



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**FADIGA MULTIAXIAL: ANÁLISE DE ESPECTRO PARA  
PREVISÃO DE VIDA EM COMPONENTES SUJEITOS A  
CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL**

**Felipe Maganha de Lima**

**Brasília, 19 de Maio de 2021**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**FADIGA MULTIAXIAL: ANÁLISE DE ESPECTRO PARA  
PREVISÃO DE VIDA EM COMPONENTES SUJEITOS A  
CARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL**

**Felipe Maganha de Lima**

*Projeto de Graduação submetido ao Departamento de Engenharia  
Mecânica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro em Engenharia Mecânica*

Banca Examinadora

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, ENM/FT-UnB \_\_\_\_\_  
*Orientador*

Prof. José Alexander Araújo, ENM/FT-UnB \_\_\_\_\_  
*Examinador Interno*

Prof. Fábio Comes de Castro, ENM/FT-UnB \_\_\_\_\_  
*Examinador interno*

## FICHA CATALOGRÁFICA

LIMA, FELIPE MAGANHA DE

FADIGA MULTIAXIAL: ANÁLISE DE ESPECTRO PARA PREVISÃO DE VIDA EM COMPONENTES SUJEITOS ACARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL [Distrito Federal] 2021.

xvi, 110 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Engenheiro, Engenharia Mecânica, 2021).

Projeto de Graduação - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica

- |                   |                               |
|-------------------|-------------------------------|
| 1. Planos Crítico | 2. Fadiga Multiaxial          |
| 3. Vida à fadiga  | 4. Método da Máxima Variância |
| I. ENM/FT/UnB     |                               |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LIMA, F.M. DE (2021). *FADIGA MULTIAXIAL: ANÁLISE DE ESPECTRO PARA PREVISÃO DE VIDA EM COMPONENTES SUJEITOS ACARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL*. Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 110 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Felipe Maganha de Lima

TÍTULO: FADIGA MULTIAXIAL: ANÁLISE DE ESPECTRO PARA PREVISÃO DE VIDA EM COMPONENTES SUJEITOS ACARREGAMENTOS DE AMPLITUDE VARIÁVEL.

GRAU: Engenheiro em Engenharia Mecânica ANO: 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Projeto Final de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Projeto Final de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Felipe Maganha de Lima

Depto. de Engenharia Mecânica (ENM) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

## **Dedicatória**

*A minha família e amigos(as) que estiveram sempre presente durante minha graduação.*

*Felipe Maganha de Lima*

## **Agradecimentos**

*Agradeço especialmente a Deus por me guiar sempre e aos valiosos ensinamentos proporcionados pelo Prof. Jorge Luiz A. Ferreira durante o desenvolvimento do Projeto de Graduação. Agradeço também minha família e minha cachorrinha Nikita por todo carinho e apoio incondicional. Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica e meus amigos (as) por todo apoio e aprendizado durante minha graduação. Minha eterna gratidão.*

*Felipe Maganha de Lima*

---

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a avaliação de metodologias empregadas em fadiga multiaxial para a determinação de planos críticos a partir do Método da Máxima Variância (MMV) e estimativas de previsão de vida para componentes sujeitos a carregamentos aleatórios. A previsão de vida no domínio no tempo pela metodologia proposta por Lagoda & Macha ocorre utilizando o Método Rainflow para contagem de ciclos e Regra de Palmgren-Miner para acúmulo de dano no domínio no tempo. Enquanto a metodologia proposta por Susmel apresenta um algoritmo de otimização chamado de Método do Gradiente Ascendente e requer a utilização do Método das Curvas de Wöhler Modificadas para calibração antes do acúmulo de dano. Já no domínio na frequência, a previsão de vida à fadiga é feita por meio de uma análise espectral com objetivo de validação da previsão de vida no domínio no tempo pela metodologia proposta por Lagoda & Macha desde que os planos críticos coincidam. A revisão bibliográfica aborda temas relacionados a fadiga, processos estocásticos, geração de banda, reconstrução do sinal a partir das PSDs e mapeamento da variância em função das coordenadas esféricas. Após a apresentação das metodologias, os resultados obtidos foram comparados entre si a fim de identificar os planos críticos para tensões normais, função densidade espectral de potência e tensões cisalhantes e verificar se as previsões de vida obtidas foram valores próximos mesmo utilizando diferentes forças motrizes para implementação do Método de Máxima Variância. Além disso, para metodologia proposta por Lagoda & Macha foi apresentada uma correção para previsões de vida numéricas para sinais estocásticos conhecida como Correção Serensen-Kogayev

**Palavras-chaves:** fadiga, multiaxial, vida à fadiga, Método da Máxima Variância, planos críticos, Método do Gradiente Ascendente, Método das Curvas de Wöhler Modificadas, previsão de vida, sinais estocásticos.

---

## ABSTRACT

The present work aims to evaluate methodologies used in multiaxial fatigue to determine critical planes using the Maximum Variance Method (MMV) and life prediction estimates for components subject to random loads. The prediction of life in the time domain by the methodology proposed by Lagoda & Macha occurs using the Rainflow Method for counting cycles and the Palmgren-Miner Rule for the accumulation of damage in the time domain. While the methodology proposed by Susmel presents an optimization algorithm called the Ascent Gradient Method and requires the use of the Modified Wöhler Curves Method (MWCM) for calibration before damage accumulation. The bibliographic review will go over the topics related to fatigue, stochastic processes, band generation, signal reconstruction from PSDs and mapping of variance as a function of spherical coordinates. After the presentation of methodologies, the results obtained were compared with each other for the purpose of identifying the critical planes, power spectral density function and shear stresses and check that whether life predictions obtained were close values even using different driving forces for implementation of the Maximum Variance Method. In addition, for the methodology proposed by Lagoda & Macha, a correction for numerical life predictions for stochastic signals known as the Serensen-Kogayev Correction was presented.

**Keywords:** fatigue, multiaxial, fatigue life, Maximum Variance Method, critical planes, Ascent Gradient Method, Modified Wöhler Curves Method, life prediction, stochastic signals.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	DEFINIÇÃO DE FADIGA E CARACTERIZAÇÃO DO PROCESSO DE FALHA POR FADIGA	1
1.2	ESTUDO DA ARTE: FADIGA MULTIAXIAL	4
1.3	RELEVÂNCIA DO ESTUDO DA FADIGA MULTIAXIAL PELO MÉTODO DO PLANO CRÍTICO	5
1.4	OBJETIVOS GERAIS	11
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>13</b>
2.1	ESTADO DE TENSÃO	13
2.1.1	VETOR TENSÃO	13
2.1.2	ESTADO PLANO DE TENSÃO	14
2.2	CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	16
2.2.1	CONCEITOS PRELIMINARES	16
2.2.2	CORRELAÇÃO E AUTOCORRELAÇÃO	20
2.2.3	PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	20
2.2.4	ESTIMATIVA DE FUNÇÕES MULTIVARIÁVEIS USANDO EXPANSÃO POR SÉRIE DE TAYLOR	22
2.3	CONCEITOS DE ANÁLISE ESPECTRAL	25
2.3.1	TRANSFORMADA DE FOURIER	25
2.3.2	FUNÇÕES DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA (PSDs)	26
2.3.3	FUNÇÃO DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	27
2.3.4	MOMENTOS ESPECTRAIS	29
2.4	GERAÇÃO DE SINAL	31
2.5	MÉTODO DE CONTAGEM DE CICLOS: RAINFLOW	34
2.6	ACÚMULO DE DANO: REGRA DE PALMGREN-MINER	37
2.6.1	WIRSCHING AND LIGHT	39
2.7	CURVAS S-N	40
2.8	PROPORCIONALIDADE DE UM CARREGAMENTO	41
2.9	MÉTODO DA MÁXIMA VARIÂNCIA (MMV)	43
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA POR LAGODA E MACHA</b>	<b>45</b>
3.1	ESTADO DE TENSÃO TRIDIMENSIONAL	45
3.2	HIPÓTESE SIMPLIFICADORA	48
3.3	FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA	49
3.3.1	DOMÍNIO NO TEMPO	49

3.3.2	DOMÍNIO NA FREQUÊNCIA .....	52
3.3.3	TEMPO DE VIDA DO COMPONENTE.....	53
3.4	METODOLOGIA PROPOSTA POR LAGODA & MACHA.....	54
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA POR SUSMEL.....</b>	<b>57</b>
4.1	HIPÓTESE SIMPLIFICADORA.....	57
4.2	FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA .....	60
4.2.1	MÉTODO DO GRADIENTE ASCENDENTE .....	65
4.2.2	TENSÃO DE CISALHAMENTO .....	68
4.3	FLUXOGRAMA DA METODOLOGIA PROPOSTA POR SUSMEL.....	70
<b>5</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>71</b>
5.1	DADOS EXPERIMENTAIS .....	71
5.2	GERAÇÃO DE ESPECTRO DE POTÊNCIA .....	72
5.3	RECONSTRUÇÃO DO SINAL DE TENSÃO .....	76
5.4	RESULTADOS DA ANÁLISE NO DOMÍNIO NO TEMPO .....	82
5.4.1	LAGODA & MACHA .....	82
5.4.2	SUSMEL .....	83
5.5	RESULTADOS DA ANÁLISE NO DOMÍNIO NA FREQUÊNCIA .....	89
5.6	RESULTADOS FINAIS E PREVISÃO DE VIDA OBTIDA PELA SIMULAÇÃO.....	92
5.6.1	COMPARAÇÃO DE PLANOS CRÍTICOS E PREVISÃO DE VIDA NUMÉRICA DA METODOLOGIA PROPOSTA POR LAGODA & MACHA ....	92
5.6.2	COMPARAÇÃO DE PLANOS CRÍTICOS E PREVISÃO DE VIDA NUMÉRICA DA METODOLOGIA PROPOSTA POR SUSMEL .....	93
5.6.3	PREVISÃO DE VIDA - EXPERIMENTAL VS NUMÉRICA COM A CORREÇÃO SERENSEN-KOGAYEV .....	95
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO FINAL.....</b>	<b>98</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>100</b>
	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>103</b>
I.1	PERIODOGRAMA MODIFICADO DE WELCH.....	103
I.2	METODOLOGIA PROPOSTA POR LAGODA & MACHA .....	105
I.3	DEMONSTRAÇÃO DA EXPANSÃO POR SÉRIE DE TAYLOR .....	106
I.4	MÉTODO DAS CURVAS DE WÖHLER MODIFICADA.....	107

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Estágio I e II da propagação de trinca. . . . .	2
1.2	Estágios de Propagação da Trinca. . . . .	3
1.3	Gráfico de Distribuição de Falhas Estruturais. . . . .	5
1.4	Origem da falha do bombardeio militar F-111. . . . .	6
1.5	Acidente do Boeing 737 Aloha. . . . .	7
1.6	Estudo para avaliação e reparo da aeronave de treinamento British Aerospace Hawk Mk.51 sob carregamento de espectro multiaxial complexo. . . . .	8
1.7	Estado Plano de tensões em aeronaves. A esquerda, na fuselagem da aeronave militar e a direita no rotor de um helicóptero civil. . . . .	8
1.8	Estudo de caso de fadiga multiaxial em tubulações de uma refinaria. . . . .	10
2.1	Vetor tensão $\mathbf{t}$ atuando sobre um plano com vetor unitário normal $\mathbf{n}$ . . . . .	13
2.2	Estado Geral de Tensão. . . . .	14
2.3	Conjunto de registros amostrais ao longo do tempo de cada processo estocástico unidimensional. . . . .	21
2.4	Conjunto de registros amostrais ao longo do tempo de cada processo estocástico unidimensional. . . . .	30
2.5	Parâmetros básicos de análise pelo Método Rainflow em um carregamento mecânico	34
2.6	a) Método Rainflow Clássico b) Identificação de dois possíveis ciclos fechados. .	35
2.7	Exemplo do Método Rainflow. . . . .	36
2.8	Curvas S-N ou Curvas de Wöhler. . . . .	38
2.9	Curvas S-N a partir de ensaios de fadiga axial completamente reversa. Material: Aço UNS G41 300 Normalizado. . . . .	40
2.10	Classificação de Carregamentos quanto a proporcionalidade. . . . .	41
2.11	Caminhos de tensão (a) proporcional (amplitude variável), (b) não proporcional (amplitude variável) e (c) não proporcional (aleatório). . . . .	42
2.12	Método da Máxima Variância. . . . .	43
3.1	Equilíbrio de forças no corpo tetraedro infinitesimal. . . . .	45
3.2	Tensões agindo em plano com sistema de coordenadas tridimensional. . . . .	46
3.3	Critério de Fadiga Multiaxial pelo método do plano crítico proposto por Macha . .	48
3.4	Semi-esfera descrita pelo vetor normal $\mathbf{n}$ ao plano crítico. . . . .	49
3.5	Fluxograma da Parte 3 - Domínio no tempo. . . . .	55
3.6	Domínio na frequência. . . . .	56
4.1	Teoria do modelo de dano. . . . .	57
4.2	Modelo de dano ajustado para a metodologia. . . . .	59
4.3	Introdução de sistema local de coordenadas. . . . .	60

4.4	Projeção do vetor unitário $n$ .	61
4.5	Projeção do vetor unitário $e_a$ e $e_b$ .	61
4.6	Direção do vetor $q$ pertencente ao plano material e definição da tensão de cisalhamento.	62
4.7	Método do Gradiente.	65
4.8	Método da Mínima Elipse (MME).	68
4.9	Método de Socie (SOC).	69
4.10	Modelo proposto por Susmel.	70
5.1	Formato e dimensões em milímetros do corpo de prova sujeito aos testes de fadiga.	71
5.2	Discretização do sinal de $\tau_{xy}$ no tempo obtido pelo <b>Algoritmo 2</b> .	73
5.3	PSD referencial de $\sigma_{xx}$ obtida pelo <b>Algoritmo 1</b> .	74
5.4	Função densidade espectral de potência (PSD) para coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).	75
5.5	Função densidade espectral de potência (PSD) para coeficiente de correlação igual a +1,0.	75
5.6	Função densidade espectral de potência (PSD) para coeficiente de correlação igual a -1,0.	76
5.7	Histórico de carregamento para coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).	78
5.8	Histórico de carregamento para coeficiente de correlação igual a 1,0.	78
5.9	Histórico de carregamento para coeficiente de correlação igual a -1,0.	79
5.10	Zoom em um intervalo do histórico de carregamento S11 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).	79
5.11	Gráfico de dispersão (correlação entre $\sigma$ e $\tau$ ).	80
5.12	Identificação de ângulos complementares.	85
5.13	Aplicação do Método de Socie.	86
5.14	Sinal no tempo, Distribuição Normal e Gaussiana para $\tau_q$ com coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).	87
5.15	Sinal no tempo, Distribuição Normal e Gaussiana para $\tau_q$ com coeficiente de correlação igual a 1.	88
5.16	Sinal no tempo, Distribuição Normal e Gaussiana para $\tau_q$ com coeficiente de correlação igual a -1.	88
5.17	PSD Referencial e pelo Método de Welch para coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).	90
5.18	PSD Referencial e pelo Método de Welch para coeficiente de correlação igual a 1,0.	90
5.19	PSD Referencial e pelo Método de Welch para coeficiente de correlação igual a -1,0.	91
5.20	Círculo de Mohr.	94
5.21	Comparação de Planos Críticos de $\tau_q$ e $\sigma_{eq}$ .	94
5.22	Previsão de Vida - Experimental vs. Simulado.	97
1	Modelo proposto por Lagoda.	105
2	Vetor dos Coeficientes do Critério de Falha de Fadiga Multiaxial.	106

3	Círculos de Mohr (a) Carregamento completamente reverso (tração-compressão) (b) carregamento completamente reverso de torção pura. . . . .	108
4	Parametrização de A e b pelas Curvas de Wöhler Modificadas. . . . .	109
5	Curvas de Wöhler Modificadas para a um carregamento geral dado por $\rho_i$ . . . . .	110

## LISTA DE TABELAS

1.1	Linha do tempo dos estudos relacionados a fadiga multiaxial. . . . .	4
1.2	Enfoques utilizados pela metodologia proposta por Lagoda. . . . .	11
1.3	Enfoques utilizados pela metodologia proposta por Susmel. . . . .	12
3.1	Tabela de cossenos diretores para transformação de coordenadas tridimensionais. .	46
5.1	Propriedades do aço 18G2A. . . . .	71
5.2	Parâmetros da Curvas S-N e espectrais . . . . .	72
5.3	Casos simulados e parâmetros estatísticos. . . . .	72
5.4	Tabela de valores de referência e entrada do <b>Algoritmo 1</b> . . . . .	72
5.5	Resultados da simulação da matriz de correlação $\rho_{\sigma,\tau}$ . . . . .	81
5.6	Resultados da simulação do coeficiente de correlação $r_{\sigma,\tau}$ . . . . .	81
5.7	Candidatos a plano crítico encontrados pelo <b>Algoritmo 3</b> . . . . .	83
5.8	Resultado do <b>Algoritmo 3</b> . . . . .	83
5.9	Candidatos a plano crítico encontrados pelo modelo de Susmel. . . . .	84
5.10	Candidatos a plano crítico encontrados no 1° e 2° quadrante pelo modelo de Susmel.	85
5.11	Determinação da amplitude equivalente e desvio padrão de $\tau_q$ pelo modelo de Susmel. . . . .	85
5.12	Análise de candidatos a plano crítico do modelo de Susmel com o SOC. . . . .	87
5.13	Resultados do <b>Algoritmo 5</b> e seus parâmetros espectrais. . . . .	91
5.14	Previsão de Vida - Comparação dos resultados obtidos pela metodologia proposta Lagoda & Macha. . . . .	92
5.15	Parâmetros da Curvas S-N. . . . .	93
5.16	Previsão de Vida - Comparação dos resultados obtidos pela metodologia proposta Susmel. . . . .	93
5.17	Casos simulados e parâmetros estatísticos. . . . .	96

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$G/PSD$	Função densidade espectral de potência
$G_{eq}/PSD_{eq}$	Função densidade espectral de potência equivalente
$O$	Ponto Material de uma superfície
$n$	Vetor normal unitário ao plano material $\Delta$
$t_n$	Componente normal do vetor tensão, com relação a um dado plano de vetor normal $n$
$t_t$	Componente tangencial do vetor tensão, com relação a um dado plano de vetor normal $n$
$t$	Variável representativa de instante de tempo.
$e_a$	vetor unitário do sistema de referência $O_{e_a n e_b}$ paralelo ao plano $xy$ (orientado pela ângulo $\phi$ apenas)
$e_b$	vetor unitário do sistema de referência $O_{e_a n e_b}$ orientado em função dos ângulos $\theta$ e $\phi$
$T$	Período/Previsão de Vida em segundos
$r$	Coefficiente de correlação
$R$	Correlação
$x$	Registro amostral unidirecional
$X$	Processo estacionário unidirecional
$\mathbf{X}$	Vetor processo estacionário aleatório
$E()$	Valor Esperado
$f$	Frequência
$G$	Função densidade espectral de potência
$P$	Potência normalizada do sinal
$S_x$	Função densidade espectral de potência de dois extremos
$m_i$	Momento espectral
$N_o^+$	Número esperados de oscilações/ciclos
$M^+$	Número esperado de picos
$cov$	Covariância
$var$	Variância
$D, d$	Dano Acumulado
$N, n$	Número de ciclos
$T_o$	Tempo de observação/simulado
$\mathbf{a}, \mathbf{d}$	Vetor dos Coeficientes
$C$	Matriz da Covariância

$n_i$	Número de ciclos com amplitude $\sigma_{ai}$
$A$	Constante da Curva de Curvas de Wöhler (Curva S-N)
$b$	Constante da Curva de Curvas de Wöhler (Curva S-N)
$r_{\sigma,\tau}$	Coefficiente de Correlação de $\sigma(t)$ E $\tau(t)$
$q$	Tensão resolvida na direção de máxima variância de $\tau_q(t)$ ou na direção $m$
$RMS$	Valor RMS
$N_o$	Número de ciclos correspondente ao limite a fadiga do material

## Símbolos Gregos

$\phi$	Ângulo entre a projeção do vetor unitário $n$ no plano x-y e o eixo x
$\theta$	Ângulo entre o vetor unitário $n$ e o eixo z.
$\alpha$	Ângulo entre a direção $m$ do vetor $q$ e o eixo do vetor unitário $a$
$\sigma_{eq}$	Tensão normal equivalente
$\tau_a$	Amplitude equivalente da tensão de cisalhamento
$\Omega$	Corpo Material
$\Delta$	Plano material
$\bar{\sigma}$	Tensão de segunda ordem (Tensor tensão de Cauchy)
$\sigma$	Vetor processo estacionário de tensão ou Processo estocástico de tensão ( $\bar{\sigma}$ em Notação de Voigt)
$\sigma_n$	Tensão normal média
$\sigma_{ij}$	Tensão genérica aplicada
$\Omega$	Superfície do corpo sólido material
$\sigma_{ii}$	Tensão normal
$\tau_{ij}$	Tensão cisalhante
$\mu_i$	Valor Médio de uma variável $i$
$\psi_i$	Valor RMS
$\hat{\sigma}_i$	Desvio-Padrão de uma variável $i$
$\omega$	Frequência Angular
$\zeta$	Parâmetro de largura de banda
$\Psi^k$	Ângulo de defasagem
$\lambda$	Fator de correção do método espectral para banda larga
$\alpha_f$	Coefficiente de irregularidade
$\zeta$	Parâmetro de largura de banda
$\rho$	Razão de tensão
$m_\rho$	Índice de sensibilidade a tensão média
$\kappa$	Taxa de incremento do Método do Gradiente Ascendente
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\varrho$	Matriz de Correlação

## Sobrescritos

$\wedge$	Valor Efetivo (Estimativa de Variável aleatória)
—	Nomenclatura de tensor
0	Valor médio para processo estocástico aleatório

## Subscritos Principais

$n$	Representação de componente normal
$eq$	Representação de componente equivalente
$xx, yy, zz$	Relativo à componente do tensor tensão
$xy, xz$	Relativo à componente do tensor tensão
$yx, yz$	Relativo à componente do tensor tensão
$zx, zy$	Relativo à componente do tensor tensão
$aux$	Auxiliar
$a$	Amplitude da tensão/Componente Alternada
$n$	Componente Normal
$i, m$	valor média da componente i de uma tensão
$i, a$	amplitude da componente i de uma tensão
$RF$	Rainflow
$SP/SP, NB$	Espectral Banda Estreita
$SP, BB$	Espectral Banda Larga
$WL$	Wirsching e Light
$MV, q$	Representação da direção de máxima variância
$eq$	Subscrito para valor equivalente
$max$	Valor máximo
$min$	Valor mínimo
$pico$	Valor de pico
$d$	Dominante
$af$	Limite a fadiga
$o$	Valor referencial
$ut$	Resistência a tração
$y$	Resistência ao escoamento
$eff$	Valor efetivo
$cr$	Valor crítico
$s$	Ensaio de Tração
$t$	Ensaio de Torção Pura
$MCWM$	Subscrito para parâmetro calibrado pela Método das Curvas de Wöhler Modificadas

## Siglas Principais

ASM	American Society of Materials
ASTM	American Society for Testing and Materials
PSBs	Persistent Slip Bands (Bandas de deslizamento permanente)
PSD	Power spectral density ( $G = PSD$ )
NTSB	National Transportation Safety Board
NLR	Netherlands Aerospace Centre
FEM	Finite Element Method (Método dos Elementos Finitos)
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
MMV	Método da Máxima Variância
MCWM	Método das Curvas de Wöhler Modificadas
SOC	Método de Socie
MME	Método da Mínima Elipse
FFT	Fast Fourier Transform

# 1 INTRODUÇÃO

## Resumo

O objetivo desse capítulo é introduzir o fenômeno de fadiga a partir de definições regidas por normas técnicas, livros acadêmicos e artigos científicos. Além disso, o capítulo também apresenta duas metodologias inovadoras utilizando o método do plano crítico para estimar a vida de um componente mecânico sob carregamento cíclico.

## 1.1 DEFINIÇÃO DE FADIGA E CARACTERIZAÇÃO DO PROCESSO DE FALHA POR FADIGA

A previsão de vida para componentes mecânicos sujeitos ao fenômeno de fadiga tem evoluído com novos modelos de fadiga para garantir uma confiabilidade e segurança em projetos mecânicos. O fenômeno de fadiga multiaxial está relacionado a efeitos de tensões e deformações em planos preferenciais e no crescimento de trincas durante a vida útil de um determinado componente. Por esse motivo, nos últimos anos, estudos relacionados com fadiga multiaxial têm tido maior prestígio no ramo da mecânica da fratura. Segundo Papadopoulos (2001) [1], é de maior interesse para indústrias a construção de projetos que assegurem uma resistência a fadiga de alto ciclo e, conseqüentemente, uma vida à fadiga finita por volta de milhares ou milhões de ciclos de carregamento.

Tendo em vista isso, avaliar os componentes mecânicos contra a fadiga é um problema complexo que deve ser tratado de forma adequada durante um projeto mecânico a fim de evitar falhas catastróficas. Em uma análise mais detalhada, quando os materiais de engenharia são submetidos a condições de carregamento variável ao longo do tempo, é bem provável que ocorrerá falha devido à fadiga, mesmo sem qualquer deformação plástica significativa que acarretaria na alteração da zona de processo (e isso é verdadeiro, especialmente no regime de fadiga de ciclo médio / alto). Além disso, as geometrias complexas presentes em montagens favorecem o início de trincas por fadiga devido aos efeitos de concentração de tensões decorrentes das características geométricas dos próprios componentes, como é acrescentado por Susmel (2009) [2].

Uma das primeiras utilizações para terminologia *fadiga* foi feita por August Wöhler, um engenheiro alemão que desenvolveu estudos entre 1852 a 1869 com base em investigações sistemáticas de um vasto histórico de acidentes relacionados ao fenômeno de fadiga. Dentre suas grandes descobertas, constatou-se que a magnitude das forças geradas pelos carregamentos cíclicos nos eixos das locomotivas eram menos perceptíveis que as cargas estáticas. Logo, o que poderia está ocasionando as falhas? Outra descoberta realizada por Wöhler desvendou esse mistério, sendo essa considerada uma das mais importantes para Teoria de Falha. Segundo Norton (2013) [3], seus estudos identificavam como causa dessas falhas o número de ciclos na qual o material estava sujeito

a uma tensão variante no tempo e também a existência de uma tensão limite de resistência à fadiga para aços, isto é, um nível de tensão que o material toleraria milhões de ciclos antes do surgimento de trincas. Como cada material suporta um determinado número de ciclos em tensão cíclica, a determinação de uma tensão limite possibilitaria uma prevenção de falha a fim de proporcionar uma maior segurança estrutural e otimização da vida útil de componentes mecânicos.

Mas afinal, o que seria o processo de fadiga? Há diferentes definições em cada referência bibliográfica a respeito desse tema. Por exemplo, segundo Lee (2005) [4], a fadiga é um processo acumulativo de dano em um componente mecânico sob um carregamento cíclico, que consiste na inicialização e propagação da trinca e, por fim, a fratura final de um componente. Porém, grande parte dos acadêmicos e instituições normativas, como a ASM, referenciam uma norma em particular por apresentar uma definição completa, a norma ASTM E1823 [5].

### Norma ASTM E1823

Estabelecida em 1996 por outras normas anteriores, como a ASTM E1150, a norma ASTM E1823 define o termo **fadiga** como um processo de degradação progressivo, localizado e permanente de um material submetido a flutuação de tensões e deformações que pode culminar no surgimento de trincas ou na fratura completa do componente ou estrutura.

Em aspectos micro e macroscópicos, a fadiga é um processo de falha progressivo que envolve a iniciação e propagação de trincas até uma delas atingir o tamanho instável e levar a fratura do material de forma repentina e catastrófica. E como já foi dito, o dano gerado por esse processo de falha é acumulativo, sendo bastante estudado na Teoria de Dano Acumulativo. Com isso, com o intuito de explicar as fases do processo de falha por fadiga, há um consenso de que a fadiga ocorre em três estágios:

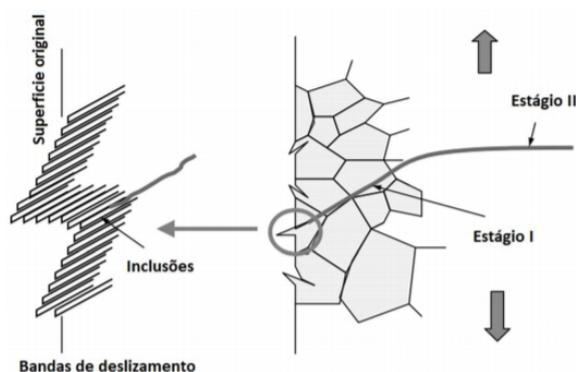


Figura 1.1: Estágio I e II da propagação de trinca.

Fonte: LIMA, 2018 [6].

#### *Estágio I*

Segundo Susmel [2], no primeiro estágio ocorre a *Nucleação ou Iniciação de trinca*. É um estágio relacionado com acúmulo de deformações plásticas devido a presença de tensões cíclica.

Quando o material não é mais capaz de suportar um nível de deformação, micro trincas se formam e propagam por regiões de alta concentração de tensões, geradas devido há formação de bandas de deslizamento persistente (em inglês Persistent Slip Bands, sendo abreviadas por PSBs) nos grãos ou nas imperfeições. Caso a variação da amplitude de tensão seja alta o suficiente, a trinca passa a ser dominante e supera o primeiro contorno de grão em vez de se estagnar no mesmo. Vale lembrar que a formação dos PSBs nos grãos deve ser atribuída ao fato de que, durante o ciclo de carregamento, certos planos atômicos podem deslizar ao longo de direções preferenciais ou direções mais suscetíveis a se deslizarem, resultando também na formação de intrusões e extrusões.

### Estágio II

O segundo estágio ocorre a *Propagação de trincas*, caracterizado pela propagação da trinca a partir de sua ponta, formando macro trincas e deformações plásticas locais na ponta da trinca. As trincas geralmente se propagam de modo estável, perpendicularmente na direção das tensões principais, e a cada pico de tração ( $\sigma_{max}$ ) durante o carregamento cíclico. Por esse motivo, a tensão máxima deve ser maior do que zero, pois isso reflete a ocorrência do modo de falha por tração na qual a carga aplicada tenderá a puxar a trinca para abrir, e assim, aumentar o tamanho a cada ciclo [2]. Além disso, o estágio de propagação tem uma característica única na superfície que são as marcas, cuja identificação torna-se útil por ser um indicativo de falha por fadiga. Dentre esses elementos, temos as estrias características (microscópicas) e as “marcas de praia” e “marcas de rio” (macroscópicas).

### Estágio III

O estágio final ocorre a *Fratura Final*. Neste estágio, as trincas se propagam de maneira instável e atinge-se um tamanho crítico devido aos níveis de tensão presentes, acarretando a falha catastrófica da estrutura.

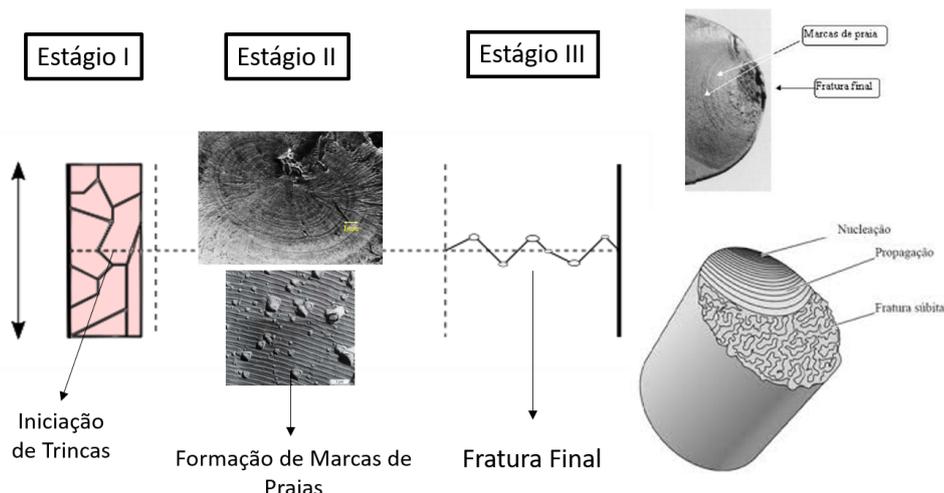


Figura 1.2: Estágios de Propagação da Trinca.

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 1.2 ESTUDO DA ARTE: FADIGA MULTIAXIAL

Segundo a referência bibliográfica [7], a fadiga multiaxial é um termo geral que pode ser usado para descrever um carregamento, associado ou não as condições de geometria, que é responsável por gerar estados complexos de tensões e deformações, tanto local quanto globalmente.

Ao longo dos anos, com o objetivo de compreender o mecanismo de falha por fadiga multiaxial, houve a elaboração de três tipos principais de abordagem: Método do Plano Crítico, Método da Energia dissipada e Modelos Mesoscópicos de Deformação [8]. Os modelos de fadiga multiaxial baseados na abordagem do plano crítico consideram que as trincas, originadas devido a fadiga do material, têm origem em certos planos materiais onde a combinação de tensões ou deformações normais e cisalhantes são extremamente severas. Em 1949, Gough afirmou que todos os mecanismo de engenharia estão submetidos a combinação de tensões de flexão e torção e, por volta de 1970, os modelos passaram a ser desenvolvidos na presença de carregamentos fora de fase, havendo uma preocupação de entender o crescimento e a direção de propagação de trincas. De acordo com a Tabela 1.1, os estudos mais importantes que contribuíram para criação de critérios de fadiga multiaxial utilizando o plano crítico foram:

1955	Sines identificou que a presença de tensões médias de cisalhamento não tem influência na vida à fadiga, diferente da amplitude da tensão cisalhante. Dessa forma, criou-se um modelo restrito para carregamentos proporcionais baseado em tensões equivalentes.
1959	Findley propôs que a tensão normal tem influência linear com a amplitude da tensão de cisalhamento a partir da constante de Findley. Essa combinação de tensões seria responsável pelo dano no material. Além disso, segundo Socie & Marquis (2000) [9], Findley afirma que a tensão cisalhante alternada é responsável majoritariamente pela falha a fadiga, enquanto a tensão normal máxima tem uma menor contribuição.
1977	Matake propôs em seu modelo a determinação de um plano crítico a partir da máxima tensão de cisalhamento e a soma dessa tensão com a tensão normal correspondente. Caso não exceda o limite da resistência a fadiga, o material não irá falhar por fadiga.
1994	McDiarmid propôs um critério baseado na amplitude máxima de tensão de cisalhamento, semelhante ao proposto por Matake. Porém, leva em conta uma constante experimental, que multiplica a máxima tensão normal (em um dado plano crítico) e pode ser definida através de um ensaio de fadiga à torção e de um ensaio estático, de onde se obtém a tensão limite de resistência mecânica do material.
2002	Susmel & Lazzarin propuseram um modelo de fadiga multiaxial, diferente de Findley, no qual estabelece o plano crítico como um plano onde ocorre máxima amplitude da tensão cisalhante dentre todos os candidatos de planos possíveis.
2005	Lagoda & Macha & Nieslong propuseram uma máxima tensão normal equivalente resultante que seria uma combinação da tensão normal e cisalhante no plano crítico.
2008	Papuya aplica ajustes ao modelo de Findley para substituir a tensão normal máxima por uma tensão normal efetiva, em que há um fator de sensibilidade a tensões médias, e a interação entre a tensão normal e cisalhante passa a ser quadrática em vez de linear.

Tabela 1.1: Linha do tempo dos estudos relacionados a fadiga multiaxial.

Fonte: FUMES, F. G. [10], GONÇALVES, C. de A. [8], ZANARDI, V. V. [11], PINHEIRO, P. A. B. [12], FARIA, A. de M. [13]

### 1.3 RELEVÂNCIA DO ESTUDO DA FADIGA MULTIAXIAL PELO MÉTODO DO PLANO CRÍTICO

Estruturas mecânicas sujeitas a carregamentos cíclicos estão frequentemente associadas a estados de tensões multiaxiais, ocasionando, a partir do comportamento oscilatório desses carregamentos, falha do material devido a tensões resultantes. Outro efeito potencializador, relacionado com a geometria do componente em análise, seria a presença de entalhe, já que o estado de tensão nessa região é frequentemente multiaxial e diferente do restante da estrutura.

Em 1999, a *FAA (Federal Aviation Administration)*, uma instituição federal americana com mesmo papel do órgão militar brasileiro CENIPA, divulgou um gráfico em um de seus relatórios, com base em 1226 incidentes graves de trinca/falha durante um período de 21 meses. O resultado, obtido com a colaboração da USAF, concluiu que a fadiga estrutural foi a maior causa de surgimento de trincas nas aeronaves, como pode ser vista na Figura 1.3.

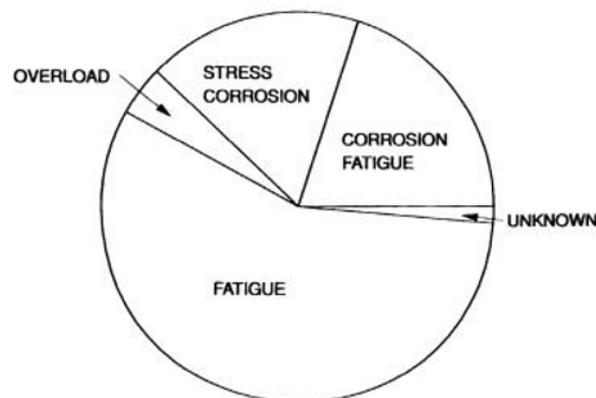


Figura 1.3: Gráfico de Distribuição de Falhas Estruturais.

Fonte: DOT/FAA/AR-99/XX (FAA) [14].

Paralelamente, as instituições aeronáuticas privadas e militares tiveram destaque em pesquisas na área da fadiga multiaxial. Grande parte dessa contribuição foi obtida por meio de financiamento de estudos acadêmicos e desenvolvimento de relatórios técnicos das causas de acidentes por meio de diversos registros. Dentre alguns exemplos com esse tipo de falha por fadiga temos:

**1969** A General Dynamics Corporation começou a produzir um caça bombardeio leve F-111 que possuía asas de geometria variável e seus principais componentes estruturais eram feitos de aço de alta resistência, o que aumentava ainda mais a confiança na robustez dessa aeronave, principalmente em voo supersônico com a capacidade de atingir Mach 2.5. Em 1969, uma aeronave perdeu parte da asa esquerda enquanto realizava um voo de baixo nível e estava carregada com menos da metade da carga limite imposta no projeto. Investigações mostraram falhas na fabricação e montagem dos componentes, sendo que uma delas foi na placa inferior do encaixe do pino de pivotamento da asa esquerda, conforme mostra a Figura 1.4 (WANHILL,2002 [15]). Essa falha tinha se desenvolvido e não foi detectada, apesar do

tamanho considerável: 23,4 mm X 5,9 mm. Após esse acidente, a *United States Air Force* (USAF) investiu em estudos para desenvolvimento de uma nova metodologia a fim de garantir a integridade estrutural de suas aeronaves. Esse trabalho culminou com a edição da norma MIL-ST-83444, em 1974, apresentando a metodologia *Damage Tolerance Analysis* ou *DTA* (Análise de Tolerância ao Dano).

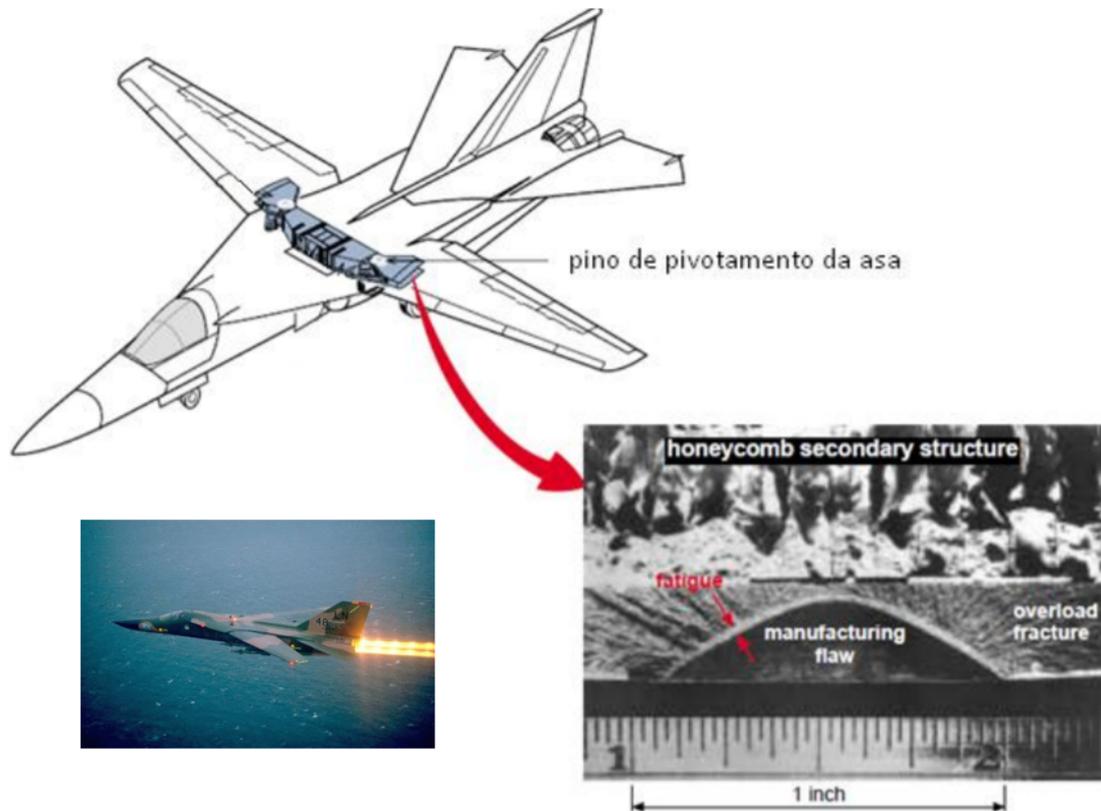


Figura 1.4: Origem da falha do bombardeio militar F-111.

Fonte: Adaptado de WANHILL, 2002 [15].

**1988** Um Boeing 737-297 fazia o voo 243 da companhia Aloha Airlines, nas ilhas havaianas. Ao subir até a altitude de cruzeiro, a aeronave sofreu uma súbita descompressão na cabine de passageiros e perdeu parte de sua fuselagem. Os pilotos conseguiram pousar com segurança no Aeroporto de Kahului e felizmente salvaram todos os noventa passageiros, que estavam presos em seus cintos de segurança, e quatro tripulantes, exceto uma aeromoça. Devido a utilização da aeronave para voos curtos, o avião comercial já tinha acumulado 89.680 ciclos de voo no momento do acidente, sendo que o projeto da aeronave previa uma vida operacional de 75.000 ciclos (WANHILL, 2002 [15]). Logo, as investigações conduzidas pela NTSB e NLR (atualmente Royal NLR) determinaram que a causa do acidente foi a propagação e união de múltiplas trincas que se nuclearam a partir dos furos dos rebites da fuselagem da aeronave, devido a falha no programa de manutenção da inspeção da fuselagem e o limite operacional da aeronave ter sido excedido durante o voo.



Figura 1.5: Acidente do Boeing 737 Aloha.

Fonte: Adaptado de WANHILL, 2002 [15]).

Segundo Koski (2006) [16], em seu trabalho sobre análise estrutural de asas de aeronaves envelhecidas sob ciclos de carregamento operacional, o risco relacionado à fadiga se torna mais agudo e a avaliação de fadiga pode ser exigente devido à complexidade das cargas operacionais, que são estocásticas e variam muito dependendo do tipo de manobra e do componente da aeronave em consideração. Foram instalados extensômetros nas asas das aeronaves de treinamento British Aerospace Hawk Mk.51, pertencentes a Força Aérea Finlandesa (FiAF), durante sua operação nas manobras de combate aéreo e voo por instrumentos, bem como as configurações do armamento e condições de voo em que a aeronave estava sujeita. Em seu artigo algumas conclusões interessantes foram observadas:

1. Pelo FEM, a tensão de cisalhamento era insignificante. Porém, as medições realizadas durante o voo feitas por extensômetros instalados na asa indicaram o contrário, o que comprova que o método por elementos finitos não representou corretamente o comportamento da tensão de cisalhamento na asa da aeronave. Dessa forma, utilizou-se a análise de tensão, pois as deformações não mostraram uma boa correlação com a vida útil da fuselagem.
2. O problema inicialmente foi abordado por uma suposição de estado de tensão uniaxial. Porém, após a obtenção dos resultados, constatou-se que o problema era caracterizado por um estado de tensão multiaxial complexo. Além disso, o número dessas flutuações de carga de “alta frequência” durante um voo é normalmente maior que 10.000 ciclos, o que indica a necessidade de uma abordagem para projeto de fadiga de alto ciclo.
3. Com base nas avaliações de fadiga foi decidido que os níveis de tensão deveriam ser reduzidos a fim de reduzir o risco de falhas futuras. Recomendou-se a substituição dos patches originais por patches compostos, ilustrado na Figura 1.6, pois esse remendo na superfície da asa das aeronaves aliviaria os níveis de tensão na estrutura, reduzindo a propagação da trinca e suportando fissuras de 120 mm.

4. O próprio autor sugere a utilização de modelos para fadiga multiaxial para compreender melhor os mecanismo de falha por fadiga presente nas aeronaves de treinamento.

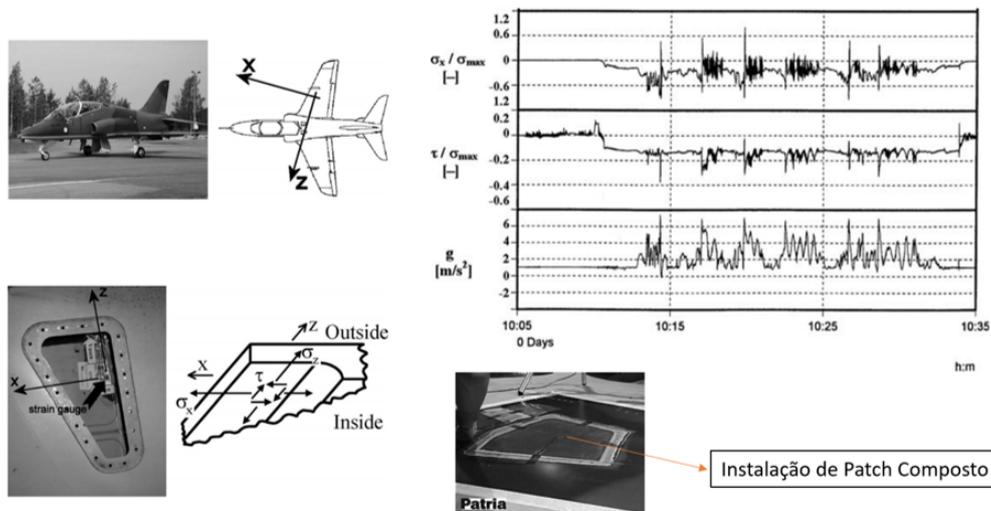


Figura 1.6: Estudo para avaliação e reparo da aeronave de treinamento British Aerospace Hawk Mk.51 sob carregamento de espectro multiaxial complexo.

