir dos "interesses"das estruturas precedentes. É como se estivéssemos lidando com objetos híbridos que misturam possibilidade e atualidade com uma roupagem técnica mais bem definida.

Além da utilidade do forning para lidar com questões diretas de problemas independentes e expansões controladas, o advento desta técnica nos proporcionou um novo entendimento sobre características dos conjuntos pouco enfatizadas anteriormente. Embora seja dado de maneira bastante abstrata, uma das intuições mais oportunas desta ideia está no fato de tornar claro que conjuntos carregam informações. Se em lógica há um certo entendimento sobre conjuntos terem este tipo de comportamento, em Teoria de Conjuntos esta observação não é nada trivial.

Conjuntos de fórmulas são conjuntos cujos objetos são ligeiramente diferentes daqueles com os quais estamos acostumados a lidar na Teoria de Conjuntos usada em contexto matemático. Evidentemente que pensar em conjuntos de fórmulas aumenta nossa intuição acerca do rastro das informações que os conjuntos podem portar. Por outro lado, para conjuntos de números, este fato permanece velado caso não seja notado por um olhar crítico com relação às estruturas do universo dos números. Em geral, as "entidades"que parecem ter um cunho informativo mais direto são as funções que, notoriamente, são as grandes responsáveis por evidenciar relações entre diferentes objetos da teoria.

Já no contexto do forcing temos a adição de um tipo específico de objetos cuja principal função é portar um tipo de informação. As condições de forçamento são tipos de conjuntos cuja função se traduz pela relação de forçamento que, basicamente, pode ser interpretada como a influência de um trecho de código específico que expressa os fundamentos de um recorte do universo sobre a construção de novos objetos totalmente relacionados com o antigo universo via os códigos de controle. Assim, embora os ingredientes todos estejam no universo de controle, os arranjos não podem ser todos concretizados.

Além disso, notamos que podem existir muitos objetos no universo que não passam de uma espécie de simulacro, digamos, "ideal". A existência de simulacros espalhados pela ontologia do universo são, também, uma espécie de álibi para gradações de proximidade com o objeto ideal na medida em que estes simulacros podem ser construídos de acordo com certas conveniências. Uma mesma teoria passa a aceitar tipos diferentes de realizações como nos casos das realizações tanto de Gödel, quanto de Cohen que diferem significativamente em alguns casos para um mesmo objeto.

Estes tipos de elaborações com problemas limites da Teoria de Conjuntos não apenas oferecem formas variadas de lidar com problemas diversos, mas também acabam por fomentar um ganho de intuição sobre os tipos de objetos que estamos lidando. Como no exemplo dos simulacros, que de certa forma já é um dado implicado pela existência de modelos enumeráveis do universo dos conjuntos, a ontologia é povoada por novos tipos de entidades e construções cada vez mais diferentes e, muitas vezes, pouco intuitivas que, portanto, não seriam desveladas por investigações que se desenvolvessem num contexto mais interiorano da questão.

BIBLIOGRAFIA

COHEN, P. J. The Independence Of The Continuum Hypothesis: . vol 50. p. 1143-1148. Stanford University. Califórnia: 1963.

FREIRE, R. An axiomatic approach to forcing and generic extensions. **Comptes Rendus**. Vol 358. p. 757-775 (2020). Academie des Sciences. Paris: 2020.
Disponível em: <https://doi.org/10.5802/crmath.97>.

GODEL, Kurt. The Consistency of The Axiom of Choice and Generalized Continuum Hypotesis With The Axioms of Set Theory. Nova Jérsei: Princeton Universtiyt Press. 1940.

JECH, Thomas. Set Theory: Pure and applied mathematics, a serie of monographs and textbooks. II series. New York: ACADEMIC PRESS, 1978. 622 p.

JECH, Thomas J. Set theory: 3rd Millennium ed, rev. and expanded. - Berlin ; Heidelberg ; New York ; Hong Kong ; London ; Milan ; Paris ; Tokyo : Springer, 2002. 771 p.

KUNEN, K. Set Theory: An introduction to independence proofs: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. vol. 102. North-Holand: 1980.

KANT, Immanuel. Crítica da Razão Pura. 4. ed. Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: Editora Universitária São Francisco, 2015.

MOORE, G. H. The Origins of Forcing. Logic Colloquium 86. F.R Drake and J. K Truss. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holand: 1988.

SHOENFIELD. J. R. Unramified forcing. In Axiomatic Set Theory. **Proc. Sympos. Pure Math.**, Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), pages 357–381. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.