



**PROJETO DE GRADUAÇÃO**

**ESTUDO SOBRE MÉTODOS DE  
PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA  
USANDO MODELOS ESPECTRAIS**

Por,  
**Murilo Carrascoza Passeri**

Brasília, 11 de Maio de 2021

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

## PROJETO DE GRADUAÇÃO

# ESTUDO SOBRE MÉTODOS DE PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA USANDO MODELOS ESPECTRAIS

POR,

**Murilo Carrascoza Passeri**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

### **Banca Examinadora**

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira

UnB/ ENM (Orientador)

Prof. Aida Alvez Fadel

UnB/ ENM

Prof. José Alexander Araújo

UnB/ ENM

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Brasília, 11 de Maio de 2021

## Resumo

Esse trabalho tem como objetivo desenvolver uma análise comparativa entre os métodos de previsão de vida em fadiga devido a processos aleatórios. A mesma é dividida entre um método no domínio do tempo, onde associa-se um algoritmo de contagem de ciclos, método *rainflow*, com a regra de acúmulo de dano de Palmgren-Miner e os métodos no domínio da frequência, conhecidos como métodos espectrais, nesse trabalho abordou-se os métodos de aproximação de Rayleigh para banda estreita, Wirshing and Light, Oritz and Chen e Dirlik. Primeiramente uma detalhada fundamentação teórica sobre os assuntos pertinentes à análise do problema apresentado foi realizada. Buscou-se na literatura dados experimentais para tornar possível a validação da metodologia desenvolvida. Foi utilizado um experimento no qual um corpo de prova é submetido a dois carregamentos Gaussianos uniaxiais de banda larga sob diferentes níveis de tensão, os carregamentos são definidos como unimodal e bimodal. A metodologia baseia-se na utilização de rotinas computacionais desenvolvidas, capazes de fazer a previsão de vida em fadiga para o material de forma numérica. Observou-se que para o carregamento unimodal, os resultados do método no domínio do tempo e os métodos espectrais foram satisfatórios, enquanto para o carregamento bimodal, os métodos espectrais, com exceção do método proposto por Dirlik, mostraram-se extremamente conservativos. O método espectral utilizado onde os resultados mais se aproximaram, para ambos carregamentos, da metodologia no domínio do tempo foi o de Dirlik.

**PALAVRAS CHAVE:** Fadiga, Previsão de vida, Modelos espectrais, Processos estocásticos.

## Abstract

This work aims to develop a comparative analysis between the methods for fatigue life prediction due to random processes. The analysis is divided between a method in the time domain, where a cycle counting algorithm, *rainflow* method, is associated with the Palmgren-Miner damage accumulation rule and the methods in the frequency domain, known as spectral methods, in this work it is approached Rayleigh's approximation method for narrow band loadings, Wirshing and Light, Ortiz and Chen and Dirlik. First, a detailed theoretical foundation on the subjects relevant to the analysis of the problem presented was carried out. Experimental data were acquired in the literature to make possible the validation of the developed methodology. An experiment was used in which a specimen is subjected to two broadband uniaxial Gaussian loadings under different stresses, the loads are defined as unimodal and bimodal. The methodology is based on the use of developed computational routines, capable of predicting the fatigue life for the material numerically. It was observed that for the unimodal loading, the results of the method in the time domain and the spectral methods were satisfactory, while for the bimodal loading, the spectral methods, with the exception of the method proposed by Dirlik, are extremely conservatives. The spectral method used where the results were closest to the methodology in the time domain for both loadings was Dirlik's.

**KEYWORDS:** Fatigue, Life prediction, Spectrum models, Stochastic process.

## Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>iv</b>
<b>LISTA DE ABREVIACÕES</b>	<b>v</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>vi</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	<b>vii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO . . . . .	1
1.2 OBJETIVOS . . . . .	3
1.3 ORGANIZAÇÃO . . . . .	3
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>4</b>
2.1 PROCESSOS ALEATÓRIOS . . . . .	4
2.1.1 Conceito . . . . .	4
2.1.2 Classificações de um processo aleatório . . . . .	4
2.1.3 Processo estacionário . . . . .	5
2.1.4 Processo ergódico . . . . .	5
2.1.5 Processo Gaussiano . . . . .	6
2.2 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DE UM PROCESSO ALEATÓRIO . . . . .	6
2.2.1 Média e variância . . . . .	6
2.2.2 Autocorrelação . . . . .	7
2.2.3 Momentos . . . . .	8
2.3 Séries de Fourier . . . . .	10
2.3.1 Transformadas de Fourier . . . . .	10
2.4 FENÔMENO DA FADIGA . . . . .	12

---

2.4.1	Tensões flutuantes . . . . .	13
2.5	ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DO TEMPO . . . . .	16
2.5.1	Modelos de acúmulo de dano . . . . .	16
2.5.2	Teoria de acúmulo de dano linear . . . . .	17
2.5.3	Método Rainflow . . . . .	18
2.6	ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA . . . . .	21
2.6.1	Densidade espectral . . . . .	22
2.6.2	Nível de taxa de cruzamentos de um processo aleatório de banda estreita . . . . .	24
2.6.3	Função geradora de momentos . . . . .	27
2.6.4	Métodos de previsão de vida de fadiga para processos aleatórios de banda estreita . . . . .	28
2.6.5	Métodos de previsão de vida de fadiga para processos aleatórios de banda larga . . . . .	31
2.6.5.1	Método de Wirshing e Light . . . . .	31
2.6.5.2	Método de Oritz e Chen . . . . .	31
2.6.5.3	Método de Dirlik . . . . .	32
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>34</b>
3.1	REFERÊNCIA EXPERIMENTAL . . . . .	34
3.1.1	Carregamento Unimodal . . . . .	36
3.1.2	Carregamento Bimodal . . . . .	37
3.2	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA . . . . .	38
3.3	DOMÍNIO DO TEMPO . . . . .	39
3.3.1	Reconstrução do espectro . . . . .	39
3.3.2	Contagem de ciclos . . . . .	40
3.3.3	Cálculo do acúmulo de dano . . . . .	40
3.4	TOOLBOX VIBRATION DATA . . . . .	40
3.5	FLUXOGRAMA . . . . .	41
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E ANÁLISE</b>	<b>43</b>
4.1	RESULTADOS . . . . .	43
4.2	ANÁLISE DOS RESULTADOS . . . . .	44
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>46</b>

---

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>47</b>
<b>A APÊNDICE</b>	<b>49</b>
A.1 PRIMEIRA TRANSFORMADA DE FOURIER . . . . .	49
A.2 ROTINA MÉTODOS ESPECTRAIS - UNIMODAL . . . . .	50
A.3 ROTINA MÉTODOS ESPECTRAIS - BIMODAL . . . . .	54
A.4 ROTINA RECONSTRUÇÃO ESPECTRO UNIMODAL . . . . .	58
A.5 ROTINA RECONSTRUÇÃO ESPECTRO BIMODAL . . . . .	60
A.6 ALGORITMO RAINFLOW . . . . .	63

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Função densidade de probabilidade (PDF) de um processo aleatório $X(t)$ (LEE et al., 2005) . . . . .	5
2.2	Classificações de um processo aleatório $X(t)$ (BENDAT; PIERSOL, 1986) . . . . .	5
2.3	Função densidade de probabilidade (PDF) de um processo Gaussiano (LEE et al., 2005) . . . . .	6
2.4	Função autocorrelação de um processo aleatório estacionário (LEE et al., 2005) . . . . .	9
2.5	Transformada de Fourier (FFT) . . . . .	12
2.6	Relações tempo-tensão (BUDYNAS; NISBETT, 2009) . . . . .	15
2.7	Representação do acúmulo de dano (LEE et al., 2005) . . . . .	17
2.8	Esquema ilustrativo do método Rainflow (BELLORIO, 2009) . . . . .	19
2.9	Histórico de deformação-tempo e resposta do material (DONALDSON, 1982) . . . . .	19
2.10	Esquema ilustrativo do método <i>rainflow</i> (ASTM, 1997) . . . . .	20
2.11	Esquema ilustrativo da contagem de ciclos (ASTM, 1997) . . . . .	21
2.12	Relação entre $S_X(\omega)$ e RMS (LEE et al., 2005) . . . . .	23
2.13	Processos com diferentes larguras de banda e suas respectivas PSDs (LEE et al., 2005) . . . . .	24
2.14	Região de ocorrência do evento $A$ (LEE et al., 2005) . . . . .	25
2.15	Cálculo do fator de irregularidade (LEE et al., 2005) . . . . .	27
2.16	Função contínua de densidade de probabilidade (LEE et al., 2005) . . . . .	30
3.1	Corpo de prova (KIHL; SARKANI; BEACH, 1995) . . . . .	35
3.2	Espectro Unimodal . . . . .	37
3.3	Espectro Bimodal . . . . .	38
3.4	Interface Vibration Data . . . . .	41
3.5	Fluxograma metodologia . . . . .	42

## LISTA DE ABREVIACOES

- ASTM** *American Society for Testing and Materials*. 19
- FFT** *Fast Fourier Transfor* (Transformada Rápida de Fourier). 11
- IFT** *Inverse Fourier Transform* (Transformada Inversa de Fourier). 11
- PDF** *Probability Density Function* (Função Densidade de Probabilidade). 16
- PSD** *Power Spectral Density* (Densidade Espectral de Potência). 21
- RFC** *RainFlow Cycle Counting* (Contagem de Ciclos Rainflow). 18
- RMS** *Root Mean Square* (Valor quadrático médio). 7
- S-N** *Stress versus Number of cycles* (Tensão versus Vida). 2

## LISTA DE TABELAS

3.1	Resultados Artigo - Carregamento Unimodal . . . . .	36
3.2	Resultados Artigo - Carregamento Bimodal . . . . .	37
4.1	Resultados numéricos - Unimodal . . . . .	43
4.2	Resultados numéricos - Bimodal . . . . .	43
4.3	Comparação resultados numéricos - Unimodal . . . . .	44
4.4	Comparação resultados numéricos - Bimodal . . . . .	44

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

$A$	razão de amplitude
$A_k$	coeficiente da série de Fourier
$a_W$	parâmetro do método de Wirshing e Light
$B_k$	coeficiente da série de Fourier
$b_W$	parâmetro do método de Wirshing e Light
$C_k$	coeficiente complexo da série de Fourier
$D$	valor do dano
$D_1$	parâmetro do método de Dirlik
$D_2$	parâmetro do método de Dirlik
$D_3$	parâmetro do método de Dirlik
$E[0^+]$	taxa esperada de cruzamento de zeros
$E[]$	valor esperado
$E[P]$	taxa esperada de cruzamento de picos
$E[X(t)]$	média de um processo aleatório
$E[X_t^2]$	valor quadrático médio (RMS)
$F_a$	amplitude da componente alternante da força
$F_m$	componente média estável da variação da força
$f_X(x)$	função densidade de probabilidade de um processo estocástico
$F_{max}$	força máxima
$F_{min}$	força mínima
$f_{S_a}(S_a)$	função densidade de probabilidade de amplitude <i>rainflow</i>

---

$m$	parâmetro da curva $S - N$
$M_j$	momento de uma função de densidade espectral de potência
$M_{f,c}^n$	momento de uma variável aleatória
$N$	número de ciclos
$N_{f,i}$	número de ciclos até a falha por fadiga em um determinado nível de tensão
$P$	probabilidade
$p(\alpha, \beta)$	conjunto da função de densidade de probabilidade
$Q$	parâmetro do método de Dirlik
$R$	parâmetro do método de Dirlik
$R(\tau)$	função de autocorrelação
$R_t$	razão de tensão
$S$	nomenclatura dada a tensão em métodos de previsão de vida
$S_X$	densidade espectral de potência
$T$	período total de tempo
$W_X$	densidade espectral de potência unilateral
$X(t)$	processo aleatório
$X(t)$	processo estocástico
$X_m$	parâmetro do método de Dirlik
$Z$	parâmetro do método de Dirlik

**Símbolos Gregos**

$\alpha$	parâmetro de escala
$\Gamma$	função gama
$\gamma$	fator de irregularidade
$\gamma_X$	obliquidade
$\kappa_X$	curtose
$\lambda$	largura espectral
$\mu_X(t)$	média de um processo estocástico
$\omega_k$	frequência do k-ésimo harmônico

---

$\rho$	coeficiente de correlação
$\sigma_a$	tensão alternada
$\sigma_{max}$	tensão máxima
$\sigma_{min}$	tensão mínima
$\sigma_m$	tensão média
$\sigma_r$	variação de tensão
$\sigma_s$	tensão estática ou estável
$\sigma_X$	desvio padrão
$\sigma_X^2$	variância
$\tau$	intervalo de tempo
$v_a^+$	taxa esperada de cruzamentos por unidade de tempo
$\zeta_O$	fator de correção do método de Oritz e Chen
$\zeta_W$	fator de correção do método de Wirshing e Light

**Subscritos**

$max$	máximo
$min$	mínimo
$NB$	banda estreita
$WB$	banda larga

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO

Em projetos de engenharia, todo o dimensionamento deve ser feito para garantir que não haja a falha do material, comprometendo o funcionamento de máquinas, estruturas, a segurança dos operadores e usuários, evitando também possíveis problemas econômicos.

As falhas mecânicas podem ser divididas em duas categorias principais, a falha estática e a falha por fadiga.

Quando um elemento é solicitado apenas por um carregamento que não varia com o tempo, o mesmo deve ser dimensionado contra a falha estática, onde caso o limite de escoamento do material seja superado pelos esforços atuantes, haverá a falha do mesmo. Esse fenômeno, quando comparado à falha por fadiga, é consideravelmente mais simples, tendo sido muito estudado nos últimos séculos, onde diversos modelos foram desenvolvidos e validados experimentalmente, possibilitando um dimensionamento extremamente preciso e confiável.

Já quando há a aplicação de carregamentos variáveis é necessário que seja feito um dimensionamento para um tipo específico de falha mecânica, a fadiga. Esse processo é caracterizado pela degradação contínua de um componente sujeito a um carregamento cíclico, onde há uma lenta e gradual propagação de trincas que pode culminar na ruptura do material, levando-o a colapsar de forma súbita.

O fenômeno da fadiga é extremamente complexo devido ao seu caráter estatístico e dependência de diversos fatores que muitas vezes estão fora do controle do engenheiro projetista. Pode-se destacar entre esses fatores a geometria do material que estará sujeito aos esforços, a sua microestrutura, o tipo de carregamento presente, os processos de fabricação que podem modificar suas propriedades mecânicas e aspectos ambientais como temperatura, umidade, ventos e etc (TAKAHASHI, 2014).

Em projetos de engenharia mecânica é de suma importância que haja uma previsão de vida dos elementos de uma máquina e de sua estrutura. Tendo em vista que grande parte das falhas observadas decorrem justamente de processos cíclicos, ter um modelo que possa prever

com confiabilidade a vida de componentes mecânicos torna-se indispensável.

Vale também destacar que os níveis de tensão nos quais ocorre a falha por fadiga são muito inferiores aos quais ocorrem a ruptura do material por carregamento estático, sendo assim essencial em um projeto que seja feito o dimensionamento correto para evitar a falha devido a um carregamento cíclico.

Como descrito por Norton (2013), o fenômeno da fadiga foi observado pela primeira vez no início do século XIX, em uma situação na qual os eixos de um vagão ferroviário começaram a falhar após um tempo muito curto em serviço, mesmo tendo sido dimensionados usando uma metodologia que previa a falha devido à esforços que poderiam causar o escoamento do material escolhido.

Segundo um artigo publicado por Schütz (1996), os primeiros estudos feitos onde foi analisado o fenômeno de falha por fadiga foi publicado em 1837 pelo engenheiro Wilhelm Alber, nos quais avaliou-se a durabilidade de correntes transportadoras utilizadas em minas.

Pouco tempo depois, ao observar o fenômeno, onde estavam presentes fraturas frágeis e repentinas, foi publicado em 1843, por Rankine, um artigo no qual ele descrevia que o material no qual eram fabricados os eixos do vagão falharam por causa da ação de tensões flutuantes sobre o mesmo.

Outra descoberta significativa para o estudo desse fenômeno, foi publicado por August Wöhler, no qual ensaiou em seu laboratório eixos dinamicamente carregados até que houvesse a falha nos mesmos. Nesse artigo publicado por Wöhler, foi identificado pela primeira vez, como causadores do colapso das estruturas, a tensão variante no tempo. Foi desenvolvido em sua pesquisa o que ficou conhecido como o diagrama S-N, *Stress versus Number of cycles* (Tensão versus Vida), ou Curva de Wöhler, que caracteriza o comportamento dos materiais quando os mesmos estão sujeitos a esforços alternados.

O risco associado ao fenômeno de fadiga, estende-se não apenas a falhas em elementos mecânicos, o que provoca um grande impacto econômico mas também em falhas catastróficas que envolvem vidas humanas, como exemplo podem ser citados os primeiros acidentes aéreos, colapso de estruturas de edifícios mal dimensionados para esforços que podem surgir, como o vento, mudanças de temperatura e pressão, entre outros acidentes que ao longo dos anos provocaram a morte de inúmeras pessoas em todos o mundo.

Uma grande diferença que pôde ser observada entre a falha estática e a falha por fadiga de um material, devido à esses acidentes que vieram a ocorrer por volta de 1900, estava no fato de que a falha por fadiga ocorria sempre de forma súbita e total, o que era extremamente perigoso, enquanto a falha estática dava indícios que podia vir a acontecer ao serem observadas grandes deflexões no material. (BUDYNAS; NISBETT, 2009)

A principal dificuldade no estudo de fadiga reside no fato de que as condições reais nas quais esse fenômeno ocorre são muito diferentes das situações teóricas sob as quais modelos de previsão de vida são elaborados. Por isso, muitas vezes torna-se indispensável a realização de ensaios que buscam levantar os parâmetros necessários para um correto dimensionamento de estruturas, máquinas e seus elementos. Esses ensaios são extremamente caros e acabam por

muitas vezes inviabilizarem um projeto.

Assim sendo, o desenvolvimento de metodologias capazes de prever de forma confiável a vida dos materiais sujeitos à fadiga, sem que sejam necessários inúmeros e complexos ensaios, evoluiu muito nas últimas décadas. Onde surgiram métodos já validados experimentalmente, amplamente aceitos e utilizados na prática.

Um dos principais aspectos que permitiu a otimização desses modelos é a evolução computacional que acompanhou o desenvolvimento dos mesmos. Possibilitando assim o surgimento de simulações, métodos que requerem uma grande capacidade de processamento de dados, tendo papel importante também na diminuição de custos relativos ao projeto de engenharia.

## 1.2 OBJETIVOS

Baseado neste cenário, o objetivo desse trabalho consiste em comparar os resultados das previsões de vida de fadiga usando modelos espectrais, uma metodologia mais recente que busca otimizar o projeto através da análise do fenômeno no domínio da frequência, de forma alternativa aos métodos que a fazem no domínio do tempo.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO

Nesta seção será abordado como foi estruturado o trabalho, apresentando de forma clara como o mesmo foi desenvolvido.

No primeiro capítulo é feita uma contextualização do problema, com um breve histórico do mesmo, destacando-se os pontos mais importantes que motivaram o presente trabalho. Em seguida, são descritos os objetivos que buscou-se atingir com base no atual cenário descrito.

