



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**ESCOAMENTO DE UMA CASCATA UNIFORME  
EM UMA PAREDE INCLINADA**

**Rafaela Moreira Borges**

**Brasília, Maio de 2021**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**ESCOAMENTO DE UMA CASCATA UNIFORME  
EM UMA PAREDE INCLINADA**

**Rafaela Moreira Borges**

*Projeto de Graduação 2 submetido ao Departamento de Engenharia  
Mecânica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenharia Mecânica*

Banca Examinadora

Prof. André von Borries Lopes, FT/UnB

*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. José Luíz Alvez da Fontoura Rodrigues,

FT/UnB

*Examinador Interno*

\_\_\_\_\_

Prof. Yuri Dumaresq Sobral, MAT/UnB

*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

Ivan Rosa de Siqueira, Rice University

*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

## **Dedicatória**

*Dedico este trabalho a todo estudante a quem este projeto possa ser útil e interessante.  
Somos todos capazes!*

*Rafaela Moreira Borges*

## **Agradecimentos**

*Primeiramente, agradeço a Deus por me dar forças para vencer as dificuldades que surgem e, principalmente, por me conceder o privilégio de ter tantas pessoas extraordinárias ao meu lado.*

*Agradeço, também, ao meu pai e ao meu irmão por todo o apoio e momentos de descontração proporcionados. Agradeço à minha mãe por todo seu esforço ao longo desses anos, pelo seu exemplo de vida, pela sua paciência e cuidado. Devo a ela meus importantes aprendizados sobre a vida, superação e resiliência.*

*Além disso, gostaria de agradecer à Universidade de Brasília pelas diversas oportunidades que me foram propiciadas, pelo conhecimento adquirido e por me fazer crescer tanto enquanto indivíduo. Agradeço ao Professor André Lopes – sem o qual este trabalho não teria sido possível – por toda a atenção dada, pela paciência e disponibilidade e, principalmente, pelo incrível laço de amizade criado.*

*Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu namorado Gustavo pela participação fundamental neste trabalho, por ser meu melhor amigo em tantos momentos difíceis, por me apoiar e questionar quando necessário, pelo carinho incondicional e por me fazer melhor a cada dia.*

*Rafaela Moreira Borges*

---

## RESUMO

Neste trabalho, é estudado o escoamento descendente permanente de uma cascata de fluido newtoniano incompressível de alta molhabilidade em um plano inclinado. Este problema tem sido bastante estudado devido à grande quantidade de aplicações em que se pode observá-lo. Na maioria dos trabalhos encontrados na literatura é utilizada a teoria da lubrificação para se obter um modelo reduzido para o problema. No decorrer deste estudo será mostrado que o modelo amplamente utilizado não é o mais apropriado para a solução do escoamento em uma parede vertical. Além disso, será desenvolvido um novo modelo reduzido com um parâmetro de perturbação adequado para o plano vertical e será avaliado, ainda, o efeito da conservação da curvatura da superfície livre na análise por lubrificação. É mostrado que este novo modelo amplia consideravelmente o intervalo de aplicação da análise por lubrificação. Para verificar esta afirmação, foi resolvido o problema completo por meio do método das diferenças finitas. Considerando os resultados satisfatórios obtidos para o plano vertical, decidiu-se estender os modelos reduzidos desenvolvidos para o plano inclinado. Comparando os modelos apresentados com a solução completa fornecida por Matias (2021), torna-se evidente que ora conservar a razão de aspecto do escoamento ora incorporar a expressão exata do formato da superfície livre nos modelos reduzidos aumenta consideravelmente o intervalo de aplicação da teoria de lubrificação.

---

## ABSTRACT

In this work, the steady flow of a rivulet of incompressible Newtonian fluid with high wettability down a inclined plane is studied. This problem has been extensively studied due to the large number of applications in which it can be observed. In most works found in the literature, the lubrication approximation is used to obtain a reduced model. Throughout this study it will be shown that the widely used model is not the most appropriate for the solution of the flow on a vertical plane. In addition, a new reduced model will be developed with an appropriate perturbation parameter for the vertical case and the effect of conserving the curvature of the free surface in the analysis by lubrication will also be evaluated. It is shown that this new model considerably extends the application range of the lubrication analysis. To verify this statement, the full problem was solved using the finite difference method. Considering the satisfactory results obtained for the vertical plane, the reduced models developed are extended to the inclined plane. Comparing the models presented with the complete solution provided by Matias (2021), it is evident that conserving the flow aspect ratio and incorporating the exact expression of the free surface shape in the reduced models considerably increases the application range of the lubrication theory.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>7</b>
2.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO	8
2.1.1	CONDIÇÃO DE NÃO DESLIZAMENTO	10
2.1.2	CONDIÇÃO CINEMÁTICA	10
2.1.3	CONDIÇÃO DINÂMICA	10
2.2	EQUAÇÃO DA PRESSÃO	11
2.3	CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS	12
2.4	PERFIL DA SUPERFÍCIE LIVRE	12
2.5	CAMPO DE VELOCIDADE	17
2.6	FLUXO	17
2.7	FORMULAÇÃO PARA O PLANO VERTICAL	18
<b>3</b>	<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA A PAREDE VERTICAL</b>	<b>21</b>
3.1	MUDANÇA DE COORDENADAS	22
3.1.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES NO NOVO DOMÍNIO	24
3.2	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	25
3.2.1	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE	26
3.2.2	DISCRETIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	27
3.3	SISTEMA LINEAR	28
3.3.1	MATRIZ DOS COEFICIENTES	29
3.3.2	MATRIZ DAS VARIÁVEIS	33
3.3.3	MATRIZ DOS TERMOS INDEPENDENTES	33
3.4	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	34
3.5	IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO	37
<b>4</b>	<b>TEORIA DA LUBRIFICAÇÃO</b>	<b>39</b>
4.1	PAREDE VERTICAL	39
4.1.1	CONSERVANDO A RAZÃO DE ASPECTO	41
4.1.2	MODELO COMUM NA LITERATURA	43
4.1.3	CONSERVANDO A CURVATURA DA SUPERFÍCIE LIVRE	44
4.2	PAREDE INCLINADA	44
4.2.1	CONSERVANDO A RAZÃO DE ASPECTO	46
4.2.2	CONSERVANDO A CURVATURA DA SUPERFÍCIE LIVRE	47
<b>5</b>	<b>ANÁLISE PARA A PAREDE VERTICAL</b>	<b>48</b>

<b>6</b>	<b>ANÁLISE PARA A PAREDE INCLINADA.....</b>	<b>53</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>62</b>
	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>64</b>
<b>I</b>	<b>CONDIÇÃO DINÂMICA.....</b>	<b>65</b>
I.1	FORMA ALTERNATIVA DO TEOREMA DE STOKES .....	65
I.2	DEDUÇÃO DA CONDIÇÃO DINÂMICA .....	66
<b>II</b>	<b>EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA SUPERFÍCIE LIVRE .....</b>	<b>72</b>
<b>III</b>	<b>CURVATURA DA CIRCUNFERÊNCIA.....</b>	<b>75</b>
III.1	CURVATURA DA RETA .....	76
III.2	CURVATURA CONSTANTE .....	76
<b>IV</b>	<b>SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA PAREDE VERTICAL COM ÂNGULO DE CONTATO DE 90°.....</b>	<b>79</b>
IV.1	COORDENADAS POLARES .....	80
IV.2	SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS .....	81
IV.3	SOLUÇÃO PARA A VELOCIDADE .....	84
IV.4	SOLUÇÃO PARA O FLUXO .....	86
<b>V</b>	<b>INTEGRAL DO FLUXO PARA O CASO VERTICAL CONSERVANDO A CURVATURA ...</b>	<b>89</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Experimento realizado por Huppert (1982). .....	1
1.2	Experimento realizado por Ribatski e Jacobi (2005). .....	2
1.3	Formulação do problema de Wilson e Duffy (2003). .....	4
1.4	Experimento realizado por Alekseenko et al. (2010). .....	5
2.1	Esquema do escoamento de uma cascata sobre um plano inclinado. ....	7
2.2	Sistema de coordenadas utilizado para descrever a superfície livre. ....	13
2.3	Exemplos de perfis para diferentes ângulos de contato e valores de $\lambda$ . ....	17
2.4	Arco de circunferência que constitui a superfície livre. ....	19
3.1	Esquema dos domínios físico (à esquerda) e computacional (à direita). ....	23
3.2	Porção da malha construída para solução numérica. ....	25
3.3	Estêncil da discretização da equação governante. ....	27
3.4	Posição dos blocos de coeficientes na matriz $\mathbf{K}$ . ....	32
3.5	Erro relativo do fluxo em função do número de elementos da malha. ....	37
3.6	Campo de velocidade obtido para $\beta = 90^\circ$ . ....	38
5.1	Área do perfil em função do ângulo de contato para a parede vertical. ....	48
5.2	Fluxo em função do ângulo de contato para a parede vertical. ....	49
5.3	Velocidade máxima em função do ângulo de contato para a parede vertical. ....	50
5.4	Campo de velocidade normalizado para $\beta = 30^\circ$ . ....	51
5.5	Campo de velocidade normalizado para $\beta = 90^\circ$ . ....	51
6.1	Exemplos de perfis e área do perfil em função do ângulo de contato para $\lambda = 0, 9$ . .	53
6.2	Exemplos de perfis e área do perfil em função do ângulo de contato para $\lambda = 0, 5$ . .	54
6.3	Exemplos de perfis e área do perfil em função do ângulo de contato para $\lambda = 0, 1$ . .	55
6.4	Erros (a) absoluto e (b) relativo do modelo Razão de Aspecto para a área do perfil. .	55
6.5	Fluxo em função do ângulo de contato para diferentes $\lambda$ . ....	56
6.6	Erro relativo em função do ângulo de contato para diferentes valores de $\lambda$ . ....	57
6.7	Fluxo dos modelos para parede inclinada no limite vertical. ....	57
6.8	Velocidade máxima em função do ângulo de contato para diferentes $\lambda$ . ....	58
6.9	Campo de velocidade normalizado para $\lambda = 0, 1$ . ....	59
6.10	Campo de velocidade normalizado para $\lambda = 0, 9$ . ....	59
I.1	Esquema de uma superfície $S$ delimitada por uma curva fechada $C$ em uma de interface entre dois fluidos. ....	67
I.2	Esquema do volume de controle $V$ . ....	68
III.1	Curvatura em uma curva plana. ....	75



# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$g$	Aceleração da gravidade
$h$	Superfície livre
$\mathbf{n}$	Vetor normal
$p$	Pressão
$p_0$	Pressão atmosférica
$Q$	Fluxo
$q$	Fluxo adimensional
$t$	Tempo
$u$	Componente em $x$ da velocidade
$v$	Componente em $y$ da velocidade
$w$	Componente em $z$ da velocidade

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Ângulo de inclinação da parede
$\beta$	Ângulo de contato
$\epsilon$	Parâmetro de perturbação
$\kappa$	Curvatura da superfície livre
$\delta$	Erro relativo
$\Delta$	Varição; Erro absoluto
$\rho$	Massa específica
$\mu$	Viscosidade
$\tau$	Tensor de tensões viscosas
$\gamma$	Tensão superficial

## Sobrescritos

$\hat{\phantom{x}}$	Variável adimensional
---------------------	-----------------------

## Subscritos

$\max$	Máximo
--------	--------

# 1 INTRODUÇÃO

O escoamento descendente de um filme líquido em regime laminar sobre uma superfície inclinada tende a se separar em faixas. Cada uma dessas faixas é delimitada longitudinalmente por duas linhas de contato e é tipicamente denominada como cascata. A Fig. 1.1 mostra um experimento conduzido por Huppert (1982), no qual é possível visualizar a formação destas faixas. Assim, o escoamento de uma cascata é o escoamento de uma faixa delgada de líquido sobre um substrato de inclinação não nula.

Este fenômeno é recorrente em diversos cenários físicos e diferentes escalas, se estendendo desde a microfluídica até eventos geofísicos. Observa-se este tipo de escoamento em inúmeros processos industriais tais como na indústria de revestimento (Frayssé e Homsy, 1994) e em dispositivos de transferência de calor. Dependendo da indústria, este fenômeno pode tanto fazer parte da operação normal quanto ser um evento indesejável, o que motiva a busca pelo entendimento deste processo. A Fig. 1.2 mostra fotos do experimento de Ribatski e Jacobi (2005) em um estudo sobre transferência de calor em um dispositivo tubular. O escoamento em cascata sobre superfícies planas é muitas vezes utilizado para aproximar o escoamento de cascatas entre estes tubos circulares. Na natureza, o escoamento em cascata pode ser visto no escoamento de lava e no derretimento de geleiras (Balmforth, Craster e Sassi, 2002) e, no cotidiano, é possível verificar a ocorrência deste fenômeno na chuva descendo por uma janela e em uma calda escorrendo em um bolo por exemplo.

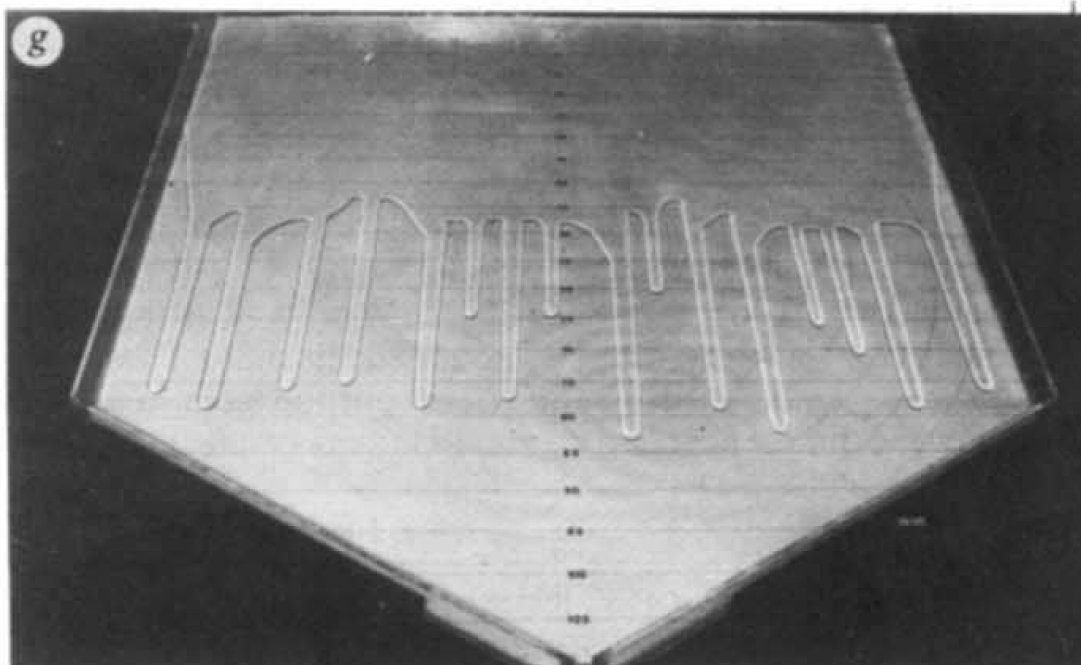


Figura 1.1: Experimento realizado por Huppert (1982).

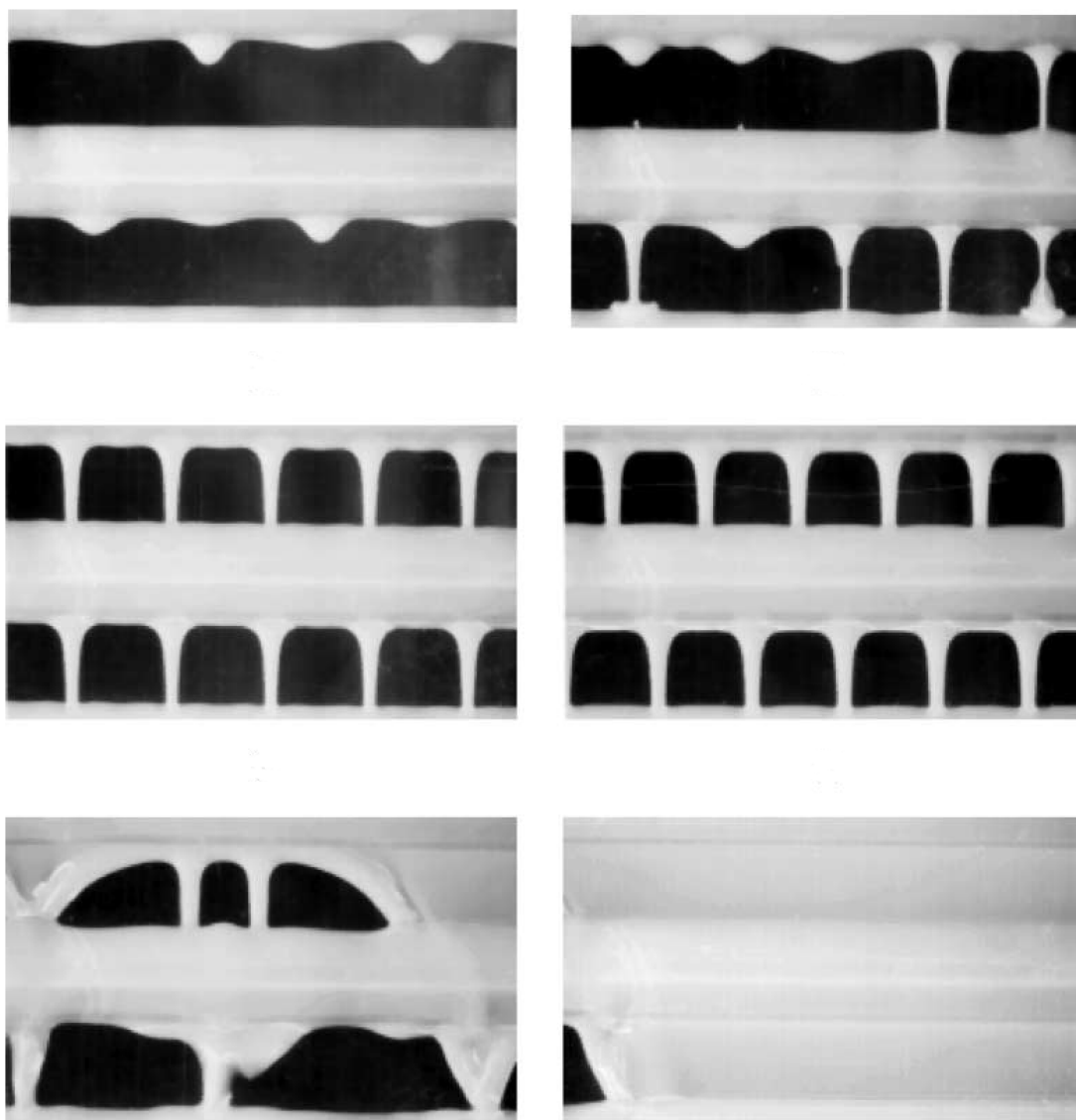


Figura 1.2: Experimento realizado por Ribatski e Jacobi (2005).

O trabalho pioneiro neste tema foi conduzido por Towell e Rothfeld (1966). Neste trabalho, foi realizado um estudo teórico e experimental sobre o escoamento unidirecional e permanente de um fluido newtoniano sobre um plano inclinado. Towell e Rothfeld (1966) utilizaram a teoria da lubrificação para obter um modelo reduzido que satisfaz o problema a baixos ângulos de contato. Os resultados teóricos foram verificados a partir de vários experimentos com diferentes líquidos e valores de fluxo. A metodologia experimental consiste essencialmente em medir a largura da cascata como uma função do fluxo e o ângulo de contato com o substrato por meio de uma técnica óptica. O desenvolvimento experimental mostrou, ainda, que, para valores de fluxo suficientemente altos, surgem ondulações na superfície livre do escoamento.

Por sua vez, Allen e Biggin (1974) utilizaram expansões em séries para superar a não linearidade do problema e obtiveram uma solução numérica exata por meio do método dos elementos finitos. As soluções de ordem dominante obtidas por Towell e Rothfeld (1966) e as soluções

de primeira ordem desenvolvidas foram comparadas com o resultado numérico exato, revelando que as soluções de primeira ordem se adéquam um pouco melhor ao problema. Allen e Biggin (1974) mostraram, ainda, que os modelos reduzidos tendem a se desviar do comportamento real à medida que se aproximam da superfície livre, o que ocorre devido às simplificações impostas nas condições de contorno em tal interface.

Baseados nestes dois trabalhos anteriores, Duffy e Moffatt (1995) realizaram uma análise por lubrificação com um parâmetro de perturbação que, apesar de estar relacionado com a geometria do problema, não corresponde à razão de aspecto do escoamento e, por isso, não é o mais adequado. Assim, foi proposto um modelo reduzido para o problema da cascata em planos inclinados. Em seguida, os autores utilizaram a solução obtida para superfícies planas para aproximar o problema do escoamento de um cascata em uma superfície levemente curvada.

Alguns trabalhos buscaram desenvolver soluções analíticas para o problema do escoamento em cascata em um plano inclinado. Bentwich et al. (1976) obtiveram uma solução analítica para o caso em que o plano é vertical. Esta solução, apesar de não estar limitada a um intervalo de aplicabilidade como aquelas propostas anteriormente, incorpora integrais infinitas que precisam ser avaliadas numericamente. Posteriormente, Perazzo e Gratton (2004), aproveitando-se do fato de a equação para a superfície livre estar desacoplada da equação para o campo de velocidade neste problema, encontraram uma expressão analítica para o perfil da superfície livre do escoamento em cascata em um plano inclinado independente da reologia do fluido. O campo de velocidade, por sua vez, foi obtido numericamente e também através de modelos de lubrificação. O campo de velocidade foi obtido analiticamente para os casos em que a parede é vertical e o ângulo de contato é  $90^\circ$  ou  $180^\circ$  e, especificamente para o ângulo de  $90^\circ$  obteve-se, ainda analiticamente, o fluxo. Ademais, Perazzo e Gratton (2004), apesar de não se aprofundarem na análise por lubrificação, ressaltaram que trabalhos anteriores baseados nesta aproximação apresentam soluções limitadas a baixos ângulos de contato (até  $30^\circ$  aproximadamente).

Particularidades e variações do problema da cascata têm sido massivamente estudadas ao longo dos últimos anos. Holland, Duffy e Wilson (2001) utilizaram a aproximação por lubrificação para avaliar os efeitos de um gradiente de temperatura entre o substrato e a atmosfera em volta do escoamento em cascata. Neste trabalho, foi considerado que a tensão superficial do fluido depende linearmente da temperatura e que a superfície do escoamento é plana ou levemente curvada. Holland, Duffy e Wilson (2001) mostraram, ainda, que tais variações na tensão superficial causam vórtices helicoidais no escoamento. Ainda considerando o gradiente de temperatura citado, Wilson e Duffy (2003) analisaram o escoamento em cascata de um fluido cuja viscosidade depende da temperatura sobre uma superfície plana ou levemente curvada, como esquematizado na Fig. 1.3.

Alguns autores, por sua vez, decidiram considerar alguns efeitos que a fase gasosa externa ao escoamento pode causar. Wilson e Duffy (2005b), por exemplo, utilizaram a aproximação por lubrificação para descrever o escoamento em cascata em um plano vertical no caso em que é aplicada uma tensão de cisalhamento uniforme longitudinal na superfície livre. Por outro lado,

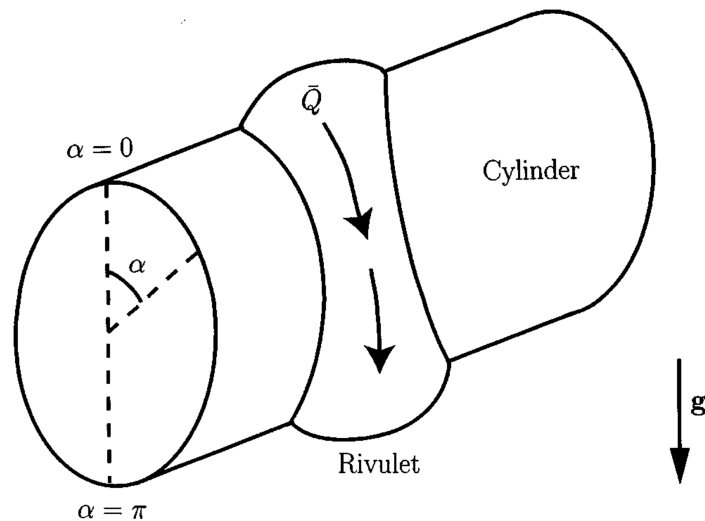


Figura 1.3: Formulação do problema de Wilson e Duffy (2003).

Sullivan et al. (2012) consideraram uma tensão de cisalhamento transversal causada por um escoamento externo prescrito de ar. Em Sullivan, Wilson e Duffy (2008), a condição de tensão na superfície livre foi explorada mas para o caso de uma cascata cujo fluido apresenta molhamento perfeito. Esta característica de molhamento perfeito no escoamento em cascata foi bastante estudada englobando, inclusive, outras particularidades, tais como um substrato levemente curvado (Wilson e Duffy, 2005a) e um gradiente de temperatura entre o substrato e a fase gasosa externa (Duffy e Wilson, 2003).

Outra linha de estudo bastante explorada neste problema é a presença de ondas na superfície da cascata. Towell e Rothfeld (1966), através de seu trabalho experimental, já haviam observado que, para um fluxo suficientemente alto, aparecem ondulações regulares na superfície da cascata que não são previstas pelo desenvolvimento teórico. Estes autores afirmaram que tais ondulações não são um início de turbulência, mas sim uma instabilidade no escoamento laminar. Mais tarde, Fedotkin et al. (1984) ressaltaram que a diferença entre os resultados experimentais e teóricos para o problema da cascata em um plano vertical é a presença de ondas. Neste artigo, observou-se que as ondas na superfície da cascata influenciam mais o ângulo de contato que a largura da cascata. Dentre muitos estudos neste tópico, Alekseenko et al. (2010) investigaram experimentalmente as condições para ondas regulares em cascatas verticais e ressaltaram os diferentes comportamentos das ondulações para baixos e altos ângulos de contato. Informações detalhadas sobre o formato das cascatas com ondas foram obtidas durante os experimentos através do método da fluorescência induzida por laser. As imagens obtidas pelo aparato experimental são processadas por software para posterior análise (Fig. 1.4). Para as condições estudadas, foi observado que a largura da cascata e o ângulo de contato não são sensíveis à propagação das ondas. Posteriormente, Aktershev, Alekseenko e Arkhipov (2016) investigaram teoricamente as ondas na superfície de uma cascata vertical. Além disso, neste estudo foi obtido um sistema de equações para ondas planas no escoamento vertical e foram deduzidas analiticamente relações de dispersão para ondas lineares.

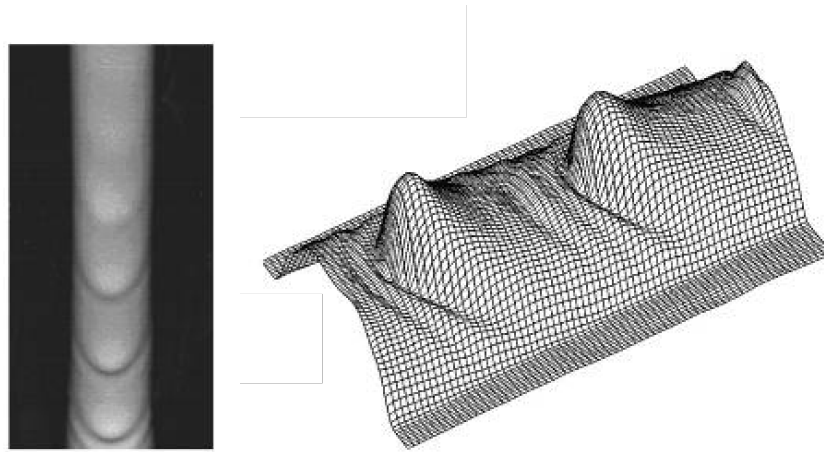


Figura 1.4: Experimento realizado por Alekseenko et al. (2010).

Recentemente, o estudo do escoamento em cascata tem se estendido ao campo dos fluidos não newtonianos. Mukahal, Wilson e Duffy (2015) obtiveram a solução para o escoamento unidirecional de uma cascata sobre um plano inclinado a fim de utilizá-la para desenvolver uma solução do escoamento localmente unidirecional de uma cascata em um substrato levemente curvado considerando um fluido de lei de potência. Foi evidenciado que este escoamento apresenta uma forte dependência do valor do índice da lei de potência do fluido. Além disso, Mukahal, Duffy e Wilson (2018) estudaram o escoamento de uma cascata de fluido newtoniano generalizado sobre um plano vertical. Em especial, este trabalho evidenciou as semelhanças e diferenças entre o comportamento de fluidos de Carreau e de Ellis sujeitos ao escoamento em cascata.

A maioria dos trabalhos citados exploraram o problema através da teoria da lubrificação utilizando um parâmetro de perturbação que limita bastante o intervalo de validade. Assim, neste trabalho, deseja-se desenvolver outros modelos reduzidos que sejam mais apropriados para o problema da cascata uniforme em um plano inclinado. Serão avaliados os efeitos da conservação da razão de aspecto da cascata e da expressão exata do formato da superfície livre na solução reduzida para substratos verticais e inclinados. A fim de avaliar o comportamento dos modelos simplificados para o caso da parede vertical, foi desenvolvida uma rotina computacional que resolve o problema completo numericamente. Para avaliar os demais casos, foi utilizada a solução numérica completa desenvolvida por Matias (2021).

