



**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Curso de Engenharia Aeroespacial**

**MÉTODO MITIGATÓRIO PARA SPACE DEBRIS
APLICADO A SATÉLITES EM ÓRBITA
GEOESTACIONÁRIA**

MANOBRA DE COLISÃO LUNAR

**Autor: Paulo Ananias de S. Silva
Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva**

**Brasília, DF
2021**



Paulo Ananias de S. Silva

**MÉTODO MITIGATÓRIO PARA SPACE DEBRIS
APLICADO A SATÉLITES EM ÓRBITA
GEOESTACIONÁRIA**

MANOBRA DE COLISÃO LUNAR

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial

Orientador: (Prof. Dr. William Reis Silva)

Brasília, DF

2021

CIP – Catalogação Internacional da Publicação*

Silva, Paulo Ananias.

Método Mitigatório para Space Debris Aplicado a Satélites em Órbita
Geoestacionária: Manobra de Colisão Lunar/ Paulo Ananias de S.
Silva. Brasília: UnB, 2021. 103 p. : il. ; 29,5.

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília

Faculdade do Gama, Brasília, 2021. Orientação: Prof. Dr. William
Reis Silva

1. Mitigação space debris. 2. Detritos espaciais. 3. Satélites
geoestacionários. Reis Silva, William. II. Dr.

CDU Classificação

MÉTODO MITIGATÓRIO PARA SPACE DEBRIS APLICADO A SATÉLITES EM ÓRBITA GEOESTACIONÁRIA

Manobra de colisão Lunar

Paulo Ananias de S. Silva

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, em (/ /) apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

Prof. Dr. William Reis Silva, UnB/ FGA

Orientador

Prof. Dr. Thiago Felipe Kurudez Cordeiro, UnB/ FGA

Membro Convidado

Prof. Dr. Ronne Toledo, UnB/ FGA

Membro Convidado

Brasília, DF
2021

RESUMO

O lixo espacial tem se tornado um problema cada vez mais evidente e perigoso. A Agência Espacial Europeia (ESA) estima aproximadamente 6250 satélites em órbita, dos quais apenas 3400 permanecem ativos em 2021. Em órbita alta, entre ativos e inativos, cerca de 700 satélites se encontram na região geoestacionária. Além disso, estágios de lançadores, testes com armas antissatélites, detritos provenientes de impactos e explosões, e até mesmo objetos perdidos por astronautas possuem grande parcela no agravamento da situação. Recentemente, a ESA foi obrigada a realizar uma manobra evasiva para evitar a colisão do satélite Aeolus com um Starlink lançado pela SpaceX. Colisão essa que não seria inédita. O aumento de detritos tem como consequência direta o aumento no número de impactos em órbita, gerando cada vez mais partículas com potencial destrutivo. D. Kessler descreveu o fenômeno indicando o crescimento exponencial do número de space debris e apontando para uma reação em cadeia que destruiria nossa rede de satélites. Tamanho é o problema que, a fim de evitar danos severos, medidas mitigatórias devem ser tomadas. Esse trabalho tem como objetivo o embasamento teórico, investigação e análise de órbitas que resultam em colisão entre satélites geoestacionários e a superfície da Lua. Gerações futuras de satélites, ao final de sua vida operacional, podem realizar uma última manobra em que escapam pelo ponto Lagrangeano L1 e são destruídos, evitando assim o aumento da poluição em órbita alta e a utilização indiscriminada da órbita cemitério.

Palavras-chave: 1. Mitigação space debris. 2. Detritos espaciais. 3. Satélites geoestacionários.

ABSTRACT

Space debris has become an increasingly obvious and dangerous problem. The European Space Agency (ESA) estimates approximately 6250 orbiting satellites, of which only 3400 remain active in 2021. In high orbit there are about 700 satellites in geostationary region. In addition, launcher stages, antisatellite weapon testing, debris from impacts and explosions, and even objects lost by astronauts, play a major role in the worsening the situation. Recently, ESA was forced to perform an evasive maneuver to avoid a collision between the satellite Aeolus and a Starlink launched by SpaceX. Fact that would not be unheard of. The increase of debris impacts directly in the growth of the number of collisions in orbit, generating more particles with destructive potential. D. Kessler described the phenomenon of exponential growth in the number of space debris pointing to a chain reaction that would destroy our satellite network. In order to avoid severe damages, mitigation measures must be taken. This work has as objective the consolidation of a theoretical basis, investigation and analysis of orbits that result in collision between geostationary satellites and the surface of the Moon. Future generations of satellites, near to the end of their operational life, may perform a last maneuver where it escapes through the Lagrangian point L1 in order to be destroyed, thus avoiding the increase of pollution in high orbit and the indiscriminate use of cemetery orbit.

Keywords: 1. Space debris mitigation. 2. Space debris. 3. Geostationary satellites.

Lista de Figuras

Figura 1 - Elementos keplerianos.....	16
Figura 2 - Representação do PRC3C no referencial sinódico.....	22
Figura 3 - Visão no plano do PRC3C no referencial sinódico.....	22
Figura 4 - Representação planar da rotação no eixo z.....	24
Figura 5 - Pontos Lagrangeanos.....	29
Figura 6 - Pontos L1, L2 e L3 do sistema Terra – Lua.....	31
Figura 7 - Regiões de Hill para dado C_j no sistema Terra-Lua.....	32
Figura 8 - Transferência de Hohmann.....	34
Figura 9 - Forças sobre um satélite em órbita.....	35
Figura 10 – Transferência para mudança de plano.....	37
Figura 11 – Lei das áreas de Kepler.....	40
Figura 12 - Trajetórias exploradas, em função da e , Ω e ω	45
Figura 13 - Colisão com a Terra, em função da e , Ω e ω	46
Figura 14 - Escape entre 0 e 9 dias.....	47
Figura 15 - Escape entre 10 e 99 dias.....	47
Figura 16 - Escape entre 100 e 499 dias.....	47
Figura 17 - Escape entre 500 e 5000 dias.....	47
Figuras 18 - Visão lateral - Escape entre 500 e 5000 dias.....	48
Figuras 19 - Visão lateral - Escape entre 500 e 5000 dias.....	48
Figura 20 - Trajetórias estáveis.....	49
Figura 21 - Trajetórias de colisão com a Lua.....	50
Figura 22 - Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz, de 0 a 1249 dias.....	52
Figura 23 - Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz, de 1250 a 2499 dias.....	53
Figura 24 - Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz, de 2500 a 3749 dias.....	53

Figura 25 - Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz, de 3750 a 5000 dias.....	54
Figura 26 - Deslocamento em relação a Lua, no plano xyz, de 0 a 1249 dias.....	55
Figura 27 - Deslocamento em relação a Lua, no plano xyz, de 1250 a 2499 dias.....	55
Figura 28 - Deslocamento em relação a Lua, no plano xyz, de 2500 a 3749 dias.....	56
Figura 29 - Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz, de 3750 a 5000 dias.....	56
Figura 30 - Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz, de 0 a 1249 dias.....	57
Figura 31 - Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz, de 1250 a 2499 dias.....	58
Figura 32 - Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz, de 2500 a 3749 dias.....	59
Figura 33 - Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz, de 3750 a 5000 dias.....	60
Figura 34 - Variação do semieixo maior em função do tempo.....	61
Figura 35 - Variação da excentricidade em função do tempo.....	61
Figura 36 - Variação da inclinação em função do tempo.....	62
Figura 37 - Variação do semieixo maior em função do tempo de voo.....	63
Figura 38 - Variação da excentricidade em função do tempo de voo.....	63
Figura 39 - Variação da inclinação em função do tempo de voo.....	64
Figura 40 - Tempo de voo em função do tempo.....	65
Figura 41 - Coeficiente balístico em função do tempo.....	66
Figura 42 - ΔV necessário em função do tempo.....	67
Figura 43 - $\Delta m/m_i$ em função do tempo.....	68

Lista de Tabelas

Tabela 1: Valores aproximados para detritos em orbita.....	12
Tabela 2: Trajetórias de colisão com a Lua.....	51

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
1.1 Objetivos Gerais	9
1.2 Objetivos Específicos	10
1.3 Justificativa	10
1.4 Metodologia	10
1.5 Organização do Trabalho	11
2 Revisão Bibliográfica	12
2.1 Falando em Números	12
2.2 Síndrome de Kessler	13
2.3 Orientações para Mitigação	13
2.4 Métodos de Mitigação.....	14
3 MODELOS TEÓRICOS	16
3.1 Elementos Keplerianos.....	16
3.2 O Problema de N-corpos.....	17
3.3 Problema Restrito Circular de Três Corpos (PRC3C)	21
3.4 A Integral de Jacobi	27
3.5 Regiões de Hill e Pontos Lagrangeanos	28
4 A Manobra	34
4.1 Transferência de Hohmann	34
4.2 Transferência para Mudança de Plano.....	36
4.3 As Leis de Kepler	39
4.3.1 Primeira Lei de Kepler	39
4.3.2 Segunda Lei de Kepler	39
4.3.3 Terceira Lei de Kepler.....	40
4.4 Equação de Foguete de Tsiolkovsky	41
5 Resultados	43
5.1 Metodologia.....	43
5.2 Missões	44
5.2.1 Colisões com a Terra.....	45
5.2.2 Escapes do Sistema Terra-Lua.....	46
5.2.3 Trajetórias Estáveis	48
5.2.4 Colisões com a Lua	49
5.3 Trajetória	50
5.3.1 Deslocamento da Partícula em Relação a Terra	52
5.3.2 Deslocamento da Partícula em Relação a Lua.....	54
5.3.3 Deslocamento da Partícula em Relação ao Baricentro Terra-Lua.....	52
5.3.4 Parâmetros Orbitais	60
5.4 Tempo de Voo	64
5.5 Energia Característica C_3	65
5.6 ΔV Necessário.....	67

5.7 Consumo	67
6 Conclusão	70
7 Bibliografia.....	72

1. INTRODUÇÃO

Atualmente a humanidade vive dependente. Necessita comunicação constante e de outros serviços prestados pela rede de satélites ao redor do globo. Essa necessidade, ativa e crescente, deve ser saciada de forma ininterrupta. Os satélites artificiais oferecem tecnologia complementar e ajudam a alimentar o sistema de comunicação em todo o planeta

Responsáveis por manter um laço entre fonte transmissora e outra receptora, os satélites estabelecem conexão entre regiões distantes e fornecem serviços de telefonia, televisão, navegação, internet, entre outros. Além disso, são amplamente utilizados no setor militar, meteorológico e no âmbito científico de modo geral. Desempenham papel importante na economia englobando o setor de comunicação, lançamento e o segmento de pesquisa e fabricação de satélites [28]. Essa massiva atividade no setor econômico acarreta a geração de empregos e a movimentação de bilhões de dólares ao ano.