No segundo capítulo é apresentada a fundamentação teórica, considerada essencial para o entendimento do problema. Buscou-se desenvolver os conceitos fundamentais em uma ordem lógica para que ficasse claro a necessidade do conhecimento dos mesmos afim de alcançar os objetivos descritos anteriormente. É feita uma discussão sobre processos aleatórios e suas características, explicita-se suas propriedades estatísticas para então discorrer sobre o fenômeno da fadiga, mostrando a abordagem clássica que é utilizada, no domínio do tempo, para assim tratar sobre os métodos espectrais, assunto central desse trabalho.

O terceiro capítulo trata da metodologia adotada para abordar o problema, tornando possível uma análise objetiva dos resultados encontrados.

No quarto capítulo são apresentados os resultados obtidos e é feita uma análise comparativa entre os métodos de previsão de vida em fadiga no domínio do tempo e os métodos espectrais.

O quinto e último capítulo enfatiza os tópicos mais importantes abordados no relatório e discorre sobre as conclusões obtidas com esse trabalho.

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 2.1 PROCESSOS ALEATÓRIOS

Para que seja possível estudar o fenômeno de fadiga devido a processos aleatórios é indispensável a compreensão das características desses processos, que são representados através de uma formulação estatística, tendo em visto sua natureza aleatória. Nesse capítulo, serão abordados os conceitos fundamentais para a compreensão do fenômeno estudado.

##### 2.1.1 Conceito

Processo estocástico é uma família  $[X(t), t \in T]$  onde para qualquer valor de  $t \in T$ ,  $X(t)$  será uma variável aleatória (PEREIRA; PAIS; SALES, 1986). Esses processos não podem ser caracterizados de forma analítica, sendo necessária uma formulação estatística para que seja possível descrevê-los. Nessa formulação são utilizadas as funções de probabilidade que serão vistas a seguir.

A figura 2.1 é a representação de um processo aleatório no domínio do tempo, em um intervalo  $T$ , onde  $X(t)$  encontra-se no intervalo  $[x, x + dx]$  durante um tempo total de  $(dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4)$ . A probabilidade de  $x \leq X(t) \leq x + dx$  é dada por:

$$P[x \leq X(t) \leq x + dx] = \frac{dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4}{T} \quad (2.1)$$

Se a duração de  $T$  for grande o suficiente, a PDF  $f_X(x)$  é dada por:

$$f_X(x) = P[x \leq X(t) \leq x + dx] = \frac{\sum_{i=1}^k dt_i}{T} \quad (2.2)$$

##### 2.1.2 Classificações de um processo aleatório

Processos aleatórios, ou estocásticos, pode ser classificados como estacionários ou não-estacionários. Um processo estacionário pode ser subdividido em duas categorias, processos

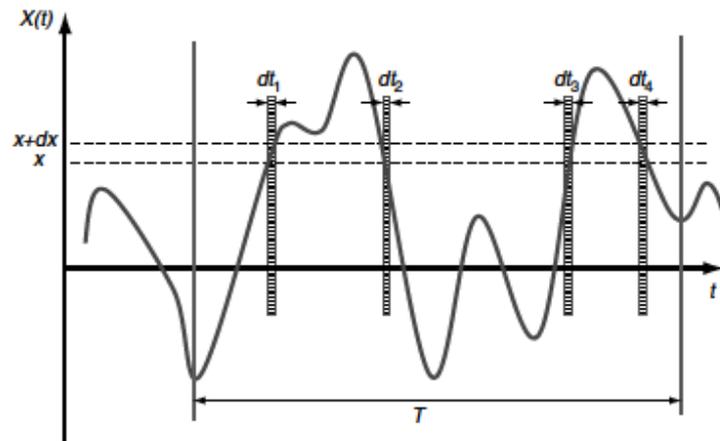


Figura 2.1: Função densidade de probabilidade (PDF) de um processo aleatório  $X(t)$  (LEE et al., 2005)

ergódicos ou não ergódicos. Já os processos não-estacionários pode ser categorizados em termos de propriedades específicas desse tipo de processo (BENDAT; PIERSOL, 1986).

A figura 2.2 ilustra esquematicamente as classificações de um processo aleatório.

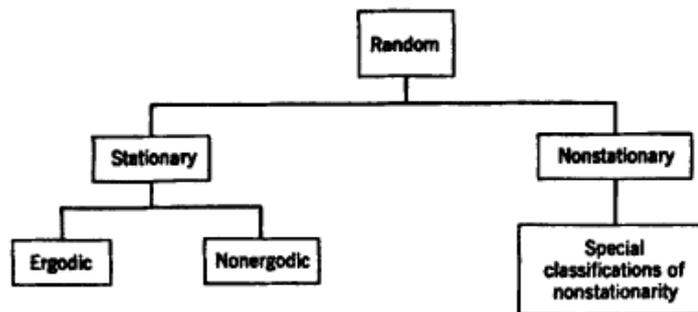


Figura 2.2: Classificações de um processo aleatório  $X(t)$  (BENDAT; PIERSOL, 1986)

Para a compreensão do desenvolvimento desse trabalho é necessário o entendimento dos processos aleatórios estacionários e ergódicos. Por isso, essas classificações específicas serão detalhadas a seguir.

### 2.1.3 Processo estacionário

Um processo aleatório é classificado como estacionário se as distribuições de probabilidade se mantiverem as mesmas para cada instante considerado. O que implica que as propriedades estatísticas do conjunto de amostras como, por exemplo, média, desvio padrão, variância e média quadrática são funções que independem do tempo (LEE et al., 2005).

### 2.1.4 Processo ergódico

Para que um processo seja ergódico, além de ser um processo estacionário, as propriedades estatísticas de um conjunto de observações devem ser as mesmas de cada uma tomadas

separadamente (LEE et al., 2005).

Cabe-se destacar, que para um processo ser ergódico, ele obrigatoriamente será um processo estacionário, porém o inverso não é verdadeiro, um processo estacionário não é necessariamente um processo ergódico, ou seja, existem processos estacionários nos quais as propriedades estatísticas de uma observação tomadas separadamente não irão representar as propriedades do processo aleatório, esses são os ditos processos não-ergódicos.

### 2.1.5 Processo Gaussiano

Alguns processos aleatórios são de extrema importância para o estudo de determinados fenômenos. O processo Gaussiano é um desses. Para que um processo estocástico  $X(t)$  seja considerado um processo Gaussiano, é necessário que a sua função densidade de probabilidade (PDF)  $f_X(x)$  tenha o mesmo formato da função representada na figura 2.3 sendo dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.3)$$

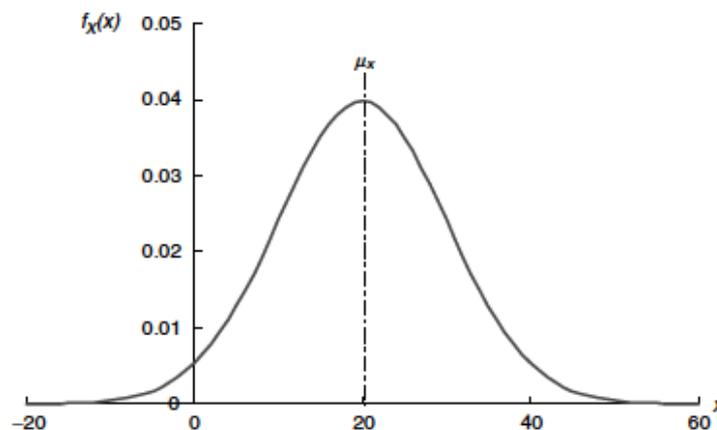


Figura 2.3: Função densidade de probabilidade (PDF) de um processo Gaussiano (LEE et al., 2005)

## 2.2 PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DE UM PROCESSO ALEATÓRIO

### 2.2.1 Média e variância

Dada uma função de probabilidade  $f_X(x)$ , algumas propriedades estatísticas do processo aleatório  $X(t)$  podem ser obtidas. Entre elas estão a média,  $\mu_x$ , e a variância,  $\sigma_x^2$ , que podem ser calculadas através das seguintes equações:

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \cong \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (2.4)$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu_x]^2 f_X(x) dx \cong \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - \mu_x]^2 dt \quad (2.5)$$

Quando a média for igual a zero,  $\mu_X = 0$ ,  $\sigma_X$  é a raiz quadrática média, (RMS), do inglês, *Root Mean Square*, do processo aleatório  $X(t)$ . O valor quadrático médio (RMS) representa a amplitude do processo.

### 2.2.2 Autocorrelação

A função de autocorrelação pode ser entendida como a relação entre um processo aleatório com o mesmo quando analisado em diferentes instantes de tempo, fornecendo assim a medida do nível de influência de uma variável aleatória no restante do processo.

Para um processo aleatório, a função de autocorrelação é o valor esperado do produto de  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$ , que representa os valores da variável aleatória nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , sendo representada por  $E[X(t_1)X(t_2)]$ .

Em um processo aleatório estacionário, o valor da função de autocorrelação não irá depender do instante no qual o mesmo está sendo avaliado mas sim no intervalo de tempo.

Denota-se então a varável  $\tau$  para representar o intervalo de tempo, tendo que:

$$\tau = |t_2 - t_1| \quad (2.6)$$

Devido ao fato de não depender do instante no qual o processo está sendo avaliado, a função de autocorrelação do mesmo é representada por  $R(\tau)$  e é expressa por:

$$R(\tau) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (2.7)$$

Pelo processo aqui descrito ser estacionário, a média e a variância também serão independentes de  $t$ . Sendo assim podemos escrever as seguintes relações:

$$E[X(t_1)] = E[X(t_2)] = \mu_x \quad (2.8)$$

$$\sigma_x(t_1) = \sigma_x(t_2) = \sigma_x \quad (2.9)$$

Um parâmetro importante derivado da função de autocorrelação que permite analisar o processo em um determinado intervalo de tempo é o coeficiente de correlação, denotado por  $\rho$ , e expresso por:

$$\rho = \frac{R_X(\tau) - \mu_X^2}{\sigma_X^2} \quad (2.10)$$

Com base no valor do coeficiente de correlação as variáveis aleatórias são classificadas da seguinte forma:

- Perfeitamente correlatas ( $\rho = \pm 1$ );
- Parcialmente correlatas ( $0 < |\rho| < 1$ );
- Não correlatas ( $\rho = 0$ ).

O coeficiente de correlação varia entre -1 e 1, o que faz com que surja a seguinte relação:

$$\mu_X^2 - \sigma_X^2 \leq R_X(\tau) \leq \mu_X^2 + \sigma_X^2 \quad (2.11)$$

Quando o intervalo de tempo tende ao infinito,  $\tau \rightarrow \infty$ , as variáveis aleatórias tomadas nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  são não correlatas, o que significa que:

$$R_X(\tau \rightarrow \infty) \cong \mu_X \quad (2.12)$$

Já quando  $\tau \rightarrow 0$ , tem-se a seguinte igualdade:

$$R_X(\tau = 0) = \mu_X^2 + \sigma_X^2 = E[X^2] \quad (2.13)$$

Sendo assim,  $R(0)$  torna-se a variância,  $\sigma^2$ , do processo.

Outra característica da função de autocorrelação de um processo aleatório e estacionário é da mesma ser uma função par, ou seja:

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad (2.14)$$

A figura 2.4 mostra as propriedades da função de autocorrelação  $R(\tau)$  de um processo aleatório estacionário  $X(t)$ .

### 2.2.3 Momentos

A análise de um processo aleatório muitas vezes é feita através do estudo de determinados parâmetros que facilitam a compreensão de seu comportamento.

Ao invés de determinar o conjunto de todos os valores que uma variável aleatória pode assumir em um processo, utiliza-se a forma geral da distribuição de probabilidade para se obter parâmetros capazes de descreverem o fenômeno analisado.

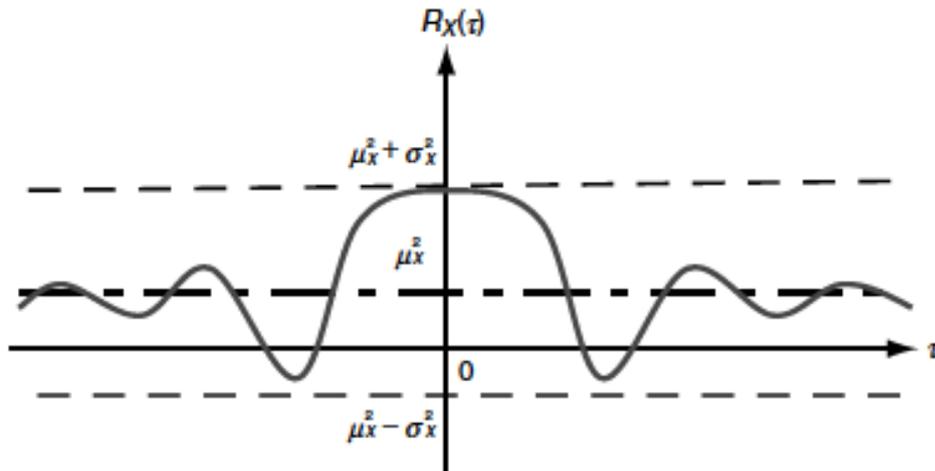


Figura 2.4: Função autocorrelação de um processo aleatório estacionário (LEE et al., 2005)

Tendo em mãos a função densidade de probabilidade (PDF),  $f_X(x)$  de um processo aleatório  $X(t)$ , o  $n$ -ésimo momento de uma variável aleatória contínua real é definido como:

$$M_{f,c}^n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^n f_X(x) dx \quad (2.15)$$

Onde  $c$  é o ponto nos quais os momentos são definidos.

Para os modelos de previsão de vida de fadiga utilizando modelos espectrais, é necessário que se conheça os quatro primeiros momentos da PDF, definidos a seguir, onde o primeiro momento é tomado em torno do zero e os outros em torno da média, chamados assim de momentos centrais, e onde o terceiro e quarto momento são apresentados já normalizados pela variância:

- Primeiro momento (média):

$$M_{f,0}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = E[x] = \mu_X \quad (2.16)$$

- Segundo momento (variância):

$$M_{f,\mu_X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = E[(x - \mu_X)^2] = \sigma_X^2 \quad (2.17)$$

- Terceiro momento (obliquidade):

$$\frac{M_{f,\mu_X}^3}{\sigma_X^3} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^3 f_X(x) dx}{\sigma_X^3} = \frac{E[(x - \mu_X)^3]}{\sigma_X^3} = \gamma_X \quad (2.18)$$

- Quarto momento (curtose):

$$\frac{M_{f,\mu_X}^4}{\sigma_X^4} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^4 f_X(x) dx}{\sigma_X^4} = \frac{E[(x - \mu_X)^4]}{\sigma_X^4} = \kappa_X \quad (2.19)$$

## 2.3 Séries de Fourier

A teoria demonstrada nessa seção para a análise de Fourier pode ser encontrada em (LEE et al., 2005), onde a mesma se limita aos aspectos referentes a solução dos problemas nos quais tal análise se faz necessária para problemas envolvendo fadiga devido a processos aleatórios.

Qualquer função periódica expressa no domínio do tempo pode ser representada por uma soma de séries de ondas senoidais de diversas amplitudes, fases e frequências. Seja um processo aleatório  $X(t)$  caracterizado por uma função periódica no domínio do tempo com um período  $T$ ,  $X(t)$  pode ser expresso através de uma série trigonométrica infinita da seguinte forma:

$$X(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + B_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (2.20)$$

Onde,

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt \quad (2.21)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (2.22)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (2.23)$$

A série de Fourier é comumente expressa utilizando coeficientes imaginários, sendo definida nessa forma por:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{i2\pi kt/T} dt \quad (2.24)$$

Onde os coeficientes complexos são dados por:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i2\pi kt/T} dt \quad (2.25)$$

### 2.3.1 Transformadas de Fourier

A transformada de Fourier pode ser compreendida como o limite da série de Fourier de um processo aleatório  $X(t)$  quando  $T$  tende ao infinito,  $T \rightarrow \infty$ . Esse entendimento sobre a transformada de Fourier pode ser melhor compreendido ao se reescrever a equação 2.24 com  $T \rightarrow \infty$ , como demonstrado a seguir:

$$X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i2\pi kt/T} dt \right) e^{i2\pi kt/T} \quad (2.26)$$

Sendo a frequência do  $k$ -ésimo harmônico,  $\omega_k$ , dada, em radianos por segundo por:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (2.27)$$

E o espaçamento entre as funções periódicas adjacentes,  $\Delta\omega$ , por:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.28)$$

A equação 2.26 torna-se:

$$X(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-ik\Delta\omega t} dt \right) e^{ik\Delta\omega t} \quad (2.29)$$

Com o período tendendo ao infinito,  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega$  se torna infinitesimal, sendo denotado por  $d\omega$  e o somatório torna-se então uma integral. Como resultado dessas mudanças, a equação 2.29 pode ser expressa como um par de transformadas de Fourier  $X(t)$  e  $X(\omega)$ :

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.30)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.31)$$

A função  $X(\omega)$  é denominada como transformada de Fourier, enquanto  $X(t)$  é a transformada inversa de Fourier.

Para que a transformada de Fourier exista, são necessárias duas condições:

1. A integral da função absoluta  $X(t)$  existe, ou seja,  $\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)| dt < \infty$ ;
2. A quantidade de descontinuidades da função é um número finito.

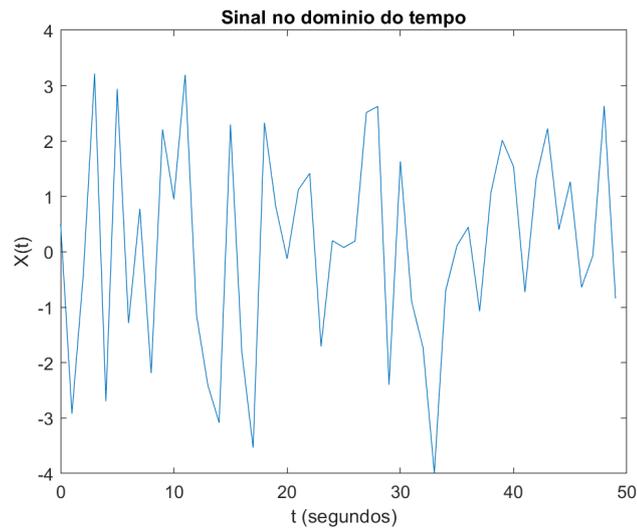
Com a transformada rápida de Fourier, FFT, do inglês, *Fast Fourier Transform*, é possível obter, através de um sinal no tempo, a densidade espectral de potência do carregamento, enquanto a transformada inversa de Fourier, IFT, também do inglês, *Inverse Fourier Transform*, pode ser utilizada para transformar o sinal representado no domínio da frequência no sinal do carregamento no domínio do tempo, ou seja, a transformada inversa de Fourier, é capaz de remontar, caso necessário, a história do carregamento no tempo quando temos apenas o espectro representado no domínio da frequência.