Fonte: Adaptado de KOSKI, K. [16]

Ilustrado pela Figura 1.7, há possibilidades de aplicação do mesmo estudo para estimar uma vida útil para fuselagem de aeronaves subsônicas e supersônicas e a avaliação estrutural de componentes mecânicos, como junções das pás de turbina/rotor, dos componentes aeronáuticos e até mesmo das junções parafusadas. Inclusive há estudos semelhantes com esforços presentes em trens de pouso e na pressurização e despressurização de uma aeronave. Ambos os casos estão frequentemente sob estados biaxiais ou tri-axiais de tensão que, quando originados por carregamentos dinâmicos, podem levar à iniciação e propagação de trincas de fadiga.

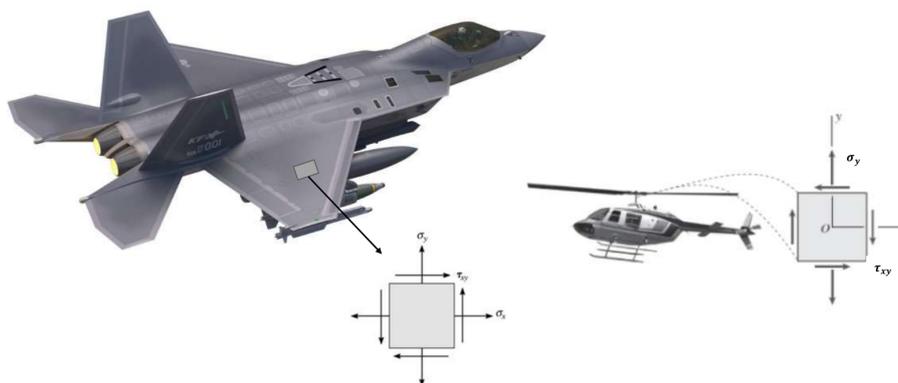


Figura 1.7: Estado Plano de tensões em aeronaves. A esquerda, na fuselagem da aeronave militar e a direita no rotor de um helicóptero civil.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra aplicação seria voltada para tubulações industriais como vasos de pressão, usinas de energia, construção naval, distribuição por óleos e gasodutos, exploração em offshore e também processamento em plantas químicas ou refinarias. Muitos mecanismos e processos podem estar sujeitos a carregamentos ambientais e variações de temperatura, causando deterioração e, em última análise, falha nos tubos industriais de distribuição durante a operação. Em um aspecto mecânico, simplificando o problema com remoção de carregamentos térmicos, a falha está associada aos danos causados pela fadiga do metal, sendo geralmente utilizados como material para tubulações industriais os aços, devido ao fornecimento de todas as propriedades desejadas em um tubo, como por exemplo baixo peso, a flexibilidade, a resistência a altas pressões de até 40 MPa, o amortecimento de vibrações e ruídos e o uso em ambiente de alta temperatura de até 400 °C, segundo as referências [17] e [18].

Em tubulações industriais, há três tipos de cargas atuantes:

- Cargas de serviço: são as cargas originadas pelas forças mecânicas presentes na operação normal do sistema. Compreendem os esforços devido aos pesos (tubo, fluido, acessórios) e a pressão interna da tubulação.
- Cargas ocasionais: são as cargas que atuam em raros intervalos durante a operação do sistema. Compreendem os esforços devido ao vento, as atividades sísmicas, as vibrações transientes e as manobras de válvulas.
- Cargas de expansão: são as cargas originadas do deslocamento da tubulação na expansão ou contração térmica do sistema, tensões de montagem, etc.

Em um projeto de tubulações industriais, a maior preocupação é na análise estática de concentradores de tensões entre suportes, derivações e tubo tronco, que geralmente pode ser resolvido pela utilização de fatores de segurança de acordo com as normas específicas consultadas nas fases de projetos. Dessa forma, é raro avaliar o comportamento dinâmico das tubulações industriais, o que, em situações de sobrecarga, pode ocasionar falhas por fadiga. Assumindo diferentes configurações de padrões de escoamento presentes em escoamentos transientes monofásicos e principalmente escoamentos multifásicos, o problema de engenharia pode apresentar um comportamento de carregamento ambiental, apresentando uma banda estreita.

No caso de vibrações excessivas resultantes da variação da quantidade de movimento, que é parâmetro representativo em função do ângulo de mudança de direção do escoamento, pressão, velocidade de escoamento e diâmetro hidráulico e diferentes densidades no caso de diversas fases de líquido, gás ou ambos presentes, os efeitos de vibrações podem ser altamente prejudiciais, acarretando na abreviação da vida útil. Além disso, manobras de válvulas, como fechamento rápido de válvula, também podem resultar transientes hidráulicos, que são fenômenos de distúrbio devido as alterações repentinas no escoamento que podem resultar em sérios danos ao sistema. Um exemplo clássico são os golpes de aríete, responsáveis por causar vibrações excessivas que se propagam ao longo da estrutura hidráulica.

Em uma análise de tensões em tubulações industriais, as tensões normais em x e y são provocadas pela pressão hidrostática, momento fletor devido ao peso e expansão/contração térmica, enquanto as tensões cisalhantes são causadas por cargas ocasionais e tensões de montagem. Dessa forma, o estado de tensão pode ser representado como um estado multiaxial de tensões, ilustrado pela Figura 1.8.

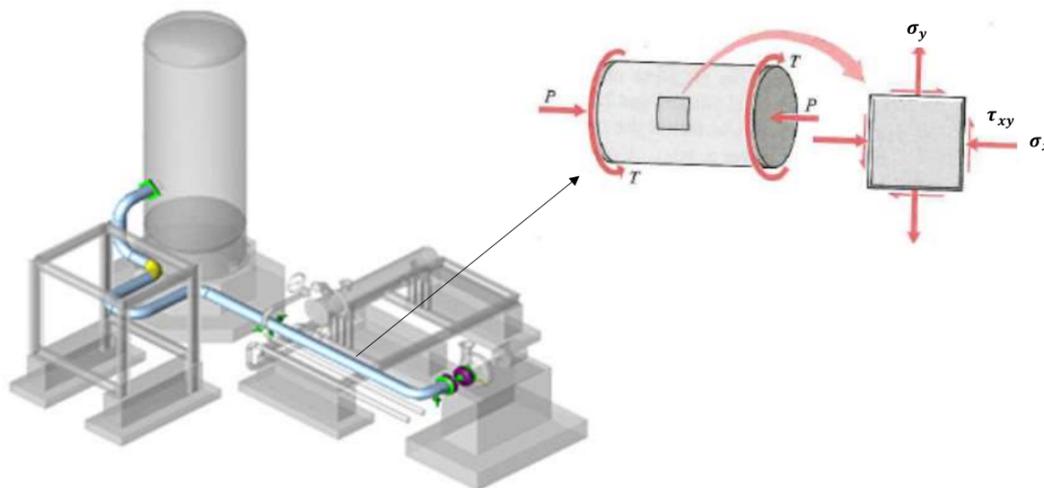


Figura 1.8: Estudo de caso de fadiga multiaxial em tubulações de uma refinaria.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O estudo de Brevis & Boxall (2014) [18], contando com a participação de Susmel e seu modelo de fadiga multiaxial, tem como objetivo formalizar uma nova metodologia adequada para estimar o número de ciclos necessários para que uma trinca se forme baseando-se no modelo de Susmel, também conhecido como Método das Curvas de Wöhler Modificadas. Assim, pode ser aplicado para estimar os danos por fadiga de tubulações de água independentemente do grau de multiaxialidade e não proporcionalidade do histórico de carga.

Outro aspecto que torna o modelo de fadiga multiaxial adequado para o problema de tubulações industriais seria a capacidade de consideração de eventos transientes como a pressão operacional interna, relacionada com as mudanças operacionais (controle e demanda) e cargas hidráulicas devido ao escoamento do fluido. Os efeitos combinados do histórico de carregamento de eventos variáveis ao longo do tempo e quase estáticos como peso do solo sob a tubulação e da própria tubulação, cargas de dilatações e variações térmicas resultantes entre a temperatura do solo e da água, apresentam um comportamento estocásticos devido às complexidades e incertezas dos fatores de interação que afetam a vida útil de um tubo individual. Ainda segundo os autores, o modelo seria uma ferramenta poderosa para gerenciar a manutenção e o investimento na distribuição de água, além de estimar uma vida útil em serviço e potencialmente fornecer novos insights valiosos sobre as condições de carregamento mais prejudiciais. Além disso, tal modelo permitiu a inclusão da taxa de crescimento da corrosão na parte interna dos tubos, adequando-o a condições mais realistas.

## 1.4 OBJETIVOS GERAIS

Os modelos de fadiga multiaxial baseados na abordagem do plano crítico consideram que as trincas, originadas devido a fadiga do material, têm origem em certos planos materiais onde a combinação de tensões ou deformações normais e cisalhantes são extremamente severas. Dentre as vantagens sobre utilização desse tipo de abordagem, temos:

1. Segundo o capítulo *On the Definition of Planes of Maximum Shear Strain* da ASTM STP 853 [19], o plano crítico da máxima tensão de cisalhamento são muito mais fáceis de se determinar do que os planos críticos da máxima deformação por cisalhamento. O autor propõe que o plano crítico da máxima tensão cisalhamento seja usado até que seja constatado que há outros planos críticos com maior dano ao material identificados pela máxima deformação por cisalhamento.
2. As metodologias de plano crítico por tensão apresentam em geral um baixo custo computacional mesmo com um elevado tempo de observação e podem ser implementadas em um notebook pessoal.
3. Permite uma acoplagem de outros tipos de análise como corrosão, fator de entalhe, fatores térmicos e efeitos associados a vibrações mecânicas.

Baseado em estudos modernos de carregamento cíclico com amplitude variável, o objetivo desse trabalho é apresentar uma análise comparativa entre dois modelos de fadiga multiaxial:

- **Metodologia proposta por Lagoda:** consiste na análise do histórico de carregamento no domínio do tempo e análise espectral no domínio da frequência com o intuito de comparar os planos críticos e obter a tensão normal equivalente e a função densidade espectral de potência equivalente. Além disso, conta também com a aplicação do método de contagem de ciclos como Rainflow para domínio do tempo e, utilizando os parâmetros espectrais, o método espectral e método espectral com correção de Wirsching and Light para domínio da frequência. A força motriz que induz o processo de falha para o domínio do tempo e da frequência são respectivamente a tensão normal equivalente e função densidade espectral de potência equivalente, como é apresentado nas referências [20] e [21].

Enfoques	Tempo	Frequência
Orientação	$\phi$ e $\theta$	$\phi$ e $\theta$
Método da Máxima Variância (MMV)	$\sigma_{eq}$	$G_{eq}$
Acúmulo de Dano	Rainflow e Regra de Palmgren-Miner	Método Espectral

Tabela 1.2: Enfoques utilizados pela metodologia proposta por Lagoda.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

- **Metodologia proposta por Susmel:** consiste de uma reformulação do Método de Máxima Variância (MMV) para torná-lo adequado em avaliações de fadiga multiaxial por pós-processamento numérico de históricos de carregamento tão complexos quanto aqueles que danificam componentes mecânicos reais, conforme é mostrado nas referências [22] e [23]. A metodologia apresenta uma adição de um terceiro ângulo de orientação para um vetor genérico  $\mathbf{q}$ , seguindo a nomenclatura de Taylor, e a força motriz que induz a falha por fadiga é a tensão de cisalhamento. O método de contagem de ciclos é mantido, utilizando novamente o método Rainflow e Regra de Miner. Os resultados serão comparados com modelo no domínio do tempo e previsão de vida contra falha proposta por Lagoda.

Enfoques	Tempo
Orientação	$\phi, \theta$ e $\alpha$
Método da Máxima Variância (MMV)	$\tau_q$
Acúmulo de Dano	Rainflow, Método das Curvas de Wöhler Modificadas e Regra de Palmgren-Miner

Tabela 1.3: Enfoques utilizados pela metodologia proposta por Susmel.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

### Resumo

O objetivo desse capítulo é familiarizar o leitor com alguns conceitos básicos e avançados de resistência dos materiais, estatística para processos estocásticos, análise espectral a partir do sinal no domínio da frequência, geração de um sinal no tempo, método rainflow para a contagem de ciclo e acúmulo de dano. Com esse conhecimento adquirido, as duas metodologias de fadiga multiaxial podem ser executadas com teoria apresentada nesse capítulo.

### 2.1 ESTADO DE TENSÃO

#### 2.1.1 Vetor tensão

Considere um corpo sólido  $\Omega$  sujeito a uma carga cíclica. Há um ponto material  $O$  pertencente a um plano material genérico  $\Delta$  da superfície do corpo, que é dado como a origem do vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , segundo Cauchy. Partindo do Teorema de Cauchy, o vetor tensão  $\mathbf{t}$  depende do vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ , que é perpendicular a um plano material. A Figura 2.1 mostra o vetor normal sendo ortogonal ao plano material e orientado por coordenadas polares,  $\theta$  e  $\phi$ .

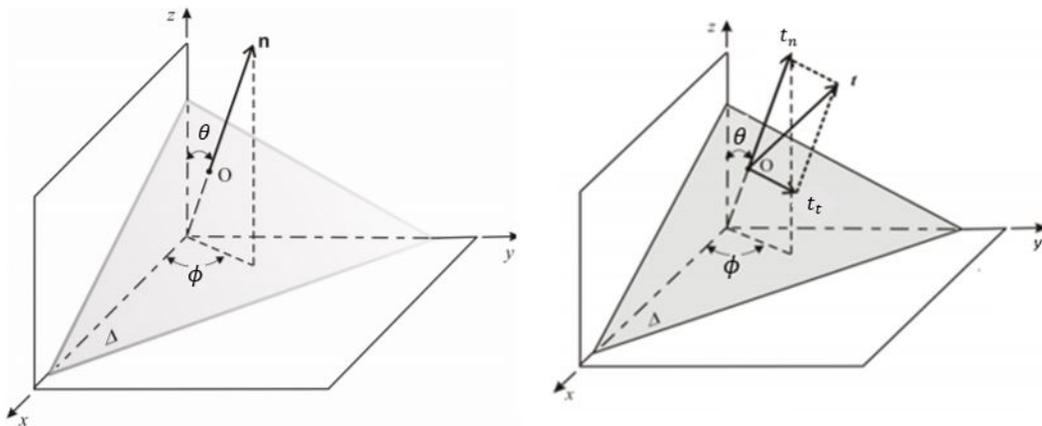


Figura 2.1: Vetor tensão  $\mathbf{t}$  atuando sobre um plano com vetor unitário normal  $\mathbf{n}$ .

Fonte: DANTAS, A.P. (2009) [24].

Dessa forma, segundo o Teorema de Cauchy, o vetor tensão  $\mathbf{t}$  é o produto tensor-vetor do tensor de tensões e o vetor unitário normal ao plano material  $\Delta$ , de acordo com a Equação 2.1:

$$\mathbf{t} = \bar{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.1)$$

Por convenção, para demonstrar as tensões normais e tangenciais do vetor tensão, como é visto na Figura 2.1, o vetor tensão  $\mathbf{t}$  é definido como o somatório da tensão cisalhante  $\mathbf{t}_t$  e do vetor tensão normal ao plano  $\mathbf{t}_n$ , utilizando a regra do paralelogramo:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_t \quad (2.2)$$

O vetor tensão normal  $\mathbf{t}_n$  é a projeção normal do vetor tensão  $\mathbf{t}$ , sendo calculado pela Equação 2.3:

$$\mathbf{t}_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (2.3)$$

Enquanto o vetor tensão cisalhante  $\mathbf{t}_t$  é determinada reorganizando a Equação 2.2 da seguinte forma:

$$\mathbf{t}_t = \mathbf{t} - \mathbf{t}_n = (\bar{\sigma} \mathbf{n}) - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (2.4)$$

Vale ressaltar na Equação 2.3 que o produto escalar  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$  resulta em uma grandeza escalar que representa a tensão média relativa ao plano material, chamada de tensão média normal  $\sigma_n$ . Logo, temos:

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad (2.5)$$

Dessa maneira, a Equação 2.3 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{t}_n = \sigma_n \mathbf{n} \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Estado plano de tensão

O estado de tensão de um pequeno volume de material pertencente a um corpo material é descrito usando nove tensões e três planos ortogonais. A Figura 2.2 representa uma matriz em elemento infinitesimal a partir de três normais e três tensões de cisalhamento:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$  no sistema de coordenadas X-Y-Z.

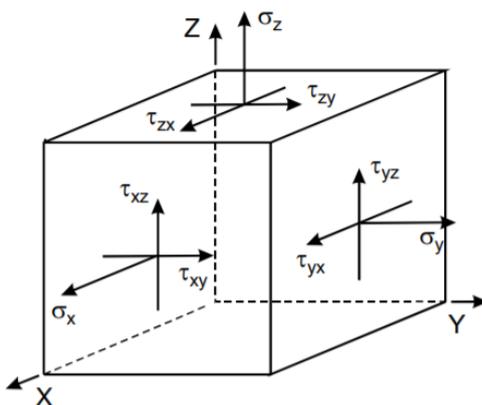


Figura 2.2: Estado Geral de Tensão.

Fonte: MARQUIS; SOCIE, 2003 [9].

O tensor de tensões  $\bar{\sigma}$  da Equação 2.1 é o *Tensor Tensão de Cauchy*, definido como um tensor de segunda ordem e que, caso o mesmo seja conhecido, é capaz de representar totalmente o estado de tensão tridimensional em um ponto material no componente. Esse tensor é representado conforme a 2.7 e cada componente é relacionada com um tipo de tensão:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Onde as componentes com  $i = j$ , localizadas na diagonal principal do tensor, representam as tensões normais,  $\sigma_{ii}$ , enquanto para  $i \neq j$ , as componentes representam as tensões cisalhantes,  $\tau_{ij}$ .

Quando um corpo material é solicitado por esforços axiais e torçores, esse corpo está sujeito a carregamentos, que por sua vez, variam em relação ao tempo, amplitude e frequência, de forma aleatória na maioria dos casos. Neste caso, o tensor passa a ser em função do tempo e dado pela seguinte maneira:

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Dessa maneira, a tensão média normal, dada Equação 2.3 e expandida na forma matricial sobre o Teorema de Cauchy, será reescrita pela expressão 2.9:

$$\sigma_n(t) = \mathbf{n}^T \bar{\sigma}(t) \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Onde o vetor normal é dado pelas três direções ortogonais aos plano xz, yz e xy:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Uma vez conhecidas as nove componentes do tensor de tensões ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zy}$ ), pode-se determinar o vetor tensão atuando sobre qualquer plano que passa pelo ponto. Devido a condição de equilíbrio dos momentos resultantes das forças de cada componente do tensor na Equação 2.8, para efeitos de tensões, tanto material isotrópico quanto anisotrópico terão as componentes pares iguais, o que torna o tensor simétrico:

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (2.11)$$

Considerando que o tensor na Equação 2.11 expressa um tensor simétrico, a aplicação da *Notação de Voigt* permite reduzir a ordem de tensores simétricos para apenas seis componentes de tensão.

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \implies \bar{\sigma}(t)^{NOT.VOIGT} = \boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) \\ \sigma_{yy}(t) \\ \sigma_{zz}(t) \\ \sigma_{xy}(t) \\ \sigma_{xz}(t) \\ \sigma_{yz}(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

## 2.2 CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

### 2.2.1 Conceitos preliminares

Embora uma distribuição de probabilidade seja capaz de descrever uma variável aleatória, há outra forma mais aprimorada de descrevê-la por meio de estimadores de parâmetros amostrais, conhecidos como momentos. Suponha que um único registro amostral  $x(t)$  pertencente a um processo estacionária aleatório  $X$  que exista ao longo de um tempo finito, representado pelo período  $T$ . O valor médio é o primeiro momento de um variável aleatória, conhecido como momento centrado na média. Esse parâmetro indica a tendência central, ou seja, a média de todos os valores possíveis da variável aleatória  $X$  e é determinado pela Equação 2.13:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (2.13)$$

De acordo com a referência bibliográfica [25], o valor eficaz é dado pelo valor médio quadrático de  $x(t)$ , que corresponde a um momento de segundo ordem centrado na média. É estimado pela média de uma variável ao longo de um intervalo de tempo finito  $T$  e é calculado a partir da Equação 2.14:

$$\psi_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (2.14)$$

Dessa forma, o valor RMS (*Root Mean Square*) será dado pela raiz quadrada positiva de  $\psi_x^2$ :

$$RMS = \psi_x = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (2.15)$$

Por outro lado, além do valor médio, há o segundo momento de uma variável aleatória, chamada de variância. Esse estimador mede a dispersão ou propagação da variável aleatória  $X$  sobre seu valor médio. Sua definição mantém uma definição geral de momentos centrais, como pode ser visto na Equação 2.16:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \hat{\mu}_x)^2 dt \quad (2.16)$$

Com isso, o desvio-padrão é dado pela raiz quadrada da variância.

$$\sqrt{\hat{\sigma}_x^2} = \hat{\sigma}_x \quad (2.17)$$

Outro parâmetro estatístico é o coeficiente de correlação, que é responsável por medir o grau de interdependência de duas variáveis aleatórias contínuas  $X$  e  $Y$  dependentes entre si.

$$r_{XY} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}} = \frac{cov(X, Y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} \quad (2.18)$$

Sendo que a covariância  $cov(X, Y)$  é uma medida estatística simples de interdependência entre duas variáveis que estão correlacionadas com objetivo de verificar se variam conjuntamente e proporcionalmente. Caso a covariância seja nula, trata-se de um indicativo de que há uma independência entre as variáveis em análise.

**Prova (2.1)** *Obtenção de uma relação entre variância e o valor RMS:*

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\psi}_x^2 - \hat{\mu}_x^2$$

$$\begin{aligned} var(x) &= \hat{\sigma}_x^2 \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \hat{\mu}_x)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (x^2(t) - 2x(t)\hat{\mu}_x + \hat{\mu}_x^2) dt \end{aligned}$$

Como  $\hat{\mu}_x = cte$ , então:

$$= \left( \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \right) - 2\hat{\mu}_x \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right) + \hat{\mu}_x^2$$

Substituindo pela 2.13 e 2.14:

$$= \hat{\psi}_x^2 - \hat{\mu}_x^2$$

Considerando uma distribuição gaussiana de média nula, o valor RMS ( $\hat{\psi}_x$ ) coincide com o desvio-padrão ( $\hat{\sigma}_x$ ) ao tirar a raiz quadrada de ambos os lados:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\psi}_x^2 \implies \hat{\sigma}_x = \hat{\psi}_x$$

Por fim, temos a relação entre valor RMS e desvio-padrão:

$$\hat{\psi}_x = \hat{\sigma}_x = \left( \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \hat{\mu}_x)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Prova (2.2)** *Suponha duas combinação lineares de mesma ordem, denominadas S e T:*

$$S = \mathbf{a} \cdot \mathbf{X} = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=0}^n a_ix_i$$

$$T = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Y} = b_0 + b_1y_1 + \dots + b_ny_n = \sum_{j=0}^n b_jy_j$$

*De forma semelhante, o valor esperado das combinações lineares podem ser dados pelas seguintes expressões:*

$$E(S) = E\left(\sum_{i=0}^n a_ix_i\right) = a_0 + a_1E(x_1) + \dots + a_nE(x_n)$$

$$= a_0 + a_1\hat{\mu}_{x_1} + \dots + a_n\hat{\mu}_{x_n}$$

$$E(T) = E\left(\sum_{j=0}^n b_jy_j\right) = b_0 + b_1E(y_1) + \dots + b_nE(y_n)$$

$$= b_0 + b_1\hat{\mu}_{y_1} + \dots + b_n\hat{\mu}_{y_n}$$

*Observe que o valor esperado da diferença entre a combinação linear S e o valor esperado do mesmo pode ser deduzido pela seguinte maneira:*

$$E(S - E(S)) = E\left(\sum_{i=0}^n a_ix_i - E\left(\sum_{i=0}^n a_ix_i\right)\right)$$

*Considere a propriedade  $E(\sum_{i=0}^n cX) = \sum_{i=0}^n cE(X)$ :*

$$= E\left(\sum_{i=0}^n a_ix_i - \sum_{i=0}^n a_iE(x_i)\right)$$

*Se  $E(x_i) = \hat{\mu}_{x_i}$ :*

$$= E\left(\sum_{i=0}^n a_ix_i - \sum_{i=0}^n a_i\hat{\mu}_{x_i}\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=0}^n (a_ix_i - a_i\hat{\mu}_{x_i})\right)$$

*Pela propriedade  $E(\sum_{i=0}^n cX) = \sum_{i=0}^n cE(X)$ :*

$$= \sum_{i=0}^n E(a_i(x_i - \hat{\mu}_{x_i}))$$

*Pela propriedade  $E(cX) = cE(X)$ :*

$$= \sum_{i=0}^n a_iE(x_i - \hat{\mu}_{x_i})$$

*Analogamente, também se obtém da mesma forma para a combinação linear T:*

$$E(T - E(T)) = \sum_{j=0}^n b_j E(y_j - \hat{\mu}_{y_j})$$

A covariância de duas combinações lineares pode ser demonstrada pela seguinte forma:

$$\text{cov}(S, T) = E[(S - E(S))(T - E(T))]$$

Como  $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ , então:

$$\begin{aligned} &= E(S - E(S)) \cdot E(T - E(T)) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i E(x_i - \hat{\mu}_{x_i}) \cdot \sum_{j=0}^n b_j E(y_j - \hat{\mu}_{y_j}) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j E(x_i - \hat{\mu}_{x_i}) E(y_j - \hat{\mu}_{y_j}) \end{aligned}$$

Como a covariância é definida por  $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$  :

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j \text{cov}(x_i, y_j)$$

Portanto, a covariância dos registros amostrais pode ser dado pela seguinte forma análoga:

$$\text{cov}(x_i, y_j) = E[(x_i - E(x_i))(y_j - E(y_j))]$$

Se  $E(x_i) = \hat{\mu}_{x_i}$  :

$$= E[(x_i - \hat{\mu}_{x_i})(y_j - \hat{\mu}_{y_j})]$$

**Prova (2.3)** A variância de uma combinação linear pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{var}(S) &= \text{var} \left( \sum_{i=0}^n a_i x_i \right) \\ &= E \left[ \left( \sum_{i=0}^n a_i (x_i - E(x_i)) \right)^2 \right] = E \left[ \left( \sum_{i=0}^n a_i (x_i - E(x_i)) \right) \left( \sum_{j=0}^n a_j (x_j - E(x_j)) \right) \right] \end{aligned}$$

Como  $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ , então:

$$= E \left[ \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j (x_i - E(x_i))(x_j - E(x_j)) \right) \right]$$

Se  $E(\sum_{i=0}^n cX) = \sum_{i=0}^n cE(X)$  :

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j E[(x_i - E(x_i))(x_j - E(x_j))] \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \text{cov}(x_i, y_j) \end{aligned}$$

## 2.2.2 Correlação e Autocorrelação

Como foi visto anteriormente, a principal medida de interdependência entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é dada pelo momento cruzado entre duas variáveis, denominado correlação. A correlação entre  $X$  e  $Y$  e o coeficiente de correlação são denotados da seguinte maneira:

$$R_{XY} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \quad (2.19)$$

$$r_{XY} = \frac{R_{XY}}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} \quad (2.20)$$

A autocorrelação é a medida de correlação que um processo estocástico tem com ele mesmo em momentos de ordem diferentes. A autocorrelação avalia o quanto a ocorrência de um fenômeno estatístico em um determinado instante de tempo  $t$  influencia o seu acontecimento durante um instante de tempo futuro  $t + \Delta t$ . Em outras palavras, é avaliado o quanto um processo estocástico é capaz de influenciar o restante do processo. Além disso, a autocorrelação não depende do instante em que ocorre o evento, mas sim do intervalo de tempo entre as duas ocorrências, entre a do instante inicial  $t$  e o instante futuro  $t + \Delta t$ .

A autocorrelação e o coeficiente de autocorrelação são representado da seguinte forma:

$$R_{XX} = E[(X(t) - \mu_x)(X(t + \Delta t) - \mu_x)] \quad (2.21)$$

$$r_{XX} = \frac{R_{XX}}{\text{var}(X)} \quad (2.22)$$

## 2.2.3 Processos estocásticos

Com base na referência bibliográfica [26], uma série temporal é dita estacionária quando seus estimadores estatísticas (como média, variância, autocorrelação,...) são constantes ao longo do tempo, ou seja, em particular, se um processo é estritamente estacionário significa que todas as distribuições unidimensionais são invariantes ao longo do tempo.

Séries estacionárias são séries que se desenvolvem aleatoriamente, em torno de uma média constante, refletindo de alguma forma um equilíbrio estatístico estável. Considere todos os valores observados em um experimento como resultados de variáveis aleatórias observadas em determinadas orientações ou locais. Se cada uma das componentes formadas por uma respectiva série temporal são processos estacionários unidimensionais, então o conjunto das séries temporais é um processo vetorial estacionário.

$$p_{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = p_{t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, t_3 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2.23)$$

Seja  $\mathbf{X}(t)$  seja um vetor estacionário  $n$ -dimensional:

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_n(t)] \quad \text{onde} \quad \mathbf{X}(t) = X_k(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.24)$$

Cada componente desse processo representa um processo estocástico unidimensional  $X_k$  contendo seus registros amostrais  $x_k$  ao longo de intervalo de tempo. Os registros amostrais são as amplitudes do processo aleatório unidimensional.

Considere um processo estocástico, como ilustrado na Figura 2.3:

$$\mathbf{X}(t) = \left[ \sum_{k=0}^n X_k(t), t \in T \right] \quad (2.25)$$

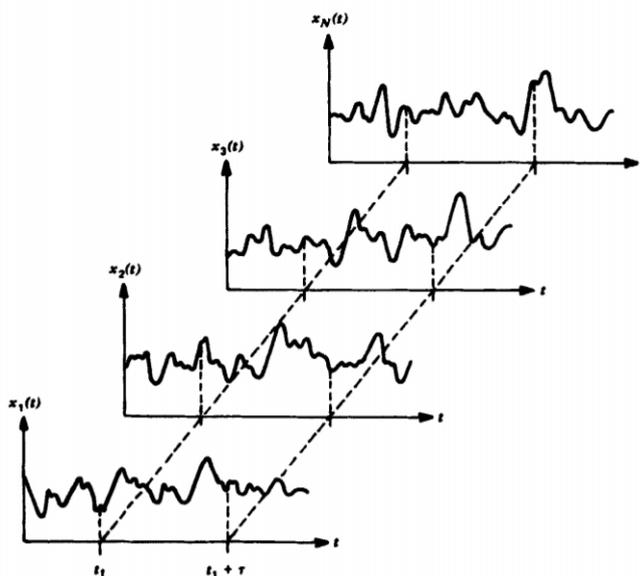


Figura 2.3: Conjunto de registros amostrais ao longo do tempo de cada processo estocástico unidimensional.

Fonte: BENDAT & PIERSOL (2012) [25].

Levando em conta o que foi abordado anteriormente, há três critérios classificadores para que um processo aleatório seja estacionário:

- $E(\mathbf{X}(t)) = \boldsymbol{\mu}_X$  ao longo de todo o período  $T$ .

$$E(\mathbf{X}(t)) = \begin{bmatrix} E(X_1(t)) \\ E(X_2(t)) \\ E(X_3(t)) \\ \vdots \\ E(X_n(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}_X \quad (2.26)$$

- O valor eficaz deve ser um número finito:  $E(\mathbf{X}^2(t)) < \infty$
- Todos os elementos da correlação dependem unicamente da discretização temporal  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Ou seja:

$$R(t_1, t_2) = R(t_1, t_1 + \Delta t) = R(\Delta t) \quad \text{ou} \quad E(X(t + \Delta t)X(t)) = R_{XX}(\Delta t) \quad (2.27)$$

Um processo estacionário multidimensional é chamado de ergótico se todas as suas componentes tiverem propriedades estatísticas iguais. Para um processo ergótico, a média e a função autocorrelação para uma componente unidimensional  $X_k(t)$  qualquer deve ser igual a média e a função de autocorrelação do vetor do processo aleatório  $\mathbf{X}(t)$ .

#### 2.2.4 Estimativa de Funções Multivariáveis usando Expansão por Série de Taylor

Suponha um processo estocástico  $\mathbf{X}(t)$ , dado pela 2.24, que pode ser descrito por meio da estimativa da média e variância:

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)] \quad \text{tal que:} \quad X_k \sim (\hat{\mu}_{X_k}, \hat{\sigma}_{X_k}) \quad (2.28)$$

Onde os valores médios de cada processo estocástico unidimensional  $X_k$  podem ser representados da seguinte forma:

$$\mu_{\mathbf{X}(t)} = \mathbf{X}^0 = [X_1^0(t), \dots, X_n^0(t)] \quad (2.29)$$

Considerando uma função multivariável  $Z$ , que possa representar uma tensão resolvida em uma determinada direção por exemplo, a técnica de linearização de Taylor permite estimar os momentos de primeira e segunda ordem sem a necessidade de conhecer a distribuição de probabilidade de  $Z$ .

$$Z(t) = g(\mathbf{X}(t)) = g(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \quad (2.30)$$

Expandindo  $Z = g(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$  em série de Taylor, em torno dos valores médios de  $X_k$ .

$$g(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \cdot \left( \sum_k \Delta X_k^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right)^n g(\mathbf{X}^0) \quad (2.31)$$

Onde  $\Delta X_k^0 = X_k - X_k^0$  e o  $n!$  representa o fatorial da ordem da derivada com a expansão da série de Taylor tendo apenas termos lineares ( $n! = 1! = 1$ ), o que fará a equação 2.31 ter a seguinte forma:

$$g(\mathbf{X}) \approx g(\mathbf{X}^0) + \left( \sum_k \Delta X_k^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) \quad (2.32)$$

Aplicando o operador expectativa a função  $g(\mathbf{X})$  podemos estimar a média de  $Z$  utilizando a Equação 2.34:

$$E[g(\mathbf{X})] \approx E \left[ g(\mathbf{X}^0) + \left( \sum_k \Delta X_k^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) \right] \quad (2.33)$$

$$\approx E [g(\mathbf{X}^0)] + E \left( \sum_k \Delta X_k^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) \quad (2.34)$$

Como os termos das derivadas parciais  $\frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0)$  são constantes, como podem ser visto no Tópico I.3 do Apêndice, a equação 2.34 tomará a seguinte forma:

$$E[g(\mathbf{X})] \approx E[g(\mathbf{X}^0)] + \left( \sum_k E[\Delta X_k^0] \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) \quad (2.35)$$

Quanto a expectância de  $\Delta x_i^0$  verifica-se:

$$E[\Delta X_k^0] = E[X_k - X_k^0] = E[X_k] - \cancel{E[X_k^0]} = X_k^0 \quad (2.36)$$

Como a média de cada processo estocástico unidirecional é nula, então a expectância de  $\Delta x_i^0$  e  $E[g(\mathbf{X})]$  será em primeira aproximação:

$$E[\Delta X_k^0] = X_k^0 = 0 \quad (2.37)$$

$$E[g(\mathbf{X})] = g(\mathbf{X}^0) \quad (2.38)$$

Quanto a aproximação para a variância de  $g(\mathbf{X})$  pela definição pode ser estimada de acordo com a Equação 2.39:

$$VAR[g(\mathbf{X})] \approx E[(g(\mathbf{X}) - E[g(\mathbf{X})])^2] \quad (2.39)$$

$$VAR[g(\mathbf{X})] \approx E \left[ \left( g(\mathbf{X}^0) + \left( \sum_k \Delta X_k^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) - E[g(\mathbf{X})] \right)^2 \right] \quad (2.40)$$

Como  $E[g(\mathbf{X})] = g(\mathbf{X}^0)$ :

$$VAR[g(\mathbf{X})] \approx E \left[ \left( g(\mathbf{X}^0) + \left( \sum_i \Delta X_k^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) - \cancel{E[g(\mathbf{X})]} \right)^2 \right] \quad (2.41)$$

$$VAR[g(\mathbf{X})] \approx E \left[ \left( \left( \sum_i \Delta X_k^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) \right)^2 \right] \quad (2.42)$$

Dessa forma, a expressão da variância de  $Z$  será representada de forma completa pela Equação 2.43:

$$\begin{aligned} VAR[g(\mathbf{X})] &\approx E \left[ \sum_k \sum_l \Delta X_k^0 \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_k} \right) g(\mathbf{X}^0) \cdot \Delta X_l^0 \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_l} \right) g(\mathbf{X}^0) \right] \\ &\approx E \left[ \sum_{k=l} (\Delta X_k^0)^2 \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 + \sum_{k \neq l} \left( \Delta X_k^0 \Delta X_l^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \cdot \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\approx \sum_{k=l} E \left[ (\Delta X_k^0) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 \right] + \sum_{k \neq l} E \left[ \left( \Delta X_k^0 \Delta X_l^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \cdot \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) \right] \quad (2.43)$$

Analisando cada termo a direita da igualdade da Equação 2.43:

$$\sum_{k=l} E \left[ (\Delta X_k^0) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 \right] = \sum_{k=l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 E [(\Delta X_k^0)^2] \quad (2.44)$$

$$= \sum_{k=l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 \cdot Var(X_k) \quad (2.45)$$

Analogamente o termo a esquerda da igualdade da Equação 2.43:

$$\sum_{k \neq l} E \left[ \left( \Delta X_k^0 \Delta X_l^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \cdot \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) \right] = \sum_{k \neq l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) E [\Delta X_k^0 \Delta X_l^0] \quad (2.46)$$

$$\sum_{k \neq l} E \left[ \left( \Delta X_k^0 \Delta X_l^0 \cdot \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \cdot \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) \right] = \sum_{k \neq l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) \cdot Cov[X_k^0, X_l^0] \quad (2.47)$$

Como as expectâncias  $E[(\Delta X_k^0)^2]$  e  $E[\Delta X_k^0 \Delta X_l^0]$  representam, respectivamente as variâncias e as covariâncias entre as variáveis aleatório do processo estocástico  $\mathbf{X}(t)$ ,  $X_k$  e  $X_l$ , a variância da função  $g(\mathbf{X})$  poderá ser aproximada pela seguinte expressão:

$$VAR [g(\mathbf{X})] \approx \sum_{k=l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 \cdot Var(X_k) + \sum_{k \neq l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) \cdot Cov[X_k^0, X_l^0] \quad (2.48)$$

Como é observado no Tópico I.3 do Apêndice, utilizando o Método de Máxima Variância, a obtenção da variância da tensão normal equivalente no plano ou da tensão de cisalhamento resolvida ao longo a direção  $m$  podem ser estimadas da seguinte forma:

$$Var[\sigma_n(t)] = \mathbf{a}[C]\mathbf{a}^T \quad (\text{em função do vetor normal } \mathbf{n}) \quad (2.49)$$

$$Var[\tau_q] = \mathbf{d}^T [C] \mathbf{d} \quad (\text{em função do vetor normal } \mathbf{n} \text{ e } \mathbf{q}) \quad (2.50)$$

Onde  $[C]$  representa a matriz da covariância e  $\mathbf{d}$  o vetor de coeficientes. Porém as formas de se obter o vetor de coeficientes depende do critério de falha por fadiga multiaxial adotado para o problema de engenharia.

Nos próximos capítulos serão abordados esses vetores pelo Método da Máxima Variância. Além disso, o vetor  $d$  é chamado também de vetor de cossenos diretores porque são vetores com cossenos dos ângulos que orientam o plano material e formam um vetor na direção de interesse com base no sistema de coordenadas estabelecido.

## 2.3 CONCEITOS DE ANÁLISE ESPECTRAL

### 2.3.1 Transformada de Fourier

Uma função é dita periódica se existe um número real positivo  $P$ , chamado de período da frequência, tal que a seguinte condição seja atendida:

$$f(t) = f(t + \Delta t) \quad (2.51)$$

Caso a condição de periodicidade não seja atendida, a função é chamada de aperiódica. Quando uma função  $f(t) : R \rightarrow R$  não é periódica, é impossível escrevê-la como combinação linear de uma família de senos e cossenos harmonicamente relacionados, ou seja, não é possível expressar na forma de séries de Fourier. Porém, muitas vezes é possível escrevê-la como combinação linear de todos os senos e cossenos que existem, utilizando todas as frequências  $\omega \rightarrow R$  disponíveis. No caso de uma função aperiódica, um dos métodos mais empregados para obtenção de informações do sistema no domínio da frequência é a Transformada de Fourier.

A transformada de Fourier é uma representação de funções definidas sobre um intervalo infinito e sem periodicidade em termos de funções senoidais sobrepostas. Considere um sinal ao longo do tempo,  $x(t)$ . Para analisar o sinal no domínio da frequência, aplica-se a transformada de Fourier:

$$X(f) = \mathfrak{F} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.52)$$

Reescrevendo a Equação 2.52 em termos da frequência angular ( $\omega = 2\pi f$ ):

$$X(\omega) = \mathfrak{F} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.53)$$

Um artifício da Transformada de Fourier é a recuperação do sinal a partir da sua transformada. No caso da necessidade de recuperação do sinal, basta aplicação da transformada inversa nas Equações 2.52 e 2.53:

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.54)$$

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1} X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.55)$$

### 2.3.2 Funções densidade espectral de potência (PSDs)

A análise espectral é baseada na análise da função de potência. Com base na Equação 2.14, determina-se a potência normalizada do sinal  $x(t)$ :

$$P_{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt \quad (2.56)$$

O valor RMS de  $x(t)$ , como foi visto anteriormente, pode ser obtido como:

$$RMS_{x(t)} = \sqrt{P_{x(t)}} \quad (2.57)$$

**Teorema 1 (Teorema de Parseval)** Segundo a referência [27], o Teorema de Parseval é um teorema de grande importância para definir uma função de densidade espectral de potência. Se  $x \in L$  e  $x \in L^2$ , então sua transformada  $X \in L^2$  e:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Segundo o Teorema de Parseval, a soma do quadrado de uma função é igual à soma do quadrado de sua transformação. Dessa forma, é possível calcular a potência a partir do espectro de amplitude do sinal.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|^2}{T} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T} df \quad (2.58)$$

Aplicando o Teorema de Parseval na Equação 2.56:

$$P_{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T} df \quad (2.59)$$

$$P_{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df \quad (2.60)$$

Logo, dado um sinal de potência, as funções de densidade espectral de potência ou PSD (em inglês, *power spectral density*) representam a distribuição de potência ou energia no domínio da frequência, e são definidas como o valor eficaz da potência do sinal, expresso na Equação 2.60:

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T} \quad (2.61)$$

Pela análise estatística das seções de história no tempo, as seções estacionárias são distinguidas e divididas em grupos no que diz respeito à similaridade estatística. A função PSD é determinada para as seções distintas. Os valores médios ponderados são calculados para grupos individuais pela forma apresentada na Equação 2.62:

$$\hat{G}(f) = \sum_{k=0}^K \frac{G(f)t_k}{T} \quad (2.62)$$

### 2.3.3 Função densidade espectral de potência e processos estocásticos

A distribuição da densidade de probabilidade de valores e o caráter estacionário do histórico aleatório de tensão não fornecem informações suficientes sobre um processo estocástico. Para contornar essa dificuldade e observar melhor o comportamento de um sinal, propôs-se a utilização de uma análise espectral em paralelo com a análise do histórico aleatório de tensão, o que se tornou o método mais eficaz para análise harmônica das funções determinísticas.

Para o processo estocástico unidimensional  $X(t)$ , uma função de densidade espectral de potência de dois extremos  $S_x(f)$  é definida pela transformada de Fourier da função de correlação  $R_x(t)$ , como pode ser visto na Equação 2.63:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.63)$$

Devido a dificuldades de interpretação de uma frequência negativa, a função densidade espectral de potência unilateral  $G_x(f)$  é aplicada de forma que o termo da frequência varia no intervalo de  $[0, +\infty]$ .

$$G_x(f) = \begin{cases} 2S_X(f) & \text{para } 0 \leq f < \infty \\ 0 & \text{para } f < 0 \end{cases}$$

Desse modo, investigando um processo estocástico de sexta dimensão, as funções de densidade espectral de potência unilateral assumem a forma da matriz de densidade espectral de potência, dado por  $\bar{G}(f)$ :

$$\bar{G}(f) = \begin{bmatrix} G_{11}(f) & \dots & G_{16}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{61}(f) & \dots & G_{66}(f) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$G_{kl}(f) = \begin{cases} 2S_{kl}(f) & \text{para } 0 \leq f < \infty \\ 0 & \text{para } f < 0 \end{cases}$$

Sendo  $k, l = 1, 2, \dots, 6$ .

$G_{kk}(f), S_{kk}(f)$  : Função de densidade autoespectral de processos de componentes  $X_k(t)$

$G_{kl}(f), S_{kl}(f)$  : Função de densidade espectral cruzada entre os processos unilaterais  $X_k(t)$  e  $X_l(t)$ .

A estrutura da frequência do histórico equivalente com relação ao dano é definido como uma função da densidade espectral de potência  $G(f)$  e desempenha um papel importante durante os cálculos de vida em fadiga. Para carregamentos multiaxiais, a densidade espectral de potência da tensão equivalente deve ser determinada com base em critérios adequados de falha por fadiga.

Como foi visto anteriormente, um processo estocásticos  $X(t)$ , t é dito estacionário se seus valores médios foram invariantes no tempo e todos os elementos de correlação dependem apenas da diferença de tempo  $\tau = \Delta t$ . De acordo com a referência [21], o processo estocástico equivalente é definido pela expressão da 2.65:

$$x_{eq}(t) = \sum_{k=1}^6 \int_0^{\infty} h_k(\tau) X_k(t - \tau) d\tau \quad (2.65)$$

$h_k(\tau)$  : Função de transferência de impulso  $h_k(\tau) = h_k(t_1, t_1 + \tau)$  (Também representa a função de resposta do impulso gerado pelo sistema físico).

$X_k(t - \tau)$  : Processo estocástico unidimensional no tempo  $t - \tau$ .