Este trabalho está estruturado em sete capítulos. No capítulo 2 é desenvolvida a formulação matemática do problema, no decorrer da qual serão apresentadas as equações governantes e as condições de contorno. Além disso, ainda no capítulo 2, será determinado o formato exato da superfície livre para a parede vertical e inclinada. A solução numérica para a parede vertical é detalhada no capítulo 3 por meio da completa explicação de como o método das diferenças finitas é aplicado ao problema e do desenvolvimento da equação para se obter o fluxo numericamente. O capítulo 4, por sua vez, apresenta a análise por lubrificação realizada para desenvolver, para a parede vertical, três modelos reduzidos diferentes, um já bem estabelecido na literatura e outros dois alternativos. Neste mesmo capítulo, seguindo as ideias aplicadas ao caso vertical, obtém-se

dois modelos por lubrificação para a parede inclinada. Os capítulos 5 e 6 apresentam a análise de resultados para o caso vertical e o caso inclinado respectivamente. Por fim, no capítulo 7 são salientados os resultados e conclusões relevantes do estudo e, ainda, comenta-se sobre como este trabalho pode ser proveitoso para futuros estudos.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O problema estudado neste trabalho é o escoamento uniforme, bidimensional, unidirecional e em regime permanente de um fluido newtoniano incompressível sobre uma superfície plana inclinada a um ângulo  $\alpha$  em relação à horizontal, tal que  $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$  (Fig. 2.1). A parede é coincidente com o plano  $xy$  e o escoamento ocorre na direção  $x$ . Além disso, o perfil do escoamento, evidenciado no plano  $yz$  da Fig. 2.1, apresenta um ângulo de contato  $\beta$  com a parede e uma aresta de contato de comprimento  $2a$  que corresponde à largura da faixa molhada no substrato devido ao escoamento. Considera-se que o fluido é de alta molhabilidade, isto é,  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ .

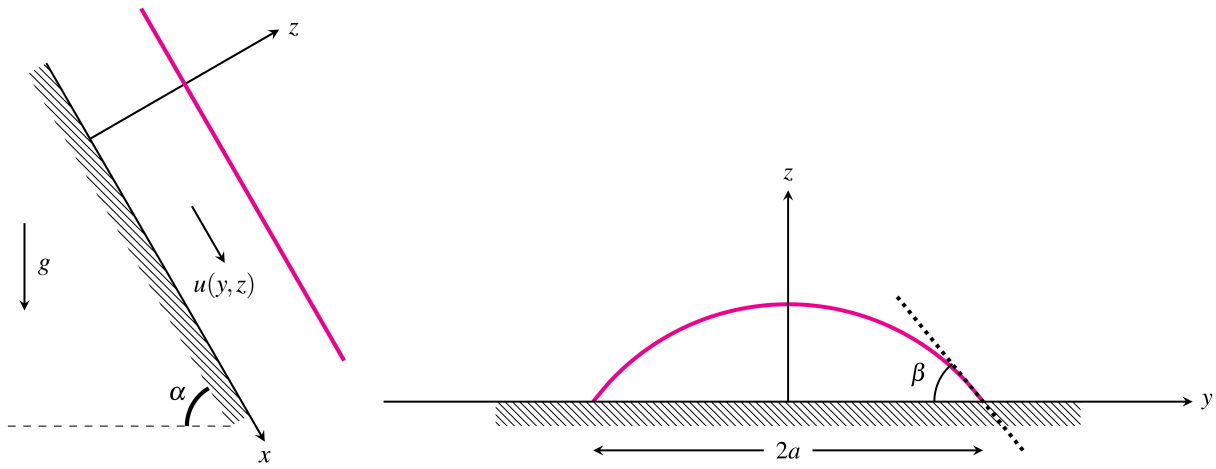


Figura 2.1: Esquema do escoamento de uma cascata sobre um plano inclinado.

As equações que governam este problema são as equações de Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y, \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (2.3)$$

e a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

em que a massa específica  $\rho$  do fluido e a viscosidade  $\mu$  do fluido são constantes,  $p$  é a pressão e  $D/Dt$  é o operador derivada material. Além disso,  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do campo de velocidade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. De forma similar,  $g_x$ ,  $g_y$  e  $g_z$  são as componentes do campo gravitacional nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. Como o escoamento é



bidimensional, unidirecional e permanente, as componentes do campo de velocidade  $\mathbf{u}$  são

$$u = u(y, z), \quad v = 0 \quad \text{e} \quad w = 0.$$

Ademais, as componentes do campo gravitacional são

$$g_x = g \operatorname{sen} \alpha,$$

$$g_y = 0$$

e

$$g_z = -g \operatorname{cos} \alpha$$

em que  $g$  é a própria aceleração da gravidade. Desta forma, as equações governantes se resumem a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g \operatorname{sen} \alpha, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \operatorname{cos} \alpha. \quad (2.7)$$

É válido notar que, devido às características do campo de velocidade, a equação da continuidade (2.4) é automaticamente satisfeita.

## 2.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno deste problema são dadas somente pela condição de não deslizamento e por duas equações resultantes da condição dinâmica na interface. A condição cinemática, conforme será mostrado, é automaticamente satisfeita. Antes de apresentar cada condição de contorno, é interessante definir alguns termos importantes.

O tensor de tensões viscosas é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Como a única componente não nula da velocidade é  $u = u(y, z)$ , a equação anterior se torna

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A equação geométrica de uma superfície livre, por sua vez, é definida implicitamente como

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2.10)$$

Uma vez que o escoamento é dado como uniforme, a cascata possui seção transversal constante, isto é, independente de  $x$ . Desta forma, a altura da superfície livre acima do eixo  $y$  é

$$z = h(y). \quad (2.11)$$

Sendo assim, uma função apropriada para a posição da superfície livre é

$$F(y, z) = z - h(y). \quad (2.12)$$

O vetor normal unitário a uma superfície livre é tal que

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}, \quad (2.13)$$

o que, através da Eq. (2.12), resulta em

$$\mathbf{n} = \frac{-h' \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{1 + h'^2}}, \quad (2.14)$$

em que  $\hat{\mathbf{e}}_y$  e  $\hat{\mathbf{e}}_z$  são os vetores unitários nas direções  $y$  e  $z$  respectivamente e a plica denota a derivada com relação a  $y$ .

Subsequentemente, a curvatura da superfície livre é definida como

$$\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n}. \quad (2.15)$$

Aplicando o divergente na Eq. (2.14), obtém-se, enfim,

$$\kappa = \frac{h''}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.16)$$

### 2.1.1 Condição de não deslizamento

A condição de não deslizamento determina que não há movimento relativo entre a superfície inclinada e as partículas de fluido que estão nesta interface. Desta forma, como a parede está em repouso,

$$u = 0 \quad \text{em} \quad z = 0. \quad (2.17)$$

### 2.1.2 Condição cinemática

A condição cinemática determina que as partículas do fluido que estão na superfície livre sempre permanecem nesta interface. Matematicamente, esta condição é expressa como

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0, \quad (2.18)$$

em que  $t$  é a variável de tempo e  $F$  é a equação geométrica da superfície livre. Sabendo que o escoamento é em regime permanente e utilizando a equação geométrica definida em (2.12), a condição cinemática se torna

$$-vh' + w = 0. \quad (2.19)$$

Entretanto, como  $v$  e  $w$  são componentes nulas da velocidade, a condição cinemática é automaticamente satisfeita e não agrega informação ao problema.

### 2.1.3 Condição dinâmica

A condição dinâmica, por sua vez, representa o equilíbrio das tensões na superfície livre e é dada por

$$(p_0 - p)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \gamma\kappa\mathbf{n} \quad \text{em} \quad z = h, \quad (2.20)$$

em que a pressão atmosférica  $p_0$  e a tensão superficial  $\gamma$  na interface são constantes. Os detalhes sobre como a Eq. (2.20) é obtida são mostrados no Anexo I. Representando o vetor normal  $\mathbf{n}$  como uma matriz coluna, podemos escrever a condição acima como

$$\frac{(p_0 - p)}{\sqrt{1 + h'^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -h' \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\mu}{\sqrt{1 + h'^2}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -h' \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\gamma\kappa}{\sqrt{1 + h'^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -h' \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A resolução da expressão acima resulta, a princípio, em um conjunto de três equações. A primeira equação é

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 + h'^2}} \left( -h' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.22)$$

isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.23)$$

A segunda equação resultante de (2.21) é

$$-h' \frac{p_0 - p}{\sqrt{1 + h'^2}} = -h' \frac{\gamma \kappa}{\sqrt{1 + h'^2}}, \quad (2.24)$$

isto é,

$$p_0 - p = \gamma \kappa \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.25)$$

Por último, a terceira equação decorrente da condição dinâmica é

$$\frac{p_0 - p}{\sqrt{1 + h'^2}} = \frac{\gamma \kappa}{\sqrt{1 + h'^2}}, \quad (2.26)$$

isto é,

$$p_0 - p = \gamma \kappa \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.27)$$

Desta forma, como a segunda e a terceira equação são iguais, a condição dinâmica fornece, na verdade, duas equações ao problema:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h \quad (2.28)$$

e

$$p_0 - p = \gamma \kappa \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.29)$$

É interessante notar que a curvatura, da maneira como foi definida, é negativa, o que garante que  $p > p_0$ . A pressão no escoamento é maior que a pressão atmosférica, uma vez que o fluido suporta uma pressão maior na parte côncava da interface.

## 2.2 EQUAÇÃO DA PRESSÃO

A fim de se encontrar uma equação para a pressão no escoamento, a Eq. (2.7) é integrada com relação a  $z$ , obtendo-se

$$p = -\rho g z \cos \alpha + c_1, \quad (2.30)$$

em que  $c_1$  é uma contante de integração. Pela condição de contorno em (2.29), tem-se que

$$c_1 = \rho g h \cos \alpha + p_0 - \gamma \kappa. \quad (2.31)$$

Assim, depende-se que a pressão no escoamento é uma função apenas de  $z$  e é dada por

$$p = \rho g (h - z) \cos \alpha + p_0 - \gamma \kappa. \quad (2.32)$$

## 2.3 CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS

Para encontrar a equação da superfície livre, é necessário apresentar as condições de contorno relativas ao formato do perfil. Conforme mostra a Fig. 2.1,  $a$  é metade da largura da faixa molhada e  $\beta$  é o ângulo de contato entre a parede e a superfície livre, podendo variar entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Em  $y = \pm a$ , é possível notar que a superfície livre está em contato direto com a parede, de forma que a altura nestes pontos é

$$h(\pm a) = 0. \quad (2.33)$$

Além disso, deve-se observar que o perfil do escoamento é simétrico com relação ao eixo  $z$ . Isto significa que

$$h'(0) = 0. \quad (2.34)$$

Por último, em  $y = \pm a$ , a inclinação da superfície livre com relação à parede é associada ao ângulo de contato da seguinte maneira:

$$h'(\pm a) = \mp \tan \beta. \quad (2.35)$$

Estas três condições são denominadas condições geométricas e são utilizadas para se determinar a expressão para o formato da superfície livre.

## 2.4 PERFIL DA SUPERFÍCIE LIVRE

Derivando a Eq. (2.32) com relação a  $y$ , tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g h' \cos \alpha - \gamma \kappa', \quad (2.36)$$

que, utilizando a Eq. (2.6), se torna

$$\rho g h' \cos \alpha = \gamma \kappa'. \quad (2.37)$$

Por meio da Eq. (2.16), pode-se reescrever

$$\rho g h' \cos \alpha = \gamma \left[ \frac{h''}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]'. \quad (2.38)$$

Definindo

$$K = \frac{\rho g \cos \alpha}{\gamma}, \quad (2.39)$$

encontra-se, como equação diferencial para o formato da superfície livre,

$$Kh' = \left[ \frac{h''}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' \quad (2.40)$$

Assim, o perfil da superfície livre, neste problema, é independente do campo de velocidades, podendo ser determinado previamente e, então, utilizado como parâmetro de entrada.

A fim de determinar este perfil, Perazzo e Gratton (2004) propuseram a mudança da origem do sistema de coordenadas da parede para o plano em que a inclinação da solução de (2.40) é  $\pm 90^\circ$  (Fig. 2.2). Desta forma, a nova coordenada vertical  $Z$  é tal que  $Z = 0$  representa o plano em que a inclinação da solução de (2.40) é  $\pm 90^\circ$  e  $Z = H_p$  representa o plano correspondente à parede, isto é,  $z = 0$ . Pela Fig. 2.2, é possível notar que, nos casos em que  $\beta < 90^\circ$ , a nova origem está sempre abaixo da parede, isto é,  $H_p > 0$ .

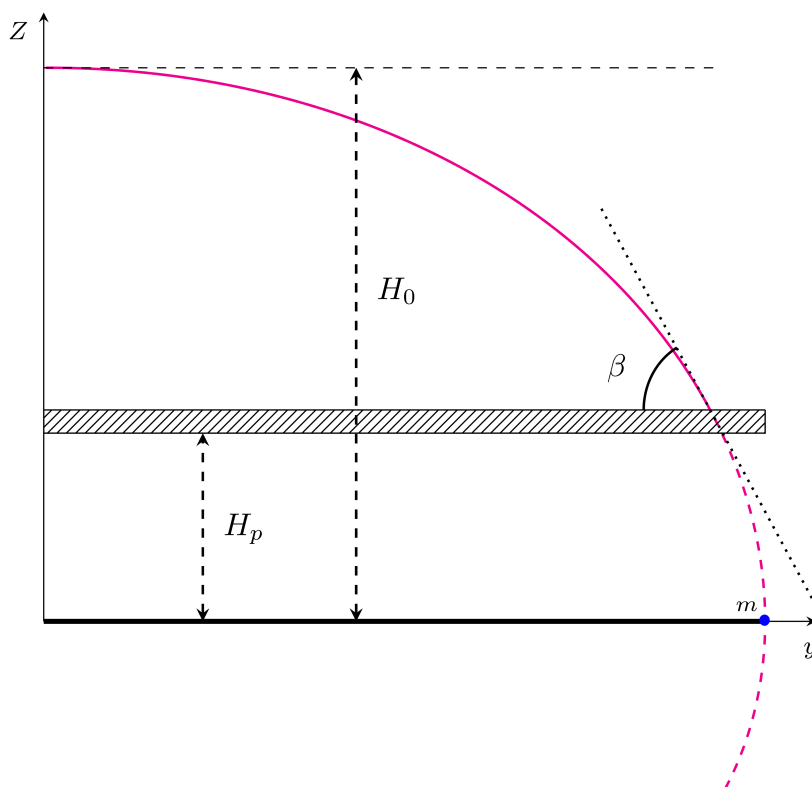


Figura 2.2: Sistema de coordenadas utilizado para descrever a superfície livre.

A superfície livre agora pode ser escrita como

$$H = h + H_p, \quad (2.41)$$

de modo que a Eq. (2.40) se torna

$$KH' = \left[ \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' \quad (2.42)$$

Por sua vez, as condições de contorno são

$$H(a) = H_p, \quad H'(0) = 0 \quad \text{e} \quad H'(a) = -\tan \beta, \quad (2.43)$$

em que já se considerou a simetria do problema com relação ao eixo  $y$ .

Integrando os dois lados da Eq. (2.42) de 0 a  $y$ , tem-se

$$\int_0^y K H' dy = \int_0^y \left[ \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' dy, \quad (2.44)$$

isto é,

$$\int_{H_0}^H K dH = \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^y, \quad (2.45)$$

em que  $H_0$  é a altura da superfície livre em  $y = 0$  e corresponde à altura máxima do perfil. Resolvendo a Eq. (2.45) e utilizando a segunda condição em (2.43), obtém-se

$$K(H - H_0) = \frac{H''}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} - H''(0). \quad (2.46)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por  $H'$  e integrando novamente, tem-se que

$$\int_0^y K(H - H_0)H' dy = \int_0^y \frac{H''H'}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} dy - \int_0^y H''(0)H' dy, \quad (2.47)$$

isto é,

$$\int_{H_0}^H K(H - H_0) dH = \int_0^y \frac{H''H'}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} dy - \int_{H_0}^H H''(0) dH. \quad (2.48)$$

Sabendo que

$$\frac{H''H'}{(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[ -\frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} \right]' \quad (2.49)$$

e resolvendo as integrações, a Eq. (2.48) se torna

$$\frac{K}{2} H^2 \Big|_{H_0}^H - K H H_0 \Big|_{H_0}^H = -\frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} \Big|_0^y - H H''(0) \Big|_{H_0}^H, \quad (2.50)$$

ou seja,

$$\frac{K}{2} (H - H_0)^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} - (H - H_0)H''(0). \quad (2.51)$$

No ponto  $m$  evidenciado na Fig. 2.2, tem-se

$$H(y_m) = 0 \quad \text{e} \quad H'(y_m) = \infty, \quad (2.52)$$

de modo que a Eq. (2.51), neste ponto, fornece a seguinte expressão para a curvatura da superfície

livre em  $y = 0$ :

$$H''(0) = \frac{K}{2}H_0 - \frac{1}{H_0}. \quad (2.53)$$

Uma vez que a concavidade da superfície livre é voltada para a parede,  $H''(0)$  é necessariamente negativo. Como  $K$  e  $H_0$  são ambos valores positivos, pode-se concluir que

$$0 \leq \frac{K}{2}H_0 \leq \frac{1}{H_0}. \quad (2.54)$$

Definindo o parâmetro

$$\lambda = \frac{K}{2}H_0^2, \quad (2.55)$$

tem-se, então,

$$0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.56)$$

Uma vez que  $\lambda$  incorpora o termo  $K$  e, conseqüentemente,  $\cos \alpha$ , este parâmetro pode ser utilizado para avaliar a inclinação da parede. É interessante notar que, para um mesmo fluido e mesmo ângulo de contato, o limite  $\lambda \rightarrow 0$  representa o escoamento em uma parede vertical e o limite  $\lambda \rightarrow 1$  representaria uma parede horizontal.

Substituindo, agora, a Eq. (2.53) em (2.51), tem-se

$$\frac{K}{2}(H - H_0)^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} - (H - H_0) \left( \frac{K}{2}H_0 - \frac{1}{H_0} \right), \quad (2.57)$$

isto é,

$$\frac{K}{2}H^2 - KHH_0 = -\frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}} - \frac{K}{2}HH_0 + \frac{H}{H_0}. \quad (2.58)$$

Reorganizando os termos, pode-se escrever

$$\frac{H}{H_0} + \frac{K}{2}H(H_0 - H) = \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}}. \quad (2.59)$$

Por conveniência, o segundo termo da Eq. (2.59) é multiplicado e dividido por  $H_0^2$ , de modo que

$$\frac{H}{H_0} + \frac{K}{2}H_0^2 \frac{H}{H_0} \left( 1 - \frac{H}{H_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + H'^2}}. \quad (2.60)$$

Fazendo agora a adimensionalização

$$\zeta = \frac{H}{H_0} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{y}{H_0}, \quad (2.61)$$

o que implica em

$$\frac{dH}{dy} = \frac{d\zeta}{d\eta}, \quad (2.62)$$



a Eq. (2.60) se torna

$$\zeta[1 + \lambda(1 - \zeta)] = \frac{1}{\sqrt{1 + (d\zeta/d\eta)^2}}, \quad (2.63)$$

e as condições de contorno em (2.43) passam a ser

$$\zeta(a) = \zeta_p, \quad \frac{d}{d\eta}\zeta(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\eta}\zeta(a) = -\tan \beta, \quad (2.64)$$

em que

$$\zeta_p = \frac{H_p}{H_0}. \quad (2.65)$$

Seguindo Towell e Rothfeld (1966) e Perazzo e Gratton (2004), é conveniente introduzir uma variável  $\theta$  tal que

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{d\eta}. \quad (2.66)$$

Esta mudança de variável é interessante para que se possa resolver a Eq. (2.63) utilizando integrais elípticas. Assim, a Eq. (2.63), pode ser reescrita como

$$\zeta + \lambda\zeta - \lambda\zeta^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}. \quad (2.67)$$

Esta equação é resolvida detalhadamente no Anexo II e resulta nas equações paramétricas para a superfície livre de uma cascata sobre um plano inclinado, em função de  $\lambda$  e  $\theta$ ,

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \lambda - \sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta} \right) \quad (2.68)$$

e

$$\eta = \frac{1}{2\lambda(1 - \lambda)} \left[ (1 - \lambda)^2 E \left( \frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \right) - (1 + \lambda)^2 F \left( \frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \right) \right], \quad (2.69)$$

em que  $E$  e  $F$  são, respectivamente, as integrais elípticas de segunda e primeira ordem. A Fig. 2.3 mostra, a partir das Eqs. (2.68) e (2.69), o formato da superfície livre para  $\lambda = 0,1$  e  $\lambda = 0,9$  e diferentes ângulos de contato.

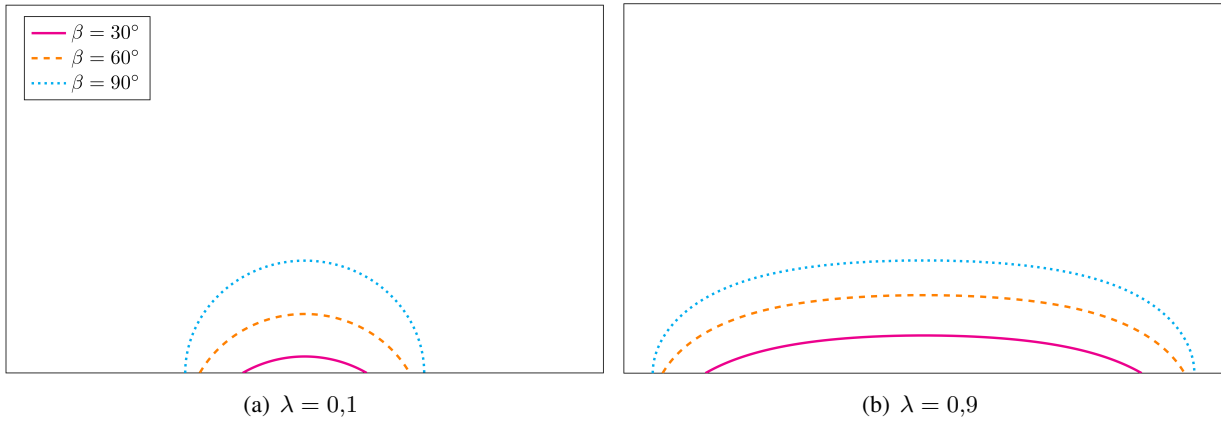


Figura 2.3: Exemplos de perfis para diferentes ângulos de contato e valores de  $\lambda$ .

## 2.5 CAMPO DE VELOCIDADE

Segundo a Eq. (2.32), a pressão independe de  $x$ . Assim, a equação governante em (2.5) se torna, enfim, a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu}, \quad (2.70)$$

sujeita às condições de contorno

$$u = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (2.71)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.72)$$

## 2.6 FLUXO

O fluxo é a medida do volume de fluido que atravessa a seção transversal do escoamento por unidade de tempo. Neste problema, em específico, o fluxo através do perfil é dado por

$$Q = \int_{-a}^a \int_0^{h(y)} u(y, z) \, dz \, dy. \quad (2.73)$$

Como o escoamento é simétrico com relação ao eixo  $z$ , o fluxo também pode ser calculado como

$$Q = 2 \int_0^a \int_0^{h(y)} u(y, z) \, dz \, dy. \quad (2.74)$$

O fluxo será utilizado para caracterizar as soluções deste problema. Isto significa que esta quantidade será importante para avaliar a metodologia numérica, os modelos de aproximação e o perfil para diferentes inclinações da parede e ângulos de contato por exemplo.

## 2.7 FORMULAÇÃO PARA O PLANO VERTICAL

Para o caso em que a parede é vertical, tem-se que  $\alpha = 90^\circ$ , o que resulta em algumas simplificações. As equações de Navier-Stokes, neste caso, são

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.76)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.77)$$

As condições de contorno, assim como as condições geométricas, não se alteram.

Por outro lado, a equação para a pressão agora difere da Eq. (2.32). Por meio das equações governantes (2.76) e (2.77), constata-se que a pressão é independente das variáveis  $y$  e  $z$ , isto é,  $p = p(x)$ . Por outro lado, devido à Eq. (2.16), assume-se que  $\kappa = \kappa(y)$ . Sendo assim, a condição de contorno em (2.29) pode ser escrita como

$$p_0 - p(x) = \gamma \kappa(y). \quad (2.78)$$

Como  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, a equação acima somente pode ser verdadeira se  $p$  e  $\kappa$  não forem funções de  $x$  e  $y$ , mas sim constantes. Desta forma, depreende-se que a pressão no caso vertical é constante ao longo de todo o escoamento e vale

$$p = p_0 - \gamma \kappa. \quad (2.79)$$

Essa mudança na pressão implica em uma modificação na equação diferencial para a superfície livre. Derivando a Eq. (2.79) com relação a  $y$ , obtém-se

$$\kappa' = 0, \quad (2.80)$$

isto é,

$$\left[ \frac{h''}{(1 + h'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' = 0. \quad (2.81)$$

Conforme demonstrado no Anexo III, a equação acima caracteriza, pela geometria diferencial, uma circunferência ou uma reta. Entretanto, por meio das condições geométricas explicitadas

nas Eqs. (2.33) – (2.35), é possível afirmar que a superfície livre assume o formato de uma reta somente se  $\beta = 0$ . Para os demais valores de ângulo de contato, portanto, a superfície livre se apresenta como arcos de circunferência.

Pela simetria do escoamento, o centro  $C$  deste arco está sobre o eixo  $z$  a uma distância  $d$  da origem  $O$ , como mostra a Fig. 2.4. O raio desta circunferência é denotado por  $R$  e o ponto  $A$  de encontro entre a superfície livre e a parede possui coordenadas  $(a, 0)$ . Pela Fig. 2.4, é possível

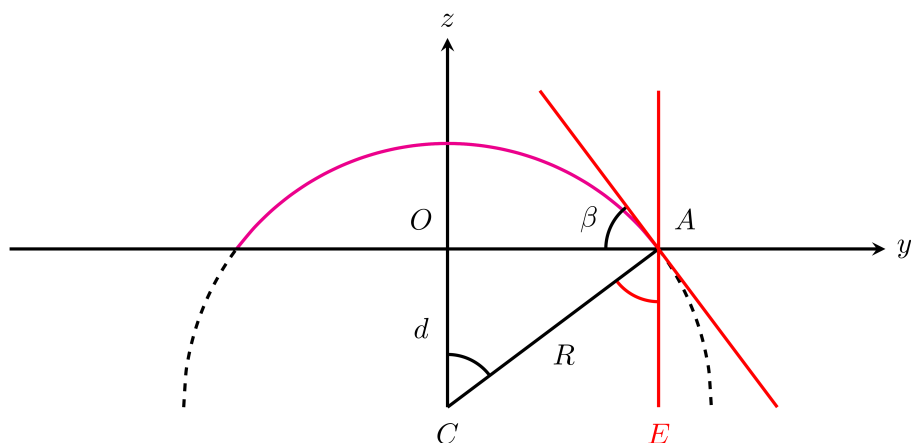


Figura 2.4: Arco de circunferência que constitui a superfície livre.

perceber que o ângulo  $\beta$  é complementar ao ângulo  $\angle CAO$ , isto é

$$\angle CAO = 90^\circ - \beta. \quad (2.82)$$

Entretanto, o ângulo  $\angle CAO$  é complementar, ainda, ao ângulo  $\angle EAC$ , de onde é possível concluir que  $\angle EAC$  é congruente a  $\beta$ . Visto que  $\angle EAC$  e  $\angle OCA$  são ângulos alternos internos, o ângulo  $\angle OCA$  é, finalmente, congruente a  $\beta$ .

Uma vez determinado o ângulo  $\angle OCA$  e sabendo que o segmento de reta  $\overline{OA}$  tem comprimento  $a$ , pode-se definir o raio e a distância  $d$  como

$$R = \frac{a}{\text{sen } \beta} \quad (2.83)$$

e

$$d = \frac{a}{\tan \beta} \quad (2.84)$$

respectivamente.

A circunferência da qual o arco da superfície livre faz parte é descrita pela equação

$$y^2 + (h + d)^2 = R^2. \quad (2.85)$$

Substituindo as Eqs. (2.83) e (2.84) na expressão acima, obtém-se que a superfície livre é a curva

acima do eixo  $y$  que satisfaz a equação

$$y^2 + \left( h + \frac{a}{\tan \beta} \right)^2 = \left( \frac{a}{\sin \beta} \right)^2. \quad (2.86)$$

Para  $\beta \leq 90^\circ$ , é possível isolar  $h$  e escrever a equação da superfície livre como

$$h = \frac{a}{\sin \beta} \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2} \sin^2 \beta} - \cos \beta \right). \quad (2.87)$$

Por fim, o problema de se determinar o campo de velocidade no caso vertical se resume à equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho g}{\mu}, \quad (2.88)$$

sujeita às condições de contorno

$$u = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (2.89)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h. \quad (2.90)$$

### 3 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA A PAREDE VERTICAL

Soluções analíticas para o problema da cascata escoando sobre um plano inclinado foram obtidas apenas para o caso específico em que a parede é vertical e, mesmo neste caso, demandam um grande esforço matemático (Perazzo e Gratton, 2004), como mostrado no Anexo IV, ou necessitam do auxílio de métodos numéricos (Bentwich et al., 1976). Desta forma, para se obter soluções que mantenham a formulação exata do problema, é necessário recorrer a métodos numéricos. Este capítulo se dedica a detalhar a solução numérica desenvolvida para o caso em que o escoamento ocorre sobre uma parede vertical. A implementação numérica será validada com os valores analíticos obtidos para o ângulo  $90^\circ$ .