Para que seja possível utilizar as transformadas de Fourier acima indicadas, é necessário que o sinal seja:

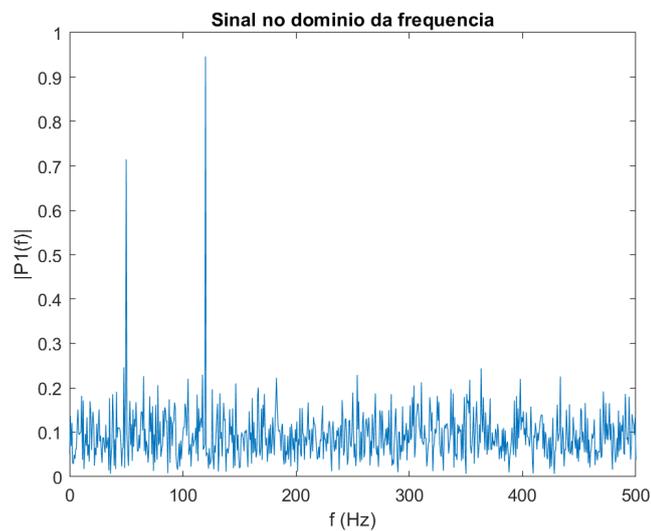
- aleatório;
- estacionário;

- Gaussiano.

Para melhor representar como funcionam as transformadas de Fourier, foi escrito um código em *MatLab*, que gera um sinal aleatório no domínio do tempo e a partir desse sinal gerado, foi aplicada a transformada rápida de Fourier para representar o sinal no domínio da frequência. As figuras 2.5a e 2.5b ilustram, respectivamente, o sinal no domínio do tempo e da frequência:



(a) Sinal no domínio do tempo



(b) Sinal no domínio da frequência

Figura 2.5: Transformada de Fourier (FFT)

## 2.4 FENÔMENO DA FADIGA

Sabe-se que a maioria das falhas ocorre devido à ação de cargas que não são estáticas, mas sim por conta de cargas dinâmicas, que variam no tempo. O tipo de falha, que se deve a

cargas dinâmicas, é conhecido como fadiga.

De acordo com NORTON (2013), a falha por fadiga ocorre, na maior parte dos casos, em níveis de tensão significativamente inferiores aos valores que servem de referência para a falha estática, no caso, a resistência ao escoamento dos materiais sobre os quais atuam as cargas.

Desse modo, um projeto onde se encontram presentes esforços dinâmicos, torna-se indispensável a utilização de uma metodologia que possa prever com uma boa confiabilidade a vida dos elementos que estarão sujeitos aos esforços que variam ao longo do tempo.

Como descrito por BUDYNAS; NISBETT (2009), apesar da aparência similar entre uma falha por fadiga e uma por fratura frágil, onde as superfícies de fratura são planas e perpendiculares ao eixo de tensão, as características de fratura de uma falha por fadiga são bem diferentes de uma fratura frágil estática. Quando se trata de uma falha por fadiga, observa-se três estágios de desenvolvimento:

- Estágio 1 - Início de uma ou mais microtrincas, devido à deformação plástica cíclica seguida de propagação cristalográfica que se estende dois a cinco grãos em relação à origem;
- Estágio 2 - Progressão das microtrincas a macrotrincas, onde formam-se superfícies de fratura tal qual platôs paralelos, separados por sulcos também paralelos;
- Estágio 3 - Material remanescente não consegue mais suportar as cargas resultando em uma fratura rápida e repentina. A falha pode ser frágil, dúctil ou uma combinação de ambas.

No estágio 1, ocorre o início das trincas, sendo a propagação das mesmas, o motivo pelo qual um material irá falhar por fadiga. Deve-se entender então onde essas trincas estão mais sujeitas a ocorrer. Esses locais são caracterizados por apresentarem uma descontinuidade no material, que podem surgir devido, principalmente, às seguintes razões:

- Desenhos de mudanças rápidas na seção transversal em que concentrações de tensão ocorrem;
- Contato entre elementos, por rolamento ou deslizamento, fazendo com surjam altas tensões concentradas de contato;
- Problemas inerentes aos processos de fabricação do material;
- Composição do próprio material.

#### 2.4.1 Tensões flutuantes

Como descrito por (BUDYNAS; NISBETT, 2009), embora comumente apresentam-se na forma de um padrão senoidal devido à natureza de máquinas rotativas, as tensões flutuantes ocorrem em diversos outros padrões. Em históricos de carregamento no qual há bem definido

um máximo e um mínimo de força, a forma da onda que o representa perde a sua importância e os picos de força irão definir como irá se comportar o material.

Para caracterizar os picos de força sob os quais um material estará sujeito, surge o conceito de força média e força alternada, definidas da seguintes maneira:

$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} \quad (2.32)$$

$$F_a = \left| \frac{F_{max} - F_{min}}{2} \right| \quad (2.33)$$

Onde

- $F_{max}$  - maior força;
- $F_{min}$  - menor força;
- $F_m$  - componente média estável da variação da força;
- $F_a$  - amplitude da componente alternante de força.

Entender o efeito dessas forças no material, ou seja, os esforços que as mesmas farão com que surjam, é indispensável para que seja possível utilizar os métodos de previsão de vida de fadiga.

Alguns padrões ao analisarmos diagramas que relacionam o tempo com a tensão são muitas vezes encontrados na literatura devido à parte didática que tem no entendimento do comportamento dos materiais quando sujeitos à um carregamento cíclico e também por conta de serem facilmente encontrados em aplicações reais. A figura 2.6 ilustra algumas dessas relações, que são:

- (a) - Tensão flutuante com ondulação de alta frequência;
- (b) e (c) - Tensão flutuante não senoidal;
- (d) - Tensão flutuante senoidal;
- (e) - Tensão repetida;
- (f) - Tensão senoidal completamente reversa.

As componentes de tensão, das quais alguma estão representadas na figura 2.6, que ocorrem devido a carregamentos que variam com o tempo são:

- $\sigma_{min}$  - tensão mínima;
- $\sigma_{max}$  - tensão máxima;

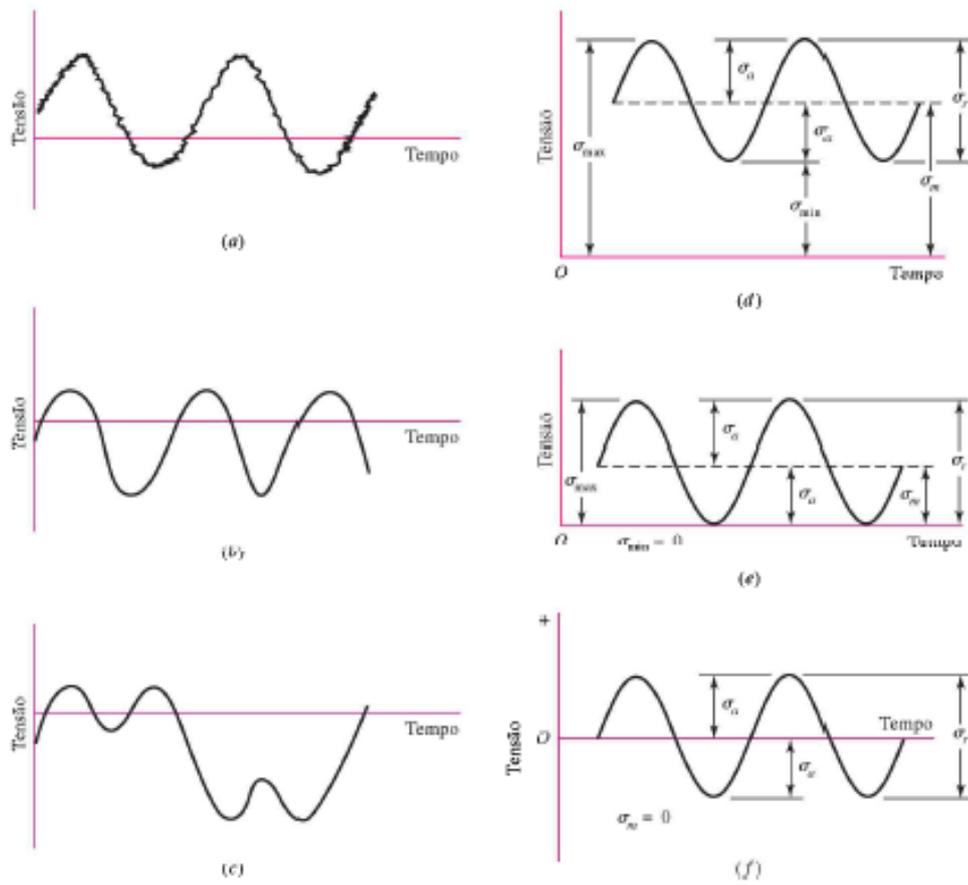


Figura 2.6: Relações tempo-tensão (BUDYNAS; NISBETT, 2009)

- $\sigma_a$  - componente de amplitude;
- $\sigma_m$  - tensão média;
- $\sigma_r$  - variação de tensão;
- $\sigma_s$  - tensão estática ou estável.

De extrema importância para esse tipo de análise, as componentes média e alternada são definidas como:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (2.34)$$

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| \quad (2.35)$$

Outras duas importantes definições são as de razão de tensão,  $R_t$ , e razão de amplitude,  $A$ . Que podem ser calculadas através das seguintes equações:

$$R_t = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (2.36)$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad (2.37)$$

Existem hoje três métodos principais para fazer previsão de vida de fadiga sob carregamento de amplitude constante, são eles:

- Método tensão-vida;
- Método deformação-vida;
- Método da mecânica de fratura linear elástica.

Todos os métodos listados buscam prever a vida, em número de ciclos,  $N$ , até que haja a ruptura do material, cada um com suas características, vantagens e desvantagens.

Dependendo da vida esperada, pode-se dividir o fenômeno da fadiga em fadiga de baixo ciclo, que é quando observa-se uma vida de  $1 \leq N \leq 10^3$  ciclos, e em fadiga de alto ciclo, que ocorre quando  $N > 10^3$  ciclos.

## 2.5 ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DO TEMPO

Um sistema, quando sujeito à uma excitação, irá produzir uma determinada resposta. Caso a excitação ou o movimento de resposta,  $X(t)$ , sejam imprevisíveis, o sistema está sujeito à uma vibração aleatória. Isso se deve ao fato de que o exato valor de  $X(t)$  não pode ser precisamente previsto de forma analítica. A resposta do sistema poderá ser descrita apenas de forma probabilística.

A função densidade de probabilidade, representada por PDF, do inglês, *Probability Density Function*, de uma função expressa no domínio do tempo,  $X(t)$ , pode ser obtida ao serem calculadas as suas propriedades estatísticas.

### 2.5.1 Modelos de acúmulo de dano

O dano de um componente pode ser compreendido como a razão entre o comprimento atual da trinca e o comprimento máximo da mesma para que não haja a falha do material.

Diversas equações que buscam calcular o dano foram desenvolvidas com base em observações experimentais de acordo com o tipo de carregamento e a resposta do material aos esforços sob aos quais estarão sujeitos. Entre os modelos mais utilizados, destacam-se os dos seguintes autores:

- Miner (1945);
- Manson e Halford (1981);
- Subramanyan (1976);

- Hashin (1980).

O estudo de acúmulo de dano pode ser dividido primariamente em dois grupos, modelos de acúmulo de dano linear e modelos não lineares. Nessa seção, a teoria de acúmulo de dano linear será detalhada, mais especificamente a teoria de Miner, por se tratar do método mais utilizado no estudo do fenômeno da fadiga, além de ser facilmente implementado em comparação aos outros modelos.

A representação do dano pode ser feita através de um gráfico que irá relacionar o dano com o números de ciclos como pode ser visto na figura 2.7, que mostra um tipo específico de acúmulo de dano, no caso, o não linear.

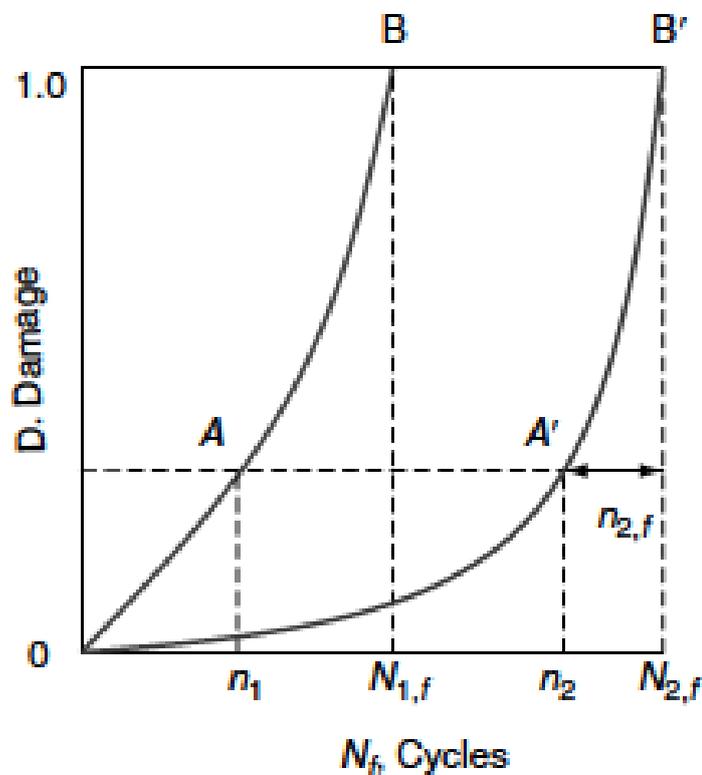


Figura 2.7: Representação do acúmulo de dano (LEE et al., 2005)

### 2.5.2 Teoria de acúmulo de dano linear

Caso a curva que representa o dano acumulado no material seja linearizada, a relação entre o dano e o número de ciclos para que haja a falha do material será linear.

Como descrito em (LEE et al., 2005), o modelo hoje utilizado universalmente foi proposto por Palmgren (1924) e paralelamente desenvolvido por Langer (1937).

Mesmo sendo amplamente utilizado, esse modelo não tem uma aceitação universal e em certas aplicações não apresenta um resultado confiável, havendo discrepâncias entre os resultados obtidos utilizando-o e os obtidos experimentalmente

O pressuposto de Miner para propor esse modelo é de que a vida total do componente pode ser entendida como a soma dos efeitos de cada ciclo.

Matematicamente, o dano linear é fornecido pela seguinte equação:

$$D_i = \frac{n_i}{N_{i,f}} \quad (2.38)$$

Onde:

- $D_i$  - Dano linear;
- $n_i$  - Número de ciclos;
- $N_{i,f}$  - Número esperado de ciclos para que ocorra a falha.

É então proposta o seguinte critério para a previsão de vida de fadiga utilizando o modelo de acúmulo de dano linear:

$$\sum D_i = \sum \frac{n_i}{N_{i,f}} \geq 1.0 \quad (2.39)$$

Quando se trata de um carregamento aleatório, deve-se adaptar esse modelo com base na probabilidade de ocorrência de um ciclo com determinada amplitude de tensão. Essa aplicação é detalhada na seção 2.6.4 deste relatório, que trata da metodologia utilizada para a previsão de vida de fadiga para processos aleatórios de banda estreita.

### 2.5.3 Método Rainflow

Devido a natureza aleatória dos sinais obtidos que caracterizam o carregamento no tempo, torna-se complexa a obtenção dos parâmetros relativos à sollicitação do material.

Para contornar a dificuldade de se obter a variação da tensão que ocorre em um determinado ponto da estrutura bem como o ciclo referente a esta tensão, diversos métodos de contagem de ciclos foram desenvolvidos, entre eles destaca-se o chamado método *Rainflow* (RFC - *RainFlow Cycle Counting*), desenvolvido por Matsuishi e Endo (1968).

Como explicado por Bellorio (2009), o método tem como finalidade extrair de um sinal aleatório no tempo as faixas de tensão e seus respectivos ciclos. Baseado na contagem de picos e vales representando uma gota d'água caindo por um telhado. O autor detalha também o algoritmo utilizado pelo método para fazer a contagem como descrito a seguir:

- Orienta-se o eixo do tempo com o sentido positivo para baixo;
- Identifica-se os picos e vales com letras;
- Considera-se o escoamento da gota tanto da direita para a esquerda como da esquerda para direita;

- As extremidades da metade de um ciclo são definidas pelo início e fim de cada caminho de escoamento, podendo tanto ser iniciado nos picos como nos vales.

A figura 2.8 ilustra o método em questão.

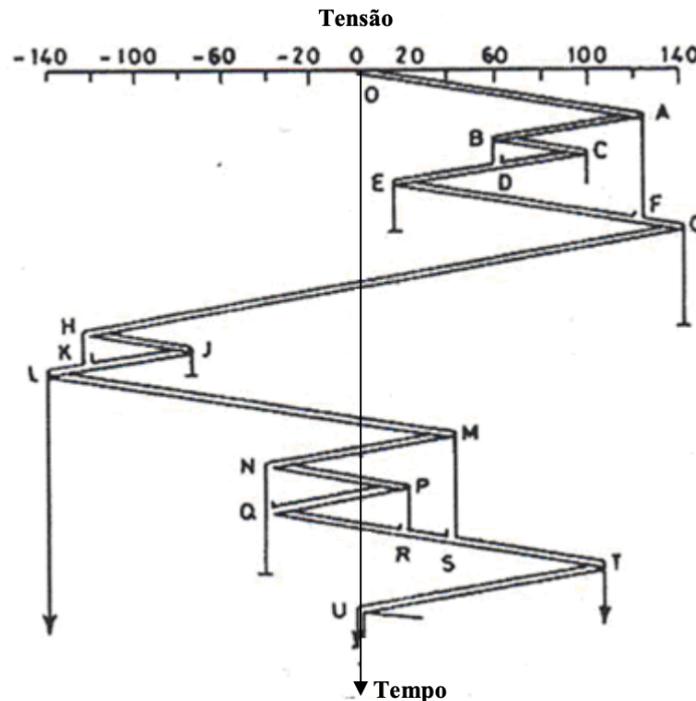


Figura 2.8: Esquema ilustrativo do método Rainflow (BELLORIO, 2009)

Esse método faz com que as pequenas reversões de carga em um ciclo de fadiga com amplitude maior não interfiram no dano acumulado por fadiga (WATANABE, 2014). Na figura 2.9 é apresentado um exemplo de um histórico de deformação-tempo com amplitude variável e a respectiva resposta do material com a contagem de ciclos e meio ciclos realizada através desse método.

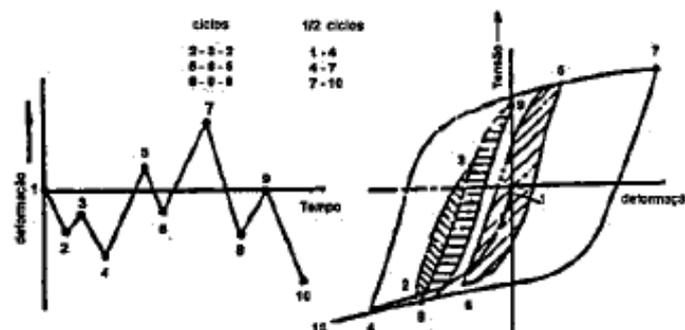


Figura 2.9: Histórico de deformação-tempo e resposta do material (DONALDSON, 1982)

Além do algoritmo acima descrito, a norma ASTM E1049 - 85 (1997), apresenta de forma mais clara as regras para se utilizar esse método como descrito a seguir:

- Denota-se de X o intervalo em questão; Y, a faixa anterior adjacente a X, e S o ponto de

partida na história.