A grandiosidade da indústria de satélites pode ser equiparada apenas ao monumental colapso socioeconômico em caso de desmantelamento da rede. A perda de sistemas do tipo GPS acarreta danos profundos. O tempo que antes unia as nações, agora sofre com a falta de sincronização provocando ruptura no sistema financeiro mundial e a queda da internet. Em um nível mais pessoal, o diretor executivo da CompTIA Space Enterprise Council, David Logsdon, cita a queda dos smartphones, televisão, internet, previsões do tempo e dificuldades no controle do tráfego aéreo [28]. Nesse cenário, cada aspecto da infraestrutura socioeconômica é afetado de forma severa

A atividade solar e ataques cibernéticos são ameaças conhecidas e de alto poder destrutivo para nossa rede de satélites, porém, os problemas gerados por detritos espaciais são cada vez mais reais e chamam a atenção do mundo para a manutenção do meio ambiente espacial.

1.1 Objetivos Gerais

A ameaça imposta sobre as órbitas da Terra levanta, mais uma vez, o debate entre o progresso humano e a sustentabilidade. A agressão ao meio ambiente é constantemente justificada, porém, assim como florestas, oceanos e atmosfera, as camadas orbitais de nosso planeta logo atingirão seu limite.

O objetivo base desse trabalho é instigar o desejo da exploração sustentável e estudar um possível método de mitigação para satélites em órbita geoestacionária, tratando de rotas com potencial de colisão entre satélites GEO e a Lua.

1.2 Objetivos Específicos

Esse trabalho possui o intuito de reforçar o embasamento teórico e avaliar a possível destruição de satélites geoestacionários, em fase final de operação, na superfície lunar, fazendo uso da dinâmica de escape na órbita GEO e captura pelo campo gravitacional da Lua. Para esse estudo de caso, a transferência de Hohmann será utilizada.

Dentre as missões bem sucedidas, o ΔV necessário e o consumo de propelente envolvido na manobra serão levantados. Os dados adquiridos aqui devem ser comparados com outros estudos. Visando máxima eficiência, diferentes métodos de mitigação devem ser analisados, onde o objetivo final é a utilização mais sustentável da órbita terrestre.

1.3 Justificativa

Eventos geradores de detritos não são novidade. Colisões, explosões e até armas antissatélites estão envolvidas. Além disso, detritos à deriva, que viajam a velocidades próximas a 27000 Km/h, possuem potencial de destruição elevado, e quando qualquer evento gerador toma seu lugar, novas partículas são lançadas em órbita, aumentando a possibilidade de novas colisões.

Como salientado anteriormente, os resultados provenientes de um ambiente espacial mal gerenciado podem ser catastróficos. Programas fracos de mitigação, lançamento de novos satélites e detritos que já se encontram em órbita são combinação perigosa e a tendência, se nada for feito, é a destruição completa da rede e inviabilidade de missões futuras.

Na tentativa de evitar um cenário tão sombrio, diferentes métodos de mitigação devem ser implementados o quanto antes. Contudo, cada método deve ser cuidadosamente estudado e planejado, para uma execução eficaz e dentro da viabilidade econômica intrínseca à nossa realidade.

1.4 METODOLOGIA

Por meio do embasamento teórico e análise numérica estudaremos possíveis rotas de colisão entre satélites geoestacionários e a Lua.

A revisão teórica tem como partida uma breve passagem sobre os elementos keplerianos. O problema de N-corpos, problema restrito circular de três corpos, integral de Jacobi, pontos Lagrangeanos, transferência de Hohmann, transferência para mudança de plano, leis de Kepler e as equações de foguete de Tsiolkovsky são descritos nesse trabalho e dão suporte ao equacionamento e análise de trajetórias de colisão.

Através do cálculo numérico, devemos encontrar, no problema de seis corpos, trajetórias que partem da órbita geoestacionária, escapam pelo ponto Lagrangeano L1 e colidem com a Lua. As órbitas de sucesso encontradas são analisadas com certa profundidade, onde o ΔV necessário e o gasto de propelente são determinados.

1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho se inicia com uma breve revisão bibliográfica no capítulo 2, onde é discutido os números que envolvem o problema de space debris, a Síndrome de Kessler, as orientações de mitigação propostas pelo escritório de assuntos espaciais das Nações Unidas (UNOOSA) e as técnicas de mitigação implementadas atualmente.

O capítulo 3 trata dos modelos teóricos envolvidos no trabalho. Dentre as diversas teorias importantes para a mecânica orbital, algumas delas se encontram em plena afinidade com o desenvolvido aqui, portanto são descritas no decorrer do capítulo. O primeiro tópico trata dos elementos keplerianos e um breve resumo sobre cada parâmetro. Logo em seguida, o problema de N-corpos e o problema restrito circular de três corpos também são descritos. A integral de Jacobi e os pontos Lagrangeanos finalizam o capítulo.

O capítulo 4 apresenta os modelos teóricos mais ligados à manobra propriamente dita. A transferência de Hohmann, transferência para mudança de plano, as leis de Kepler e a equação de foguete de Tsiolkovsky são apresentadas.

O capítulo 5 traz os resultados obtidos a partir da integração numérica. Os dados referentes a todas as missões, temporalmente evoluídas a partir das condições iniciais propostas, são discutidos. Onde, dentre todas as missões, as colisões com a Terra, escapes, trajetórias estáveis e colisões com a Lua são analisadas separadamente. A partir desse momento, a missão 4, que atingiu o objetivo de colisão lunar, é analisada com mais detalhes. O deslocamento dessa partícula em relação a Terra, em relação a Lua e em relação ao baricentro do sistema é apresentado logo em seguida. Os parâmetros orbitais semieixo maior, excentricidade e inclinação são plotados em função do tempo. Por fim, o tempo de voo, a energia característica, o ΔV necessário e o consumo de propelente são descritos em quatro subcapítulos.

O capítulo 6 conclui o trabalho trazendo um breve resumo do objetivo e do que foi estudado. Rápida passagem sobre os resultados obtidos, estudos futuros e considerações finais encerram o trabalho.

A bibliografia base utilizada nesse trabalho pode ser vista no capítulo 7.

2. Revisão Bibliográfica

2.1 Falando em Números

Segundo a Agência Espacial Europeia, desde o primeiro lançamento, na URSS, do satélite Sputnik em 1957 até janeiro de 2021, houveram 6020 lançamentos bem sucedidos [25].

Na tabela 1, temos alguns números relacionados aos detritos em órbitas.

SPACE DEBRIS BY THE NUMBERS (ESA)	
Nº de lançamentos (bem sucedidos)	6020
Nº de satélites lançados	10680
Satélites ainda em órbita	6250
Satélites ativos	3400
Nº de detritos (rastreados e catalogados)	28210
Nº estimado de fragmentações (colisões, explosões, etc)	550
Massa total dos objetos em órbita	9200 Toneladas
Nº estimado de detritos em órbita	34000 maiores que 10cm
	90000 entre 1cm e 10cm
	128 milhões entre 1mm e 1cm

Tabela 1: Valores aproximados para detritos em orbita [25]

Podemos ressaltar alguns eventos importantes que contribuíram para o aumento de detritos em órbita, como a colisão em 2009 entre o ativo satélite norte americano Iridium 33 e o já desativado satélite russo Cosmos – 2251. O impacto gerou mais de 2000 peças maiores que 10 centímetros, além de milhares de detritos menores [30].

Além disso, Estados Unidos, China, Rússia e mais recentemente a Índia realizaram com sucesso testes de mísseis antissatélites. Um país destruindo seu próprio satélite em órbita, apesar das justificativas para tal ação, pode ser visto como um ato político e uma demonstração de poder perante o restante do mundo. Contudo, testes como esses geram nuvens de detritos que permanecem

em órbita por décadas e agravam a situação de lixo espacial [29]. A Agência Espacial Europeia (ESA) estima que apenas o teste chinês tenha acrescido em 25% a população de detritos rastreados.