Como mostrado, o problema de se determinar a velocidade no escoamento descendente de uma cascata vertical uniforme é governado apenas pela equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho g}{\mu}. \quad (3.1)$$

O bordo do domínio é formado por duas partes: a interface sólido-fluido e a interface fluido-ar. A camada de fluido em contato com a parede vertical está sujeita a condição de não deslizamento, de forma que

$$u = 0 \quad \text{em} \quad z = 0. \quad (3.2)$$

A velocidade na superfície livre, por sua vez, obedece à seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h. \quad (3.3)$$

Além disso, o perfil da superfície livre é dado por

$$h(y) = \frac{a}{\sin \beta} \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2} \sin^2 \beta} - \cos \beta \right). \quad (3.4)$$

Como o escoamento é simétrico com relação ao eixo  $z$ , a solução numérica é desenvolvida para metade do domínio e, uma vez obtidos os resultados, duplicada adequadamente para todo o domínio. Sendo assim, a seguinte condição de contorno é adicionada ao problema:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0. \quad (3.5)$$

A equação governante, as condições de contorno e o perfil da superfície livre podem ser adimensionalizados utilizando as variáveis adimensionais

$$y = a\hat{y}, \quad z = a\hat{z}, \quad h = a\hat{h} \quad \text{e} \quad u = \frac{\rho g a^2}{\mu} \hat{u}, \quad (3.6)$$

em que o acento circunflexo denota as variáveis adimensionais e  $a$  é o comprimento característico do escoamento. Desta forma, a Eq. (3.1) se torna

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} = -1. \quad (3.7)$$

As condições de contorno das Eqs. (3.2), (3.3) e (3.5) são reescritas como

$$\hat{u} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{z} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = \hat{h}' \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \quad \text{em} \quad \hat{z} = \hat{h} \quad (3.9)$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{y} = 0 \quad (3.10)$$

respectivamente. Por último, o perfil da superfície livre passar a ser

$$\hat{h}(\hat{y}) = \frac{1}{\text{sen } \beta} \left( \sqrt{1 - \hat{y}^2 \text{sen}^2 \beta} - \cos \beta \right). \quad (3.11)$$

A fim de não sobrecarregar a notação, o acento circunflexo não será mais utilizado e todas as variáveis serão consideradas adimensionais.

### 3.1 MUDANÇA DE COORDENADAS

A maioria dos trabalhos que desenvolveu uma solução numérica para o problema da cascata utilizou o método dos elementos finitos. Neste estudo deseja-se obter a solução numérica do problema por meio do método das diferenças finitas. Esta é a primeira vez que o problema da cascata é resolvido por este método. Para possibilitar a implementação em diferenças finitas, decidiu-se transformar o domínio físico em um domínio retangular, conforme a Fig. 3.1. É interessante notar que o ponto de encontro entre a superfície livre e a parede se torna uma coluna inteira no novo domínio. Para alcançar este domínio, foi utilizada a seguinte mudança de coordenadas:

$$\eta = y \quad \text{e} \quad \xi = \frac{z}{h}. \quad (3.12)$$

Pela regra da cadeia do cálculo diferencial, a derivada de primeira ordem com relação à coordenada  $y$  em termos das novas coordenadas  $\eta$  e  $\xi$  é

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.13)$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{zh'}{h^2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.14)$$

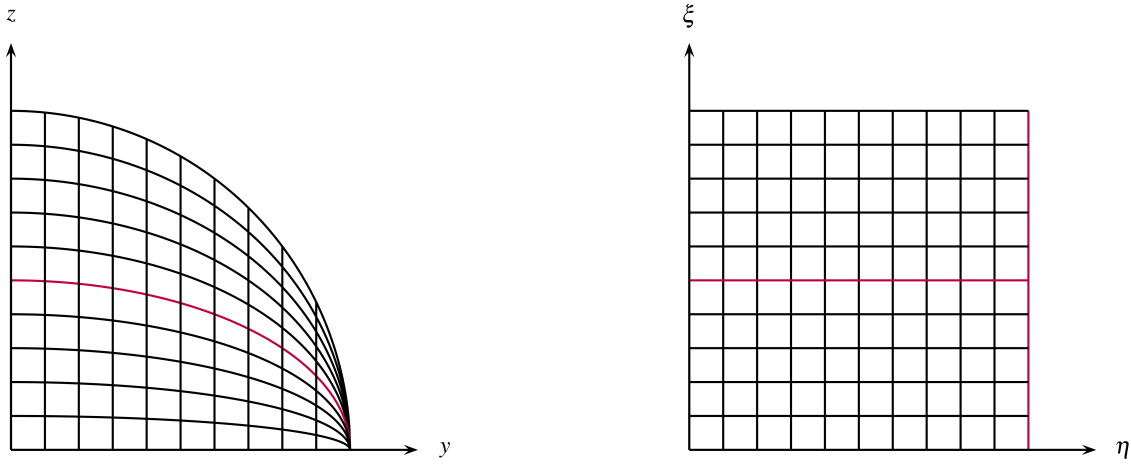


Figura 3.1: Esquema dos domínios físico (à esquerda) e computacional (à direita).

em que  $h = h(\eta)$  e a plica denota a derivada com relação à coordenada  $\eta$ . Como  $\xi = z/h$ , a equação acima se torna

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \xi \frac{h'}{h} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (3.15)$$

A derivada de segunda ordem é obtida aplicando-se a Eq. (3.15) nela mesma, isto é,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \xi \frac{h'}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \xi \frac{h'}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \right).$$

Tem-se, então, que

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h'}{h} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \left( \frac{h'}{h} \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} - \xi \left( \frac{h'}{h} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \xi \frac{h'}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{h'}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \right),$$

de forma que a derivada de segunda ordem com relação a  $y$  é

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\xi \frac{h'}{h} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + 2\xi \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{h''}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^2 \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (3.16)$$

O processo para obter as derivadas de primeira e segunda ordem em relação à coordenada  $z$  é análogo ao que foi realizado para a coordenada  $y$ . Sendo assim, as derivadas de primeira e segunda ordem com respeito a  $z$  são, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.17)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (3.18)$$



### 3.1.1 Equações governantes no novo domínio

Possuindo as expressões para as derivadas com relação às novas coordenadas, é possível reescrever a equação governante e as condições de contorno. A equação de Poisson (3.7) que rege o problema se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\xi \frac{h'}{h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 2\xi \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi \frac{h''}{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi^2 \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -1, \quad (3.19)$$

que pode ser escrita como

$$h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\xi h h' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + 2\xi h'^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \xi h h'' \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi^2 h'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -h^2. \quad (3.20)$$

A condição de não deslizamento é tal que

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \xi = 0. \quad (3.21)$$

Por outro lado, a condição na superfície livre é, então, escrita como

$$\frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} = h' \frac{\partial u}{\partial \eta} - \xi \frac{h'^2}{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \text{em} \quad \xi = 1, \quad (3.22)$$

isto é,

$$(1 + h'^2) \frac{\partial u}{\partial \xi} = h h' \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{em} \quad \xi = 1. \quad (3.23)$$

Por sua vez, a condição de simetria (3.10) se torna

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - \xi \frac{h'}{h} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 0. \quad (3.24)$$

Entretanto, devido à simetria do problema, tem-se que

$$h'(0) = 0, \quad (3.25)$$

de forma que a Eq. (3.24) se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 0. \quad (3.26)$$

Além disso, a velocidade é nula no ponto de encontro entre a superfície livre e a parede no domínio físico. Desta forma, no novo domínio, ao longo de toda a coluna que representa este ponto, a velocidade também é nula. Sendo assim,

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 1. \quad (3.27)$$

Ademais, o perfil da superfície livre nas novas coordenadas é tal que

$$h(\eta) = \frac{1}{\text{sen } \beta} \left( \sqrt{1 - \eta^2 \text{sen}^2 \beta} - \cos \beta \right). \quad (3.28)$$

É válido notar que, como todos os pontos em que  $\eta = 1$  correspondem ao ponto único em que a superfície livre encontra a parede no domínio físico, tem-se

$$h(1) = 0. \quad (3.29)$$

### 3.2 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas consiste em utilizar, em geral, expansões da série de Taylor para substituir uma derivada parcial por um quociente de diferenças (Anderson e Wendt, 1995). Para isso, o domínio do problema foi discretizado em  $(N + 1)^2$  nós igualmente espaçados por  $\Delta\eta$  na direção de  $\eta$  e por  $\Delta\xi$  na direção de  $\xi$ , conforme a Fig. 3.2. Cada nó é definido pelos números inteiros  $i$  e  $j$  que variam de 0 a  $N$  e expressam, respectivamente, a linha e a coluna que este ocupa na malha.

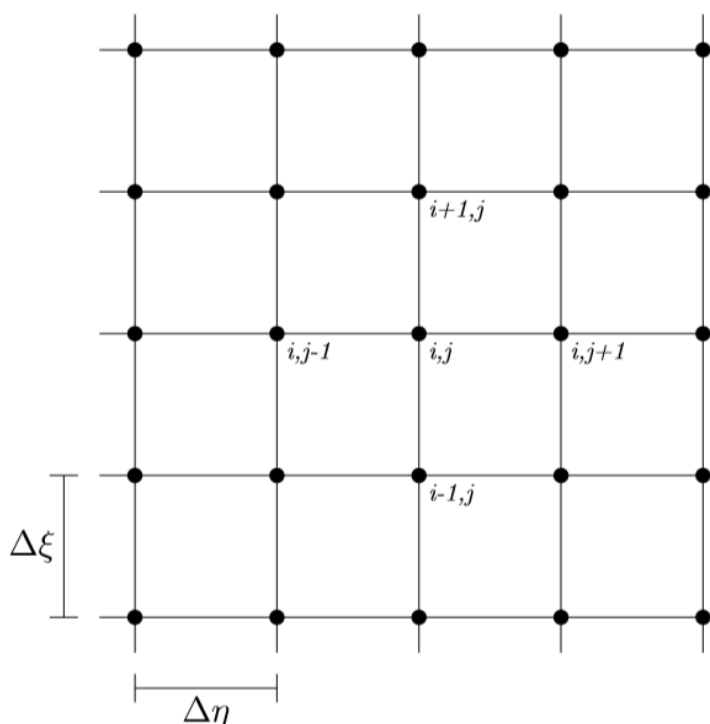


Figura 3.2: Porção da malha construída para solução numérica.

As derivadas de um problema podem ser discretizadas de diferentes maneiras a depender dos pontos escolhidos da malha. A discretização por meio de diferenças centradas resulta em um erro de truncamento de segunda ordem, sendo assim, mais acuradas que derivadas progressivas

e regressivas de ordem 1 (Anderson e Wendt, 1995). As derivadas de interesse do escoamento estudado são discretizadas em diferenças centradas da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta\eta}, \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta\eta^2}, \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta\xi}, \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}, \quad (3.33)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta\eta\Delta\xi}. \quad (3.34)$$

### 3.2.1 Discretização da equação governante

Substituindo as diferenças das Eqs. (3.31) – (3.34) na Eq. (3.20) e evidenciando os termos referentes à velocidade, a equação governante se torna

$$Au_{i,j} + B(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + Cu_{i+1,j} + Du_{i-1,j} + E(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1}) = -h^2, \quad (3.35)$$

em que

$$A = -\frac{2h^2}{\Delta\eta^2} - \frac{2\xi^2 h'^2}{\Delta\xi^2} - \frac{2}{\Delta\xi^2}, \quad (3.36)$$

$$B = \frac{h^2}{\Delta\eta^2}, \quad (3.37)$$

$$C = \frac{\xi h'^2}{\Delta\xi} - \frac{\xi h h''}{2\Delta\xi} + \frac{\xi^2 h'^2}{\Delta\xi^2} + \frac{1}{\Delta\xi^2}, \quad (3.38)$$

$$D = -\frac{\xi h'^2}{\Delta\xi} + \frac{\xi h h''}{2\Delta\xi} + \frac{\xi^2 h'^2}{\Delta\xi^2} + \frac{1}{\Delta\xi^2} \quad (3.39)$$

e

$$E = \frac{\xi h h'}{2\Delta\eta\Delta\xi}. \quad (3.40)$$

A Eq. (3.35) é a equação governante do problema discretizada em diferenças finitas. É válido observar que, para calcular a velocidade do escoamento em um ponto  $(i, j)$ , são necessários nove pontos, incluindo o ponto que se deseja obter (Fig. 3.3).

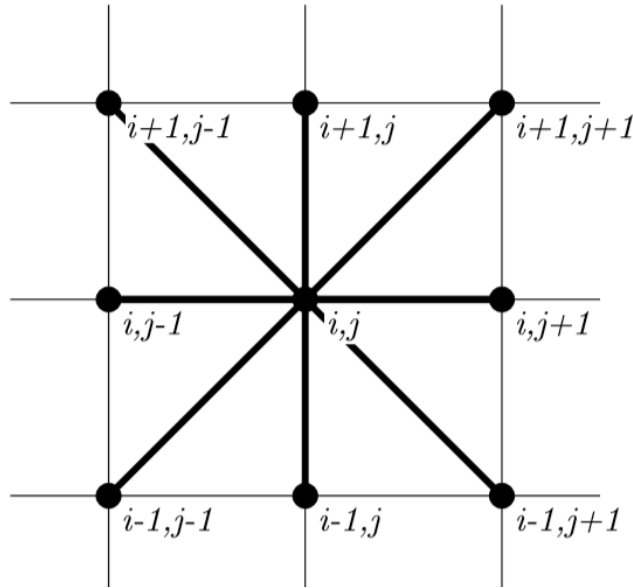


Figura 3.3: Estêncil da discretização da equação governante.

### 3.2.2 Discretização das condições de contorno

A condição de simetria da Eq. (3.26) em diferenças finitas se torna

$$u_{i,j+1} \left( \frac{1}{\Delta\eta} \right) + u_{i,j-1} \left( -\frac{1}{\Delta\eta} \right) = 0 \quad \text{em} \quad j = 0, \quad (3.41)$$

isto é,

$$u_{i,j-1} = u_{i,j+1} \quad \text{em} \quad j = 0. \quad (3.42)$$

A velocidade em um ponto na primeira coluna da malha é representada por  $u_{i,0}$ . Entretanto, para calcular este termo de velocidade, seria necessário o termo inexistente na malha  $u_{i,-1}$ . A condição de contorno de simetria indica que este termo inexistente é equivalente ao seu simétrico com relação ao eixo  $\eta$ , sendo assim

$$u_{i,-1} = u_{i,1}. \quad (3.43)$$

Como expresso na Eq. (3.27), a velocidade na última coluna da malha é nula. Em diferenças finitas, esta condição significa que

$$u_{i,j} = 0 \quad \text{em} \quad j = N, \quad (3.44)$$

isto é,

$$u_{i,N} = 0. \quad (3.45)$$

A condição de não deslizamento, por sua vez, é discretizada como

$$u_{i,j} = 0 \quad \text{em} \quad i = 0, \quad (3.46)$$

isto é,

$$u_{0,j} = 0. \quad (3.47)$$

A condição de contorno na superfície livre (3.22) requer a utilização das diferenças finitas centradas descritas em (3.30) e (3.32). Tal condição é, então, discretizada como

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} \left( \frac{1+h'^2}{\Delta\xi} \right) + u_{i-1,j} \left( \frac{-1-h'^2}{\Delta\xi} \right) \\ = u_{i,j+1} \left( \frac{hh'}{\Delta\eta} \right) + u_{i,j-1} \left( \frac{-hh'}{\Delta\eta} \right) \quad \text{em} \quad i = N. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Na última linha da malha, a velocidade em um ponto é denotada por  $u_{N,j}$ . Entretanto, conforme a Eq. (3.35) mostra, para calcular  $u_{N,j}$  é necessário  $u_{N+1,j}$ , um ponto inexistente na malha. Assim, a discretização da condição de contorno na superfície livre expressa que, nesta linha, o termo  $u_{N+1,j}$  deve ser substituído por

$$u_{N+1,j} = \frac{\Delta\xi}{1+h'^2} \left[ u_{N-1,j} \left( \frac{1+h'^2}{\Delta\xi} \right) + u_{N,j+1} \left( \frac{hh'}{\Delta\eta} \right) + u_{N,j-1} \left( \frac{-hh'}{\Delta\eta} \right) \right]. \quad (3.49)$$

Nesta última linha da malha, quatro elementos devem ser analisados isoladamente dos demais:  $u_{N,0}$ ,  $u_{N,1}$ ,  $u_{N,N-1}$  e  $u_{N,N}$ . Para  $u_{N,0}$  e  $u_{N,1}$ , além da condição de contorno na superfície livre, é necessário utilizar a condição de simetria para substituir os termos  $u_{N,-1}$  e  $u_{N+1,-1}$  que surgem. Pela condição de contorno (3.45), o termo  $u_{N,N}$ , por sua vez, é nulo. Por último, para o termo  $u_{N,N-1}$ , a condição (3.29) faz com que o termo  $u_{N+1,N}$  que surge devido à condição de contorno na superfície livre (3.49), possa ser substituído por  $u_{N-1,N}$ .

Com as equações e condições de contorno discretizadas e os pontos com considerações especiais explicitados, é possível determinar todos os termos de velocidade da malha.

### 3.3 SISTEMA LINEAR

Com a malha de dimensão  $(N+1) \times (N+1)$  definida e a equação governante e as condições de contorno discretizadas em diferenças finitas, foi montado um sistema linear tal que

$$\mathbf{K}\mathbf{m} = \mathbf{L}, \quad (3.50)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de coeficientes,  $\mathbf{m}$  é a matriz coluna que contém a velocidade em cada ponto e  $\mathbf{L}$  é a matriz coluna dos termos independentes. Cada linha deste sistema linear representa a equação para a velocidade em um ponto da malha, de forma que a ordem do sistema é  $(N+1)^2$ ,

isto é,  $\mathbf{K}$  tem tamanho  $(N + 1)^2 \times (N + 1)^2$  e  $\mathbf{m}$  tem tamanho  $(N + 1)^2 \times 1$ , assim como  $\mathbf{L}$ . Após a definição de cada uma das matrizes, o sistema linear é, então, resolvido por meio da biblioteca *SciPy*. A função `scipy.sparse.linalg.spsolve` resolve sistemas lineares esparsos na forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  utilizando uma fatoração LU multifrontal.

### 3.3.1 Matriz dos coeficientes

A matriz  $\mathbf{K}$  dos coeficientes é uma matriz esparsa, isto é, uma matriz na qual uma grande quantidade de entradas é nula (Zill e Cullen, 2009). O índice das linhas nesta matriz é definido com a mesma orientação que o índice da malha (Fig. 3.2). Isto significa que a primeira linha de  $\mathbf{K}$  contém os coeficientes da equação para  $u_{N,N}$  e a última linha, os coeficientes da equação para  $u_{0,0}$ .

Em cada linha desta matriz, o coeficiente na diagonal secundária é aquele que multiplica o termo de velocidade ao qual a linha se refere, isto é, o termo  $u_{i,j}$  da malha. A diagonal à direita da diagonal secundária contém o coeficiente do termo  $u_{i,j+1}$  em cada linha, enquanto a diagonal à esquerda da secundária, por sua vez, contém o coeficiente do termo  $u_{i,j-1}$  em cada linha. A diagonal com os coeficientes de  $u_{i+1,j}$  está a  $N + 1$  diagonais à direita da secundária e, analogamente, a diagonal com os coeficientes de  $u_{i-1,j}$  está a  $N + 1$  diagonais à esquerda da secundária. Além disso, os coeficientes dos termos  $u_{i+1,j+1}$  e  $u_{i+1,j-1}$  são alocados, respectivamente, à direita e à esquerda da diagonal dos coeficientes de  $u_{i+1,j}$ . De forma análoga, os coeficientes dos termos  $u_{i-1,j+1}$  e  $u_{i-1,j-1}$  são alocados, respectivamente, à direita e à esquerda da diagonal dos coeficientes de  $u_{i-1,j}$ . A fim de proporcionar um correto entendimento do modo como os termos se distribuem na matriz  $\mathbf{K}$ , foram definidos cinco blocos de coeficientes que a constituem.

A condição de contorno em  $i = 0$  (3.47) indica que a velocidade nos pontos com este índice já está determinada e é nula. Na matriz  $\mathbf{K}$ , este fato implica que, em suas últimas  $N + 1$  linhas, a diagonal secundária é unitária e os demais termos são nulos, conforme representado no bloco 1 abaixo.

Bloco 1 :

0	...	...	0	1	0	...	0
⋮	...	⋱	1	⋱	...	...	⋮
⋮	⋱	⋱	⋱	...	...	...	⋮
0	1	⋱	...	...	...	...	⋮
1	0	...	...	...	...	...	0

A condição de contorno em  $i = N$  (3.49), quando substituída na equação de Poisson, faz com que o cálculo de  $u_{N,j}$  dependa de  $u_{N,j}$ ,  $u_{N,j+1}$ ,  $u_{N,j+2}$ ,  $u_{N,j-1}$ ,  $u_{N,j-2}$  e  $u_{N-1,j}$ . Este cálculo é válido para obter a velocidade em todos os pontos da malha em que  $i = N$ , exceto  $u_{N,0}$ ,  $u_{N,1}$ ,

$u_{N,N-1}$  e  $u_{N,N}$ . Isto significa que as duas primeiras linhas, a linha  $N$  e a linha  $N + 1$  da matriz  $\mathbf{K}$  possuem particularidades, mas as demais linhas entre estas apresentam os mesmos coeficientes não nulos nas mesmas diagonais.

Para calcular  $u_{N,0}$  e  $u_{N,1}$ , especificamente, é necessária, ainda, a condição de contorno (3.43) em  $j = 0$ . O termo  $u_{N,0}$  é calculado utilizando ele mesmo e os termos  $u_{N,1}$  e  $u_{N-1,0}$ , resultando em apenas três diagonais de coeficientes com termos não nulos. Por outro lado, o termo  $u_{N,1}$  é calculado utilizando ele mesmo e os termos  $u_{N,0}$ ,  $u_{N,2}$  e  $u_{N-1,1}$ .

Pela condição de contorno (3.45) em  $j = N$ , o termo  $u_{N,N}$  é zero. Desta forma, na primeira linha da matriz  $\mathbf{K}$ , o coeficiente na diagonal secundária vale 1 e os demais coeficientes são nulos. Por último, para calcular  $u_{N,N-1}$ , é necessário, além da equação de Poisson e das condições de contorno em  $i = N$  e  $j = N$ , utilizar a Eq. (3.29) para eliminar termos nos quais a altura do escoamento é nula. Desta forma, a equação para  $u_{N,N-1}$  requer, além do próprio termo,  $u_{N,N-2}$ ,  $u_{N,N-3}$ ,  $u_{N-1,N-1}$  e  $u_{N,N}$ , sendo este último nulo. A representação deste bloco é tal que

**Bloco 2 :**

0	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0	1
⋮	...	...	...	...	...	...	⋮	$a_4$	⋮	...	0	$a_3$	$a_1$	$a_7$	1	
⋮	...	...	...	...	...	⋮	$a_4$	⋮	...	0	$a_3$	$a_1$	$a_0$	$a_2$	$a_3$	
⋮	...	...	...	...	⋮	⋮	⋮	...	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0
⋮	...	...	...	⋮	$a_4$	⋮	...	0	$a_3$	$a_1$	$a_0$	$a_2$	$a_3$	⋮	⋮	⋮
⋮	...	...	⋮	$a_4$	⋮	...	...	0	$a_1$	$a_7$	$a_2$	0	⋮	...	⋮	⋮
0	...	0	$a_4$	0	...	...	...	0	$a_5$	$a_6$	0	...	...	...	0	0

em que

$$a_0 = A + 2EF, \quad (3.51)$$

$$a_1 = B - CF, \quad (3.52)$$

$$a_2 = B + CF, \quad (3.53)$$

$$a_3 = -EF, \quad (3.54)$$

$$a_4 = C + D, \quad (3.55)$$

$$a_5 = A, \quad (3.56)$$

$$a_6 = 2B \quad (3.57)$$

e

$$a_7 = A + EF, \quad (3.58)$$

em que  $A, B, C, D$  e  $E$  são explícitos nas Eqs. (3.36) – (3.40) e  $F$  é dado por

$$F = \frac{hh'\Delta\xi}{(1+h'^2)\Delta\eta}. \quad (3.59)$$

Nas linhas da matriz  $\mathbf{K}$  cujo termo de velocidade que se deseja calcular possui  $i \neq 0$  e  $i \neq N$  e  $j \neq 0$  e  $j \neq N$ , os coeficientes não nulos são dispostos em nove diagonais que correspondem aos termos  $u_{i,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j-1}, u_{i+1,j}, u_{i+1,j+1}, u_{i+1,j-1}, u_{i-1,j}, u_{i-1,j+1}$  e  $u_{i-1,j-1}$ . Destas diagonais, aquelas que acomodam os coeficientes dos termos de velocidade em  $i - 1$  são exibidas no bloco 3. As diagonais com os coeficientes da velocidade em  $i$  e em  $i + 1$  estão, respectivamente, nos blocos 4 e 5.

A condição de contorno (3.43) em  $j = 0$  faz com que as linhas da matriz  $\mathbf{K}$  relativas a termos de velocidade em que  $i \neq 0$  e  $i \neq N$  mas  $j = 0$  tenham coeficientes em apenas seis diagonais, dependendo somente dos termos  $u_{i,j}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j}, u_{i+1,j+1}, u_{i-1,j}$  e  $u_{i-1,j+1}$ . Por outro lado, a condição de contorno (3.45) em  $j = N$  dita que  $u_{i,N}$  é nulo ao longo do domínio. Desta forma, as linhas da matriz  $\mathbf{K}$  em que  $j = N$  possuem coeficientes nulos em todas as diagonais, exceto na diagonal secundária de  $\mathbf{K}$ , na qual o coeficiente é 1.

Sendo assim, os blocos 3, 4 e 5 apresentam as linhas de  $\mathbf{K}$  cujos termos de velocidade possuem  $i$  entre 1 e  $N - 1$ . Nestas linhas, sempre que  $j = 0$  ou  $j = N$ , os coeficientes se organizam como explicado anteriormente. Tais blocos são ilustrados abaixo e os coeficientes  $A, B, C, D$  e  $E$  são aqueles explicitados nas Eqs. (3.36) – (3.40).

**Bloco 3 :**

0	...	...	...	...	0
$\vdots$	...	$\cdot\cdot$	$-E$	$D$	$E$
$\vdots$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	0
0	$-E$	$D$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\vdots$
$-E$	$D$	$E$	$\cdot\cdot$	...	$\vdots$
$D$	$2E$	0	...	...	0



Bloco 4 :

$$\begin{array}{|cccccc|}
 \hline
 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\
 \vdots & \dots & \ddots & B & A & B \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & B & A & \ddots & \ddots & \vdots \\
 B & A & B & \ddots & \dots & \vdots \\
 A & 2B & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Bloco 5 :

$$\begin{array}{|cccccc|}
 \hline
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \dots & \ddots & E & C & -E \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & E & C & \ddots & \ddots & \vdots \\
 E & C & -E & \ddots & \dots & \vdots \\
 C & -2E & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Como recurso final para auxiliar a compreensão da organização da matriz  $K$  dos coeficientes, foi feito um esquema com a distribuição dos cinco blocos nesta matriz. A Fig. 3.4 mostra este esquema.

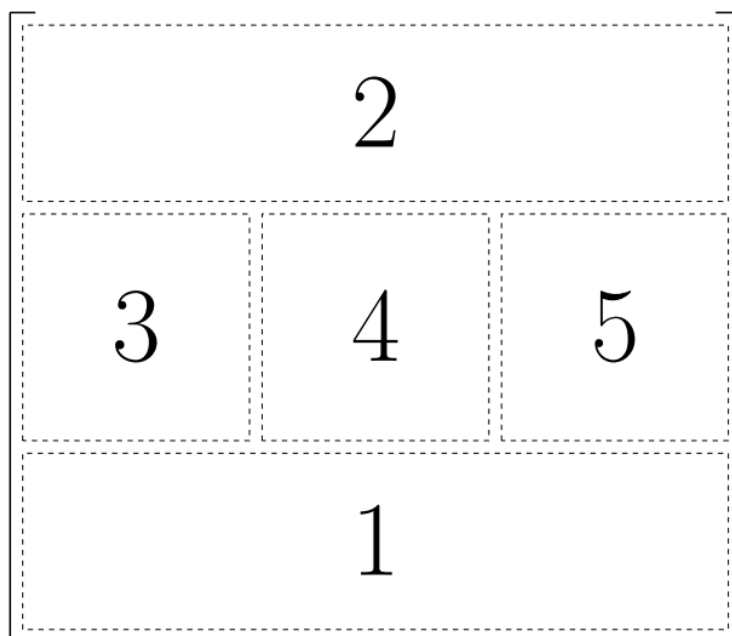


Figura 3.4: Posição dos blocos de coeficientes na matriz  $K$ .

### 3.3.2 Matriz das variáveis

A matriz  $m$  das variáveis é uma matriz coluna que contém os termos de velocidade em cada ponto da malha. As variáveis são organizadas em ordem crescente do valor de  $i$  e do valor de  $j$ . Para cada valor de  $i$  são listados todos os termos de velocidade em ordem crescente de  $j$ . Após o índice  $j$  atingir seu valor máximo, começam a ser listados os termos com o próximo valor de  $i$  e assim sucessivamente até que todos os termos de velocidade estejam na matriz. A Eq. (3.60) mostra a estruturação da matriz  $m$ .

$$m = \begin{bmatrix} u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ \vdots \\ u_{0,N} \\ u_{1,0} \\ \vdots \\ u_{N,N-1} \\ u_{N,N} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

### 3.3.3 Matriz dos termos independentes

Na matriz  $L$  dos termos independentes, assim como na matriz  $K$ , o índice das linhas na matriz segue a orientação do índice da malha. Isto significa que o primeiro termo independente está relacionado à equação para o termo de velocidade  $u_{N,N}$  e o último é relativo ao termo  $u_{0,0}$ .

Para os casos em que o termo de velocidade correspondente possui  $i = 0$  ou  $j = N$ , pelas condições de contorno expressas nas Eqs. (3.47) e (3.45), tem-se que a velocidade é nula. Desta forma, o termo independente da equação nestes pontos é nulo. Nos demais casos, isto é, para  $i \neq 0$  e  $j \neq N$ , o termo independente é  $-h^2$ , o que representa a altura do escoamento no ponto correspondente.