1. Leia o próximo pico ou vale. Se estiver fora dos dados, vá para a etapa 6.
2. Se houver menos de três pontos, vá para a etapa 1. É necessário formar intervalos de X e Y usando os três picos e vales mais recentes que não tenham sido descartados.
3. Compare os valores absolutos dos intervalos de X e Y.
  - se  $X < Y$ , vá para a etapa 1.
  - se  $X \geq Y$ , vá para a etapa 4.
4. Se o intervalo Y contém o ponto de partida S, vá para o passo 5; caso contrário, conte o intervalo Y como um ciclo e descarte o pico e o vale de Y; vá para o passo 2.
5. Conte o intervalo Y como um meio ciclo, descarte o primeiro ponto (pico ou vale) no intervalo de Y; mova o ponto de partida para o segundo ponto no intervalo Y; e vá para a etapa 2.
6. Conte cada intervalo que não tenha sido previamente considerado como metade de um ciclo.

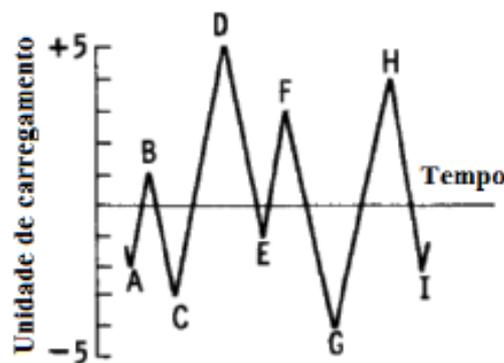


Figura 2.10: Esquema ilustrativo do método *rainflow* (ASTM, 1997)

- A história de carregamento da figura 2.10 é retracada na figura 2.11 e o procedimento para a contagem pode ser exemplificado com base nessa figura da seguinte forma:
  1.  $S = A$ ;  $Y = |A-B|$ ;  $X = |B-C|$ ;  $X > Y$ . Y contém S, que é o ponto A. Conta-se  $|A-B|$  como um meio ciclo e descarta-se o ponto A;  $S = B$ .
  2.  $Y = |B-C|$ ;  $X = |C-D|$ ;  $X > Y$ . Y contém S, que é o ponto B. Conta-se  $|B-C|$  como um meio ciclo e descarta-se o ponto B;  $S = C$ .
  3.  $Y = |C-D|$ ;  $X = |D-E|$ ;  $X < Y$ .
  4.  $Y = |D-E|$ ;  $X = |E-F|$ ;  $X < Y$ .
  5.  $Y = |E-F|$ ;  $X = |F-G|$ ;  $X > Y$ . Conta-se  $|E-F|$  como um ciclo e descarta-se os pontos E e F. Nota-se que o ciclo é formado pelo emparelhamento dos intervalos E-F e a porção do intervalo F-G.
  6.  $Y = |C-D|$ ;  $C=|D-G|$ ;  $X > Y$ , Y contém S, que é o ponto C. Conta-se  $|C-D|$  como um meio ciclo e descarta-se o ponto C.  $S = D$ .

7.  $Y = |D-G|$ ;  $X = |G-H|$ ;  $X < Y$ .
8.  $Y = |G-H|$ ;  $X = |H-I|$ ;  $X < Y$ .
9. Conta-se  $|D-G|$  como um meio ciclo,  $|G-H|$  como um meio ciclo, e  $|H-I|$  como um meio ciclo.
10. Fim da contagem.

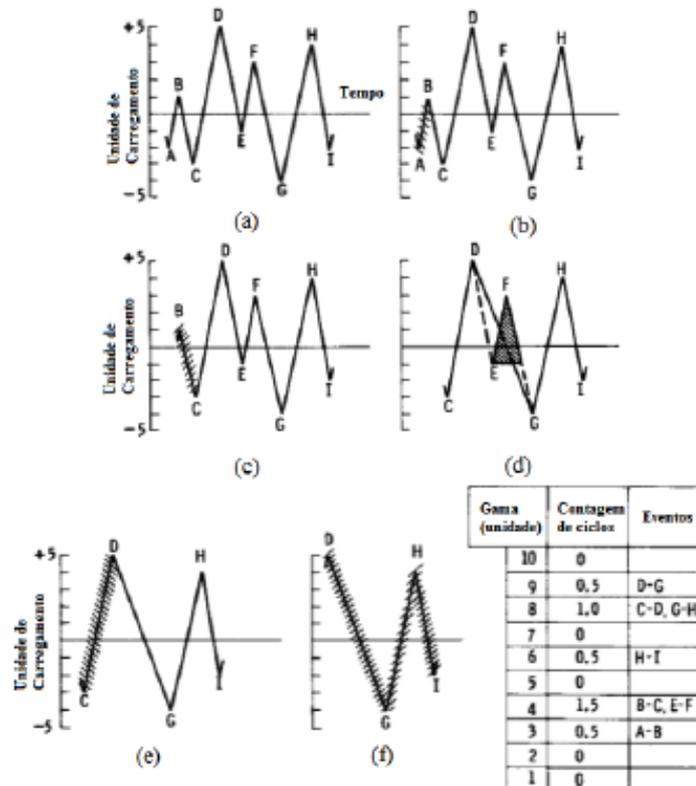


Figura 2.11: Esquema ilustrativo da contagem de ciclos (ASTM, 1997)

## 2.6 ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Em determinadas situações, a resposta aos esforços e os carregamentos são preferencialmente expressos no domínio da frequência, normalmente na forma de densidade espectral de potência, abreviado como PSD, do inglês, *Power Spectral Density*. Nesses casos, é necessário relacionar uma densidade espectral de potência do carregamento com outra de saída da resposta do sistema.

A densidade espectral de potência representa a energia do sinal em diferentes frequências e é, então, uma outra possibilidade de se representar o sinal do carregamento obtido no domínio do tempo (LEE et al., 2005).

### 2.6.1 Densidade espectral

Normalmente a transformada de Fourier de um processo aleatório e estacionário não existe pelo fato da integral da função absoluta não existir (LEE et al., 2005). Entretanto, a transformada de Fourier da função de autocorrelação  $R_X(\tau)$  sempre irá existir.

Caso  $X(t)$  seja normalizado para ter uma média de zero, ou seja:

$$R_X(\tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (2.40)$$

Dessa forma, a integral da função  $R_X(\tau)$  irá convergir para um valor finito:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| dt < \infty \quad (2.41)$$

Defini-se então a transformada de Fourier da função de autocorrelação por  $S_X(\omega)$ , expressa por:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.42)$$

E a função de autocorrelação pode ser assim expressa a partir da transformada inversa de Fourier da seguinte forma:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.43)$$

Denomina-se a função  $S_X(\omega)$  como a densidade espectral do processo, normalizado, aleatório e estacionário  $X(t)$ .

Para o caso no qual  $\tau = 0$ , que significa que o intervalo de tempo é nulo, a equação 2.43 se reduz a:

$$E[X^2] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \sigma_X^2 \quad (2.44)$$

Através dessa relação, pode-se visualizar que a raiz quadrada da área sobre o gráfico  $S_X(\omega)$  x  $\omega$ , representa a raiz quadrática média do processo (RMS). A relação entre a densidade espectral e a RMS do processo pode ser vista na figura 2.12.

Por não haver um significado físico para as frequências negativas, defini-se então uma outra densidade espectral,  $W_X(f)$ , que toma os valores apenas da parte positiva da função  $S_X(\omega)$ , outra diferença entre essas representações se refere ao fato de  $S_X(\omega)$  ter como unidade de medida *rad/s* enquanto  $W_X(f)$  é expressa em *hertz*. A transformação de uma para outra pode ser feita da seguinte forma:

$$E[X^2] = \sigma_X^2 = \int_0^{\infty} W_X(f) df \quad (2.45)$$

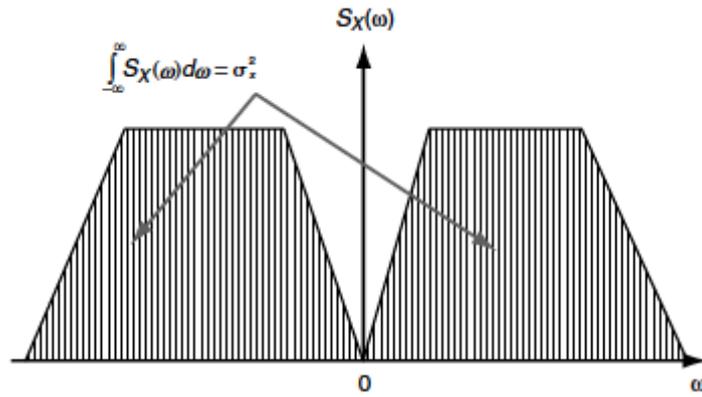


Figura 2.12: Relação entre  $S_X(\omega)$  e RMS (LEE et al., 2005)

onde:

$$W_X(f) = 4\pi S_X(\omega) \quad (2.46)$$

é a densidade espectral de potência (PSD) e:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.47)$$

Para a primeira e segunda derivada de um processo aleatório e estacionário  $X(t)$ , tem-se as seguintes relações para a densidade espectral de potência:

$$S_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_X(\omega) \quad (2.48)$$

$$W_{\dot{X}}(f) = (2\pi)^2 f^2 W_X(f) \quad (2.49)$$

$$\sigma_{\dot{X}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{X}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) d\omega = (2\pi)^2 \int_0^{\infty} f^2 W_X(f) df \quad (2.50)$$

$$S_{\ddot{X}}(\omega) = \omega^4 S_X(\omega) \quad (2.51)$$

$$W_{\ddot{X}}(f) = (2\pi)^4 f^4 W_X(f) \quad (2.52)$$

$$\sigma_{\ddot{X}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{X}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_X(\omega) d\omega = (2\pi)^4 \int_0^{\infty} f^4 W_X(f) df \quad (2.53)$$

Caso um processo tenha apenas uma estreita banda de frequência, dá-se o nome ao mesmo de um processo de banda estreita, enquanto um processo que apresente uma larga banda de frequência recebe o nome de processo de banda larga.

A figura 2.13 representa três diferentes tipos de processos e suas respectivas densidades espectrais de potência, onde visualizando a figura de cima para baixa, temos um processo de banda estreita, seguido por um processo de banda larga e de ruído branco, seguido pela representação de suas PSDs na mesma ordem.

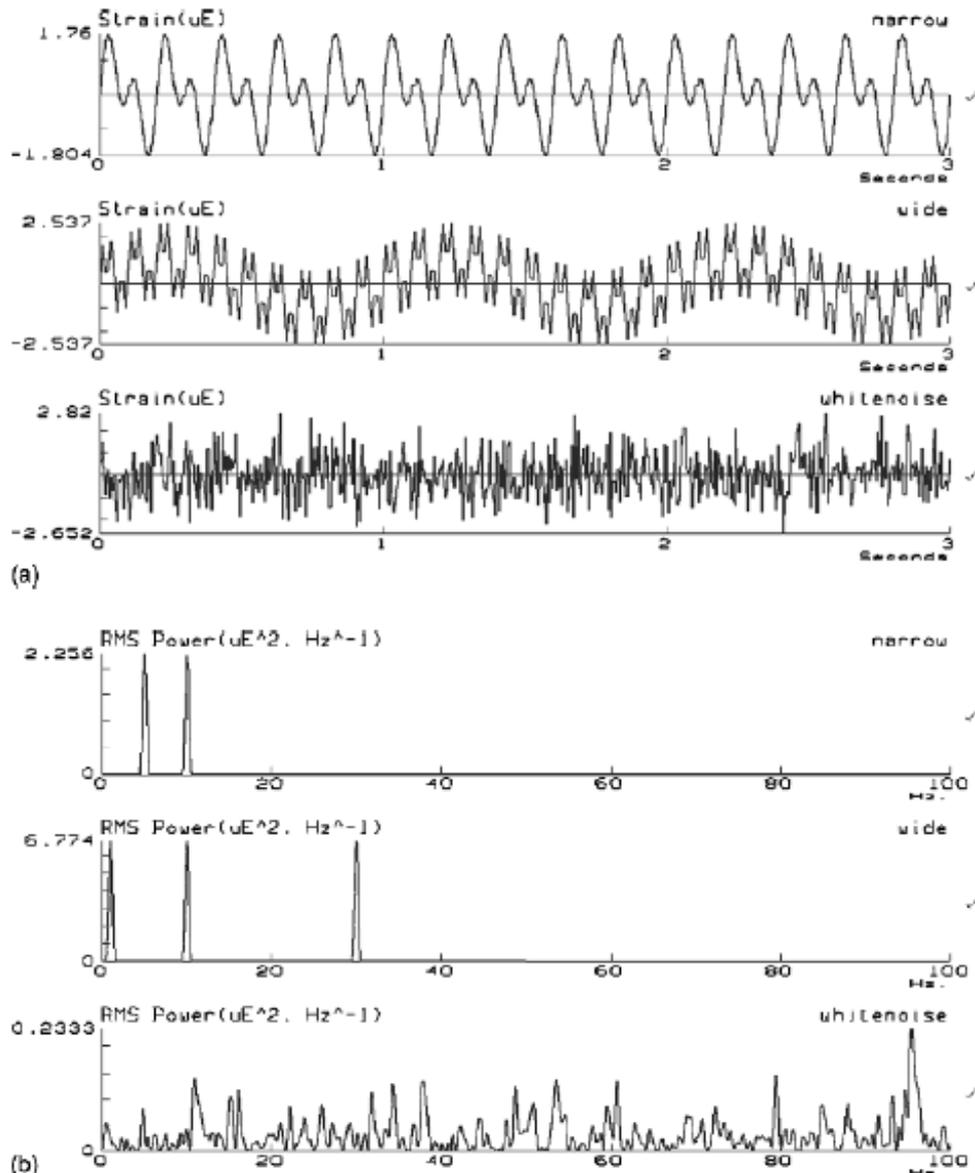


Figura 2.13: Processos com diferentes larguras de banda e suas respectivas PSDs (LEE et al., 2005)

### 2.6.2 Nível de taxa de cruzamentos de um processo aleatório de banda estreita

Nessa seção será explicitado o método descrito por (LEE et al., 2005) para se estimar o nível de taxa de cruzamentos de um processo aleatório de banda estreita, fundamental para o método de previsão de vida desse tipo de processo, que será descrito após essa demonstração.

Para um processo estacionário, contínuo e diferenciável, o número de cruzamentos posi-

tivos em um intervalo infinitesimal depende apenas de  $dt$ . Tem-se a seguinte equação:

$$E[N_{a^+}(dt)] = v_{a^+}dt \quad (2.54)$$

Onde  $v_{a^+}$  representa a taxa esperada de cruzamentos positivos por unidade de tempo. Seja  $A$  um evento de qualquer trecho de um processo aleatório  $X(t)$  que tenha um número de cruzamentos positivos avaliado em  $x = a$  e um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , a probabilidade de ocorrência do evento  $A$ , representada por  $P(A)$ , é dada por:

$$P(A) = v_{a^+}dt \quad (2.55)$$

Permitindo então expressar a taxa de cruzamentos positivos em função de sua probabilidade de ocorrência da seguinte forma:

$$a - X(t) < X(t) < a \quad (2.56)$$

$$\dot{X}(t) > 0 \quad (2.57)$$

Combinando as relações 2.56 e 2.57, a probabilidade  $P(A)$  pode ser reescrita como:

$$P(A) = P(a - X(t) < X(t) < a \cap \dot{X}(t) > 0) \quad (2.58)$$

Escrita nessa forma, a probabilidade de ocorrência do evento  $A$  pode ser representada como a área de um triângulo no gráfico  $X(t) \times \dot{X}(t)$  como ilustrado na figura 2.14.

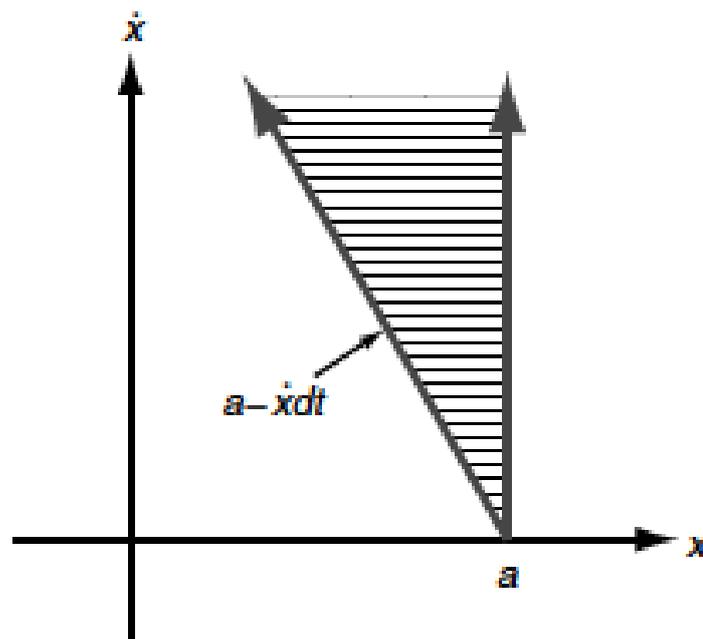


Figura 2.14: Região de ocorrência do evento  $A$  (LEE et al., 2005)

Para calcular a probabilidade do evento  $A$ , no qual  $x = a$ , basta integrar a PDF na região delimitada, que pode ser vista na figura 2.14, da seguinte forma:

$$P(A) = \int_0^{\infty} \int_{a-v}^a f_{X\dot{X}}(u, v) du dv \quad (2.59)$$

Utilizando a equação 2.59 com a equação 2.55 é possível escrever uma expressão capaz de calcular a taxa de cruzamentos positivos para um processo aleatório e estacionário como mostrado na equação 2.60.

$$v_{a+} = \int_0^{\infty} v f_{X\dot{X}}(a, v) dv \quad (2.60)$$

Caso o processo aleatório seja caracterizado como Gaussiano, a taxa de cruzamentos positivos em  $x = a$  é dada por:

$$v_{a+} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.61)$$

Sendo assim, para encontrar o número de cruzamentos positivos de zero  $E[0^+]$ , basta fazer com que o valor de  $a$  seja zero, de onde surge a seguinte expressão:

$$E[0^+] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} \quad (2.62)$$

Utilizando a equação 2.62 com as expressões desenvolvidas para densidade espectral de potência, pode-se formular o número de cruzamentos positivos de zero como:

$$E[0^+] = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} f^2 W_X(f) df}{\int_0^{\infty} W_X(f) df}} \quad (2.63)$$

Já a taxa esperada de cruzamento de picos  $E[P]$ , calculada a partir da análise do comportamento da derivada do processo  $X(t)$ , para um processo Gaussiano é dada por:

$$E[P] = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} f^4 W_X(f) df}{\int_0^{\infty} f^2 W_X(f) df}} \quad (2.64)$$

Um processo aleatório pode ser caracterizado de acordo com a sua irregularidade, que representa a relação entre o número de cruzamentos positivos de zero com o número de picos.

Para mensurar então essa irregularidade inerente aos processos, define-se uma nova variável, denominada fator de irregularidade e representada pela letra  $\gamma$ , calculada da seguinte maneira:

$$\gamma = \frac{E[0^+]}{E[P]} \quad (2.65)$$

Processos de banda estreita apresentam o mesmo número cruzamentos positivos de zero e de picos, sendo assim tem um fator de irregularidade igual a unidade,  $\gamma = 1$ . Já os processos de banda larga apresentam-se de forma irregular, por isso, definir esse parâmetro torna-se relevante para a análise do fenômeno.