2.2 Síndrome de Kessler

Em 1978, no seu trabalho *Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt*, Donald J. Kessler, descreve o preocupante cenário onde faz uso da taxa de lançamentos e fragmentações para mostrar um crescimento estável de detritos espaciais. Como consequência, a probabilidade de colisões cresce. O incremento na população de detritos aumenta o número de colisões, o que faz crescer ainda mais a quantidade de detritos, formando assim, um ciclo autossuficiente. Ao fim, a rede de satélites se encontra perdida. Esse fenômeno é conhecido como a Síndrome de Kessler. Em seu trabalho D. J. Kessler cria uma analogia entre o fenômeno que leva seu nome e a formação de um cinturão de asteroides, fazendo alusão à uma completa destruição da rede caso medidas de mitigação não sejam administradas [12].

Assim como a mudança climática, a elevação dos oceanos e ameaça à vida na terra são algumas consequências provenientes da poluição e uso exacerbado dos recursos de nosso planeta, a falta de zelo pelo ambiente espacial também acarreta sérios problemas e pode trazer sequelas profundas à vida como conhecemos, além de inviabilizar missões futuras.

2.3 Orientações para Mitigação

As primeiras menções a lixo espacial datam de 40 anos atrás. Pouco depois, em 1988, o então presidente dos Estados Unidos, Ronald Reagan, citou o problema na conhecida *National Space Policy* e esse se manteve como pauta em todas as subseqüentes políticas espaciais. Em 1995 a NASA lança o primeiro guia oficial para mitigação de space debris e que serve de base para todas as missões norte-americanas pós 2001 [9].

A ESA e o escritório de assuntos espaciais das Nações Unidas, *United Nations Office for Outer Space Affairs (UNOOSA)* também apresentam um guia de boas práticas para mitigação de space debris. Segue abaixo as sete orientações principais presentes no documento da UNOOSA:

Orientações para mitigação de detritos espaciais do comitê do uso pacífico do espaço.

- 1 – Limitar número de detritos durante operações normais.
- 2 – Minimizar o potencial de fragmentação durante as fases operacionais.
- 3 – Limitar a probabilidade de colisão acidental em órbita.
- 4 – Evitar destruição intencional e outras atividades nocivas.
- 5 – Minimizar o potencial de fragmentação pós-missão devido ao armazenamento de energia.
- 6 – Limitar a presença a longo prazo de naves e estágios de veículos lançadores na região de órbita baixa da terra (LEO) após o final da missão.
- 7 – Limitar a interferência a longo prazo da nave e estágios de veículos lançadores com a região de órbita terrestre geossíncrona (GEO) após o final da missão.

É importante salientar que as orientações presentes nos guias de mitigação estão sempre em caráter voluntários e não são ligados a leis internacionais [27].

No passado, a preocupação com o lixo espacial era inexistente. No entanto, a situação se agravou de tal forma que atualmente, qualquer satélite lançado possui um plano de mitigação que será aplicado ao final de sua vida útil.

2.4 Métodos de Mitigação

Uma das soluções propostas para amenizar o alto número de detritos em órbita baixa é a prática de reentrar objetos lançados. Sabemos que a atmosfera da terra possui um efeito positivo para mitigação do lixo espacial, uma vez que o atrito com o ar transforma energia orbital em energia térmica, causando decaimento da órbita e consequente reentrada [7]. Portanto, detritos à deriva estão sujeitos ao decaimento natural e à médio e longo prazo tendem a reentrar na atmosfera. No caso de satélites ainda operacionais, ao final da vida útil, a reentrada pode ser deliberadamente provocada.

A ideia por trás dessa técnica é lidar com o problema fazendo reentrar objetos espaciais na atmosfera, destruindo-os devido às altas temperaturas provenientes do arrasto. Contudo, detritos de grande porte podem não ser inteiramente consumidos e acabam atingindo a superfície. Esses casos precisam ser direcionados de tal modo que os detritos remanescentes caiam em

locais remotos. Comumente, o oceano pacífico é usado como cemitério. Esse direcionamento é possível apenas para reentradas planejadas e passíveis de controle. Detritos à deriva podem atingir áreas povoadas.

Além do problema de poluição dos oceanos e do risco de colisão com o solo, a técnica de reentrada possui intrínseco a ela outro empecilho. Ela é aplicável apenas a orbitas mais baixas. Em orbitas geoestacionárias, para satélites que atingiram o fim de sua operação e não são mais controláveis, a reentrada é impraticável devido à baixa influência do arrasto atmosférico.

Esses casos necessitam de outras técnicas de mitigação que não fazem parte do escopo deste trabalho.

No caso de satélites que possuem reserva energética para manobra de mitigação, o consumo de combustível necessário para desacelera-lo a ponto de fazê-lo reentrar na atmosfera é mais alto que enviá-lo ao que conhecemos como órbita cemitério [32].

A órbita cemitério é aquela onde o satélite, ao final de sua vida útil, utiliza o que resta de seu combustível para alcançar. São orbitas em que é possível ficar à deriva, a princípio, sem mais problemas. Essa faixa orbital fica entre 100 e 300 quilômetros acima da geoestacionária. Contudo, a utilização desse recurso deve ser feita com cautela, uma vez que estudos recentes apontam instabilidade em orbitas cemitérios com possível reentrada não controlada na atmosfera em longo prazo [22]. Além disso, o acúmulo de lixo nessas regiões aumenta a possibilidade de impacto e criação de nuvem de detritos resultando em um crescimento exponencial de objetos à deriva [12][22].

Segundo a Agência Espacial Europeia, o ΔV necessário para que um satélite GEO eleve sua altitude em 300 km é da ordem de 0.011 km/s [16]. Deve-se ressaltar também que uma órbita poluída representa gastos adicionais e crescentes com manobras evasivas, além de constante rastreamento e monitoramento de detritos. Ainda de acordo com a ESA, esses custos extras podem representar de 5 a 10% do valor total da missão [26].

3. MODELOS TEÓRICOS

3.1 Elementos keplerianos

Em homenagem ao astrônomo alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), os elementos keplerianos, também conhecidos como parâmetros orbitais, descrevem a órbita de um corpo de forma unívoca.

O semieixo maior (a) é aquele que marca o comprimento da metade do eixo maior da elipse. A excentricidade (e) é um parâmetro associado à teoria das cônicas e mede o grau de desvio em relação a uma circunferência. Já a inclinação (i) é dada pelo ângulo entre o plano da órbita e o plano equatorial.

Esses três primeiros elementos orbitais são mais difundidos e intuitivos. Por outro lado, os parâmetros, ascensão reta do nodo ascendente (Ω), argumento do perigeu (ω) e a anomalia verdadeira (v) necessitam de uma atenção especial para seu entendimento. Na figura abaixo, podemos ver a representação dos elementos orbitais.

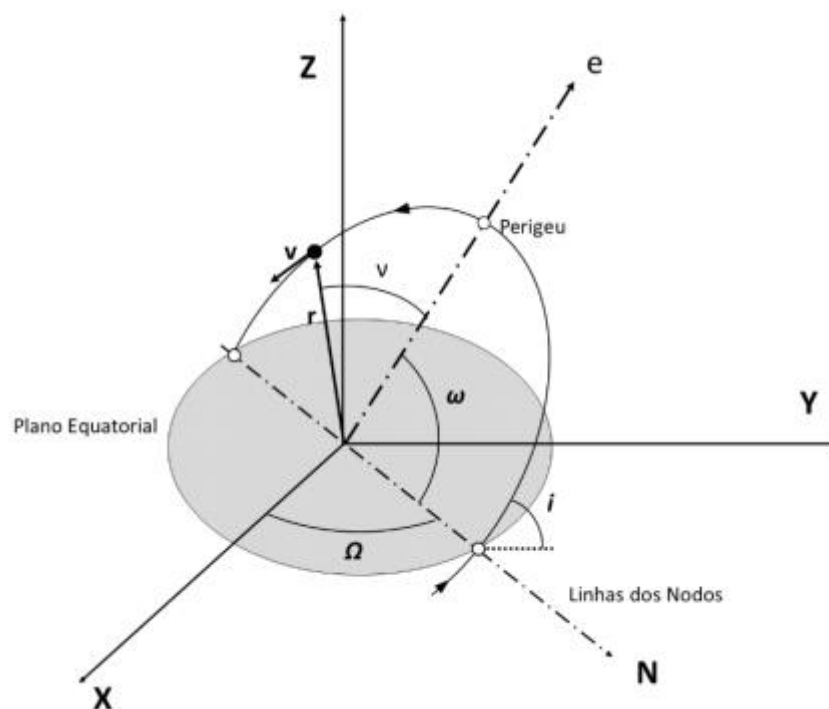


Figura 1: Elementos keplerianos, sistema ECI [20]

Em uma órbita inclinada, o nodo é um dos dois pontos onde a órbita cruza o plano de referência. O termo ascendente se refere à passagem do corpo do hemisfério Sul para o hemisfério Norte. Logo, o nodo ascendente é o ponto na órbita no qual o corpo cruza o plano equatorial de forma ascendente. Ao traçar uma linha entre o centro da Terra e o nodo ascendente, obtemos o que

chamamos de linha dos nodos. Finalmente, a ascensão reta do nodo ascendente (Ω) é o ângulo entre a linha dos nodos e o eixo x do sistema de referência.

O argumento do perigeu (ω) é o ângulo dado entre a linha dos nodos e a posição do perigeu da órbita.

Por último, a anomalia verdadeira (v) é definida como sendo o ângulo entre o perigeu e a real posição do satélite em um determinado instante de tempo.

Pelos parâmetros descritos acima, podemos determinar o formato geral da órbita e a posição do satélite dentro dela de forma mais simples. Contudo, os elementos cartesianos são mais eficazes na propagação de órbita via cálculo numérico e na consideração da influência gravitacional de outros corpos como o Sol e a Lua.