Portanto, os primeiros  $N$  termos de  $L$  são  $-h^2$  e o termo  $N + 1$  é nulo. Os  $N$  termos seguintes a este valem novamente  $-h^2$  e o subsequente a estes é nulo. Este padrão é repetido ao longo de toda a matriz, exceto para os últimos  $N + 1$  termos, que são todos nulos. A disposição da matriz  $L$  é tal que

$$L = \begin{bmatrix} -h^2 \\ -h^2 \\ \vdots \\ -h^2 \\ 0 \\ -h^2 \\ \vdots \\ -h^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

### 3.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Para obter o fluxo através do perfil do escoamento, é necessário integrar a velocidade ao longo desta seção. Uma vez que não há uma equação para a velocidade no escoamento, mas sim a velocidade em finitos pontos da malha, deve-se realizar uma integração numérica.

A Regra de Simpson é um modelo de aproximação para integrais definidas que consiste em utilizar parábolas para aproximar uma curva. A Regra de Simpson (Stewart, 2010) é tal que

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad (3.62)$$

em que  $n$  é o número par definido de subintervalos no intervalo  $[a, b]$  e

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad (3.63)$$

é o tamanho dos subintervalos. A Eq. (3.62) pode ser reescrita como

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right], \quad (3.64)$$

em que

$$x_i = a + i\Delta x \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.65)$$

sendo  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ .

Para domínios bidimensionais, uma estratégia possível para realizar uma integração numérica é separar as integrais e aplicar a Regra de Simpson duas vezes. Considerando a integral definida

$$\int_b^a \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy,$$

pode-se escrever

$$\int_b^a \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy = \int_b^a F(x) \, dx, \quad (3.66)$$

em que

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy. \quad (3.67)$$

Pela Eq. (3.64), é possível fazer a aproximação

$$F(x) \approx \frac{\Delta y}{3} \left\{ f[x, c] + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[x, c + (2j)\Delta y] + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[x, c + (2j-1)\Delta y] + f[x, d] \right\}. \quad (3.68)$$

Em seguida, utilizando novamente a Eq. (3.64), pode-se escrever

$$\int_b^a F(x) \, dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left\{ F[a] + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} F[a + (2i)\Delta x] + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} F[a + (2i-1)\Delta x] + F[b] \right\}, \quad (3.69)$$

em que

$$F[a] \approx \frac{\Delta y}{3} \left\{ f[a, c] + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[a, c + (2j)\Delta y] + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[a, c + (2j-1)\Delta y] + f[a, d] \right\}, \quad (3.70)$$

$$F[a + (2i)\Delta x] \approx \frac{\Delta y}{3} \left\{ f[a + (2i)\Delta x, c] + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[a + (2i)\Delta x, c + (2j)\Delta y] + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[a + (2i)\Delta x, c + (2j-1)\Delta y] + f[a + (2i)\Delta x, d] \right\}, \quad (3.71)$$

$$F[a + (2i-1)\Delta x] \approx \frac{\Delta y}{3} \left\{ f[a + (2i-1)\Delta x, c] + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[a + (2i-1)\Delta x, c + (2j)\Delta y] + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[a + (2i-1)\Delta x, c + (2j-1)\Delta y] + f[a + (2i-1)\Delta x, d] \right\} \quad (3.72)$$

e

$$F[b] \approx \frac{\Delta y}{3} \left\{ f[b, c] + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[b, c + (2j)\Delta y] + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[b, c + (2j-1)\Delta y] + f[b, d] \right\}. \quad (3.73)$$

Desta forma, a integral em um domínio bidimensional pode ser aproximada por

$$\begin{aligned}
\int_b^a \int_c^d f(x, y) dx dy \approx & \frac{\Delta x \Delta y}{9} \left\{ f[a, c] + f[a, d] + f[b, c] + f[b, d] \right. \\
& + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[a, c + (2j)\Delta y] + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[a, c + (2j-1)\Delta y] \\
& + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[b, c + (2j)\Delta y] + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[b, c + (2j-1)\Delta y] \\
& + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f[a + (2i)\Delta x, c] + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f[a + (2i)\Delta x, d] \\
& + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f[a + (2i-1)\Delta x, c] + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f[a + (2i-1)\Delta x, d] \\
& + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[a + (2i)\Delta x, c + (2j)\Delta y] + 8 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[a + (2i)\Delta x, c + (2j-1)\Delta y] \\
& \left. + 8 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f[a + (2i-1)\Delta x, c + (2j)\Delta y] + 16 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f[a + (2i-1)\Delta x, c + (2j-1)\Delta y] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Para validar a equação obtida para a integração numérica, aplicou-se esta equação na integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{y-x} dx dy, \tag{3.75}$$

que possui solução analítica e cujo valor exato com 10 dígitos é 0,2552519304. Implementando a Eq. (3.74) com  $n = m = 20$ , obtém-se o valor 0,2552519315, isto é, oito dígitos exatos.

Com relação ao problema atual, o fluxo  $Q$  é tal que

$$Q = 2 \int_0^1 \int_0^1 u(\eta, \xi) h(\eta) d\eta d\xi, \tag{3.76}$$

em que  $h(\eta)$  é a equação para a superfície livre e corresponde ao Jacobiano da transformação de coordenadas. Para obter o valor de  $Q$ , foi utilizada a Eq. (3.74) assumindo

$$a = c = 0,$$

$$b = d = 1$$

e

$$f(x, y) = u(\eta, \xi) h(\eta).$$

### 3.5 IMPLEMENTAÇÃO E VALIDAÇÃO

Para solucionar a equação de Poisson que rege o problema, o método das diferenças finitas foi implementado na linguagem de programação *Python*. Como explicado anteriormente, somente metade do domínio foi resolvido numericamente e o resultado foi, então, espelhado com relação ao eixo de simetria.

A validação do método numérico foi feita utilizando o resultado analítico obtido no Anexo IV. Para avaliar a convergência do método, observou-se a relação entre o erro relativo do fluxo com respeito à solução analítica para  $\beta = 90^\circ$  e o refinamento da malha (Fig. 3.5). O refinamento da malha foi quantificado como o inverso do número de elementos da malha, isto é,  $1/N$ . Utilizou-se malhas com  $N$  entre 128 e 1024 para se obter a curva da Fig. 3.5. Para  $1025^2$  nós, o erro relativo da solução numérica é de apenas 0,06%. A ordem de convergência obtida para o método foi de 0,56. Este valor inesperado para a ordem se deve ao fato de a mudança de coordenadas introduzir não linearidades na equação governante. Quanto ao tempo computacional, para este mesmo refinamento ( $N = 1024$ ), o método numérico requer 3 minutos e 49 segundos para finalizar todos os cálculos desejados.

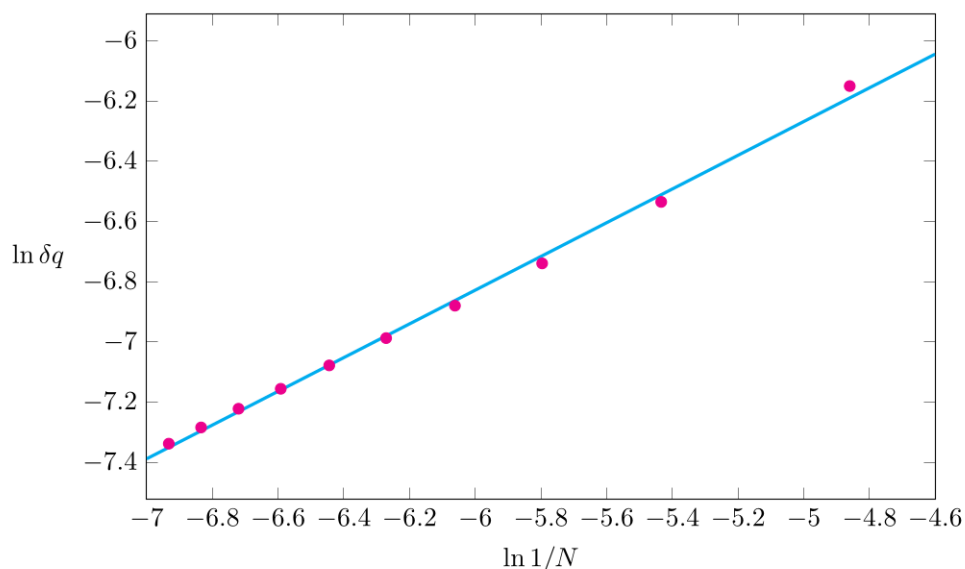


Figura 3.5: Erro relativo do fluxo em função do número de elementos da malha.

Um exemplo de resultado do programa é mostrado na Fig. 3.6, que mostra o campo de velocidade para o ângulo de contato de  $90^\circ$ .

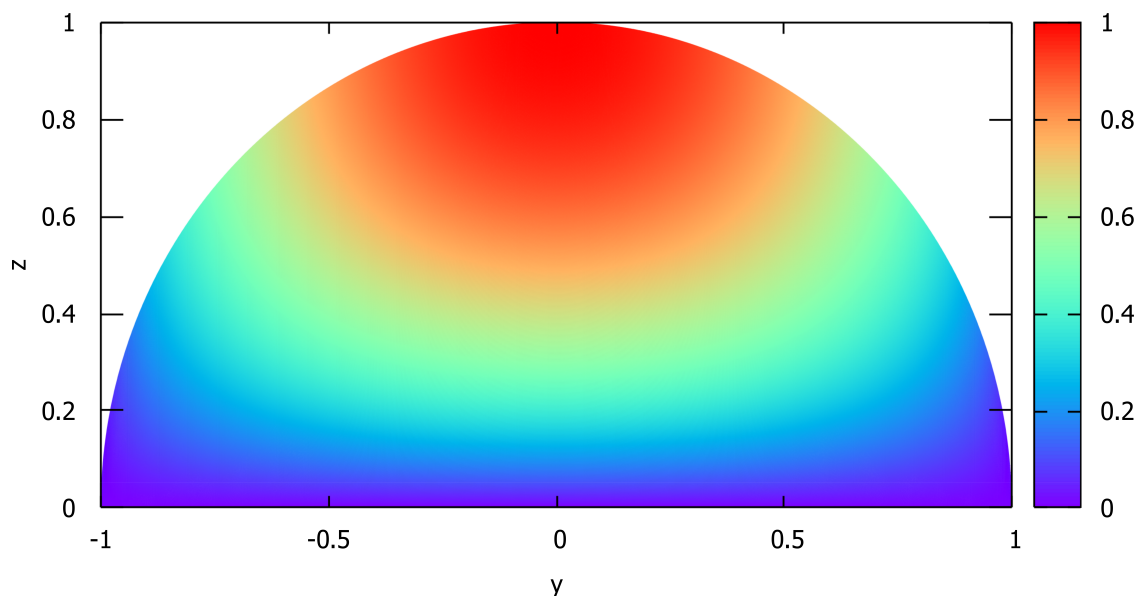


Figura 3.6: Campo de velocidade obtido para  $\beta = 90^\circ$ .

## 4 TEORIA DA LUBRIFICAÇÃO

Como previamente comentado, soluções analíticas são de difícil obtenção para o problema da cascata escoando sobre um plano inclinado. Soluções numéricas, por sua vez, podem ser desenvolvidas a fim de se estudar o comportamento do escoamento sem aproximações na formulação. Entretanto, quando a solução completa não é necessária ou é desejada uma solução que apresente simplicidade, é interessante o uso de modelos reduzidos obtidos por meio da teoria da lubrificação. A teoria da lubrificação pressupõe que há uma discrepância entre escalas do problema, de forma que é possível simplificá-lo e obter uma solução aproximada.

Nesta seção serão apresentados cinco modelos reduzidos. Primeiramente, para a parede vertical, é desenvolvido um modelo que conserva a razão de aspecto do escoamento, apresenta-se um modelo bastante utilizado na literatura e, por último, obtém-se um modelo que conserva a curvatura da superfície livre. Em seguida, as ideias utilizadas para a parede vertical serão adaptadas para a parede inclinada, a fim de se desenvolver, também para este caso, um modelo que conserva a razão de aspecto do problema e outro que conserva a curvatura da superfície livre.

No desenvolvimento dos modelos para a parede vertical, as variáveis são adimensionalizadas com respeito ao tamanho  $a$ , isto é, a largura do perfil do escoamento é fixa nestes modelos. Por outro lado, nos modelos para a parede inclinada, a adimensionalização é feita em relação a  $H_0$ , de modo que a altura do perfil é fixada. Essa diferença de abordagem ocorre porque, no caso vertical, foi seguido o desenvolvimento feito por Towell e Rothfeld (1966) – trabalho basilar nesta área –, enquanto que, no caso inclinado, que é evidentemente mais complexo, foi conveniente acompanhar o trabalho de Perazzo e Gratton (2004) para compreender melhor o comportamento dos modelos. Apesar disso, como mostrado posteriormente, quando o ângulo de inclinação tende a  $90^\circ$ , os resultados dos modelos para o plano inclinado correspondem aos resultados dos modelos para parede vertical, mostrando que ambas as abordagens são adequadas.

### 4.1 PAREDE VERTICAL

Para o caso da parede vertical, é conveniente adimensionalizar as variáveis com relação à largura  $a$  do perfil seguindo Towell e Rothfeld (1966), de modo que

$$y = a\hat{y}, \quad (4.1)$$

$$z = \epsilon a\hat{z} \quad (4.2)$$

e

$$h = \epsilon a\hat{h}. \quad (4.3)$$



em que  $\epsilon \ll 1$  é um parâmetro de perturbação a ser definido posteriormente para diferentes casos. Considera-se que a largura do perfil é muito maior que a altura deste e, por isso, definiu-se que  $z$  e  $h$  são proporcionais a  $\epsilon$ . Nestas equações, o acento circunflexo identifica variáveis adimensionais. Supõe-se, a princípio, que a velocidade é

$$u = U\hat{u}, \quad (4.4)$$

em que  $U$  é uma escala de velocidade que ainda será determinada. Substituindo as variáveis adimensionais na equação governante (2.70), tem-se

$$\frac{U}{a^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{U}{\epsilon^2 a^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} = -\frac{\rho g}{\mu}, \quad (4.5)$$

A teoria da lubrificação assume que há uma discrepância entre as escalas do problema, de forma que  $\epsilon \ll 1$ . Desta maneira, é possível inferir que

$$\mathcal{O}\left(\frac{U}{\epsilon^2 a^2}\right) \sim \mathcal{O}\left(\frac{\rho g}{\mu}\right), \quad (4.6)$$

isto é, uma escala de velocidade adequada é

$$U = \frac{\epsilon^2 a^2 \rho g}{\mu}. \quad (4.7)$$

Assim, a equação governante (2.88) se torna

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} = -1, \quad (4.8)$$

sujeita às condições de contorno

$$\hat{u} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{z} = 0 \quad (4.9)$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = \epsilon^2 \hat{h}' \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \quad \text{em} \quad \hat{z} = \hat{h}. \quad (4.10)$$

Mantendo apenas os termos de ordem dominante, as equações anteriores se tornam,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} = -1, \quad (4.11)$$

$$\hat{u} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{z} = 0 \quad (4.12)$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{z} = \hat{h}, \quad (4.13)$$

cuja solução é simplesmente

$$\hat{u} = \frac{1}{2}(2\hat{h}\hat{z} - \hat{z}^2), \quad (4.14)$$

ou, na forma dimensional,

$$u = \frac{\rho g}{2\mu} (2hz - z^2). \quad (4.15)$$

Por outro lado, para a superfície livre, substitui-se as variáveis adimensionais na Eq. (2.81), obtendo-se

$$\left[ \frac{\hat{h}''}{(1 + \epsilon^2 \hat{h}'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' = 0. \quad (4.16)$$

As condições de contorno (2.33), (2.34) e (2.35), por sua vez, se tornam

$$\hat{h}(1) = 0, \quad (4.17)$$

$$\hat{h}'(0) = 0 \quad (4.18)$$

e

$$\hat{h}'(1) = -\frac{1}{\epsilon} \tan \beta. \quad (4.19)$$

Uma vez que a solução por lubrificação para a superfície livre depende do parâmetro de perturbação  $\epsilon$ , diferentes modelos reduzidos podem ser obtido a depender da definição de tal parâmetro. A seguir, são apresentados três modelos aproximados para a cascata em um plano vertical.

#### 4.1.1 Conservando a razão de aspecto

A altura do perfil do escoamento corresponde ao valor de  $h$  para  $y = 0$ . Por meio da Eq. (2.87), apreende-se que a altura do perfil é

$$b = \frac{a}{\sin \beta} (1 - \cos \beta). \quad (4.20)$$

Como

$$\frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \tan \frac{\beta}{2}, \quad (4.21)$$

pode-se escrever

$$b = a \tan \frac{\beta}{2}. \quad (4.22)$$

Assim, a razão de aspecto que caracteriza o problema é

$$\epsilon = \frac{b}{a}, \quad (4.23)$$

isto é,

$$\epsilon = \tan \frac{\beta}{2}. \quad (4.24)$$

É interessante notar que

$$\tan \beta = \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{2\epsilon}{1 - \epsilon^2}, \quad (4.25)$$

de forma que a Eq. (4.19) pode ser reescrita como

$$\hat{h}'(1) = -\frac{2}{1 - \epsilon^2}. \quad (4.26)$$

Mantendo apenas os termos de ordem dominante, a Eq. (4.16) se torna

$$\hat{h}''' = 0, \quad (4.27)$$

sujeita as condições de contorno

$$\hat{h}(1) = 0, \quad (4.28)$$

$$\hat{h}'(0) = 0 \quad (4.29)$$

e

$$\hat{h}'(1) = -2. \quad (4.30)$$

Desta maneira, a equação para a superfície livre é

$$\hat{h} = 1 - \hat{y}^2. \quad (4.31)$$

Na forma dimensional, a Eq. (4.31) se apresenta como

$$h = \epsilon a \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right), \quad (4.32)$$

isto é,

$$h = \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{a} (a^2 - y^2). \quad (4.33)$$

É possível notar que a superfície livre, cujo formato exato é um arco de círculo, é aproximada por um arco de parábola de altura  $b$  e largura  $2a$  neste caso.

O fluxo é determinado integrando o perfil de velocidade obtido ao longo da área do perfil do escoamento, de forma que

$$Q = \frac{\rho g}{\mu} \int_0^a \int_0^{h(y)} (2hz - z^2) dz dy. \quad (4.34)$$

Utilizando a equação linearizada (4.33), o fluxo é tal que

$$Q = \frac{2\rho g \tan^3 \frac{\beta}{2}}{3\mu a^3} \int_0^a (a^2 - y^2)^3 dy. \quad (4.35)$$

Expandindo, tem-se

$$Q = \frac{2\rho g \tan^3 \frac{\beta}{2}}{3\mu a^3} \int_0^a (-y^6 + 3a^2 y^4 - 3a^4 y^2 + a^6) dy, \quad (4.36)$$

que, após a integração, resulta em

$$Q = \frac{2\rho g \tan^3 \frac{\beta}{2}}{3\mu a^3} \left[ -\frac{y^7}{7} + \frac{3a^2 y^5}{5} - a^4 y^3 + a^6 y \right]_0^a. \quad (4.37)$$

O fluxo é, então,

$$Q = \frac{\rho g a^4}{\mu} q, \quad (4.38)$$

em que

$$q = \frac{32 \tan^3 \frac{\beta}{2}}{105}. \quad (4.39)$$

Para um ângulo de contato de  $90^\circ$ , a Eq. (4.39) vale

$$q = \frac{32}{105} = 0,304761\dots, \quad (4.40)$$

que é aproximadamente 15,7% menor que o valor analítico calculado no Anexo IV (0,3616632...). Este é um modelo reduzido novo que não foi encontrado na literatura.

#### 4.1.2 Modelo comum na literatura

A maioria dos trabalhos na literatura utiliza  $\epsilon = \tan \beta$  como parâmetro de perturbação para o problema da cascata (Duffy e Moffatt (1995), Holland, Duffy e Wilson (2001) e Mukahal, Wilson e Duffy (2015) por exemplo). Esta escolha de parâmetro está provavelmente associada à condição geométrica  $h'(a) = -\tan \beta$ , visto que é natural observá-la e deduzir que este parâmetro está associado com a discrepância de escalas do problema. Além disso, caso a forma exata da superfície livre não seja calculada, não se conhece, a princípio, a razão de aspecto do escoamento.

No limite  $\beta \rightarrow 0$ , os parâmetros  $\epsilon = \tan \frac{\beta}{2}$  e  $\epsilon = \tan \beta$  são ambos pequenos, de forma que, neste limite, ambos são adequados. Entretanto, à medida que  $\epsilon$  cresce, é possível que a adoção de um parâmetro diferente da razão de aspecto do problema afete a coerência da solução por lubrificação com relação à solução completa. Apesar de a análise de lubrificação ser teoricamente válida apenas para  $\epsilon \ll 1$ , é interessante avaliar o seu comportamento para todos os ângulos de contato do problema.

Para  $\beta$  suficientemente pequeno, pode-se afirmar que

$$\tan \frac{\beta}{2} \approx \frac{1}{2} \tan \beta. \quad (4.41)$$

Aplicando esta aproximação nas Eqs. (4.33) e (4.39), obtém-se, para a superfície livre,

$$h = \frac{\tan \beta}{2a} (a^2 - y^2) \quad (4.42)$$

e, para o fluxo adimensional,

$$q = \frac{4 \tan^3 \beta}{105}. \quad (4.43)$$

Estas equações são exatamente iguais às obtidas por Duffy e Moffatt (1995). A Eq. (4.42) aproxima o formato da superfície livre por uma parábola de altura  $\frac{a \tan \beta}{2}$  e comprimento  $2a$ . Para casos em que  $\beta$  não é pequeno,

$$\frac{1}{2} \tan \beta > \tan \frac{\beta}{2}, \quad (4.44)$$

de forma que este modelo superestima a área do perfil. Além disso, nota-se pela Eq. (4.43) que, para  $\beta = 90^\circ$ , o fluxo através do perfil diverge, o que não é coerente fisicamente.

### 4.1.3 Conservando a curvatura da superfície livre

Por último, ao invés de estender a lubrificação ao formato da superfície livre, neste modelo, conserva-se o perfil exato desta. Assim, a superfície livre é dada pela Eq. (2.87) e o fluxo é dado por

$$Q = \frac{2\rho g a^3}{3\mu \sin^3 \beta} \int_0^a \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2} \sin^2 \beta} - \cos \beta \right)^3 dy. \quad (4.45)$$

A solução desta integral está detalhada no Anexo V e é tal que

$$Q = \frac{\rho g a^4}{\mu} q, \quad (4.46)$$

em que

$$q = \frac{12\beta \cos^2 \beta + 3\beta - 2 \sin \beta \cos^3 \beta - 13 \sin \beta \cos \beta}{12 \sin^4 \beta}. \quad (4.47)$$

Para um ângulo de contato de  $90^\circ$ , a expressão acima se torna

$$q = \frac{\pi}{8} = 0,392699 \dots, \quad (4.48)$$

que é apenas 8,6% maior que o valor analítico mostrado no Anexo IV (0,3616632...). A Eq. (4.47) já havia sido obtida por Towell e Rothfeld (1966), Semiat, Moalem-Maron e Sideman (1980) e Gajewski e Trela (2002), mas não foi encontrado nenhum estudo comparativo que mostrasse os efeitos da conservação da curvatura no problema da cascata. Espera-se que incorporar o formato exato da superfície livre ao invés de linearizá-lo resulte em uma aproximação mais coerente da análise por lubrificação.

## 4.2 PAREDE INCLINADA

A conservação da razão de aspecto do escoamento e a conservação do formato da superfície livre serão, agora, aplicadas à parede inclinada. Neste caso, é conveniente adimensionalizar as va-

riáveis com relação à altura  $H_0$  do perfil seguindo Perazzo e Gratton (2004). Adimensionalizando as variáveis  $y$  e  $z$  e considerando um parâmetro de perturbação  $\epsilon \ll 1$ , tem-se

$$y = H_0 \hat{y} \quad (4.49)$$

e

$$Z = \epsilon H_0 \hat{Z}. \quad (4.50)$$

Além disso, tem-se

$$H = \epsilon H_0 \hat{H}. \quad (4.51)$$

De forma análoga ao caso vertical, a velocidade se torna

$$u = \frac{\epsilon^2 H_0^2 \rho g \sen \alpha}{\mu} \hat{u}. \quad (4.52)$$

Assim, a equação governante (2.70) se torna

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{Z}^2} = -1 \quad (4.53)$$

sujeita às condições de contorno

$$\hat{u} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{Z} = \zeta_p \quad (4.54)$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{Z}} = \epsilon^2 \frac{d\zeta}{d\eta} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \quad \text{em} \quad \hat{Z} = \zeta. \quad (4.55)$$

Mantendo apenas os termos de ordem dominante, as Eqs. (4.53), (4.54) e (4.55) se tornam, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{Z}^2} = -1, \quad (4.56)$$

$$\hat{u} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{Z} = \zeta_p \quad (4.57)$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{Z}} = 0 \quad \text{em} \quad \hat{Z} = \zeta, \quad (4.58)$$

cuja solução é

$$\hat{u} = -\frac{\hat{Z}^2}{2} + \zeta \hat{Z} + \zeta_p \left( \frac{\zeta_p}{2} - \zeta \right). \quad (4.59)$$

A Eq. (4.59) é a aproximação por lubrificação do campo de velocidade do problema conforme obtido por Perazzo e Gratton (2004).

#### 4.2.1 Conservando a razão de aspecto

Para obter uma aproximação para o formato da superfície livre, substitui-se as variáveis adimensionais (4.49) – (4.51) em (2.42), de modo que

$$KH_0^2 \hat{H}' = \left[ \frac{\hat{H}''}{(1 + \epsilon^2 \hat{H}'^2)^{\frac{3}{2}}} \right]'. \quad (4.60)$$

Mantendo apenas os termos de ordem dominante, a Eq. (4.60) se resume a

$$KH_0^2 \hat{H}' = \hat{H}'''. \quad (4.61)$$

Pela definição feita em (2.55), pode-se escrever

$$2\lambda \hat{H}' = \hat{H}'''. \quad (4.62)$$

Agora, utilizando utilizando as variáveis definidas em (2.61) e (4.51), a equação anterior pode ser apresentada como

$$2\lambda \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{d^3\zeta}{d\eta^3}. \quad (4.63)$$

A solução desta equação diferencial é

$$\zeta = c_1 + c_2 \cosh(\sqrt{2\lambda}\eta) + c_3 \sinh(\sqrt{2\lambda}\eta), \quad (4.64)$$

em que  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são constantes. Utilizando a condição de contorno

$$\zeta'(0) = 0 \quad (4.65)$$

tem-se que

$$c_3 = 0. \quad (4.66)$$

Assim, a Eq. (4.64) é resumida a

$$\zeta = c_1 + c_2 \cosh(\sqrt{2\lambda}\eta). \quad (4.67)$$

Por outro lado, como

$$H = H_0 \quad \text{em} \quad y = 0, \quad (4.68)$$

tem-se que

$$\zeta = 1 \quad \text{em} \quad \eta = 0. \quad (4.69)$$

Sendo assim, deve-se ter que

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (4.70)$$

e, conseqüentemente, a Eq. (4.67) se torna

$$\zeta = c_1 + (1 - c_1) \cosh(\sqrt{2\lambda}\eta). \quad (4.71)$$

Manipulando a equação anterior, é possível escrever

$$\zeta = 1 - (1 - c_1)[1 - \cosh(\sqrt{2\lambda}\eta)], \quad (4.72)$$

ou, ainda,

$$\zeta = 1 + C[1 - \cosh(\sqrt{2\lambda}\eta)], \quad (4.73)$$

em que  $C$  é uma constante que pode ser obtida a partir dos valores de  $\zeta_p$  e  $\eta_p$  (coordenadas do ponto de contato gás/líquido/sólido em  $\zeta$  e  $\eta$ ). A Eq. (4.73) é a aproximação por lubrificação do formato da superfície livre de uma cascata em um plano inclinado. É interessante evidenciar que esta expressão aproximada conserva a razão de aspecto do perfil da superfície livre. Isto ocorre porque  $\zeta_p$  e  $\eta_p$  são pontos da superfície livre completa obtidos a partir das Eqs. (2.68) e (2.69) e também porque, em  $\eta = 0$ , tem-se  $\zeta = 1$  pela Eq. (4.73), que também corresponde a um ponto da superfície livre completa.

O fluxo do escoamento é determinado integrando o campo de velocidade (4.59) na área do perfil do escoamento. Neste modelo, isso implica que

$$q = \int_{-\eta_p}^{\eta_p} \int_{\zeta_p}^{\zeta} \left[ -\frac{\hat{Z}^2}{2} + \zeta \hat{Z} + \zeta_p \left( \frac{\zeta_p}{2} - \zeta \right) \right] d\hat{Z} d\eta, \quad (4.74)$$

isto é,

$$q = \int_{-\eta_p}^{\eta_p} \frac{(\zeta - \zeta_p)^3}{3} d\eta. \quad (4.75)$$

Substituindo a Eq. (4.73), o fluxo se torna

$$q = \int_{-\eta_p}^{\eta_p} \frac{\{1 + C[1 - \cosh(\sqrt{2\lambda}\eta)] - \zeta_p\}^3}{3} d\eta. \quad (4.76)$$

Esta integral pode ser calculada analiticamente, entretanto, devido à complexidade de tal solução, optou-se por avaliá-la numericamente através da regra do trapézio.

#### 4.2.2 Conservando a curvatura da superfície livre

Neste modelo reduzido utiliza-se a Eq. (4.59) para o campo de velocidade, mas conserva-se o formato da superfície livre, isto é, as Eqs. (2.68) e (2.69) são utilizadas ao invés da Eq. (4.73). Assim, o fluxo é calculado a partir da integração numérica da Eq. (4.75) utilizando a regra do trapézio e por meio de valores obtidos pelas Eqs. (2.68) e (2.69).