Para facilitar o entendimento do cálculo do fator de irregularidade, o mesmo é representado na figura 2.15.

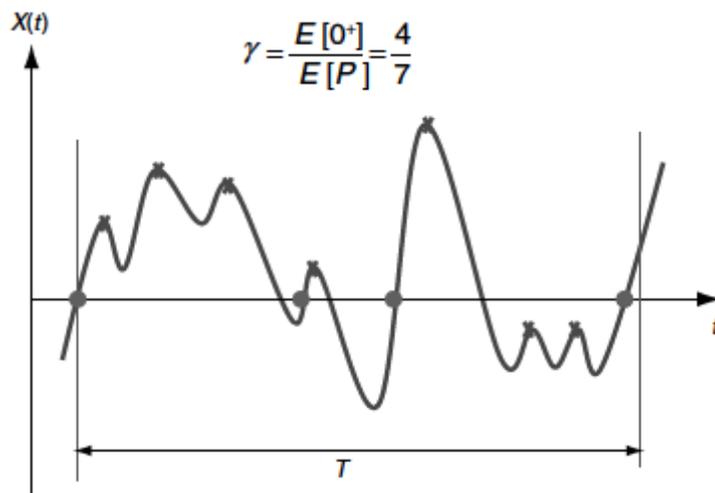


Figura 2.15: Cálculo do fator de irregularidade (LEE et al., 2005)

De forma alternativa ao uso do fator de irregularidade, é comumente utilizado uma outra variável para caracterização do espectro, a largura de banda  $\lambda$ , definida por:

$$\lambda = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (2.66)$$

Dessa forma, quando  $\lambda \rightarrow 0$ , caracteriza-se o espectro como um processo de banda larga.

### 2.6.3 Função geradora de momentos

A função geradora de momentos para uma função de densidade espectral de potência unilateral é definida como:

$$M_j = \int_0^\infty f^j W_{\sigma_a}(f) df \quad (2.67)$$

Onde  $M_j$  representa o  $j$ -ésimo momento da função PSD.

De forma alternativa ao que foi apresentado na seção 2.6.2, a taxa de cruzamentos positivos de zeros e de picos, pode ser fornecida através do cálculo dos momentos da função de densidade espectral de potência utilizando as seguintes equações:

$$E[0^+] = \sqrt{\frac{M_2}{M_0}} \quad (2.68)$$

$$E[P] = \sqrt{\frac{M_4}{M_2}} \quad (2.69)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{M_2^2}{M_0 M_4}} \quad (2.70)$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{M_2^2}{M_0 M_4}} \quad (2.71)$$

#### 2.6.4 Métodos de previsão de vida de fadiga para processos aleatórios de banda estreita

(LEE et al., 2005) mostra o desenvolvimento do método para se calcular o dano devido a processos aleatórios de banda estreita que será aqui detalhado.

Um carregamento de amplitude variável pode ser simulado por uma sequência de blocos de carregamento de amplitudes constantes.

o Dano  $D$  é definido como:

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{f,i}} \quad (2.72)$$

Onde as variáveis  $n_i$ ,  $N_{f,i}$  e  $k$  representam, respectivamente, o número de ciclos no  $i$ -ésimo bloco de amplitude constante  $S_{a,i}$ , o número de ciclos necessários para a falha sob a mesma tensão e o número total de blocos de carregamento.

A relação entre a tensão de determinado bloco,  $S_{a,i}$  com a vida de fadiga,  $N_{f,i}$  se dá da seguinte forma:

$$S_{a,i} = S'_f (2N_{f,i})^b \quad (2.73)$$

ou ainda:

$$N_{f,i} = \frac{1}{2} \left( \frac{S_{a,i}}{S'_f} \right)^{1/b} \quad (2.74)$$

Em que  $S'_f$  é o coeficiente de força de fadiga e  $b$  o expoente de força de fadiga.

Sabendo que  $m = -1/b$  e que  $A = 0.5(S'_f)^m$ , é possível reescrever a equação para a curva  $S - N$ , tornando-a conveniente para o cálculo de  $N_{f,i}$  para um dado  $S_{a,i}$  da seguinte maneira:

$$N_{f,i} = AS_{a,i}^{-m} \quad (2.75)$$

O espectro discreto de tensão pode ser obtido de duas maneiras diferentes, através do método de contagem de ciclos *rainflow* ou ainda pela contagem do número de picos  $n_i$  em um intervalo  $\Delta S$ .

Tendo um número total de picos no processo  $S(t)$  expresso por:

$$\sum_{i=1}^k n_i \quad (2.76)$$

A probabilidade  $f_i$  que a amplitude de tensão  $S_a = S_{a,i}$  irá ocorrer é de:

$$f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (2.77)$$

Nesse caso, o dano total de fadiga pode ser expresso por:

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{f,i}} = \sum_{i=1}^k \frac{f_i \sum_{i=1}^k n_i}{N_{f,i}} \quad (2.78)$$

Utilizando o modelo linear da curva  $S - N$ , reescreve-se a equação do dano como:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{A} \sum_{i=1}^k f_i S_{a,i}^m \quad (2.79)$$

Onde o valor esperado de  $S_a^m$  é dado por:

$$E[S_a^m] = \sum_{i=1}^k f_i S_i^m \quad (2.80)$$

Desse modo, tem-se que:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{A} E[S_a^m] \quad (2.81)$$

Tratando a função de densidade de probabilidade da amplitude de tensão seja uma variável aleatória contínua, como mostrado na figura 2.16, o valor esperado de  $S_a^m$  pode ser reescrito como:

$$E[S_a^m] = \int_0^{\infty} S_a^m f_{S_a}(S_a) dS_a \quad (2.82)$$

Embora seja possível o uso de quaisquer modelos estatísticos possa ser aplicado para  $S_a$ , é comumente utilizado a distribuição de Weibull, que se apresenta da seguinte forma:

$$F_{S_a}(S_a) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{S_a}{\alpha} \right)^\beta \right] \quad (2.83)$$

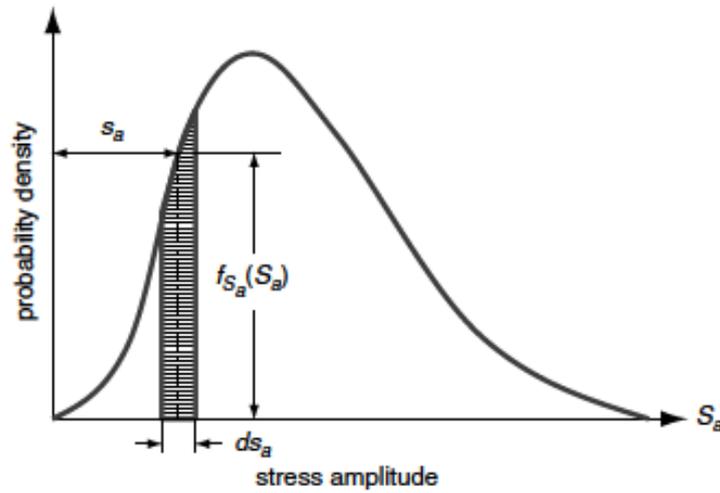


Figura 2.16: Função contínua de densidade de probabilidade (LEE et al., 2005)

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente, os parâmetros de escala e forma para a distribuição de Weibull.

$$E[S_a^m] = \alpha^m \Gamma\left(\frac{m}{\beta} + 1\right) \quad (2.84)$$

Sendo  $\Gamma$  a função Gama.

Um caso especial dessa distribuição ocorre quando  $\beta = 2$ , que a reduz a uma distribuição de Rayleigh, que representa a distribuição de picos em um processo Gaussiano estacionário de banda estreita com o *RMS* de  $\sigma_S$ . Podendo então ser demonstrado que:

$$\alpha = \sqrt{2}\sigma_S \quad (2.85)$$

Desse modo, sendo  $S(t)$  um processo Gaussiano estacionário de banda estreita com as amplitudes de tensões descritas por uma distribuição de Rayleigh, chega-se a:

$$E[S_a^m] = (\sqrt{2}\sigma_S)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (2.86)$$

Onde:

$$\sigma_S = \sqrt{M_0} \quad (2.87)$$

Atendido essas condições, o dano de fadiga total esperado em um processo Gaussiano, estacionário e de banda estreita em um intervalo de tempo  $\tau$ , pode ser escrito como:

$$D_{NB} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{A} E[S_a^m] = \frac{E[0^+]T}{A} (\sqrt{2M_0})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (2.88)$$

### 2.6.5 Métodos de previsão de vida de fadiga para processos aleatórios de banda larga

Baseado no método de contagem de ciclos *rainflow*, foram desenvolvidos dois métodos de previsão de vida de fadiga, calculando o dano para um processo Gaussiano, aleatório e estacionário de banda larga. Esses métodos consistem em basicamente aplicar um fator de correção ao dano calculado para processos de banda estreita. Esses dois métodos foram propostos por Wirsching e Light (1980) e Oritz e Chen (1987).

De forma alternativa ao que foi proposto nesses métodos, Dirlik (1985) desenvolveu uma expressão para determinar a função de densidade de probabilidade da amplitude da contagem *rainflow*,  $f_{S_a}(S_a)$ .

Os métodos utilizados para os processos de banda larga desenvolvem-se através de diversas simulações de Monte Carlo com inúmeras funções de densidade espectral a fim de se determinar os parâmetros que serão descritos a seguir.

#### 2.6.5.1 Método de Wirsching e Light

Como já descrito, Wirsching e Light (1980) utilizaram um fator de correção para o dano acumulado em processos de banda estreitas, propondo assim a seguinte equação para o cálculo do dano associado a processos de banda larga  $D_{WB,Wirsching}$ :

$$D_{WB,Wirsching} = \zeta_W D_{NB} \quad (2.89)$$

Onde  $D_{NB}$  é o dano associado a processos de banda estreita e  $\zeta_W$  é o fator de correção por eles propostos e calculado da seguinte maneira:

$$\zeta_W = a_W + [1 - a_W](1 - \lambda)^{b_W} \quad (2.90)$$

Onde:

$$a_W = 0.926 - 0.33m \quad (2.91)$$

$$b_W = 1.587m - 2.323 \quad (2.92)$$

Em que  $m$  representa a inclinação da curva  $S - N$ .

#### 2.6.5.2 Método de Oritz e Chen

Paralelamente ao proposto por Wirsching e Light (1980), Oritz e Chen (1987) propõe a seguinte expressão para o dano de fadiga em processos de banda larga  $D_{WB,Oritz}$ :

$$D_{WB,Ortiz} = \zeta_O D_{NB} \quad (2.93)$$

Em que:

$$\zeta_O = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{M_2 M_k}{M_0 M_{k+2}}} \quad (2.94)$$

$$k = \frac{2.0}{m} \quad (2.95)$$

### 2.6.5.3 Método de Dirlik

A fórmula de dano proposta por Dirlik, verificada teoricamente por Bishop em 1988, baseia-se em dados obtidos através da simulação de Monte Carlo para amplitudes de tensão, definindo assim uma função de densidade espectral de potência da amplitude rainflow, denotada por  $f_{S_a}(S_a)$ . A formulação proposta por ele para um período de tempo  $\tau$  é mostrada a seguir:

$$D_{WB,Dirlik} = \frac{E[P]\tau}{A} \int_0^\infty S_a^m f_{S_a}(S_a) dS_a \quad (2.96)$$

$$f_{S_a}(S_a) = \frac{D_1}{2\sqrt{M_0}Q} e^{-\frac{Z}{Q}S_a} + \frac{D_2 Z}{2\sqrt{M_0}R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}S_a^2} + \frac{D_3 Z}{2\sqrt{M_0}} e^{-\frac{Z^2}{2}S_a^2} \quad (2.97)$$

$$Z = \frac{1}{2\sqrt{M_0}} \quad (2.98)$$

$$\gamma = \frac{M_2}{\sqrt{M_0 M_4}} \quad (2.99)$$

$$X_m = \frac{M_1}{M_0} \sqrt{\frac{M_2}{M_4}} \quad (2.100)$$

$$D_1 = \frac{2(X_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2} \quad (2.101)$$

$$R = \frac{\gamma - X_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2} \quad (2.102)$$

$$D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}{1 - R} \quad (2.103)$$

$$D_3 = 1 - D_1 - D_2 \quad (2.104)$$

$$Q = \frac{1.25(\gamma - D_3 - D_2R)}{D_1} \quad (2.105)$$

Ao compararem os métodos aqui abordados para previsão de vida de fadiga em processos de banda larga, Bishop e Sherratt (1989) e Bishop (1994) chegaram a conclusão de que o modelo de Dirlík fornece uma aproximação melhor do que as obtidas ao fazer uma análise no domínio do tempo.

## CAPÍTULO 3

### METODOLOGIA

Para que se alcance o objetivo desse trabalho, de fazer uma análise comparativa entre os métodos de previsão de vida de fadiga em materiais sujeitos a um carregamento aleatório, faz-se necessário o desenvolvimento de uma metodologia apropriada para abordar o problema, que será descrita nessa seção.

Inicialmente, buscou-se estudar toda a teoria que fornece a base conceitual e matemática necessária para desenvolver o trabalho. Uma fundamentação teórica bastante detalhada sobre todos os tópicos que envolvem o tema foi feita como pode ser vista no capítulo 2 desse relatório.

Esse projeto foi inteiramente desenvolvido computacionalmente, através de algoritmos próprios e de uma *toolbox* do matlab, *Vibration Data*.

Os dados foram obtidos através do artigo escrito por (KIHL; SARKANI; BEACH, 1995) e que será detalhado na próxima seção.

Utilizando a metodologia a ser descrita nesse capítulo e utilizando os dados experimentais obtidos, será por fim, feita uma análise comparativa dos resultados encontrados por cada um dos métodos (espectrais e no domínio do tempo) com os resultados obtidos através dos experimentos realizados que constam no artigo.

#### 3.1 REFERÊNCIA EXPERIMENTAL

No artigo utilizado como referência, *Stochastic fatigue damage accumulation under broadband loadings*, um corpo de prova como mostrado na figura 3.1 é utilizado para realizar o ensaio.

Esses corpos de prova são cruciformes com juntas soldadas, o motivo dessa escolha se deve ao fato de que o início e a propagação da trinca são extremamente recorrentes nessa localização.

O material utilizado no corpo de prova foi o aço ASTM A-710, Grau A, Classe 3. De acordo com o artigo, as suas propriedades são:

- Limite de resistência a tração - 683MPa;

- Tensão de escoamento - 638MPa.

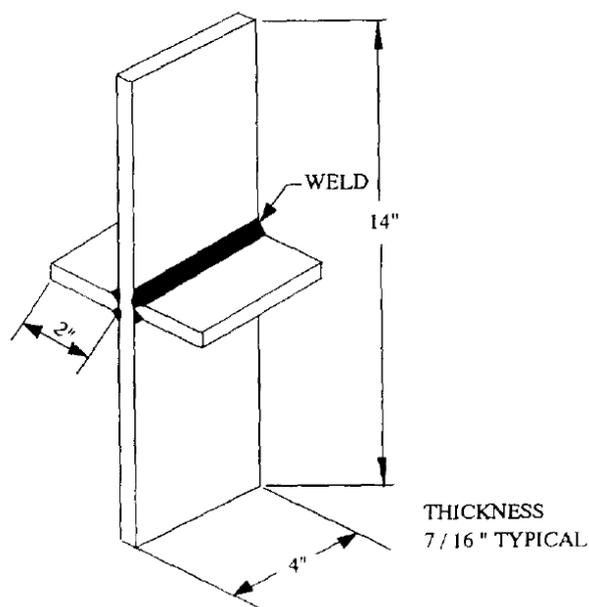


Figura 3.1: Corpo de prova (KIHL; SARKANI; BEACH, 1995)

Nos ensaios de fadiga, o corpo de prova sofreu esforços uniaxiais na direção vertical através de garras hidráulicas posicionadas em suas extremidades verticais, com uma distância de 35.6cm.

A falha do corpo de prova foi definida quando a flexibilidade do mesmo excedesse em duas vezes a inicial. Uma vez que atingindo esse valor, as trincas se propagam de forma tão acelerada que a fratura total do corpo é iminente.

No experimento, foram utilizados carregamentos Gaussianos com três diferentes valores de RMS, são eles:

- 51.71MPa
- 68,95MPa;
- 103,42MPa.

Os dois carregamentos utilizados são de banda larga e são definidos pelo autor como carregamento unimodal e bimodal. Para cada um desses carregamentos, é fornecido a respectiva curva da densidade espectral de potência.

As funções de densidade espectral de potência, equações 3.3 3.4 3.5, suas representações gráficas, figuras 3.2 e 3.3 das mesmas são apresentadas nas seções 3.1.1 e 3.1.2.

Vale-se ressaltar que as funções fornecidas apresentam um valor unitário para o RMS. Devendo-se aplicar um fator de correção para analisar os carregamentos nos níveis de tensão desejados

Para que seja possível fazer a previsão da vida em fadiga devido à carregamentos aleatórios, é necessário que se conheça a curva tensão-vida ( $S - N$ ) dos corpos de prova. Fez-se necessário então ensaios sob amplitude constante.

Para o levantamento da curva  $S - N$ , foram realizados vinte testes, cinco testes para quatro diferentes níveis de tensão.

O resultado encontrado através desses testes permitiram chegar às equações 3.1 e 3.2, que representam a curva tensão-vida com unidades de tensão em ksi e MPa, respectivamente.

$$N = 10^{9.559} \cdot S_{ksi}^{-3.210} \quad (3.1)$$

$$N = 1.7809 \cdot 10^{12} \cdot S_{mpa}^{-3.210} \quad (3.2)$$

Com todos esses dados, além dos resultados experimentais, os autores também utilizaram dois métodos para prever a vida em fadiga, o clássico, no domínio do tempo, onde associa-se a contagem de ciclos rainflow com a metodologia do acúmulo de dano linear de Palmgren-Miner e também é feita a previsão através de um método no domínio da frequência, que é a aproximação de Rayleigh para banda estreita. Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 3.1 e 3.2.