3.2 O problema de N-Corpos

Esse problema trata da possibilidade de movimento de N corpos de massas m_1, m_2, \dots, m_N , que exercem influência gravitacional entre si de acordo com a lei da gravitação universal de Newton [6]. Como diz Féjóz em seu trabalho '*The N-body problem*', a concisão da declaração engana e esconde a complexidade da tarefa. Porém, para o propósito deste trabalho, façamos uso apenas do equacionamento que nos interessa.

Inicialmente devemos considerar cada corpo como partículas pontuais de massa igual a m_j diferente de zero, onde $j = 1, 2, \dots, N$. Em um segundo instante, consideremos os corpos como massas esféricas. Seus respectivos raios nos fornecem dados para analisar uma possível colisão caso a distância entre dois corpos seja menor que a soma de seus raios.

Da Lei da Gravitação Universal de Newton temos as equações de movimento em coordenadas cartesianas (x, y, z). Definindo a posição de m_j pelo vetor [22]:

$$\vec{r}_j = X_j\mathbf{I} + Y_j\mathbf{J} + Z_j\mathbf{K} \quad (1)$$

A distância entre dois corpos j e k é dado por:

$$r_{kj} = \sqrt{(X_k - X_j)^2 + (Y_k - Y_j)^2 + (Z_k - Z_j)^2} \quad (2)$$

A aceleração gravitacional total sobre um corpo é dada pela soma das acelerações gravitacionais provenientes de todos os outros corpos (N - 1) [3].

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = - \sum_{k=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \frac{\mu_k}{r_{kj}^3} * (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \quad (3)$$

Onde $\mu_k = Gm_k$, com G sendo a constante da gravitação universal igual a $6.674 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$.

Tomando o problema de seis corpos (N = 6):

- 1 : Sol;
- 2 : Júpiter;
- 3 : Saturno;
- 4 : Terra;
- 5 : Lua;
- 6 : Satélite.

Temos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = - \sum_{k=2}^6 \frac{\mu_k}{r_{k1}^3} * (r_k - r_1) \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = - \sum_{k=1; k \neq 2}^6 \frac{\mu_k}{r_{k2}^3} * (r_k - r_2) \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = - \sum_{k=1; k \neq 3}^6 \frac{\mu_k}{r_{k3}^3} * (r_k - r_3) \quad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_4 = - \sum_{k=1; k \neq 4}^6 \frac{\mu_k}{r_{k4}^3} * (r_k - r_4) \quad (7)$$

$$\ddot{r}_5 = - \sum_{k=1; k \neq 5}^6 \frac{\mu_k}{r_{k5}^3} * (r_k - r_5) \quad (8)$$

$$\ddot{r}_6 = - \sum_{k=1; k \neq 6}^6 \frac{\mu_k}{r_{k6}^3} * (r_k - r_6) \quad (9)$$

Onde cada equação acima é constituída por três equações associadas ao sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z). Abaixo, temos o e

Para o Sol:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 = & \mu_2 * \frac{(x_2 - x_1)}{r_{21}^3} + \mu_3 * \frac{(x_3 - x_1)}{r_{31}^3} + \mu_4 * \frac{(x_4 - x_1)}{r_{41}^3} + \mu_5 * \frac{(x_5 - x_1)}{r_{51}^3} \\ & + \mu_6 * \frac{(x_6 - x_1)}{r_{61}^3} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_1 = & \mu_2 * \frac{(y_2 - y_1)}{r_{21}^3} + \mu_3 * \frac{(y_3 - y_1)}{r_{31}^3} + \mu_4 * \frac{(y_4 - y_1)}{r_{41}^3} + \mu_5 * \frac{(y_5 - y_1)}{r_{51}^3} \\ & + \mu_6 * \frac{(y_6 - y_1)}{r_{61}^3} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_1 = & \mu_2 * \frac{(z_2 - z_1)}{r_{21}^3} + \mu_3 * \frac{(z_3 - z_1)}{r_{31}^3} + \mu_4 * \frac{(z_4 - z_1)}{r_{41}^3} + \mu_5 * \frac{(z_5 - z_1)}{r_{51}^3} \\ & + \mu_6 * \frac{(z_6 - z_1)}{r_{61}^3} \quad (12) \end{aligned}$$

Portanto, o sistema dinâmico de seis corpos possui 18 equações que não apresentam solução analítica [17]. A solução numérica é possível e nos fornecerá a propagação orbital de nosso satélite.

3.3 Problema Restrito Circular de Três Corpos (PRC3C)

O problema restrito circular de três corpos descreve o movimento de um terceiro corpo de massa desprezível, em função do tempo, sob influência gravitacional de dois corpos principais que orbitam seu centro de massa em comum de forma circular. Ao contrário do caso de N igual a dois corpos que possui solução analítica [17], o PRC3C se assemelha nesse quesito ao caso visto acima e trata-se de um caso particular onde N é igual a três. A análise feita

sobre o problema de três corpos pode ser útil à nossa situação onde N é igual a seis. Através desse caso, estudaremos a constante de Jacobi e as regiões de Hill.

Deve-se primeiramente estabelecer um sistema de referência sinódico a fim de remover a dependência temporal. O sistema gira em torno do eixo z com velocidade angular constante, junto aos primários. Esses por sua vez, se movimentam em torno do centro de massa em orbitas circulares. O referencial sinódico é colocado no baricentro do sistema e o eixo x liga as duas massas m_1 e m_2 de tal forma que o corpo mais massivo se localiza mais próximo da origem. A distância adimensional entre as massas e o módulo da velocidade angular são iguais a um [22].

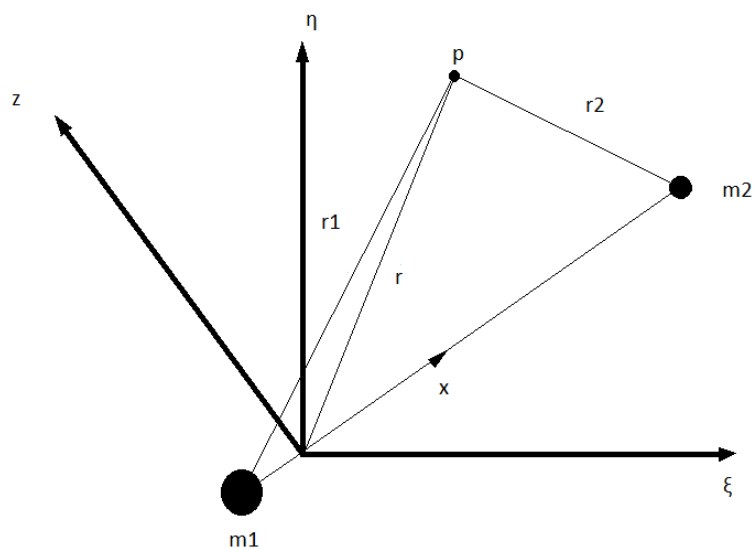


Figura 2: Representação do PRC3C no referencial sinódico

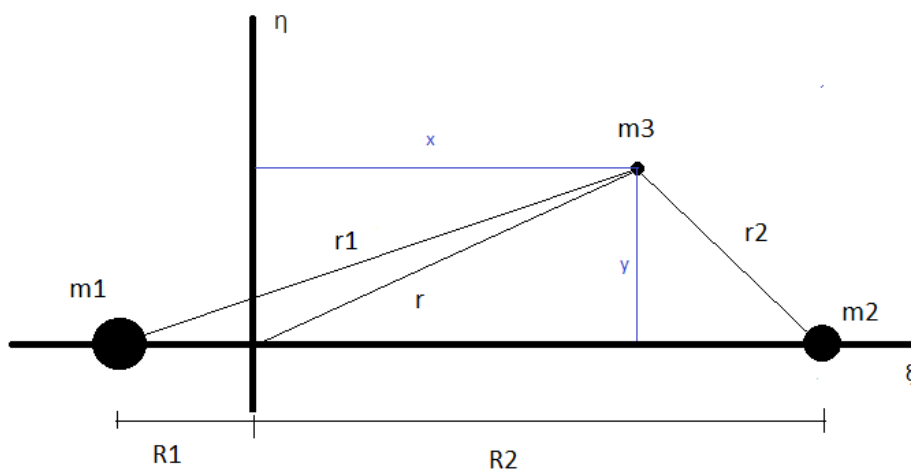


Figura 3: Visão no plano do PRC3C no referencial sinódico

A unidade de tempo é 27,32 dias [23], e a massa adimensional ($\bar{\mu}$) do baricentro Terra-Lua é dada por:

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0.012150582 \quad (13)$$

As massas adimensionais dos primários m_1 e m_2 são dadas por:

$$\mu_1 = 1 - \bar{\mu} \quad (14)$$

$$\mu_2 = \bar{\mu} \quad (15)$$

Ambos os primários possuem coordenadas y e z iguais a zero, portanto podemos usar a definição de centro de massa para determinar a localização no eixo x [3].

Da equação do centro de massa:

$$m_1 \bar{R}_1 + m_2 \bar{R}_2 = 0 \quad (16)$$

Isso implica que \bar{R}_1 e \bar{R}_2 possuem a mesma direção, porém com sentidos opostos, e também, o centro de massa estará sempre na linha entre m_1 e m_2 .