## 5 ANÁLISE PARA A PAREDE VERTICAL

Este capítulo tem como objetivo principal avaliar o comportamento dos modelos para o caso em que a cascata escoar sobre um plano vertical. Primeiramente, serão avaliadas variáveis globais do problema. A solução obtida numericamente será referenciada como Numérico. O modelo mais utilizado na literatura será denominado Clássico e o modelo proposto neste trabalho com o novo parâmetro de perturbação que conserva a razão de aspecto do problema será identificado como Razão de Aspecto. Por último, o modelo que incorpora a expressão exata da superfície livre é referenciado como Curvatura Completa.

A Fig. 5.1 mostra a área da seção transversal do escoamento em função do ângulo de contato  $\beta$ . A lubrificação clássica superestima a área e o modelo novo, para conservar a razão de aspecto, a subestima. Apesar de nestes dois modelos a superfície livre ser aproximada por arcos de parábola, no modelo Clássico a altura da parábola, para  $\beta > 0^\circ$ , é sempre maior que a altura verdadeira e acaba por divergir em  $\beta = 90^\circ$ . Desta forma, o crescimento fisicamente incoerente apresentado por este modelo é esperado. Por outro lado, o arco de parábola do modelo que conserva a razão de aspecto tem sempre as mesmas altura e largura que o arco de círculo real, apresentando, portanto, uma área menor que aquela da solução completa. Por sua vez, o modelo com a curvatura completa apresenta a área do perfil idêntica à solução completa, uma vez que a expressão exata da superfície livre é incorporada neste modelo.

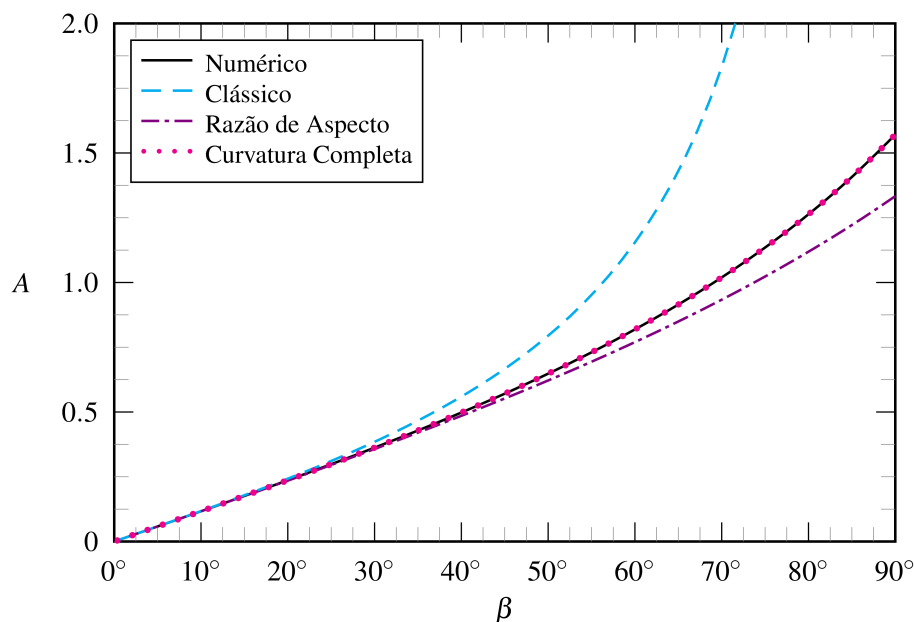


Figura 5.1: Área do perfil em função do ângulo de contato para a parede vertical.

A Fig. 5.2 mostra o fluxo  $q$  em função do ângulo de contato  $\beta$ . Percebe-se que o fluxo cresce à medida que o ângulo de contato aumenta, conforme esperado. A aproximação clássica é válida

para

$$\epsilon = \tan \beta \ll 1, \quad (5.1)$$

isto é,

$$\beta \ll 45^\circ. \quad (5.2)$$

Por outro lado, os modelos Razão de Aspecto e Curvatura Completa são válidos para

$$\epsilon = \tan \frac{\beta}{2} \ll 1, \quad (5.3)$$

isto é,

$$\beta \ll 90^\circ. \quad (5.4)$$

Assim, para valores pequenos de  $\beta$  os três modelos reduzidos correspondem bem à solução completa. Entretanto, conforme o ângulo de contato aumenta, o modelo clássico passa a se afastar rapidamente da solução numérica e diverge. Os outros dois modelos, em contrapartida, concordam com a solução completa para ângulos mais altos e, mesmo além do intervalo de aplicação, retornam valores razoáveis para o fluxo. Para  $90^\circ$ , caso em que a solução aproximada é mais distante da numérica, o erro no cálculo do fluxo é de 15,7% para o modelo que conserva a razão de aspecto e de apenas 8,6% para o modelo com a curvatura completa.

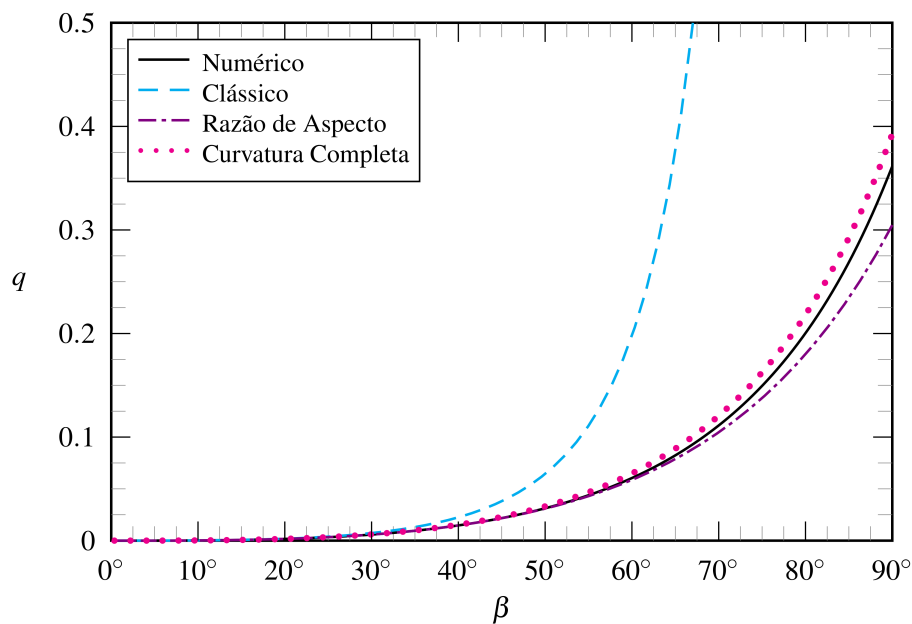


Figura 5.2: Fluxo em função do ângulo de contato para a parede vertical.

A Fig. 5.3 mostra a velocidade máxima do escoamento em função do ângulo de contato  $\beta$ . É possível perceber que todos os modelos reduzidos superestimam a velocidade no perfil. Isso se deve ao fato de o campo de velocidade ser aproximado por parábolas nestes modelos. Além disso, nota-se que a velocidade máxima é igual para os modelos Razão de Aspecto e Curvatura Completa. Como estes dois modelos aproximam o campo de velocidade pela mesma parábola

e possuem a mesma altura máxima, é esperado que suas curvas de velocidade máxima sejam coincidentes.

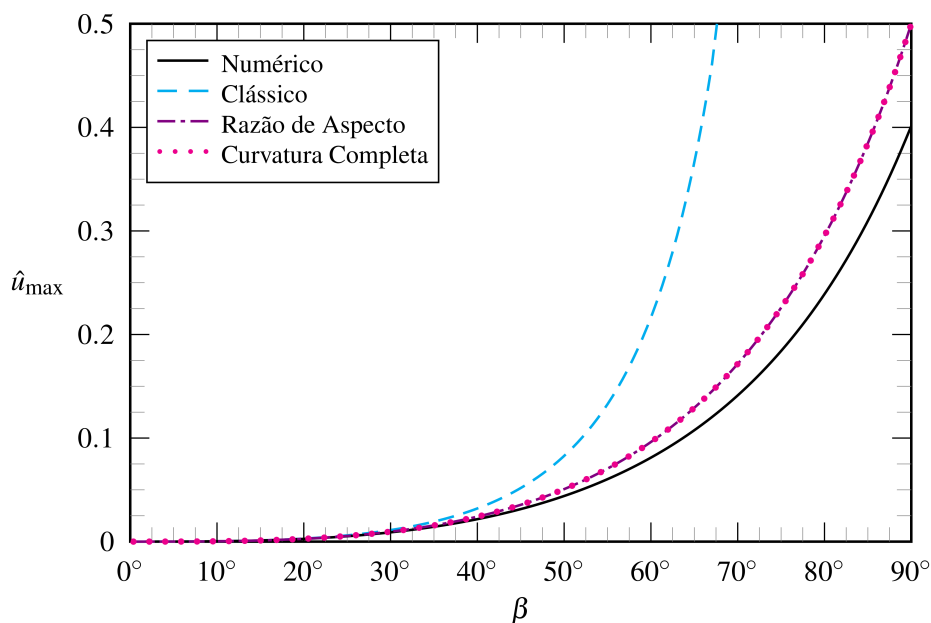


Figura 5.3: Velocidade máxima em função do ângulo de contato para a parede vertical.

A análise das variáveis globais permite concluir que, no intervalo  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ , o erro dos modelos reduzidos é maior no caso em que o ângulo é de  $90^\circ$ . Os modelos Razão de Aspecto e Curvatura Completa correspondem bem à solução completa da equação de Navier-Stokes obtida numericamente. A lubrificação com a curvatura completa é o modelo reduzido que apresenta os melhores resultados, com um erro abaixo de 9% para o fluxo no pior caso. Esta é uma melhora significativa comparada aos resultados da lubrificação clássica que, apesar de ser a solução mais comumente empregada na literatura, é satisfatória apenas para  $\beta < 35^\circ$  aproximadamente. Para ângulos pouco maiores, o modelo clássico se afasta da solução exata e diverge, sendo interessante, portanto, utilizar os outros modelos reduzidos para aumentar o intervalo de aplicabilidade da análise por lubrificação em trabalhos anteriores e futuros.

A Fig. 5.4 mostra o campo de velocidade normalizado para o ângulo de contato de  $30^\circ$  para (a) a solução numérica, (b) o modelo com a razão de aspecto conservada, (c) o modelo com curvatura completa e (d) o modelo clássico. É possível perceber que, para este valor de ângulo de contato, a distribuição de velocidade exata (Fig. 5.4(a)) é muito bem aproximada pelos modelos reduzidos. É válido notar, ainda, que o formato da superfície livre nas Figs. 5.4(b) e 5.4(d), apesar de ser um arco de parábola, aproxima de forma excelente o arco de circunferência das Figs. 5.4(a) e 5.4(c) neste caso.

A Fig. 5.5 mostra o campo de velocidade normalizado para o ângulo de contato de  $90^\circ$  para (a) a solução numérica, (b) o modelo com a razão de aspecto conservada e (c) o modelo com curvatura completa. Não é possível exibir o campo de velocidade do modelo clássico neste caso, pois a solução diverge para  $\beta = 90^\circ$ . Observando estas imagens, evidencia-se a diferença do formato da

superfície livre entre elas. Para baixos ângulos, a aproximação do arco de circunferência por um arco de parábola é satisfatória. Entretanto, à medida que o ângulo de contato aumenta, esta apro-

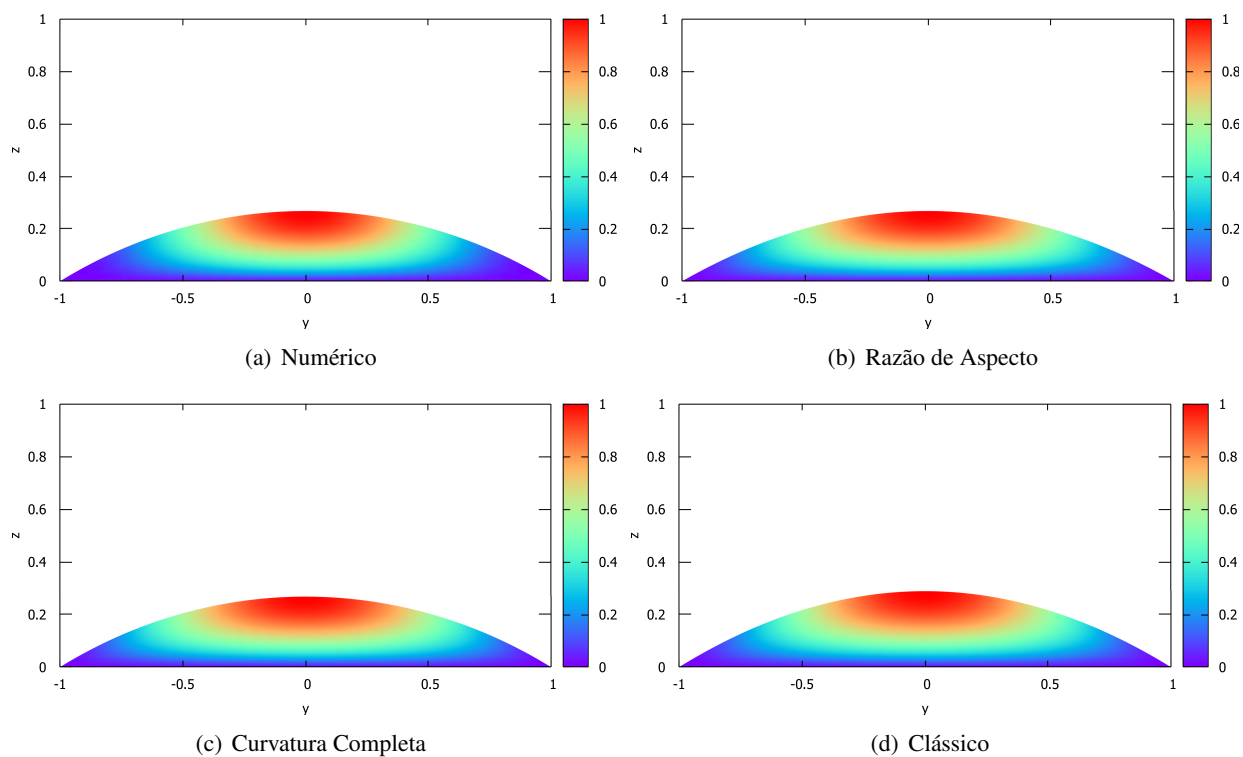


Figura 5.4: Campo de velocidade normalizado para  $\beta = 30^\circ$ .

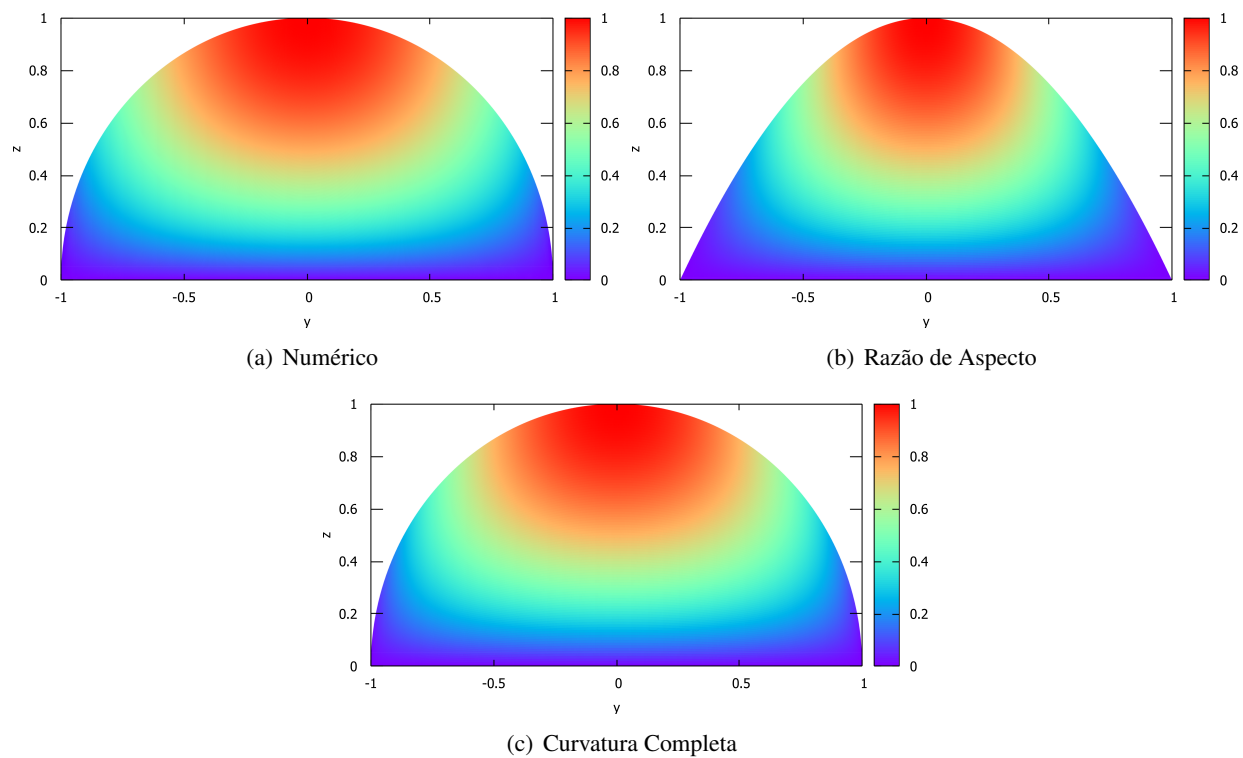


Figura 5.5: Campo de velocidade normalizado para  $\beta = 90^\circ$ .

ximação se torna cada vez mais grosseira e, para  $\beta = 90^\circ$ , se torna claro o contraste. Comparando a lubrificação com curvatura completa e a solução numérica, nota-se que, qualitativamente, a distribuição da velocidade é muito bem aproximada por este modelo reduzido. É válido ressaltar que as Figs. 5.5(b) e 5.5(c) são para o caso em que os modelos tem o pior desempenho e, ainda assim, os resultados globais são apropriados.

Os resultados discutidos neste capítulo se referem ao escoamento em cascata em planos verticais. Entretanto, a partir desta análise, é interessante avaliar, em seguida, como as ideias utilizadas para a parede vertical podem ser aproveitadas para paredes inclinadas.

## 6 ANÁLISE PARA A PAREDE INCLINADA

Uma vez que ora conservar a razão de aspecto do perfil, ora conservar o formato de sua superfície livre implicou em resultados adequados para o caso do plano vertical, deseja-se averiguar os efeitos destas decisões para planos inclinados. Assim, neste capítulo serão avaliados os modelos Razão de Aspecto e Curvatura Completa considerando a inclinação da parede de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  em relação à horizontal.

Primeiramente, nas Figs. 6.1–6.3 são mostrados exemplos de perfis da seção transversal do escoamento e a área dos perfis em função do ângulo de contato para o modelo Razão de Aspecto e para o modelo Curvatura Completa. Uma vez que este último conserva o formato da superfície livre, o perfil Curvatura Completa mostrado nos painéis corresponde ao perfil exato do escoamento. Por outro lado, o modelo Razão de Aspecto conserva três pontos da superfície real e, portanto, é uma aproximação. Nos painéis para  $\beta = 60^\circ$  e  $\beta = 30^\circ$ , repara-se que o perfil não está em contato com o eixo  $\eta$ , o que ocorre devido ao fato de  $\zeta = 0$  ser um plano de referência criado para formular matematicamente o problema. Assim, apesar de não representada nestas imagens, a parede em que ocorre o escoamento está sobre a reta que une os dois pontos do perfil mais distantes em  $\eta$ .

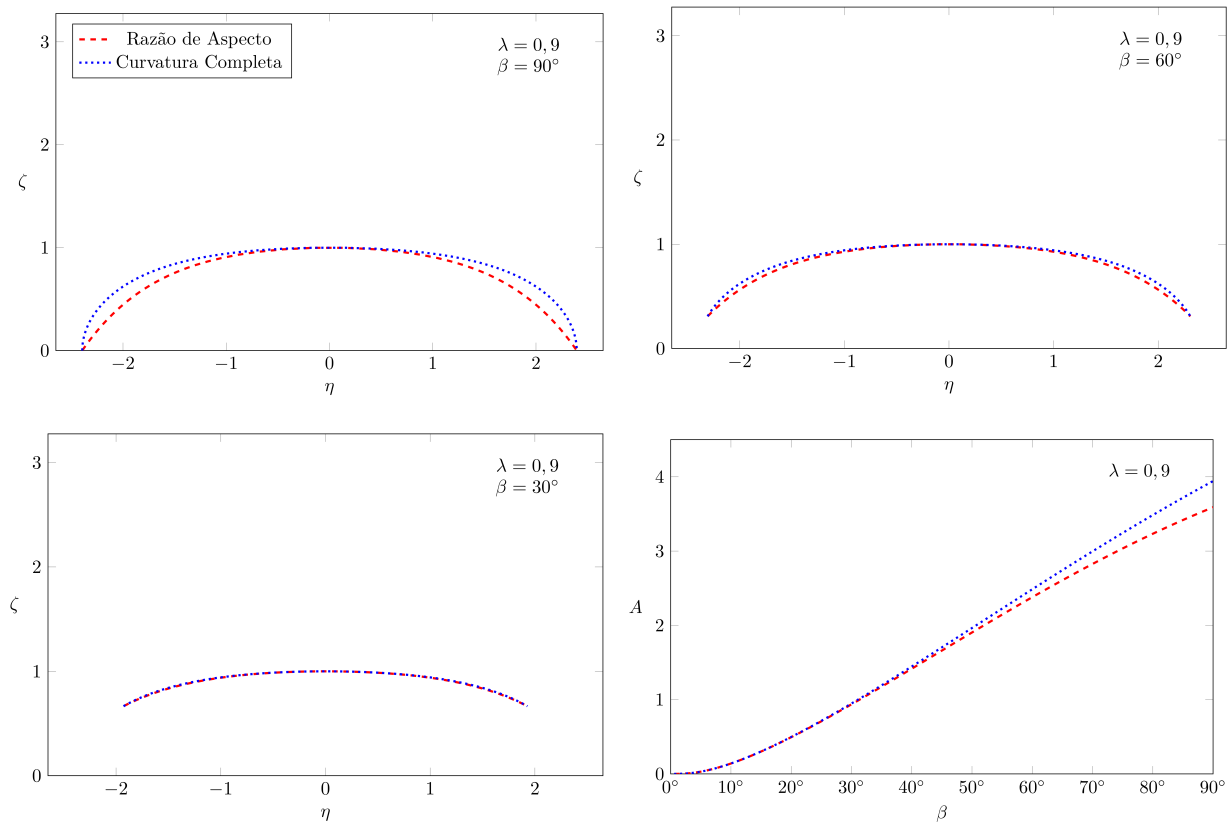


Figura 6.1: Exemplos de perfis e área do perfil em função do ângulo de contato para  $\lambda = 0,9$ .

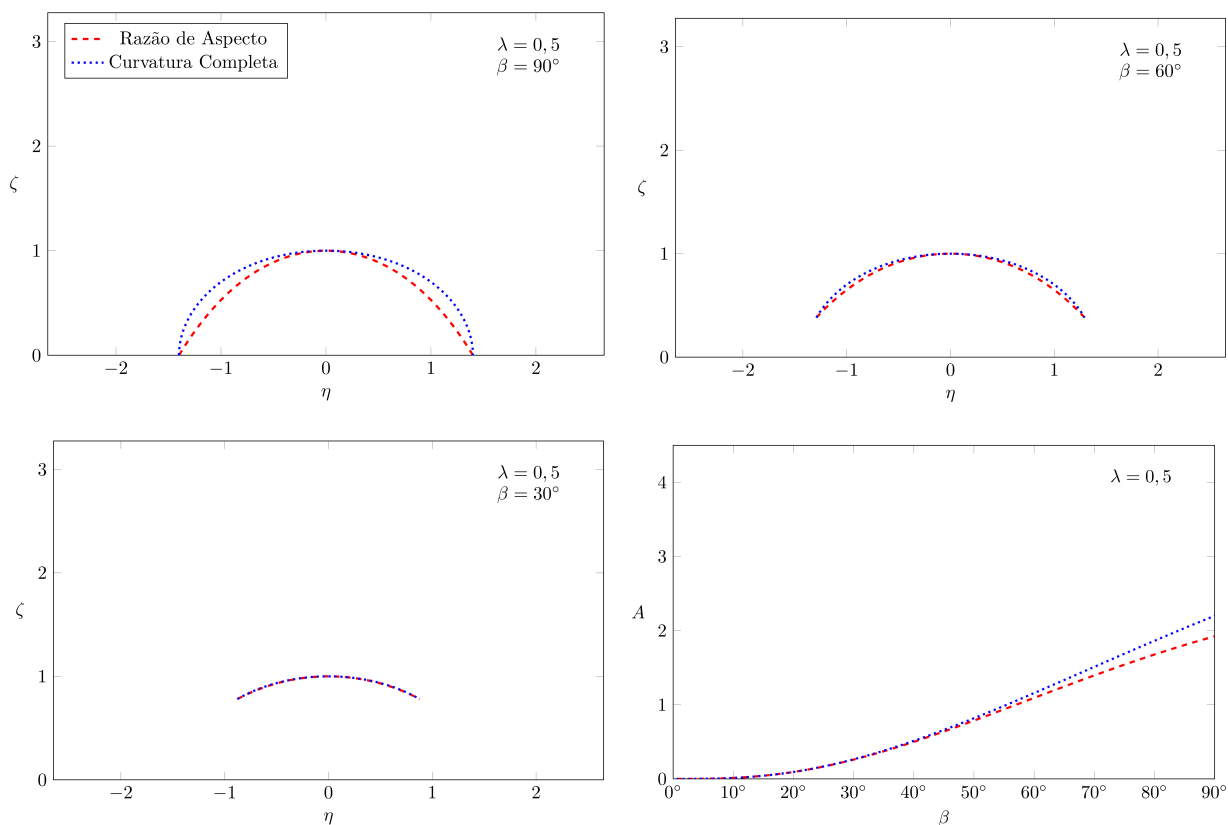


Figura 6.2: Exemplos de perfis e área do perfil em função do ângulo de contato para  $\lambda = 0,5$ .

A Fig. 6.1 ( $\lambda = 0,9$ ) mostra o caso de uma parede quase horizontal; a Fig. 6.2 mostra um caso intermediário ( $\lambda = 0,5$ ); e a Fig. 6.3 expõe perfis para o caso em que  $\lambda = 0,1$ , isto é, próximo ao plano vertical. Analisando qualitativamente, observa-se que os perfis que conservam a curvatura aparentam ter o formato de segmentos de circunferência na Fig. 6.3, o que está de acordo com a análise realizada para o caso específico em que a parede é vertical.

É possível perceber que, para um mesmo valor de  $\lambda$ , a aproximação oferecida pelo modelo Razão de Aspecto melhora à medida que o ângulo de contato  $\beta$  diminui, sendo excelente para o ângulo de  $30^\circ$  por exemplo. Além disso, é necessário observar que, para um mesmo ângulo de contato, exceto  $\beta = 90^\circ$ , a altura do perfil em relação à parede do escoamento é tão maior quanto maior for  $\lambda$ . É interessante notar, ainda, que, conforme a inclinação da parede diminui ( $\lambda \rightarrow 1$ ), o perfil se torna mais achatado. Isso se deve ao fato de que, à medida que a parede se aproxima da horizontal, a componente  $z$  do campo gravitacional cresce, aumentando, assim, a influência deste campo sobre a superfície livre.