### 3.1.1 Carregamento Unimodal

Para o carregamento unimodal a função de densidade espectral de potência definida é dada pela equação 3.3 e sua representações gráfica pode ser visualizada na figura 3.2.

$$G_1(\omega) = \frac{12}{\omega^7} e^{-\frac{2.5}{\omega^3}}, 0.75 \leq \omega \leq 3.0 \quad (3.3)$$

Os resultados encontrados no artigo, a vida experimental, bem como a previsão de vida que é feita, são apresentados na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Resultados Artigo - Carregamento Unimodal

RMS [MPa]	Vida em fadiga [dias] - Artigo		
	Experimental	Palmgren-Miner	Rayleigh
51,71	67,88	77,76	62,07
68,95	24,79	30,89	24,65
103,42	9,08	8,40	6,71

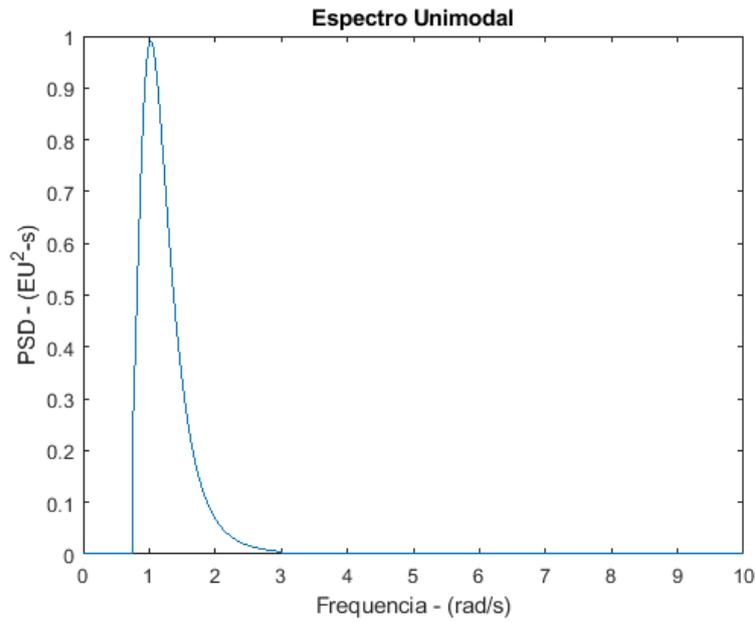


Figura 3.2: Espectro Unimodal

### 3.1.2 Carregamento Bimodal

Já para o carregamento bimodal, a função de densidade espectral de potência definida é dada pelas equações 3.4 e 3.5 e sua representação gráfica pode ser visualizada na figura 3.3.

$$G_1(\omega) = \frac{12}{\omega^7} e^{\frac{-2.5}{\omega^3}}, \quad 0.75 \leq \omega \leq 3.0 \quad (3.4)$$

$$G_2(\omega) = \frac{1.2}{(\omega - 6)^7} e^{\frac{-2.5}{(\omega - 6)^3}}, \quad 6.75 \leq \omega \leq 8.0 \quad (3.5)$$

Os resultados encontrados no artigo, a vida experimental, bem como a previsão de vida que é feita, são apresentados na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Resultados Artigo - Carregamento Bimodal

RMS [MPa]	Vida em fadiga [dias] - Artigo		
	Experimental	Palmgren-Miner	Rayleigh
51,71	45,33	51,41	14,89
68,95	23,37	20,42	5,92
103,42	4,46	5,56	1,61

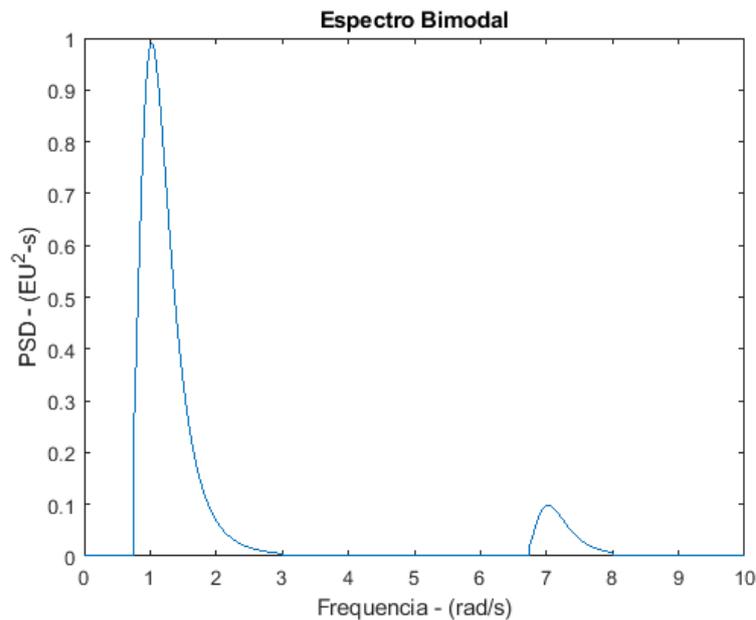


Figura 3.3: Espectro Bimodal

## 3.2 DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Para tornar possível a análise da fadiga no domínio da frequência, desenvolveu-se uma rotina no *Matlab*, onde as seguintes etapas foram seguidas:

1. Discretização da PSD obtida através dos dados do artigo;
2. Cálculo dos momento espectral zero,  $M_0$  através da integração numérica da PSD;
3. Normalização da PSD pelo valor RMS desejado;
4. Cálculo de todos os momentos espectrais, já com a PSD normalizada;
5. Cálculo do acúmulo de dano através dos métodos espectrais utilizando os dados da curva  $S - N$  obtidos pelo artigo (Aproximação de Rayleigh, Wirshing and Light, Ortiz and Chen e Dirlik);
6. Previsão de vida em fadiga utilizando a teoria do acúmulo de dano.

Uma explicação detalhada das formulações matemáticas utilizadas encontram-se na seção 2.6 desse relatório.

Nos apêndices A.2 e A.3 podem ser consultados os algoritmos implementados para análise do fenômeno da fadiga no domínio da frequência para os espectros uni e bimodais, respectivamente.

## 3.3 DOMÍNIO DO TEMPO

### 3.3.1 Reconstrução do espectro

Para fazer a previsão da vida em fadiga no domínio do tempo, baseada na teoria do acúmulo de dano linear de Palmgren-Miner associado a contagem de ciclos rainflow é necessário primeiramente que se faça a reconstrução do carregamento no tempo para satisfazer a PSD.

São utilizados dois métodos para a reconstrução do sinal, o primeiro, que pode ser encontrado nos apêndices A.4 e A.5, para os casos uni e bimodal respectivamente, consiste no desenvolvimento de um algoritmo de simulação Gaussiana de acordo com os seguintes passos:

1. A PSD é discretizada em  $M$  frequências positivas,  $f(k) = kD_f$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, M$ , onde  $D_f$  é o espaçamento da amostra da PSD;
2. O número de amostras da PSD é dado por  $M = (N/2) + 1$ , onde  $N$  é o número de amostras na transformada de Fourier, comumente uma potência de 2;
3. A  $PSD(f(k))$  é convertida em função de amplitude  $A(f(k))$  através da relação  $A(f(k)) = \sqrt{2PSD(f(k))}$ ;
4. A cada componente espectral é atribuído um ângulo de fase aleatório, onde  $\Phi(f(k))$  é um número aleatório, uniformemente distribuído entre 0 e  $2\pi$ rad;
5. Gera-se um sinal no domínio da frequência através da equação  $Zf(k) = A(f(k))e^{i\Phi(f(k))}$ ;
6. Por fim, aplica-se a transformada inversa de Fourier (iFFT) a  $Zf(k)$ .

O resultado encontrado através da iFFT será uma série temporal aleatória em um intervalo de tempo finito, onde  $t = 0$   $t_{max} = (N - 1)Dt$  e  $Dt = 1/(2F_{max})$ .

O segundo método utilizado se dá através da utilização da *toolbox Vibration Data*, desenvolvida para ser utilizada no *MatLab*.

Para esse método, basta que se discretize a PSD, gerando uma matriz de duas colunas, onde na primeira estão contidos os valores das frequências e na segunda os respectivos valores da PSD, dessa forma, a rotina irá reconstruir a história do carregamento no tempo a partir de um sinal de ruído branco.

Os vetores utilizados como entrada foram gerados ao final das rotinas desenvolvidas para os métodos espectrais, que encontram-se nos apêndices A.2 e A.3.

Como resultado desse método, obtemos uma outra matriz de duas colunas, dessa vez a primeira coluna representa o tempo em segundos e a segunda a tensão em MPa.

Vale-se destacar que em ambos os métodos utilizados, a história do carregamento foi verificada através do uso da transformada direta de Fourier (FFT), remontando a PSD.

### 3.3.2 Contagem de ciclos

O método utilizado para a contagem de ciclos utilizado foi o de rainflow, detalhado na seção 2.5.3 do relatório.

Sua implementação se deu através de um algoritmo escrito em C++, com uma interface que permite sua execução pelo *Matlab*, fornecido pela mesma *toolbox*, *Vibration Data*, utilizada no segundo método de reconstrução do espectro. Essa rotina utilizada para a contagem de ciclos rainflow pode ser vista no apêndice A.6.

Para que essa rotina nos forneça a matriz com os dados necessários para o cálculo do acúmulo de dano, os dados de entrada devem ser fornecidos através de uma matriz de duas colunas, onde a primeira represente o tempo e a segunda a tensão. Essas matrizes utilizadas como entrada para fazer a contagem de ciclos são obtidas através dos métodos explicados na seção 3.3.1.

### 3.3.3 Cálculo do acúmulo de dano

Para o cálculo do acúmulo de dano, foi utilizado o modelo proposto por Palmgren-Miner, como é descrito na seção 2.5.2 deste relatório.

A sua implementação se deu através da utilização da *toolbox Vibration Data*, onde foi necessário os seguintes dados como entrada:

- Matriz rainflow;
- Parâmetro  $A$  da curva  $S - N$ ;
- Parâmetro  $m$  da curva  $S - N$ ;
- Tempo máximo obtido na reconstrução do espectro  $t_{max}$ .

A ferramenta utilizada nos retorna a taxa de acúmulo de dano por segundo, permitindo então a partir do critério de falha proposto Palmgren-Miner, onde o dano total não pode ser maior que o unitário, finalmente fazer a previsão de vida em fadiga.

## 3.4 TOOLBOX VIBRATION DATA

A metodologia descrita nesse capítulo utilizada rotinas próprias desenvolvidas no *Matlab* e também a utilização de uma ferramenta que é a *toolbox Vibration Data*.

O processo de instalação se faz de forma super simples e todas as informações referentes a essa ferramenta podem ser encontradas no site <<http://www.vibrationdata.com/>>.

Após feita a instalação, deve-se digitar 'vibrationdata' na tela de comando para inicialização. Ao fazer isso, uma interface como mostrada na figura 3.4 será aberta, onde se tem acesso

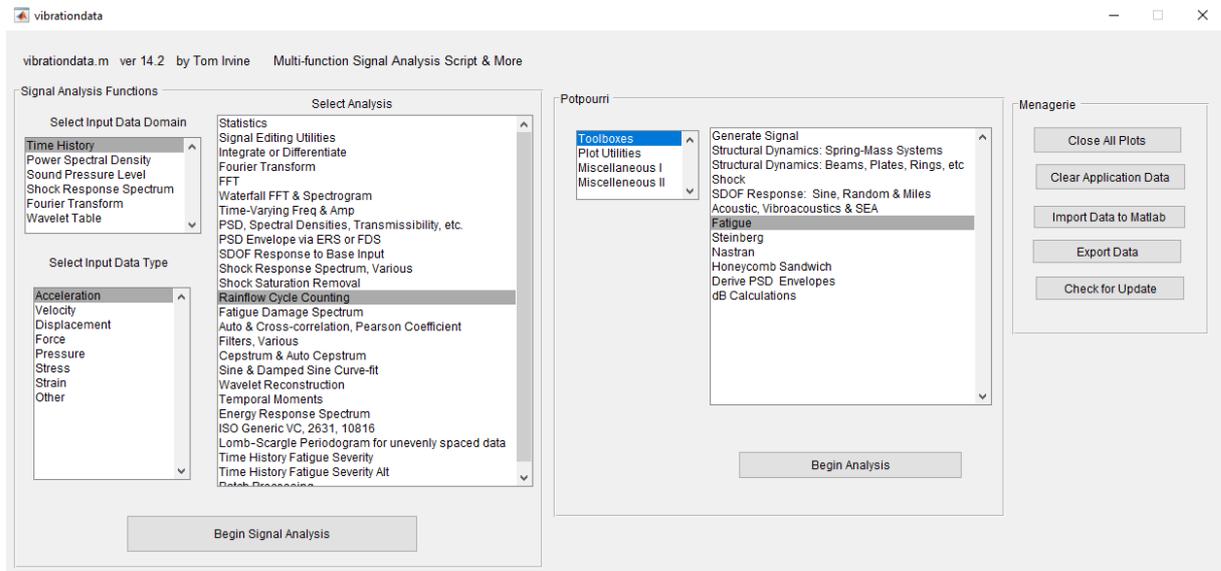


Figura 3.4: Interface Vibration Data

à diversas funções para análise de sinais no domínio do tempo e da frequência, análise de fadiga, entre outras.

As funções utilizadas nesse relatório através dessa ferramenta foram:

- Reconstrução do carregamento no tempo a partir de uma PSD definida;
- Método de contagem de ciclos rainflow a partir da história do carregamento no tempo;
- Cálculo do acúmulo de dano pelo método de Palmgren-Miner.

### 3.5 FLUXOGRAMA

Com o propósito de facilitar a visualização da metodologia aplicada, um fluxograma foi feito, como pode ser visto na figura 3.5

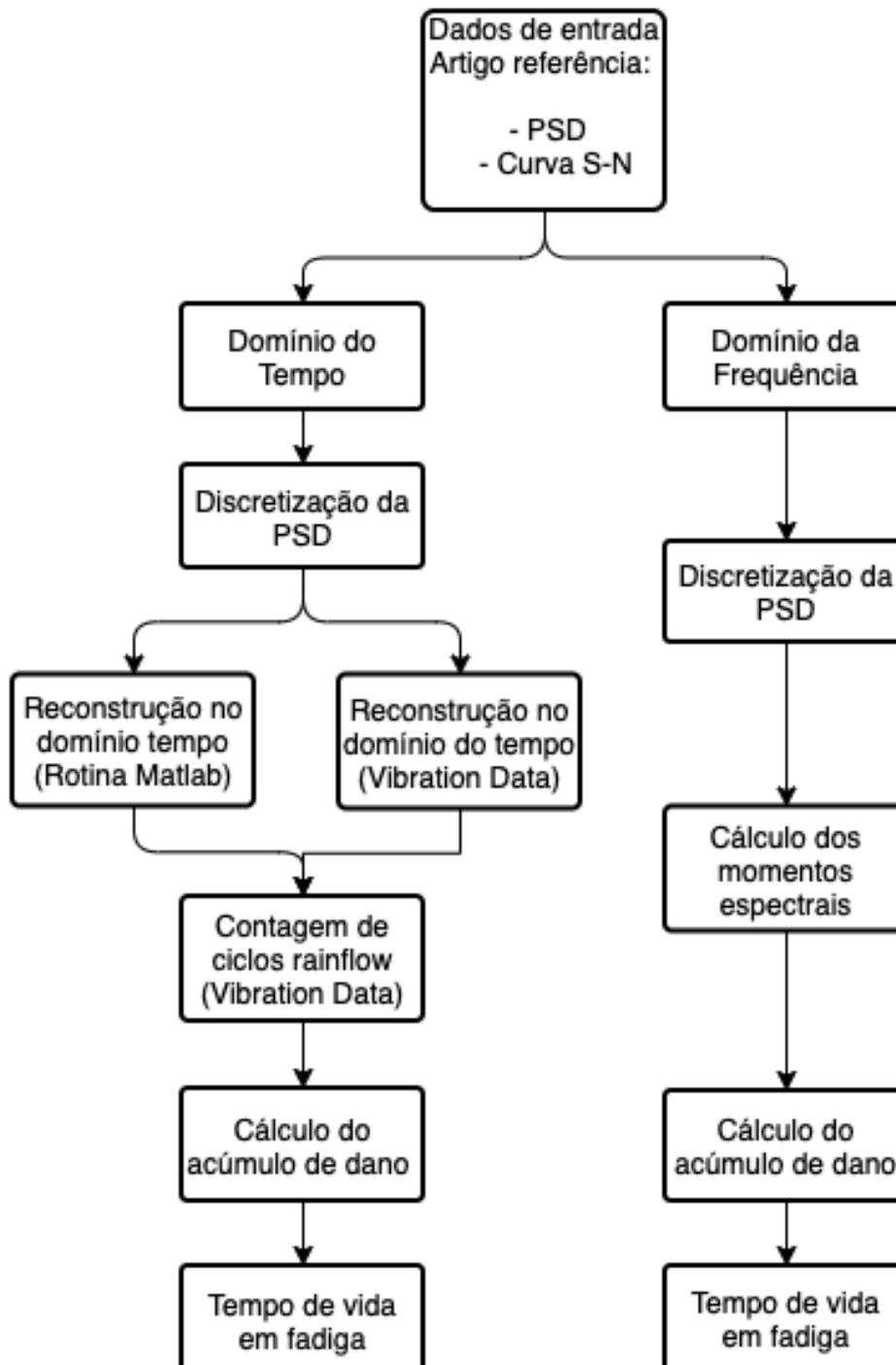


Figura 3.5: Fluxograma metodologia

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS E ANÁLISE

#### 4.1 RESULTADOS

Nas tabelas 4.1 e 4.2 são expostos todos os resultados obtidos nesse projeto, além dos dados experimentais e os resultados obtidos no artigo de validação.

Os resultados obtidos expostos são o de aproximação de Rayleigh para banda estreita (Rayleigh), Wirshing and Light (W\_L), Ortiz and Chen (O\_C), Dirlik (Dirlik), e o método de acúmulo de dano de Palmgren-Miner, feito através de um algoritmo próprio para reconstrução do espectro (P-M) e utilizando a *toolbox Vibration Data* (vd P-M)

Tabela 4.1: Resultados numéricos - Unimodal

RMS [MPa]	Previsão de vida em fadiga [dias]								
	Artigo			Resultados obtidos					
	Exp	P-M	Rayleigh	Rayleigh	W_L	O_C	Dirlik	P-M	vd P-M
51,71	67,88	77,76	62,07	62,21	73,93	55,14	77,03	77,47	76,15
68,95	24,79	30,89	24,65	24,70	29,36	21,89	30,59	30,43	30,13
103,42	9,08	8,40	6,71	6,72	7,99	5,96	8,32	8,37	8,29

Tabela 4.2: Resultados numéricos - Bimodal

RMS [MPa]	Previsão de vida em fadiga [dias]								
	Artigo			Resultados obtidos					
	Exp	P-M	Rayleigh	Rayleigh	W_L	O_C	Dirlik	P-M	vd P-M
51,71	45,33	51,41	14,89	14,85	18,11	8,52	54,28	52,56	51,86
68,95	23,37	20,42	5,92	5,90	7,19	3,38	21,55	20,80	20,33
103,42	4,46	5,56	1,61	1,61	1,96	0,92	5,87	5,66	5,61

## 4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Primeiramente, analisando as tabelas 4.1 e 4.2, é interessante comparar os métodos de previsão de vida em fadiga utilizados no artigo de referência com os mesmos encontrados através da metodologia própria utilizada. Os dois métodos, um no domínio do tempo e o outro, um método espectral, são respectivamente o método de acúmulo de dano linear proposto por Palmgren-Miner associado à contagem de ciclos rainflow e o método da aproximação de Rayleigh para banda estreita.

Comparando os métodos entre si, pode-se verificar que os resultados encontrados são extremamente próximos, validando assim a metodologia desenvolvida nesse projeto a fim de fazer uma previsão da vida em fadiga.

Fica evidente o papel que a largura de banda do carregamento exerce sobre a vida em fadiga do material, onde evidencia-se que com o aumento na largura de banda, há uma drástica redução no tempo de vida do material.