Definindo r_{12} como a distância entre os primários, temos:

$$r_{12} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 \quad (17)$$

Da equação 16 em módulo:

$$m_1 \bar{R}_1 = m_2 \bar{R}_2 \quad (18)$$

$$\bar{R}_1 = \frac{m_2}{m_1} \bar{R}_2 \quad (19)$$

$$\bar{R}_2 = \frac{m_1}{m_2} \bar{R}_1 \quad (20)$$

Dessa maneira, da distância entre os corpos:

$$\bar{R}_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) = r_{12} \quad (21)$$

$$\bar{R}_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) r_{12} \quad (22)$$

De maneira similar:

$$\overline{R2} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right) r_{12} \quad (23)$$

Considerando $r_{12} = 1$, e lembrando a equação 13, chegamos à conclusão que $\overline{R1} = \mu_2$ e $\overline{R2} = \mu_1$.

Como o sistema sinódico é fixo no centro de massa e gira de forma concomitante com m_1 e m_2 , podemos dizer que os primários permanecem estacionários e posicionados em: [17][22]

$$P1(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_2, 0, 0)$$

$$P2(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$$

Podemos escrever a distância entre os primários e a partícula como:

$$\overline{r1}^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2 \quad (24)$$

$$\overline{r2}^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2 \quad (25)$$

Considerando a rotação do sistema, temos:

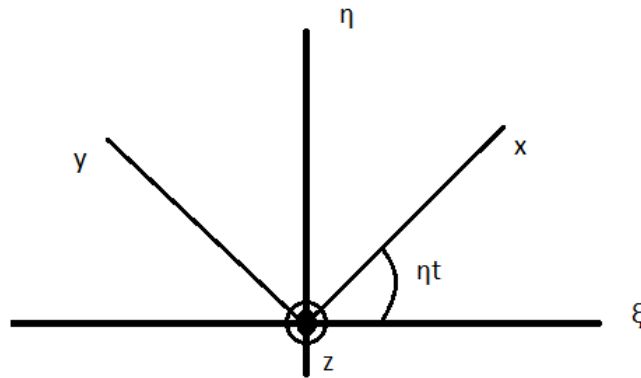


Figura 4: Representação planar da rotação no eixo z

Sendo $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e a rotação acontecendo no eixo z com velocidade angular $\vec{\omega} = \eta \hat{k}$, temos:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) f = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (26)$$

$$\dot{\vec{r}}f = \dot{\vec{r}} \text{ rot} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (27)$$

Onde:

f = fixo;

rot = rotacional;

η = Movimento médio.

O produto vetorial $\vec{\omega} \times \vec{r}$ é dado por:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \eta \\ x & y & z \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\eta y \\ \eta x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma:

$$\dot{\vec{r}}f = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta y \\ \eta x \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x} - \eta y \\ \dot{y} + \eta x \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Derivando $\dot{\vec{r}}$ mais uma vez, temos:

$$\ddot{\vec{r}}f = \ddot{\vec{r}} \text{ rot} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \text{ rot} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (28)$$

Onde:

$$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \text{ rot} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \eta \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -2\eta \dot{y} \\ 2\eta \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \eta \\ -\eta y & \eta x & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\eta^2 y \\ -\eta^2 x \\ 0 \end{bmatrix}$$

O termo $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ pode ser considerado zero, uma vez que a velocidade angular $\vec{\omega}$ de uma orbita circular é constante, portanto, sua derivada é igual a zero.

Dessa forma:

$$\ddot{\vec{r}}f \equiv \begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\eta\dot{y} - \eta^2x \\ \ddot{y} + 2\eta\dot{x} - \eta^2y \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Lembrando a segunda lei de Newton:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F1} + \vec{F2} \quad (30)$$

Onde $\vec{F1}$ e $\vec{F2}$ são as forças gravitacionais exercidas respectivamente pelas massas $m1$ e $m2$ sobre a partícula $m3$.

Da gravitação universal de Newton:

$$\vec{F1} = -\frac{\mu1m}{r1^3}\vec{r1} \quad (31) \quad \vec{F2} = -\frac{\mu2m}{r2^3}\vec{r2} \quad (32)$$

Substituindo e cancelando as massas, temos:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu1}{r1^3}\vec{r1} - \frac{\mu2}{r2^3}\vec{r2} \quad (33)$$

Usando 29 e 33 e recordando 24 e 25, fazendo as devidas substituições, podemos escrever as equações de movimento no referencial sinódico:

$$\ddot{x} - 2\eta\dot{y} - \eta^2x = -\frac{\mu1}{r1^3}(x + \mu2) - \frac{\mu2}{r2^3}(x - \mu1) \quad (34)$$

$$\ddot{y} + 2\eta\dot{x} - \eta^2y = -\left(\frac{\mu1}{r1^3} + \frac{\mu2}{r2^3}\right)y \quad (35)$$

$$\ddot{z} = -\left(\frac{\mu1}{r1^3} + \frac{\mu2}{r2^3}\right)z \quad (36)$$

As equações acima podem ser escritas como:

$$\ddot{x} - 2\eta\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (37)$$

$$\ddot{y} + 2\eta\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (38)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (39)$$

Onde:

$$U(x, y, z) = \frac{\eta^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1 - \bar{\mu}}{r_1} + \frac{\bar{\mu}}{r_2} \quad (40)$$

Em que o termo $(x^2 + y^2)$ representa a energia potencial centrífuga.

O termo $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ representa o potencial gravitacional.

O termo $2\eta\dot{y}$ e $2\eta\dot{x}$ é a parcela referente a aceleração de Coriolis

3.4 A integral de Jacobi

A partir do equacionamento do PRC3C, podemos encontrar a integral do movimento associado à constante de Jacobi $C_j = -2E$, que relaciona energia e áreas acessíveis do ambiente espacial, definindo assim as Regiões de Hill.

Multiplicando as equações 37, 38 e 39 por \dot{x} , \dot{y} e \dot{z} , respectivamente e somando as três resultantes, temos:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt} \quad (41)$$

Fazendo a integração de:

$$\int (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) dt = \int \frac{dU}{dt} dt \quad (42)$$

$$\int \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt = U(r) \quad (43)$$

Temos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) + C_j = U(r) \quad (44)$$

$$v^2 + C_j = 2U(r) \quad (45)$$

Dessa forma, temos que a constante de Jacobi pode ser definida como:

$$J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2U(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = C_j \quad (46)$$

As regiões de Hill são aquelas que compõem o espaço acessível ao terceiro corpo para um dado valor de C_j . Suas fronteiras são obtidas através do conceito das curvas de velocidade zero, onde a energia cinética do terceiro corpo é nula [21][22]:

$$2U(x, y, z) = C_j \quad (47)$$

$$C_j = \eta^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{1 - \bar{\mu}}{r_1} + \frac{\bar{\mu}}{r_2}\right) \quad (48)$$

Através de um $\bar{\mu}$ conhecido e dado valor C_j , a equação 48 nos fornece as fronteiras que dividem o que é acessível e o que não é acessível ao terceiro corpo [3].

O estudo das curvas de velocidade zero está intimamente ligado aos pontos de equilíbrio do sistema conhecidos como pontos Lagrangeanos.

3.5 Regiões de Hill e Pontos Lagrangeanos

Os pontos Lagrangeanos correspondem a regiões no espaço dentro de um sistema de dois corpos massivos em que um terceiro corpo de massa desprezível permanece estacionário no referencial sinódico [21]. Esses pontos de equilíbrio são conhecidos como L1, L2, L3, L4 e L5 e ficam dispostos de acordo com a figura 5:

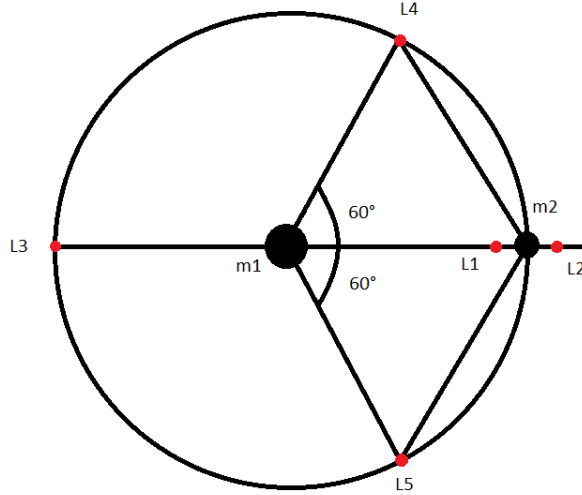


Figura 5: Pontos Lagrangeanos

Os pontos L1, L2, e L3 são considerados instáveis. Um corpo localizado nessa região, se perturbado, oscilará divergentemente e se afastará do ponto de equilíbrio. Os pontos L4 e L5 são estáveis. Um corpo posicionado nesses locais tende a retornar para a região e manter pequenas orbitas sobre o ponto de equilíbrio chamadas halo. Contudo, os pontos L4 e L5 podem ser desestabilizados pela influência gravitacional de outros corpos próximos ao sistema [21][31].

Os pontos Lagrangeanos podem ser encontrados fazendo $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ e $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ nas equações 34, 35 e 36.

$$-\eta^2 x = -\frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \mu_2) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \mu_1) \quad (49)$$

$$-\eta^2 y = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y \quad (50)$$

$$0 = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)z \quad (51)$$

Da equação 51, uma vez que $\frac{\mu_1}{r_1^3} > 0$ e $\frac{\mu_2}{r_2^3} > 0$, temos que $z = 0$. Com isso, podemos concluir que os pontos de equilíbrio estão no plano XY.

A partir das equações acima, para y diferente de zero, podemos encontrar de forma explícita os pontos L4 e L5.

Fazendo η igual a 1, podemos concluir que:

$$r_1 = r_2 = r_{12}$$

Ou seja, a distância da partícula P até os primários é igual a distância entre os primários, formando assim um triângulo equilátero.