Avaliando os painéis referentes à área do perfil em função do ângulo de contato, constata-se que, quanto menor o valor de  $\lambda$ , maior é o intervalo de  $\beta$  para o qual os dois modelos coincidem. Na Fig. 6.3, nota-se que a área do perfil – e conseqüentemente o próprio perfil – do modelo Razão de Aspecto é praticamente idêntica àquela do perfil exato até  $\beta = 40^\circ$  aproximadamente. Observando a Fig. 6.1, é possível perceber que para  $\beta = 40^\circ$  as curvas dos dois modelos já começam a se distanciar. Assim, em termos de erro absoluto, o modelo Razão de Aspecto fornece uma

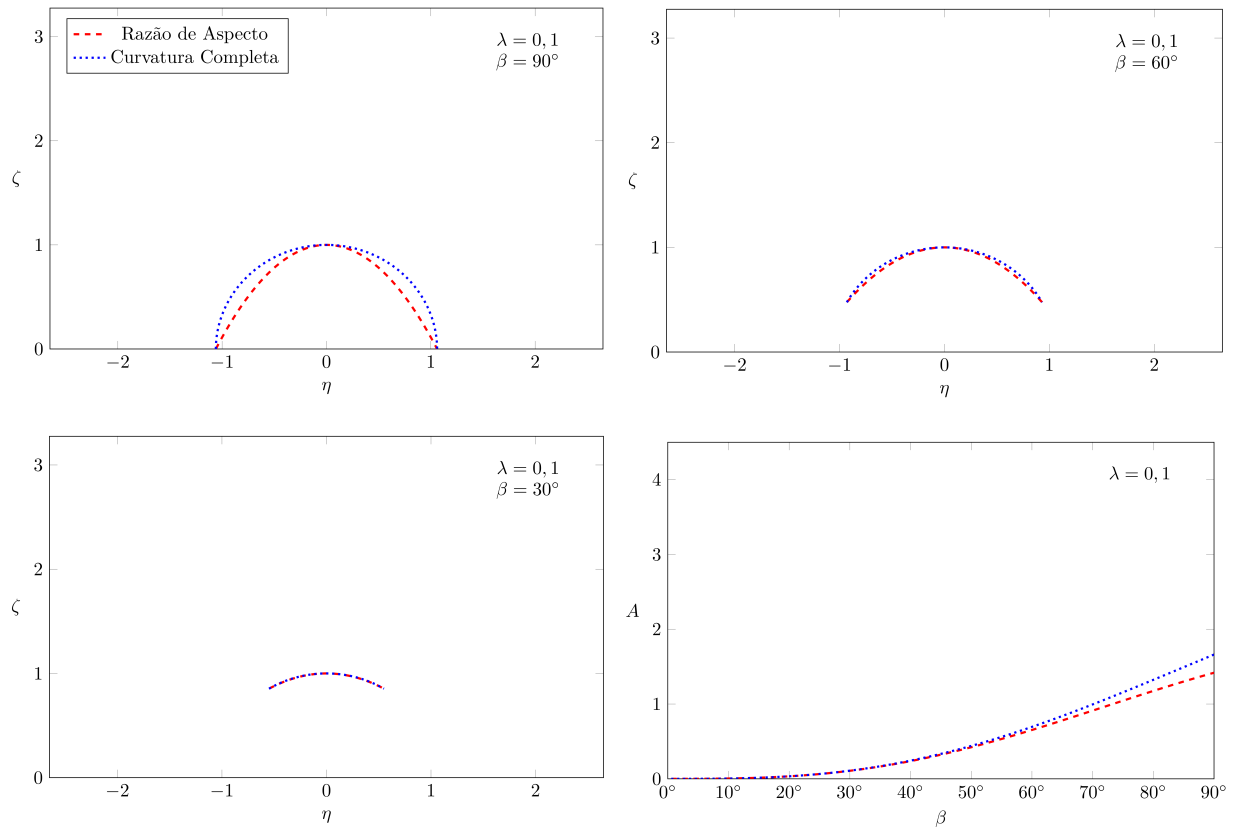


Figura 6.3: Exemplos de perfis e área do perfil em função do ângulo de contato para  $\lambda = 0, 1$ .

melhor aproximação da seção transversal do escoamento quanto maior for a inclinação da parede, isto é, quanto mais próxima de um substrato vertical. A Fig. 6.4(a) evidencia esta conclusão. Entretanto, conforme mostrado na Fig. 6.4(b), o erro relativo do modelo Razão de Aspecto para a área diminui à medida que o valor de  $\lambda$  aumenta, isto é, à medida que a parede se aproxima da horizontal. Isso ocorre porque, para altos valores de  $\lambda$  a área do perfil cresce mais rapidamente que o erro absoluto. Desta forma, em termos percentuais, este modelo reduzido também se comporta bem para pequenas inclinações.

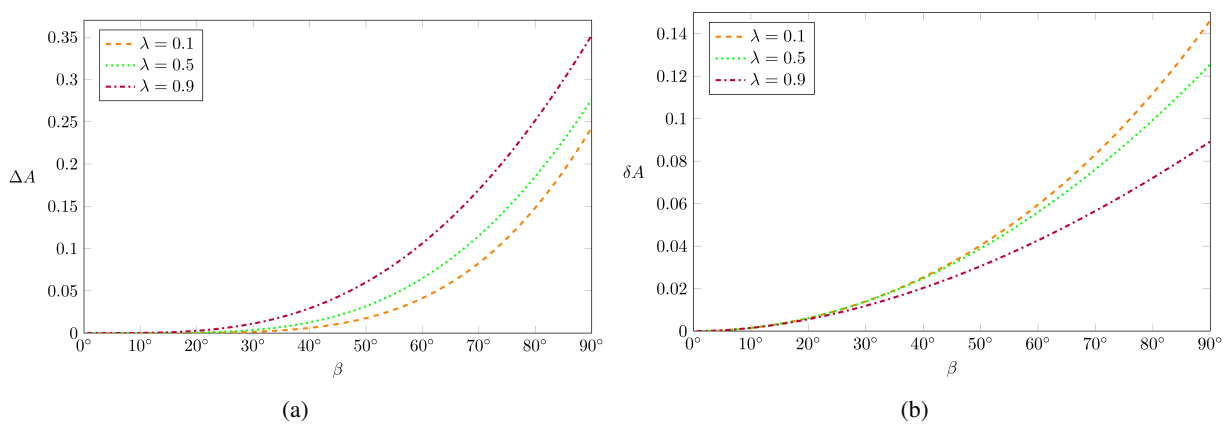


Figura 6.4: Erros (a) absoluto e (b) relativo do modelo Razão de Aspecto para a área do perfil.



Por sua vez, a Fig. 6.5 mostra o fluxo adimensional através do perfil do escoamento para diferentes valores de  $\lambda$ . A curva contínua é a solução numérica desenvolvida por Matias (2021). O fluxo para os dois modelos reduzidos é obtido por meio da integração numérica da Eq. (4.75) utilizando a regra do trapézio e substituindo a respectiva equação para a superfície livre. Sendo assim, a Fig 6.5 permite comparar o desempenho dos dois modelos de lubrificação obtidos com a solução numérica completa. Primeiramente, nota-se que o modelo Razão de Aspecto subestima o valor do fluxo enquanto que o modelo Curvatura Completa o superestima. Isso se deve ao fato de o primeiro apresentar uma área para o perfil menor que a real. Além disso, percebe-se que o modelo que conserva o formato da superfície livre se adequa melhor à solução numérica, o que é razoável, já que este modelo apresenta como vantagem a preservação da área do perfil.

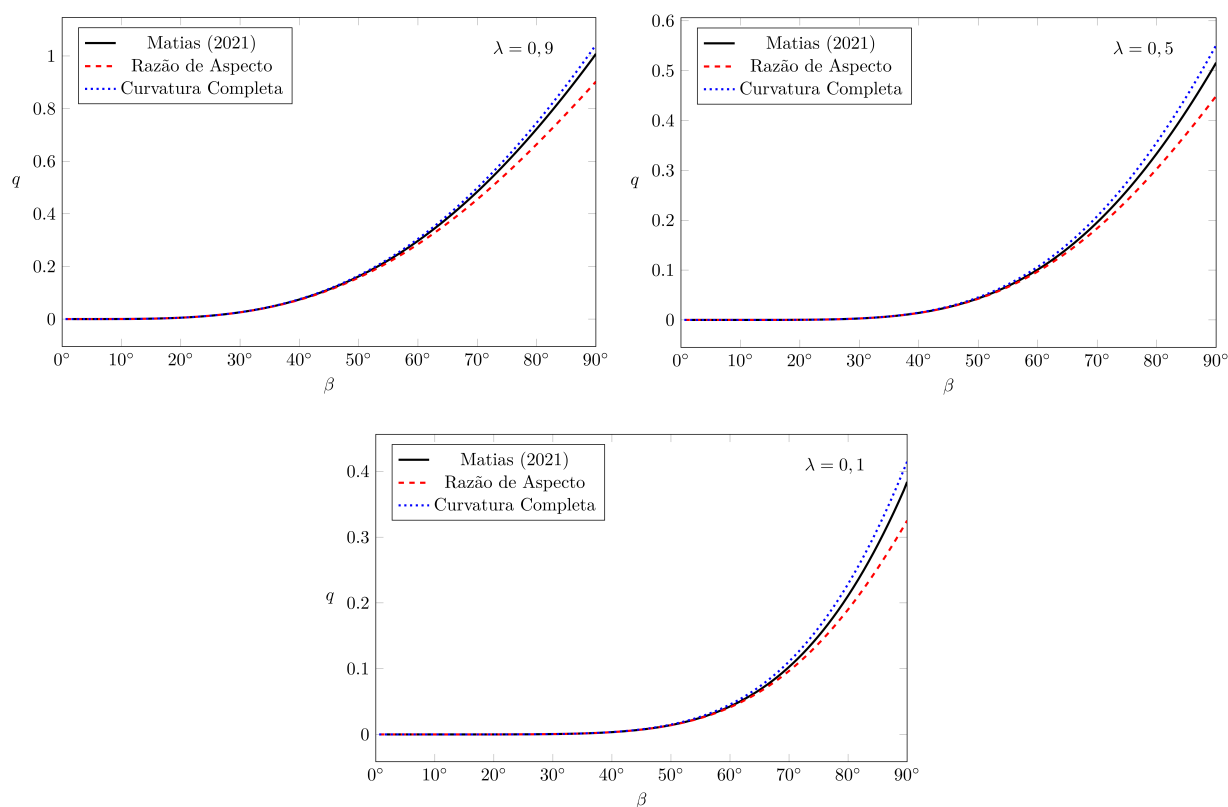


Figura 6.5: Fluxo em função do ângulo de contato para diferentes  $\lambda$ .

A Fig. 6.6 mostra o erro relativo de cada um dos dois modelos reduzidos com respeito à solução completa de Matias (2021) para diferentes valores de  $\lambda$ . Para o modelo Curvatura Completa, para todos os ângulos de contato, o erro relativo aumenta conforme a parede se aproxima da vertical ( $\lambda \rightarrow 0$ ). Por outro lado, para o modelo Razão de Aspecto, até o ângulo de  $70^\circ$  aproximadamente, o erro relativo é menor para menores valores de  $\lambda$ . Comparando os dois modelos para mesmos valores de  $\lambda$ , é possível perceber que há um limite de ângulo de contato até o qual o modelo Razão de Aspecto apresenta um melhor desempenho que o modelo Curvatura Completa considerando o erro relativo como parâmetro. Além disso, percebe-se que este limite é maior quanto menor for o valor de  $\lambda$ . Para as curvas  $\lambda = 0,1$  na Fig. 6.6, por exemplo, percebe-se que o erro relativo do modelo que conserva a razão de aspecto é menor que do modelo Curvatura

Completa até aproximadamente  $75^\circ$ , sendo, portanto, melhor neste intervalo. Isso ocorre porque, neste intervalo, as aproximações feitas para o campo de velocidade compensam as aproximações feitas para a forma do perfil no modelo Razão de Aspecto, tornando o fluxo, uma medida integral, mais próximo do real. Como o modelo Curvatura Completa utiliza o mesmo campo de velocidade aproximado mas com o perfil exato da superfície livre, não há esta compensação para o fluxo e, por isso, seu desempenho não é o melhor neste intervalo inicial. Desta forma, é interessante avaliar qual modelo deve ser utilizado considerando o intervalo de ângulo de contato e o valor de  $\lambda$ .

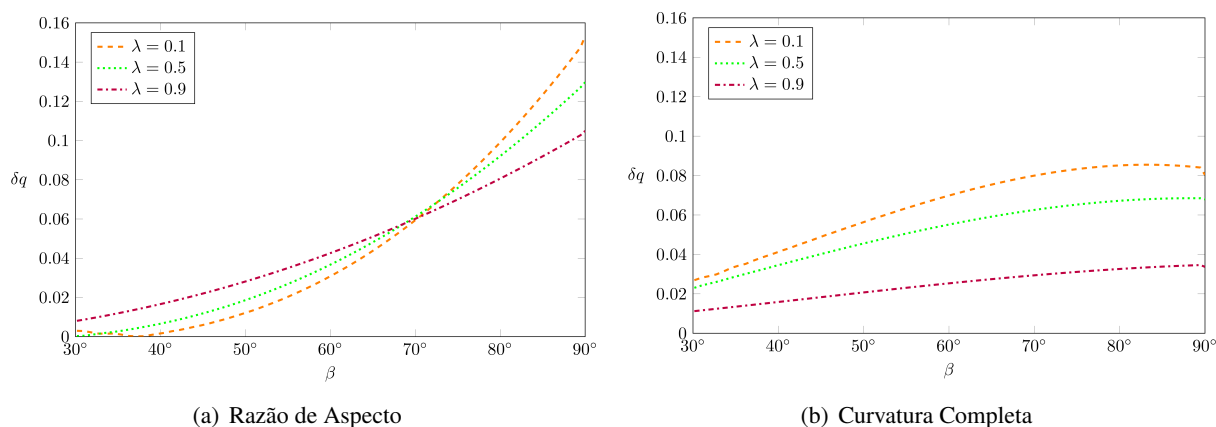


Figura 6.6: Erro relativo em função do ângulo de contato para diferentes valores de  $\lambda$ .

A Fig. 6.7, por sua vez, mostra o comportamento da curva de fluxo de cada um dos dois modelos para parede inclinada quando estes tendem à parede vertical. Em cada um dos painéis, a curva contínua representa o valor do fluxo no modelo para parede vertical correspondente, isto é, a Eq. (4.40) para Razão de Aspecto e a Eq. (4.48) para Curvatura Completa. É possível perceber que, quando  $\lambda \rightarrow 0$ , tanto o modelo Razão de Aspecto quanto o modelo Curvatura Completa retornam os valores já obtidos para o caso vertical. Isso reforça o fato de que os modelos que conservam a razão de aspecto ou o formato da superfície livre são ótimas opções para se descrever o problema de forma reduzida.

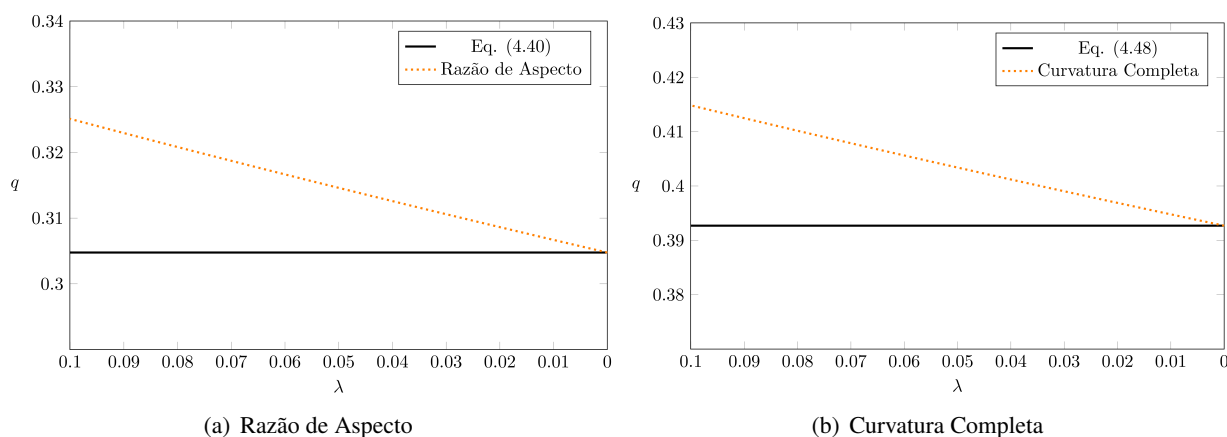


Figura 6.7: Fluxo dos modelos para parede inclinada no limite vertical.

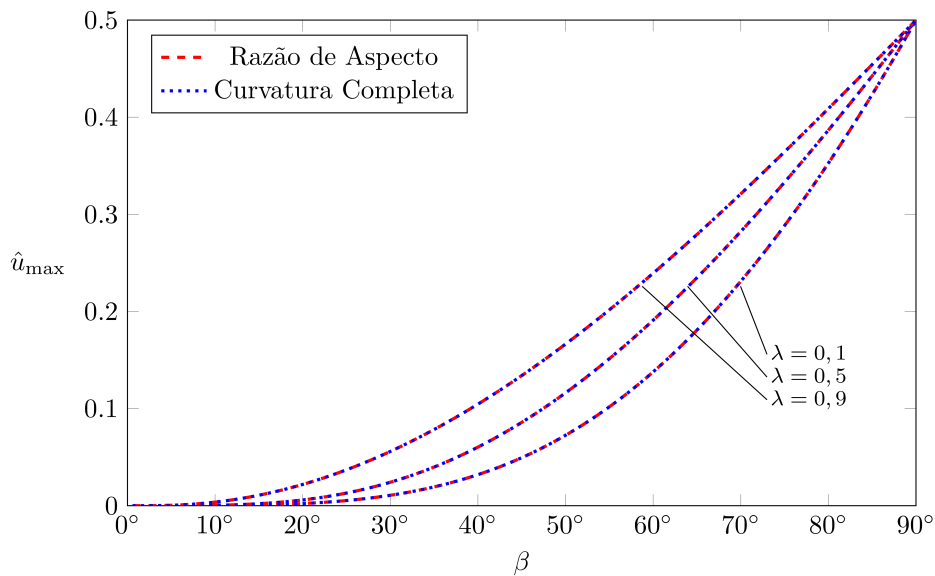


Figura 6.8: Velocidade máxima em função do ângulo de contato para diferentes  $\lambda$ .

A Fig. 6.8 mostra a velocidade máxima de cada um dos modelos em função do ângulo de contato para diferentes valores de  $\lambda$ . É possível perceber que a velocidade máxima é sempre coincidente para os dois modelos reduzidos apresentados. Isso ocorre porque ambos os modelos utilizam a Eq. (4.59) para aproximar o campo de velocidade e, para cada ângulo de contato, a altura do perfil – ponto de maior velocidade – é a mesma para ambos os modelos, como mostrado nas Figs. 6.1–6.3. Nota-se que, para  $\beta = 0^\circ$ , a velocidade máxima é sempre nula e, para  $\beta = 90^\circ$ , a velocidade máxima (adimensional) é sempre 0,5 para os modelos Razão de Aspecto e Curvatura Completa. Para os demais ângulos de contato, a velocidade máxima é maior quanto maior for o valor de  $\lambda$ , uma vez que, para um mesmo  $\beta$ , a altura do perfil em relação à parede é maior quanto maior for  $\lambda$ .

Por último, as Figs. 6.9 e 6.10 mostram o campo de velocidade normalizado para  $\lambda = 0,1$  e  $\lambda = 0,9$  respectivamente. Em cada uma destas figuras, compara-se o perfil de velocidade para os dois modelos reduzidos e para um ângulo de contato baixo e um ângulo de contato alto. A escala dos eixos foi mantida entre os painéis para que se pudesse observar seu formato e diferença de tamanho. Avaliando qualitativamente, para  $\beta = 30^\circ$ , os perfis de velocidade fornecidos por cada um dos modelos são indistinguíveis. Por outro lado, para  $\beta = 90^\circ$ , caso que apresenta maior erro, é possível perceber as diferenças entre os modelos. Como já comentado, a velocidade é maior no ponto mais alto do perfil, pois este é o ponto com menor interferência da parede.

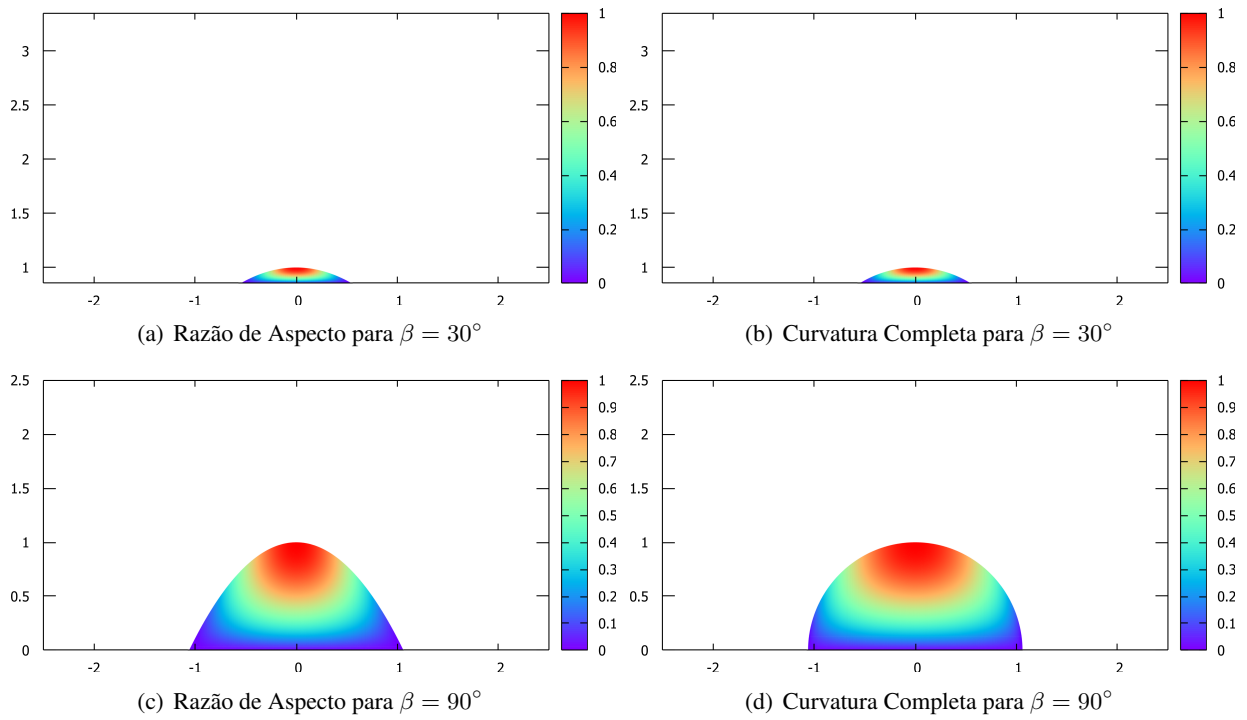


Figura 6.9: Campo de velocidade normalizado para  $\lambda = 0, 1$ .

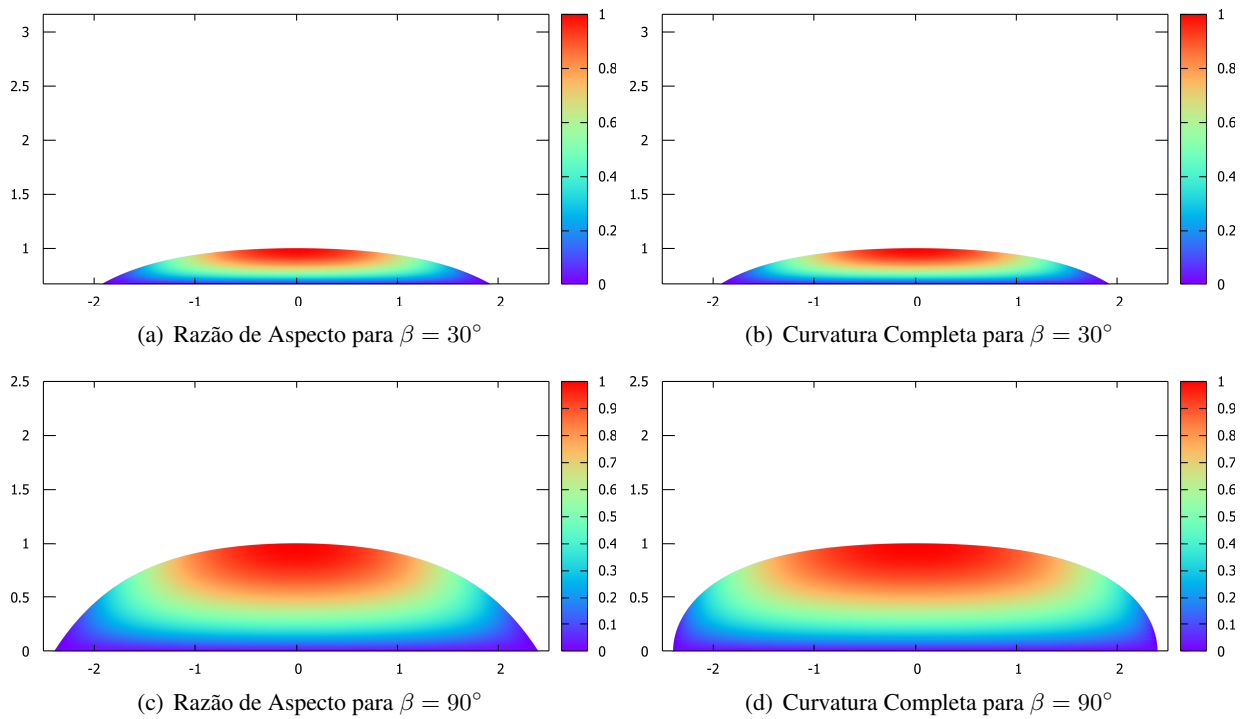


Figura 6.10: Campo de velocidade normalizado para  $\lambda = 0, 9$ .

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudou-se o escoamento permanente descendente de uma cascata uniforme de fluido newtoniano de alta molhabilidade sobre uma parede inclinada entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Primeiramente, analisou-se o caso vertical (parede inclinada a  $90^\circ$ ) por meio da comparação entre modelos reduzidos obtidos pela teoria da lubrificação e a solução numérica completa desenvolvida para a equação de Poisson. Como a conservação da razão de aspecto do problema e do formato da superfície livre geraram ótimos modelos para o caso vertical, essas ideias foram estendidas para os demais casos de paredes inclinadas. Apresentou-se a formulação matemática completa do problema e obteve-se, ainda, para o caso da parede vertical, uma solução numérica e uma solução analítica para  $\beta = 90^\circ$ . Além disso, fez-se o desenvolvimento detalhado da análise por lubrificação de diferentes maneiras e apresentou-se resultados por meio dos quais é possível avaliar o comportamento e a performance de cada um dos modelos reduzidos.

A fim de se avaliar o desempenho das aproximações por lubrificação apresentadas para o caso de um substrato vertical, foi desenvolvida uma solução numérica completa por meio do método das diferenças finitas. Para utilizar este método, foi necessário introduzir uma mudança de coordenadas que transformasse o domínio em um retângulo. Não foi encontrada na literatura outra solução numérica utilizando diferenças finitas.

O modelo com o perfil exato da superfície livre já havia sido apresentado por Towell e Rothfeld (1966), Semiat, Moalem-Marón e Sideman (1980) e Gajewski e Trela (2002). Entretanto, não foram encontradas, na literatura, referências que examinassem o desempenho de tal aproximação. Neste modelo, o formato exato da superfície livre é incorporado à análise por lubrificação, o que resulta na melhor aproximação da solução completa. Ao conservar a área exata, este modelo apresenta um erro relativo abaixo de 9% para o fluxo no pior caso possível.

Fazendo a expansão das equações do problema vertical com o parâmetro de perturbação  $\epsilon = \tan \frac{\beta}{2}$ , foi obtido o modelo reduzido que conserva a razão de aspecto, que, até onde se conseguiu verificar, é um modelo novo que não havia sido proposto em trabalhos anteriores. Este modelo aproxima a superfície livre, que é um arco de circunferência, por um arco de parábola de largura e altura iguais ao perfil exato. Para ângulos de contato de até  $40^\circ$ , a aproximação do perfil é excelente. À medida que  $\beta$  cresce, a aproximação se torna menos acurada, mas os resultados continuam razoáveis e, no pior caso, há um erro abaixo de 19% para o fluxo.

É interessante ressaltar que a utilização do modelo clássico de lubrificação não é errada, desde que se garanta que o ângulo de contato é sempre menor que, aproximadamente,  $30^\circ$ . Entretanto, aplicar esta restrição implica em limitar bastante a aplicabilidade do estudo. Em contrapartida, os modelos Razão de Aspecto e o modelo Curvatura Completa são consistentes até mesmo além do limite teórico da teoria de lubrificação. Assim, acredita-se que seria vantajoso o uso dos modelos apresentados em pesquisas futuras e, além disso, em revisões de estudos anteriores.

Uma vez que conservar a razão de aspecto do perfil e conservar o formato da superfície livre do escoamento forneceram modelos reduzidos tão adequados, estendeu-se estas ideias para os demais casos de parede inclinada. Assim, foram desenvolvidos os modelos Razão de Aspecto e Curvatura Completa para substratos inclinados. O primeiro conserva a largura e a altura do perfil real, enquanto o segundo conserva o perfil exato. Para avaliar o comportamento destes modelos, utilizou-se a solução numérica completa fornecida por Matias (2021).

Foram avaliados a área, o fluxo, a velocidade máxima e o perfil do campo de velocidade para diferentes valores de  $\lambda$  e de ângulo de contato. Além disso, mostrou-se que quando a parede tende ao plano vertical, os resultados obtidos coincidem com aqueles obtidos anteriormente para o substrato vertical. A conservação da razão de aspecto do problema e do formato da superfície livre do escoamento geram modelos reduzidos fisicamente coerentes e satisfatórios. Como comentado, é importante conhecer a situação na qual se deseja aplicar algum destes dois modelos reduzidos desenvolvidos, pois, dependendo dos valores de  $\lambda$  e  $\beta$ , um se torna mais vantajoso que o outro.

Os modelos de lubrificação desenvolvidos neste trabalho se mostraram ótimos para o problema da cascata uniforme em um substrato inclinado. Assim, trabalhos futuros que busquem analisar variações do problema da cascata podem ser conduzidos utilizando os modelos Razão de Aspecto e Curvatura Completa. É possível, futuramente, estudar a cascata com tipos de fluidos diferentes, tais como fluidos não newtonianos (Mukahal, Duffy e Wilson, 2018) e fluidos magnéticos (Reed e Molokov, 2000).