Onde a matriz da autocorrelação é expresso por:

$$R_{x_{eq}}(\tau) = E[x_{eq}(t), x_{eq}(t + \tau)] \quad (2.66)$$

$$R_{x_{eq}}(\tau) = \int_0^{\infty} x_{eq}(t) x_{eq}(t + \tau) dt \quad (2.67)$$

Dessa forma, a função de densidade espectral de potência  $G_{x_{eq}}$  é determinada com a transformada de Fourier da função de autocorrelação:  $R_{x_{eq}}(\tau)$ :

$$G_{x_{eq}}(f) = \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 H_k^* H_l G_{kl}(f) \quad (2.68)$$

Onde:

$G_{kl}$  : Componente da matriz densidade espectral de potência.

$H_k(f)$  : Transformada de Fourier da função de transferência de impulso  $h_l(\tau)$  (também chamada de função de transmitância espectral para l-ésima entrada).

$H_k^*$  : Função acoplada de  $H_l(f)$ .

Segundo a referência bibliográfica [21], para os critérios de falha por fadiga multiaxial, a transmitância espectral do sistema  $H_k(f)$  para os sinais de entrada não depende da frequência  $f$  mas de coeficientes constantes, como por exemplo um vetor dependente do critério selecionado e da posição do plano crítico. Nesse caso, a Equação 2.68 pode ser modificada na forma da Equação 2.69:

$$G_{x_{eq}}(f) = \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 a_k a_l G_{kl}(f) \quad (2.69)$$

$$G_{x_{eq}}(f) = \mathbf{a}\overline{G}(f)\mathbf{a}^T \quad (2.70)$$

Levando em consideração que as funções de densidade espectrais de potência cruzada são funções complexas então:

$$G_{kl} = \Re [G_{kl}(f)] + i\Im [G_{kl}(f)] \quad (2.71)$$

Onde  $\Re$  é a parte real da PSD e  $\Im$  é a parte imaginária. Por padrão, utiliza-se apenas a parte real para cálculos. E  $i$  é a unidade imaginária, dado por  $i = \sqrt{-1}$ .

### 2.3.4 Momentos espectrais

De acordo com a referência bibliográfica [21], considerando um carregamento aleatório  $x(t)$  com sua primeira e segunda derivada no tempo da variável  $x$ , as variâncias são obtidas, respectivamente, em função das densidades espectrais de potência  $G_x(f)$  como:

$$\text{var}(x) = \hat{\sigma}_x^2 = \int_0^\infty G_x(f)df \quad (2.72)$$

$$\text{var}(\dot{x}) = \hat{\sigma}_{\dot{x}}^2 = \int_0^\infty G_x(f)f^2df \quad (2.73)$$

$$\text{var}(\ddot{x}) = \hat{\sigma}_{\ddot{x}}^2 = \int_0^\infty G_x(f)f^4df \quad (2.74)$$

Dessa forma, os momentos espectrais  $m_k$  podem ser dados de acordo com a potência em que a frequência está elevada, como mostra as Equações 2.75, 2.76 e 2.77:

$$m_0 = \hat{\sigma}_x^2 = \int_0^\infty G_x(f)df \quad (2.75)$$

$$m_2 = \hat{\sigma}_{\dot{x}}^2 = \int_0^\infty G_x(f)f^2df \quad (2.76)$$

$$m_4 = \hat{\sigma}_{\ddot{x}}^2 = \int_0^\infty G_x(f)f^4df \quad (2.77)$$

Seja  $x(t)$  um processo estocástico, conforme mostra a Figura 2.4, que apresenta as amplitudes do sinal no tempo de um processo unidimensional aleatório, a frequência em que se espera que  $x(t)$  ultrapasse o valor de  $a$  quando é crescente é representada por  $N_o^+$ . Enquanto a frequência em que  $x(t)$  ultrapassa valor genérico  $a$  quando é decrescente é denominada por  $N_o^-$ . Dessa forma, o número esperado de transições de nível zero com inclinação positiva em uma unidade de tempo ( $N_o^+$ ) é um parâmetro espectral responsável por fornecer uma média aproximada do número de oscilações, que pode ser expresso pela Equação 2.78:

$$N_o^+ = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\dot{x}}^2}{\hat{\sigma}_x^2}} = \frac{\hat{\sigma}_{\dot{x}}}{\hat{\sigma}_x} \quad (2.78)$$

Outra forma de representação de  $N_o^+$  em função do momentos espectrais seria:

$$N_o^+ = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\dot{x}}^2}{\hat{\sigma}_x^2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (2.79)$$

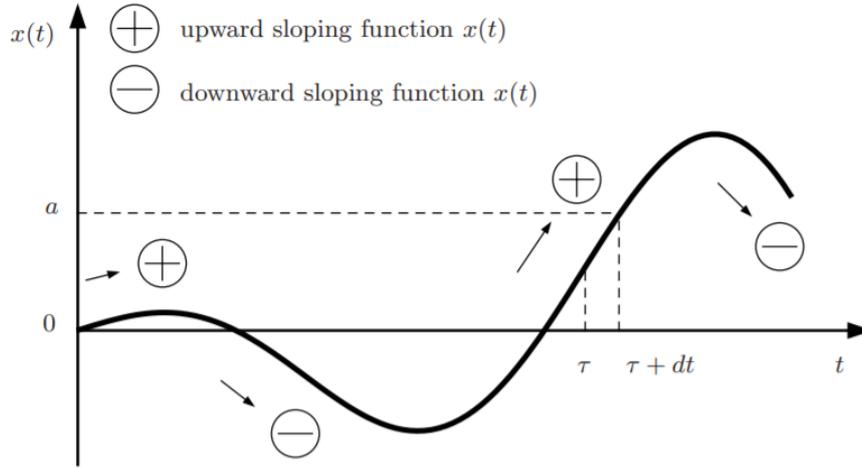


Figura 2.4: Conjunto de registros amostrais ao longo do tempo de cada processo estocástico unidimensional.

Fonte: NIESLONY, A & MACHA, E. (2007) [21].

Paralelamente, analisando a Figura 2.4 novamente, um pico ocorre nos pontos críticos locais e globais quando a derivada é nula, indicando um comportamento de crescimento ou decaimento da curva do sinal. Logo,  $\dot{x} = 0$ .

**Teorema 2 (Teste da Segunda Derivada para Extremos Locais)** *O ponto de inflexão é um ponto onde a curva de uma função apresenta mudança de concavidade.*

1. Se  $f'(x = c) = 0$  e  $f''(x = c) < 0$ , então  $f$  possui um máximo local quando  $x = c$ .
2. Se  $f'(x = c) = 0$  e  $f''(x = c) > 0$ , então  $f$  possui um mínimo local quando  $x = c$ .

O número esperado de picos (extremos locais) em uma unidade de tempo indica a presença de picos locais e é dado pela equação 2.80:

$$M^+ = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\dot{x}}^2}{\hat{\sigma}_x^2}} = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (2.80)$$

Para histórico de tensão com espectro de frequência de banda estreita, o número esperado de picos por segundo  $M^+$  é igual ao número de cruzamentos de nível zero com inclinação positiva  $N_o^+$  ou a frequência dominante  $f_0$ , ou seja:

$$N_o^+ = M^+ \quad (2.81)$$

Dado um valor equivalente do sinal  $x_{eq}(t)$ , a variância do histórico equivalente do sinal  $x(t)$  pode ser obtido com base na equação 2.75:

$$m_0 = \hat{\sigma}_{x_{eq}}^2 = \int_0^{\infty} G_{x_{eq}}(f) df \quad (2.82)$$

E o número esperado de ciclos e de picos podem ser dados respectivamente por:

$$N_o^+ = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{x_{eq}}^2}{\hat{\sigma}_{x_{eq}}^2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (2.83)$$

$$M^+ = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\dot{x}_{eq}}^2}{\hat{\sigma}_{x_{eq}}^2}} = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (2.84)$$

Onde o coeficiente de irregularidade e o parâmetro de largura do espectro é dado respectivamente pelas Equações 2.85 e 2.86 :

$$\alpha_f = \frac{N_o^+}{M^+} \quad (2.85)$$

$$\zeta = \sqrt{1 - \alpha_f^2} \quad (2.86)$$

## 2.4 GERAÇÃO DE SINAL

Segundo a referência [28] (FERREIRA,1993), o procedimento de geração de sinal é uma etapa fundamental dessa dissertação já que permite a construção do histórico de tensões no domínio do tempo através de duas etapas:

- *Determinação do espectro de potência* com a aquisição de um sinal simulado por meio de geradores de sinais.
- *Simulação Gaussiana* para recuperar a história real  $x(t)$  através das funções densidades de potência.

Por ser uma distribuição gaussiana com valor médio nulo, o modelo mais recomendado para determinação do histórico de carregamento aleatório é a técnica gaussiana. A partir da simulação com essa técnica, um histórico pode ser reconstruído com base nos espectros de potência dos históricos de carregamento,  $G(f_k)$ .

Dessa forma, é possível a aquisição de um sinal no domínio do tempo que caracterize o carregamento real durante um ensaio mecânico. Essa aquisição é obtida por meio da Equação 2.87:

$$x(t) = \sum_{k=1}^J (2 G[f_k] \Delta f_k)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi t_k f_k \Delta t + \Psi^k) \quad (2.87)$$

- $x(t)$  : Componente da história simulada no tempo  $t_k$ .  
 $J$  : Número de componentes harmônicas tomadas pelo espectro de potência.  
 $G(f_k)$  : Função densidade de potência espectral de um trecho do carregamento.  
 $\Delta f_k$  : Discretização da frequência (intervalo da frequência na iteração k). Também é conhecida como banda da frequência associada a k-ésima componente espectral.  
 $f_k$  : Frequência central associada a banda de frequência  $\Delta f_k$ .  
 $\Psi_k$  : Componente aleatório com distribuição uniforme dentro do intervalos  $[0,1]$ .

Dessa forma, determina-se o histórico de tensões aleatórias de  $\tau(t)$  e o sinal não correlacionado entre  $\sigma(t)$  e  $\tau(t)$ , representado por  $x_{aux}(t)$ . Com isso, o histórico de tensões de  $\sigma(t)$  é obtido pela Equação 2.88.

$$\sigma(t) = x_{aux}(t) + a \tau(t) \quad (2.88)$$

Onde  $a$  e  $u$  são parâmetros adimensionais.

**Prova (2.4)** Com a propriedade de soma do valor esperado, a condição de valor médio nulo para  $\sigma(t)$  nulo pode ser validado a partir da Equação 2.88:

$$\begin{aligned}
 E[\sigma] &= E[x_{aux} + a \tau] \\
 &\text{Considere a propriedade: } E(X + Y) = E(X) + E(Y) \\
 &= E[x_{aux}] + E[a \tau] \\
 &\text{Considere a propriedade: } E(cX) = cE(X) \\
 &= \cancel{E[x_{aux}]} + a \cancel{E[\tau]} = 0
 \end{aligned}$$

**Prova (2.5)** A variância de uma variável aleatória correlacionada com outra variável é dada pela seguinte demonstração:

$$\begin{aligned}
 var(\sigma) &= E[(\sigma - \hat{\sigma})^2] \\
 &= E[(\sigma - 2\sigma\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^2)] \\
 &\text{Considere a propriedade: } E(E(X)) = 0 \\
 &= E[\sigma^2] - 2\cancel{E[\sigma]E[\hat{\sigma}]} + \cancel{E[\hat{\sigma}^2]} \quad (E[\hat{\sigma}] = 0) \\
 &= E[\sigma^2] \\
 &\text{Substituindo pela Equação 2.88:} \\
 &= E[(x_{aux} + a \tau)^2] \\
 &\text{Considere a propriedade: } E(cX) = cE(X) \\
 &= E[x_{aux}^2] + 2a\cancel{E[x_{aux}]E[\tau]} + a^2 E[\tau^2] \\
 &= E[x_{aux}^2] + a^2 E[\tau^2] \\
 &\text{Aplicando a definição de variância: } var(X) = E(X^2) - \cancel{E(X)^2} = E(X^2) \\
 &= var(x_{aux}) + a^2 var(\tau)
 \end{aligned}$$

**Prova (2.6)** Com base na expressão da correlação ( $R_{\sigma\tau} = cov(\sigma, \tau)$ ), é possível estabelecer uma relação entre a covariância de duas variáveis aleatórias e a variância da variável que a outra está correlacionada.

$$cov(\sigma, \tau) = E[(\sigma - E(\sigma))(\tau - E(\tau))]$$

Considere a propriedade:  $E(E(X)) = 0$

$$= E[(\sigma - \cancel{E(\sigma)})(\tau - \cancel{E(\tau)})]$$

$$= E[(x_{aux} + a \tau)(\tau)]$$

$$= E[x_{aux} \tau + a \tau^2]$$

Pela propriedade  $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$  e  $E(cX) = cE(X)$ :

$$= E[x_{aux}] E[\tau] + a E[\tau^2]$$

$$= a E[\tau^2]$$

Aplicando a definição de variância:  $var(X) = E(X^2) - \cancel{E(X)^2} = E(X^2)$

$$= a var(\tau)$$

Paralelamente, utilizando a Equação 2.18, o grau de dependência entre duas variáveis aleatórias de tensão é fornecido pela estimativa do coeficiente de correlação entre  $\sigma$  e  $\tau$ ,  $r_{\sigma\tau}$ . Esse parâmetro é a principal medida de interdependência entre duas variáveis aleatórias X e Y e a correlação seria seu momento cruzado.

$$r_{\sigma\tau} = \frac{cov(\sigma, \tau)}{\sqrt{var(\sigma)}\sqrt{var(\tau)}} \quad (2.89)$$

Onde os valores possíveis do coeficiente de correlação estão dentro do seguinte intervalo:

$$-1 < r_{\sigma\tau} < 1$$

$r_{\sigma\tau} = 1$  : Variáveis aleatórias perfeitamente correlacionadas de forma positiva.

$r_{\sigma\tau} = -1$  : Variáveis aleatórias perfeitamente correlacionadas de forma negativa.

$r_{\sigma\tau} = 0$  : Ausência de correlação linear.

$0 < |r_{\sigma\tau}| < 1$  : A relação entre as duas variáveis aleatórias é imperfeita

Dessa forma, o parâmetro adimensional  $a$  é definido com base no coeficiente de correlação  $r_{\sigma\tau}$ , dado pela Equação 2.89:

$$r_{\sigma\tau} = \frac{avar(\tau)}{\sqrt{var(\sigma)}\sqrt{var(\tau)}} \quad (2.90)$$

$$a = r_{\sigma\tau} \sqrt{\frac{var(\sigma)}{var(\tau)}} \quad (2.91)$$

## 2.5 MÉTODO DE CONTAGEM DE CICLOS: RAINFLOW

Segundo Dowling (2012) [29], não havia um consenso sobre a melhor abordagem de análise de um carregamento com variações de amplitude altamente irregulares para em seguida aplicar a regra de Palmgren-Miner. A partir de 1968, uma técnica de contagem de ciclos foi desenvolvida pelo Prof. T. Endo e seus colegas acadêmicos no Japão e chamada de *Método Rainflow*. A ideia principal desse procedimento era a obtenção, por meio de algoritmos matemáticos, das variações de amplitude do carregamento, formando ciclos e comparando pontos de máximo e mínimo, mesmo estes estando separados por pontos intermediários (locais).

Para compreender melhor o procedimento, segundo a norma ATSM E 1049-85 [30], criada em 1985 e com última atualização em 2017, há algumas terminologias básicas que devem ser conhecidas por serem empregadas em carregamento aleatório (S) durante a contagem de ciclos, como mostra a Figura 2.5:

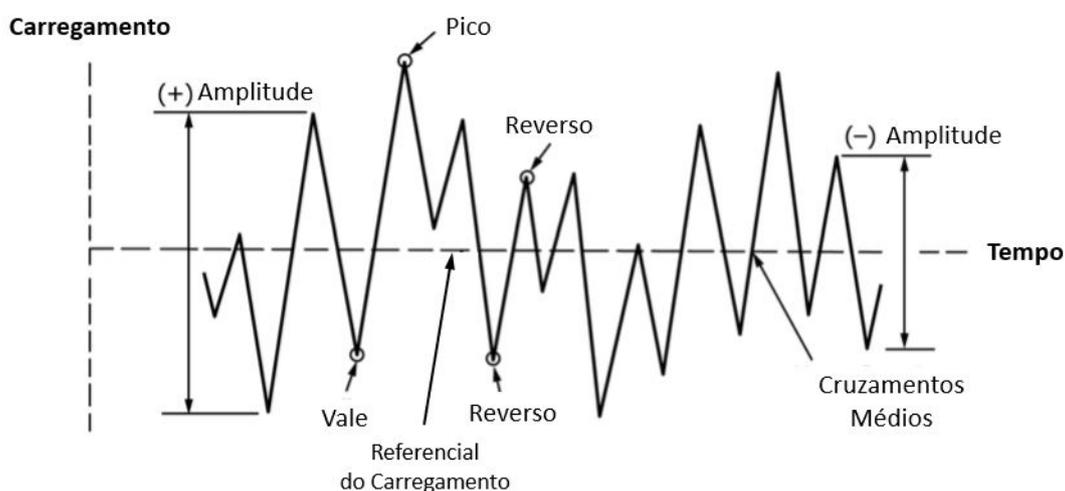


Figura 2.5: Parâmetros básicos de análise pelo Método Rainflow em um carregamento mecânico

Fonte: Adaptado da ASTM E-1049 (1985) [30].

- Amplitude: representa a diferença entre vales e picos sucessivos ou vice-versa.
- Pico: é o ponto em que a primeira derivada do histórico de carregamento no tempo muda de um sinal positivo para um sinal negativo (derivada nula). Representa o ponto máximo de carga em carregamento mecânico, podendo ser tanto global quanto local.
- Vale: é o ponto no qual a primeira derivada do histórico de tempo de carregamento muda de um sinal negativo para um sinal positivo (derivada nula). Representa o ponto mínimo de carga em carregamento mecânico, podendo ser tanto global quanto local.
- Reverso: é o ponto em que a primeira derivada do histórico de carregamento no tempo de carregamento muda de sinal.

- Cruzamentos médios: no carregamento de fadiga, representa o número de vezes que o histórico de carregamento no tempo cruza o nível do carregamento referencial (dado como a média do carregamento mecânico) com uma inclinação positiva (ou uma inclinação negativa, ou ambos, conforme especificado).

Também é de interesse os intervalos dos ciclos, representados pela diferença de tensão medidos entre pico e vale ou vice-versa. Ao realizar a contagem de ciclos, um ciclo será identificado e contado se atender o seguinte critério:

$$\Delta S_{Inicial} \leq \Delta S_{Final} \quad (2.92)$$

Caso a condição não seja atendida, nenhum ciclo será contado. Esse método é conhecido como Rainflow Clássico ou Rainflow de Três Pontos, já que utiliza três pontos consecutivos em um histórico de tempo de carregamento para determinar se um ciclo é formado, como pode ser visto na Figura 2.6.

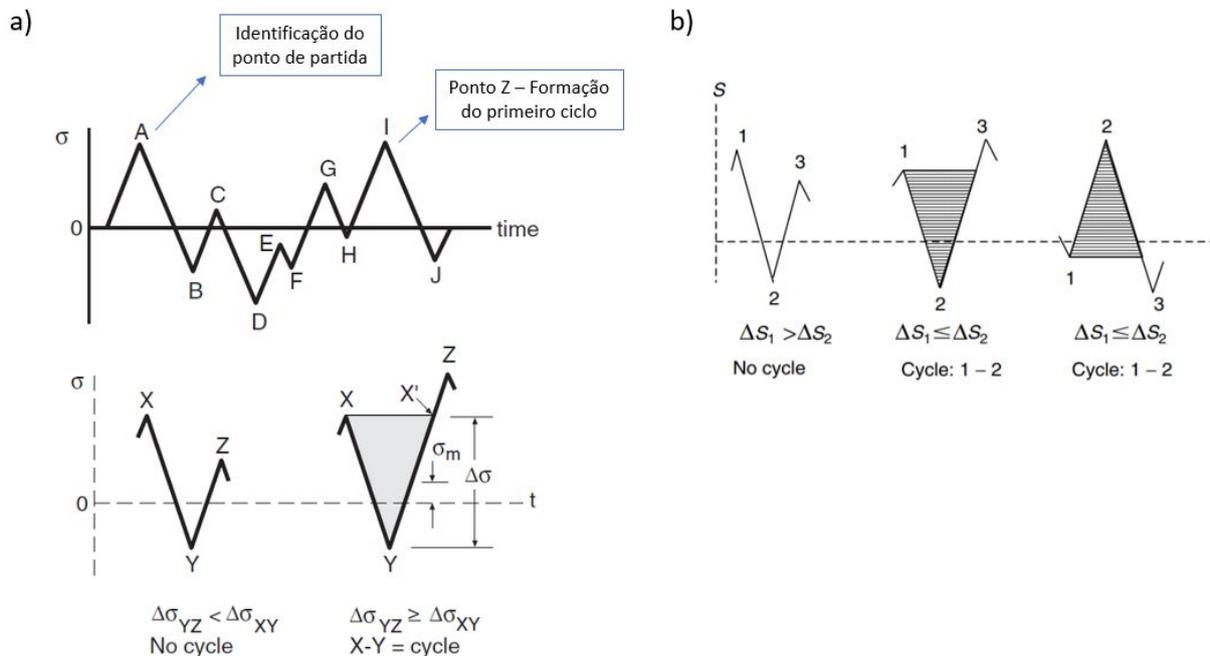
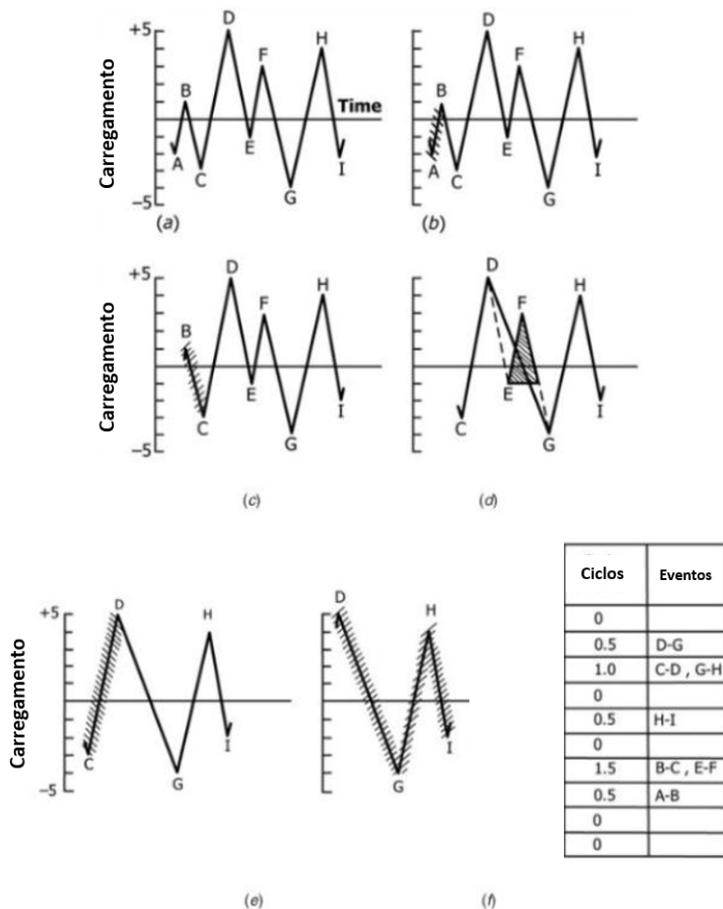


Figura 2.6: a) Método Rainflow Clássico b) Identificação de dois possíveis ciclos fechados.

Fonte: DOWLING, N. E. (2012) [29] e LEE, Y.L. (2005) [4].

De acordo com os padrões SAE e ASTM, o método Rainflow de Três Pontos requer que o histórico aleatório de tensão  $\sigma(t)$  seja reorganizado de modo que contenha apenas os picos e vales e comece com o pico mais alto ou o vale mais baixo, o que possuir maior magnitude absoluta. Em seguida, a regra de identificação do ciclo é aplicada verificando a cada três pontos consecutivos desde o início até que um ciclo fechado seja definido. Os dois pontos que formam o ciclo são descartados e os pontos restantes, o primeiro ponto e o próximo ponto, são conectados entre si. Este procedimento é repetido desde o início até que os dados restantes sejam esgotados.



### Procedimento de Análise

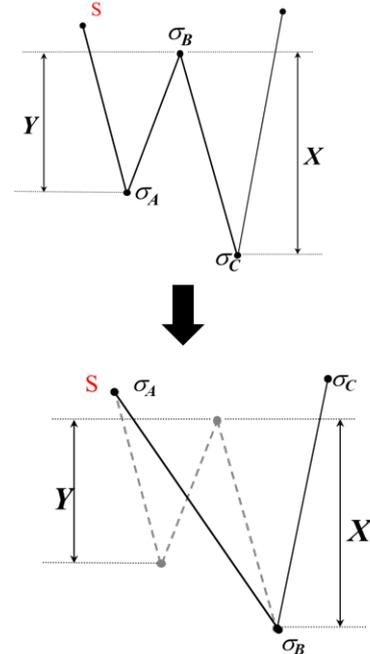


Figura 2.7: Exemplo do Método Rainflow.

Fonte: Adaptado da ASTM E-1049 (1985) [30].

- Etapa 1** Denota-se Ponto A como ponto de partida S e avança para o próximo ponto. Define X o intervalo em questão e Y como a faixa anterior adjacente a X.
- Etapa 2** Leia o próximo pico ou vale. Se estiver fora dos dados, vá para a **Etapa 6**.
- Etapa 3** Se houver menos de três pontos, vá para **Etapa 1**. É necessário formar intervalos de X e Y usando os três picos e vales mais recentes que não tenham sido descartados.
- Etapa 4** Compare os valores absolutos dos intervalos de X e Y.
1. Se  $X < Y$ , vá para a **Etapa 1**.
  2. Se  $X \geq Y$ , vá para a **Etapa 5**.
- Etapa 5** Se o intervalo Y contém o ponto de partida S, vá para a **Etapa 6**. Caso contrário, conte o intervalo Y como um ciclo e descarte o pico e o vale de Y; vá para a **Etapa 2**.
- Etapa 6** Conte o intervalo Y como um meio ciclo, descarte o primeiro ponto (pico ou vale) no intervalo de Y; mova o ponto de partida para o segundo ponto no intervalo Y; e vá para a **Etapa 2**

**Etapa 7** Conte cada intervalo que não tenha sido previamente considerado como metade de um ciclo.

Os detalhes da contagem de ciclos na Figura 2.7 podem ser enumerados da seguinte forma:

1.  $S = A$ ;  $Y = |A-B|$ ;  $X = |B-C|$ ;  $X > Y$  (há um ciclo).  $Y$  contém  $S$ , que é o ponto  $A$ . Conta-se  $|A-B|$  como um meio ciclo e descarta-se o ponto  $A$ ;  $S = B$  (Figura 2.7 b).
2.  $Y = |B-C|$ ;  $X = |C-D|$ ;  $X > Y$ .  $Y$  contém  $S$ , que é o ponto  $B$ . Conta-se  $|B-C|$  como um meio ciclo e descarta-se o ponto  $B$ ;  $S = C$  (Figura 2.7 c).
3.  $Y = |C-D|$ ;  $X = |D-E|$ ;  $X < Y$ , ou seja, não há ciclo.
4.  $Y = |D-E|$ ;  $X = |E-F|$ ;  $X < Y$ , ou seja, não há ciclo.
5.  $Y = |E-F|$ ;  $X = |F-G|$ ;  $X > Y$ . Conta-se  $|E-F|$  como um ciclo e descarta-se os pontos  $E$  e  $F$  (Figura 2.7 d). Nota-se que o ciclo é formado pelo emparelhamento dos intervalos  $E-F$  e a porção do intervalo  $F-G$ .
6.  $Y = |C-D|$ ;  $X = |D-G|$ ;  $X > Y$ ,  $Y$  contém  $S$ , que é o ponto  $C$ . Conta-se  $|C-D|$  como um meio ciclo e descarta-se o ponto  $C$ .  $S = D$  (Figura 2.7 d).
7.  $Y = |D-G|$ ;  $X = |G-H|$ ;  $X < Y$ , ou seja, não há ciclo.
8.  $Y = |G-H|$ ;  $X = |H-I|$ ;  $X < Y$ , ou seja, não há ciclo. E, fim dos dados.
9. Conta-se  $|D-G|$  como um meio ciclo,  $|G-H|$  como um meio ciclo, e  $|H-I|$  como um meio ciclo (Figura 2.7 f).

## 2.6 ACÚMULO DE DANO: REGRA DE PALMGREN-MINER

O dano por fadiga é associado a degradação de uma propriedade físico-mecânicas do material. As teorias de acúmulos de danos afirmam que a iniciação de uma trinca ocorre quando o dano por fadiga atinge um valor crítico. Inclusive, também propõem que danos totais são causados pela soma de danos em ciclos individuais de tensão. Palmgren e Miner propuseram uma variável, chamada de dano, que contabiliza a vida em fadiga de estruturas sujeitas a uma amplitude variável de tensão. Esta regra assume que cada bloco de carregamento causa um dano  $d_j$  ao componente, de maneira que o componente falha por fadiga quando a variável dano alcançar um valor crítico.

$$D = \sum_{j=1}^K d_j = \sum_{j=1}^K \frac{n_j}{N_j} \quad (2.93)$$

Onde  $K$  representa o número de blocos existentes na matriz Rainflow,  $n_j$  o número de ciclos de tensão alternada constante que atua no nó analisado e  $N_j$  o número total de ciclos para ocorrer a falha sob tensão alternada supracitada.

A partir das curvas S-N é estabelecido uma relação importante para prever o número de ciclos a partir de uma amplitude de tensão fornecida pelo método Rainflow. Segundo a referência [21], a partir da equação da inclinação da curva de Wöhler, a relação S-N pode ser rearranjada para obter o número de ciclos pelo gráfico da Curva de Wöhler, como é observado na Equação 2.94:

$$A = \sigma_a^{1/b} N_f \implies N_f = A(\sigma_a)^{-\frac{1}{b}} \quad (2.94)$$

Onde  $A$  e  $b$  são constantes experimentais da inclinação da curva de Wöhler e  $m = \frac{1}{b}$  é o expoente da curva de Wöhler. Dessa forma, a Equação 2.94 pode ser representada em função do expoente  $m$  com a Equação 2.95:

$$N_f = A(\sigma_a)^{-m} \quad (2.95)$$

Substituindo Equação 2.95 em 2.93, obtém-se o dano em função dos parâmetros da curva de Wöhler:

$$D = \sum_{j=1}^K d_j = \sum_{j=1}^K \frac{n_j}{N_j} = \sum_{j=1}^K \frac{n_j}{A} (\sigma_{a,j})^m \quad (2.96)$$

Supondo-se que a função densidade de potência da amplitude de tensão  $\sigma_a$  possa ser tratada como uma variável aleatória contínua conforme mostrado na Figura 2.8, o valor esperado de  $S_a$  é dado por:

$$E(\sigma_a) = \int_0^{\infty} \sigma_a d(\sigma_a) d\sigma_a \quad (2.97)$$

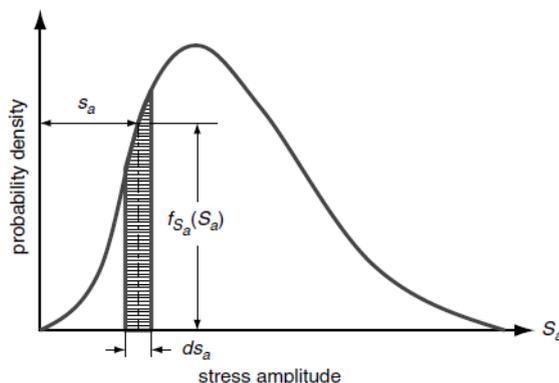


Figura 2.8: Curvas S-N ou Curvas de Wöhler.

Fonte: LEE, Y.L. (2005) [4].

Segundo a referência bibliográfica [4] (LEE, Y.L, 2005), a distribuição de Rayleigh seria a mais apropriada por ser uma distribuição de picos ou amplitudes em um processo gaussiano de banda estreita estacionário que tem um valor RMS igual a raiz quadrada de momento espectral  $m_o$ . Se  $\sigma(t)$  tem um comportamento de uma gaussiana de banda estreita estacionária, as amplitudes da tensão seguem a distribuição de Rayleigh e o valor  $E(\sigma_a)$  pode ser expresso de acordo com a Equação 2.98 em termos da função gama <sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Função Gama:  $\Gamma[n] = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$

$$E(\sigma_a) = (\sqrt{2m_o})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (2.98)$$

Nesse caso, o dano de fadiga total esperado de um processo de tensão com comportamento gaussiano de banda estreita estacionário com média nula ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser escrito de acordo com a Equação 2.99:

$$D_{RF} = \frac{\sum_{i=1}^K n_i}{A} E(\sigma_a) = \frac{\sum_{i=1}^K n_i}{A} \left( \sqrt{2\text{var}(\sigma_{eq})} \right)^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (2.99)$$

Analogamente, aplica-se para o domínio da frequência, onde a variância corresponde ao momento espectral de  $G_{eq}$ :

$$D_{SP} = \frac{\sum_{i=1}^K n_i}{A} E(\sigma_a) = \frac{\sum_{i=1}^K n_i}{A} (\sqrt{2m_o})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \quad (2.100)$$

Onde  $A$  e  $m$  são parâmetros característicos da curva S-N. Observe que a equação espectral depende do tipo de carregamento, especialmente da largura de espectro observada.

### 2.6.1 Wirsching and Light

Em 1980, Wirsching e Light postularam um coeficiente  $\lambda$  para a correção da vida à fadiga a partir do  $D_{SP}$  com o objetivo de obter previsão de vida à fadiga para carregamentos com frequência de banda larga, dado por  $D_{SP,BB}$ .

$$D_{SP,BB} = \frac{D_{SP}}{\lambda} \quad (D_{SP} = D_{SP,NB}) \quad (2.101)$$

Chaudhury e Dover observaram que a forma generalizada de distribuição de densidade de probabilidade de picos poderia ser simplificada para a distribuição de Rayleigh para histórico de frequência de banda estreita ( $\zeta \rightarrow 0$ ) e para distribuição normal para histórico de frequência de banda larga ( $\zeta \rightarrow 1$ ). Logo, utilizando para soluções de carregamentos com banda estreita, o modelo foi adaptado para o dano por fadiga pela análise de espectro na frequência. O fator  $\lambda$  é calculado da seguinte forma:

$$\lambda = c(m) + [1 - c(m)](1 - \zeta)^{d(m)} \quad (2.102)$$

Como o somatório do número de ciclos é dado como um produto da taxa de cruzamento ou número de oscilações  $N_o^+$  e o período de tempo total, dado pelo tempo de observação  $T_o$ , o dano associado ao espectro de potência de uma frequência banda larga,  $D_{SP,BB}$ , pode ser expresso:

$$D_{SP,BB} = \frac{1}{\lambda} D_{SP,NB} \implies D_{SP,BB} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{N_o^+ T_o}{A} (\sqrt{2m_o})^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \right) \quad (2.103)$$

## 2.7 CURVAS S-N

Atualmente existe três métodos principais para prevenção de falha: Método Tensão-Vida (S-N); Método Deformação-Vida ( $\epsilon$ -N) e Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). O Método Tensão-Vida utiliza as curvas de Wöhler, que são diagramas padrões utilizados para caracterização de materiais submetidos a tensões cíclicas a partir da verificação da resistência a fadiga em diversos número de ciclos. Quanto ao número de ciclos, a Figura 2.9 mostra que para uma vida com  $1 < N < 10^3$  ciclos, a fadiga é classificada como de baixo ciclo, enquanto para  $N > 10^3$  são de alto ciclo. Essa abordagem é ideal para prevenção de falha em alto ciclo e geralmente é aplicada para estimar a vida à fadiga de componentes e estruturas submetidos a um alto número de ciclos de carregamento e também determinar o limite de resistência a fadiga do material.

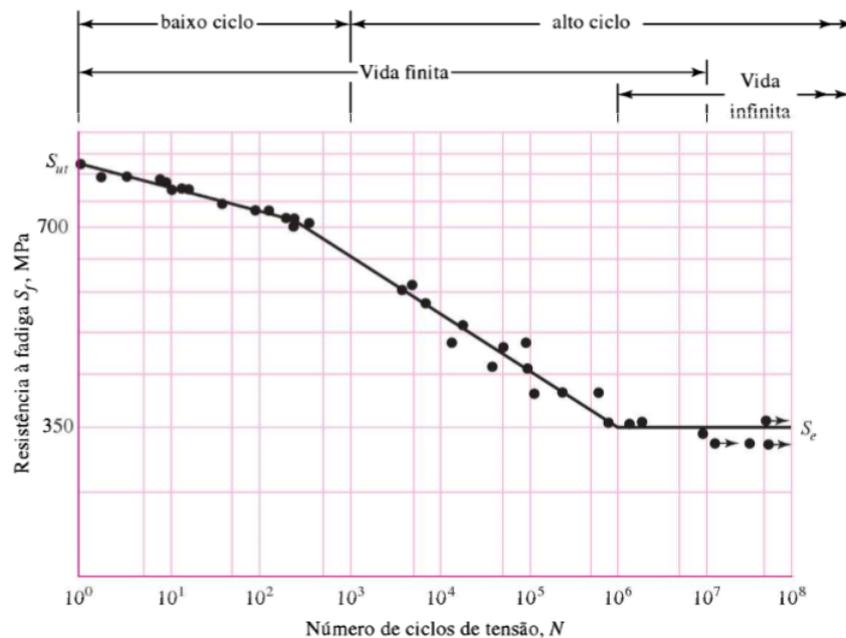


Figura 2.9: Curvas S-N a partir de ensaios de fadiga axial completamente reversa. Material: Aço UNS G41 300 Normalizado.

Fonte: BUDYNAS (2011) [31].

Porém há algumas dificuldades com relação a utilização desse modelo em alguns casos:

- O componente em análise não deve apresentar uma trinca no instante inicial de sua operação. Dessa forma, materiais envelhecidos e com defeitos de fabricação podem não se adequar ao método.
- É menos preciso quando  $N$  tende a aproximar de  $10^3$  ciclos, devido ao início do processo de plastificação.
- O modelo é incapaz de modelar adequadamente o estágio do processo de fadiga já que a trinca envolve considerações sobre escoamento do material.

## 2.8 PROPORCIONALIDADE DE UM CARREGAMENTO

Tradicionalmente, os critérios para estimativa de vida em fadiga através das curvas S-N são baseados em modelos de tensões uniaxiais, necessitando ampliar o conhecimento do comportamento dos sólidos para situações práticas comuns, com carregamentos mais complexos. Modos de carregamentos como flexão, torção, axial, cisalhante e de pressão interna, podem gerar carregamentos combinados proporcionais ou não-proporcionais na estrutura, como mostra a Figura 2.10. Na fadiga multiaxial, a presença de esforços cíclicos combinados estabelece um estado de tensões complexo que não é bem descrito pelos modelos uniaxiais.

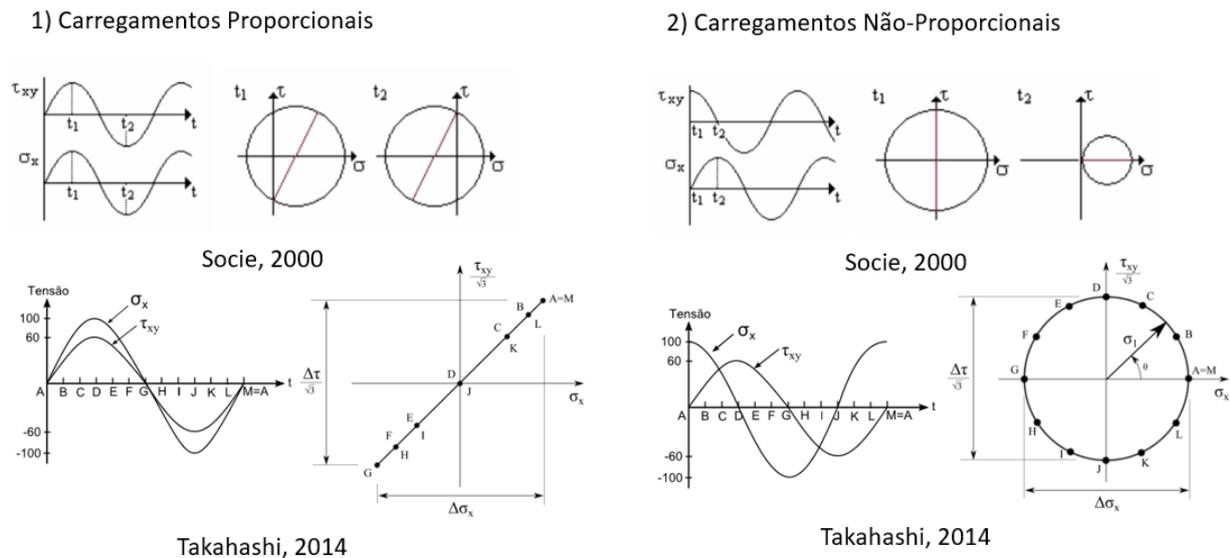


Figura 2.10: Classificação de Carregamentos quanto a proporcionalidade.

Fonte: Adaptado de SOCIE (2000) [9] e TAKAHASHI, B. X. (2014) [32].

A proporcionalidade de um carregamento é um dos aspectos de maior influência na fadiga multiaxial, o que requer dados confiáveis para serem usados na estimativa de vida ao executar a mudança da teorias de fadiga uniaxial para multiaxial, segundo Socie (2000) [9]. Um carregamento é dito proporcional quando os componentes do tensor das tensões mantém algum tipo de relação de proporcionalidade durante toda a evolução dessa história.

No caso de carregamento proporcional, as mudanças das tensões normais e cisalhante são apresentadas como caminhos de carregamento na forma de linhas retas como pode ser visto na Figura 2.11(a). Considerando que, no caso de carregamento não proporcional com amplitude variável, diferentes formas de elipses são observadas na 2.11(b) e para carregamentos aleatórios, há um comportamento semelhante ao formato de uma elipse porém as mudanças do caminho de carregamento são aleatórias na 2.11(c).

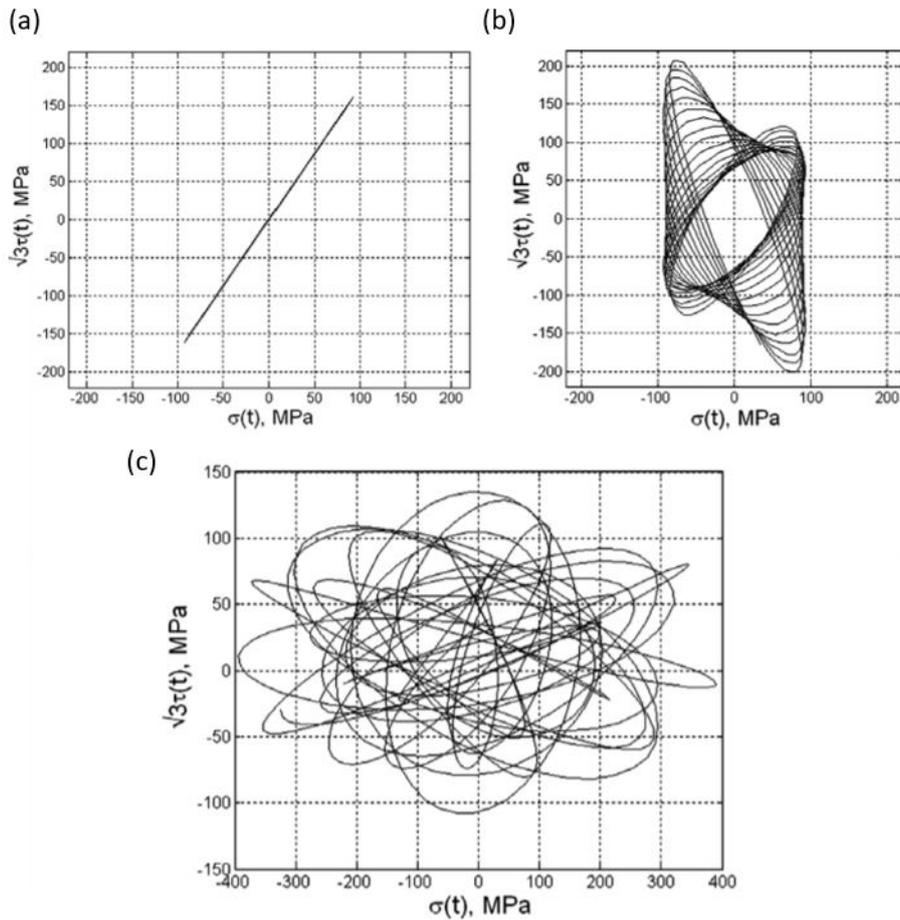


Figura 2.11: Caminhos de tensão (a) proporcional (amplitude variável), (b) não proporcional (amplitude variável) e (c) não proporcional (aleatório).

Fonte: MARCINIAK, Z., Dariusz ROZUMEK, D. & MACHA E. [33].

Uma história de tensões genéricas para um carregamento cíclico multiaxial pode ser representada da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij,med} + \sigma_{ij,a}f(\cdot)(\omega t) \quad (2.104)$$

$$\tau_{ij}(t) = \tau_{ij,med} + \tau_{ij,a}f(\cdot)(\lambda_{ij}\omega t - \beta_{ij}) \quad (2.105)$$

Onde:

$\sigma_{ij}(t)$  e  $\tau_{ij}(t)$  representam o sinal gerado pela tensão normal e cisalhante respectivamente.

$\sigma_{ij,med}$  e  $\tau_{ij,med}$  representam as tensões médias normais e cisalhantes respectivamente.

$\sigma_{ij,a}$  e  $\tau_{ij,a}$  representam as tensões alternadas normais e cisalhantes respectivamente.

$f(\cdot)$  representa a função periódica (por exemplo,  $\text{sen}(\omega t)$ ).

$\omega$  é frequência angular.

$t$  é instante de tempo correspondente.

$\lambda_{ij}$  é a razão entre as frequências angulares devido a amplitude das tensões  $\sigma(t)$  e  $\tau(t)$ .

$\beta_{ij}$  é o ângulo de fase entre as tensões  $\sigma(t)$  e  $\tau(t)$ .