Usando $z = 0$ e aplicando a condição acima nas equações 24 e 25, temos:

$$(x + \mu_2)^2 + y^2 = 1 \quad (52)$$

$$(x - \mu_1)^2 + y^2 = 1 \quad (53)$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2 \quad (54)$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (55)$$

Dessa forma, as coordenadas adimensionais L4 e L5 são:

$$L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu_2, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \quad (56)$$

$$L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \quad (57)$$

Os pontos L1, L2, e L3 podem ser encontrados na condição $y = 0$. Usando novamente as equações 24 e 25, temos:

$$r_1 = |x + \mu_2| \quad (58)$$

$$r_2 = |x - \mu_1| \quad (59)$$

Usando η igual a 1 e fazendo a substituição na equação 49, encontramos a função:

$$f(\mu_2, x) = \frac{1 - \mu_2}{|x + \mu_2|^3} (x + \mu_2) + \frac{\mu_2}{|x + \mu_2 - 1|^3} (x + \mu_2 - 1) - x \quad (60)$$

Onde as raízes da função acima nos fornecem os pontos que se encontram no eixo x.

Usando o sistema Terra – Lua como exemplo, temos na figura abaixo o gráfico da função que aponta os pontos Lagrangeanos L1, L2 e L3.

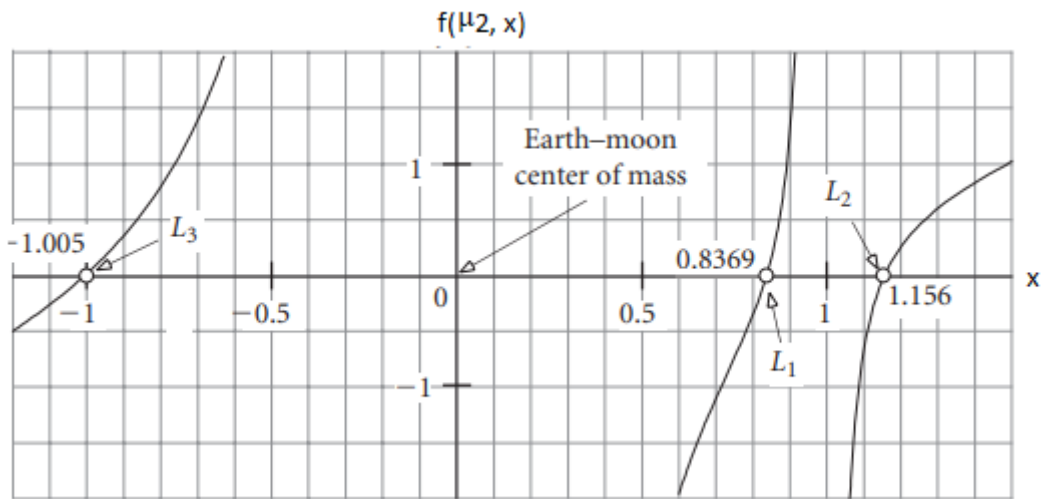


Figura 6: Pontos L1, L2 e L3 do sistema Terra – Lua [3]

Fazendo uso da constante de Jacobi e dos pontos de equilíbrio propostos por Lagrange, temos na figura 7, a relação entre C_j , áreas acessíveis e pontos lagrangeanos. As regiões de Hill, áreas sombreadas, correspondem a domínios não acessíveis.

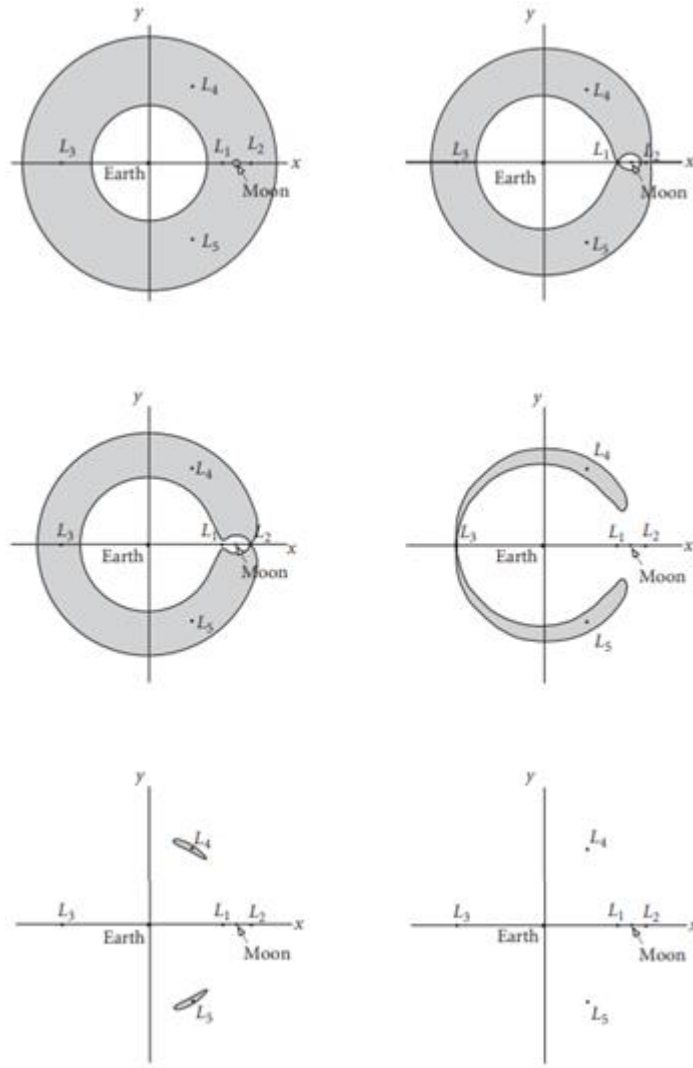


Figura 7: Regiões de Hill para dado C_j no sistema Terra-Lua [3]

Onde $C_j(L_1) > C_j(L_2) > C_j(L_3) > C_j(L_4) = C_j(L_5)$

Quando C_j é maior que $C_j(L_1)$, figura 7a, o corpo permanecerá confinado e não transitará entre Terra e Lua.

Substituindo as coordenadas dos pontos Lagrangeanos na equação 63, obtemos os valores de C_j necessários para chegar aos respectivos pontos com velocidade zero [21].

Para C_j menor que $C_j(L_1) = 3.18834$ e maior que $C_j(L_2) = 3.17216$, um gargalo em L_1 se forma, como mostrado na figura 7b. Nesse caso, a partícula pode escapar por esse ponto e viajar entre as regiões em torno dos primários. O caso de C_j compreendido entre $C_j(L_1)$ e $C_j(L_2)$ servirá como base para a evolução temporal de trajetórias desse trabalho.

A figura 7c representa o caso onde C_j é menor que $C_j(L_2)$ e maior que $C_j(L_3)$. Para tal valor, existe a possibilidade de escapatória do sistema via ponto de equilíbrio L_2 .

Quando C_j é menor que $C_j(L_3)$ e maior que $C_j(L_4)$, figura 7d, um gargalo em L_3 se forma e cresce a chance de escape para o espaço exterior.

Diminuindo o valor de C_j , as regiões inacessíveis também diminuem até sumirem por completo. Nesse caso, todo o plano é possível [21][22].

4. A Manobra

4.1 Transferência de Hohmann

Para manobras orbitais no plano, ou seja, modificando apenas o semieixo maior e a excentricidade, algumas transferências são possíveis, como a bi-parabólica, bi-elíptica, ou a que será utilizada nesse trabalho, transferência de Hohmann. Façamos então uma breve revisão desse tipo de manobra, que servirá como base para a nossa solução numérica.

A transferência orbital descrita pelo cientista alemão Walter Hohmann (1880 – 1945) é uma manobra bi impulsiva que por meio de uma órbita de transferência elíptica visa transferir um veículo entre duas órbitas coplanares.

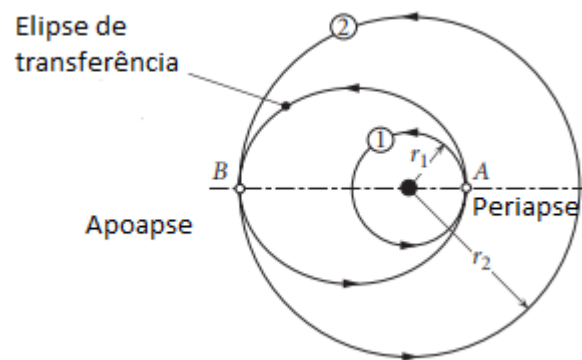


Figura 8: Transferência de Hohmann [3]

Igualando a força centrífuga sofrida pelo satélite, com aquela definida pela gravitação universal de Newton, podemos encontrar a velocidade em órbita circular:

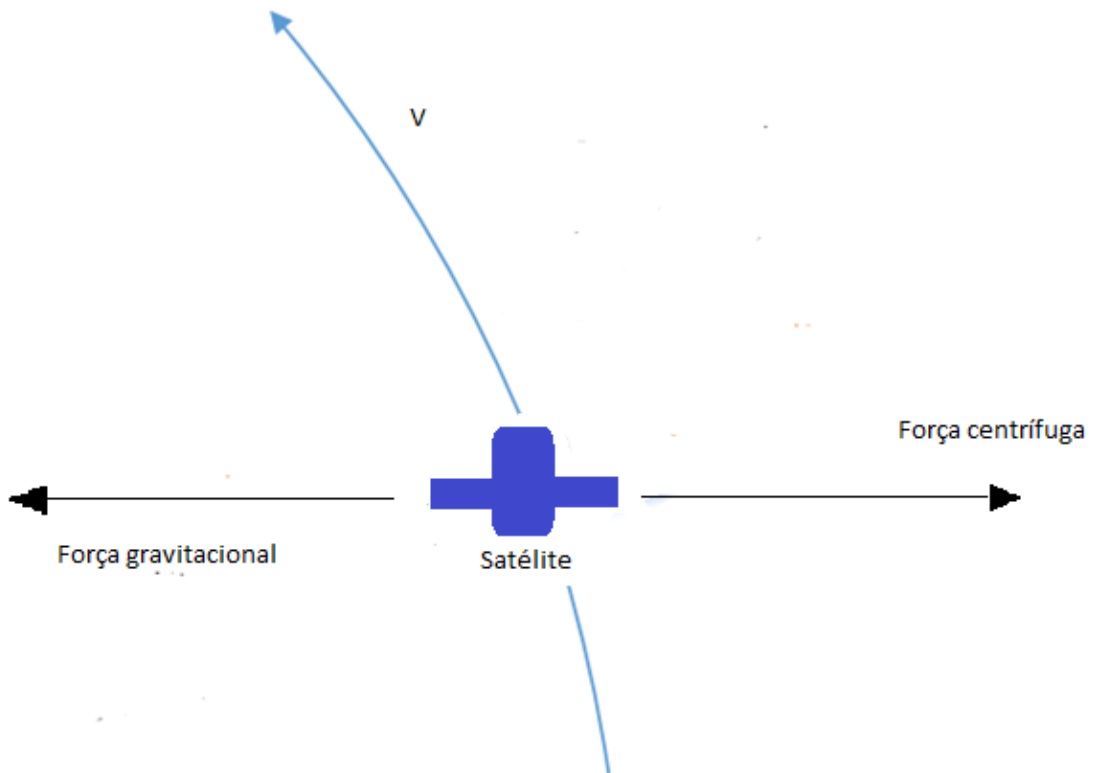


Figura 9: Visão simplista das forças atuantes sobre um satélite em órbita

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{m_2 V^2}{r} \quad (61)$$

$$V = \sqrt{\frac{Gm_1}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (62)$$

Em acordo com a conservação da energia orbital, temos:

$$\frac{1}{2}m_2 V^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{2a} \quad (63)$$

A partir da expressão acima, podemos encontrar equação Da Vis Viva para velocidade numa órbita elíptica:

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (64)$$

Lembrando que:

$$ra = a(1 + e) \quad (65)$$

$$rp = a(1 - e) \quad (66)$$

Onde:

r = Raio;

ra = Raio apoapse

rp = Raio periapse

Apoapse:

$$Va = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{ra} - \frac{1}{a} \right)} \quad (67)$$

$$Va = \sqrt{\frac{\mu}{ra} (1 - e)} \quad (68)$$

Periapse:

$$Vp = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{rp} - \frac{1}{a} \right)} \quad (69)$$

$$Vp = \sqrt{\frac{\mu}{rp} (1 + e)} \quad (70)$$

As equações acima são peças fundamentais na determinação dos ΔV 's e consumo de combustível envolvido na manobra.

4.2 Transferência para Mudança de Plano

Uma vez que satélites geoestacionários são posicionados na órbita terrestre, já não podem ser colididos com a Lua sem uma manobra de mudança de plano. Ambos os corpos orbitam inclinadamente o nosso plano de referência, portanto, após a transferência de Hohmann, ainda nos encontraremos na região equatorial característica da órbita GEO. Assim sendo, a inclinação deve ser ajustada.

As transferências devem seguir essa ordem, uma vez que, a mudança de plano, quando feita mais distante da influência gravitacional terrestre, consome menos propelente.

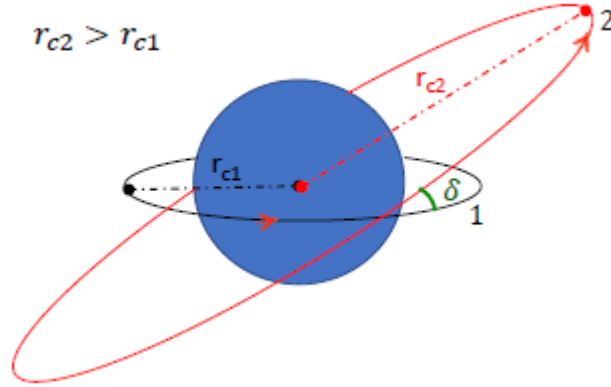


Figura 10: Transferência para mudança de plano [21]

Seja V_1 a velocidade antes da manobra e V_2 a velocidade após:

$$V_1 = vr_1 \hat{U}_r + v_{\perp 1} \hat{U}_{\perp 1} \quad (71)$$

$$V_2 = vr_2 \hat{U}_r + v_{\perp 2} \hat{U}_{\perp 2} \quad (72)$$

Onde \hat{U}_r é o vetor radial unitário e permanece imutável durante a manobra. O vetor transversal unitário \hat{U}_{\perp} é perpendicular ao vetor \hat{U}_r e rotaciona de acordo com o ângulo δ , partido de sua posição inicial $\hat{U}_{\perp 1}$ até sua posição final $\hat{U}_{\perp 2}$.

$$\Delta V = V_2 - V_1 = (vr_2 - vr_1)\hat{U}_r + v_{\perp 2}\hat{U}_{\perp 2} - v_{\perp 1}\hat{U}_{\perp 1} \quad (73)$$

$$\Delta v^2 = \Delta V \cdot \Delta V \quad (74)$$

Considerando que:

$$\hat{U}_r \cdot \hat{U}_r = \hat{U}_{\perp 1} \cdot \hat{U}_{\perp 1} = \hat{U}_{\perp 2} \cdot \hat{U}_{\perp 2} = 1 \quad (75)$$

$$\hat{U}_r \cdot \hat{U}_{\perp 1} = \hat{U}_r \cdot \hat{U}_{\perp 2} = 0 \quad (76)$$

$$\hat{U}_{\perp 1} \cdot \hat{U}_{\perp 2} = \cos \delta \quad (77)$$

Temos:

$$\Delta v^2 = (vr_2 - vr_1)^2 + v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2 - 2 * v_{\perp 1} * v_{\perp 2} * \cos \delta \quad (78)$$

Partindo da definição de ângulo da trajetória de voo:

$$\begin{aligned} vr_1 &= v_1 \sin \gamma_1 & v_{\perp 1} &= v_1 \cos \gamma_1 \\ vr_2 &= v_2 \sin \gamma_2 & v_{\perp 2} &= v_2 \cos \gamma_2 \end{aligned}$$

E das identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_1 &= \sin^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1 \\ \cos(\gamma_2 - \gamma_1) &= \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 + \sin \gamma_2 \sin \gamma_1 \end{aligned}$$

Chegamos na expressão:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2[\cos \Delta\gamma - \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 (1 - \cos \delta)]} \quad (79)$$

Analisando a equação 78, é fácil ver que, para obter máxima eficiência na transferência de plano, a velocidade radial vr deve permanecer inalterada. Além disso, a manobra deve ocorrer na região de periapse/apoase, onde a velocidade transversal v_{\perp} é a menor possível.

No caso de uma manobra nessas regiões, onde $vr_1 = vr_2 = 0$, temos que $v_{\perp 1} = v_1$ e $v_{\perp 2} = v_2$, temos que:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \delta} \quad (80)$$

Mais uma vez, fazendo uso da identidade trigonométrica:

$$\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

Podemos reescrever a equação 80 na sua forma mais eficiente, onde a mudança de plano se dá junto com a mudança de velocidade [3].

$$\Delta v = \sqrt{(v_2 - v_1)^2 + 4v_1v_2\sin^2\frac{\delta}{2}} \quad (81)$$

Para uma manobra onde não existe alteração na velocidade, usa-se a equação reduzida 82:

$$\Delta V \delta = 2v \sin \frac{\delta}{2} \quad (82)$$

Onde v é a velocidade encontrada ao final da transferência de Hohmann no plano.

4.3 As Leis de Kepler

As três leis do movimento planetário de Johannes Kepler (1571 – 1630) marcaram profundamente a mecânica celeste e devem ser lembradas aqui.

4.3.1 Primeira Lei de Kepler

Na primeira delas, conhecida como a lei das órbitas, Kepler foi capaz de deduzir o formato das órbitas planetárias e enunciou que todos os planetas se movem de forma elíptica, onde o Sol é um dos focos. Introduziu as noções de excentricidade e mudou a forma como entendemos a interação orbital.

A equação característica da primeira lei, que define o caminho de um corpo m_2 orbitando m_1 pode ser vista abaixo:

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \quad (83)$$

4.3.2 Segunda Lei de Kepler

A segunda lei de Kepler, ou lei das áreas, diz que a linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

A velocidade de um corpo que orbita outro varia durante sua trajetória elíptica. A Terra orbitando o Sol, por exemplo, possui velocidade máxima em seu Periélio, e velocidade mínima no Afélio. Contudo, a área coberta pela trajetória,

para instantes de tempo iguais, é sempre a mesma, independentemente da posição na elipse.