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKTERSHEV, S.; ALEKSEENKO, S.; ARKHIPOV, D. Linear waves on a surface of vertical rivulet. In: IOP PUBLISHING. *J. Phys. Conf. Ser.* [S.l.], 2016. v. 754, n. 3, p. 032001.
- ALEKSEENKO, S.; BOBYLEV, A.; GUZANOV, V.; MARKOVICH, D.; KHARLAMOV, S. Regular waves on vertical falling rivulets at different wetting contact angles. *Thermophys. Aeromechanics*, Springer, v. 17, n. 3, p. 345–357, 2010.
- ALLEN, R. F.; BIGGIN, C. M. Longitudinal flow of a lenticular liquid filament down an inclined plane. *Phys. Fluids*, AIP, v. 17, n. 2, p. 287–291, 1974.
- ANDERSON, J. D.; WENDT, J. *Computational Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer, 1995.
- BALMFORTH, N.; CRASTER, R.; SASSI, R. Shallow viscoplastic flow on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, Cambridge University Press, v. 470, p. 1, 2002.
- BENTWICH, M.; GLASSER, D.; KERN, J.; WILLIAMS, D. Analysis of rectilinear rivulet flow. *AIChE J.*, Wiley Online Library, v. 22, n. 4, p. 772–779, 1976.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8. ed. [S.l.]: Editora LTC, 2006.
- DUFFY, B.; MOFFATT, H. Flow of a viscous trickle on a slowly varying incline. *Chem. Eng. J.*, Elsevier, v. 60, n. 1-3, p. 141–146, 1995.
- DUFFY, B. R.; WILSON, S. K. A rivulet of perfectly wetting fluid with temperature-dependent viscosity draining down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate. *Phys. Fluids*, American Institute of Physics, v. 15, n. 10, p. 3236–3239, 2003.
- FEDOTKIN, I.; KLIMKIN, E.; KOVAL, F.; MEL'NICHUK, G. Hydrodynamics of rivulet flow on a vertical surface. *J. Eng. Phys.*, v. 46, n. 1, p. 9–14, 1984.
- FRAYSSE, N.; HOMSY, G. M. An experimental study of rivulet instabilities in centrifugal spin coating of viscous newtonian and non-newtonian fluids. *Phys. Fluids*, American Institute of Physics, v. 6, n. 4, p. 1491–1504, 1994.
- GAJEWSKI, A.; TRELA, M. Effect of rivulet mass flow rate on the surface wetted area. *Arch. Thermodyn.*, v. 23, n. 1-2, p. 101–125, 2002.
- HOLLAND, D.; DUFFY, B.; WILSON, S. Thermocapillary effects on a thin viscous rivulet draining steadily down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate. *J. Fluid Mech.*, v. 441, p. 195–221, 2001.
- HUPPERT, H. E. Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 300, n. 5891, p. 427–429, 1982.
- LOPES, A. v. B. *Dynamics of Free Surface Flows on Rotating Cylinders*. Tese (Doutorado) — The University of Manchester, 2018.
- MATIAS, G. C. *Modelagem do escoamento de uma Cascata Uniforme pelo Método dos Elementos Finitos*. 2021.

- MUKAHAL, F. H. H. A.; DUFFY, B. R.; WILSON, S. K. Rivulet flow of generalized newtonian fluids. *Phys. Rev. Fluids*, APS, v. 3, n. 8, p. 083302, 2018.
- MUKAHAL, F. H. H. A.; WILSON, S. K.; DUFFY, B. R. A rivulet of a power-law fluid with constant width draining down a slowly varying substrate. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Elsevier, v. 224, p. 30–39, 2015.
- PERAZZO, C. A.; GRATTON, J. Navier–stokes solutions for parallel flow in rivulets on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, Cambridge University Press, v. 507, p. 367–379, 2004.
- REED, C.; MOLOKOV, S. *Fully developed magnetohydrodynamic flow in a rivulet*. [S.l.], 2000.
- RIBATSKI, G.; JACOBI, A. M. Falling-film evaporation on horizontal tubes-a critical review. *Int. J. Refrigeration*, Elsevier, v. 28, n. 5, p. 635–653, 2005.
- SEMIAT, R.; MOALEM-MARON, D.; SIDEMAN, S. Transfer characteristics of convex and concave rivulet flow on inclined surfaces with straight-edged grooves. *Desalination*, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 267–287, 1980.
- STEWART, J. *Cálculo Volume 1 - Tradução da 6ª Edição Norte-Americana*. [S.l.]: Cengage Learning Edições Ltda., 2010.
- SULLIVAN, J.; PATERSON, C.; WILSON, S.; DUFFY, B. A thin rivulet or ridge subject to a uniform transverse shear stress at its free surface due to an external airflow. *Phys. Fluids*, American Institute of Physics, v. 24, n. 8, p. 082109, 2012.
- SULLIVAN, J. M.; WILSON, S. K.; DUFFY, B. R. A thin rivulet of perfectly wetting fluid subject to a longitudinal surface shear stress. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, OUP, v. 61, n. 1, p. 25–61, 2008.
- TOWELL, G. D.; ROTHFELD, L. B. Hydrodynamics of rivulet flow. *AIChE J.*, Wiley Online Library, v. 12, n. 5, p. 972–980, 1966.
- WILSON, S.; DUFFY, B. Strong temperature-dependent-viscosity effects on a rivulet draining down a uniformly heated or cooled slowly varying substrate. *Phys. Fluids*, American Institute of Physics, v. 15, n. 4, p. 827–840, 2003.
- WILSON, S.; DUFFY, B. A rivulet of perfectly wetting fluid draining steadily down a slowly varying substrate. *IMA J. Appl. Math.*, Oxford University Press, v. 70, n. 2, p. 293–322, 2005.
- WILSON, S. K.; DUFFY, B. R. Unidirectional flow of a thin rivulet on a vertical substrate subject to a prescribed uniform shear stress at its free surface. *Phys. Fluids*, American Institute of Physics, v. 17, n. 10, p. 108105, 2005.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Matemática Avançada para Engenharia - Vol III*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. v. 3.



## APÊNDICES

# I. CONDIÇÃO DINÂMICA

Para se obter a equação para a condição dinâmica, é interessante mostrar, primeiramente, a forma alternativa do teorema de Stokes. Em seguida, a dedução da condição de contorno desejada será desenvolvida conforme mostrada em Lopes (2018).

## I.1 FORMA ALTERNATIVA DO TEOREMA DE STOKES

Primeiramente, define-se  $C$  como uma curva fechada que delimita uma superfície  $S$  no espaço tridimensional cuja normal  $\mathbf{n}$  aponta para o exterior. Além disso, define-se  $\mathbf{t}$  como o vetor unitário tangente a  $C$  positivamente orientado,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  um vetor definido em  $S$  e em  $C$  e  $\mathbf{c}$  um vetor arbitrário constante. Por identidade vetorial, tem-se que

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}, \quad (\text{I.1})$$

de forma que

$$\left\{ \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{t}) \, d\ell \right\} \cdot \mathbf{c} = \oint_C (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t} \, d\ell. \quad (\text{I.2})$$

Como  $\mathbf{c} \times \mathbf{v}$  é um vetor, pode-se aplicar o teorema de Stokes, donde obtém-se

$$\oint_C (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t} \, d\ell = \iint_S [\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (\text{I.3})$$

Por identidade vetorial, sabe-se que

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{c} + \mathbf{c}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{c}). \quad (\text{I.4})$$

Como  $\mathbf{c}$  é um vetor constante por definição, a Eq. (I.4) se reduz a

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = \mathbf{c}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (\text{I.5})$$

Por outra identidade vetorial, tem-se, ainda,

$$(\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{c}, \quad (\text{I.6})$$

de forma que a Eq. (I.5) se torna

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) = \mathbf{c}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{c}. \quad (\text{I.7})$$

Assim, tem-se que

$$\iint_S [\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S [\mathbf{c}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})\mathbf{c}] \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (\text{I.8})$$

isto é,

$$\iint_S [\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} - (\nabla \mathbf{v})\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}] \, dS. \quad (\text{I.9})$$

Utilizando uma última identidade, tem-se que

$$(\nabla \mathbf{v})\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}, \quad (\text{I.10})$$

de forma que a Eq. (I.9), se torna

$$\iint_S [\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} - (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}] \, dS. \quad (\text{I.11})$$

Entretanto,

$$\iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} - (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}] \, dS = \left\{ \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{n}] \, dS \right\} \cdot \mathbf{c}, \quad (\text{I.12})$$

o que, substituído em (I.11) e, em seguida, em (I.3) e (I.2), resulta em

$$\left\{ \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{t}) \, d\ell \right\} \cdot \mathbf{c} = \left\{ \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{n}] \, dS \right\} \cdot \mathbf{c}. \quad (\text{I.13})$$

Uma vez que  $\mathbf{c}$  é arbitrário, obtém-se, finalmente, a forma alternativa do teorema de Stokes

$$\oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{t}) \, d\ell = \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{n}] \, dS. \quad (\text{I.14})$$

## I.2 DEDUÇÃO DA CONDIÇÃO DINÂMICA

A condição de contorno dinâmica impõe que a tensão existente na interface entre dois fluidos deve ser contínua. A tração exercida pelo fluido 1 no fluido 2 deve ser igual e oposta à tração exercida pelo fluido 2 no fluido 1. A Fig. I.1 mostra uma curva fechada  $C$  que delimita a superfície  $S$  em uma interface entre dois fluidos.

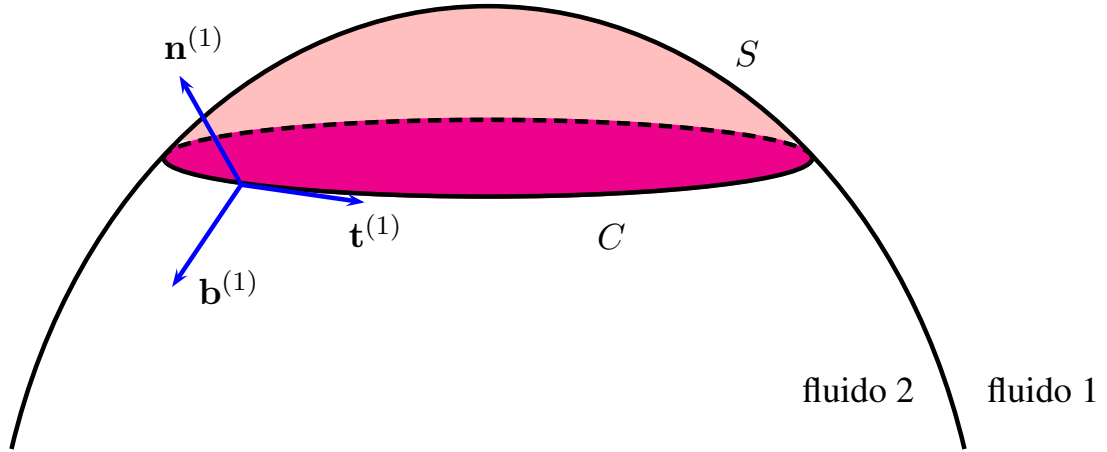


Figura I.1: Esquema de uma superfície  $S$  delimitada por uma curva fechada  $C$  em uma de interface entre dois fluidos.

Na Fig. I.1,  $\mathbf{n}^{(1)}$  é o vetor unitário normal à superfície  $S$  cujo sentido é do fluido 2 para o fluido 1 e  $\mathbf{t}^{(1)}$  é o vetor unitário tangente a  $C$  positivamente orientado. É interessante notar que

$$\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)} \quad (\text{I.15})$$

e

$$\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)}, \quad (\text{I.16})$$

em que o índice (2) denota a utilização do fluido 2 como referência.

O vetor unitário binormal a  $C$  positivamente orientado, pode ser convenientemente definido como

$$\mathbf{b}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{t}^{(1)}. \quad (\text{I.17})$$

A Fig. I.2 mostra um volume de controle  $V$  de altura  $\epsilon$  e raio  $R$  que engloba a superfície  $S$ . No volume de controle  $V$ , atuam forças de campo, forças de superfície e forças devido à tensão superficial, de modo que

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_V + \mathbf{f}_S + \mathbf{f}_C. \quad (\text{I.18})$$

Na Eq. (I.18),  $\mathbf{f}$  é a força resultante no fluido em  $V$ ,  $\mathbf{f}_V$  é a força de campo total em  $V$ ,  $\mathbf{f}_S$  é a força de superfície total em  $S$  e  $\mathbf{f}_C$  é a força total devido à tensão superficial na curva  $C$ .

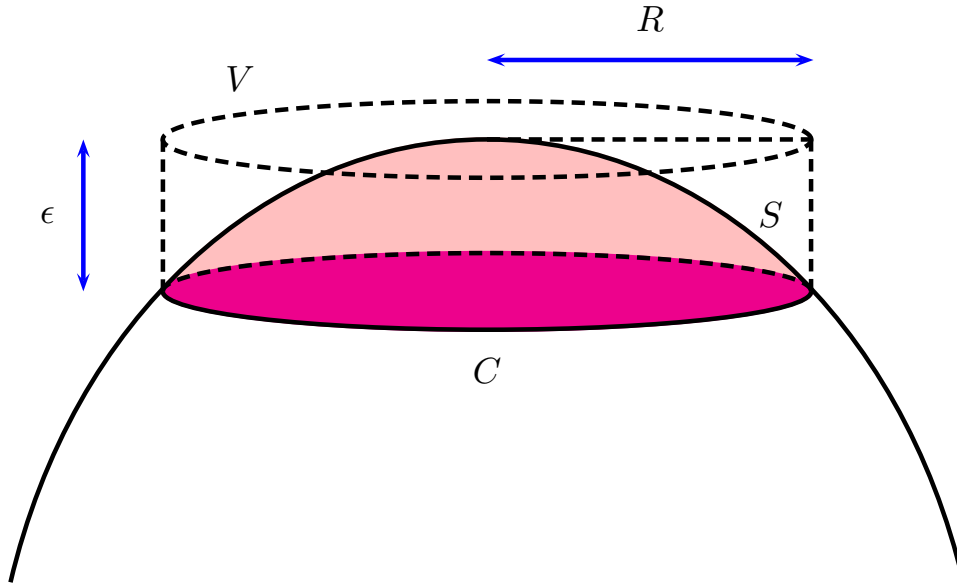


Figura I.2: Esquema do volume de controle  $V$ .

De acordo com a segunda lei de Newton, tem-se que

$$\mathbf{f} = \iiint_V \rho^{(1)} \frac{D\mathbf{u}^{(1)}}{Dt} dV. \quad (\text{I.19})$$

Por outro lado, a força de campo total atuando no fluido em  $V$  pode ser escrita como

$$\mathbf{f}_V = \iiint_V \rho^{(1)} \mathbf{g} dV, \quad (\text{I.20})$$

em que  $\mathbf{g}$  representa a força de campo por unidade de massa.

A força total exercida na interface  $S$  é dada pela soma das forças hidrodinâmicas exercidas pelo fluido 1 e pelo fluido 2, de forma que

$$\mathbf{f}_S = \iint_S \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} dS + \iint_S \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} dS, \quad (\text{I.21})$$

isto é,

$$\mathbf{f}_S = \iint_S (\mathbf{T}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)}) dS. \quad (\text{I.22})$$

Pela Eq. (I.15), é possível escrever

$$\mathbf{f}_S = \iint_S (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} dS. \quad (\text{I.23})$$

Por último, a força total devido à tensão superficial é tal que

$$\mathbf{f}_C = \oint_C \gamma \mathbf{b}^{(1)} d\ell, \quad (\text{I.24})$$

em que  $\gamma$  é a tensão superficial na interface e  $d\ell$  denota o incremento de comprimento ao longo da curva  $C$ . Esta última integral requer uma análise mais detalhada. Pela Eq. (I.17), é possível reescrever

$$\mathbf{f}_C = - \oint_C \gamma (\mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{t}^{(1)}) d\ell, \quad (\text{I.25})$$

ou, ainda,

$$\mathbf{f}_C = - \oint_C [(\gamma \mathbf{n}^{(1)}) \times \mathbf{t}^{(1)}] d\ell. \quad (\text{I.26})$$

Aplicando, agora, a forma alternativa do teorema de Stokes (I.14), a Eq. (I.26) é reescrita como

$$\mathbf{f}_C = - \iint_S \left\{ [\nabla \cdot (\gamma \mathbf{n}^{(1)})] \mathbf{n}^{(1)} - [\nabla (\gamma \mathbf{n}^{(1)})]^T \mathbf{n}^{(1)} \right\} dS. \quad (\text{I.27})$$

Por identidade vetorial, sabe-se que

$$\nabla \cdot (\gamma \mathbf{n}^{(1)}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)} + \nabla \gamma \cdot \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{I.28})$$

Entretanto, como  $\nabla \gamma$  deve ser tangente à interface  $S$ , tem-se que

$$\nabla \gamma \cdot \mathbf{n}^{(1)} = 0 \quad (\text{I.29})$$

necessariamente, de modo que a Eq. (I.28) se reduz a

$$\nabla \cdot (\gamma \mathbf{n}^{(1)}) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{I.30})$$

Por conveniência, reescreve-se

$$\nabla \gamma = \nabla [\gamma (\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)})], \quad (\text{I.31})$$

isto é,

$$\nabla \gamma = \nabla [(\gamma \mathbf{n}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}^{(1)}]. \quad (\text{I.32})$$

Por identidade vetorial, tem-se que

$$\nabla [(\gamma \mathbf{n}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}^{(1)}] = \gamma (\nabla \mathbf{n}^{(1)})^T \mathbf{n}^{(1)} + [\nabla (\gamma \mathbf{n}^{(1)})]^T \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{I.33})$$

Entretanto,

$$(\nabla \mathbf{n}^{(1)})^T \mathbf{n}^{(1)} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)}) = 0, \quad (\text{I.34})$$

pois

$$(\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)}) = 1, \quad (\text{I.35})$$

de forma que, por (I.32), (I.33) e (I.34), obtém-se

$$\nabla \gamma = [\nabla (\gamma \mathbf{n}^{(1)})]^T \mathbf{n}^{(1)}. \quad (\text{I.36})$$

Incorporando as equações (I.30) e (I.36) em (I.27), encontra-se, enfim,

$$\mathbf{f}_C = - \iint_S [\gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \mathbf{n}^{(1)} - \nabla \gamma] dS. \quad (\text{I.37})$$

Substituindo as equações (I.20), (I.23) e (I.37) em (I.19), o balanço de forças se apresenta como

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho^{(1)} \frac{D\mathbf{u}^{(1)}}{Dt} dV = \iiint_V \rho^{(1)} \mathbf{g} dV + \iint_S (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} dS + \\ - \iint_S [\gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \mathbf{n}^{(1)} - \nabla \gamma] dS. \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

Como a altura característica é  $\epsilon$  e o raio característico é  $R$ , as integrais em  $V$  terão dimensão de  $\epsilon R^2$  e a integral em  $S$  terá dimensão de  $R^2$ . Assim, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , o balanço de forças se resume a

$$\iint_S (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} dS = \iint_S [\gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \mathbf{n}^{(1)} - \nabla \gamma] dS. \quad (\text{I.39})$$

Uma vez que a superfície  $S$  é arbitrária, os integrandos devem ser idênticos, de modo que,

$$(\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{n}^{(1)} = \gamma (\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}) \mathbf{n}^{(1)} - \nabla \gamma. \quad (\text{I.40})$$

A Eq. (I.40) é a condição de contorno dinâmica e anuncia que o salto de tensão na interface entre dois fluidos deve ser balanceado pelas forças devido à tensão superficial.

O tensor de tensões  $\mathbf{T}$  é tal que

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (\text{I.41})$$

em que  $p$  representa o campo de pressão,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  representa o tensor de tensões viscosas. Assim, tem-se que

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = -p\mathbf{I}\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \quad (\text{I.42})$$

isto é,

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}. \quad (\text{I.43})$$

Neste trabalho são feitas algumas considerações que simplificam a Eq. (I.40). Primeiramente,

assume-se que a tensão superficial na interface é constante, de forma que

$$\nabla\gamma = 0. \quad (\text{I.44})$$

Além disso, considera-se que o ar (fluido 1) é um fluido invíscido, de modo que

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = 0. \quad (\text{I.45})$$

Define-se, ainda,

$$p^{(1)} = p_0, \quad (\text{I.46})$$

$$p^{(2)} = p, \quad (\text{I.47})$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(2)} = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{I.48})$$

e

$$\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n}^{(1)}, \quad (\text{I.49})$$

em que  $p_0$  é a pressão atmosférica,  $p$  é o campo de pressão no fluido 2, que é o fluido de interesse no escoamento,  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor de tensões viscosas também no fluido 2 e  $\kappa$  é a curvatura da superfície livre. Finalmente, a partir destas observações, a condição de contorno dinâmica se apresenta, neste trabalho, como

$$(p_0 - p)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = \gamma\kappa\mathbf{n}. \quad (\text{I.50})$$



## II. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA SUPERFÍCIE LIVRE

A equação para a superfície livre de uma cascata escoando sobre um plano inclinado pode ser obtida a partir da equação

$$\zeta + \lambda\zeta - \lambda\zeta^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}. \quad (\text{II.1})$$

Como

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta},$$

é possível reescrever

$$\lambda\zeta^2 - (1 + \lambda)\zeta + \cos \theta = 0, \quad (\text{II.2})$$

cuja solução para  $\zeta$  é

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \lambda \pm \sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta} \right). \quad (\text{II.3})$$

Entretanto, apenas a solução

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \lambda - \sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta} \right) \quad (\text{II.4})$$

satisfaz as três condições geométricas para a superfície livre. Por outro lado, como

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{d\eta},$$

pode-se escrever

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\theta}{d\eta}. \quad (\text{II.5})$$

Pela Eq. (II.4), tem-se que

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta}}. \quad (\text{II.6})$$

Substituindo esta derivada na Eq. (II.5), tem-se

$$\tan \theta = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta}} \frac{d\theta}{d\eta}, \quad (\text{II.7})$$

isto é,

$$d\eta = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta}} d\theta. \quad (\text{II.8})$$

Sabendo que

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (\text{II.9})$$

a Eq. (II.8) é reescrita como

$$d\eta = -\frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 8\lambda \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta, \quad (\text{II.10})$$

ou ainda,

$$d\eta = -\frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{(1 - \lambda)^2 + 8\lambda \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta. \quad (\text{II.11})$$

Rearranjando os termos, tem-se que

$$d\eta = -\frac{1}{(1 - \lambda)} \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + \frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta, \quad (\text{II.12})$$

isto é,

$$d\eta = -\frac{1}{1 - \lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} - \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 + \frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \right) d\theta. \quad (\text{II.13})$$

Por conveniência, pode-se escrever

$$d\eta = -\frac{1}{1 - \lambda} \left( \frac{2}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \Theta}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} \right) d\Theta, \quad (\text{II.14})$$

de modo que

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} - \frac{\operatorname{sen}^2 \Theta}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} \right) d\Theta, \quad (\text{II.15})$$

em que

$$\Theta = \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad C^2 = -\frac{8\lambda}{(1 - \lambda)^2}. \quad (\text{II.16})$$

Em seguida, reescreve-se a Eq. (II.15) como

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} + \frac{-1 + 1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}{C^2 \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} \right) d\Theta, \quad (\text{II.17})$$

ou seja,

$$d\eta = -\frac{4}{1 - \lambda} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{C^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} + \frac{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}{C^2 \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 \Theta}} \right] d\Theta, \quad (\text{II.18})$$

o que pode ser simplificado para

$$d\eta = -\frac{4}{1-\lambda} \left[ \frac{C^2-2}{2C^2} \frac{1}{\sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta}} + \frac{1}{C^2} \sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta} \right] d\Theta. \quad (\text{II.19})$$

Utilizando a definição de  $C$  na equação anterior, tem-se que

$$d\eta = -\frac{4}{1-\lambda} \left[ \frac{(1+\lambda)^2}{8\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta}} - \frac{(1-\lambda)^2}{8\lambda} \sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta} \right] d\Theta, \quad (\text{II.20})$$

que pode ser reorganizado como

$$d\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 \sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta} - (1+\lambda)^2 \frac{1}{\sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta}} \right] d\Theta. \quad (\text{II.21})$$

Integrando, tem-se, então,

$$\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 E(\Theta, C^2) - (1+\lambda)^2 F(\Theta, C^2) \right], \quad (\text{II.22})$$

em que

$$E(\Theta, C^2) = \int_0^\Theta \sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta} d\Theta \quad (\text{II.23})$$

e

$$F(\Theta, C^2) = \int_0^\Theta \frac{1}{\sqrt{1-C^2 \sin^2 \Theta}} d\Theta \quad (\text{II.24})$$

são, respectivamente, integrais elípticas de segunda e primeira ordem. Substituindo as definições em (II.16), a Eq. (II.24) se torna

$$\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 E\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) - (1+\lambda)^2 F\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) \right]. \quad (\text{II.25})$$

Finalmente, a superfície livre de uma cascata escoando em um plano inclinado pode ser parametrizada, em função de  $\lambda$  e  $\theta$ , pelas equações

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \lambda - \sqrt{(1+\lambda)^2 - 4\lambda \cos \theta} \right)$$

e

$$\eta = \frac{1}{2\lambda(1-\lambda)} \left[ (1-\lambda)^2 E\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) - (1+\lambda)^2 F\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{8\lambda}{(1-\lambda)^2}\right) \right].$$

### III. CURVATURA DA CIRCUNFERÊNCIA

A curvatura de uma curva plana  $C$  pode ser definida como a razão entre o ângulo de rotação  $\Delta\varphi$  da tangente e o comprimento  $\Delta s$  do arco percorrido entre dois pontos  $a$  e  $b$ , conforme representado na Fig. III.1.

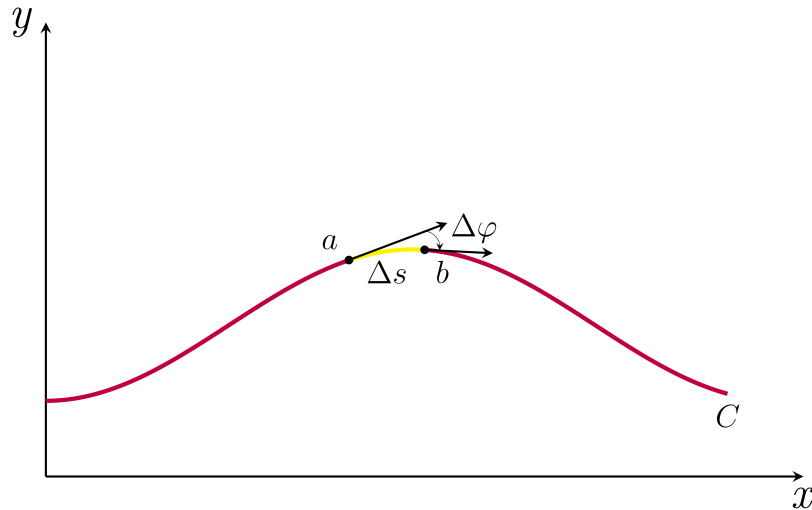


Figura III.1: Curvatura em uma curva plana.

À medida que o ponto  $b$  se aproxima do ponto  $a$ , a curvatura da curva no ponto  $a$  passa a ser

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}, \quad (\text{III.1})$$

isto é

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (\text{III.2})$$

Se uma curva é determinada através de equações paramétricas dependentes de  $x(t)$  e  $y(t)$ , a curvatura é dada por

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{III.3})$$

Por outro lado, se uma curva plana é definida por uma função explícita  $y = f(x)$ , a curvatura desta é obtida através de

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{III.4})$$

### III.1 CURVATURA DA RETA

Dada a reta definida pela função explícita  $y = cx + d$ , em que  $c$  e  $d$  são coeficientes constantes, o valor de sua curvatura é dado pela Eq. (III.4). Tem-se que, nesta situação,

$$y' = a \quad (\text{III.5})$$

e

$$y'' = 0. \quad (\text{III.6})$$

Desta forma, substituindo as derivadas acima na Eq. (III.4), obtém-se que a curvatura de uma reta é igual a zero.

### III.2 CURVATURA CONSTANTE

Para encontrar a curva cuja curvatura é constante, assume-se que esta é dada pela equação  $y = y(x)$ , de forma que

$$\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \kappa, \quad (\text{III.7})$$

em que  $\kappa$  é constante e o valor absoluto do numerador é utilizado porque não é necessário considerar a direção de rotação da tangente. Fazendo a substituição  $y' = p$  e tomando o valor absoluto, a equação acima se torna

$$\frac{p'}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \kappa. \quad (\text{III.8})$$

Pelo método de separação de variáveis, pode-se escrever

$$\int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \int \kappa dx. \quad (\text{III.9})$$

Utilizando a substituição  $p = \tan z$ , obtém-se

$$z = \arctan p \quad \text{e} \quad dz = \frac{dp}{1 + p^2}, \quad (\text{III.10})$$

de forma que a Eq. (III.9) se torna

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + \tan^2 z}} = \pm \int \kappa dx. \quad (\text{III.11})$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad (\text{III.12})$$

Pode-se simplificar a Eq. (III.11) como

$$\int \cos dz = \pm \int \kappa dx, \quad (\text{III.13})$$

o que resulta em

$$\text{sen } z = \pm \kappa(x + c_1), \quad (\text{III.14})$$

em que  $c_1$  é uma constante de integração. Sabendo que

$$\text{sen } z = \pm \sqrt{\frac{\tan^2 z}{\tan^2 z + 1}}, \quad (\text{III.15})$$

pode-se escrever

$$\pm \sqrt{\frac{\tan^2 z}{\tan^2 z + 1}} = \pm \kappa(x + c_1). \quad (\text{III.16})$$

Lembrando que  $p = \tan z$ , tem-se que

$$\frac{p^2}{p^2 + 1} = \kappa^2(x + c_1)^2. \quad (\text{III.17})$$

Retornando à variável original  $y$ , obtém-se

$$\frac{y'^2}{y'^2 + 1} = \kappa^2(x + c_1)^2. \quad (\text{III.18})$$

Rearranjando os termos, é possível encontrar

$$y'^2 = \frac{(x + c_1)^2}{\frac{1}{\kappa^2} - (x + c_1)^2}, \quad (\text{III.19})$$

isto é,

$$y' = \pm \sqrt{\frac{(x + c_1)^2}{\frac{1}{\kappa^2} - (x + c_1)^2}}. \quad (\text{III.20})$$

Tem-se, então, que

$$y = \pm \int \sqrt{\frac{(x + c_1)^2}{\frac{1}{\kappa^2} - (x + c_1)^2}} dx. \quad (\text{III.21})$$

Fazendo a substituição

$$x + c_1 = \frac{1}{\kappa} \text{sen } t, \quad (\text{III.22})$$

tem-se

$$dx = \frac{1}{\kappa} \cos t dt \quad (\text{III.23})$$

e, conseqüentemente,

$$y = \pm \int \sqrt{\frac{\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{sen}^2 t}{\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{\kappa^2} \operatorname{sen}^2 t}} \frac{1}{\kappa} \cos t \, dt. \quad (\text{III.24})$$

A equação anterior pode ser reescrita como

$$y = \pm \frac{1}{\kappa} \int \tan t \cos t \, dt, \quad (\text{III.25})$$

que resulta em

$$y + c_2 = \pm \frac{1}{\kappa} \cos t, \quad (\text{III.26})$$

em que  $c_2$  é uma constante de integração. Uma vez que

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1, \quad (\text{III.27})$$

pode-se escrever

$$\kappa^2(x + c_1)^2 + \kappa^2(y + c_2)^2 = 1, \quad (\text{III.28})$$

isto é,

$$(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 = \frac{1}{\kappa^2}. \quad (\text{III.29})$$

Portanto, as curvas planas com curvatura constante não nula são círculos com centro arbitrário e raio  $1/\kappa$  escolhido.