## 2.9 MÉTODO DA MÁXIMA VARIÂNCIA (MMV)

Dentre as variedades de soluções validadas experimentalmente para problemas mecânicos envolvendo fadiga multiaxial, o Método da Máxima Variância (MMV) tem como hipótese que o plano crítico coincide com o plano material que experimenta a máxima variância da tensão de cisalhamento. Essa simplificação permite trabalhar com grandezas monodimensionais se o problema for tratado em termos da tensão de cisalhamento na direção de máxima variância  $\tau_{MV}(t)$  e da tensão normal ao plano crítico  $\sigma_n(t)$ , como mostra a Figura 2.12.

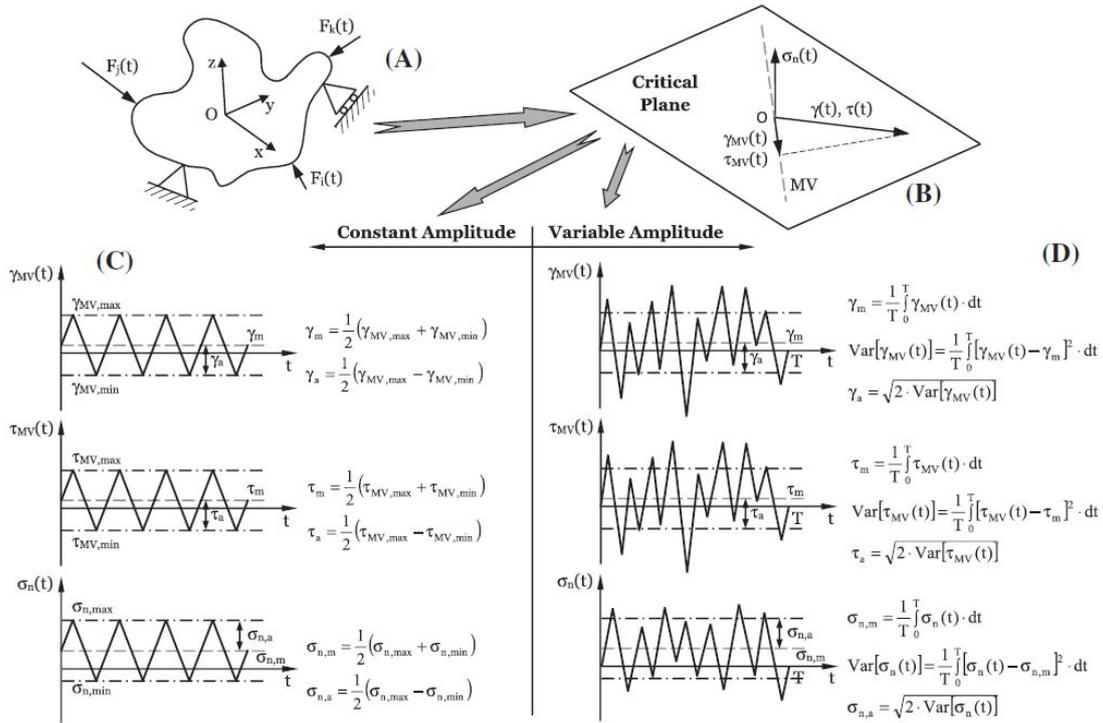


Figura 2.12: Método da Máxima Variância.

Fonte: NAMIQ, Z. & SUSMEL, L. (2019) [34].

A vantagem do MMV é que, conhecidas a variância e covariância, o tempo computacional necessário para determinar a direção que apresenta máxima variância da tensão de cisalhamento não depende do tamanho do histórico de carregamento. Outra vantagem, que também o torna altamente eficiente, é o fato do método considerar fadiga para carregamentos uniaxiais e torcionais em fase e fora de fase, permitindo determinar o plano crítico a partir de algoritmos otimizados baseados em fórmulas simples e explícitas. Ao utilizar o MMV, a orientação do plano crítico pode ser diretamente determinada através da identificação de uma direção com a máxima variância da tensão de cisalhamento. Baseado em processos estocásticos, supondo um histórico de carregamento aplicado em um intervalo de tempo  $P[0, T]$ , o valor médio e a amplitude equivalente dessa componente da tensão perpendicular ao plano crítico são dados pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{n,m} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_n(t) dt = E[\sigma_n(t)] \quad (2.106)$$

$$\sigma_{n,a} = \sqrt{2 \text{Var} [\sigma_n(t)]} \quad (2.107)$$

Enquanto a variância da componente normal é calculada pela Equação 2.108:

$$\text{Var} [\sigma_n(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T [\sigma_n(t) - \sigma_{n,m}]^2 dt \quad (2.108)$$

Para determinar a tensão de cisalhamento  $\tau_a$ , considere a tensão de cisalhamento resolvida ao longo da direção MV,  $\tau_{MV}(t)$ . Por ser uma quantidade monodimensional de tensão definida em um intervalo de tempo, seu valor médio e sua amplitude equivalente podem ser determinados respectivamente pelas seguintes equações:

$$\tau_{n,m} = \frac{1}{T} \int_0^T \tau_{MV}(t) dt = E[\tau_{MV}(t)] \quad (2.109)$$

$$\tau_a = \sqrt{2 \text{Var} [\tau_{MV}(t)]} \quad (2.110)$$

Para se determinar a amplitude equivalente da tensão de cisalhamento, dado por  $\tau_a$ , a variância é calculada pela fórmula a seguir:

$$\text{Var} [\tau_{MV}(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T [\tau_{MV}(t) - \tau_{n,m}]^2 dt \quad (2.111)$$

### 3 METODOLOGIA PROPOSTA POR LAGODA E MACHA

#### Resumo

O objetivo da metodologia proposta por Lagoda e Macha é a aplicação do método de máxima variância (MMV), sendo formulado em domínios do tempo e da frequência para abordagem de contagem cíclica e análise espectral com o intuito de estimar uma vida à fadiga. A força motriz utilizada no domínio do tempo é uma tensão normal equivalente, obtida a partir de equações de transformação de tensão.

#### 3.1 ESTADO DE TENSÃO TRIDIMENSIONAL

As tensões atuantes em um determinado plano podem ser deduzidas desde que seja conhecidas as tensões necessárias para que o equilíbrio de forças externas pertencentes ao tetraedro infinitesimal do corpo material seja mantido. Utilizando o conceito de corpo livre, é possível considerar apenas forças exteriores no equilíbrio de qualquer das suas partes, pois as forças interiores não alteram o estado de movimento ou de repouso do corpo.

Considere uma força  $F$  adicionada ao plano de corte,  $\Delta$ , como mostra a Figura 3.1. Para equilibrar as tensões que atuam nos planos, sendo que, essa força pode ser decomposta em  $F_{x'}$ ,  $F_{y'}$  e  $F_{z'}$ . Por outro lado, a tensão normal  $\sigma_{x'}$  e as tensões cisalhantes  $\tau_{x'y'}$  e  $\tau_{x'z'}$  podem ser determinadas pela razão entre as forças decompostas e a área do plano.

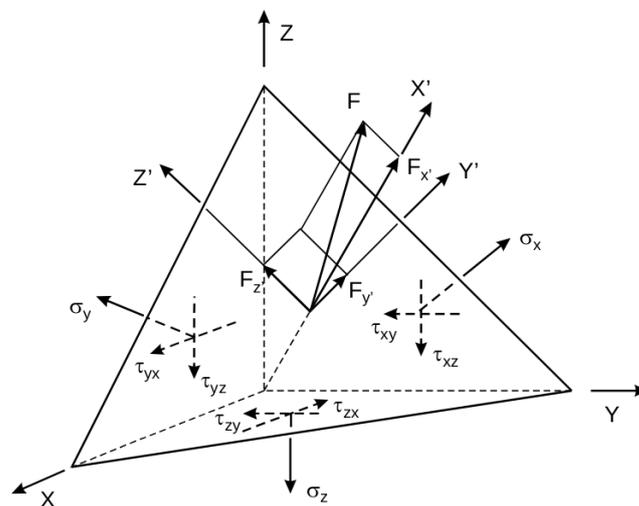


Figura 3.1: Equilíbrio de forças no corpo tetraedro infinitesimal.

Fonte: MARQUIS & SOCIE (2003) [9].

Assumindo um ponto material  $O$  no plano de corte inclinado como origem do sistema de coordenadas  $X'-Y'-Z'$  conforme a Figura 3.2. Esse ponto poderia ser interpretado como o ponto

crítico em relação a resistência a fadiga dependendo da magnitude, direção e sentido do vetor tensão em que se encontra orientado nesse ponto. O plano de corte  $\Delta$  contém perpendicularmente um vetor normal unitário  $\vec{n}$  ou  $(n_x, n_y, n_z)$ , sendo possível determinar a tensão normal  $\sigma_{x'}$  e as componentes cisalhantes  $\tau_{x'y'}$  e  $\tau_{x'z'}$ . Esse plano pode ser referenciado pelas suas coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\phi$  entre 0 a  $2\pi$ , porém devido a propriedade de simetria, adota-se a variação  $\theta, \phi \in [0, \pi]$ .

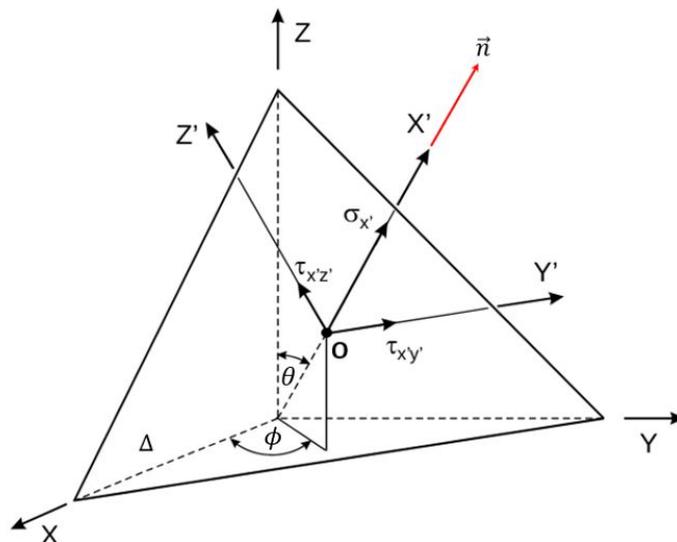


Figura 3.2: Tensões agindo em plano com sistema de coordenadas tridimensional.

Fonte: Adaptado de MARQUIS & SOCIE (2003) [9].

A transformação das coordenadas  $x$ - $y$ - $z$  em  $x'$ - $y'$ - $z'$  é definida a partir da Tabela 3.1:

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$y'$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$z'$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

Tabela 3.1: Tabela de cossenos diretores para transformação de coordenadas tridimensionais.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Onde os cossenos diretores em função de  $\theta$  e  $\phi$  é dado da seguinte maneira:

$$a_{11} = \cos(\phi)\sin(\theta) \quad (3.1)$$

$$a_{12} = \sin(\phi)\sin(\theta) \quad (3.2)$$

$$a_{13} = \cos(\theta) \quad (3.3)$$

$$a_{21} = -\sin(\phi) \quad (3.4)$$

$$a_{22} = \cos(\phi) \quad (3.5)$$

$$a_{23} = 0 \quad (3.6)$$

$$a_{21} = -\text{sen}(\phi) \quad (3.7)$$

$$a_{22} = \text{cos}(\phi) \quad (3.8)$$

$$a_{23} = 0 \quad (3.9)$$

A equação de transformação para tensão normal em qualquer plano é dada por:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x a_{11}^2 + \sigma_y a_{12}^2 + \sigma_z a_{13}^2 + 2(\tau_{xy} a_{11} a_{12} + \tau_{xz} a_{11} a_{13} + \tau_{yz} a_{13} a_{12}) \quad (3.10)$$

Onde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{13}$  são os cossenos dos ângulo entre os eixos  $x$  e  $x'$ ,  $x$  e  $y'$  e  $x$  e  $z'$ , respectivamente. A Equação 3.10 pode ser reescrita como uma combinação linear do tensor de tensões multiplicado por cossenos diretores na direção normal ao plano, dados pelas Equações 3.1,3.2 e 3.3. Rearranjando os termos da equação 3.10:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x a_{11}^2 + \sigma_y a_{12}^2 + \sigma_z a_{13}^2 + 2\tau_{xy} a_{11} a_{12} + 2\tau_{xz} a_{11} a_{13} + 2\tau_{yz} a_{13} a_{12} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{a} = [a_{11}^2, a_{12}^2, a_{13}^2, 2a_{11}a_{12}, 2a_{11}a_{13}, 2a_{13}a_{12}] \quad (3.12)$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6] \quad (3.13)$$

Além disso, define outras duas transformações de coordenadas que podem ser usada para definir os dois esforços cisalhantes no plano inclinado:

$$\begin{aligned} \tau_{X'Y'} &= \sigma_x a_{11} a_{21} + \sigma_y a_{12} a_{22} + \sigma_z a_{13} a_{23} \\ &+ \tau_{XY}(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + \tau_{YZ}(a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22}) + \tau_{ZX}(a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \tau_{X'Z'} &= \sigma_x a_{11} a_{31} + \sigma_y a_{12} a_{32} + \sigma_z a_{13} a_{33} + \\ &+ \tau_{XY}(a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}) + \tau_{YZ}(a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}) + \tau_{ZX}(a_{13}a_{31} + a_{11}a_{33}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Todas as equações de transformação podem ser dadas pela expressão matricial 3.16:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X'} \\ \sigma_{Y'} \\ \sigma_{Z'} \\ \tau_{X'Y'} \\ \tau_{X'Z'} \\ \tau_{Y'Z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{11}a_{12} & 2a_{11}a_{13} & 2a_{13}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{21}a_{22} & 2a_{21}a_{23} & 2a_{23}a_{22} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{31}a_{32} & 2a_{31}a_{33} & 2a_{33}a_{32} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) & (a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) & (a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22}) \\ a_{11}a_{31} & a_{12}a_{32} & a_{13}a_{33} & (a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}) & (a_{13}a_{31} + a_{11}a_{33}) & (a_{13}a_{32} + a_{12}a_{33}) \\ a_{21}a_{31} & a_{22}a_{32} & a_{23}a_{33} & (a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}) & (a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}) & (a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{XZ} \\ \tau_{YZ} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Todos os planos normais à superfície X-Y devem adotar  $\phi = 0$ ; os planos normais à superfície Y-Z devem adotar  $\theta = 0$ .

### 3.2 HIPÓTESE SIMPLIFICADORA

Segundo a referência bibliográfica [35], em 1989, Macha formulou o critério de tensões normais e tangenciais máximas no plano crítico, sendo uma base para diversos critérios por levar em conta a aleatoriedade de um carregamento com amplitude variável.

Dentre as premissas deste critério, Macha definiu da seguinte forma:

- A falha por fadiga é influenciada pela tensão normal na direção normal  $\sigma_n(t)$  e cisalhante na direção  $s$  no plano crítico  $\tau_{ns}(t)$ .
- A direção  $S$  no plano crítico coincide com a direção média da tensão cisalhante máxima  $\tau_{ns,max}(t)$ .
- No estado limite para uma dada vida à fadiga e sob condições de carregamentos aleatórios multiaxiais, a tensão equivalente é o valor máximo da combinação entre  $\sigma_n(t)$  e  $\tau_{ns}(t)$

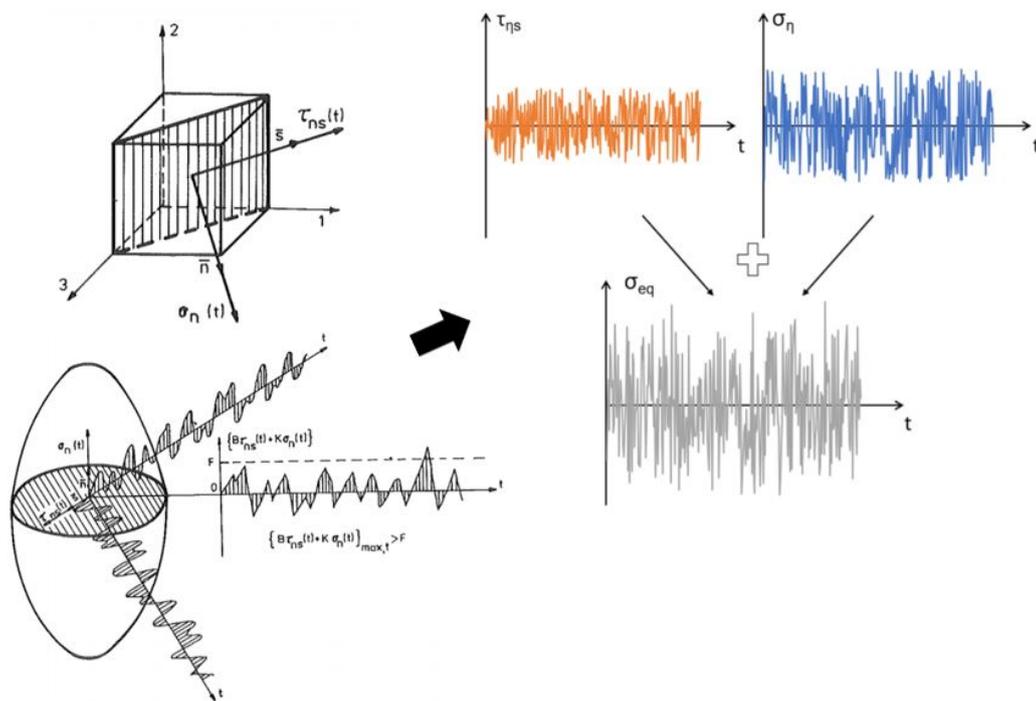


Figura 3.3: Critério de Fadiga Multiaxial pelo método do plano crítico proposto por Macha

Fonte: Adaptado de MACHA, E. (1989) [35] e LAGODA, T. (2019) [36].

A partir dos resultados observados experimentalmente, Macha [35] afirmou que para materiais elastofrágéis (comportamento elástico), o plano crítico é frequentemente perpendicular a direção da tensão normal de máxima amplitude, e, desse modo, o vetor normal unitário  $n$  coincide com a direção média da máxima tensão normal.

Para materiais elásticos, com aplicação do critério de máxima tensão normal no plano crítico, afirma-se que a falha por fadiga é causada pela máxima tensão normal atuando no plano crítico

e que o plano crítico é perpendicular a direção média da máxima tensão principal  $\sigma_1$ , de acordo com a referência bibliográfica [35]. Desse modo, o plano crítico é definido pela direção do vetor normal  $\mathbf{n}$ , que coincide com a direção da máxima tensão principal  $\sigma_1$ , e com aplicação do MMV, a identificação do plano crítico será o plano material em que a variância da tensão equivalente atinge o seu valor máximo. O vetor normal pode ser dado da seguinte forma:

$$\mathbf{n} = l_n \mathbf{i} + m_n \mathbf{j} + n_n \mathbf{k} \quad (3.17)$$

Onde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são vetores unitários nas direções x, y e z respectivamente, como pode ser visto na Figura 3.4.

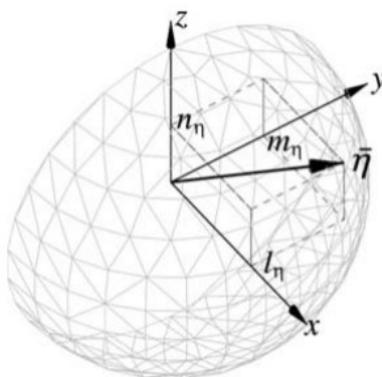


Figura 3.4: Semi-esfera descrita pelo vetor normal  $\mathbf{n}$  ao plano crítico.

Fonte: LAGODA, T., MACHA, E. & NIESLONY, A. [20].

Enquanto para materiais elastoplásticos, um dos dois planos onde as tensões de cisalhamento têm amplitude máxima será o plano crítico, ou seja, o vetor unitário  $\mathbf{s}$  da Figura 3.3 coincide com a direção média da tensão de cisalhamento máxima. É comum também haver posições intermediárias de planos que também são responsáveis pela falha por fadiga.

### 3.3 FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA

#### 3.3.1 Domínio no tempo

Em um sistema mecânico, o processo estocástico corresponde a fenômenos que variam em um certo grau, de forma imprevisível, a medida que o tempo avança e seja obtido uma sequência de tensões em cada intervalo de tempo. De acordo com a referência [20], o modelo no domínio do tempo é capaz de prever o comportamento do histórico de tensão durante um determinado intervalo de tempo. Dessa forma,  $\mathbf{X}(t)$  pode ser utilizado como um processo estocástico da resistência mecânica a fadiga, que pode ser expresso de acordo com a Equação 3.18:

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_6(t)] \quad (3.18)$$

Em cada componente do processo estocástico, dado por  $X_k(t)$ , há um registro amostral de tensão para cada valor do tempo  $t$ .

$$X_k(t) = x_k(t) \quad (k = 1, \dots, 6) \quad (3.19)$$

No domínio do tempo, ocorre uma mudança do estado tridimensional de tensões para um estado equivalente uniaxial de tensões. O tensor de tensões aleatório é descrito como uma variável vetorial aleatória de seis dimensões dependente do tensor  $\sigma(t)$ , como é mostrado pela 2.12.

$$x_k(t) = \begin{cases} \sigma_{ii}(t), & \text{para } i = j; \\ \tau_{ij}(t), & \text{para } i \neq j; \end{cases} \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

$$\begin{aligned} X_1(t) = \sigma_{xx}(t) &= [\sigma_{xx}(t_1), \dots, \sigma_{xx}(t_n)] & X_2(t) = \sigma_{yy}(t) &= [\sigma_{yy}(t_1), \dots, \sigma_{yy}(t_n)] \\ X_3(t) = \sigma_{zz}(t) &= [\sigma_{zz}(t_1), \dots, \sigma_{zz}(t_n)] & X_4(t) = \tau_{xy}(t) &= [\tau_{xy}(t_1), \dots, \tau_{xy}(t_n)] \\ X_5(t) = \tau_{xz}(t) &= [\tau_{xz}(t_1), \dots, \tau_{xz}(t_n)] & X_6(t) = \tau_{yz}(t) &= [\tau_{yz}(t_1), \dots, \tau_{yz}(t_n)] \end{aligned}$$

Ou seja, o vetor processo estocástico de tensão  $\sigma$  é dado por:

$$\sigma(t) = [\sigma_{xx}(t), \sigma_{yy}(t), \sigma_{zz}(t), \tau_{xy}(t), \tau_{xz}(t), \tau_{yz}(t)] \quad (3.22)$$

$$\sigma(t) = [\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \sigma_4(t), \sigma_5(t), \sigma_6(t)] \quad (3.23)$$

Pela hipótese simplificadora, comprovada também experimentalmente por resultados de testes de fadiga sob cargas multiaxiais, o plano crítico é definido pelo vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  e a tensão equivalente avaliada no tempo é dada como uma tensão normal  $\sigma_n(t)$ , que pode ser obtido a partir da transformação proposta pela Equação 3.11. Dessa forma, pela nomenclatura de Lagoda, a tensão  $\sigma_{eq}(t)$  que é equivalente a  $\sigma_n(t)$  é dada pela Equação 3.24:

$$\sigma_{eq}(t) = \sigma_{xx}(t) l_n^2 + \sigma_{yy}(t) m_n^2 + \sigma_{zz}(t) n_n^2 + 2 (\tau_{xy}(t) l_n m_n + \tau_{xz}(t) l_n n_n + \tau_{yz}(t) m_n n_n) \quad (3.24)$$

Com base na equação de transformação da tensão normal em qualquer plano, a Equação 3.24 pode ser reescrita como uma combinação linear das componentes do vetor  $\mathbf{a}$ , representados por  $a_k$  na Equação 3.13 e modificados com as direções do vetor normal  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_6] = [l_n^2, m_n^2, n_n^2, 2l_n m_n, 2l_n n_n, 2m_n n_n] \quad (3.25)$$

$$\sigma_{eq}(t) = \sum_{k=1}^6 a_k \sigma_k(t) \quad (k = 1, \dots, 6) \quad (3.26)$$

Com a aplicação do critério de máxima tensão normal, o método da máxima variância (MMV) permite determinar o plano no qual a variação da tensão equivalente atinge seu valor máximo,

sendo que esse plano será considerado como plano crítico e estará sujeito a falha por fadiga. Pela demonstração I.3 do Apêndice, percebe-se que o vetor dos coeficientes do critério de falha de fadiga multiaxial é igual ao vetor de  $\alpha$  da combinação linear que resulta o  $\sigma_{eq}$ . Logo, a partir da Equação 3.27, é possível determinar a variância da tensão equivalente:

$$var[\sigma_{eq}(t)] = \sum_i \sum_j a_i a_j Cov[\sigma_i(t), \sigma_j(t)] \quad (3.27)$$

Desse modo, a determinação da posição do plano crítico pelo MMV requer que seja conhecida a matriz de covariância dos componentes do tensor de tensões. A partir da Equação 3.27, o termo da covariância pode ser determinado pela matriz da covariância  $[C]$ , utilizando o histórico de tensão em cada instante de tempo.

$$[C] = Cov[\sigma_i(t), \sigma_j(t)] = \begin{pmatrix} C_{xx,xx} & C_{xx,yy} & C_{xx,zz} & C_{xx,xy} & C_{xx,xz} & C_{xx,yz} \\ C_{yy,xx} & C_{yy,yy} & C_{yy,zz} & C_{yy,xy} & C_{yy,xz} & C_{yy,yz} \\ C_{zz,xx} & C_{zz,yy} & C_{zz,zz} & C_{zz,xy} & C_{zz,xz} & C_{zz,yz} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy,zz} & C_{xy,xy} & C_{xy,xz} & C_{xy,yz} \\ C_{xz,xx} & C_{xz,yy} & C_{xz,zz} & C_{xz,xy} & C_{xz,xz} & C_{xz,yz} \\ C_{yz,xx} & C_{yz,yy} & C_{yz,zz} & C_{yz,xy} & C_{yz,xz} & C_{yz,yz} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Como foi visto anteriormente pela Prova (2.3), a covariância de duas componentes iguais do tensor de tensões, ou seja, com mesmo subíndice ( $m = n$ ), é igual a variância da própria componente. Logo, a covariância pode ser dada por meio de duas condições:

$$C_{m,n} = V_m = Cov[\sigma_i(t), \sigma_j(t)] = var[\sigma_m(t)] \quad \text{Para } m = n \quad (3.29)$$

$$C_{i,j} = Cov[\sigma_i(t), \sigma_j(t)] \quad \text{Para } m \neq n \quad (3.30)$$

Onde  $i, j = xx, yy, zz, xy, xz$  e  $yz$ . Usando 3.29 e 3.30, o termo da covariância da Equação 3.27 será representado por uma matriz quadrada simétrica de ordem seis, que contém ambos os termos de variância e covariância, como é visto na 3.31:

$$[C] = \begin{pmatrix} V_{xx} & C_{xx,yy} & C_{x,zz} & C_{xx,xy} & C_{xx,xz} & C_{xx,yz} \\ C_{yy,xx} & V_{yy} & C_{yy,zz} & C_{yy,xy} & C_{yy,xz} & C_{yy,yz} \\ C_{zz,xx} & C_{zz,yy} & V_{zz} & C_{zz,xy} & C_{zz,xz} & C_{zz,yz} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy,zz} & V_{xy} & C_{xy,xz} & C_{xy,yz} \\ C_{xz,xx} & C_{xz,yy} & C_{xz,zz} & C_{xz,xy} & V_{xz} & C_{xz,yz} \\ C_{yz,xx} & C_{yz,yy} & C_{yz,zz} & C_{yz,xy} & C_{yz,xz} & V_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Os ângulos críticos são determinados a partir do plano crítico, onde a variância de  $\sigma_{eq}(t)$  obteve seu valor máximo como é visto na Equação 3.32.

$$\theta^c, \phi^c = max[var_{\sigma_{eq}}(\theta, \phi)] \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Domínio na frequência

No domínio na frequência, há aplicação das funções de densidade de potência espectrais PSD para avaliar as características das frequências no histórico de tensão. Para os métodos espectrais, os estados de tensão são descritos pela matriz da função de densidade espectral de potência (PSD) como foi vista na matriz da Expressão 2.64.

Como é apresentado na referência bibliográfica [21], a partir da densidade espectral de potência  $\overline{G}(f)$ , a  $G_{eq}(f)$  pode ser obtida pela Equação 3.33:

$$G_{eq}(f) = \mathbf{a}\overline{G}(f)\mathbf{a}^T \quad (3.33)$$

Onde:

$$\overline{G}(f) = \begin{bmatrix} G_{11}(f) & G_{12}(f) & G_{13}(f) & G_{14}(f) & G_{15}(f) & G_{16}(f) \\ G_{21}(f) & G_{22}(f) & G_{23}(f) & G_{24}(f) & G_{25}(f) & G_{26}(f) \\ G_{31}(f) & G_{32}(f) & G_{33}(f) & G_{34}(f) & G_{35}(f) & G_{36}(f) \\ G_{41}(f) & G_{42}(f) & G_{43}(f) & G_{44}(f) & G_{45}(f) & G_{46}(f) \\ G_{51}(f) & G_{52}(f) & G_{53}(f) & G_{54}(f) & G_{55}(f) & G_{56}(f) \\ G_{61}(f) & G_{62}(f) & G_{63}(f) & G_{64}(f) & G_{65}(f) & G_{66}(f) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Expandindo a Expressão 3.33:

$$G_{eq}(f) = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6] \begin{bmatrix} G_{11}(f) & G_{12}(f) & G_{13}(f) & G_{14}(f) & G_{15}(f) & G_{16}(f) \\ G_{21}(f) & G_{22}(f) & G_{23}(f) & G_{24}(f) & G_{25}(f) & G_{26}(f) \\ G_{31}(f) & G_{32}(f) & G_{33}(f) & G_{34}(f) & G_{35}(f) & G_{36}(f) \\ G_{41}(f) & G_{42}(f) & G_{43}(f) & G_{44}(f) & G_{45}(f) & G_{46}(f) \\ G_{51}(f) & G_{52}(f) & G_{53}(f) & G_{54}(f) & G_{55}(f) & G_{56}(f) \\ G_{61}(f) & G_{62}(f) & G_{63}(f) & G_{64}(f) & G_{65}(f) & G_{66}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Resolvendo o produto, a Equação 3.33 será representada da seguinte forma:

$$G_{eq} = a_1^2 G_{11} + a_1 a_4 G_{41} + a_1 a_4 G_{14} + a_4^2 G_{44} = a_1^2 G_{11} + a_4^2 G_{44} + (a_1 a_4)(G_{41} + G_{14}) \quad (3.36)$$

$$G_{eq} = a_1^2 G_{11} + a_4^2 G_{44} + 2a_1 a_4 \Re(G_{41}) \quad (3.37)$$

A aplicação do MMV no domínio da frequência ocorre de forma análoga ao do domínio do tempo, com identificação do valor máximo da variância da função densidade de potência da tensão equivalente, proposta na Equação 3.38, na qual o vetor dos coeficientes coincide com o vetor  $\mathbf{a}$  da combinação linear:

$$var[G_{eq}(f)] = \sum_i \sum_j a_i a_j var(G_{kl}) \quad (3.38)$$

$$var(G_{kl}) = \Re \left[ \int_0^\infty G_{kl}(f) df \right] \quad (k,l=1,\dots,6) \quad (3.39)$$

A matriz de densidade espectrais de potência é dada pelas partes reais dos momentos espectrais de ordem nula das funções densidade espectrais de potência. Com isso, pelo método MMV, identifica-se os ângulos críticos onde a variância apresenta seu valor máximo:

$$\theta^c, \phi^c = \max[\text{var}_{G_{eq}}(\theta, \phi)] \quad (3.40)$$

Vale ressaltar que a variância obtida também é o momento espectral da função densidade espectral de potência equivalente como mostra a Equação 3.41:

$$\text{var}(G_{eq}) = m_{o,G_{eq}} = \Re \left[ \int_0^\infty G_{eq}(f) df \right] \quad (3.41)$$

Dessa forma, o número de oscilações, também conhecido como taxa de cruzamentos, e o número de picos locais são dados respectivamente pelas Equações 3.42 e 3.43. Enquanto o número de oscilações e picos locais da função densidade espectral equivalente é dado pelas Equações 3.44 e 3.45.

$$N_o^+ = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (3.42)$$

$$M^+ = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (3.43)$$

$$N_o^+ = \sqrt{\frac{m_{2,G_{eq}}}{m_{0,G_{eq}}}} \quad (3.44)$$

$$M^+ = \sqrt{\frac{m_{4,G_{eq}}}{m_{2,G_{eq}}}} \quad (3.45)$$

### 3.3.3 Tempo de vida do componente

Há duas abordagens para estimativa do tempo de vida contra falha que devem ser implementadas e comparadas:

- Tempo de vida pelo Método Rainflow.
- Tempo de vida pelo Método Espectral.

A estimativa de vida no domínio do tempo é baseada no método de contagem de ciclos por meio da hipótese de Palmgren-Miner de acúmulo de danos. Esta teoria considera o processo de fadiga como um processo de acumulação de danos até um certo ponto máximo de danos toleráveis. Considerando este acúmulo como linear, cada ciclo contribui para uma mesma quantidade de danos em um dado nível de tensão.

Segundo esta hipótese, para ocorrer uma falha, a razão do somatório do número de ciclos provenientes de certas amplitudes de tensão e do número de ciclos de falha deve ser unitária. Aplicando a Regra de Palmgren-Miner na Equação 2.93:

$$D = \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{N_j} = \sum_{j=1}^m d_j = 1 \quad (\text{Falha}) \quad (3.46)$$

A partir de um tempo de observação  $T_o$  determina-se o acúmulo de dano para um tempo observado de simulação. Desse modo, uma regra de três pode ser implementada para determinar o tempo de falha, ou seja, o tempo necessário para que o somatório de dano seja um valor unitário,  $T_{RF}$ , é dado por:

$$T_{RF} = \frac{T_o}{D(T_o)} \quad (3.47)$$

$T_{RF}$  : Tempo de vida à fadiga calculada com o método de contagem cíclica.

$T_o$  : Tempo de observação da simulação.

$D(T_o)$  : Dano acumulado durante o tempo de observação ( $T_o$ ).

Quanto a previsão de vida no domínio da frequência, utiliza-se a distribuição de Rayleigh em sinais de banda estreita, podendo ser obtido de duas formas em espectros de banda estreita:

$$T_{SP} = \frac{A}{N_o^+(\sqrt{2m_o})^m \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \quad (3.48)$$

$$T_{SP} = \frac{A}{M^+(\sqrt{2m_o})^m \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \quad (3.49)$$

Enquanto para banda larga, o tempo de vida pelo método espectral com correção Wirsching and Light pode ser estimado rearranjando a Equação 2.103 e considerando o somatório de acúmulo de dano igual a 1 como crítico.

$$T_{SP,BB} = \frac{A}{\lambda N_o^+(\sqrt{2m_o})^m \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \quad (3.50)$$

### 3.4 METODOLOGIA PROPOSTA POR LAGODA & MACHA

O objetivo da metodologia proposta por Lagoda & Macha é a aplicação do método de máxima variância (MMV), sendo formulado no domínio do tempo e da frequência para abordagem de contagem cíclica e espectral com o intuito de estimar uma vida à fadiga.

*Parte 1 - Parâmetros Iniciais e Geração de Banda* é uma etapa de cálculo da variâncias dos valores RMS referenciais que são as entradas do algoritmo proposto, determinação da variância do vetor auxiliar e geração de banda para determinar as PSDs referenciais. Executada pelo **Algoritmo 1** do Capítulo 5.

*Parte 2 - Reconstrução do sinal* é uma etapa de reconstrução do sinal no tempo a partir das PSDs referenciais. O objetivo é a recuperação do sinal gaussiano obtido nos ensaios do objeto de estudo,

dados pelas referências [21] e [20]. Essa etapa é executada pelo **Algoritmo 2** do Capítulo 5.

*Parte 3 - Análise no Domínio no Tempo* é uma etapa executada pelo **Algoritmo 3** do Capítulo 5 que realiza a varredura dos ângulos diretores no tempo para determinação da tensão normal equivalente, planos críticos e os valores RMS simulados a partir da reconstrução do sinal no tempo.

*Checking 1* é uma verificação do erro relativo entre os RMS referenciais e os simulados na Parte 3 da Figura 1 do Tópico I.2 do Apêndice. O monitoramento do erro relativo permite garantir uma confiabilidade dos resultados simulados de acordo com o tempo de observação estabelecido.

### BLOCO 1 - Domínio do Tempo

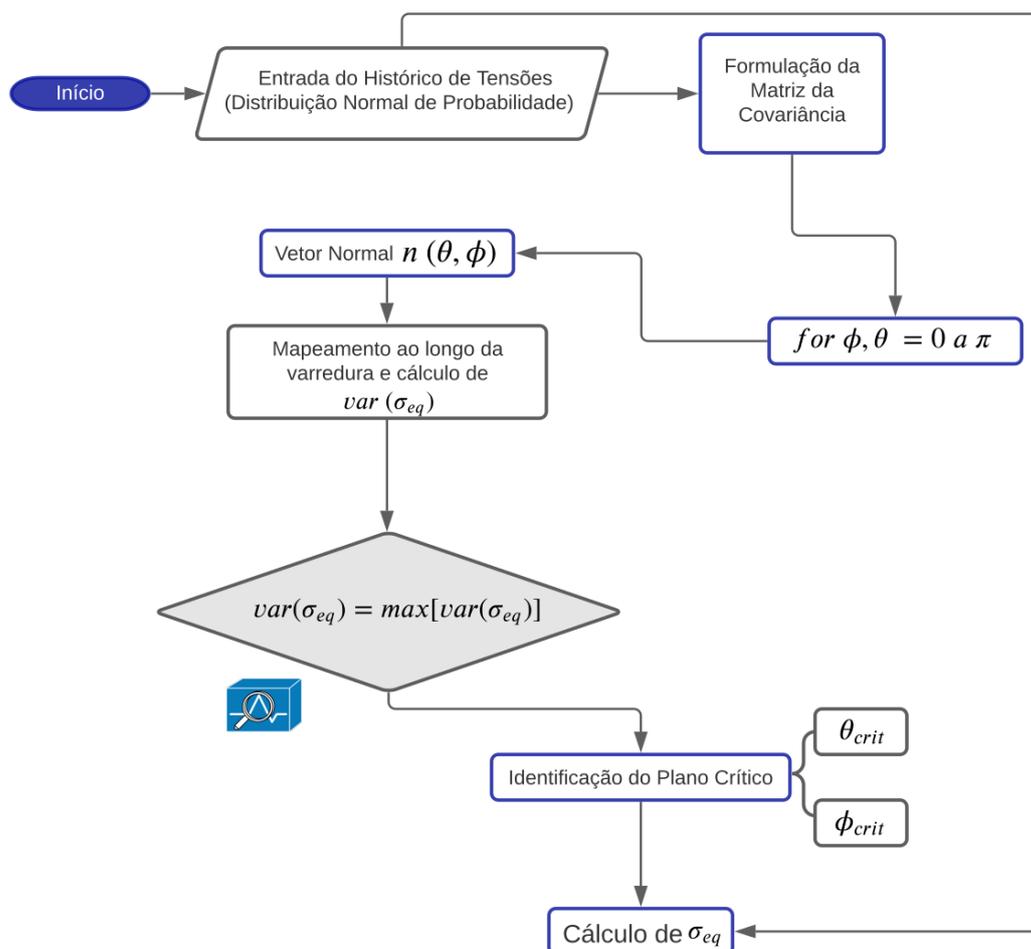


Figura 3.5: Fluxograma da Parte 3 - Domínio no tempo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

*Parte 4 - Análise no Domínio da Frequência* é uma etapa executada pelo **Algoritmo 5** do Capítulo 5 utilizando os sinais reconstruídos para a geração de PSDs simuladas a partir do Periodograma de Welch. Em seguida, é realizada a varredura nos ângulos diretores e determina-se a função densidade espectral de potência/PSD equivalente.

## BLOCO 2 - Domínio da Frequência

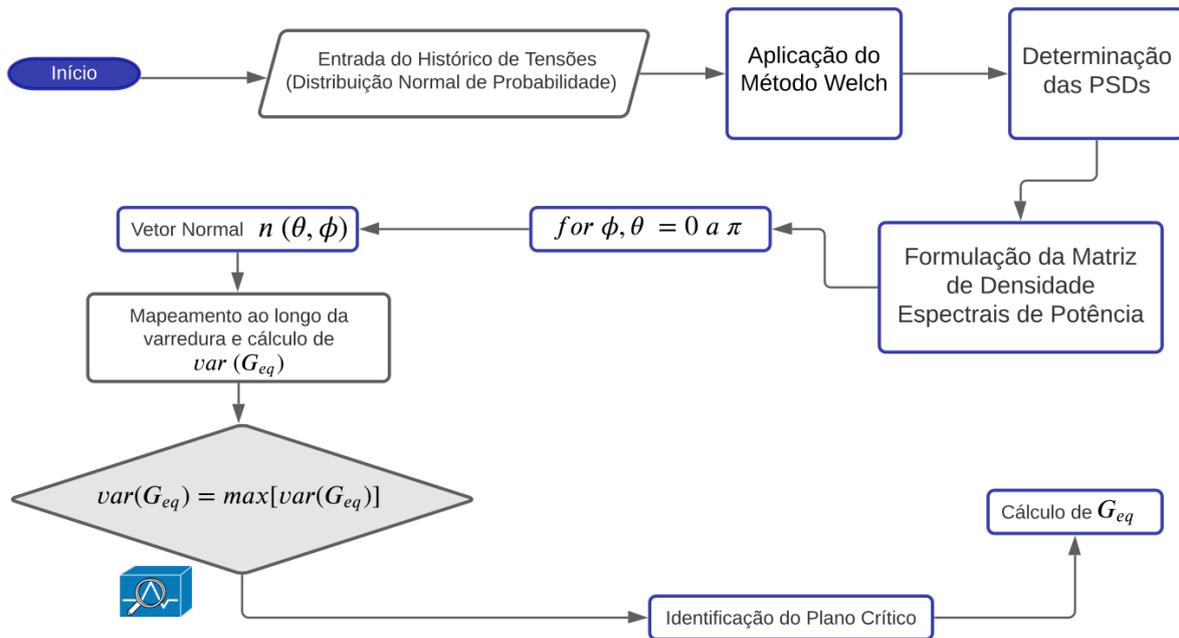


Figura 3.6: Domínio na frequência.

Fonte: Elaborado pelo autor.

*Checking 2* é uma verificação gráfica das PSDs simuladas pelo Periodograma de Welch com as PSDs referenciais. O tempo de observação é um fator crucial para essa etapa por controlar o tamanho do espectro de potência.

*Checking 3* é uma verificação dos ângulos críticos no domínio do tempo e da frequência, se os planos críticos coincidem. Espera-se que, simulado por um tempo de observação suficiente para a convergência, os ângulos críticos coincidam para validação do plano crítico. Além do tempo de observação, o coeficiente de correlação também é um fator de grande influência nos resultados dos planos críticos.

*Checking 4* é uma verificação do erro relativo entre as máximas variâncias obtidas pelo Método de Máxima Variância (MMV).

A partir dos resultados obtidos, é possível estimar o tempo de vida de um componente mecânico sujeito a uma fadiga multiaxial a partir de um método de contagem de ciclo e acúmulo de dano no domínio do tempo e utilização dos parâmetros espectrais para o acúmulo de dano no domínio da frequência.

No Apêndice do presente trabalho pode ser visualizado o esquema completo da metodologia proposta pelo Lagoda no Tópico I.2.

## 4 METODOLOGIA PROPOSTA POR SUSMEL

### Resumo

Neste capítulo será abordado a estratégia utilizada para análise de fadiga multiaxial proposta por Susmel, como hipóteses simplificadoras, orientação do plano e determinação do plano crítico.

### 4.1 HIPÓTESE SIMPLIFICADORA

Segundo Susmel (2009) [2], o Método das Curvas de Wöhler Modificadas (MCWM) toma como ponto de partida a hipótese de que, no regime de fadiga de ciclo médio/alto, os danos por fadiga em materiais homogêneos e isotrópicos, submetidos a carregamentos mecânicos, podem ser previstos com a avaliação do comportamento da trinca em sua fase de iniciação e propagação inicial pelas tensões macroscópicas. Assume que danos aos grãos dentro da zona do processo de fadiga onde ocorre os estágios iniciais da trinca dependem da tensão de cisalhamento, sendo essa hipótese reforçada por Brown e Miller (1973) e Socie e Bannantine (1988). Considere um plano material submetido a um sistema complexo de forças cíclicas resultando em um estado de tensão multiaxial que danifica a zona do processo de fadiga, como mostra a Figura 4.1.

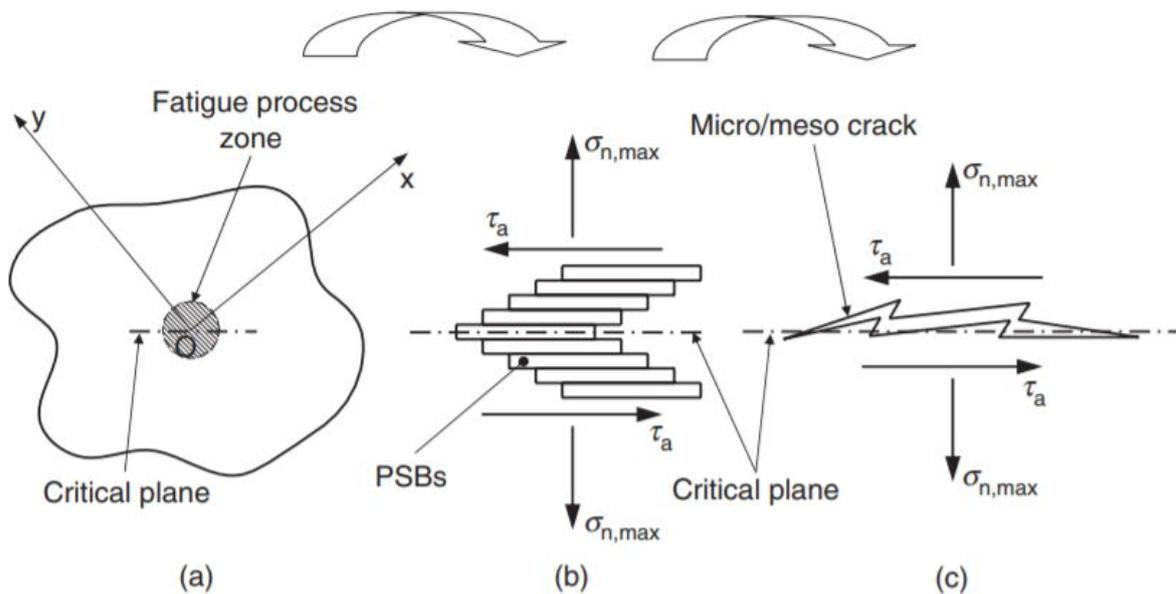


Figura 4.1: Teoria do modelo de dano.