Para se fazer a análise comparativa dos resultados foram construídas mais duas tabelas, as tabelas 4.3 e 4.4 compilando todos os resultados obtidos no relatório. Essas tabelas nos fornecem a variação percentual da previsão de vida de cada um dos métodos em relação ao tempo de vida do material obtido experimentalmente.

Tabela 4.3: Comparação resultados numéricos - Unimodal

RMS [MPa]	Variação percentual em relação à vida experimental [%]							
	Artigo		Resultados obtidos					
	P-M	Rayleigh	Rayleigh	W_L	O_C	Dirlik	P-M	vd P-M
51,71	14,6%	-8,6%	-8,4%	8,9%	-18,8%	13,5%	14,1%	12,2%
68,95	24,6%	-0,6%	-0,4%	18,4%	-11,7%	23,4%	22,8%	21,5%
103,42	-7,5%	-26,1%	-26,0%	-12,0%	-34,4%	-8,4%	-7,8%	-8,7%

Tabela 4.4: Comparação resultados numéricos - Bimodal

RMS [MPa]	Variação percentual em relação à vida experimental [%]							
	Artigo		Resultados obtidos					
	P-M	Rayleigh	Rayleigh	W_L	O_C	Dirlik	P-M	vd P-M
51,71	13,4%	-67,2%	-67,2%	-60,0%	-81,2%	19,7%	15,9%	14,4%
68,95	-12,6%	-74,7%	-74,8%	-69,2%	-85,5%	-7,8%	-11,0%	-13,0%
103,42	24,7%	-63,9%	-63,9%	-56,1%	-79,4%	31,6%	26,9%	25,8%

Observa-se que no carregamento unimodal, tanto para os métodos espectrais quanto para os no domínio do tempo, os resultados encontrados são satisfatórios, com uma variação em relação a vida obtida experimentalmente. Os únicos métodos que apresentaram uma variação

percentual um pouco mais discrepante dos resultados experimentais foram o de aproximação de Rayleigh e de Ortiz and Chen quando utilizados para a previsão de vida do carregamento com RMS de 103,42MPa. De acordo com (KIHL; SARKANI; BEACH, 1995), essa discrepância se deve ao fato de no carregamento com o RMS elevado, são gerados mais ciclos de tensão próximo ao limite de resistência a tração, que por sua vez faz com que haja uma aceleração na taxa de acúmulo de dano.

Quando se trata do carregamento bimodal, os únicos métodos que apresentaram um resultado satisfatório foram os métodos de Dirlik e o de Palmgren-Miner associado ao método de contagem de ciclos rainflow, ainda assim, observa-se uma maior discrepância quando se trata do carregamento com RMS de 103,42MPa, devido ao mesmo fenômeno que acontece no carregamento unimodal já explicado.

Ainda analisando os resultados do carregamento bimodal, podemos notar que os métodos espectrais, com exceção do método proposto por Dirlik, se mostraram extremamente conservativos. Isso se deve ao fato de que o método de aproximação de banda estreita utiliza uma distribuição de probabilidade de Rayleigh, e os outros métodos apenas propõe fórmulas empíricas para que se tenha um fator de correção. O problema ocorre exatamente por conta do carregamento bimodal apresentar uma distribuição de probabilidade com forma diferente da de Rayleigh, gerando essas grandes diferenças nos cálculos de previsão de vida em fadiga.

No caso do método de Dirlik, isso já não ocorre, uma vez que como detalhado na seção 2.6.5.3, o modelo propõe uma função de densidade espectral de potência da amplitude rainflow, como mostra a equação 2.97.

Por esse motivo também, podemos observar nos resultados, tanto para o carregamento unimodal quanto para o bimodal, a proximidade dos resultados encontrados através do método de Dirlik e do método clássico no domínio do tempo.

Um ponto importante a ser destacado nessa análise é o corpo de prova utilizado nos ensaios experimentais de referência. O fato de serem juntas soldadas, torna ainda mais difícil a previsão de vida em fadiga. Nesse estudo, bem como no artigo utilizado para validação dos resultados, são utilizadas apenas as tensões nominais, sem nenhum fator de correção para as mesmas. Dessa forma, uma parte da divergência encontrada entre as previsões de vida em fadiga com os resultados obtidos experimentalmente se deve também a esse fator.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÃO

O estudo do fenômeno de fadiga devidos a processos aleatórios se mostra bastante complexo, uma vez que o carregamento ao qual o material está sujeito não é determinístico.

No estudo desenvolvido nesse relatório foi feita uma análise comparativa entre os métodos espectrais com o método clássico no domínio do tempo. Essa análise se mostra relevante por apontar as situações nas quais cada um dos métodos deva ser empregado ao se fazer a previsão de vida de um material, explicitando as vantagens e desvantagens de cada um deles.

Deve se levar em consideração também para a análise dos resultados numéricos apresentados, a variação entre as vidas que foram encontradas experimentalmente. No artigo de referência, a vida experimental foi determinada através da média geométrica de quatro ensaios para cada nível de tensão e o resultado de cada um dos experimentos se mostrou significativamente diferente entre eles, o que evidencia que o fenômeno da fadiga é extremamente complexo e dependente de inúmeras variáveis que muitas vezes não conseguem ser modeladas de forma eficaz.

Nesse trabalho, buscou-se estudar o fenômeno da fadiga devido a processos aleatórios, com enfoque nos métodos espectrais.

Para que fosse possível compreender e analisar o problema proposto, fez-se necessário o estudo teórico de uma área da estatística que busca caracterizar os processos estocásticos, passando pelos conceitos fundamentais para o entendimento de tais processos, como sua definição, as classificações do mesmo, descrição de processos aleatórios específicos para o desenvolvimento do trabalho, como o caso dos processos estacionários, ergódicos e Gaussianos. Com o entendimento dessa teoria, foram desenvolvidos os cálculos para a determinação das propriedades estatísticas inerentes a esses processos descritos, destacando-se as funções de probabilidade que os regem, funções de autocorrelação e seus momentos.

Em seguida foram estudadas as séries de Fourier, com ênfase em sua transformada, ferramenta que atua sobre funções contínuas, reais ou complexas e permite que seja feita uma representação no domínio da frequência, utilizada em modelos de previsão de vida de fadiga através de métodos espectrais.

Tendo desenvolvido as ferramentas matemáticas e estatísticas necessárias, o estudo de fadiga pôde então ser realizado, decompondo-o em três principais partes, o estudo do fenômeno em si, cobrindo desde o histórico do mesmo até as expressões que foram desenvolvidas para caracterizá-lo e então abordando os dois modos de análise, a abordagem no domínio do tempo e no domínio da frequência.

A abordagem clássica desse tipo de problema, é feita no domínio do tempo, onde conhecida a história dos esforços, utiliza-se os modelos de acúmulo de dano e contagem de ciclos, destacando a formulação de Palmgren-Miner e o método de contagem de ciclos rainflow para fazer a previsão de vida.

Já os métodos espectrais apresentam-se como uma alternativa à análise no domínio do tempo, sendo realizada no domínio da frequência, modelando a resposta dos materiais aos esforços irregulares como um processo aleatório.

Por fim, conclui-se que o objetivo desse trabalho, de fazer uma comparação entre os métodos utilizados para previsão de vida em fadiga devido à processos estocásticos, foi obtido com sucesso, através de uma metodologia que permitiu tal análise.

## Referências Bibliográficas

- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM E1049 - 85**: Standard practices for cycle counting in fatigue analysis. West Conshohocken, 1997.
- BELLORIO, M. B. **Revisão sobre critérios de fadiga para cabos condutores de energia e uso de metodologia para estimativa de sua vida remanescente**. 2009. 86 p. Tese (Mestrado em ciências mecânicas) — Universidade de Brasília.
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. **Random data**: analysis and measurement procedures. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 1986. 604 p.
- BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Elementos de máquinas de Shigley**. 8. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2009. 1084 p.
- DONALDSON, K. **Field data classification and analysis techniques**. [S.l.], 1982.
- KIHL, D.; SARKANI, S.; BEACH, J. Stochastic fatigue damage accumulation under broadband loadings. **International journal of fatigue**, Elsevier, p. 321–329, 1995.
- LEE, Yung-Li et al. **Fatigue testing and analysis**: theory and practice. Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2005. 402 p.
- MATSUISHI, M.; T, E. Fatigue of metals subjected to varying stress. **The Japan Society of Mechanical Engineer**, 1968.
- NORTON, R. L. **Projeto de máquinas**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. 1028 p.
- PEREIRA, B. d. B.; PAIS, M. B. Z.; SALES, P. R. d. H. **Análise Espectral De Séries Temporais**: Uma introdução para engenharia, economia e estatística. Rio de Janeiro: Arte Final Leasing Editorial Ltda, 1986. 108 p.
- SCHÜTZ, W. A history of fatigue. **Engineering fracture mechanics**, Elsevier, p. 300, 1996.
- TAKAHASHI, B. X. **Metodologia moderna para análise de fadiga baseada em elementos finitos de componentes sujeitos a fadiga uni e multiaxial**. 2014. 338 p. Tese (Mestrado em engenharia mecânica) — Universidade de São Paulo.
- WATANABE, L. **Análise da vida à fadiga de cabos condutores de energia submetidos a carregamentos aleatórios**. 2014. 218 p. Tese (Doutorado em ciências mecânicas) — Univesidade de Brasília.

## CAPÍTULO A

## APÊNDICE

### A.1 PRIMEIRA TRANSFORMADA DE FOURIER

```
1 Fs = 1000;
2 T = 1/Fs;
3 L = 1500;
4 t = (0:L-1)*T;
5
6 S = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);
7
8 X = S + 2*randn(size(t));
9
10 plot(1000*t(1:50),X(1:50))
11 title('Sinal no dominio do tempo')
12 xlabel('t (segundos)')
13 ylabel('X(t)')
14
15 %%
16
17 Y=fft(X);
18
19 P2 = abs(Y/L);
20 P1 = P2(1:L/2+1);
21 P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
22
23 f = Fs*(0:(L/2))/L;
24 plot(f,P1)
25 title('Sinal no dominio da frequencia')
26 xlabel('f (Hz)')
27 ylabel('|P1(f)|')
```

## A.2 ROTINA MÉTODOS ESPECTRAIS - UNIMODAL

```
1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 % Definicao da densidade espectral de potencia
6
7 freq_min = 0;
8 delta_f = 1/10^5;
9 freq_max = 10/(2*pi);
10
11 f = freq_min:delta_f:freq_max;
12
13 w = 2.*pi.*f;
14 S = (1).*zeros(size(f));
15
16 for i =2:length(S)
17     if w(i)>=0.75 && w(i)<=3.0
18         S(i) = (12/(w(i))^7)*exp(-2.5/((w(i))^3));
19     end
20 end
21
22 % Grafico
23
24 figure('Name','Espectro Unimodal','NumberTitle','off');
25 plot(w,S);
26 title('Espectro Unimodal')
27 xlabel('Frequencia - (rad/s)')
28 ylabel('PSD - (EU^2-s)')
29
30 % Definicao dos parametros para normalizacao da PSD
31
32 r_51_71 = 4274.24; % RMS = 51,71MPa
33 r_68_95 = 7599.39; % RMS = 68,95MPa
34 r_103_42 = 17096.97; % RMS = 103,42MPa
35
36 % PSD normalizada pelo RMS
37
38 S = r_103_42.*S;
39 W = 2.*pi.*S;
40
```

```
41 % Verificacao do valor RMS
42
43 mom0 = trapz(f,W);
44 rms = sqrt(mom0);
45
46 % Calculo dos momentos espectrais
47
48 mom1 = trapz(f,(f.^1).*W);
49 mom2 = trapz(f,(f.^2).*W);
50 mom3 = trapz(f,(f.^3).*W);
51 mom4 = trapz(f,(f.^4).*W);
52
53 % Calculo da taxa de cruzamentos positivos de zero
54
55 e0 = sqrt(mom2/mom0);
56
57 % Calculo da taxa de ocorrencia de picos
58
59 eP = sqrt(mom4/mom2);
60
61 % Calculo do fator de irregularidade
62
63 gamm = e0/eP;
64
65 % Calculo da largura de banda do processo
66
67 lamb = sqrt(1-gamm^2);
68
69 % Dados da curva de Wohler
70
71 m = 3.210;
72 A = 10^9.559/(6.89476^(-m));
73
74 % Rayleigh
75
76 tempo_RL = A/(eP*(2*mom0)^(m/2)*gamma(m/2+1));
77
78 % Wirshing and Light
79
80 a_wl = 0.926-0.033*m;
81 b_wl = -2.323+1.587*m;
82 zeta_wl = a_wl+(1-a_wl)*(1-lamb)^b_wl;
```

```

83
84 tempo_WL = tempo_RL/(zeta_wl);
85
86 % Oritz and Chen
87
88 k = 2.0/m;
89 M_k = sum((f.^k).*W);
90 M_k2 = sum((f.^(k+2)).*W);
91
92 zeta_OC = (1/gamm)*sqrt((mom2*M_k)/(mom0*M_k2));
93
94 dano_OC = zeta_OC * (1/tempo_RL);
95 tempo_OC = 1/dano_OC;
96
97 % Dirlik
98
99 Sa = 0:0.01:10^5;
100 Sr = 2.*Sa;
101
102 z = Sr./(2.*(mom0).^(1./2));
103
104 xm = (mom1./mom0).*(mom2./mom4).^(1./2);
105 d1 = 2.*(xm-gamm.^2)./(1+gamm.^2);
106 r = (gamm-xm-d1.^2)./(1-gamm-d1+d1^2);
107 d2 = (1-gamm-d1+d1.^2)./(1-r);
108 d3 = 1-d1-d2;
109 q = 1.25.*(gamm-d3-(d2.*r))./(d1);
110 pSr = 1./((mom0).^(1./2)).*((d1./q).*exp(-z./q)+(d2.*z./r.^2).*
    exp...
111 (-z.^2./(2.*r.^2))+d3.*z.*exp(-z.^2./2));
112 pSa = pSr;
113
114 tempo_dirlik = A/(eP*trapz(Sa,Sa.^m.*pSa));
115
116 % Estimativa da vida de fadiga em dias
117
118 s_dias = 24*60*60; % Taxa de conversao (segundos - dias)
119
120 tempo_RL_dias = tempo_RL/s_dias; % Banda Estreita
121 tempo_WL_dias = tempo_WL/s_dias; % Wirshing and Light
122 tempo_OC_dias = tempo_OC/s_dias; % Oritz and Chen
123 tempo_DK_dias = tempo_dirlik/s_dias; % Dirlik

```

```
124
125 % Vetores para analise no dominio do tempo (toolbox -
      vibrationdata)
126
127 armpa = [f ; W]';
128 t_max = 1/delta_f;
```

### A.3 ROTINA MÉTODOS ESPECTRAIS - BIMODAL

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 % Definicao da densidade espectral de potencia
6
7 freq_min = 0;
8 delta_f = 1/10^5;
9 freq_max = 10/(2*pi);
10
11 f = freq_min:delta_f:freq_max;
12
13 w = 2.*pi.*f;
14 S = (1).*zeros(size(f));
15
16 for i =2:length(S)
17     if w(i)>=0.75 && w(i)<=3.0
18         S(i) = (12/(w(i))^7)*exp(-2.5/((w(i))^3));
19     end
20 end
21
22 for i =2:length(S)
23     if w(i)>=6.75 && w(i)<=8.0
24         S(i) = (1.2/(w(i)-6.0)^7)*exp(-2.5/((w(i)-6.0)^3));
25     end
26 end
27
28 % Grafico
29
30 figure('Name','Espectro Bimodal','NumberTitle','off');
31 plot(w,S);
32 title('Espectro Bimodal')
33 xlabel('Frequencia - (rad/s)')
34 ylabel('PSD - (EU^2-s)')
35
36 % Definicao dos parametros para normalizacao da PSD
37
38 r_51_71 = 3898.63; % RMS = 51,71MPa
39 r_68_95 = 6931.56; % RMS = 68,95MPa
40 r_103_42 = 15594.51; % RMS = 103,42MPa

```

```
41
42 % PSD normalizada pelo RMS
43
44 S = r_103_42.*S;
45 W = 2.*pi.*S;
46
47 % Verificacao do valor RMS
48
49 mom0 = trapz(f,W);
50 rms = sqrt(mom0);
51
52 % Calculo dos momentos espectrais
53
54 mom1 = trapz(f,(f.^1).*W);
55 mom2 = trapz(f,(f.^2).*W);
56 mom3 = trapz(f,(f.^3).*W);
57 mom4 = trapz(f,(f.^4).*W);
58
59 % Calculo da taxa de cruzamentos positivos de zero
60
61 e0 = sqrt(mom2/mom0);
62
63 % Calculo da taxa de ocorrencia de picos
64
65 eP = sqrt(mom4/mom2);
66
67 % Calculo do fator de irregularidade
68
69 gamm = e0/eP;
70
71 % Calculo da largura de banda do processo
72
73 lamb = sqrt(1-gamm^2);
74
75 % Dados da curva de Wohler
76
77 m = 3.210;
78 A = 10^9.559/(6.89476^(-m));
79
80 Sf = (A/0.5)^(1/m);
81 B = -(1/m);
82
```

```

83 b = B;
84 a = 2^B*Sf;
85
86 % Rayleigh
87
88 tempo_RL = A/(eP*(2*mom0)^(m/2)*gamma(m/2+1));
89
90 % Wirshing and Light
91
92 a_wl = 0.926-0.033*m;
93 b_wl = -2.323+1.587*m;
94 zeta_wl = a_wl+(1-a_wl)*(1-lamb)^b_wl;
95
96 tempo_WL = tempo_RL/(zeta_wl);
97
98 % Oritz and Chen
99
100 k = 2.0/m;
101 M_k = sum((f.^k).*W);
102 M_k2 = sum((f.^(k+2)).*W);
103
104 zeta_OC = (1/gamm)*sqrt((mom2*M_k)/(mom0*M_k2));
105
106 dano_OC = zeta_OC * (1/tempo_RL);
107 tempo_OC = 1/dano_OC;
108
109 % Dirlik
110
111 Sa = 0:0.01:10^5;
112 Sr = 2.*Sa;
113
114 z = Sr./(2.*(mom0).^(1./2));
115
116 xm = (mom1./mom0).*(mom2./mom4).^(1./2);
117 d1 = 2.*(xm-gamm.^2)./(1+gamm.^2);
118 r = (gamm-xm-d1.^2)./(1-gamm-d1+d1.^2);
119 d2 = (1-gamm-d1+d1.^2)./(1-r);
120 d3 = 1-d1-d2;
121 q = 1.25.*(gamm-d3-(d2.*r))./(d1);
122 p_Sr = 1./((mom0).^(1./2)).*((d1./q).*exp(-z./q)+(d2.*z./r.^2).*
    exp...
123 (-z.^2./(2.*r.^2))+d3.*z.*exp(-z.^2./2));

```

```
124 p_Sa = p_Sr;
125
126 tempo_dirlik = A/(eP*trapz(Sa,Sa.^m.*p_Sa));
127
128 % Estimativa da vida de fadiga em dias
129
130 s_dias = 24*60*60; % Taxa de conversao (segundos - dias)
131
132 tempo_RL_dias = tempo_RL/s_dias; % Banda Estreita
133 tempo_WL_dias = tempo_WL/s_dias; % Wirshing and Light
134 tempo_OC_dias = tempo_OC/s_dias; % Oritz and Chen
135 tempo_DK_dias = tempo_dirlik/s_dias; % Dirlik
136
137 % Vetores para analise no dominio do tempo (toolbox -
    vibrationdata)
138
139 armpa = [f ; W]';
140 t_max = 1/delta_f;
```

## A.4 ROTINA RECONSTRUÇÃO ESPECTRO UNIMODAL