## IV. SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA PAREDE VERTICAL COM ÂNGULO DE CONTATO DE 90°

Para o caso em que o ângulo de contato  $\beta$  vale 90°, Perazzo e Gratton (2004) mostraram que é possível calcular o campo de velocidade analiticamente. Nesta situação específica, a equação para a superfície livre (2.87) se resume a

$$h = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}, \quad (\text{IV.1})$$

de modo que o perfil é um semicírculo. A derivada desta equação é, então,

$$h' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (\text{IV.2})$$

Como visto, o problema da cascata vertical é governado pela equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho g}{\mu}. \quad (\text{IV.3})$$

Entretanto, esta equação pode ser reduzida à equação de Laplace definindo

$$u = \frac{\rho g}{\mu} \left( \tilde{u} - \frac{z^2}{2} \right). \quad (\text{IV.4})$$

Aplicando esta substituição na equação de Poisson, obtém-se

$$\frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{\rho g}{\mu} = -\frac{\rho g}{\mu}, \quad (\text{IV.5})$$

isto é,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{IV.6})$$

Substituindo, ainda, a Eq. (IV.4) nas condições de contorno (2.71) e (2.72), estas se tornam

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (\text{IV.7})$$

e

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - z = h' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad \text{em} \quad z = h \quad (\text{IV.8})$$

respectivamente.



## IV.1 COORDENADAS POLARES

A geometria do perfil faz com que seja favorável a mudança para coordenadas polares, de forma que

$$y = r \cos \theta \quad \text{e} \quad z = r \sin \theta, \quad (\text{IV.9})$$

ou seja,

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{z}{y}, \quad (\text{IV.10})$$

em que  $0 \leq r \leq a$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Pela regra da cadeia do cálculo diferencial, a primeira derivada com relação a  $y$  em termos das novas coordenadas  $r$  e  $\theta$  é

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{IV.11})$$

Isto significa que

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{z}{y^2 + z^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (\text{IV.12})$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (\text{IV.13})$$

Aplicando a Eq. (IV.13) nela mesma, obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (\text{IV.14})$$

Repetindo este processo para a coordenada  $z$ , é possível verificar que as derivadas de primeira e segunda ordem com relação a  $y$  são, nas novas coordenadas,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (\text{IV.15})$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (\text{IV.16})$$

respectivamente.

Por conseguinte, em coordenadas polares, a equação de Laplace em (IV.6) é dada por

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (\text{IV.17})$$

A derivada da equação da superfície livre (IV.2), por sua vez, é reescrita como

$$h' = -\frac{r \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta}}. \quad (\text{IV.18})$$

Visto que, em toda a superfície livre,  $r = a$ , a equação anterior se torna

$$h' = -\cot \theta. \quad (\text{IV.19})$$

Em seguida, a condição de contorno da Eq. (IV.7) pode ser escrita como

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \pi. \quad (\text{IV.20})$$

Por último, a condição de contorno em (IV.8), por meio das derivadas em (IV.13) e (IV.15), se apresenta em coordenadas polares como

$$\sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - r \sin \theta = -\cot \theta \left( \cos \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) \quad \text{em} \quad r = a, \quad (\text{IV.21})$$

isto é,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = a \sin^2 \theta \quad \text{em} \quad r = a. \quad (\text{IV.22})$$

## IV.2 SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Admitindo que a solução da Eq. (IV.17) possa ser escrita como

$$\tilde{u}(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta), \quad (\text{IV.23})$$

em que  $R$  é função apenas de  $r$  e  $\Theta$  é função apenas de  $\theta$ , o problema pode ser resolvido através do método de separação de variáveis. Substituindo a solução (IV.23) na equação de Laplace (IV.17), obtém-se

$$\Theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\Theta}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0, \quad (\text{IV.24})$$

em que as derivadas parciais deixaram de ser necessárias porque  $R$  e  $\Theta$  são funções de variável única. Rearranjando os termos, é possível escrever

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}. \quad (\text{IV.25})$$

Nesta equação, o lado esquerdo é função somente de  $r$  enquanto o lado direito depende apenas de  $\theta$ . Isto significa que ambos os lados são, portanto, iguais a uma constante  $\lambda$ .

Tomando o lado direito da Eq. (IV.25), tem-se

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -\lambda \Theta. \quad (\text{IV.26})$$

As soluções desta equação diferencial são

$$\Theta = \begin{cases} A + B\theta, & \text{se } \lambda = 0 \\ A \cos \sqrt{\lambda} \theta + B \sin \sqrt{\lambda} \theta, & \text{se } \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

em que  $A$  e  $B$  são constantes. Para que a solução tenha sentido físico, é preciso que  $\tilde{u} = \tilde{u}(r, \theta)$  apresente valores idênticos em  $\theta$  e  $\theta + 2\pi$ . Isto significa que a solução para  $\Theta$  deve ser tal que  $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$  necessariamente. Sendo assim, é possível concluir, primeiramente, que a solução

$$\Theta = A + B\theta, \quad \text{se } \lambda = 0, \quad (\text{IV.28})$$

somente é adequada ao problema, isto é, periódica, se

$$B = 0. \quad (\text{IV.29})$$

Por outro lado, para a solução

$$\Theta = A \cos \sqrt{\lambda} \theta + B \sin \sqrt{\lambda} \theta, \quad \text{se } \lambda \neq 0, \quad (\text{IV.30})$$

aplicando a igualdade  $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$ , obtém-se

$$A \cos \sqrt{\lambda} \theta + B \sin \sqrt{\lambda} \theta = A \cos \sqrt{\lambda} (\theta + 2\pi) + B \sin \sqrt{\lambda} (\theta + 2\pi). \quad (\text{IV.31})$$

Através da soma de arcos, tem-se que

$$A \cos \sqrt{\lambda} (\theta + 2\pi) = A \cos \sqrt{\lambda} \theta \cos 2\pi \sqrt{\lambda} - A \sin \sqrt{\lambda} \theta \sin 2\pi \sqrt{\lambda} \quad (\text{IV.32})$$

e

$$B \sin \sqrt{\lambda} (\theta + 2\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \theta \cos 2\pi \sqrt{\lambda} + B \sin 2\pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \theta. \quad (\text{IV.33})$$

Para que a igualdade em (IV.31) seja obedecida, é necessário, então, que

$$A \cos \sqrt{\lambda} \theta = A \cos \sqrt{\lambda} \theta \cos 2\pi \sqrt{\lambda} - A \sin \sqrt{\lambda} \theta \sin 2\pi \sqrt{\lambda} \quad (\text{IV.34})$$

e

$$B \sin \sqrt{\lambda} \theta = B \sin \sqrt{\lambda} \theta \cos 2\pi \sqrt{\lambda} + B \sin 2\pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \theta \quad (\text{IV.35})$$

concomitantemente. Sendo assim, é possível concluir que, para que a solução (IV.30) seja periódica, deve-se ter

$$\cos 2\pi \sqrt{\lambda} = 1 \quad \text{e} \quad \sin 2\pi \sqrt{\lambda} = 0 \quad (\text{IV.36})$$

necessariamente. Desta forma, tem-se que

$$2\pi \sqrt{\lambda} = 2\pi n, \quad (\text{IV.37})$$

em que  $n$  deve ser um inteiro não negativo. Portanto, as soluções para  $\Theta$  são

$$\Theta = \begin{cases} A, & \text{se } n = 0 \\ A \cos n\theta + B \sin n\theta, & \text{se } n \neq 0. \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

Retornando para a Eq. (IV.25), tem-se

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = \lambda, \quad (\text{IV.39})$$

isto é,

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = n^2. \quad (\text{IV.40})$$

Rearranjando os termos, chega-se a equação de Euler-Cauchy de segunda ordem,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0. \quad (\text{IV.41})$$

Uma vez que  $n^2 \geq 0$ , as soluções desta equação diferencial são

$$R = \begin{cases} C + D \ln r, & \text{se } n = 0 \\ Cr^n + Dr^{-n}, & \text{se } n \neq 0. \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

Finalmente, as soluções possíveis para a Eq. (IV.23) são

$$\tilde{u}(r, \theta) = \begin{cases} (C + D \ln r)A, & \text{se } n = 0 \\ (Cr^n + Dr^{-n})(A \cos n\theta + B \sin n\theta), & \text{se } n \neq 0. \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

Como os produtos das constantes são outras constantes, é possível redefinir, por conveniência,

$$A = AC, \quad (\text{IV.44})$$

$$B = BC, \quad (\text{IV.45})$$

$$C = AD \quad (\text{IV.46})$$

e

$$D = BD. \quad (\text{IV.47})$$

Visto que a equação de Laplace (IV.17) é linear, sua solução geral é uma superposição de todas as soluções possíveis obtidas, de forma que

$$\tilde{u}(r, \theta) = A_0 + C_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta. \quad (\text{IV.48})$$

### IV.3 SOLUÇÃO PARA A VELOCIDADE

Substituindo a condição de contorno (IV.20) na solução geral (IV.48), encontra-se

$$A_0 + C_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) = 0 \quad (\text{IV.49})$$

e

$$A_0 + C_0 \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) = 0, \quad (\text{IV.50})$$

donde segue que

$$A_n = 0 \quad \text{e} \quad C_n = 0 \quad (\text{IV.51})$$

para todo  $n$ . Sendo assim, a solução para  $\tilde{u}$  se reduz a

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + D_n r^{-n}) \text{sen } n\theta. \quad (\text{IV.52})$$

Entretanto, como a solução deve ser finita em todos os pontos do domínio, faz-se necessário que

$$D_n = 0, \quad (\text{IV.53})$$

garantindo, assim, que a solução não será singular em  $r = 0$ . Desta forma, a solução se torna

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \text{sen } n\theta. \quad (\text{IV.54})$$

Aplicando a condição de contorno (IV.22) na solução acima, encontra-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n B_n a^{n-1} \text{sen } n\theta = a \text{sen}^2 \theta. \quad (\text{IV.55})$$

Multiplicando a equação acima por  $\text{sen } m\theta \, d\theta$  e integrando em todo o intervalo de  $\theta$ , tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n B_n a^{n-1} \int_0^{\pi} \text{sen } m\theta \text{sen } n\theta \, d\theta = a \int_0^{\pi} \text{sen } m\theta \text{sen}^2 \theta \, d\theta. \quad (\text{IV.56})$$

Segundo Boyce e DiPrima (2006), devido à ortogonalidade das funções seno e cosseno,

$$\int_{-L}^L \text{sen } \frac{m\pi x}{L} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}. \quad (\text{IV.57})$$

Definindo  $L = \pi$  e sabendo que o escoamento é simétrico com relação a  $\theta = \pi/2$ , tem-se que

$$\int_0^{\pi} \text{sen } m\theta \text{ sen } n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \end{cases}. \quad (\text{IV.58})$$

Por outro lado, através da integração por partes, obtém-se

$$\int_0^{\pi} \text{sen } m\theta \text{ sen}^2 \theta \, d\theta = \left[ \frac{1}{m} \left( -\cos m\theta \text{ sen}^2 \theta - m \int -\frac{1}{m} \cos m\theta \text{ sen } 2\theta \, d\theta \right) \right]_0^{\pi}. \quad (\text{IV.59})$$

Sabendo que

$$\cos m\theta \text{ sen } 2\theta = \frac{\text{sen}(2\theta + m\theta) + \text{sen}(2\theta - m\theta)}{2}, \quad (\text{IV.60})$$

a Eq. (IV.59) se torna

$$\int_0^{\pi} \text{sen } m\theta \text{ sen}^2 \theta \, d\theta = \left[ \frac{1}{m} \left( -\cos m\theta \text{ sen}^2 \theta - \frac{\cos(2\theta + m\theta)}{2(m+2)} + \frac{\cos(2\theta - m\theta)}{2(m-2)} \right) \right]_0^{\pi}. \quad (\text{IV.61})$$

Avaliando o resultado da integral nos limites definidos, tem-se

$$\int_0^{\pi} \text{sen } m\theta \text{ sen}^2 \theta \, d\theta = (-1)^m \frac{2}{m(m+2)(m-2)} - \frac{2}{m(m+2)(m-2)}, \quad (\text{IV.62})$$

isto é,

$$\int_0^{\pi} \text{sen } m\theta \text{ sen}^2 \theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & m = 2n \\ -\frac{4}{m(m+2)(m-2)}, & m = 2n + 1 \end{cases}. \quad (\text{IV.63})$$

Substituindo as soluções encontradas em (IV.58) e (IV.63) na Eq. (IV.56), é possível concluir que

$$B_{2n} = 0 \quad (\text{IV.64})$$

e

$$B_{2n+1} = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{a^{2n-1}(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)}. \quad (\text{IV.65})$$

Desta forma, a Eq. (IV.54) se torna

$$\tilde{u}(r, \theta) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1} \text{sen}[(2n+1)\theta]}{a^{2n-1}(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)}. \quad (\text{IV.66})$$

Finalmente, a velocidade no perfil para o ângulo de contato de  $90^\circ$  é dada por

$$u = \frac{\rho g}{\mu} \left( \tilde{u} - \frac{r^2 \text{sen}^2 \theta}{2} \right), \quad (\text{IV.67})$$

em que  $\tilde{u}$  está mostrado em (IV.66).

#### IV.4 SOLUÇÃO PARA O FLUXO

O fluxo através do perfil do escoamento é dado por

$$Q = \int_0^\pi \int_0^a ur \, dr \, d\theta, \quad (\text{IV.68})$$

isto é,

$$Q = \int_0^\pi \int_0^a \frac{\rho g}{\mu} \left\{ -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+2} \sin[(2n+1)\theta]}{a^{2n-1}(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)} - \frac{r^3 \sin^2 \theta}{2} \right\} dr \, d\theta. \quad (\text{IV.69})$$

Integrando com relação a  $r$  e avaliando nos limites definidos, tem-se

$$Q = \frac{\rho g a^4}{\mu} \int_0^\pi \left\{ -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\theta]}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)^2} - \frac{\sin^2 \theta}{8} \right\} d\theta. \quad (\text{IV.70})$$

Posteriormente, sabendo que

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2},$$

a integral com relação a  $\theta$  resulta em

$$Q = -\frac{\rho g a^4}{\mu} \left[ \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^3(2n+3)^2} + \frac{\pi}{16} \right]. \quad (\text{IV.71})$$

Definindo o conteúdo do somatório como

$$S = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^3(2n+3)^2}, \quad (\text{IV.72})$$

é possível expandi-lo em frações parciais, de forma que

$$S = \frac{1}{128(2n-1)} - \frac{1}{16(2n+1)} + \frac{7}{128(2n+3)} + \frac{1}{16(2n+1)^2} + \frac{1}{32(2n+3)^2} - \frac{1}{8(2n+1)^3}. \quad (\text{IV.73})$$

Aplicando o somatório no primeiro e no terceiro termo de  $S$ , é possível reescrevê-los como

$$\frac{1}{128} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{128} \left[ -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \right] \quad (\text{IV.74})$$

e

$$\frac{7}{128} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} = \frac{7}{128} \left[ -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \right]. \quad (\text{IV.75})$$

Aplicando, agora, o somatório no segundo termo de  $S$  e somando-o às expressões obtidas em (IV.74) e (IV.75), tem-se

$$\frac{1}{128} \left[ -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \right] - \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} + \frac{7}{128} \left[ -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \right] = -\frac{1}{16}. \quad (\text{IV.76})$$

É interessante notar que as três séries acima remetem à série harmônica e, individualmente, são divergentes. Entretanto, a soma destas três séries converge para o valor encontrado. Para as frações de  $S$  cujo denominador tem grau 2, note que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{IV.77})$$

em que  $\zeta$  é a função zeta de Riemann. A soma dos termos desta série em que  $n$  é par é tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (\text{IV.78})$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\zeta(2)}{4} = \frac{\pi^2}{24}. \quad (\text{IV.79})$$

Sendo assim, a soma dos termos para  $n$  ímpar resulta em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3\zeta(2)}{4} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (\text{IV.80})$$

Aplicando o somatório no quarto termo de  $S$  e utilizando a série em (IV.80), obtém-se

$$\frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{128}. \quad (\text{IV.81})$$

Em seguida, para o quinto termo de  $S$ , tem-se que

$$\frac{1}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2} = \frac{1}{32} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - 1 \right], \quad (\text{IV.82})$$

isto é,

$$\frac{1}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^2} = \frac{1}{32} \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) = \frac{\pi^2 - 8}{256}. \quad (\text{IV.83})$$

Por último, para avaliar o sexto termo de  $S$ , é necessário utilizar a constante de Apéry

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,20205\dots \quad (\text{IV.84})$$



A soma dos termos em que  $n$  é par nesta série são tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad (\text{IV.85})$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \frac{\zeta(3)}{8}. \quad (\text{IV.86})$$

Sendo assim, a soma dos termos em que  $n$  é ímpar é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{7\zeta(3)}{8}. \quad (\text{IV.87})$$

Aplicando o somatório no sexto termo de  $S$  e utilizando a Eq. (IV.87), encontra-se

$$-\frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = -\frac{7\zeta(3)}{64}. \quad (\text{IV.88})$$

Finalmente, os valores encontrados em (IV.76), (IV.81), (IV.83) e (IV.88) podem ser colocados na equação do fluxo (IV.71), de forma que

$$Q = -\frac{\rho g a^4}{\mu} \left[ \frac{8}{\pi} \left( -\frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{128} + \frac{(\pi^2 - 8)}{256} - \frac{7\zeta(3)}{64} \right) + \frac{\pi}{16} \right]. \quad (\text{IV.89})$$

Realizando as devidas simplificações o fluxo para  $\beta = 90^\circ$  pode, enfim, ser escrito como

$$Q = \frac{\rho g a^4}{\mu} q, \quad (\text{IV.90})$$

em que

$$q = \frac{6 - \pi^2 + 7\zeta(3)}{4\pi} = 0,3616632 \dots \quad (\text{IV.91})$$

## V. INTEGRAL DO FLUXO PARA O CASO VERTICAL CONSERVANDO A CURVATURA

Deseja-se, neste anexo, mostrar a resolução da integral

$$\int \left( \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2(\beta) y^2}{a^2}} - \cos(\beta) \right)^3 dy, \quad (\text{V.1})$$

necessária para o cálculo do fluxo no modelo reduzido com perfil exato no caso vertical. Expandindo a equação acima, obtém-se

$$\int \left( \frac{(a^2 - \text{sen}^2(\beta) y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3} + \frac{3 \cos^2(\beta) \sqrt{a^2 - \text{sen}^2(\beta) y^2}}{a} + \frac{3 \cos(\beta) \text{sen}^2(\beta) y^2}{a^2} - \cos^3(\beta) - 3 \cos(\beta) \right) dy. \quad (\text{V.2})$$

Aplicando a linearidade, tem-se

$$\frac{1}{a^3} \int (a^2 - \text{sen}^2(\beta) y^2)^{\frac{3}{2}} dy + \frac{3 \cos^2(\beta)}{a} \int \sqrt{a^2 - \text{sen}^2(\beta) y^2} dy + \frac{3 \cos(\beta) \text{sen}^2(\beta)}{a^2} \int y^2 dy + \frac{-a^3 \cos^3(\beta) - 3a^3 \cos(\beta)}{a^3} \int 1 dy. \quad (\text{V.3})$$

Fazendo a substituição trigonométrica

$$y = \frac{a \sec(u)}{\text{sen}(\beta)}, \quad (\text{V.4})$$

a primeira integral de (V.3) se torna

$$\int (a^2 - \text{sen}^2(\beta) y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \int \frac{a \sec(u) (a^2 - a^2 \sec^2(u))^{\frac{3}{2}} \tan(u)}{\text{sen}(\beta)} du. \quad (\text{V.5})$$

Sabendo que

$$1 - \sec^2(u) = -\tan^2(u), \quad (\text{V.6})$$

tem-se

$$\int (a^2 - \text{sen}^2(\beta) y^2)^{\frac{3}{2}} dy = -\frac{ia^4}{\text{sen}(\beta)} \int \sec(u) \tan^4(u) du. \quad (\text{V.7})$$

Pela relação trigonométrica (V.6), pode-se reescrever

$$\int \sec(u) \tan^4(u) du = \int \sec(u) (\sec^2(u) - 1)^2 du. \quad (\text{V.8})$$

Expandindo e aplicando a linearidade, tem-se

$$\int \sec(u) \tan^4(u) \, du = \int \sec^5(u) \, du - 2 \int \sec^3(u) \, du + \int \sec(u) \, du \quad (\text{V.9})$$

Utilizando a fórmula de redução

$$\int \sec^n(u) \, du = \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(u) \, du + \frac{\sec^{n-2}(u) \tan(u)}{n-1}, \quad (\text{V.10})$$

tem-se

$$\int \sec^5(u) \, du = \frac{\sec^3(u) \tan(u)}{4} + \frac{3}{4} \int \sec^3(u) \, du. \quad (\text{V.11})$$

Aplicando a fórmula de redução (V.10) novamente, obtém-se

$$\int \sec^3(u) \, du = \frac{\sec(u) \tan(u)}{2} + \frac{1}{2} \int \sec(u) \, du. \quad (\text{V.12})$$

Esta última integral é muito comum e seu resultado é

$$\int \sec(u) \, du = \ln(\tan(u) + \sec(u)). \quad (\text{V.13})$$

Substituindo o resultado acima em (V.12), tem-se que

$$\int \sec^3(u) \, du = \frac{\ln(\tan(u) + \sec(u))}{2} + \frac{\sec(u) \tan(u)}{2}. \quad (\text{V.14})$$

Substituindo, agora, (V.14) em (V.11), tem-se

$$\int \sec^5(u) \, du = \frac{3 \ln(\tan(u) + \sec(u))}{8} + \frac{\sec^3(u) \tan(u)}{4} + \frac{3 \sec(u) \tan(u)}{8}, \quad (\text{V.15})$$

que, substituído em (V.9) juntamente com (V.14) e (V.13), resulta em

$$\int \sec(u) \tan^4(u) \, du = \frac{3 \ln(\tan(u) + \sec(u))}{8} + \frac{\sec^3(u) \tan(u)}{4} - \frac{5 \sec(u) \tan(u)}{8}. \quad (\text{V.16})$$

Substituindo, agora, em (V.7), tem-se

$$\int (a^2 - \sec^2(\beta) y^2)^{\frac{3}{2}} \, dy = -\frac{3ia^4 \ln(\tan(u) + \sec(u))}{8 \sec(\beta)} - \frac{ia^4 \sec^3(u) \tan(u)}{4 \sec(\beta)} + \frac{5ia^4 \sec(u) \tan(u)}{8 \sec(\beta)}. \quad (\text{V.17})$$

Voltando para a variável  $y$ ,

$$\int (a^2 - \operatorname{sen}^2(\beta) y^2)^{\frac{3}{2}} dy = -\frac{3ia^4 \ln\left(\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)y^2}{a^2} - 1} + \frac{\operatorname{sen}(\beta)y}{a}\right)}{8 \operatorname{sen}(\beta)} +$$

$$-\frac{ia \operatorname{sen}^2(\beta) y^3 \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)y^2}{a^2} - 1}}{4} + \frac{5ia^3 y \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)y^2}{a^2} - 1}}{8}. \quad (\text{V.18})$$

Agora, será analisada a segunda integral da Eq. (V.3). Fazendo a mesma substituição trigonométrica proposta em (V.4), tem-se

$$\int \sqrt{a^2 - \operatorname{sen}^2(\beta) y^2} dy = \int \frac{a \sec(u) \sqrt{a^2 - a^2 \sec^2(u)} \tan(u)}{\operatorname{sen}(\beta)} du. \quad (\text{V.19})$$

Utilizando a relação trigonométrica mostrada em (V.6), obtém-se

$$\int \sqrt{a^2 - \operatorname{sen}^2(\beta) y^2} dy = \frac{ia^2}{\operatorname{sen}(\beta)} \int \sec(u) \tan^2(u) du. \quad (\text{V.20})$$

Tem-se que

$$\int \sec(u) \tan^2(u) du = \int \sec(u) (\sec^2(u) - 1) du, \quad (\text{V.21})$$

isto é,

$$\int \sec(u) \tan^2(u) du = \int \sec^3(u) du - \int \sec(u) du. \quad (\text{V.22})$$

Utilizando os resultados já obtidos nas equações (V.14) e (V.13), conclui-se que

$$\int \sec(u) \tan^2(u) du = \frac{\sec(u) \tan(u)}{2} - \frac{\ln(\tan(u) + \sec(u))}{2}, \quad (\text{V.23})$$

de forma que,

$$\int \sqrt{a^2 - \operatorname{sen}^2(\beta) y^2} dy = \frac{ia^2 \sec(u) \tan(u)}{2 \operatorname{sen}(\beta)} - \frac{ia^2 \ln(\tan(u) + \sec(u))}{2 \operatorname{sen}(\beta)}. \quad (\text{V.24})$$

Voltando para a variável  $y$ , tem-se

$$\int \sqrt{a^2 - \operatorname{sen}^2(\beta) y^2} dy = \frac{ia y \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)y^2}{a^2} - 1}}{2} - \frac{ia^2 \ln\left(\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(\beta)y^2}{a^2} - 1} + \frac{\operatorname{sen}(\beta)y}{a}\right)}{2 \operatorname{sen}(\beta)}. \quad (\text{V.25})$$

As duas últimas integrais (V.3) são bastante comuns e de fácil resolução. Assim, a expressão (V.3) se torna

$$\begin{aligned}
& - \frac{3ia \cos^2(\beta) \ln \left( \left| \sqrt{\frac{\sin^2(\beta)y^2}{a^2} - 1} + \frac{\sin(\beta)y}{a} \right| \right)}{2 \sin(\beta)} - \frac{3ia \ln \left( \left| \sqrt{\frac{\sin^2(\beta)y^2}{a^2} - 1} + \frac{\sin(\beta)y}{a} \right| \right)}{8 \sin(\beta)} + \\
& - \frac{i \sin^2(\beta) y^3 \sqrt{\frac{\sin^2(\beta)y^2}{a^2} - 1}}{4a^2} + \frac{3i \cos^2(\beta) y \sqrt{\frac{\sin^2(\beta)y^2}{a^2} - 1}}{2} + \frac{5iy \sqrt{\frac{\sin^2(\beta)y^2}{a^2} - 1}}{8} + \\
& + \frac{\cos(\beta) \sin^2(\beta) y^3}{a^2} + \frac{(-a^3 \cos^3(\beta) - 3a^3 \cos(\beta)) y}{a^3} + C, \quad (\text{V.26})
\end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$\begin{aligned}
& - \frac{3ia(4 \cos^2(\beta) + 1) \ln \left( \left| a \sqrt{(\sin(\beta)y - a)(\sin(\beta)y + a)} + |a| \sin(\beta)y \right| \right)}{8 \sin(\beta)} + \\
& - \frac{iy \sqrt{(\sin(\beta)y - a)(\sin(\beta)y + a)} (2 \sin^2(\beta) y^2 + 12a^2 \sin^2(\beta) - 17a^2)}{8a^2 |a|} + \\
& + \frac{\cos(\beta) \sin^2(\beta) y^3}{a^2} - \cos(\beta) (\cos^2(\beta) + 3) y + C \quad (\text{V.27})
\end{aligned}$$

A expressão (V.27) é a solução da integral indefinida (V.1). Avaliando este resultado no intervalo de interesse  $[0, a]$ , tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{3a \cos^2(\beta) \arcsen(|\sin(\beta)|)}{2 |\sin(\beta)|} + \frac{3a \arcsen(|\sin(\beta)|)}{8 |\sin(\beta)|} - \frac{\sin^2(\beta) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(\beta)}}{4} + \\
& + \frac{3 \cos^2(\beta) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(\beta)}}{2} + \frac{5 \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(\beta)}}{8} + \\
& + a \cos(\beta) \sin^2(\beta) - a \cos^3(\beta) - 3a \cos(\beta). \quad (\text{V.28})
\end{aligned}$$

Como o intervalo de estudo é  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ , conclui-se que  $\sin \beta \geq 0$  sempre. Reescrevendo, então, a expressão acima, obtém-se

$$\frac{3a\beta \cos^2 \beta}{2 \sin \beta} + \frac{3a\beta}{8 \sin \beta} + \frac{3a \sin^3 \beta \cos \beta}{4} + \frac{a \cos^3 \beta}{2} - \frac{19a \cos \beta}{8}. \quad (\text{V.29})$$

Sabendo que

$$\sin^3 \beta \cos \beta = \sin \beta \cos \beta - \sin \beta \cos^3 \beta, \quad (\text{V.30})$$

e simplificando a expressão (V.29), obtém-se, finalmente

$$\int_0^a \left( \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\beta) y^2}{a^2}} - \cos(\beta) \right)^3 dy = a \frac{12\beta \cos^2 \beta + 3\beta - 2 \sin \beta \cos^3 \beta - 13 \sin \beta \cos \beta}{8 \sin \beta}. \quad (\text{V.31})$$