Fonte: SUSMEL, L. (2009) [2].

A hipótese das tensões de cisalhamento, são apoiadas por evidências experimentais de que tanto a formação das bandas de deslizamento persistentes (em inglês PSBs) quanto a iniciação

e propagação inicial de micro trincas estão relacionadas com as variações cíclicas na direção da tensão de cisalhamento, lembrando que a presença das PSDs se deve ao fato de que certos planos tendem a deslizar em direções preferenciais, e além disso, a orientação coincide com a direção no qual o material experimenta um carregamento máximo. Isso implica que, sob carregamento de fadiga multiaxial, entre os infinitos planos que passam pelo ponto quente do material, o plano em que o dano por fadiga atinge seu valor máximo é aquele que experimenta a amplitude máxima da tensão de cisalhamento,  $\tau_a$ .

Outra tensão que influencia o fenômeno de fadiga é a componente perpendicular ao plano da iniciação de trinca, segundo Socie (1987). Em particular, a tensão normal trativa é outra tensão que influencia no processo, já que a compressiva reduz a taxa de crescimento da trinca devido ao esmagamento e o atrito entre as superfícies da fissura, inibindo o deslizamento das PSDs. Dessa forma, é possível assumir que o efeito de tensão média pode ser eficientemente levado em conta através da tensão máxima perpendicular ao plano crítico,  $\sigma_{n,max}$ , segundo Findley (1959) e Matake (1977).

Quanto a determinação do plano crítico, independentemente da complexidade do estado de tensão, sempre irá exigir dois ou mais candidatos de plano material que experimentam a máxima amplitude de tensão de cisalhamento. Nesse caso, entre todos os planos críticos potenciais, aquele que deve ser utilizado para realizar a avaliação da fadiga é o plano caracterizado pelo maior valor da tensão normal máxima. Dessa forma, para estimar a resistência a fadiga de uma forma correta no MCWM é preciso determinar uma taxa responsável por indicar o grau de multiaxialidade do campo de tensão que danifica a zona de processo de fadiga. Essa taxa é chamada de “razão de tensão” ( $\rho$ ) e é dado pela Equação 4.1:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} \quad (4.1)$$

Notou-se que a principal característica do parâmetro de tensão acima é a sua sensibilidade tanto a tensões estáticas sobrepostas como a presença de carregamentos não proporcionais, principalmente quando estão em fora de fase. Em relação as tensões estáticas sobrepostas, diferentes materiais sujeitos a uma carga uniaxial são caracterizados por diferentes sensibilidades na presença de tensões médias não nulas. Para investigar melhor a contribuição da tensão média perpendicular ao plano crítico para o dano total a fadiga, Susmel propôs uma modificação na Equação 4.1, com base em outra relação dada pela Equação 4.2:

$$\rho = \rho_m + \rho_a = \frac{\sigma_{n,m}}{\tau_a} + \frac{\sigma_{n,a}}{\tau_a} \quad (4.2)$$

Sendo que  $\rho_m$  representa a parcela de efeitos de tensões médias não nulas e  $\rho_a$  representa a parcela de influência do grau de não proporcionalidade da carga aplicada.

Uma outra reformulação para a Equação 4.2 apresenta uma forma mais efetiva para o dano por fadiga modelado pelo MCWM. Além de explicar de maneira mais eficiente o efeito prejudicial

das tensões médias normais, segundo a referência bibliográfica (2), Kaufman e Topper (2003) observaram, experimentalmente, que quando a tensão média, perpendicular ao plano crítico, atinge um determinado valor de tensão limite do material, um aumento adicional de  $\sigma_{n,m}$  nem sempre resulta em um aumento do dano por fadiga. Tomando essa afirmação como ponto de partida, torna-se necessário a obtenção de um valor efetivo da razão de tensão do plano crítico,  $\rho_{eff}$ . A parcela representativa dos efeitos das tensões normais médias ao plano crítico vem acompanhado de um fator de ajuste, chamado de índice de sensibilidade a tensão média ( $m_\rho$ ), como mostra a Equação 4.3. Dessa forma, como é apresentado na Figura 4.2, a Equação 4.3 reflete perfeitamente as tensões envolvidas no processo de fadiga, considerando a máxima amplitude de tensão cisalhante  $\tau_a$  responsável pela origem e propagação da trinca e a amplitude e média da componente normal de tensão,  $\sigma_{n,a}$  e  $m_\rho \sigma_{n,m}$  respectivamente, pela contribuição para o dano por fadiga no material.

$$\rho_{eff} = \rho_m + \rho_a = m_\rho \frac{\sigma_{n,m}}{\tau_a} + \frac{\sigma_{n,a}}{\tau_a} \quad (4.3)$$

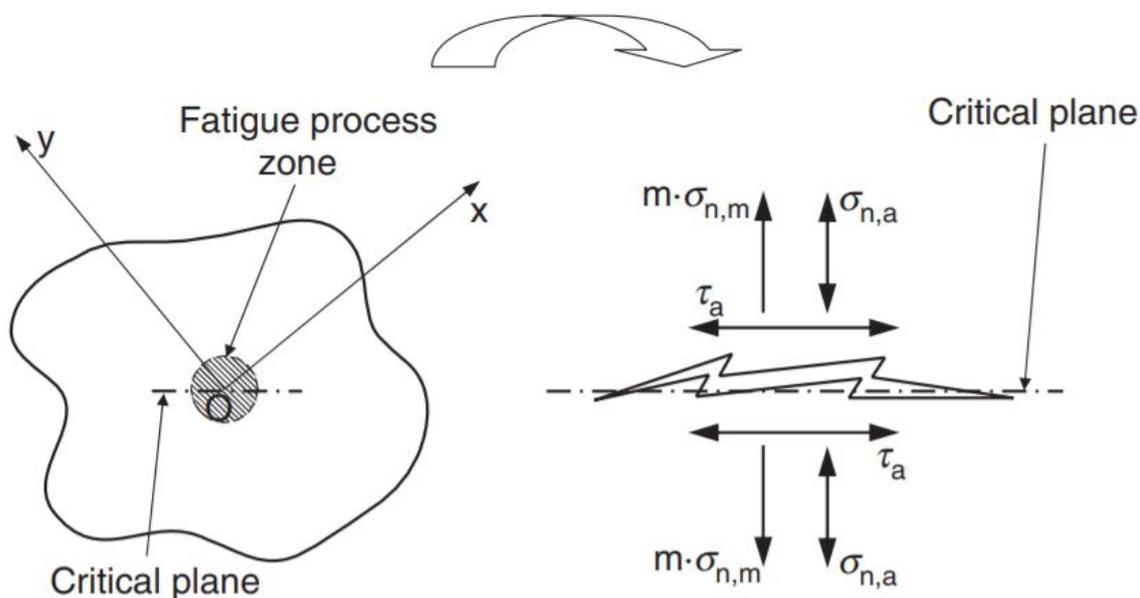


Figura 4.2: Modelo de dano ajustado para a metodologia.

Fonte: SUSMEL, L. (2009) [2].

Esse parâmetro  $m_\rho$  representa a porção da tensão média relativa ao plano crítico que efetivamente abre as micro/meso trincas, favorecendo o fenômeno da propagação. Quanto aos valores assumidos por essa variável, pode-se constar os seguintes comportamentos do material sob tensões médias:

- $m_\rho = 0$  : O material não tem sensibilidade a presença de tensão média
- $m_\rho = 1$  : O material é totalmente sensível a tensão média.
- $0 < m_\rho < 1$  : O material apresenta um grau de sensibilidade a tensão média.

## 4.2 FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Para formalizar a teoria, considere um corpo em um sistema de referência  $O_{xyz}$  sujeito a um sistema complexo de forças e momentos que resultam em um estado de tensão tridimensional variável ao longo do tempo.

O plano material genérico, como mostra a Figura 4.3, pode ser orientado pelos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  por meio de um vetor normal  $\mathbf{n}$ , enquanto o segundo sistema de referência  $O_{e_a e_b n}$ , um sistema local de coordenadas pertencente a um plano material genérico onde o vetor normal passe pelo ponto de origem, tem sua orientação definida por outros vetores unitários  $\mathbf{e}_a$  e  $\mathbf{e}_b$  cujo produto vetorial desses vetores resulte no vetor normal, como mostra a Figura 4.3. Utilizando, o método do plano crítico, é possível identificar a orientação de um plano genérico na forma do sistema de coordenadas anterior,  $xyz$ .

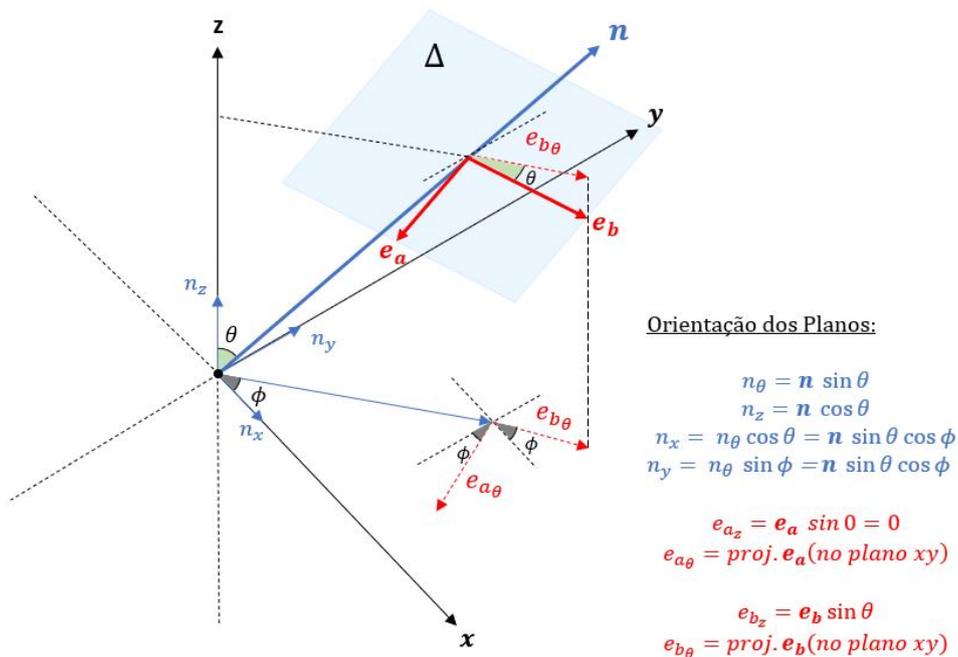


Figura 4.3: Introdução de sistema local de coordenadas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a Figura 4.3, 4.4 e 4.5, os vetores unitários que definem a orientação dos eixos  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_a$  e  $\mathbf{e}_b$ <sup>1</sup> podem ser expressos da seguinte forma:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

<sup>1</sup> $\mathbf{e}_b$ : para projetar esse vetor unitário faz necessário projetar no plano  $z\theta$  para depois decompô-lo no plano  $xy$ .

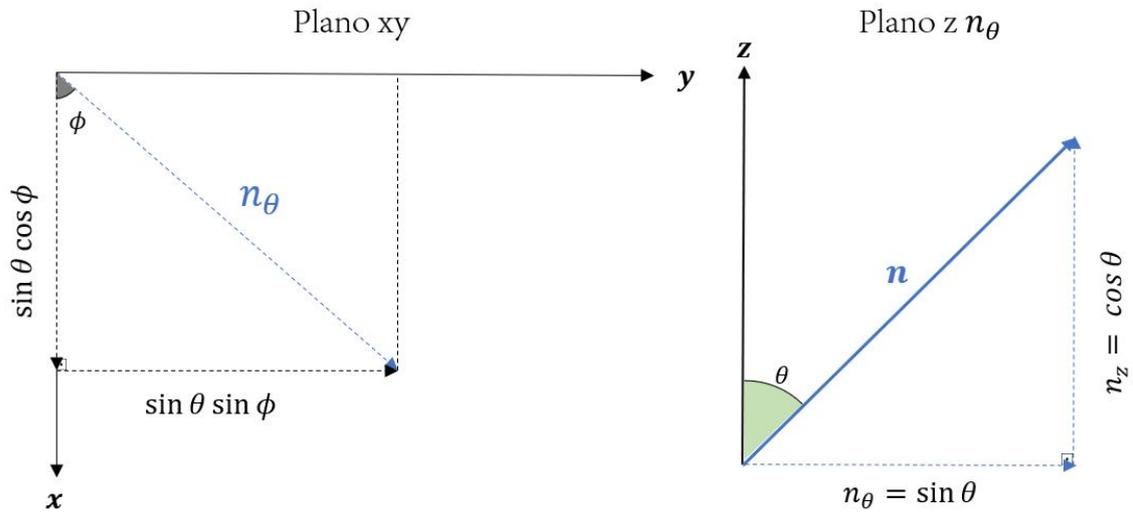


Figura 4.4: Projeção do vetor unitário  $n$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} e_{a_x} \\ e_{a_y} \\ e_{a_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} e_{b_x} \\ e_{b_y} \\ e_{b_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

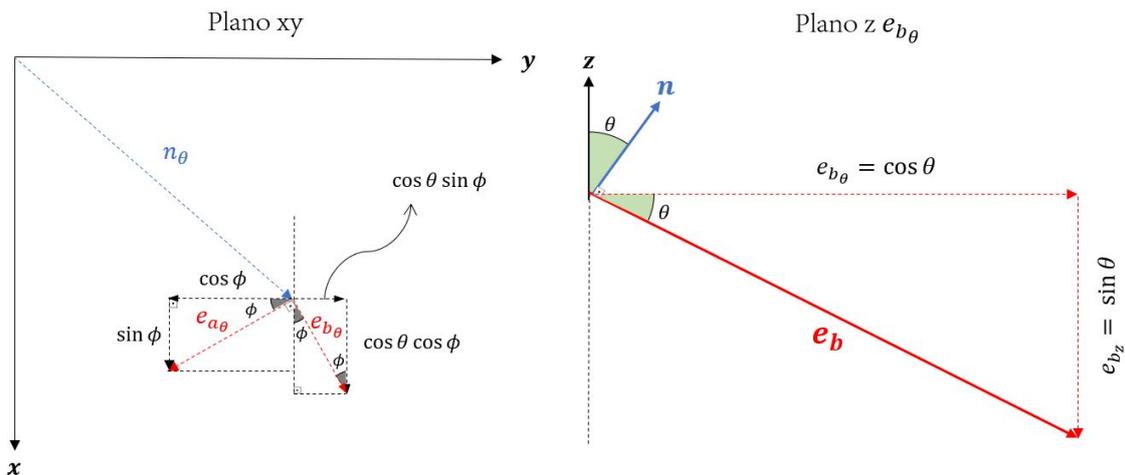


Figura 4.5: Projeção do vetor unitário  $e_a$  e  $e_b$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base na Figura 4.6, Susmel supôs uma direção genérica  $m$  para o vetor unitário  $\mathbf{q}$  em dado plano material situado no novo sistema de coordenadas e orientado pelo ângulo  $\alpha$  entre o vetor unitário  $\mathbf{a}$  e o vetor unitário  $\mathbf{q}$ . As componentes do vetor  $\mathbf{q}$  podem ser escritos da seguinte forma vetorial:

$$\mathbf{q} = q_{e_a} + q_{e_b} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{q} = e_a \cos \alpha + e_b \sin \alpha \quad (4.8)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \phi + \sin \alpha \cos \theta \cos \phi \\ -\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \alpha \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

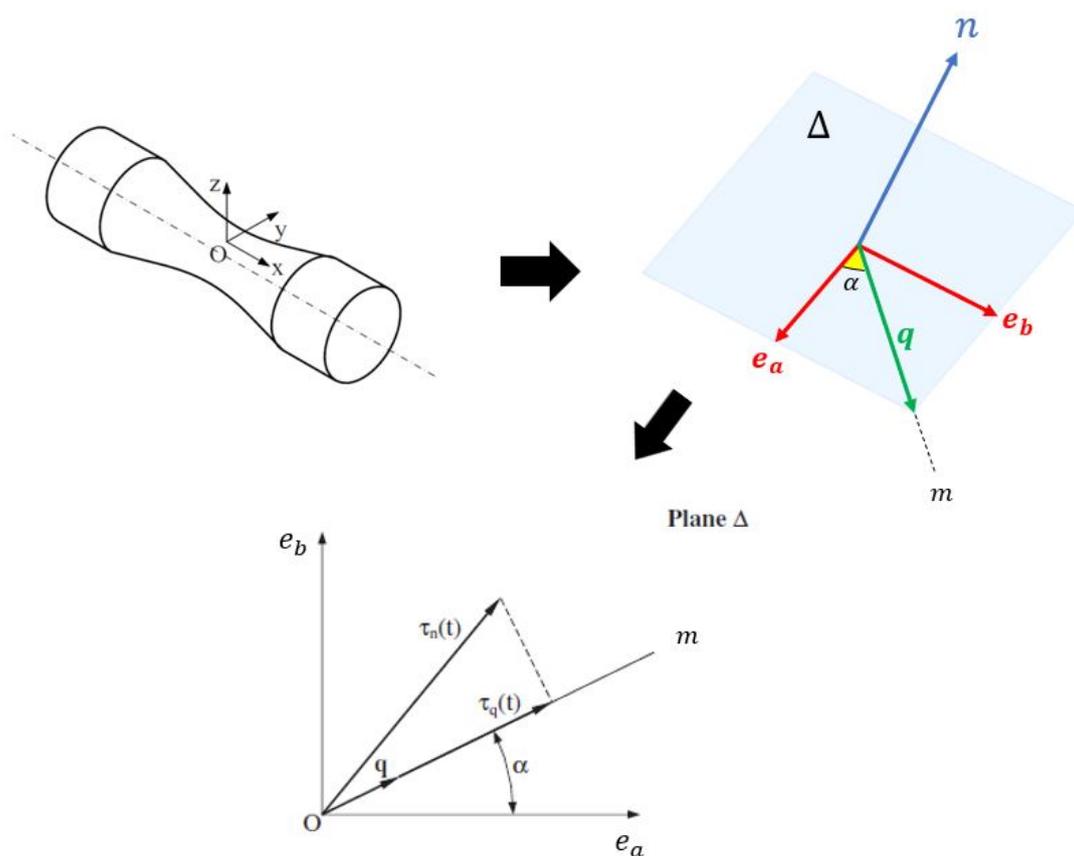


Figura 4.6: Direção do vetor  $\mathbf{q}$  pertencente ao plano material e definição da tensão de cisalhamento.

Fonte: Adaptado de SUSMEL, L. , 2010 [22] .

De acordo com a definição acima, o valor instantâneo da tensão normal ao plano material  $\Delta$ ,  $\sigma_n(t)$ , bem como da tensão de cisalhamento ao longo da direção do vetor unitário  $\mathbf{q}$ ,  $\tau_q(t)$ , a partir de uma projeção do estado de tensão na direção  $m$ , pode então ser calculado, respectivamente, como:

$$\sigma_n(t) = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\tau_q(t) = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Desenvolvendo a Expressão 4.11, o valor instantâneo da tensão de cisalhamento resolvida ao longo da direção  $m$ :

$$\tau_q(t) = \mathbf{q}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) \mathbf{n} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tau_q(t) = n_x \cdot (q_z \cdot \tau_{xz} + q_y \cdot \tau_{xy} + q_x \cdot \sigma_{xx}) + n_y \cdot (q_z \cdot \tau_{yz} + q_x \cdot \tau_{xy} + q_y \cdot \sigma_{yy}) \\ + n_z \cdot (q_y \cdot \tau_{yz} + q_x \cdot \tau_{xz} + q_z \cdot \sigma_{zz}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Rearranjando a Equação 4.13, isolando os termos de tensão:

$$\begin{aligned} \tau_q(t) = \sigma_x \cdot (n_x \cdot q_x) + \sigma_{yy} \cdot (n_y \cdot q_y) + \sigma_{zz} \cdot (n_z \cdot q_{zz}) + \tau_{xy} \cdot (n_x \cdot q_y + n_y \cdot q_x) \\ + \tau_{xz} \cdot (n_x \cdot q_z + n_z \cdot q_x) + \tau_{yz} \cdot (n_y \cdot q_z + n_z \cdot q_y) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Reescrevendo o tensor na Notação de Voigt, a representação de  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  seria um processo vetorial de seis dimensões e, com isso, a tensão cisalhante pode ser expressa como:

$$\tau_q(t) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{s}(t) \quad (4.15)$$

Onde o tensor na Notação de Voigt é dado pela seguinte maneira:

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\sigma}^T(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{zz}(t) & \tau_{xy}(t) & \sigma_{xz}(t) & \sigma_{yz}(t) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Onde  $\mathbf{d}$  é conhecido como vetor dos cossenos diretores, sendo expresso de acordo com a Expressão 4.17:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \cdot q_x \\ n_y \cdot q_y \\ n_z \cdot q_z \\ n_x \cdot q_y + n_y \cdot q_x \\ n_x \cdot q_z + n_z \cdot q_x \\ n_y \cdot q_z + n_z \cdot q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [\sin(\theta) \sin(2\phi) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sin(2\theta) \cos(\phi)^2] \\ \frac{1}{2} [-\sin(\theta) \sin(2\phi) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sin(2\theta) \sin(\phi)^2] \\ -\frac{1}{2} \sin(\alpha) \sin(2\theta) \\ \frac{1}{2} \sin(\alpha) \sin(2\phi) \sin(2\theta) - \cos(\alpha) \cos(2\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\alpha) \cos(\phi) \cos(2\theta) + \cos(\alpha) \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\alpha) \sin(\phi) \cos(2\theta) - \cos(\alpha) \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A demonstração do vetor  $\mathbf{d}$  pode ser consultada no Tópico I.3 do Apêndice e coincide novamente com a combinação linear que resulta no  $\tau_q(t)$ . Ajustando a Equação 4.14, deixando em evidência os termos de tensão, é possível recuperar o vetor  $\mathbf{d}$  na forma de combinação linear com a tensor na Notação de Voigt.

A formulação do modelo é baseada na suposição de que o dano por fadiga maximiza em um plano que experimenta a máxima amplitude da tensão de cisalhamento. A partir da tensão de cisalhamento de uma direção genérica  $m$ ,  $\tau_q$ , o MMV identifica o plano crítico a partir da variância do histórico de tensão de cisalhamento resolvido na direção em que atinge seu valor máximo. Com isso, a variância da tensão de cisalhamento,  $\tau_q(t)$ , resolvida ao longo da direção  $m$  pode então ser calculada diretamente como:

$$var[\tau_q(t)] = \mathbf{d}^T [C] \mathbf{d} \quad (4.18)$$

$$var[\tau_q(t)] = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xx,xx} & C_{xx,yy} & C_{xx,zz} & C_{xx,xy} & C_{xx,xz} & C_{xx,yz} \\ C_{yy,xx} & C_{yy,yy} & C_{yy,zz} & C_{yy,xy} & C_{yy,xz} & C_{yy,yz} \\ C_{zz,xx} & C_{zz,yy} & C_{zz,zz} & C_{zz,xy} & C_{zz,xz} & C_{zz,yz} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy,zz} & C_{xy,xy} & C_{xy,xz} & C_{xy,yz} \\ C_{xz,xx} & C_{xz,yy} & C_{xz,zz} & C_{xz,xy} & C_{xz,xz} & C_{xz,yz} \\ C_{yz,xx} & C_{yz,yy} & C_{yz,zz} & C_{yz,xy} & C_{yz,xz} & C_{yz,yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Ou pela expansão em série de Taylor como:

$$var[\tau_q(t)] = var \left[ \sum_k d_k \sigma_k \right] = \sum_i \sum_j d_i d_j Cov[\sigma_i, \sigma_j] \quad (4.20)$$

Outra forma de simplificação da Equação 4.18 seria considerar o produto escalar da matriz da covariância e o vetor  $\mathbf{d}$  como uma matriz coluna  $[M]$ .

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx,xx} & C_{xx,yy} & C_{xx,zz} & C_{xx,xy} & C_{xx,xz} & C_{xx,yz} \\ C_{yy,xx} & C_{yy,yy} & C_{yy,zz} & C_{yy,xy} & C_{yy,xz} & C_{yy,yz} \\ C_{zz,xx} & C_{zz,yy} & C_{zz,zz} & C_{zz,xy} & C_{zz,xz} & C_{zz,yz} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy,zz} & C_{xy,xy} & C_{xy,xz} & C_{xy,yz} \\ C_{xz,xx} & C_{xz,yy} & C_{xz,zz} & C_{xz,xy} & C_{xz,xz} & C_{xz,yz} \\ C_{yz,xx} & C_{yz,yy} & C_{yz,zz} & C_{yz,xy} & C_{yz,xz} & C_{yz,yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

E na forma de expansão em série de Taylor a variância pode ser expressa como:

$$var[\tau_q(t)] = \sum_{i=1}^6 d_i M_i \quad (4.22)$$

Dessa forma, a variância da tensão de cisalhamento na direção do vetor  $\mathbf{q}$  da Equação 4.18 pode ser representada da seguinte forma:

$$var[\tau_q(t)] = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

### 4.2.1 Método do Gradiente Ascendente

Dentre os métodos clássicos especificamente concebidos para realizar a otimização multivariável que se adequaria a análise do estado da arte do Modelo do Susmel tem-se o Método do Gradiente Ascendente, segundo Snyman [37].

O Método do Gradiente Ascendente é um método de otimização de primeira ordem, onde a escolha da direção do mínimo da função é a direção do gradiente. A partir de um ponto arbitrário, a solução do problema proposto é aproximada iterativamente em um processo de busca, no qual cada passo é dado proporcionalmente ao gradiente, até estar próxima suficientemente da solução, como pode ser visto na Figura 4.7.

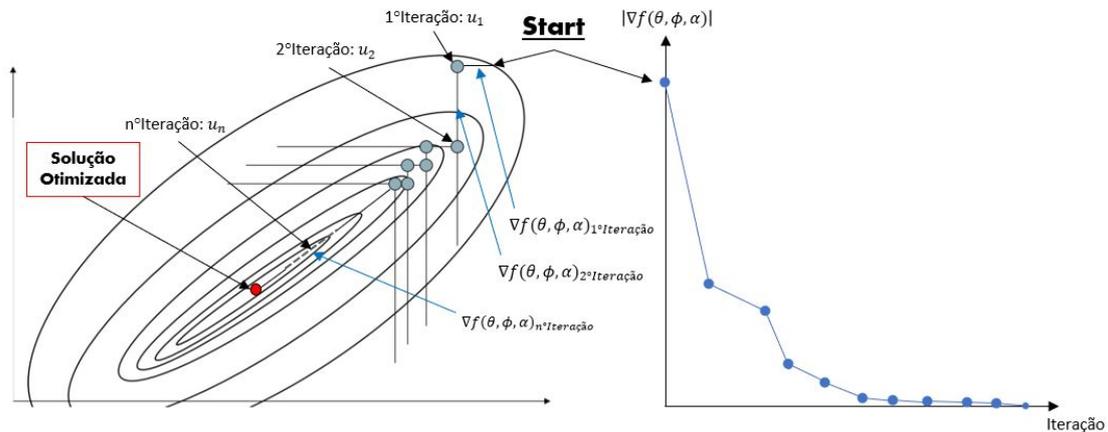


Figura 4.7: Método do Gradiente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em particular, o método pode ser formalizado para abordar um problema específico investigado no presente artigo, onde as etapas do processo iterativo usado para alcançar a convergência podem ser calculadas pela Equação 4.24:

$$u_{n+1} = u_n + \kappa \nabla f(\theta_n, \phi_n, \alpha_n) \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{n+1} \\ \phi_{n+1} \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \phi_n \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} \frac{\partial Var[\tau_q(t)]}{\partial \theta}(\theta_n, \phi_n, \alpha_n) \\ \frac{\partial Var[\tau_q(t)]}{\partial \phi}(\theta_n, \phi_n, \alpha_n) \\ \frac{\partial Var[\tau_q(t)]}{\partial \alpha}(\theta_n, \phi_n, \alpha_n) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Onde  $n$  denota a solução calculada na  $n$ -ésima etapa e  $n + 1$  para etapa subsequente a ser tomada na direção proporcional ao gradiente da função  $Var[\tau_q(t)]$ .

A cada passo do processo iterativo, o valor do comprimento do passo  $\kappa$  pode ser alterado para permitir uma convergência mais rápida, certificando-se que a função converge a cada iteração. Porém caso contrário, o valor de  $\kappa$  deve ser reduzido para que o processo se estabilize. Segundo Susmel, dentre os valores mais adequado para critério de convergência do comprimento

do passado e da norma do gradiente são:

$$\kappa \leq 10^{-6} MPa^{-1} \quad \text{e} \quad \gamma \leq 10^{-4} MPa_{-1} \quad (4.26)$$

Enquanto o critério de parada indicando convergência e estabilidade dos resultados seria:

$$\|\nabla f(\theta_{n+1}, \phi_{n+1}, \alpha_{n+1})\| < \|\nabla f(\theta_n, \phi_n, \alpha_n)\| \quad (4.27)$$

$$\|\nabla f(\theta_n, \phi_n, \alpha_n)\| \leq \gamma \quad (4.28)$$

A determinação das componentes do gradiente são obtida a partir das derivadas parciais que representam as taxas de variação da função  $Var[\tau_q(t)]$  para os ângulos  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\alpha$ . As primeiras derivadas da função  $Var[\tau_q(t)]$  podem ser determinadas por meio das seguintes relações explícitas:

$$\frac{\partial Var[\tau_q(t)]}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial d_i}{\partial \theta} M_i + \frac{\partial M_i}{\partial \theta} d_i \right) \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial Var[\tau_q(t)]}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial d_i}{\partial \phi} M_i + \frac{\partial M_i}{\partial \phi} d_i \right) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial Var[\tau_q(t)]}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} M_i + \frac{\partial M_i}{\partial \alpha} d_i \right) \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial M_2}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial M_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial M_4}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial M_5}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial M_6}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx,xx} & C_{xx,yy} & C_{xx,zz} & C_{xx,xy} & C_{xx,xz} & C_{xx,yz} \\ C_{yy,xx} & C_{yy,yy} & C_{yy,zz} & C_{yy,xy} & C_{yy,xz} & C_{yy,yz} \\ C_{zz,xx} & C_{zz,yy} & C_{zz,zz} & C_{zz,xy} & C_{zz,xz} & C_{zz,yz} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy,zz} & C_{xy,xy} & C_{xy,xz} & C_{xy,yz} \\ C_{xz,xx} & C_{xz,yy} & C_{xz,zz} & C_{xz,xy} & C_{xz,xz} & C_{xz,yz} \\ C_{yz,xx} & C_{yz,yy} & C_{yz,zz} & C_{yz,xy} & C_{yz,xz} & C_{yz,yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial d_2}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial d_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial d_4}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial d_5}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial d_6}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M_4}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M_5}{\partial \theta} \\ \frac{\partial M_6}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx,xx} & C_{xx,yy} & C_{xx,zz} & C_{xx,xy} & C_{xx,xz} & C_{xx,yz} \\ C_{yy,xx} & C_{yy,yy} & C_{yy,zz} & C_{yy,xy} & C_{yy,xz} & C_{yy,yz} \\ C_{zz,xx} & C_{zz,yy} & C_{zz,zz} & C_{zz,xy} & C_{zz,xz} & C_{zz,yz} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy,zz} & C_{xy,xy} & C_{xy,xz} & C_{xy,yz} \\ C_{xz,xx} & C_{xz,yy} & C_{xz,zz} & C_{xz,xy} & C_{xz,xz} & C_{xz,yz} \\ C_{yz,xx} & C_{yz,yy} & C_{yz,zz} & C_{yz,xy} & C_{yz,xz} & C_{yz,yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_4}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_5}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_6}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_3}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_4}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_5}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_6}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx,xx} & C_{xx,yy} & C_{xx,zz} & C_{xx,xy} & C_{xx,xz} & C_{xx,yz} \\ C_{yy,xx} & C_{yy,yy} & C_{yy,zz} & C_{yy,xy} & C_{yy,xz} & C_{yy,yz} \\ C_{zz,xx} & C_{zz,yy} & C_{zz,zz} & C_{zz,xy} & C_{zz,xz} & C_{zz,yz} \\ C_{xy,xx} & C_{xy,yy} & C_{xy,zz} & C_{xy,xy} & C_{xy,xz} & C_{xy,yz} \\ C_{xz,xx} & C_{xz,yy} & C_{xz,zz} & C_{xz,xy} & C_{xz,xz} & C_{xz,yz} \\ C_{yz,xx} & C_{yz,yy} & C_{yz,zz} & C_{yz,xy} & C_{yz,xz} & C_{yz,yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial d_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial d_3}{\partial \phi} \\ \frac{\partial d_4}{\partial \phi} \\ \frac{\partial d_5}{\partial \phi} \\ \frac{\partial d_6}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

E as primeiras derivadas dos termos  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) assumem os seguintes valores:

$$\frac{\partial d_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}(-\sin \theta \cdot \sin 2\phi \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\theta \cdot \cos^2 \phi) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(\cos \theta \cdot \sin 2\phi \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\theta \cdot \cos^2 \phi) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \phi} = \frac{1}{2}(2 \sin \theta \cdot \cos 2\phi \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \sin 2\theta \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}(\sin \theta \cdot \sin 2\phi \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\theta \cdot \sin^2 \phi) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(-\cos \theta \cdot \sin 2\phi \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\theta \cdot \sin^2 \phi) \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \phi} = \frac{1}{2}(-2 \sin \theta \cdot \cos 2\phi \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \sin 2\theta \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi) \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \sin 2\theta \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial \theta} = -\sin \alpha \cdot \cos 2\theta \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial d_3}{\partial \phi} = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \cos \alpha \cdot \sin 2\phi \cdot \sin 2\theta + \sin \alpha \cdot \cos 2\phi \cdot \sin \theta \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial \theta} = \sin \alpha \cdot \sin 2\phi \cdot \cos 2\theta - \cos \alpha \cdot \cos 2\phi \cdot \cos \theta \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial d_4}{\partial \phi} = \sin \alpha \cdot \cos 2\phi \cdot \sin 2\theta + 2 \cos \alpha \cdot \sin 2\phi \cdot \sin \theta \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial \alpha} = \cos \alpha \cdot \cos \phi \cdot \cos 2\theta - \sin \alpha \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial \theta} = -2 \sin \alpha \cdot \cos \phi \cdot \sin 2\theta - \cos \alpha \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial d_5}{\partial \phi} = -\sin \alpha \cdot \sin \phi \cdot \cos 2\theta + \cos \alpha \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial d_6}{\partial \alpha} = \cos \alpha \cdot \sin \phi \cdot \cos 2\theta + \sin \alpha \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial d_6}{\partial \theta} = -2 \sin \alpha \cdot \sin \phi \cdot \sin 2\theta + \cos \alpha \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial d_6}{\partial \phi} = \sin \alpha \cdot \cos \phi \cdot \cos 2\theta + \cos \alpha \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \quad (4.52)$$

Quanto ao processo de convergência, é importante observar que, independentemente da complexidade do histórico de carregamento de entrada, sempre existem pelo menos dois planos de materiais experimentando a variância máxima da tensão de cisalhamento resolvida na direção  $m$ . Além disso, o Método do Gradiente Ascendente pode determinar não só os máximos globais, mas também locais, com objetivo de ambos serem registrados para um simples processo de classificação de máxima tensão  $\tau_q$ .

#### 4.2.2 Tensão de Cisalhamento

Depois de determinar a orientação do plano crítico de acordo com o procedimento discutido no presente estudo, a amplitude e o valor médio da tensão de cisalhamento em relação ao plano selecionado podem então ser calculados usando diretamente uma das definições clássicas. A principal vantagem é que o histórico de carregamento deve ser projetado apenas nos planos selecionados, ou seja, naqueles planos que poderiam ser candidatos potenciais a plano crítico para fenômeno de iniciação de trinca.

Alternativamente, uma amplitude equivalente da tensão de cisalhamento agindo nos planos determinados também pode ser calculada diretamente através de uma relação trivial, dada pela Equação 2.110:

$$\tau_a = \sqrt{2} \cdot RMS_{\tau_q} \implies \sqrt{2 \left| Var [\tau_q(t)] \right|_{max}} \quad (4.53)$$

Pelo Método da Mínima Elipse (MME), utilizado para determinar a amplitude e o valor médio da tensão de cisalhamento em relação a um determinado plano de material como é mostrado na Figura 4.8, a abordagem da variância deve ser reescrita da seguinte forma:

$$\tau_a = \sqrt{2} \cdot RMS_{\tau_q} \implies \tau_a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{R_{max}^2 + R_{min}^2} \quad (4.54)$$

$$\tau_a = \sqrt{2 \left| Var [\tau_q(t)] (\theta, \phi, \alpha) + Var [\tau_q(t)] (\theta, \phi, \alpha + 90^\circ) \right|_{max}} \quad (4.55)$$

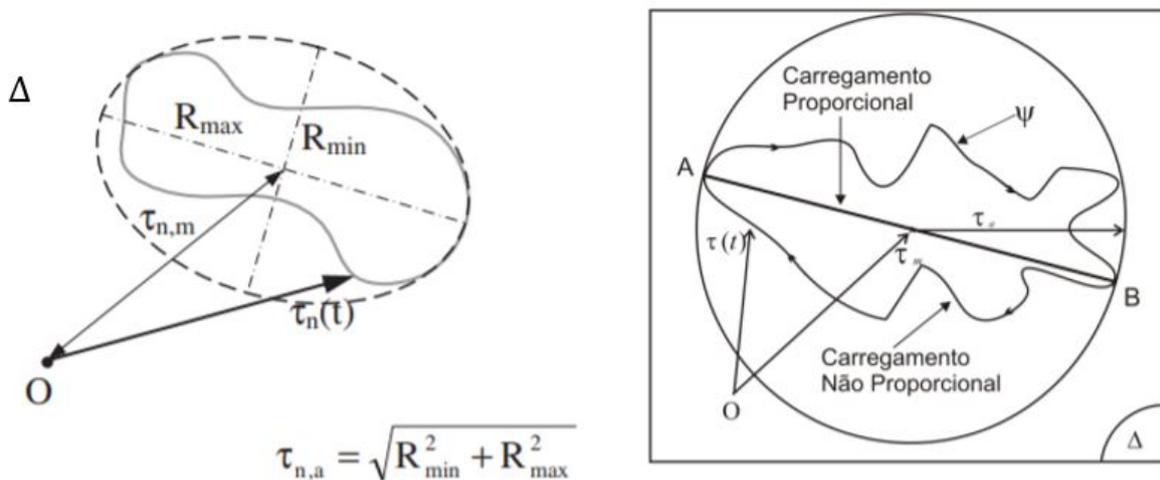


Figura 4.8: Método da Mínima Elipse (MME).

Fonte: SUSMEL, L., 2010 [22].

Onde  $R_{min}$  e  $R_{max}$  são o semi-comprimento do menor eixo (associado a variância na direção normal a principal) e do maior eixo (associado a máxima variância) da elipse mínima circunscrita, respectivamente.

Um método simples para identificar o plano crítico entre os candidatos seria a aplicação do Método de Socie (SOC). Esse método, proposto por Darrell Soci, é usado para medir a amplitude das tensões cisalhantes em um plano material, analisando separadamente as tensões cisalhantes ao longo das direções bases do plano crítico,  $e_a$  e  $e_b$ , como é mostrado na Figura 4.9.

A suposição realizada por esse método é a consideração de que ambas as tensões de cisalhamento analisadas separadamente são responsáveis apenas por um dos dois sistemas de deslizamento ativados em um grão do material. No caso, a maior amplitude entre as tensões cisalhantes ao longo das direções  $e_a$  e  $e_b$ .

$$\tau_{pico} = \frac{1}{2} \max[\Delta\tau_{e_a}, \Delta\tau_{e_b}] \quad (4.56)$$

Onde os intervalos das tensões cisalhantes são calculados da seguinte forma:

$$\Delta\tau_{e_a} = \max \tau_{e_a}(t) - \min \tau_{e_a}(t) \quad (4.57)$$

$$\Delta\tau_{e_b} = \max \tau_{e_b}(t) - \min \tau_{e_b}(t) \quad (4.58)$$

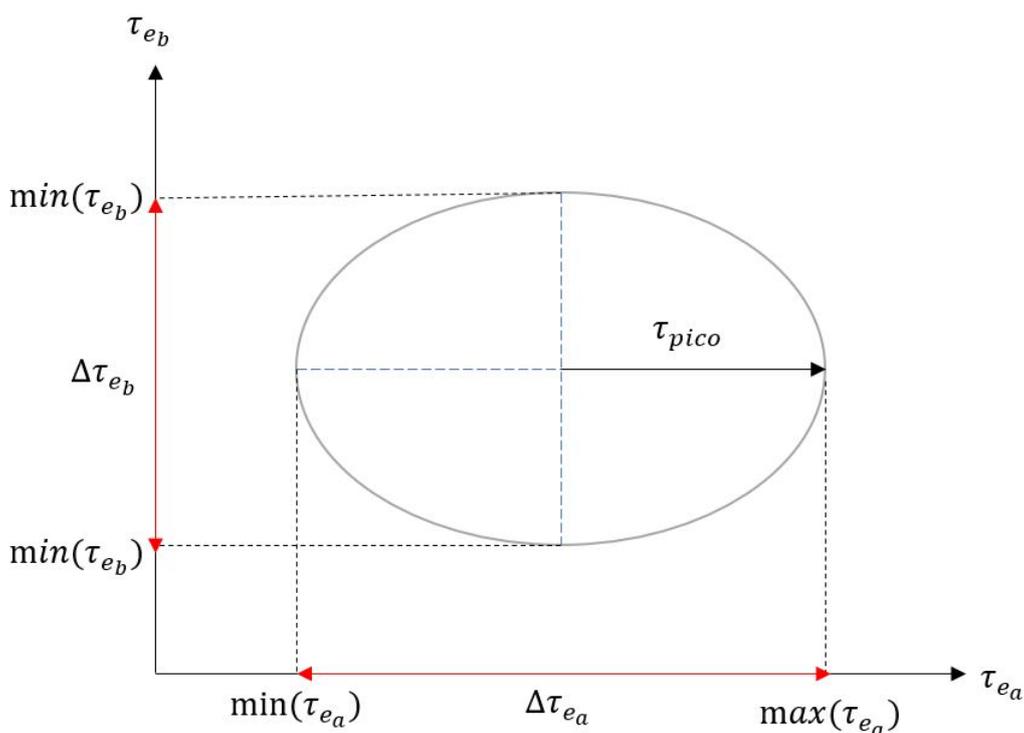


Figura 4.9: Método de Socie (SOC).

Fonte: Elaborado pelo autor.

A utilização do SOC permite selecionar a maior amplitude encontrada na envoltória. Isso é interessante por permitir afirmar que se a amplitude máxima da tensão de cisalhamento  $\tau_q$  for menor que o limite de resistência a fadiga do material, o material não irá falhar por fadiga nesse plano crítico.

### 4.3 FLUXOGRAMA DA METODOLOGIA PROPOSTA POR SUSMEL

A metodologia do Susmel é dividida em dois módulos com o intuito de determinar a orientação do plano crítico. No Módulo 1 calcula-se as soluções iniciais aproximadas a partir do MMV com a tensão cisalhante como força-motriz. Enquanto o Módulo 2 realiza-se o processo de otimização aplicando recursivamente o Método de Gradiente Ascendente a fim de reduzir a quantidade de candidatos do Módulo 1.

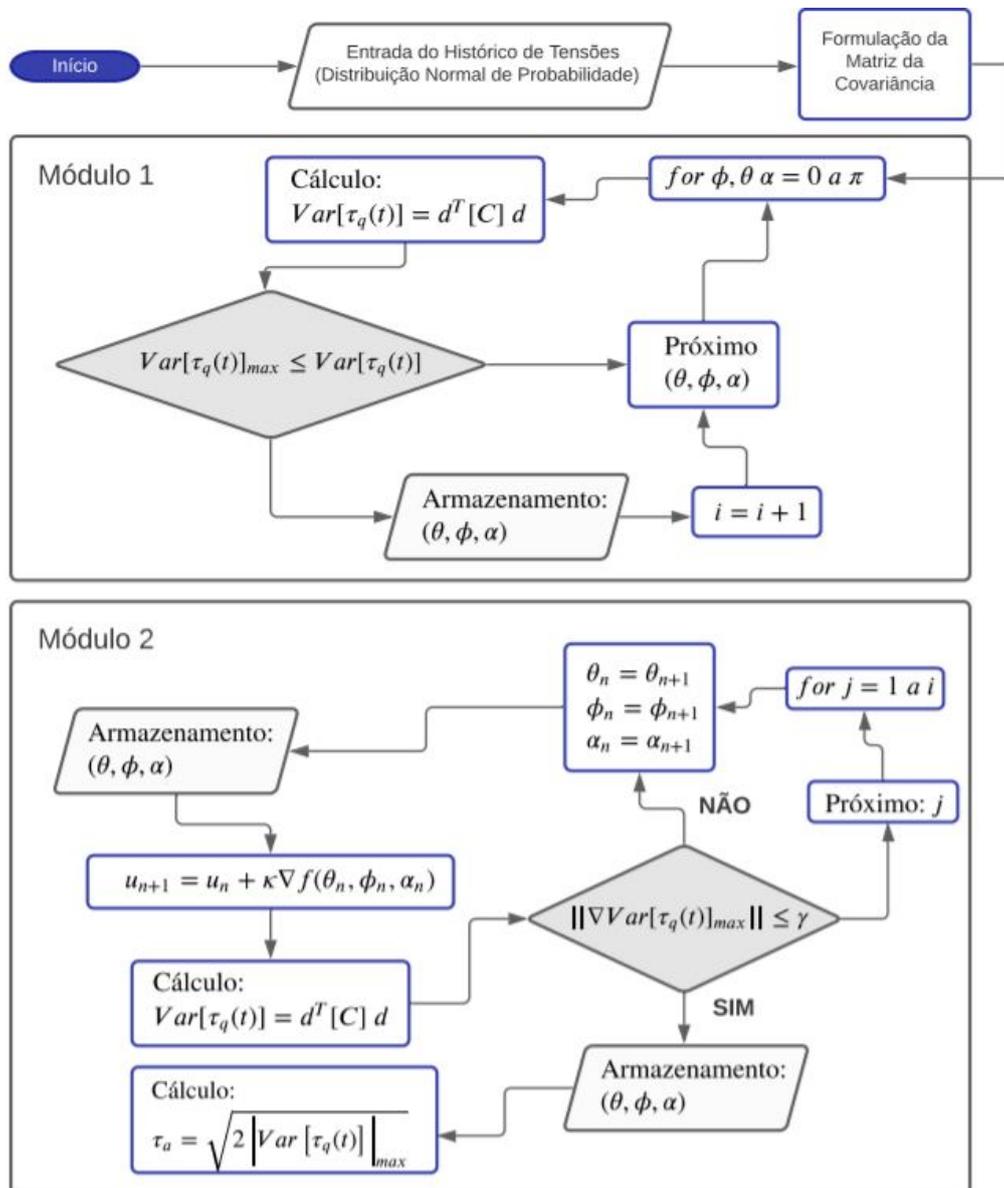


Figura 4.10: Modelo proposto por Susmel.