```
1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 % Definicao da densidade espectral de potencia
6
7 freq_min = 0;
8 delta_f = (3.0-0.75)/(2*pi);
9 freq_max = 5*3/(2*pi);
10
11 Nt = (4096)/delta_f*(freq_max-freq_min);
12 Nt = ceil(Nt/(2*freq_max))*2*freq_max;
13 df = (2*freq_max)/Nt;
14 f = freq_min:df:freq_max;
15
16 w = 2.*pi.*f;
17 S = (1).*zeros(size(f));
18
19 for i =2:length(S)
20     if w(i)>=0.75 && w(i)<=3.0
21         S(i) = (12/(w(i))^7)*exp(-2.5/((w(i))^3));
22     end
23 end
24
25 % Definicao dos parametros para normalizacao da PSD
26
27 r_51_71 = 4274.24; % RMS = 51,71MPa
28 r_68_95 = 7599.39; % RMS = 68,95MPa
29 r_103_42 = 17096.97; % RMS = 103,42MPa
30
31 % PSD normalizada pelo RMS
32
33 S = r_103_42.*S;
34 W = 2.*pi.*S;
35
36 % Reconstrucao do carregamento no tempo
37
38 freq_max = max(f);
39
40 dt = 1/(2*freq_max);
```

```
41 T = 1/(df);
42 t = 0:dt:T;
43
44 t_max = t(length(t));
45
46 S = zeros(1,(2*length(W)-1));
47 S(1:length(W)) = (1/2)*W(1:length(W));
48 for i = 1:(length(W)-1)
49     S(length(W)+i) = (1/2)*W(length(W)-i+1);
50 end
51
52 fase = 2*pi*rand(size(W));
53 fase(1) = 0;
54
55 fase_t = zeros(1,(2*length(fase)-1));
56 fase_t(1:length(fase)) = fase(1:length(fase));
57 for i = 1:(length(fase)-1)
58     fase_t(length(fase)+i) = -fase(length(fase)-i+1);
59 end
60
61 TENSAO = sqrt(S*df).*exp(1i*fase_t);
62 tensao = length(S)*ifft(TENSAO,length(S));
63
64 vetor = [t;tensao]';
65
66 % Verificacao do RMS no dominio do tempo
67
68 rms_t = sqrt(var(tensao));
69
70 % Dados da curva de Wohler
71
72 m = 3.210;
73 A = 10^9.559/(6.89476^(-m));
74
75 % Grafico
76
77 figure('Name','Espectro Unimodal','NumberTitle','off');
78 plot(t,tensao);
79 title('Espectro Unimodal 103.42 RMS')
80 ylabel('Tensão - [MPa]')
81 xlabel('tempo - [s]')
```

## A.5 ROTINA RECONSTRUÇÃO ESPECTRO BIMODAL

```
1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 % Definicao da densidade espectral de potencia
6
7 freq_min = 0;
8 delta_f = ((3.0-0.75)+(8.0-6.75))/(2*pi);
9 f_max = 5*8/(2*pi);
10
11 Nt = (4096)/delta_f*(f_max-freq_min);
12 Nt = ceil(Nt/(2*f_max))*2*f_max;
13 df = (2*f_max)/Nt;
14 f = freq_min:df:f_max;
15
16 w = 2.*pi.*f;
17 S = (1).*zeros(size(f));
18
19 for i =2:length(S)
20     if w(i)>=0.75 && w(i)<=3.0
21         S(i) = (12/(w(i))^7)*exp(-2.5/((w(i))^3));
22     end
23 end
24
25 for i =2:length(S)
26     if w(i)>=6.75 && w(i)<=8.0
27         S(i) = (1.2/(w(i)-6.0)^7)*exp(-2.5/((w(i)-6.0)^3));
28     end
29 end
30
31 % Definicao dos parametros para normalizacao da PSD
32
33 r_51_71 = 3898.63; % RMS = 51,71MPa
34 r_68_95 = 6931.56; % RMS = 68,95MPa
35 r_103_42 = 15594.51; % RMS = 103,42MPa
36
37 % PSD normalizada pelo RMS
38
39 S = r_103_42.*S;
40 W = 2.*pi.*S;
```

```
41
42 % Reconstrucao do carregamento no tempo
43
44 f_max = max(f);
45
46 dt = 1.0/(2*f_max);
47 T = 1/(df);
48 t = 0:dt:T;
49
50 S = zeros(1,(2*length(W)-1));
51 S(1:length(W)) = (1/2)*W(1:length(W));
52 for i = 1:(length(W)-1)
53     S(length(W)+i) = (1/2)*W(length(W)-i+1);
54 end
55
56 fase = 2*pi*rand(size(W));
57 fase(1) = 0;
58
59 fase_t = zeros(1,(2*length(fase)-1));
60 fase_t(1:length(fase)) = fase(1:length(fase));
61 for i = 1:(length(fase)-1)
62     fase_t(length(fase)+i) = -fase(length(fase)-i+1);
63 end
64
65 TENSAO = sqrt(S*df).*exp(1i*fase_t);
66 tensao = length(S)*ifft(TENSAO,length(S));
67
68 vetor = [t;tensao]';
69
70 % Verificacao do RMS no dominio do tempo
71
72 rms_t = sqrt(var(tensao));
73
74 % Dados da curva de Wohler
75
76 m = 3.210;
77 A = 10^9.559/(6.89476^(-m));
78
79 % Grafico
80
81 figure('Name','Espectro Bimodal','NumberTitle','off');
82 plot(t,tensao);
```

```
83 title('Espectro Bimodal 103.42 RMS')
84 ylabel('Tensão - [MPa]')
85 xlabel('tempo - [s]')
```

## A.6 ALGORITMO RAINFLOW

```
1
2 //  rainflow_mex.cpp ver
3
4 #include <math.h>
5 #include <matrix.h>
6 #include <mex.h>
7
8 #include <cstdlib>
9
10 #include <vector>
11
12
13 // Dynamic Memory Allocation for 2D Arrays
14
15 #define ZERO(Q,nrows ,ncols) \
16   for(long i=0; i<nrows; i++)\
17   { for(long j=0; j<ncols; j++)\
18     {Q[i][j]=0.;}}
19
20 #define DYNAMIC_MATRIX(Q,nrows ,ncols) \
21   double **Q;\
22   Q =new double* [nrows];\
23   for(long row=0;row<nrows;row++) {Q[row]=new double[ncols]; }\
24   ZERO(Q,nrows ,ncols)
25
26 #define DELETE_MATRIX(aaa,nrows)\
27   for (long i = 0; i < nrows; i++)\
28   {delete(aaa[i]);}\
29   delete(aaa); \
30
31
32
33
34 #define NB 14 // number of bins
35
36 #define NB_m1 NB-1
37
38 #define MC 1000000
39
40
```

```
41 using namespace std;
42
43 void rainflow_cpp(double *L,double *C,double *AverageAmp,double *
    MaxAmp ,
44         double *MinMean ,double *AverageMean ,double *MaxMean ,
45         double *MinValley ,double *MaxPeak ,
46         double *D ,double *ac1 ,double *ac2 ,double *cL ,
47         double *y ,double *dchoice ,double *exponent ,size_t num)
48 {
49
50
51
52     for(long i=0;i<MC;i++)
53     {
54         ac1[i]=0.;
55         ac2[i]=0.;
56     }
57
58     DYNAMIC_MATRIX(B,num,4);
59
60     double slope1 ,slope2;
61
62     float mina ,maxa;
63
64     float X ,Y;
65     float ymax=0.;
66
67     long kv;
68
69     long hold;
70     long i ,j ,k ,n;
71
72     long nkV=0;
73
74
75     long last_a;
76
77     long NP=num+1;
78     // mexPrintf(" NP=%ld \n",NP);
79
80     vector<float> a;
81
```

```
82     k=0;
83
84     // a[k]=y[k];
85     a.push_back(y[k]);
86
87     k=1;
88
89     for(long i=1;i<(NP-1);i++)
90     {
91         slope1=(y[i]-y[i-1]);
92         slope2=(y[i+1]-y[i]);
93
94         if( slope1*slope2 <=0. && fabs(slope1) >0.)
95         {
96             // a[k]=y[i];
97             a.push_back(y[i]);
98             k++;
99         }
100
101     }
102
103     last_a=k-1;
104
105     hold=last_a;
106
107
108     // a[k]=y[NP-1];
109     a.push_back(y[NP-1]);
110
111     /*
112     for(long i=0; i<=last_a; i++)
113     {
114         mexPrintf(" %8.4g \n",a[i]);
115     }
116     */
117
118     mina=100000;
119     maxa=-mina;
120
121     for(long i=0;i<=last_a;i++)
122     {
123         if(a[i]<mina)
```

```
124     {
125         mina=a[i];
126     }
127     if(a[i]>maxa)
128     {
129         maxa=a[i];
130     }
131 }
132
133 // num=long(maxa-mina)+1;
134
135     n=0;
136     i=0;
137     j=1;
138
139     float sum=0;
140
141     kv=0;
142
143 //     mexPrintf("\n percent completed \n");
144
145     while(1)
146     {
147         Y=(fabs(a[i]-a[i+1]));
148         X=(fabs(a[j]-a[j+1]));
149
150 //         mexPrintf("%8.4g \t %8.4g \n",Y,X);
151
152         if(X>=Y && Y>0)
153         {
154             if(Y>ymax)
155                 {ymax=Y;}
156
157             if(i==0)
158                 {
159
160                     n=0;
161                     sum+=0.5;
162                     B[kv][3]=a[i+1];
163                     B[kv][2]=a[i];
164                     B[kv][1]=0.5;
165                     B[kv][0]=Y;
```

```
166         ac1[kv]=0.5*B[kv][0];
167         ac2[kv]=B[kv][1];
168         kv++;
169
170         a.erase (a.begin());
171
172
173         last_a--;
174
175         i=0;
176         j=1;
177
178         //      mexPrintf("p1a \t %8.4g \n",Y);
179     }
180     else
181     {
182         sum+=1;
183         B[kv][3]=a[i+1];
184         B[kv][2]=a[i];
185         B[kv][1]=1.;
186         B[kv][0]=Y;
187         ac1[kv]=0.5*B[kv][0];
188         ac2[kv]=B[kv][1];
189         kv++;
190
191         n=0;
192
193         a.erase (a.begin()+(i+1));
194         a.erase (a.begin()+i);
195
196
197         last_a-=2;
198
199         i=0;
200         j=1;
201
202         //      mexPrintf("p1b \t %8.4g \n",Y);
203     }
204
205
206     nkvv++;
207
```

```
208         if(nkv==3000)
209             {
210             //         mexPrintf(" %8.4g \n", (sum/(hold/2))*100.);
211                 nkV=0;
212             }
213         }
214     else
215         {
216         i++;
217         j++;
218         }
219
220     if((j+1)>last_a)
221         {
222         break;
223         }
224     }
225
226
227     for(long i=0;i<(last_a);i++)
228     {
229     Y=(fabs(a[i]-a[i+1]));
230     if(Y>0)
231         {
232         sum+=0.5;
233         B[kv][3]=a[i+1];
234         B[kv][2]=a[i];
235         B[kv][1]=0.5;
236         B[kv][0]=Y;
237         ac1[kv]=0.5*B[kv][0];
238         ac2[kv]=B[kv][1];
239         kv++;
240
241         //         mexPrintf("p2 \t %8.4g \n",Y);
242         }
243     if(Y>ymax)
244     {ymax=Y;}
245     }
246
247
248
249     L[1]=0;
```

```
250     L [2]=2.5;
251     L [3]=5;
252     L [4]=10;
253     L [5]=15;
254     L [6]=20;
255     L [7]=30;
256     L [8]=40;
257     L [9]=50;
258     L [10]=60;
259     L [11]=70;
260     L [12]=80;
261     L [13]=90;
262     L [14]=100;
263
264
265     for (int ijk=1; ijk<=NB; ijk++)
266     {
267         L [ijk]*=ymax/100.;
268
269         C [ijk]=0.;
270
271         MaxMean [ijk]=-1.0e+20;
272         MinMean [ijk]= 1.0e+20;
273
274         AverageMean [ijk]=0.;
275
276         MaxPeak [ijk]=-1.0e+20;
277         MinValley [ijk]= 1.0e+20;
278
279         MaxAmp [ijk]=-1.0e+20;
280         AverageAmp [ijk]= 1.0e+20;
281
282     //   printf(" L[%ld]=%g \n",ijk,L[ijk]);
283     }
284
285     if(kv>MC)
286     {
287         mexErrMsgTxt("Number of cycles is > 1 million.");
288     }
289
290     cL [0]=double(kv);
291
```

```
292     kv--;
293
294     for(int ijk= NB_m1;ijk>=0;ijk--)
295     {
296         AverageAmp[ijk]=0.;
297     }
298
299     double bm;
300
301     for(long i=0;i<=kv;i++)
302     {
303         Y=B[i][0];
304
305         // mexPrintf("i=%d Y=%g \n",i,Y);
306
307
308         for(int ijk= NB_m1;ijk>=0;ijk--)
309         {
310
311             if(Y>=L[ijk] && Y<=L[ijk+1])
312             {
313                 bm=(B[i][2]+B[i][3])/2.;
314
315                 if( bm > MaxMean[ijk])
316                 {
317                     MaxMean[ijk]=bm;
318                 }
319                 if( bm < MinMean[ijk])
320                 {
321                     MinMean[ijk]=bm;
322                 }
323
324                 C[ijk]=C[ijk]+B[i][1];
325                 AverageMean[ijk]+=B[i][1]*(B[i][3]+B[i][2])*0.5;
326
327                 if(B[i][3]>MaxPeak[ijk])
328                 {
329                     MaxPeak[ijk]=B[i][3];
330                 }
331                 if(B[i][2]>MaxPeak[ijk])
332                 {
333                     MaxPeak[ijk]=B[i][2];
```

```
334     }
335
336     if(B[i][3]<MinValley[ijk])
337     {
338         MinValley[ijk]=B[i][3];
339     }
340     if(B[i][2]<MinValley[ijk])
341     {
342         MinValley[ijk]=B[i][2];
343     }
344
345     if(Y>MaxAmp[ijk])
346     {
347         MaxAmp[ijk]=Y;
348
349     //         mexPrintf("ijk=%d Y=%g \n",ijk,MaxAmp[ijk]);
350     }
351
352     AverageAmp[ijk]+=B[i][1]*Y*0.5;
353
354     break;
355 }
356 }
357 }
358
359 for(int ijk=1;ijk<=NB;ijk++)
360 {
361     if(C[ijk]>0)
362     {
363         AverageMean[ijk]/=C[ijk];
364         AverageAmp[ijk]/=C[ijk];
365     }
366     MaxAmp[ijk]/=2.;
367
368     if(C[ijk]<0.5)
369     {
370         AverageAmp[ijk]=0.;
371         MaxAmp[ijk]=0.;
372         AverageMean[ijk]=0.;
373         MinValley[ijk]=0.;
374         MaxPeak[ijk]=0.;
375     }
```

```
376
377 //      mexPrintf(" ** ijk=%d MaxAmp[ijk]=%g \n",ijk,MaxAmp[ijk]);
378 }
379
380
381
382 //  printf("\n Amplitude = (peak-valley)/2 \n");
383
384 //  L,C,AverageAmp,MaxAmp,AverageMean,MinValley,MaxPeak
385
386  D[0]=0.;
387
388  double yy;
389  double b;
390
391  if(dchoice[0]>0.)
392  {
393      for(long i=0;i<kv;i++)
394      {
395          yy=double(0.5*B[i][0]);
396          b=double(exponent[0]);
397
398          D[0]+=B[i][1]*pow(yy,b);
399      }
400  }
401  DELETE_MATRIX(B,num)
402 }
403 void mexFunction(int nlhs, mxArray*plhs[], int nrhs, const
404                 mxArray *prhs[])
405 {
406 //  mexPrintf(" mexFunction \n");
407
408 //  1D arrays
409
410  double *L;
411  double *C;
412  double *AverageAmp;
413  double *MaxAmp;
414  double *MinMean;
415  double *AverageMean;
416  double *MaxMean;
```

```
417     double *MinValley;
418     double *MaxPeak;
419     double *D;
420     double *ac1;
421     double *ac2;
422     double *cL;
423
424     double *y;
425     double *dchoice;
426     double *exponent;
427
428     size_t m;
429     size_t n;
430     size_t num;
431
432     // mexPrintf(" ** nlhs=%d nrhs=%d \n",nlhs,nrhs);
433
434     /* Check for proper number of arguments */
435     if (nrhs != 3) {
436         mexErrMsgTxt("One input argument required.");
437     } else if (nlhs != 13) {
438         mexErrMsgTxt("Incorrect number of output arguments.");
439     }
440
441     m = mxGetM(prhs[0]);
442     n = mxGetN(prhs[0]);
443
444     num=m;
445
446     if(n>m){num=n;}
447
448     /* Create a matrix for the return argument */
449     plhs[0]= mxCreateDoubleMatrix(NB+1, 1, mxREAL);
450     plhs[1]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
451     plhs[2]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
452     plhs[3]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
453     plhs[4]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
454     plhs[5]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
455     plhs[6]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
456     plhs[7]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
457     plhs[8]= mxCreateDoubleMatrix(NB, 1, mxREAL);
458     plhs[9]= mxCreateDoubleMatrix(1, 1, mxREAL);
```

```
459     plhs [10]= mxCreateDoubleMatrix(MC, 1, mxREAL);
460     plhs [11]= mxCreateDoubleMatrix(MC, 1, mxREAL);
461     plhs [12]= mxCreateDoubleMatrix(1, 1, mxREAL);
462
463     /* Assign pointers to the various parameters */
464
465
466     L      = mxGetPr(plhs [0]);
467     C      = mxGetPr(plhs [1]);
468     AverageAmp = mxGetPr(plhs [2]);
469     MaxAmp   = mxGetPr(plhs [3]);
470     MinMean  = mxGetPr(plhs [4]);
471     AverageMean = mxGetPr(plhs [5]);
472     MaxMean  = mxGetPr(plhs [6]);
473     MinValley = mxGetPr(plhs [7]);
474     MaxPeak  = mxGetPr(plhs [8]);
475     D      = mxGetPr(plhs [9]);
476     ac1    = mxGetPr(plhs [10]);
477     ac2    = mxGetPr(plhs [11]);
478     cL     = mxGetPr(plhs [12]);
479
480     y = mxGetPr(prhs [0]);
481     dchoice = mxGetPr(prhs [1]);
482     exponent= mxGetPr(prhs [2]);
483
484     /* Call the rainflow_cpp function. */
485     // mexPrintf(" Call the rainflow_cpp function \n");
486
487     rainflow_cpp(L,C,AverageAmp,MaxAmp,MinMean,AverageMean,MaxMean
488     ,...
489     MinValley,MaxPeak,D,ac1,ac2,cL,y,dchoice,exponent,num);
489 }
```