Fonte: Adaptado de SUSMEL, L., 2010 [22].

Uma vez que a orientação do plano crítico é conhecida, a próxima etapa é encontrar as máximas amplitudes da tensão de cisalhamento a partir dos candidatos a serem plano crítico identificados no Módulo 2.

# 5 RESULTADOS

## Resumo

O objetivo desse capítulo é apresentar os resultados obtidos das duas metodologias abordadas anteriormente. Os dados experimentais são extraídos das referências bibliográficas [20] e [21]. A medida que os resultados e parâmetros de simulação estabelecidos forem apresentados, será feita uma análise e discussão.

## 5.1 DADOS EXPERIMENTAIS

O algoritmo de simulação utiliza os dados de ensaio do artigo “*Fatigue life calculation by means of the cycle counting and spectral methods under multiaxial random loading*” de Tadeusz Łagoda e Ewald Macha [20]. Os corpos de prova são feitos de aço 18G2A, um tipo de aço de baixa liga e de alta resistência para construção e estruturas soldadas, como pontes, dutos de alta pressão e de altos diâmetros, guindastes, pontes rolantes, elementos de guindastes e navios, segundo [33]. As dimensões e o formato do corpo de prova são dadas conforme a Figura 5.1, enquanto as propriedades do material são dadas pela Tabela 5.1.

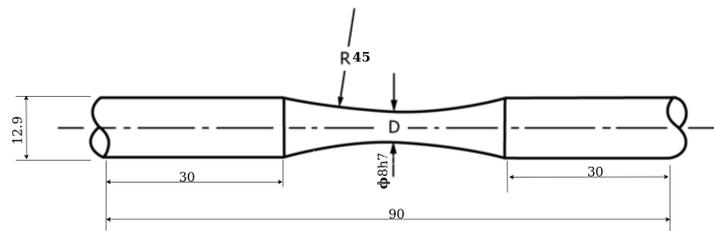


Figura 5.1: Formato e dimensões em milímetros do corpo de prova sujeito aos testes de fadiga.

Propriedades mecânicas do aço 18G2A								
E (MPa)	$\nu$	$\sigma_y$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	$\sigma_{af}$ (MPa)	$N_o$	m	$\tau_{af}$ (MPa)	$A$ (Mpa) <sup>m</sup>
210 000	0,30	357	535	271	2735000	7.19	175	$8,511 \times 10^{23}$
Composição Química do Aço 18G2A em %								
C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Cu	Fe
0,21	1,46	0,42	0,019	0,046	0,09	0,04	0,17	97,545

Tabela 5.1: Propriedades do aço 18G2A.

Fonte: Dados experimentais obtido pela referência [20].

Os parâmetros para análise espectral e da Curva S-N utilizados na simulação no domínio da frequência e do tempo respectivamente podem ser observados na Tabela 5.2:

m	c	d	K
7,19	0,926 - 0,033m	1,587m - 2,323	$2^{12}$

Tabela 5.2: Parâmetros da Curvas S-N e espectrais

Fonte: Dados experimentais obtido pela referência [20].

Dentre os casos simulados com valores RMS e coeficientes de correlação  $r_{\sigma,\tau}$ , presentes no Capítulo 5 da referência bibliográfica [21], há três casos selecionados para análise: S9 ( $r_{\sigma,\tau} = 1$ ), S11 ( $r_{\sigma,\tau} \approx 0$ ) e uma modificação do S9 ( $r_{\sigma,\tau} = -1$ ) proposta pelo autor desse Projeto de Graduação, denominada de S9\*. Os casos podem ser consultados na Tabela 5.3. Para o caso S11, o coeficiente de correlação referencial adotado foi  $r_{\sigma,\tau} = -0,01$  por ser um valor próximo de zero, indicando um mínimo de correlação entre as tensões.

Caso	$RMS_{\tau}$	$RMS_{\sigma}$	$r_{\sigma,\tau}$
S11	30	60	$\approx 0$
S9	30	60	1
S9* <sup>a</sup>	30	60	-1

<sup>a</sup> Caso S9 Modificado com correlação negativa.

Tabela 5.3: Casos simulados e parâmetros estatísticos.

Fonte: Dados experimentais obtido pela referência [20] e [21].

## 5.2 GERAÇÃO DE ESPECTRO DE POTÊNCIA

Conforme tinha sido abordado anteriormente, para a validação dos algoritmos implementados até essa fase do Projeto de Graduação, foram utilizadas as condições de simulação apresentadas por Macha e Niesony [21] e disponíveis na Tabela 5.4. O **Algoritmo 1** foi utilizado para a geração das PSDs referenciais das condições de carregamento apresentadas na Tabela 5.4.

Experimento Simulado	RMS (MPa)			$f_d$ (Hz)	$f_{min}$ (Hz)	$f_{max}$ (Hz)
	$\sigma$	$\tau$	$r_{\sigma,\tau}$			
S9	60	30	+ 1	20	19,5	20,5
S11	60	30	+ 0,01	20	19,5	20,5
S9*	60	30	- 1	20	19,5	20,5

Tabela 5.4: Tabela de valores de referência e entrada do **Algoritmo 1**.

Fonte: Dados experimentais obtido pela Tabela 5.2 da referência [21].

---

**Algoritmo 1:** Geração de Espectro de Potência

---

**Entrada:** Banda, Frequência Dominante, Taxa, Tamanho da Amostra, Valor RMS

**Saída:** Frequência, PSD

**início**

$Banda = 1,25$  (Largura de banda)

$F_d \leftarrow 20$  (Frequência dominante)

$L_i \leftarrow F_d - \frac{Banda}{2}$  (Limite inferior)

$L_s \leftarrow F_d + \frac{Banda}{2}$  (Limite superior)

$Taxa \leftarrow 2,5\pi L_s$  (Frequência normalizada)

$K \leftarrow 2^{12}$  (Tamanho do espectro de potência)

$Amplitude \leftarrow RMS^2/Banda$  (Amplitude do sinal gerado)

Declarar  $f$  e  $A$

**repita**

**para**  $m \leftarrow 0$  **a**  $m \leftarrow K$  **faça**

$f = m\Delta f$

**se**  $f[m] > L_i$  **e**  $f[m] < L_s$  **então**

$A[m] = Amplitude$  (PSD gerada)

**fim**

**fim**

**até** Avaliação de todos os  $m$ ;

**fim**

---

A discretização do espectro de potência foi realizada considerando a frequência centrada em 20 Hz e uma taxa de amostragem que garanta que o sinal discretizado no tempo possua pelo menos 16 pontos por período, conforme é mostrado na Figura 5.2 (o que permite uma representação visual adequada dos históricos de carregamentos, minimizando os erros de identificação de picos e vales para contagem Rainflow).

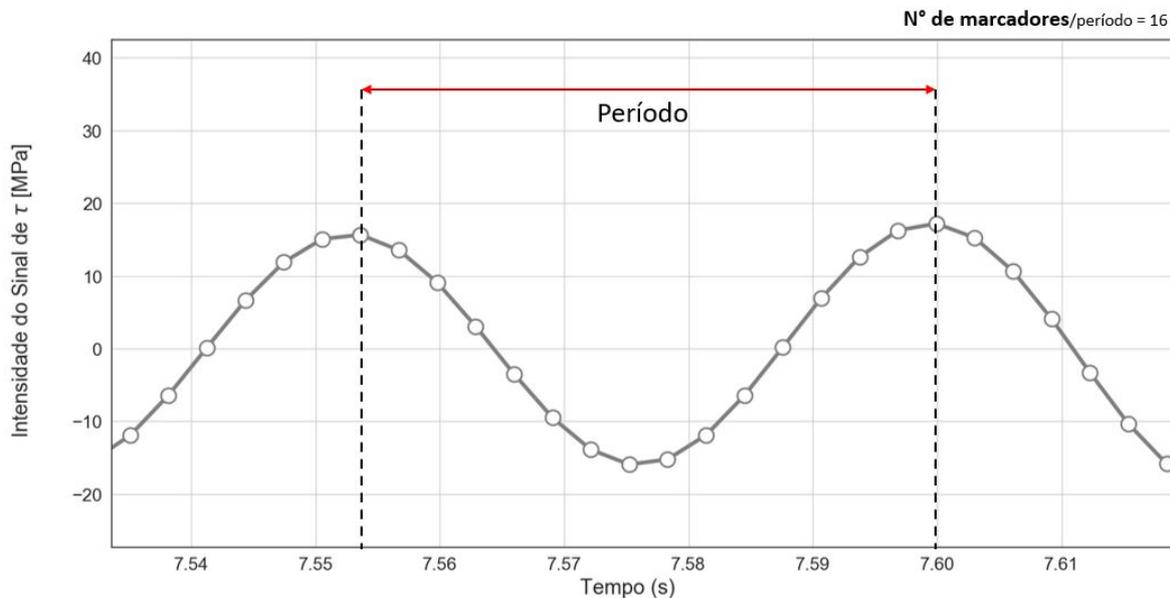


Figura 5.2: Discretização do sinal de  $\tau_{xy}$  no tempo obtido pelo **Algoritmo 2**.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, a taxa de amostragem deve também garantir a presença de uma quantidade significativa de componentes espectrais dentro da banda de frequência de 1,25 Hz (32 bins<sup>1</sup>, como mostrado na Figura 5.3). Assim, considerando essas condições de geração de espectro, foi obtido uma PSD com 4096 pontos.

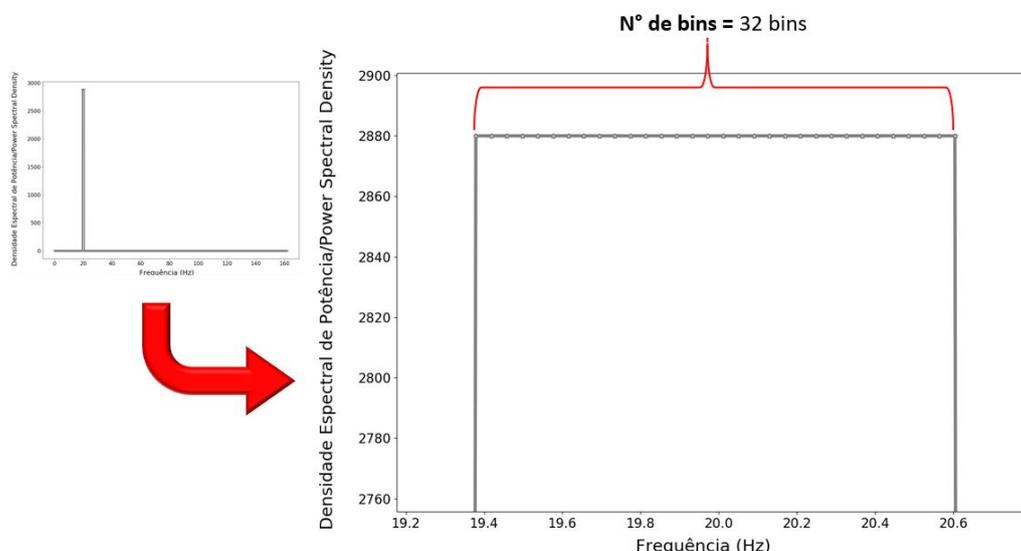


Figura 5.3: PSD referencial de  $\sigma_{xx}$  obtida pelo **Algoritmo 1**.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A PSD do vetor auxiliar foi determinada a partir do seu valor RMS, já que os parâmetros  $a_{ger}$  (dado pela Equação 2.91) e  $r_{\sigma,\tau}$  e os valores RMS das tensões são conhecidos. Nesse caso, o cálculo do valor RMS do vetor auxiliar pode ser facilmente obtido pela **Prova (2.5)**:

$$var(\sigma) = var(x_{aux}) + a_{ger}^2 var(\tau) \quad (5.1)$$

$$var(x_{aux}) = var(\sigma) - (a_{ger})^2 var(\tau) \quad (5.2)$$

E que o valor RMS do sinal auxiliar seria dado pela Equação:

$$RMS(x_{aux}) = \sqrt{var(x_{aux})} \quad (5.3)$$

As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 são os resultados obtidos das funções densidade espectrais de potência para cada coeficiente de correlação. É possível observar a frequência dominante responsável pela energia máxima entre todas as frequências encontradas no espectro e por gerar um comportamento periódico nos registros temporais de tensão. Nota-se que a frequência está centrada em  $20Hz$  como já era esperado, em uma pequena faixa de tolerância entre  $19,5 < f_d < 20,5$ . Observa-se também que a etapa de obtenção das PSDs referenciais apresenta apenas uma pequena faixa dominante de frequência presente no espectro de potência, o que é uma característica de um processo de banda estreita ou *Narrow band*.

<sup>1</sup>bins é a distância entre duas bandas de frequência de um sinal discretizado no tempo

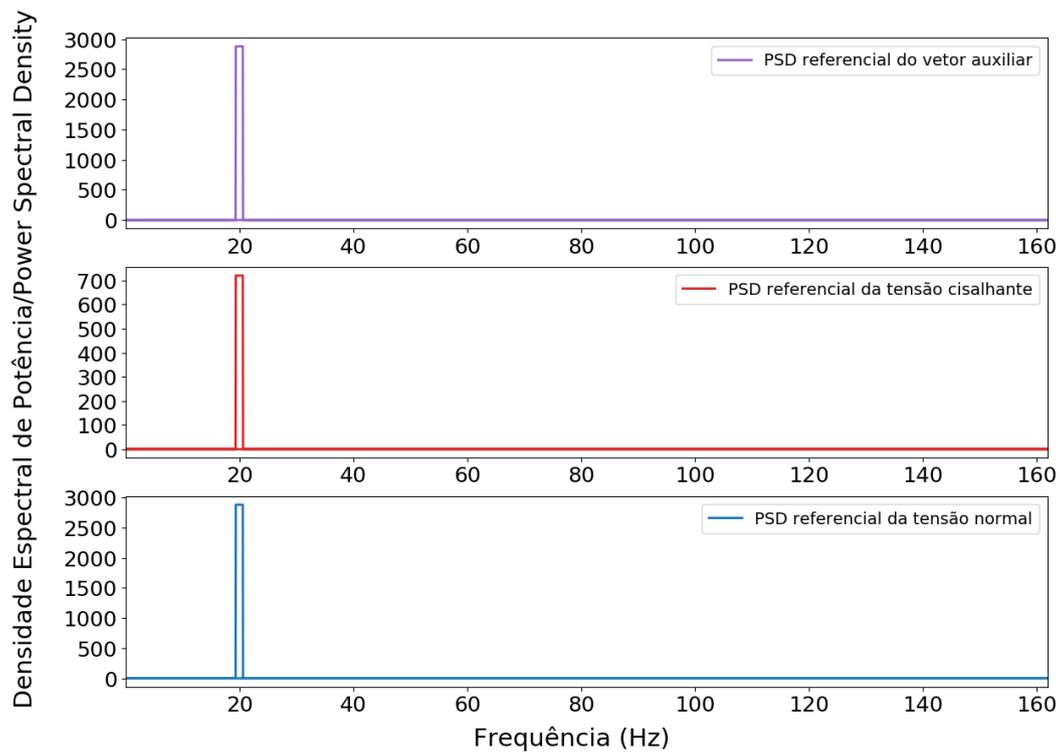


Figura 5.4: Função densidade espectral de potência (PSD) para coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor.

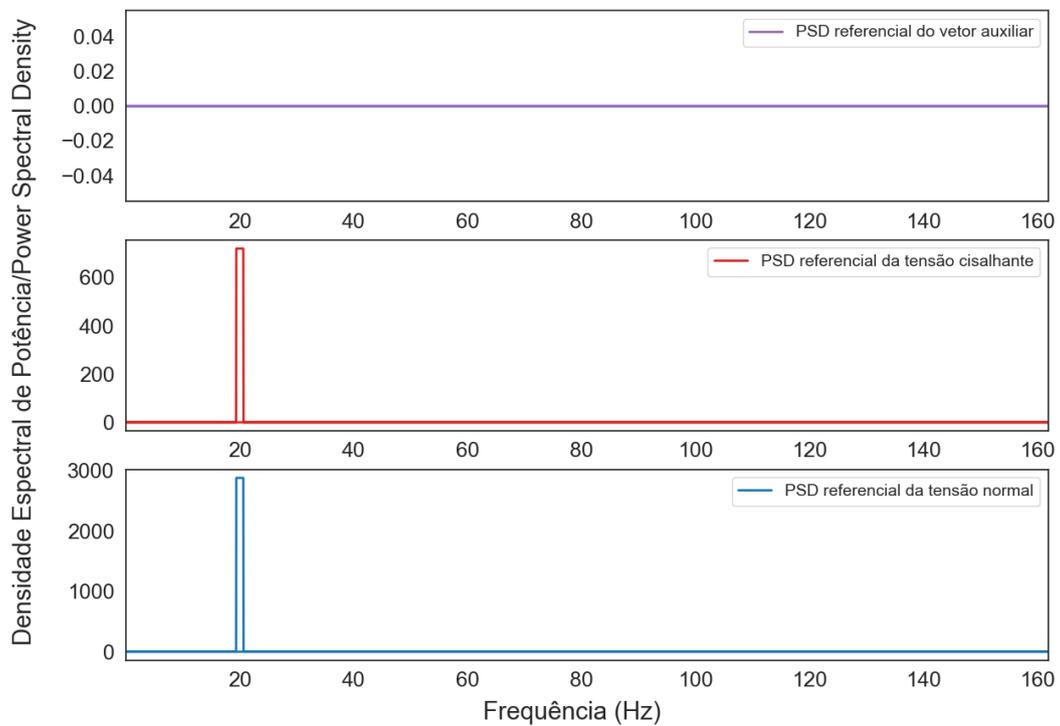


Figura 5.5: Função densidade espectral de potência (PSD) para coeficiente de correlação igual a +1,0.

Fonte: Elaborado pelo autor.

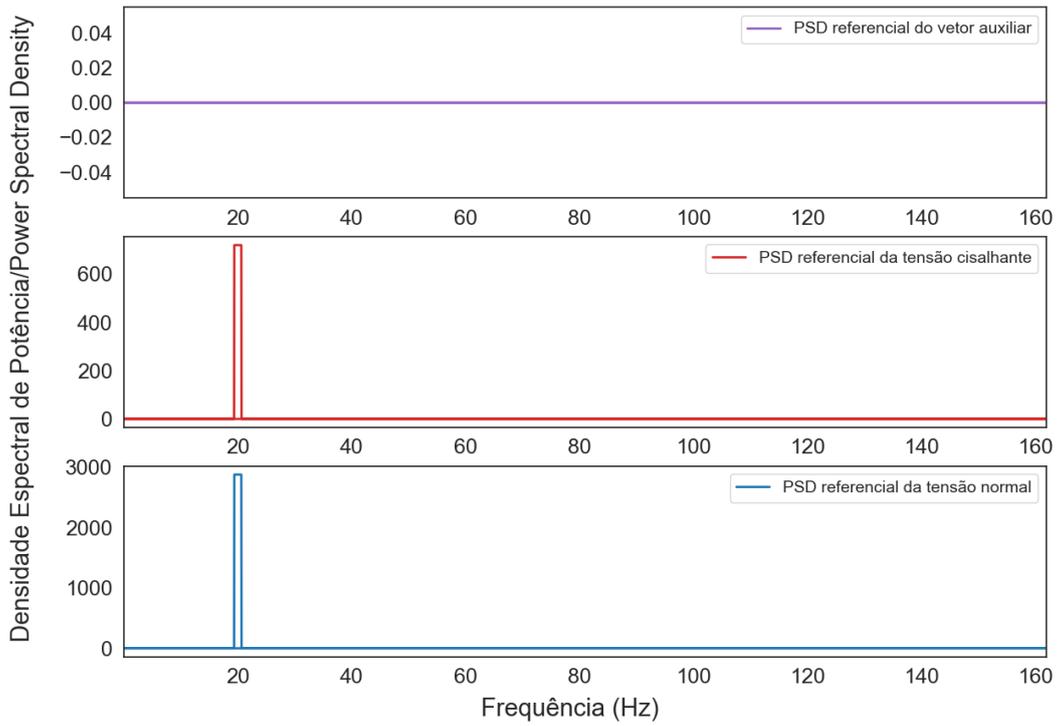


Figura 5.6: Função densidade espectral de potência (PSD) para coeficiente de correlação igual a -1,0.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir das PSD referenciais, o **Algoritmo 1** determina a matriz das PSDs de referência:

$$\bar{G}(f) = \begin{bmatrix} PSD_{\sigma}(f) & PSD_{\sigma,\tau}(f) \\ PSD_{\tau,\sigma}(f) & PSD_{\tau}(f) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\bar{G}(f) = \begin{bmatrix} PSD_{\sigma}(f) & a_{ger}uPSD_{\tau}(f) \\ a_{ger}uPSD_{\tau}(f) & PSD_{\tau}(f) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

### 5.3 RECONSTRUÇÃO DO SINAL DE TENSÃO

Essa etapa é uma das mais importantes da simulação, pois é desconhecido o histórico de carregamento das tensões na qual o material está sujeito. Por esse motivo, o conhecimento do histórico de carregamento no tempo é um desafio já que seria necessários os dados do ensaio mecânico já ocorrido em um determinado experimento. O presente trabalho utilizou a técnica gaussiana do Tópico 2.4 do Capítulo 2 para recuperação desse sinal no tempo.

A partir das PSDs, o **Algoritmo 2** gerou um sinal com características de banda estreita no domínio do tempo para as tensões atuantes no material, na qual se espera que seja uma boa aproximação do sinal original das referências [21] e [20]. Em geral, essa etapa de reconstrução do sinal depende da identificação da frequência máxima, discretização do tempo e definição de um vetor tempo e ângulo de fase aleatório com distribuição normal.

---

**Algoritmo 2:** Reconstrução do sinal no tempo

---

**Entrada:**  $\Delta f$ , Frequência Máxima, PSD, Tempo de Observação,  $\Delta t$

**Saída:** Sinal de Tensão, Vetor Tempo

**início**

$f_{max} \leftarrow \max(f)$

$\Delta t \leftarrow \frac{1}{2f_{max}}$

Declarar o vetor tempo pelo passo  $\Delta t$  e  $\Psi$

**repita**

**para**  $i \leftarrow 0$  a  $i \leftarrow \text{len}(\text{tempo})$  **faça**

**para**  $j \leftarrow 0$  a  $j \leftarrow \text{len}(PSD)$  **faça**

$x(t) \leftarrow \sum_{k=1}^J (2 G[f_k] \Delta f_k)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi t_k f_k \Delta t + \psi^k)$

**fim**

**fim**

**até** A varredura de todos os índices dos vetores;

**fim**

---

É interessante observar os sinais no tempo gerados de experimentos com coeficientes de correlações muito baixos, onde a covariância de  $\sigma$  e  $\tau$  está suscetível a um erro que pode ser verificado por meio do cálculo do coeficiente de correlação da simulação, dado pela Equação 2.89.

Esse erro associado não está relacionado com o tempo de observação, mas sim com procedimento de reconstrução do sinal de  $\sigma$  a partir da Equação 5.6, onde o parâmetro de banda espectral,  $a_{ger}$ , dado pela Equação 2.91, por se tratar de uma função de  $r_{\sigma\tau}$ , reduz o incremento da parcela de  $\tau$ .

$$\sigma(t) = x_{aux}(t) + a_{ger} u \tau(t) \quad (5.6)$$

Dessa forma, em experimentos com fatores de correlação bastante baixos, o histórico de  $\sigma$  depende majoritariamente do sinal auxiliar utilizado na sua reconstrução. Enquanto, para coeficientes de correlações não próximos de zeros, a parcela da tensão cisalhante influencia diretamente no histórico da tensão normal e a covariância  $cov(\sigma, \tau)$  tem resultados satisfatórios, já que o coeficiente de correlação tende fortemente ao valor de referência de  $r_{\sigma\tau}$ . Nota-se esse erro na Figura 5.7, onde o sinal no tempo de  $\sigma$  é bastante semelhante ao sinal auxiliar  $x_{aux}$ .

$$\sigma(t) = x_{aux}(t) \quad \text{Em casos de } a_{ger} \cong 0 \quad (5.7)$$

$$\sigma(t) = x_{aux}(t) + a_{ger} u \tau(t) \quad \text{Em casos de } a_{ger} > 0 \text{ e } a_{ger} < 0 \quad (5.8)$$

Em casos de coeficiente de correlação unitário, há uma forte relação de dependência entre  $\sigma$  e  $\tau$ , de tal forma que o sinal auxiliar é desprezível, como pode ser visto na Figura 5.8 e 5.9. Além disso, o sinal do fator de correlação também apresentou uma mudança significativa no perfil do histórico de carregamento das tensões, onde no caso da Figura 5.8 constatou-se uma presença periódica de picos de tensão no sinal do tempo, tanto no sinal da tensão normal ( $\sigma = \sigma_{xx}$ ) quanto no sinal da tensão de cisalhamento ( $\tau = \tau_{x,y}$ ).

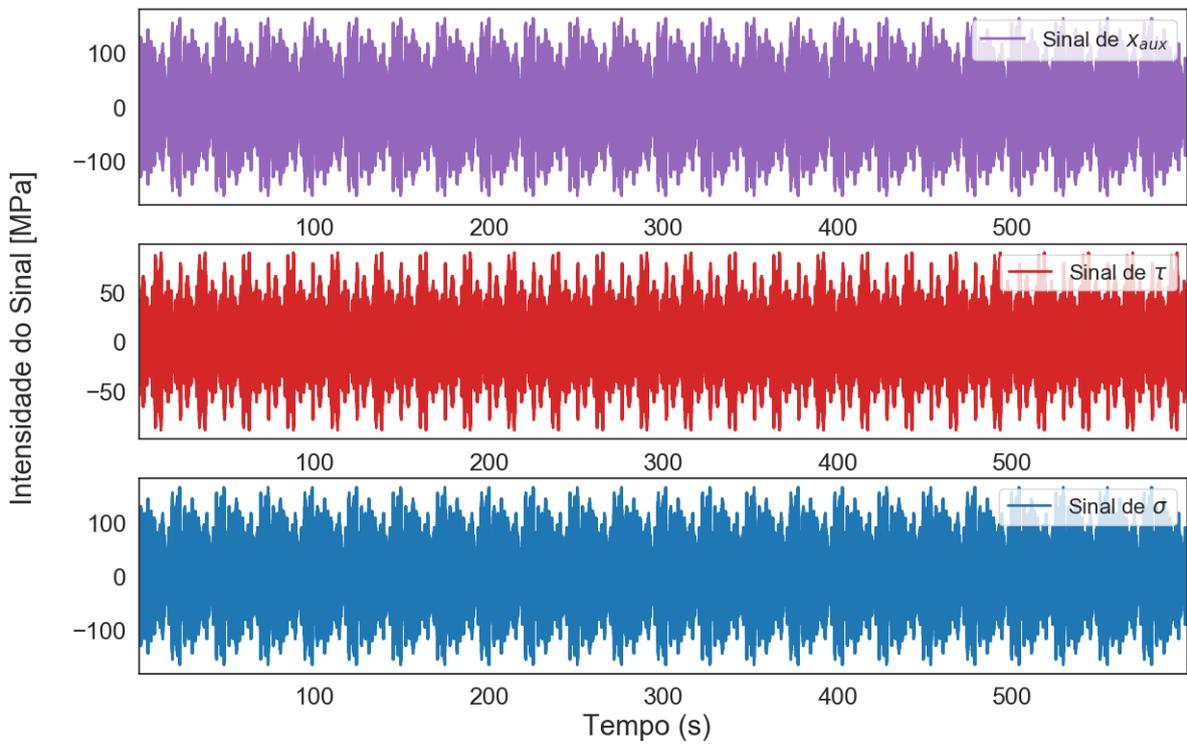


Figura 5.7: Histórico de carregamento para coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor.

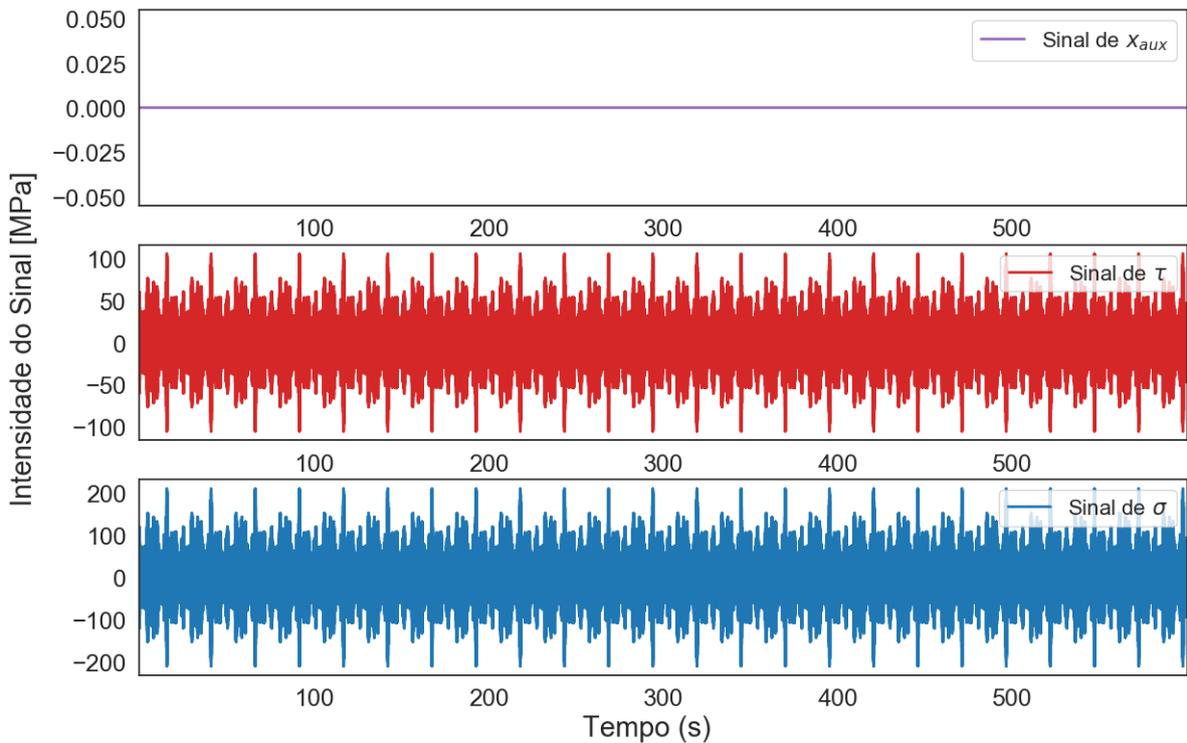


Figura 5.8: Histórico de carregamento para coeficiente de correlação igual a 1,0.

Fonte: Elaborado pelo autor.

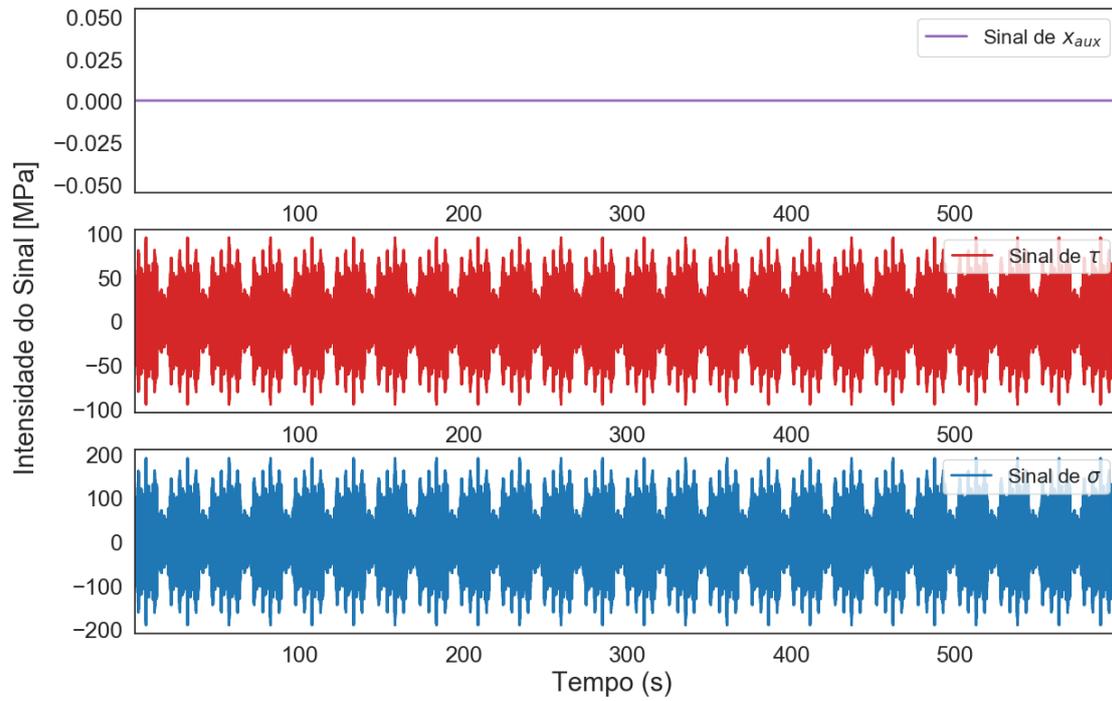


Figura 5.9: Histórico de carregamento para coeficiente de correlação igual a -1,0.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando como exemplo o histórico de carregamento do  $r_{\sigma,\tau} = 0,039$  ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ) com zoom em um determinado intervalo de tempo, como é visto na Figura 5.10, percebe-se que o sinal é do tipo banda estreita como um sinal de batimento, validando a obtenção de uma boa aproximação do sinal original.

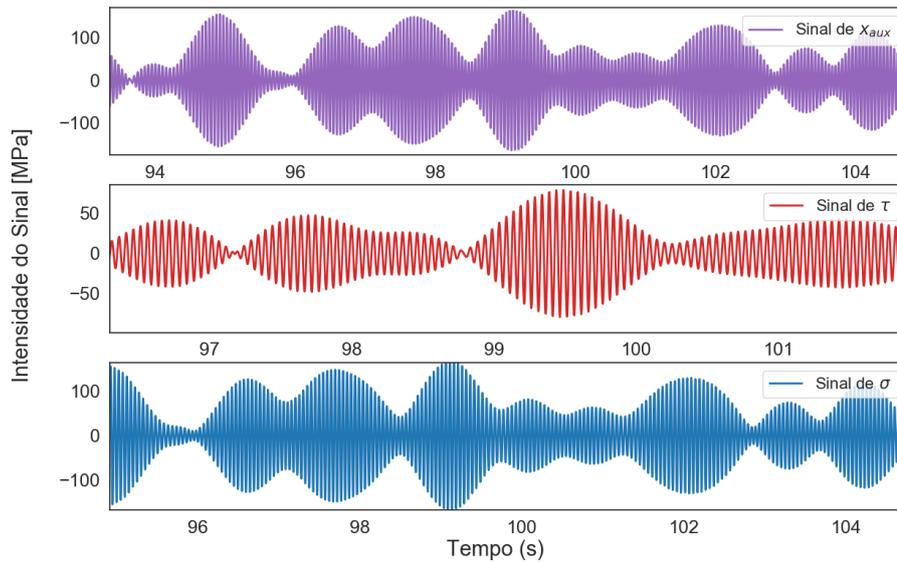


Figura 5.10: Zoom em um intervalo do histórico de carregamento S11 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Devido a falta de dados do histórico de carregamento, foi necessário a utilização da técnica gaussiana de geração de sinal com intuito de recuperar o sinal no tempo e obter um espectro de potência referencial para análise espectral, como é visto na Figura 1 do Apêndice.

Os gráficos de dispersão na Figura 5.11 demonstram a correlação de  $\sigma$  e  $\tau$  onde a tendência de uma reta significa que as tensões são dependentes uma da outra, enquanto a tendência a uma elipse significa que as tensões são praticamente independentes, o que é coerente pois  $r_{\sigma,\tau} = -0,01$  é próximo do valor nulo, onde as variáveis aleatórias são completamente independentes entre si.

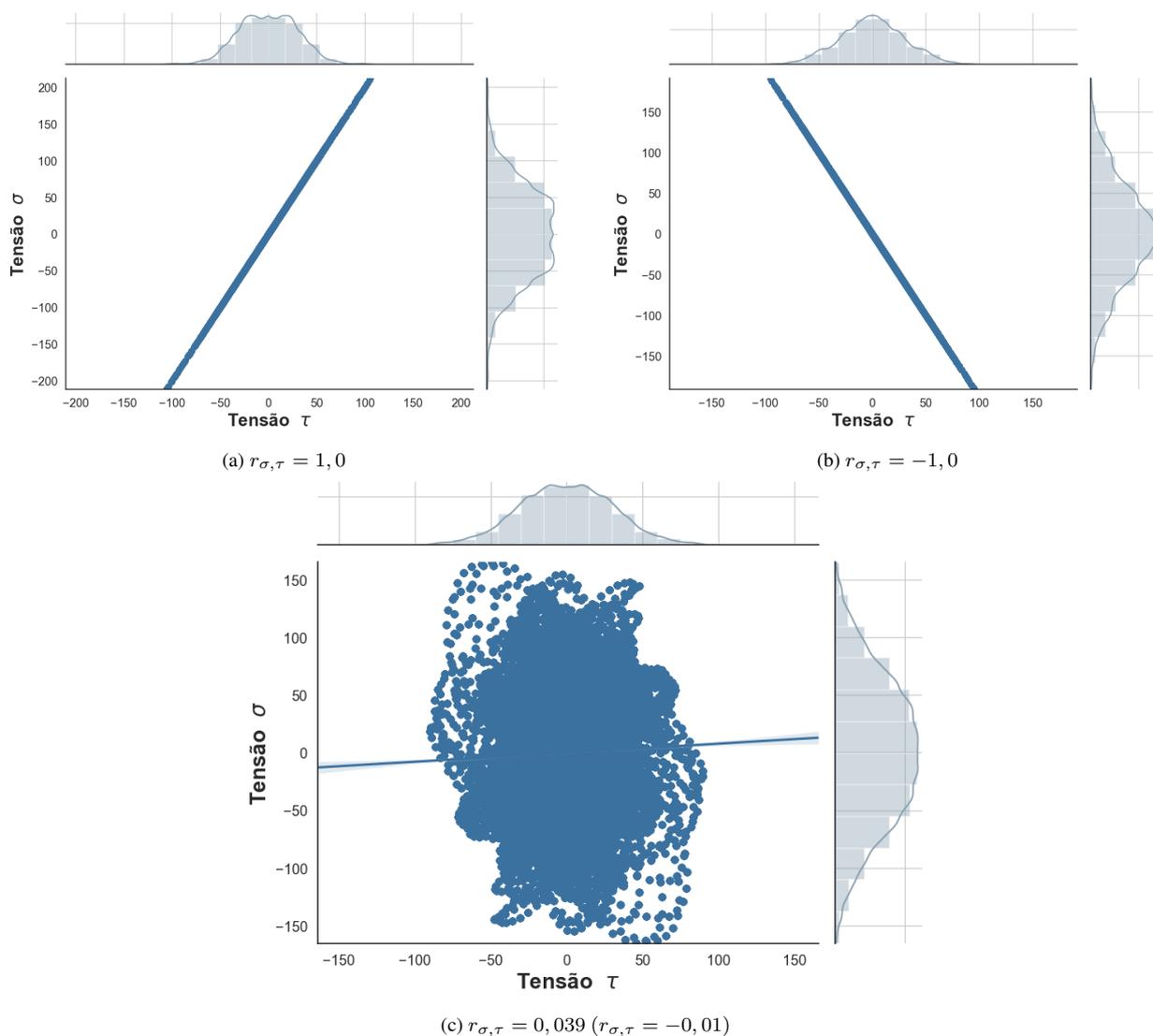


Figura 5.11: Gráfico de dispersão (correlação entre  $\sigma$  e  $\tau$ ).

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A Figura 5.11 (c) exibe a linha de regressão para visualizar a dispersão entre as variáveis dependendo das regiões de maior concentração de pontos. Esse artifício auxilia na afirmação de uma possível correlação entre variáveis em análise e prediz o valor de uma ou mais variáveis em

função de outras. Nesse caso, observou-se que existe uma correlação positiva entre as variáveis em vez de uma correlação negativa como era esperado. A resposta dessa questão está novamente relacionada ao erro associado para coeficientes de correlação muito próximos de zero, já que o valor obtido na simulação do sinal reconstruído para o experimento S11 ( $r_{\sigma,\tau} = -0,01$ ) foi uma correlação positiva igual a 0,039, apresentando um erro relativo de 5% com o valor de referência. Logo, não se trata de um erro de simulação a visualização de uma linha de regressão com inclinação positiva em vez de uma negativa. Outra observação realizada é que o coeficiente de correlação simulado pode resultar tanto em valores negativos quanto positivos, porém são valores bem próximos de zero, o que não influencia na confiabilidade dos resultados dos casos estudados.

Paralelamente, foram obtidas as matrizes de correlação simuladas após as reconstruções dos sinais com tempo de observação  $T_o$  igual a 600s, como é mostrado na Tabela 5.5. Os valores referenciais dessas matrizes de correlação podem ser encontrados na referência bibliográfica [21] ou na Tabela 5.6.

Experimento Simulado	$r_{\sigma,\tau}$	Matriz de Correlação Referencial	Matriz de Correlação Simulado
S9	+ 1,0	$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 \end{bmatrix}$
S11	- 0,01	$\begin{bmatrix} 1,0 & -0,01 \\ -0,01 & 1,0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0 & 0,039 \\ 0,039 & 1,0 \end{bmatrix}$
S9*	- 1,0	$\begin{bmatrix} 1,0 & -1,0 \\ -1,0 & 1,0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,0 & -1,0 \\ -1,0 & 1,0 \end{bmatrix}$

Tabela 5.5: Resultados da simulação da matriz de correlação  $\rho_{\sigma,\tau}$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Além disso, os coeficientes de correlação simulados e comparados com os referenciais são apresentados na Tabela 5.6:

Experimento Simulado	Coefficiente de Correlação Referencial	Coefficiente de Correlação Simulado
S9	+ 1,0	+ 1,0
S11	- 0,01	+0,039
S9*	- 1,0	-1,0

Tabela 5.6: Resultados da simulação do coeficiente de correlação  $r_{\sigma,\tau}$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em ambos os casos de simulação, os resultados refletem um comportamento de moderada correlação positiva e negativa. No caso S11, o coeficiente de correção tende para o valor referencial ( $r_{\sigma,\tau} = -0,01$ ) variando de forma aleatória nessa faixa. Em nenhum dos casos de simulação em que o coeficiente de correlação não fosse unitário houve uma ausência de correlação.

## 5.4 RESULTADOS DA ANÁLISE NO DOMÍNIO NO TEMPO

### 5.4.1 Lagoda & Macha

O objetivo principal dessa etapa foi a identificação do plano crítico. Com a identificação dos planos críticos pelo MMV, utilizando como força-motriz o valor de  $\sigma_{eq}$ , determinou-se o plano crítico e, a partir da Equação 3.24, a tensão normal equivalente com a finalidade de estimar o dano por um método de contagem de ciclo. De acordo com a Equação 3.32, a condição do MMV para identificação do plano crítico será:

$$(\theta^c, \phi^c) = (\theta, \phi)_{crit} = \max[\text{var}(\sigma_{eq}(\theta, \phi))] \quad (5.9)$$

O **Algoritmo 3** é responsável pela varredura dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  e o mapeamento das variâncias em função desses ângulos. Dessa forma, é possível encontrar os ângulos críticos pela posição da máxima variância do  $\sigma_{eq}$ . O monitoramento dos erros relativos, presentes no *Checking 1*, garantem a confiabilidade dos resultados da variância da tensão equivalente, obtidos pela covariância do processo estocástico de tensão, dado pela 3.30.

---

**Algoritmo 3:** Varredura no domínio do tempo

---

**Entrada:** Matriz da Covariância ( $Cov(\sigma_i(t), \sigma_j(t))$ ), Tensor Tensão na Notação de Voigt

**Saída:**  $\sigma_{eq}$ , Plano Crítico

**início**

$\Delta\theta, \Delta\phi \leftarrow 1^\circ$

$\theta_{final}, \phi_{final} \leftarrow 180^\circ$

    Declarar  $\sigma_{eq}$

**repita**

**para**  $\theta \leftarrow 0$  a  $\theta \leftarrow \phi_{final}$  **faça**

**para**  $\phi \leftarrow 0$  a  $\phi \leftarrow \theta_{final}$  **faça**

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = (l_n^2, m_n^2, n_n^2, 2l_n m_n, 2l_n n_n, 2m_n n_n)$

$\text{var}[\sigma_{eq}(t)] = \sum_i \sum_j d_i d_j \text{Cov}[\sigma_i(t), \sigma_j(t)]$

**se**  $\text{var}[\sigma_{eq}(t)] = (\text{var}[\sigma_{eq}(t)])_{max}$  **então**

$\theta \leftarrow \theta_{crit}$

$\phi \leftarrow \phi_{crit}$

**fim**

**fim**

**fim**

**até** A varredura de todos os índices dos vetores;

**para**  $time \leftarrow 0$  a  $time \leftarrow \text{len}(\text{tempo})$  **faça**

$\sigma_{eq}(t) = \bar{\sigma}(t) \cdot \mathbf{d}(\theta_{crit}, \phi_{crit})$

**fim**

**fim**

---

Após a aplicação da metodologia de plano crítico empregado por Lagoda & Macha, foi adotado um critério de seleção de 99,8% do valor máximo de variância como uma faixa para candidatos a plano crítico para a coleção:

$$(\theta, \phi)_{crit} = 0,998 \cdot \max[\text{var}(\sigma_{eq}(\theta, \phi))] \quad (5.10)$$

Experimento	$r_{\sigma, \tau}$	Candidatos a Plano Crítico $[\theta, \phi]$
S9	+ 1,0	[89 22] [89 23] [90 21] [90 22] [90 23] [90 24] [91 22] [91 23]
S11	- 0,01	[89 1] [89 2] [89 3] [89 4] [90 0] [90 1] [90 2] [90 3] [90 4] [91 1] [91 2] [91 3] [91 4]
S9*	- 1,0	[89 157] [89 158] [90 156] [90 157] [90 158] [90 159] [91 157] [91 158]

Tabela 5.7: Candidatos a plano crítico encontrados pelo **Algoritmo 3**.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Tendo conhecimento dos candidatos a plano crítico, o  $\sigma_{eq}(t)$  é calculado a partir do plano com a máxima variância obtida e, posteriormente, aplicada a técnica de contagem de ciclos Rainflow, com o objetivo de estimar o tempo de vida numérico a fadiga do material.

Experimento Simulado	$r_{\sigma, \tau}$	Plano Crítico $[\theta, \phi]$	$\max[\text{var}(\sigma_{eq})]$
S9	+ 1,0	[90 23]	5318,723
S11	- 0,01	[90 2]	3631,486
S9*	- 1,0	[90 157]	5322,895

Tabela 5.8: Resultado do **Algoritmo 3**.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A importância do conhecimento do plano crítico e possíveis candidatos é quantificar a gravidade da experiência de carregamento atribuída a esses planos e verificar o acúmulo de dano evoluindo sob sollicitação em uma condição crítica. Comparando com o método a seguir, a metodologia proposta por Lagoda & Macha não apresenta um método de otimização para determinar o plano crítico, como por exemplo o método do gradiente ascendente.

#### 5.4.2 Susmel

Outra abordagem de varredura no domínio no tempo para identificação do plano crítico é apresentada no modelo de Susmel. Utiliza-se como força-motriz o valor da tensão de cisalhamento resolvida na direção  $m$  que é considerada a direção de máxima variância. O seguinte método utiliza o MMV para a listagem de possíveis candidatos a plano crítico, como pode ser visto no **Algoritmo 4**, a partir dos ângulos  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\alpha$  que resultam na máxima variância de  $\tau_q$ . Com a utilização do método do gradiente, o processo de busca dos candidatos a plano crítico a partir de uma otimização dos resultados encontrados no MMV permite selecionar os máximos locais e globais.

---

**Algoritmo 4: Módulo 1 - Varredura no domínio do tempo**

---

**Entrada:** Matriz da Covariância ( $Cov(\sigma_i(t), \sigma_j(t))$ ), Tensor Tensão na Notação de Voigt

**Saída:**  $var(\tau_q)$ , Lista de candidatos potenciais a plano crítico

**início**

$\Delta\theta, \Delta\phi, \Delta\alpha \leftarrow 20^\circ$

$\theta_{final}, \phi_{final}, \alpha_{final} \leftarrow 180^\circ$

Declarar  $\tau_q$

**repita**

**para**  $\theta \leftarrow 0$  **a**  $\theta \leftarrow \theta_{final}$  **faça**

**para**  $\phi \leftarrow 0$  **a**  $\phi \leftarrow \phi_{final}$  **faça**

$(var[\tau_q(t)])_{max} = 0$

**para**  $\alpha \leftarrow 0$  **a**  $\alpha \leftarrow \alpha_{final}$  **faça**

$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$

$\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$

$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$

$var[\tau_q(t)] = \sum_i \sum_j d_i d_j Cov[\sigma_i(t), \sigma_j(t)]$

**se**  $var[\tau_q(t)] > (var[\tau_q(t)])_{max}$  **então**

$(var[\tau_q(t)])_{max} = var[\tau_q(t)]$

$\theta \leftarrow \theta_{crit}$

$\phi \leftarrow \phi_{crit}$

$\alpha \leftarrow \alpha_{crit}$

**fim**

**fim**

**fim**

**fim**

**até** A varredura de todos os índices dos vetores;

**fim**

---

Durante a simulação, o procedimento realizado foi selecionar o trecho com a máxima variância da tensão cisalhamento na direção  $m$  e classificar os ângulos repetitivos nesse trecho. Os resultados encontrados para o ângulo  $\alpha$  foram praticamente nulos, com S9 e S9\* na ordem de  $10^{-15}$  e S11 na ordem de  $10^{-5}$ .

Os resultados da metodologia proposta por Susmel podem ser observados na Tabela 5.9:

Experimento	$r_{\sigma,\tau}$	Candidatos a Plano Crítico [ $\theta, \phi, \alpha \approx 0$ ]				$var[\tau_q(t)]$
S9	+ 1,0	[90 -22,5]	[90 67,5]	[90 157,5]		1825,423
S11	- 0,01	[90 -20,9]	[90 69,1]	[90 159,1]		946,503
S9*	- 1,0	[90 22,5]	[90 112,5]	[90 202,5]	[90 -67,5]	1825,855

Tabela 5.9: Candidatos a plano crítico encontrados pelo modelo de Susmel.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Nota-se que há pelo menos mais de um plano material experimentando uma variância máxima da tensão de cisalhamento, em alguns casos, planos com ângulos complementares representados em diferentes quadrantes de uma circunferência. As técnicas de pesquisa de plano crítico, em geral, realizam a varredura de ângulos em um intervalo de  $0 \leq \theta, \phi, \alpha \leq 180$ , representados no primeiro e segundo quadrante de uma circunferência. Alguns ângulos localizados no terceiro e

quarto quadrantes devem ser rebatidos para o primeiro e segundo quadrantes, logo é necessário haver a identificação desses ângulos complementares como mostra a Figura 5.12 e Tabela 5.10.

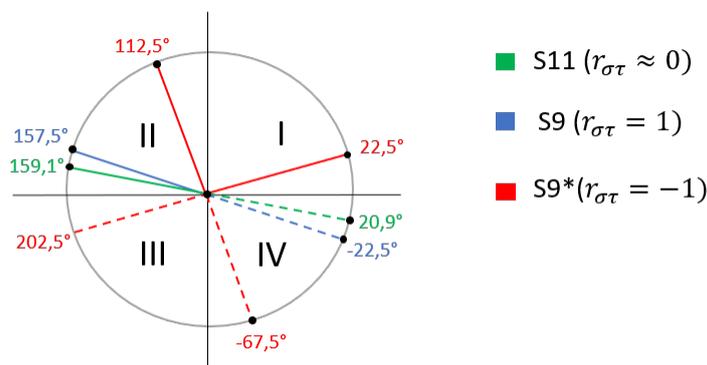


Figura 5.12: Identificação de ângulos complementares.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Experimento	$r_{\sigma,\tau}$	Candidatos a Plano Crítico $[\theta, \phi, \alpha \approx 0]$	$var[\tau_q(t)]$
S9	+ 1,0	[90 67,5] [90 157,5]	1825,423
S11	- 0,01	[90 69,1] [90 159,1]	946,503
S9*	- 1,0	[90 22,5] [90 112,5]	1825,855

Tabela 5.10: Candidatos a plano crítico encontrados no 1° e 2° quadrante pelo modelo de Susmel.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

#### 5.4.2.1 Determinação da amplitude equivalente $\tau_a$

Os resultados apresentados pela metodologia proposta por Susmel na referência bibliográfica [22] permitiram uma coleta de candidatos potenciais a plano crítico. Os procedimentos realizados foram a seleção do trecho com a máxima variância da tensão cisalhamento na direção  $m$ , a identificação dos ângulos e seus complementares e o registro deles como candidatos a plano crítico. Dessa forma, calculou-se a amplitude equivalente da tensão cisalhante  $\tau_q$  pela Equação 2.110 ou 4.53. Aplicando o MME no MMV a partir da Equação 4.55, a metodologia aplicada levou em conta os carregamentos proporcionais e não proporcionais, como mostrado na Figura 4.8.

Experimento	$r_{\sigma,\tau}$	Candidatos a Plano Crítico $[\theta, \phi, \alpha \approx 0]$	$\tau_a^a$	$\hat{\sigma}_{\tau_q}^b$
S9	+ 1,0	[90 67,5] [90 157,5]	60,42	42,72
S11	- 0,01	[90 69,1] [90 159,1]	43,51	30,77
S9*	- 1,0	[90 22,5] [90 112,5]	60,45	42,74

<sup>a</sup> Determinado pelo MME da Metodologia proposta por Susmel.

<sup>b</sup> Desvio-padrão do sinal de  $\tau_q(t)$ .

Tabela 5.11: Determinação da amplitude equivalente e desvio padrão de  $\tau_q$  pelo modelo de Susmel.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

### 5.4.2.2 Critério de Falha - Método de Socie

A partir dos ângulos registrados, utilizou-se o Método de Socie (SOC) para encontrar a máxima amplitude da tensão cisalhante entre os candidatos, ou seja, qual dos candidatos resultaria o maior valor de pico da tensão de cisalhamento dado por  $\tau_{q,pico}$ . O resultado mostrou que a circunferência gerada pouco mudou de posição praticamente entre os candidatos analisados, havendo uma sobreposição a cada candidato de acordo com a Figura 5.13. Além disso, com base nos resultados obtidos pelo SOC, os valores de pico das tensões cisalhantes entre os candidatos de cada caso foram bem próximos.

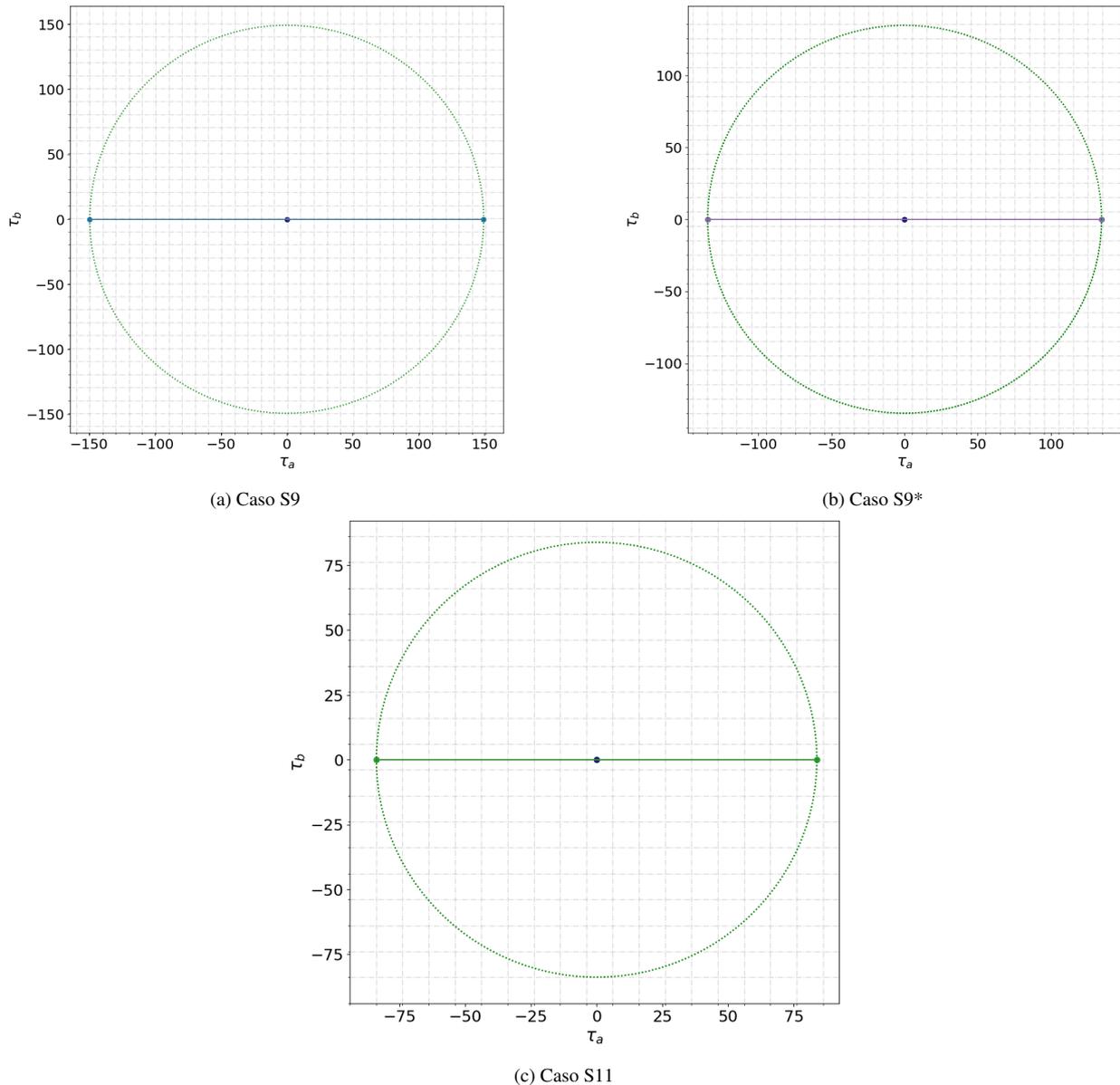


Figura 5.13: Aplicação do Método de Socie.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Experimento	$r_{\sigma,\tau}$	Plano $[\theta, \phi, \alpha]$ com $max[\tau_{q,pico}]$	$\tau_{q,pico}^a$	$\tau_a^b$	$\hat{\sigma}_{\tau_q}^c$
S9	+ 1,0	$[90 \ 157,5 \ -2,41 \cdot 10^{-15}]$	149,32	60,42	42,72
S11	- 0,01	$[90 \ 69,1 \ 6,3 \cdot 10^{-5}]$	83,82	43,51	30,77
S9*	- 1,0	$[90 \ 22,5 \ 2,45 \cdot 10^{-15}]$	134,69	60,45	42,74

<sup>a</sup> Determinado pelo SOC aplicado na lista de candidatos a plano crítico.

<sup>b</sup> Determinado pelo MME da Metodologia proposta por Susmel.

<sup>c</sup> Desvio-Padrão do Sinal de  $\tau_q$ .

Tabela 5.12: Análise de candidatos a plano crítico do modelo de Susmel com o SOC.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Nas Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 é possível visualizar a diferença entre o valor de pico (máximo) e a amplitude equivalente da tensão cisalhante. O valor de pico pode ser utilizado como critério de falha para determinar se o material irá falhar por fadiga a partir do limite de resistência a fadiga que, para o aço 18G2A, é  $\tau_{af} = 175\text{MPa}$ . Por fim chega-se a conclusão que o material não falharia por esse modo de falha de acordo com os  $\tau_{q,pico}$  da Tabela 5.12. Vale ressaltar que esse parâmetro não pode ser utilizado para o acúmulo de dano com objetivo de estimar uma previsão de vida, já que não leva em conta os efeitos do histórico de carregamento e seus danos acumulados, diferente de  $\tau_a$ . A amplitude equivalente da tensão cisalhante leva em conta todo o histórico de carregamento e fornece uma amplitude equivalente de uma função senoidal aproximada com o sinal de tensão gerado.

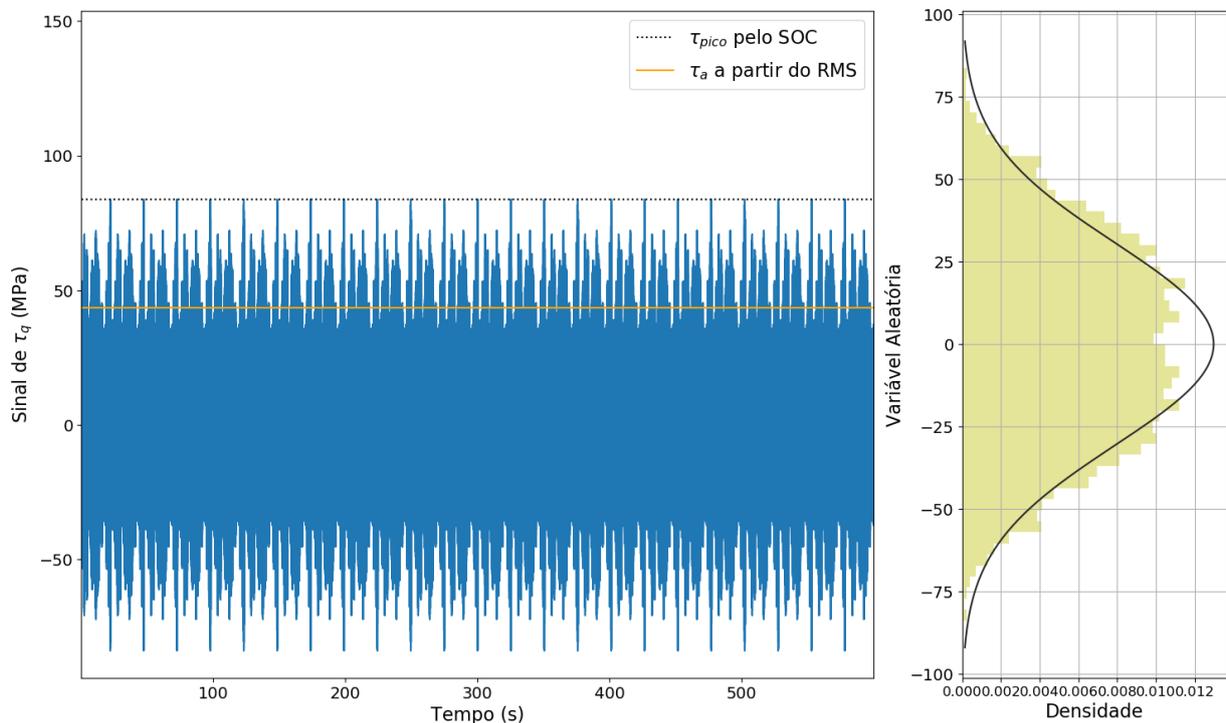


Figura 5.14: Sinal no tempo, Distribuição Normal e Gaussiana para  $\tau_q$  com coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor.

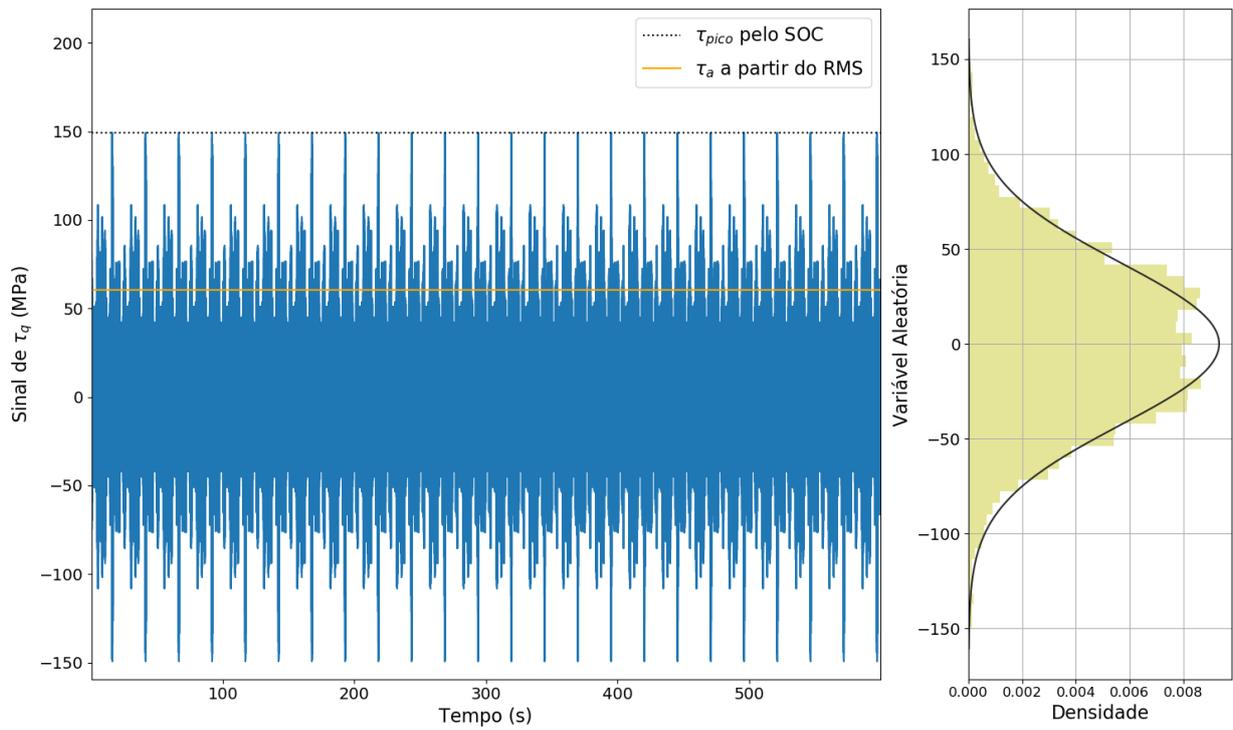


Figura 5.15: Sinal no tempo, Distribuição Normal e Gaussiana para  $\tau_q$  com coeficiente de correlação igual a 1.

Fonte: Elaborado pelo autor.

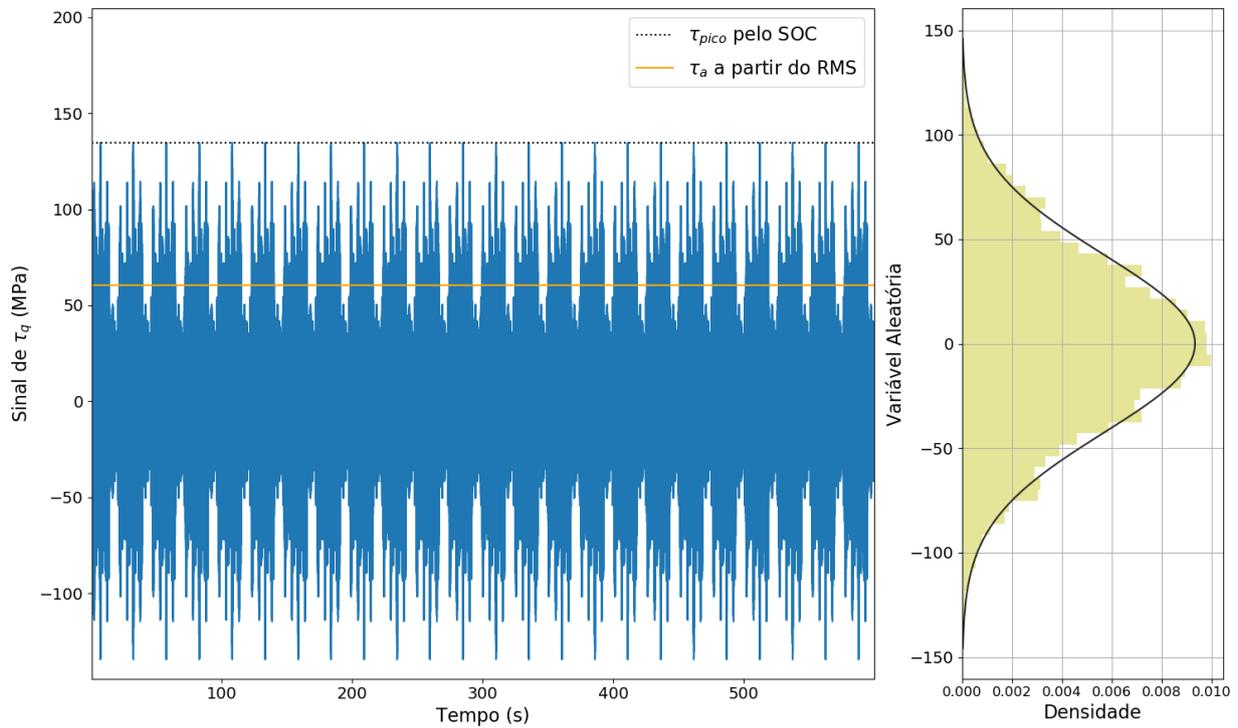


Figura 5.16: Sinal no tempo, Distribuição Normal e Gaussiana para  $\tau_q$  com coeficiente de correlação igual a -1.

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5.5 RESULTADOS DA ANÁLISE NO DOMÍNIO NA FREQUÊNCIA

O método espectral tem como função a validação da identificação do plano crítico no tempo desde que os resultados coincidam. O valor percentual tem como objetivo definir a sobreposição da janela amostral para Transformada de Fourier utilizada para varrer o histórico de tensões. Durante a simulação, foi adotado um valor de 90% para sobreposição das janelas amostrais a fim de suavizar o comportamento do gráfico das PSDs simulados.

O **Algoritmo 5** é responsável pela varredura dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  e o mapeamento das variâncias em função desses ângulos com o objetivo de encontrar os ângulos críticos da posição de máxima variância da  $PSD[\sigma_{eq}]$ .

---

### Algoritmo 5: Varredura no domínio da frequência.

---

**Entrada:** Sinais de tensão no domínio no tempo, Matriz de Densidade Espectrais de Potência, Matriz das PSDs

**Saída:**  $G_{eq}$ , Plano Crítico

**início**

$PSD_{spwelch}$  (Método de Welch)

$\Delta\theta, \Delta\phi \leftarrow 1$

$\theta_{final}, \phi_{final} \leftarrow 180$

Declarar  $G_{eq}$

**repita**

**para**  $\theta \leftarrow 0$  a  $\theta \leftarrow \theta_{final}$  **faça**

**para**  $\phi \leftarrow 0$  a  $\phi \leftarrow \phi_{final}$  **faça**

$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

$var[G_{eq}(f)] = \Re[\int_0^\infty G_{kl}(f)df]$

**se**  $var[G_{eq}(f)] = (var[G_{eq}(f)])_{max}$  **então**

$\theta \leftarrow \theta_{crit}$

$\phi \leftarrow \phi_{crit}$

**fim**

**fim**

**fim**

**até** A varredura de todos os índices dos vetores;

**Determinação da PSD equivalente:**

$G_{eq}(f) = \overline{G}(f) \cdot \mathbf{a}(\theta_{crit}, \phi_{crit})$

**fim**

---

Uma transformada rápida de Fourier FFT pode nos fornecer diversas informações sob o espectro no domínio da frequência. Porém, há limitações, como por exemplo se o sinal adquirido não tiver números inteiros de períodos, pode resultar em uma onda de formato truncado, gerando diferentes características do sinal original que era contínuo no domínio do tempo, o que introduz reações abruptas de descontinuidades. Para minimizar os efeitos do uso de um número não inteiros de ciclos em uma FFT é necessário a técnica de janelamento. Utilizou-se o Periodograma de Welch com janelamento de Blackmann pelo fato de possuir um menor aumento de resolução e proporcionar um decaimento mais suave no intervalo do janelamento, semelhante a de um comportamento gaussiano, e um pico mais amplo no espectro. Para o *Checking 2* da Figura 1 do

Apêndice, comparando tanto as PSD referenciais e as simuladas, foi adotado uma comparação gráfica como é mostrado pelas Figuras 5.17, 5.18 e 5.19:

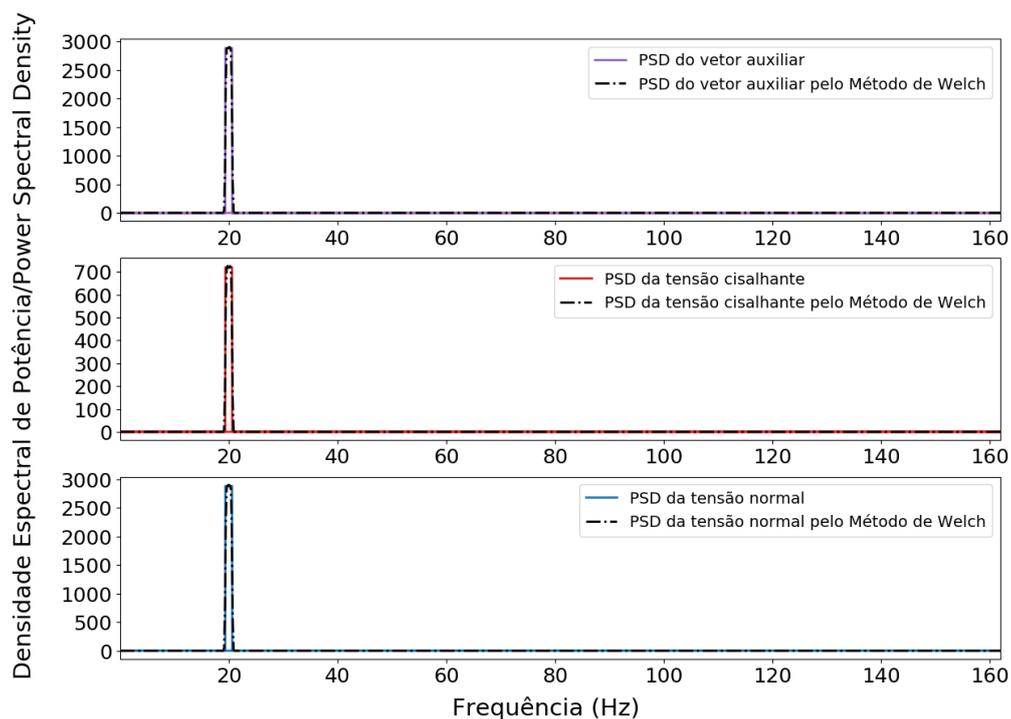


Figura 5.17: PSD Referencial e pelo Método de Welch para coeficiente de correlação igual a 0,039 ( $r_{\sigma,\tau} \approx -0,01$ ).

Fonte: Elaborado pelo autor.

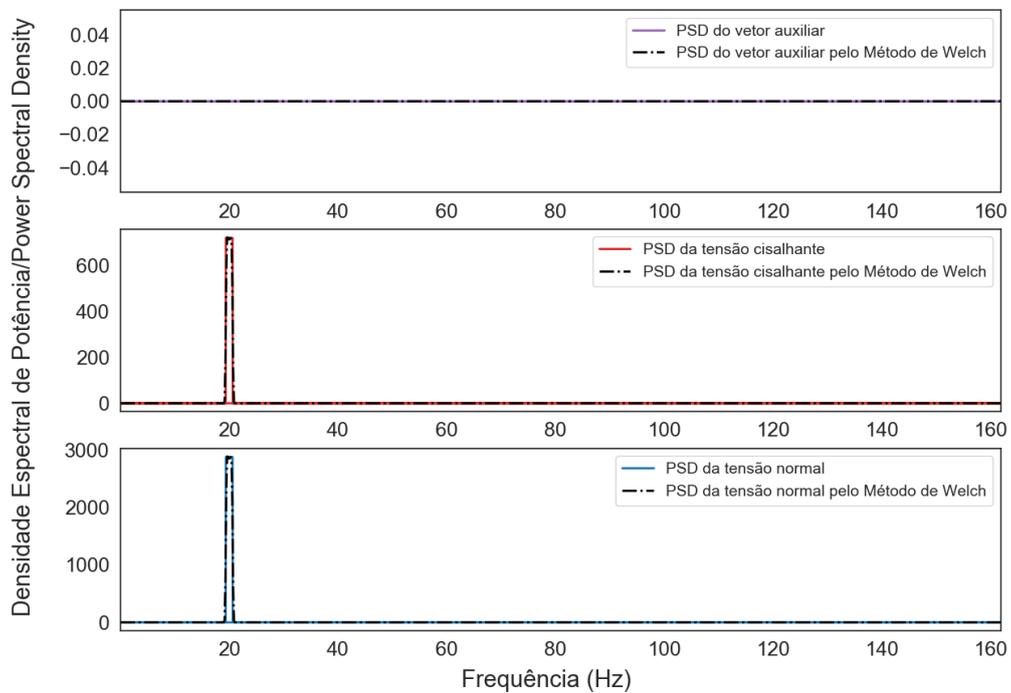


Figura 5.18: PSD Referencial e pelo Método de Welch para coeficiente de correlação igual a 1.0.

Fonte: Elaborado pelo autor.

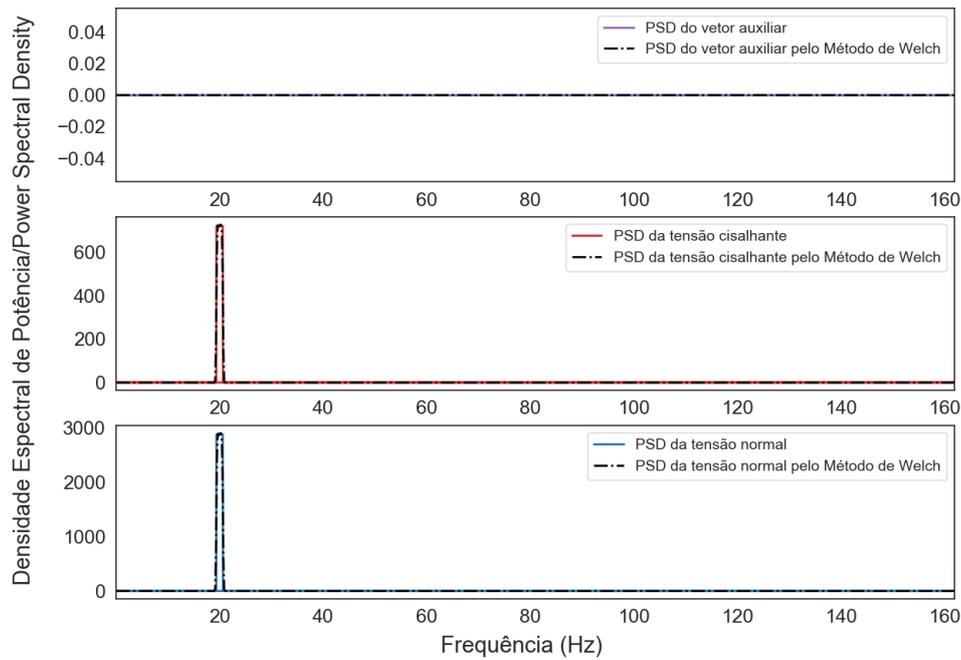


Figura 5.19: PSD Referencial e pelo Método de Welch para coeficiente de correlação igual a -1.0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados obtidos pelo **Algoritmo 5** podem ser observados na Tabela 5.13. Nota-se que os planos críticos coincidiram e as variâncias de  $\sigma_{eq}$  e  $G_{eq}$  obtiveram valores próximos, satisfazendo as verificações *Checking 3* e *Checking 4*.

Experimento Simulado	$r_{\sigma,\tau}$	$N_o^+$	$M^+$	$\zeta$	$\alpha_f$	Plano Crítico	$max[var(G_{eq})]$
S9	+ 1,0	20,0028	20,0174	0,0269	0,9993	[90 23]	5312,93
S11	- 0,01	20,0051	20,0196	0,0268	0,9993	[90 2]	3644,03
S9*	- 1,0	20,0031	20,0177	0,0269	0,9993	[90 157]	5338,47

Tabela 5.13: Resultados do **Algoritmo 5** e seus parâmetros espectrais.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

De forma similar, tendo conhecimento dos planos críticos, o  $G_{eq}$  e seus parâmetros espectrais são calculados e a previsão de vida, dado por  $T_{sp}$ , é estimada com uma análise espectral e aplicação do método espectral de Rayleigh para banda estreita. Em caso de constatação de um espectro com comportamento de banda larga após a análise espectral, é necessário a aplicação do modelo de Wirsching and Light para determinação do tempo de vida à fadiga pela Equação 3.50. Vale ressaltar que os resultados dos planos críticos no domínio do tempo e da frequência devem coincidir, sendo recomendável um tempo de observação suficiente a fim de evitar instabilidades dos resultados. No Projeto de Graduação 1 adotou-se um tempo de observação igual a 300 s como um tempo razoável de convergência, enquanto no Projeto de Graduação 2 foi simulado de forma mais criteriosa com tempo de observação de 600 s, o que aproximou um pouco mais os parâmetros espectrais com os obtidos das referências bibliográficas [20] e [21].

## 5.6 RESULTADOS FINAIS E PREVISÃO DE VIDA OBTIDA PELA SIMULAÇÃO

### 5.6.1 Comparação de Planos Críticos e Previsão de Vida Numérica da Metodologia proposta por Lagoda & Macha

A partir dos resultados desenvolvidos em cada etapa, baseados na histórias de tensões provenientes da flexão  $\sigma(t)$  e a torção  $\tau(t)$  e na confiabilidade com a verificação dos erros relativos, a vida útil do material pode ser determinada pelo método de contagem de ciclos Rainflow, dado pelas Equações 2.99 e 3.47, e pelo Método Espectral, dado pela Equação 3.50. Utilizando os critérios de plano crítico no domínio do tempo e da frequência foi possível estimar o tempo de vida do componente sujeito a carregamentos de amplitude variável e comparar com os valores referenciais, encontrados novamente na referência [21]. Os resultados finais da simulação estão apresentados na Tabela 5.14.

Parâmetros	Coeficientes de Correlação		
	$r_{\sigma,\tau} = -0.01$ (S11)	$r_{\sigma,\tau} = 1.0$ (S9)	$r_{\sigma,\tau} = -1.0$ (S9*)
Resultados Numéricos da Simulação			
Plano Crítico no Domínio do tempo $[\theta \phi]_{RF}$	[90 2]	[90 23]	[90 157]
Plano Crítico pelo Método Espectral $[\theta \phi]_{SP}$	[90 2]	[90 23]	[90 157]
Valor RMS de $\tau$	30,240	30,211	30,223
Valor RMS de $\sigma$	60,215	60,422	60,446
Erro Relativo do RMS de $\tau$ (%)	0,801	0,704	0,743
Erro Relativo do RMS de $\sigma$ (%)	0,359	0,704	0,743
Coeficiente de Correlação Simulado	0,039	1,0	-1,0
$T_{RF}(s)$	$6,14 \cdot 10^7$	$4,83 \cdot 10^6$	$4,87 \cdot 10^9$
$T_{SP}(s)$	$4,16 \cdot 10^7$	$1,07 \cdot 10^7$	$7,13 \cdot 10^9$
Resultados Numéricos da Referência Bibliográfica [21] (Capítulo 5)			
Plano Crítico no Domínio do tempo $[\theta \phi]_{RF}$	[90 0]	[90 23]	-
Plano Crítico na Análise Espectral $[\theta \phi]_{SP}$	[90 0]	[90 23]	-
Valor RMS de $\tau$		30	-
Valor RMS de $\sigma$		60	-
Coeficiente de Correlação	$\approx 0$	1,0	-
$T_{RF}(s)$	$5,01 \cdot 10^7$	$8,96 \cdot 10^6$	-
$T_{SP}(s)$	$5,55 \cdot 10^7$	$1,47 \cdot 10^7$	-

Tabela 5.14: Previsão de Vida - Comparação dos resultados obtidos pela metodologia proposta Lagoda & Macha.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O caso do S9 modificado, S9\* ( $r_{\sigma,\tau}$ ), é um caso que não consta na referência bibliográfica adotada para comparação, porém se mostrou uma importante aquisição para análise da simulação de mesmos valores de RMS com diferentes coeficientes de correlação. A justificativa nos resultados observados para vida à fadiga com coeficiente  $r_{\sigma,\tau} = -1$  foi a diminuição da amplitude da tensão equivalente e dos momentos espectrais de  $G_{eq}$ , devido a obtenção de valores negativos nas componentes cruzadas das matrizes de covariância. Quanto ao caso do S11, a diferença dos resultados foi mínima, já que as variâncias geradas pelos planos eram extremamente próximas.

### 5.6.2 Comparação de Planos Críticos e Previsão de Vida Numérica da Metodologia proposta por Susmel

O Método da Curva de Wöhler Modificado (MCWM) postula que o dano por fadiga atinge seu valor máximo naquele plano de material experimentando a faixa máxima da amplitude da tensão de cisalhamento. Para realizar a previsão de vida é necessário aplicar alguns parâmetros de calibração deduzidos no Tópico I.4 do Apêndice. Como os parâmetros  $b$  são os mesmos para tração e torção pura, pela equação da Curva S-N obedecendo o critério de Tresca (Critério de Máxima Tensão de Cisalhamento) com objetivo de empregar o MCWM, os parâmetros da curva de calibração da constante  $A$  para tração e torção, representados respectivamente por  $A_s$  e  $A_t$ , podem ser calculados das seguintes formas:

$$S_f = \frac{\sigma_{af}}{2} \text{ (Critério de Tresca)} \implies S_f = A(N)^b \implies A_{s,MCWM} = \frac{S_f}{(N_o)^b} = \frac{\sigma_{af}}{2(N_o)^b} \quad (5.11)$$

$$S_f = \tau_{af} \implies S_f = A(N)^b \implies A_{t,MCWM} = \frac{\tau_{af}}{(N_o)^b} \quad (5.12)$$

$N_o$	$\sigma_{af}$	$\tau_{af}$	$A_{s,MCWM}$	$A_{t,MCWM}$	$b_{s,MCWM}$	$b_{t,MCWM}$
$2,735 \cdot 10^6$	271	175	1064,5	1375,0	-0,139	-0,139

Tabela 5.15: Parâmetros da Curvas S-N.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Utilizando o critério de plano crítico a partir da tensão cisalhante  $\tau_q(t)$  no domínio do tempo foi possível obter o plano crítico com base nos candidatos da Tabela 5.10 analisando qual plano resultaria na menor previsão de vida, já que ambos os candidatos apresentam uma variância da tensão  $\tau_q$  igual ao valor máximo, e consequentemente, apresentam a mesma amplitude equivalente de tensão cisalhante.

Parâmetros	Coeficientes de Correlação		
	$r_{\sigma,\tau} = -0,01$ (S11)	$r_{\sigma,\tau} = 1,0$ (S9)	$r_{\sigma,\tau} = -1,0$ (S9*)
Resultados da Simulação Obtidos Pelo Metodologia proposta por Susmel.			
Plano Crítico $[\theta \phi \alpha]_{RF}$	[90 159,1 $-6,648 \cdot 10^{-6}$ ]	[90 157,5 $-2,448 \cdot 10^{-15}$ ]	[90 22,5 $2,450 \cdot 10^{-15}$ ]
Valor RMS de $\tau$	30,240	30,211	30,223
Valor RMS de $\sigma$	60,215	60,422	60,446
Coefficiente de Correlação Simulado	0,039	1,0	-1,0
$T_{RF}(s)$	$2,05 \cdot 10^7$	$9,69 \cdot 10^5$	$5,78 \cdot 10^6$
Previsão de vida para candidato secundário ( $\alpha \approx 0$ ).			
$T_{RF}(s)/Plano$	$1,30 \cdot 10^8$ / [90 69,1]	$4,3 \cdot 10^6$ / [90 67,5]	$1,1 \cdot 10^7$ / [90 112,5]

Tabela 5.16: Previsão de Vida - Comparação dos resultados obtidos pela metodologia proposta Susmel.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em teoria, os planos de máxima tensão tangencial estão a  $45^\circ$  dos planos principais de tensão, onde a tensão normal é máxima e coincide com a direção da tensão principal máxima, de acordo com a Equação 5.13 e Figura 5.20.

$$2\phi_{p1} + 2\phi_{s1} = 90^\circ \implies \phi_{p1} + \phi_{s1} = 45^\circ \quad (5.13)$$

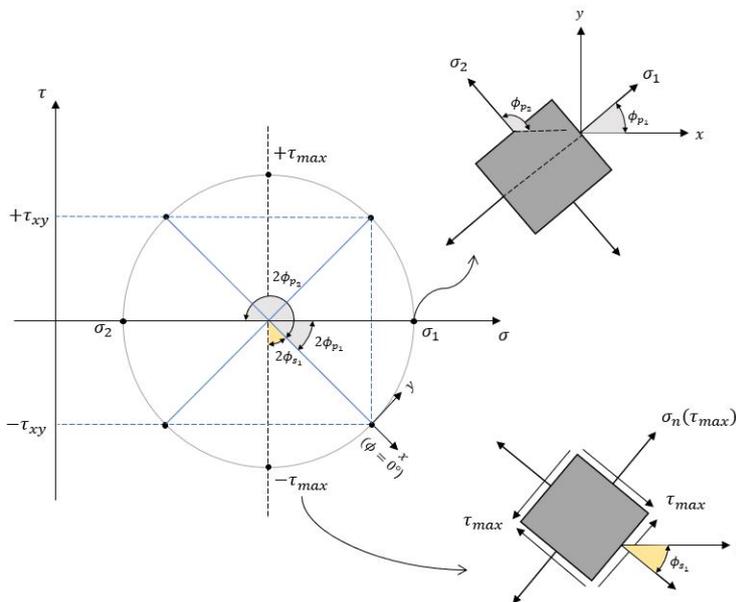


Figura 5.20: Círculo de Mohr.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ambos os casos estudados tanto pela metodologia de Susmel quanto a metodologia de Lagoda & Macha, o ângulo  $\theta$  foi igual a  $90^\circ$ . De acordo com a Tabela 5.16, quanto ao ângulo  $\phi$ , no caso S9 observou-se que o ângulo complementar da tensão cisalhante máxima está a  $45^\circ$  do ângulo no primeiro quadrante da tensão normal, enquanto no S9\* observou-se que o ângulo complementar da tensão normal está a  $45^\circ$  do ângulo no primeiro quadrante da tensão normal, como é visto na Figura 5.21.

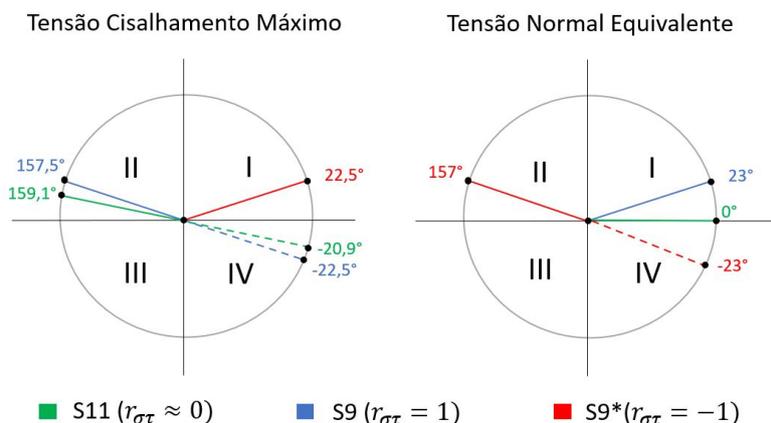


Figura 5.21: Comparação de Planos Críticos de  $\tau_q$  e  $\sigma_{eq}$ .

No caso do S11 houve uma diferença de resultado, sendo que uma possível hipótese seria o próprio comportamento do carregamento com coeficiente de correlação próximo de um valor nulo em que há um aumento dos candidatos a plano crítico.

### 5.6.3 Previsão de Vida - Experimental vs Numérica com a Correção Serensen-Kogayev

Para a comparação da previsão de vida experimental e numérica foi necessário alguns ajustes na simulação. Os cálculos de vida de fadiga foram feitos com base nas histórias de tensão nominal devidas à flexão e torção. Para que fosse possível correlacionar os cálculos de vida de fadiga com os resultados experimentais, Nieslony & Macha [21] sugerem uma modificação na Equação 3.24:

$$\sigma_{eq}(t) = \sigma_{xx}(t) l_n^2 + 2 l_n m_n \left( \frac{\sigma_{af}}{\tau_{af}} \right) \tau_{xy}(t) \quad (5.14)$$

A modificação inclui a diferenciação entre os limites de fadiga a flexão  $\sigma_{af}$  e a torção  $\tau_{af}$ . Os ciclos determinados pela contagem de ciclo a partir da tensão normal (Equação 5.14) foram aplicados para o acúmulo de danos de acordo com a hipótese linear de Serensen-Kogayev. A correção de Serensen-Kogayev para acúmulo de dano raramente é aplicada, embora possa ser muito eficaz no caso de sinais estocásticos com resultados não conservadores obtidos pela regra de Palmgren-Miner. Dessa forma, Nieslony & Macha calcularam a previsão de vida de acordo com a Equação 5.15:

$$T_{RF} = \frac{T_o b_{SK} A}{\sum_{i=1}^j n_i \sigma_{ai}^m} \quad (5.15)$$

Onde  $b_{SK}$  é coeficiente de Serensen-Kogayev, que caracteriza o espectro de amplitude de carregamento aleatório. Sendo calculado por:

$$b_{SK} = \frac{\sum_{i=1}^j \sigma_{ai} t_i - a_{SK} \sigma_{af}}{\sigma_{a,max} - a_{SK} \sigma_{af}} \text{ em que } \sigma_{amax} = 3,73 \sqrt{var[\sigma_{eq}(t)]} \quad (5.16)$$

Sendo  $t_i$  a frequência de ocorrência de  $\sigma_{ai}$  durante o tempo de observação ou fração do ciclo  $n_i$  dado pela Equação 5.17,  $\sigma_{a,max}$  a amplitude máxima de tensão para um bloco de carregamento considerado e o  $a_{SK}$  o coeficiente que permite incluir amplitudes abaixo do limite de fadiga no qual o autor considera igual a 0,5.

$$t_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (5.17)$$

Para determinar a vida com o método espectral, o primeiro passo é assumir o comportamento da banda, se é banda larga ou estreita. Assumindo que o carregamento tinha uma distribuição de probabilidade normal/gaussiana com um espectro de frequência de banda estreita e o dano foi acumulado de acordo com a hipótese de Serensen-Kogayev, a fórmula da previsão de vida no domínio da frequência pela distribuição de Rayleigh, dado pela Equação 5.18, pode ser modificada para seguinte forma:

$$T_{SP} = \frac{b_{SK}A}{M+(2m_o)^{m/2}\Gamma\left(\frac{m+2}{2}, \frac{a_{SK}^2\sigma_{af}^2}{2m_o}\right)} \quad (5.18)$$

Onde  $b_{SK}$  é calculado de outra forma no domínio da frequência a partir da função gama incompleta dada por  $\Gamma(w_1, w_2) = \int_{w_2}^{\infty} e^{-t} t^{w_1-1} dt$ :

$$b_{SK} = \frac{\sqrt{2m_o} \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{a_{SK}^2\sigma_{af}^2}{2m_o}\right) \exp\left(\frac{a_{SK}^2\sigma_{af}^2}{2m_o}\right) - a_{SK}\sigma_{af}}{\sigma_{a,max} - a_{SK}\sigma_{af}} \quad (5.19)$$

Onde  $\sigma_{a,max}$  é calculado da seguinte forma:

$$\sigma_{a,max} = 3,73\sqrt{\text{var}[PSD_{\sigma_{eq}}(f)]} = 3,73\sqrt{m_o} \quad (5.20)$$

Chaudhury e Dover, segundo a referência [21], observaram que a forma generalizada de distribuição de densidade de probabilidade poderia ser simplificada para a distribuição de Rayleigh em espectros de frequência de banda estreita ( $\zeta \rightarrow 0$ ) e distribuição normal para histórico de frequência de banda larga ( $\zeta \rightarrow 1$ ). Para comportamento de banda larga, em que alguns autores consideram um espectro de banda larga caso o parâmetro espectral  $\zeta > 0,66$ , deve-se assumir como banda estreita e corrigir a partir do método Wirsching and Light onde  $\lambda$  é um coeficiente para contabilizar o efeito da largura da frequência de banda de carregamento na vida de fadiga.

$$\text{Sendo } T_{SP,NB} = T_{SP} \implies T_{SP,BB} = \frac{1}{\lambda} T_{NB} \quad (5.21)$$

Os experimentos selecionados com seus respectivos tempo de vida experimental do material foram obtidos no Capítulo 6 da referência [21] e podem ser visualizados na Tabela 5.17. A partir da correção de Serensen-Kogayev, os resultados de previsão de vida obtido na simulação pelo método Rainflow e Espectral podem ser observados na Figura 5.22. Observa-se que boa parte dos experimentos simulados estão dentro de um intervalo de confiabilidade com range igual a 3, o que torna a técnica de reconstrução de sinal efetiva.

Experimentos	$RMS_{\tau}$	$RMS_{\sigma}$	$r_{\sigma,\tau}$	Vida Experimental (s)
N03.1	54,2	96,8	-0,01	$1,91 \cdot 10^5$
N03.3	66,2	118,3	-0,01	$3,06 \cdot 10^4$
N05.1	54,4	108,8	1	$2,07 \cdot 10^4$
N05.8	39,9	78,9	1	$3,80 \cdot 10^5$
N06.1	61,8	61,8	1	$1,35 \cdot 10^5$
N07.1	69,6	71,7	0,5	$4,85 \cdot 10^4$
N08.1	64,0	118,5	0,5	$2,09 \cdot 10^4$

Tabela 5.17: Casos simulados e parâmetros estatísticos.

Fonte: Dados experimentais obtido pela referência [20] e [21] (Capítulo 6).

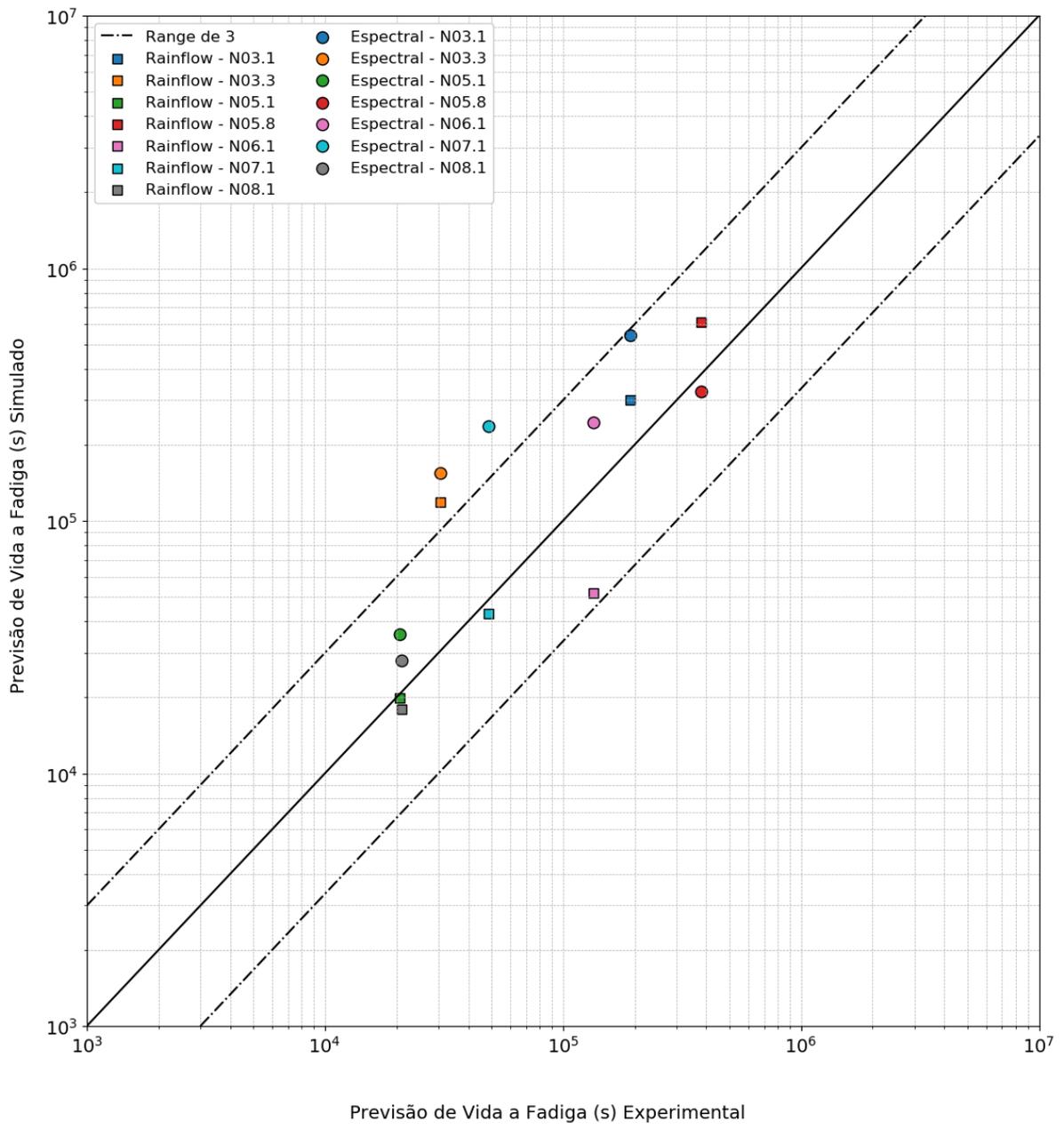


Figura 5.22: Previsão de Vida - Experimental vs. Simulado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6 CONCLUSÃO FINAL

Ambos os modelos apresentados na dissertação utilizam um algoritmo simples baseado no Método da Máxima Variância, que tem como objetivo determinar com eficiência a orientação do plano material que experimenta a máxima variância de uma tensão resolvida em uma determinada direção, podendo ser normal ou uma direção que forneça a maior amplitude equivalente. A peculiaridade do MMV é que, ao contrário das definições clássicas especificamente concebidas para calcular as tensões normais e cisalhantes, a análise de tensões é realizada em termos de variância das tensões normais e cisalhantes atuando em um determinado plano. Essa característica implica em uma grande simplificação, pois não é mais necessário projetar o histórico de carregamento em um determinado conjunto de planos de materiais para determinar o plano crítico. Porém, para previsão de vida, recomenda-se um histórico de carregamento significativo para que garanta uma estabilidade dos resultados, sendo necessário um tempo de observação próximo ao utilizado no trabalho. Em resumo, essas metodologias tem como vantagem não só a possibilidade de estimar uma previsão de vida à fadiga, mas também de determinar a orientação da trinca nucleada ou plano dominante de falha.

Um dos pontos importantes obtidos nesse trabalho foi a validação da metodologia proposta por Lagoda & Macha. Os resultados obtidos pela simulação no domínio do tempo e da frequência sob carregamento aleatório multiaxial estão bem correlacionados com os resultados da previsão de vida numérica, apresentados nas referências [20] e [21]. Quanto a simulação com a correção Serensen-Kogayev, os resultados foram próximos aos resultados da previsão de vida experimental, levando em conta que o sinal obtido nesse trabalho era um sinal simulado por técnica gaussiana. Em geral, o desempenho dos resultados da Figura 5.22 foram semelhantes aos encontrados no Capítulo 6 [21], havendo alguns experimentos um pouco fora do range 3.

Os modelos de tempo de vida à fadiga de um material associado a dano acumulado pelo material sujeito a carregamentos aleatórios multiaxiais podem ser separados em modelos de contagem de ciclos e de análise espectral. Ambos as previsões de vida foram obtidos em uma margem aceitável. Além disso, o conjunto de algoritmos desenvolvido durante o trabalho teve bom desempenho para simulação e tornou o processo de varredura no domínio do tempo e da frequência bem intuitivo, porém a técnica gaussiana utilizada para reconstrução de sinal apresentou um alto custo computacional com um tempo de simulação entre 45 a 90 minutos para tempos de observação maiores que 300 segundos. Seria necessário uma otimização ou a substituição por uma outra técnica. Quanto ao mapeamento da variância das tensões e função de densidade espectral, o tempo computacional era relativamente baixo, com os resultados sendo obtidos em questão de minutos.

Outro ponto importante foi a verificação da previsão de vida pela metodologia proposta por Susmel. Essa metodologia permite que a orientação do plano crítico seja determinada rapidamente também sob históricos de carregamento complexos encontrados no estudo da fadiga mul-

ti axial. Assim que os termos da variância e covariância relativos ao histórico de carregamento de entrada são conhecidos, o tempo necessário para calcular os máximos globais não depende do comprimento do histórico de carregamento avaliado.

Era esperado que as previsões de vida entre as duas metodologias fossem próximas. Ao analisar os resultados, constatou-se que em geral as previsões foram valores próximos, com exceção do S9\* que apresenta um coeficiente de correlação negativo. Nesse caso, o MMV baseado na tensão de cisalhamento apresentou um melhor resultado do que o baseado na tensão normal equivalente.

Paralelamente, a metodologia proposta por Susmel apresenta um método de otimização conhecido como Método do Gradiente Ascendente. Dentre as vantagens desse método estão:

- É um algoritmo de fácil programação que permite uma otimização na identificação de planos críticos obtido no Módulo 1. Logo, o algoritmo desenvolvido pode ser implementado em diversas linguagens de programação padrão.
- Apenas o cálculo do gradiente da função objetivo  $VAR[\tau_q(t)]$  é requerido em cada iteração.
- Aplicável em problemas de grande escala devido a seus baixos requerimentos de memória computacional, o que gera uma redução considerável do tempo computacional necessário para realizar a avaliação da fadiga.

Porém, uma desvantagem desse método é de apresentar taxas de convergência muito baixas, requerendo um grande número de iterações para se alcançar uma solução com precisão aceitável. Dependendo da discretização angular estabelecida no algoritmo, o custo computacional pode ser tornar elevado exigindo computadores mais potentes para simulação. Uma solução possível seria utilização de outro método de otimização como otimização de redes neurais (RMSprop ou Adam), já que o método do gradiente é um modelo bruto, sendo a essência desses métodos mais avançados que apresentam um baixo tempo computacional.

Susmel sugere em seu artigo que mais estudos precisam ser feitos nesta área para a validação do MMV em conjunto com os critérios disponíveis baseados no plano crítico e dados reais de ensaios experimentais. É necessário uma verificação de confiabilidade em diversas situações de fadiga multiaxial que envolvem históricos de carregamento de amplitude variável.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 PAPADOPOULOS, I. Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue - INT J FATIGUE*, v. 23, p. 839–849, 2001.
- 2 SUSMEL, L. *Multiaxial Notch Fatigue*. [S.l.]: Woodhead Publishing, 2009.
- 3 NORTON, R. *Projeto de Máquinas - 4ed.* [S.l.]: Bookman Editora, 2013.
- 4 LEE, Y. *Fatigue Testing and Analysis - Theory and Practice*. [S.l.]: Elsevier Science, 2005. Pan, J., Hathaway, R. e Barkey, M.
- 5 ASTM-E1823-20B. *Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing*. West Conshohocken, PA, 2013.
- 6 LIMA, S. A. *Estudo das condições de propagação de trinca com base no conceito de comprimento característico*. Brasília, DF: Mestrado em Integridade de Materiais de Engenharia pelo Programa de Pós-graduação em Integridade De Materiais De Engenharia. Departamento de Integridade de Materiais da Engenharia, Universidade De Brasília (Campus Gama), 2018. 59 p.
- 7 JORDON, J. B.; RAO, H.; AMARO, R.; ALLISON, P. Chapter 6 - extreme conditions and environments. In: JORDON, J. B.; RAO, H.; AMARO, R.; ALLISON, P. (Ed.). *Fatigue in Friction Stir Welding*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2019, (Friction Stir Welding and Processing). p. 119 – 136.
- 8 GONÇALVES, C. de A. *Fadiga Multiaxial Policíclica: Modelagem e Simulação*. Brasília, DF: Mestrado em Ciências Mecânica. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2006. 88 p.
- 9 MARQUIS, G.; SOCIE, D. *Multiaxial fatigue*. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- 10 FUMES, F. G. *Estudo comparativo entre critérios de fadiga multiaxial aplicados ao contato roda-trilho*. Campinas: Mestrado em Engenharia Mecânica. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2014. 129 p.
- 11 ZANARDI, V. V. *Fadiga Multiaxial Avaliação Comparativa entre os Métodos da Mínima Circunferência, Método da Caixa e Método do Momento de Inércia*. Brasília, DF: Graduação em Engenharia Mecânica. Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2017. 61 p.
- 12 PINHEIRO, P. A. B. *Análise crítica de modelos de fadiga de plano crítico e proposta de uma nova medida de amplitude da tensão cisalhante*. Brasília, DF: Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2012. 86 p.
- 13 FARIA, A. de M. *Estudo sobre Métodos para Cálculo da Amplitude de Tensão Cisalhante em Modelos de Plano Crítico*. Brasília, DF: Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2018. 101 p.
- 14 FAA. Supplemental inspection document development handbook for commuter aircraft. Federal Aviation Administration, p. 17–35, 1999. Acesso em 25 de fevereiro de 2020. Disponível em: <<<https://www.abbottaerospace.com/wpdm-package/dot-faa-ar-99-xx-supplemental-inspection-document-development-for-commuter-aircraft-01>>>
- 15 WANHILL, R. J. H. Milestone case histories in aircraft structural integrity. *Comprehensive Structural Integrity*, Elsevier Science, p. 61–72, 2002. Document NLR-TP-2002-521.

- 16 KOSKI, K.; TIKKA, J.; BÄCKSTRÖM, M.; SILJANDER, A.; LIUKKONEN, S.; MARQUIS, G. An aging aircraft's wing under complex multiaxial spectrum loading: Fatigue assessment and repairing. *International Journal of Fatigue*, v. 28, n. 5, p. 652 – 656, 2006. ISSN 0142-1123. Selected papers from the 7th International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture (ICBMFF).
- 17 RIAL, D.; KEBIR, H.; WINTREBERT, E.; ROELANDT, J.-M. Multiaxial fatigue analysis of a metal flexible pipe. *Materials & Design (1980-2015)*, v. 54, p. 796 – 804, 2014.
- 18 BREVIS, W.; SUSMEL, L.; BOXALL, J. Investigating in-service failures of water pipes from a multiaxial notch fatigue point of view: A conceptual study. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 229, n. 7, p. 1240–1259, 2015.
- 19 MILLER, K.; BROWN, M. *ASTM STP853-EB Multiaxial Fatigue*. West Conshohocken, PA, 1985.
- 20 ŁAGODA, T.; MACHA, E.; NIESŁONY, A. Fatigue life calculation by means of the cycle counting and spectral methods under multiaxial random loading. *Fatigue, Fracture of Engineering Materials and Structures*, v. 28, p. 409 – 420, 2005.
- 21 NIESŁONY, A.; MACHA, E. *Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2007. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics).
- 22 SUSMEL, L. A simple and efficient numerical algorithm to determine the orientation of the critical plane in multiaxial fatigue problems. *International Journal of Fatigue*, v. 32, p. 1875–1883, 11 2010.
- 23 SUSMEL, L.; TAYLOR, D. A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading. *International Journal of Fatigue*, v. 38, p. 7–24, 2012.
- 24 DANTAS, A. Proposta Alternativa para Amplitude da Tensão Cisalhante e Uso de Algoritmos Genéticos para Determinação do Plano Crítico em Fadiga Multiaxial. 2009. Publicação ENM.TD-003/2009, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 142 p.
- 25 BENDAT, J.; PIERSOL, A. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. [S.l.]: Wiley, 2011. (Wiley Series in Probability and Statistics).
- 26 WEI, W. *Multivariate Time Series Analysis and Applications*. [S.l.]: Wiley, 2019. (Wiley Series in Probability and Statistics).
- 27 HOWARD, R. *Principles of Random Signal Analysis and Low Noise Design: The Power Spectral Density and its Applications*. [S.l.]: Wiley, 2004. (Wiley - IEEE).
- 28 FERREIRA, J. L. A. Simulação de carregamentos aleatórios para cálculo de dano por fadiga. 1993. Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- 29 DOWLING, N. E. *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue*. 4th. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2012.
- 30 ASTM-E1049-85. *Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*. West Conshohocken, PA, 2017.
- 31 BUDYNAS, R.; NISBETH, J. *Elementos de Máquinas de Shigley - 9ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2011.

- 32 TAKAHASHI, B. X. *B.X. Metodologia Moderna para Análise de Fadiga Baseada em Elementos Finitos de Componentes Sujeitos a Fadiga Uni e Multiaxial*. São Paulo, SP: Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2014. 374 p.
- 33 MARCINIAK, Z.; ROZUMEK, D.; MACHA, E. Fatigue lives of 18g2a and 10hnap steels under variable amplitude and random non-proportional bending with torsion loading. *International Journal of Fatigue*, v. 30, n. 5, p. 800–813, 2008.
- 34 NAMIQ, Z.; SUSMEL, L. Proportional/nonproportional constant/variable amplitude multiaxial notch fatigue: cyclic plasticity, non-zero mean stresses, and critical distance/plane. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v. 42, 06 2019.
- 35 MACHA, E. Generalization of fatigue criteria for multiaxial sinusoidal loadings in the range of random loadings. *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, p. 425–36, 1989.
- 36 ŁAGODA, T.; KUREK, M.; GŁOWACKA, K. A formulation of the criterion for multiaxial fatigue in terms of complex number as proposed by macha. *International Journal of Fatigue*, v. 133, 12 2019.
- 37 SNYMAN, J. *Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms*. [S.l.]: Springer, 2005. (Applied Optimization).

## I.1 PERIODOGRAMA MODIFICADO DE WELCH

A amostragem espectral está sujeita a inconsistências estatísticas para estimativas das PSDs. Por esse motivo, as estimativas requerem meios de suavizar essas inconsistências. O periodograma modificado produz uma estimativa consistente do espectro de potência a partir do valor esperado do periodograma que converge para  $P_{x(t)}$  a medida que o comprimento do registro amostral vai para o infinito. Dentre os três métodos mais comuns, o Periodograma Modificado de Welch apresenta mais vantagens para sua aplicação nesse trabalho pois:

- Permite que os janelamentos dos sinais se sobreponham.
- Permite que um janelamento seja aplicado a cada parcela de discretização do sinal.

Para reduzir o efeito de vazamento, multiplica-se o sinal por uma janela com o objetivo de proporcionar um decaimento suave no início e no final do intervalo do janelamento. As janelas mais usadas são a Hamming, Hanning, Blackmann e Kaiser. O emprego de janelas permite:

- Perda de resolução para diferenciar componentes de frequências próximas, devido ao aumento da largura do lóbulo principal da janela (em relação à janela retangular); para aumentar resolução é necessário aumentar o comprimento da janela (intervalo de observação).
- Aumentará a discriminação de componentes mais fracas na presença de componentes mais fortes, devido à diminuição dos lóbulos secundários (em relação à janela retangular).

A janela utilizada nesse trabalho foi a de Blackmann, pelo fato de possuir menor aumento de resolução aliada a uma considerável queda de potência dos lóbulos secundários.

Pelo Periodograma Modificado de Welch, a PSD pode ser computada de forma alternativa assumindo-se que o processo estocástico descrito pelos sinais coletados é ergódico, ou seja, que o processo possui média e variância constantes entre as janelas. Esse método trabalha com o sinal janelado e permite que as janelas do sinal tenham sobreposição, pois desta forma é possível diminuir os efeitos do vazamento espectral gerado no processo de janelamento.

Suponha que a PSD estimada pode ser definida como:

$$P_x(f) = \frac{T_o}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f n T_o} \right|^2 \quad (1)$$

Onde  $T_o$  é período de amostragem,  $N$  é o número de pontos,  $x[n]$  é o sinal discreto coletado no domínio do tempo e  $P_x(f)$  é a PSD estimada para o sinal  $x[n]$ .

O procedimento para o cálculo do periodograma de Welch começa com a segmentação do sinal analisado  $x[n]$  de  $N$  registros amostrais que será subdividido em  $p$  segmentos com  $S$  interseções e  $H$  amostras geradas. A cada um dos segmentos é aplicado um janelamento para que a contribuição da intensidade dos lóbulos laterais seja diminuída:

$$x^{(p)}(n) = w[n]x[n + pS] \quad 0 \leq n \leq N \quad (2)$$

Cada segmento do janelamento tem um espectro relativo estimado. Logo, o espectro da amostra do  $p$ -ésimo segmento ponderado é dada por:

$$P_x^{(p)}(f) = \frac{1}{UHT_o} X^{(p)}(f) |X^{(p)}(f)| = \frac{1}{UHT_o} |X^{(p)}(f)|^2 \quad (3)$$

Sendo  $X^{(p)}(f)$  a transformada de Fourier do  $p$ -ésimo segmento:

$$X^{(p)}(f) = T_o \sum_{n=0}^{N-1} x^{(p)}[n] e^{-j2\pi fnT_o} \quad (4)$$

A janela de energia em tempo discreto são dados respectivamente:

$$U = \frac{1}{H} \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n] \quad (5)$$

Então, a estimativa do Periodograma de Welch pode ser obtida por meio da média da estimação da PSD de cada um dos  $P$  segmentos:

$$\hat{P}_W(f) = \frac{1}{P} \sum_{n=0}^{P-1} P_x^{(p)}(f) \quad (6)$$

É possível verificar pelo Periodograma de Welch a eficiência do método em acentuar o pico da frequência dominante em 20Hz e diminuir os atributos nas demais frequências.

## I.2 METODOLOGIA PROPOSTA POR LAGODA & MACHA

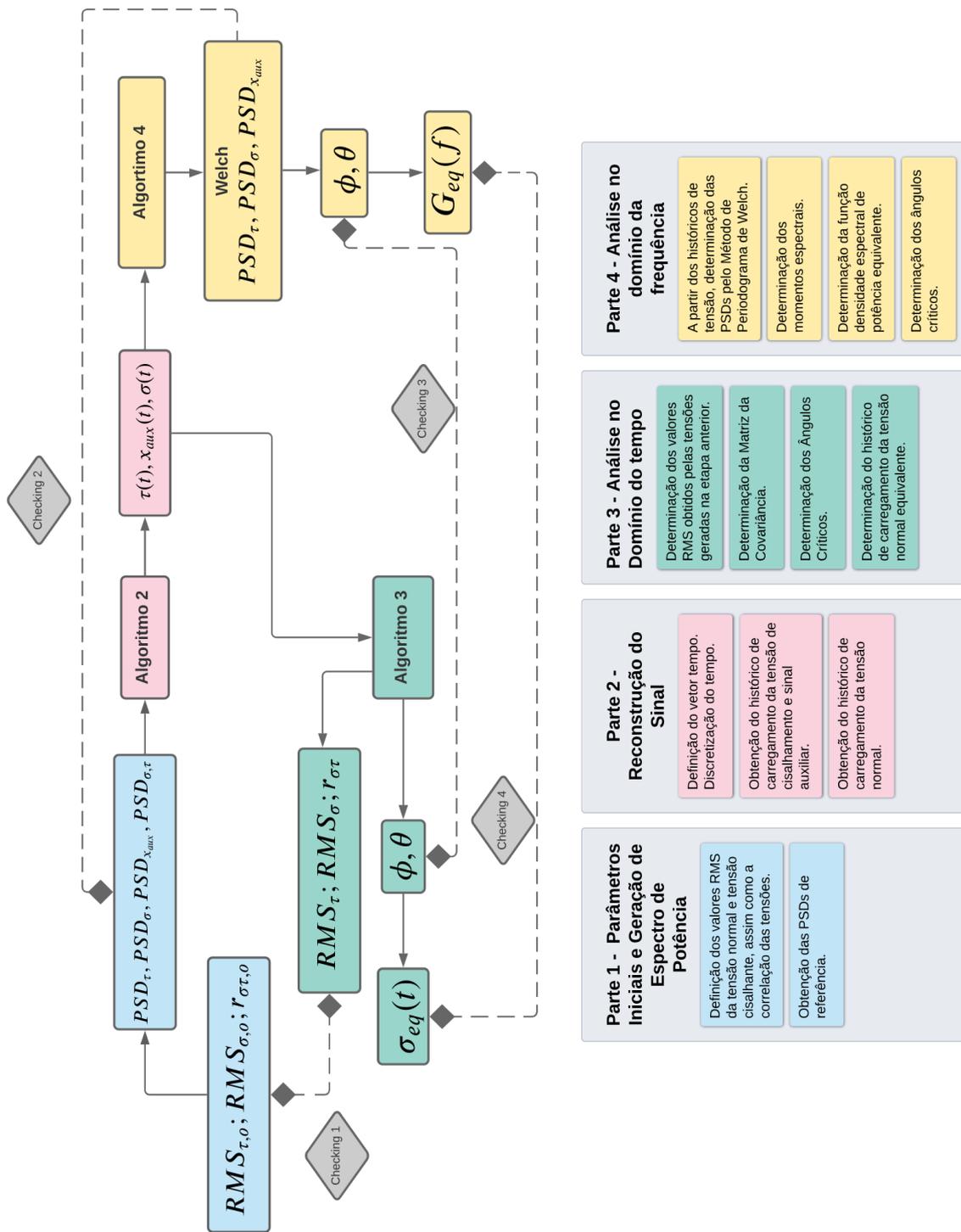


Figura 1: Modelo proposto por Lagoda.

Fonte: Elaborado pelo autor.

### I.3 DEMONSTRAÇÃO DA EXPANSÃO POR SÉRIE DE TAYLOR

Estimativa da Variância por Expansão em Série de Taylor:

$$VAR [g(\mathbf{X})] \approx \sum_{k=l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 \cdot Var(X_k) + \sum_{k \neq l} \left( \frac{\partial}{\partial X_k} g(\mathbf{X}^0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial X_l} g(\mathbf{X}^0) \right) \cdot Cov[X_k^0, X_l^0] \quad (7)$$

Determinação da Variância:

$$Var[\sigma_{eq}(t)] = \mathbf{a}^T [C] \mathbf{a} \quad | \quad Var[\tau_q] = \mathbf{d}^T [C] \mathbf{d} \quad (8)$$

Tensor de tensões:  $\sigma := \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$       Vetor normal:  $n := \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$       Vetor unitário na direção m:  $q := \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$

Valor instantâneo da tensão normal resolvida ao longo a direção normal ao plano:

$$\sigma_n := n^T \cdot \sigma \cdot n \rightarrow n_y \cdot (n_z \cdot \tau_{yz} + n_x \cdot \tau_{xy} + n_y \cdot \sigma_{yy}) + n_z \cdot (n_y \cdot \tau_{yz} + n_x \cdot \tau_{xz} + n_z \cdot \sigma_{zz}) + n_x \cdot (n_z \cdot \tau_{xz} + n_y \cdot \tau_{xy} + n_x \cdot \sigma_{xx})$$

Valor instantâneo da tensão de cisalhamento resolvida ao longo a direção m:

$$\tau_q := q^T \cdot \sigma \cdot n \rightarrow n_y \cdot (q_z \cdot \tau_{yz} + q_x \cdot \tau_{xy} + q_y \cdot \sigma_{yy}) + n_z \cdot (q_y \cdot \tau_{yz} + q_x \cdot \tau_{xz} + q_z \cdot \sigma_{zz}) + n_x \cdot (q_z \cdot \tau_{xz} + q_y \cdot \tau_{xy} + q_x \cdot \sigma_{xx})$$

Derivadas parciais da função  $g(X) = \sigma_n(\sigma)$ :

$$\sigma_n(\sigma) = \sigma_n(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

$$\begin{aligned} a_1 &:= \frac{d}{d\sigma_{xx}} \left( \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_x^2 \\ a_2 &:= \frac{d}{d\sigma_{yy}} \left( \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_y^2 \\ a_3 &:= \frac{d}{d\sigma_{zz}} \left( \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_z^2 \\ a_4 &:= \frac{d}{d\tau_{xy}} \left( \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow 2 \cdot n_x \cdot n_y \\ a_5 &:= \frac{d}{d\tau_{xz}} \left( \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow 2 \cdot n_x \cdot n_z \\ a_6 &:= \frac{d}{d\tau_{yz}} \left( \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow 2 \cdot n_y \cdot n_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \\ 2 \cdot n_x \cdot n_y \\ 2 \cdot n_x \cdot n_z \\ 2 \cdot n_y \cdot n_z \end{bmatrix}$$

Derivadas parciais da função  $g(X) = \tau_q(\sigma)$ :

$$\tau_q(\sigma) = \tau_q(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$$

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{d}{d\sigma_{xx}} \left( \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_x \cdot q_x \\ d_2 &:= \frac{d}{d\sigma_{yy}} \left( \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_y \cdot q_y \\ d_3 &:= \frac{d}{d\sigma_{zz}} \left( \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_z \cdot q_z \\ d_4 &:= \frac{d}{d\tau_{xy}} \left( \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_x \cdot q_y + n_y \cdot q_x \\ d_5 &:= \frac{d}{d\tau_{xz}} \left( \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_x \cdot q_z + n_z \cdot q_x \\ d_6 &:= \frac{d}{d\tau_{yz}} \left( \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \right) \rightarrow n_y \cdot q_z + n_z \cdot q_y \end{aligned}$$

$$\mathbf{d} := \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n_x \cdot q_x \\ n_y \cdot q_y \\ n_z \cdot q_z \\ n_x \cdot q_y + n_y \cdot q_x \\ n_x \cdot q_z + n_z \cdot q_x \\ n_y \cdot q_z + n_z \cdot q_y \end{bmatrix}$$

Figura 2: Vetor dos Coeficientes do Critério de Falha de Fadiga Multiaxial.

## I.4 MÉTODO DAS CURVAS DE WÖHLER MODIFICADA

Susmel e Lazzarin propõem um critério de fadiga com objetivo de estimar a resistência a fadiga sob condições de carregamentos multiaxiais, já que a fadiga ocorre no plano de máxima tensão cisalhante e o dano máximo a fadiga é observado na mesma direção dessa tensão. Esse critério foi denominado anteriormente de Método das Curvas de Wöhler Modificadas (MCWM).

A partir desse critério, foi estabelecido um fator referente a um grau de multiaxialidade da tensão para um determinado ponto material que pode ser avaliado por meio da razão de tensão  $\rho$  no plano crítico. A razão de tensão  $\rho$  pode ser definida em termos da razão de carregamento dessa forma:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} = \frac{2}{1-R} \quad \text{onde} \quad R = \sigma_{min}/\sigma_{max} \quad (9)$$

É notório na Equação 9 que há uma relação diretamente proporcional entre a razão de tensão no plano crítico e a razão de carregamento. Em particular, sob condições de carregamento alterado, considerando um valor de  $R$  pode-se identificar que  $\rho$  varia de 1 para casos de carregamento trativos ( $R = -1$ ) até o infinito ( $R \rightarrow 1$ ) no caso de torção pura.

Porém, não faz sentido uma razão de tensão que seja infinita. De acordo com Susmel e Lazzarin, para fadiga devido a carregamento por torção pura no regime de fadiga por alto ciclo, a amplitude da tensão de cisalhamento no plano crítico é invariavelmente igual a tensão torcional aplicada ( $\tau_{xy,a}$ ) e a máxima tensão normal é zero ( $\sigma_{n,max} = 0$ ). Logo, sob condições de carregamento para torção,  $\rho$  é igual a zero, independentemente de se considerar em função da razão de carregamento ( $\rho = f(R)$ ). Portanto, a razão de tensão se encontra no seguinte intervalo:

$$0 < \rho < 1 \quad (10)$$

Para um corpo submetido a carregamentos multiaxiais cíclicos, o plano onde for observado a máxima amplitude da tensão cisalhante será considerado o plano crítico. Na prática, seria um plano com a maior probabilidade de se observar o início de uma trinca. Com a equação 9, a razão de tensão seguindo a formalização de plano crítico será definida por:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a}(\phi^c, \theta^c) \quad (11)$$

A Figura 3 (a) representa um estado de tensão resultante em que o ciclo A é o estado de tensão no instante de carregamento máximo e o ciclo B é o estado de tensão no instante do carregamento mínimo. A Figura 3 (b) representa um estado de tensão de torção pura, onde há um círculo perfeito com raio dado pela seguinte relação:

$$r_o = \tau_{xy,a} = \sigma_{x,a} \quad (12)$$

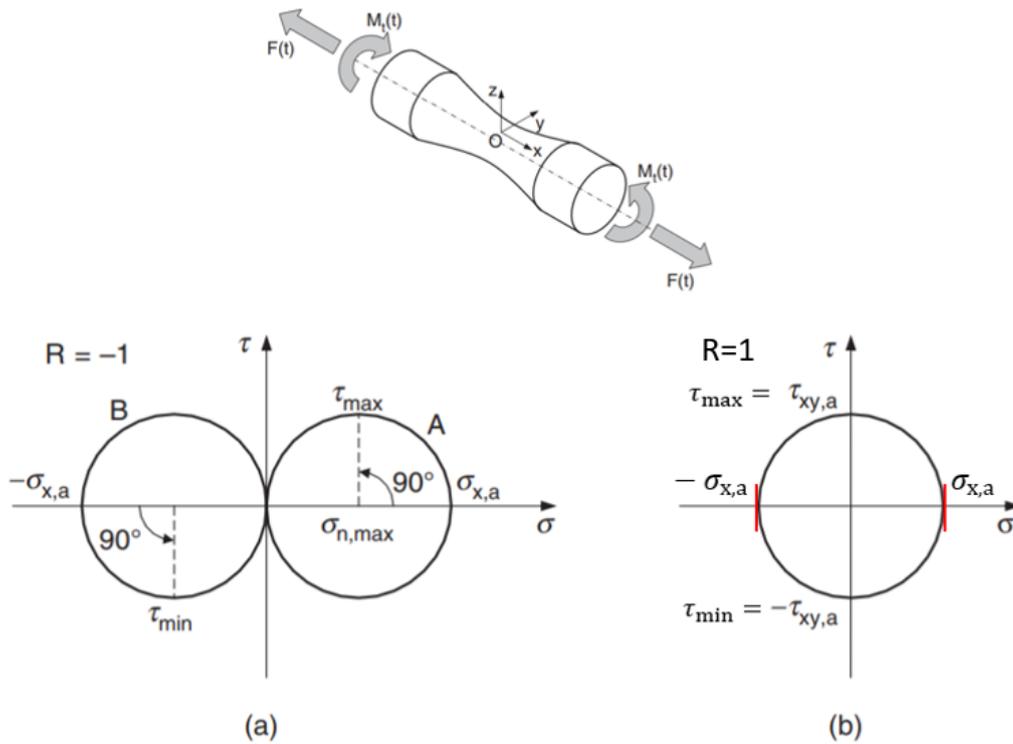


Figura 3: Círculos de Mohr (a) Carregamento completamente reverso (tração-compressão) (b) carregamento completamente reverso de torção pura.

Fonte: Adaptado de SUSMEL, 2009 [2].

Ao se tratar de plano crítico, pelo MCWM deve ser analisados os plano onde ocorre a máxima amplitude de tensão cisalhante (logo,  $\tau \neq 0$ ):

$$\sigma_{max} = \sigma(\tau_{max}) \quad \text{e} \quad \sigma_{min} = \sigma(\tau_{min}) \quad (13)$$

$$\tau_a = \tau_{max} \quad (14)$$

*Carregamento Reverso (R=-1)*

$$\sigma_{n,a} = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| \implies \sigma_{n,a} = \frac{\sigma_{x,a}}{2} \quad (15)$$

$$\sigma_{n,m} = \left| \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \right| \implies \sigma_{n,m} = 0 \quad (16)$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_{x,a}}{2} \quad (17)$$

$$\sigma_{n,max} = \sigma_{max} = \frac{\sigma_{x,a}}{2} \quad (\text{Tração}) \quad (18)$$

$$\rho_{eff} = m \frac{\sigma_{n,m}}{\tau_a} + \frac{\sigma_{n,a}}{\tau_a} = 1 \implies \rho_{eff} = 1 \quad (19)$$

Carregamento Torção Pura ( $R=1$ )

$$\sigma_{n,a} = \sigma_{n,m} = 0 \quad (20)$$

$$\tau_a = \sigma_{x,a} = \tau_{xy,a} = \tau_{R=-1} \quad (21)$$

$$\sigma_{n,max} = 0 \quad (22)$$

$$\rho_{eff} = m \frac{\sigma_{n,m}}{\tau_a} + \frac{\sigma_{n,a}}{\tau_a} = 0 \implies \rho_{eff} = 0 \quad (23)$$

A fim de facilitar o entendimento futuro do modelo, considere a seguinte nomenclatura para os limites de resistência a fadiga, baseada na razão de carregamento, como  $\tau_{xy,a} = \tau_{R=-1}$ ,  $\sigma_{x,a} = \sigma_{R=-1}$  e  $\tau_a = \tau_{a,ref}$ .

Paralelamente, para estimar a vida à fadiga com os diagramas de Wöhler, basta fazer a calibração das constantes  $A$  e  $b$  por meio de funções de calibração geradas por uma semelhança de triângulo a partir das curvas S-N de tração e torção pura. É importante salientar que o diagrama de Wöhler precisa dos limites de fadiga dos dois ensaios (flexão e torção) sempre para um mesmo número de ciclos para falha no limite de fadiga referencial ( $N_o$ ), independentemente da complexidade do carregamento.

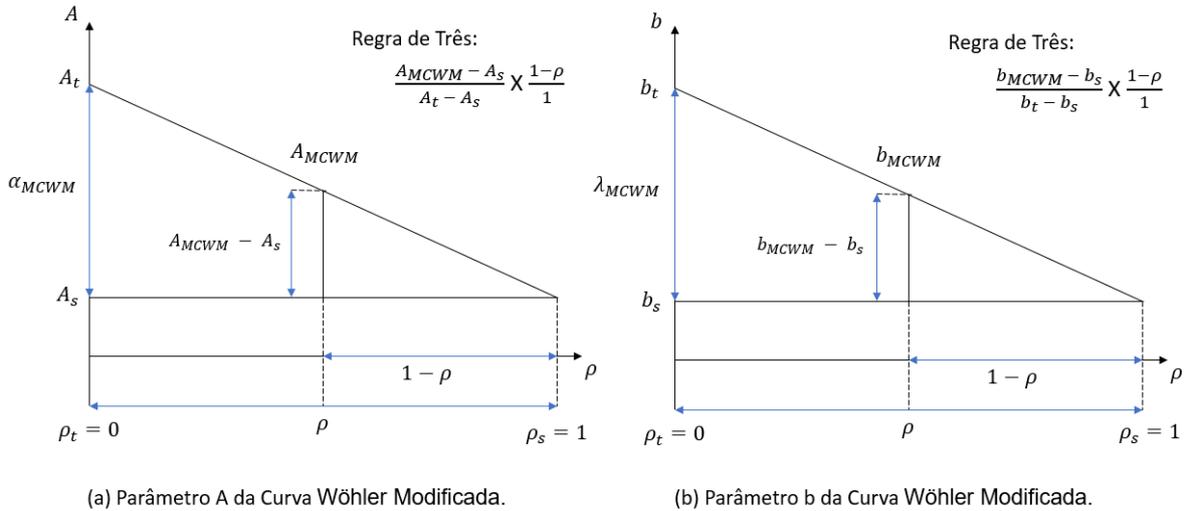


Figura 4: Parametrização de A e b pelas Curvas de Wöhler Modificadas.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Analisando o parâmetro  $A_{MCWM}$ , por semelhança de triângulo e isolando o termo  $1 - \rho$ :

$$A_{MCWM} - A_s = (A_t - A_s)(1 - \rho) \quad (24)$$

$$A_{MCWM} = (A_t - A_s) - (A_s - A_s)\rho + A_s \quad (25)$$

$$A_{MCWM} = (A_s - A_t)\rho + A_t \quad (26)$$

Em que  $\alpha_{MCWM} = A_s - A_t$  e  $\beta_{MCWM} = A_t$ , logo:

$$A_{MCWM} = \alpha_{MCWM}\rho + \beta_{MCWM} \quad (27)$$

Analogamente realiza-se o mesmo procedimento para o parâmetro  $b_{MCWM}$ , obtendo:

$$b_{MCWM} = (b_s - b_t)\rho + b_t \quad (28)$$

Em que  $\lambda_{MCWM} = b_s - b_t$  e  $\omega_{MCWM} = b_t$ , logo:

$$b_{MCWM} = \lambda_{MCWM}\rho + \omega_{MCWM} \quad (29)$$

Uma vez determinados esses coeficientes torna-se possível a aplicação da equação de acúmulo de dano para previsão de vida de um determinado componente submetido a um carregamento multiaxial. Além disso, observando cuidadosamente a Figura 5, notou-se que, para os casos de fadiga multiaxial em médio e alto ciclo onde o método MCWM é válido, um componente simples está no seu limite de fadiga desde que seja assegurada a seguinte condição (Susmel e Lazzarin, 2002):

$$\tau_a(\phi^c, \theta^c) \leq \tau_{a,ref} \quad (30)$$

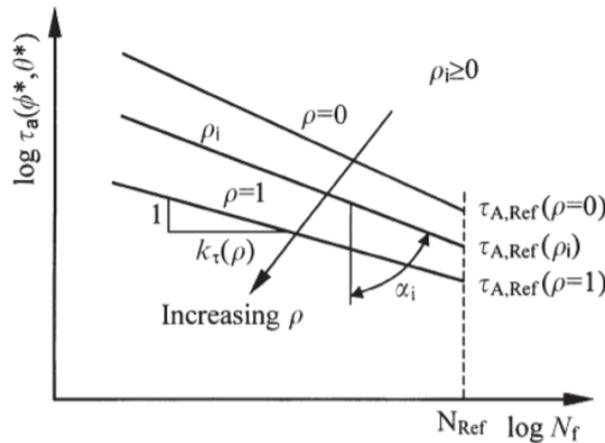


Figura 5: Curvas de Wöhler Modificadas para a um carregamento geral dado por  $\rho_i$ .

Fonte: Susmel e Lazzarin (2002).

Observação:  $\tau_a(\phi^*, \theta^*) = \tau_a(\phi^c, \theta^c)$ .

A presença de valores elevados para a razão de tensão fazem com que o dano por fadiga não seja mais governado pela tensão cisalhante. Em outras palavras, há um valor limite para a razão de tensão ( $\rho_{lim}$ ) em que o uso do critério de falha do plano crítico não é adequado devido ao mecanismo de falha. Este limite depende das propriedades do material e é obtido por:

$$\rho_{lim} = \frac{\tau_{R=-1}}{2\tau_{R=-1} - \sigma_{R=-1}} \quad (31)$$