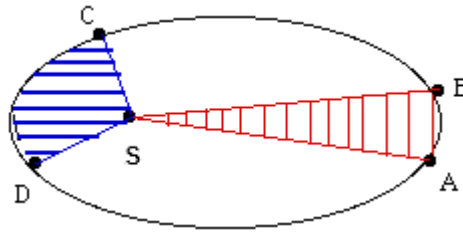


Figura 11: Lei das áreas de Kepler [11]

A figura acima exemplifica a segunda lei de Kepler. Considere um corpo orbitando S no sentido anti-horário. O tempo transcorrido entre A e B é o mesmo entre C e D. Apesar da variação de velocidade característica de uma órbita elíptica, a área ASB em hachurada em vermelho é igual a área CSD em azul.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \quad (84)$$

Considerando um intervalo de tempo infinitesimal, a taxa de variação da área no tempo depende apenas do momento angular (h), que é constante.

4.3.3 Terceira Lei de Kepler

A terceira lei, proposta pelo cientista alemão, é aquela que relaciona o período (T) de revolução com o raio da órbita, onde T é proporcional ao cubo do semieixo maior.

Igualando a gravitação universal de Newton com a força centrípeta, temos:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \quad (85)$$

Onde a velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{T}$, e $\mu = GM$ temos:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{m4\pi^2 r}{T^2} \quad (86)$$

Isolando o período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \quad (87)$$

Através da lei de Kepler, podemos determinar o tempo de voo do satélite em manobra.

4.4 Equação de Foguete de Tsiolkovsky

Konstantin Tsiolkovsky (1857 – 1935) foi um importante cientista russo que desenvolveu de forma pioneira estudos em foguetes e cosmonáutica. A equação de foguete que carrega seu nome é aquela que relaciona a variação da velocidade de um foguete com a velocidade de exaustão de propelente e as massas, inicial e final.

$$\Delta V = v_f - v_i = v_e \ln \frac{m_i}{m_f} \quad (88)$$

Onde v_e é definida como a velocidade de exaustão dos gases e é dada por:

$$v_e = I_{sp} * g_0$$

Onde:

v_f = Velocidade final;

v_i = Velocidade inicial;

I_{sp} = Impulso específico;

g_0 = Gravidade na superfície terrestre;

m_i = Massa inicial do corpo;

m_f = massa final do corpo após a queima do propelente;

O impulso específico é associado ao tipo de propelente utilizado e aponta para o desempenho do sistema propulsor [20].

No âmbito da mecânica orbital, podemos usar a equação de foguete de Tsiolkovsky para determinar o consumo de propelente envolvido em determinada manobra.

Substituindo v_e na equação 88, temos:

$$\ln \frac{m_i}{m_f} = \frac{\Delta V}{I_{sp} g_0} \quad (89)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados e isolando m_f :

$$m_f = m_i e^{\frac{-\Delta V}{I_{sp} g_0}} \quad (90)$$

Sabendo que $\Delta m = m_i - m_f$, obtemos:

$$\frac{\Delta m}{m_i} = \left(1 - e^{\frac{-\Delta V}{I_{sp} g_0}} \right) \quad (91)$$

Através da equação acima, chegamos ao consumo percentual de propelente.

5. Resultados

Nessa seção, verificaremos as soluções obtidas através do cálculo numérico desenvolvido para o sistema dinâmico de seis corpos. Entre todas as trajetórias estudadas, devemos identificar aquelas que transitam pelo ponto lagrangeanos L1 e são capturadas pelo campo gravitacional da Lua de tal forma que o objetivo final de colisão seja alcançado.

Identificando possíveis rotas de transferência e estudando sua viabilidade econômica, poderemos verificar a possibilidade dessas manobras de mitigação envolvendo satélites geoestacionários e a Lua.

5.1 Metodologia

Primeiramente, deve-se fazer uso de condições iniciais mais apropriadas para determinar manobras que visam a colisão do satélite com a superfície lunar. Dessa forma, o cálculo numérico, realizado através do software Fortran 90, se dá pela variação dos elementos Keplerianos de órbitas osculadoras lunares [22]. Os dados obtidos são plotados através do Software MATLAB R2013a.

Para cada conjunto de parâmetros orbitais, temos a evolução performada pelo integrador RADAU de 15ª ordem, partindo do tempo inicial $T_i = 0$, até o tempo final $T_f = 5000$ dias. No que tange à variação dos elementos keplerianos, temos que a excentricidade (e) varia de 0 a 0.99, com passos de 0.01. Ascensão reta do nodo ascendente (Ω) vai de 0 a 315 graus, passos de 45 graus. Por último, o argumento do perigeu (ω), varia também de 0 a 315 graus, com passos de 45 graus. A integração é interrompida quando o satélite escapa do sistema, colide com a terra, colide com a Lua, ou quando excede o tempo limite T_f . Trajetórias que atingem T_f , sem colidir ou deixar o sistema são consideradas estáveis.

A variação dos dados Keplerianos no modelo descrito acima gera uma massiva quantidade de condições iniciais. Portanto, considerando a necessidade de redução do esforço computacional, devemos partir da premissa que o satélite transita apenas por L1 e não escapa do sistema Terra-Lua. Dessa forma, podemos definir a constante de Jacobi apropriada e evoluir apenas as condições iniciais associadas a C_j que se encontram dentro desse range de possibilidades. Nesse caso, temos que $C_j(L1) > C_j > C_j(L2)$. A constante de Jacobi nessas condições permite apenas a transição por L1, uma vez que as curvas de velocidade zero impedem o escape para a região exterior ao sistema através dos demais pontos Lagrangeanos.

É importante ressaltar que C_j varia de acordo com a evolução temporal e , portanto, é usado apenas como parâmetro para identificar as condições iniciais mais apropriadas [22].

De acordo com a teoria da energia orbital, a interação entre dois corpos, em um primeiro momento, possui energia total negativa, uma vez que se encontra em órbita fechada. Com a evolução temporal e a influência de outros corpos no sistema, a energia orbital tende a ser positiva e a órbita passa a ser considerada aberta. O instante de tempo em que ocorre a transição entre órbita aberta e fechada pode ser atribuído como o tempo de escape ou captura da trajetória.

Na seção 5.2, as órbitas compatíveis com a condição $C_j(L1) > C_j > C_j(L2)$, são propagadas e aquelas que atingirem o objetivo final de colisão com a superfície lunar devem ser selecionadas. A seguir as trajetórias de sucesso podem ser estudadas com mais detalhes.

5.2 Missões

Todas as possíveis missões, evoluídas de acordo com as condições iniciais propostas, estão dispostas nessa seção em forma de gráficos alimentados por dados obtidos na rotina em linguagem Fortran e plotados em MATLAB.

Os resultados estão em função da excentricidade, argumento do perigeu e ascensão reta do nodo ascendente. Assim sendo, as simulações foram feitas para o caso especial onde o semieixo maior é constante e igual a 383154 Km e a inclinação mantida em zero graus. A figura 12 representa todas as trajetórias exploradas.

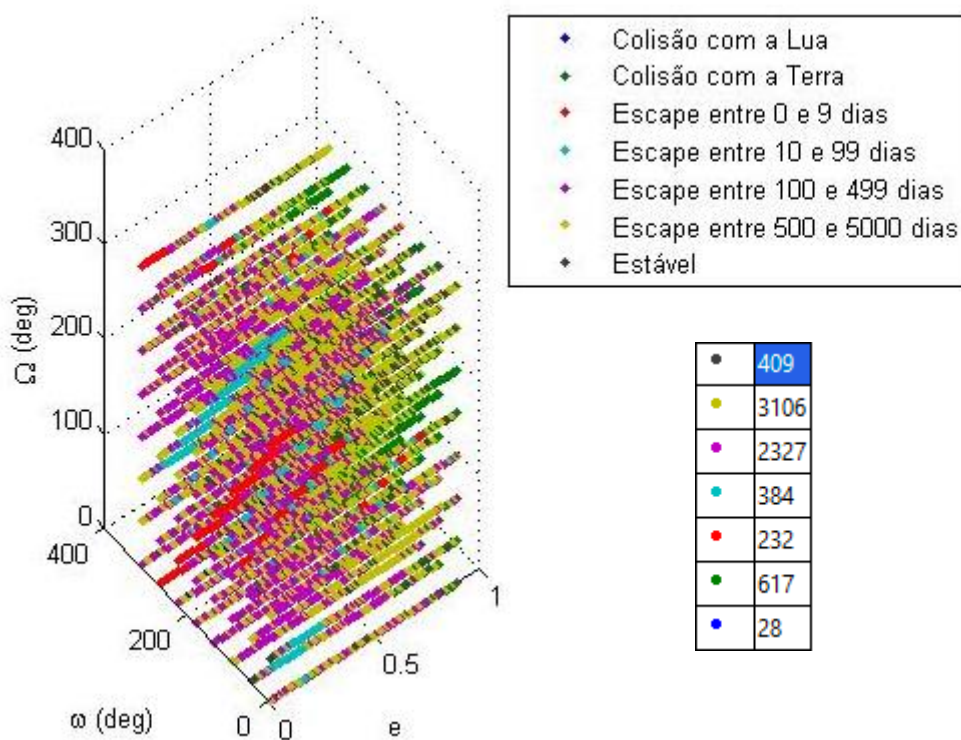


Figura 12: Trajetórias exploradas, em função da e , Ω e ω

A figura 12 traz todos os resultados esperados. Colisão com a Lua. Colisão com a terra, trajetórias que escaparam do sistema Terra-Lua e trajetórias estáveis. Totalizando 7104 possíveis missões exploradas.

5.2.1 Colisões com a Terra

Um possível desfecho para as condições iniciais é o fracasso via reentrada na atmosfera terrestre. A dinâmica natural do movimento não permite o satélite deixar a esfera de influência gravitacional da Terra e acaba por ser destruído na reentrada. A figura 13 apresenta todas as colisões com a superfície terrestre e o tempo associado à trajetória.

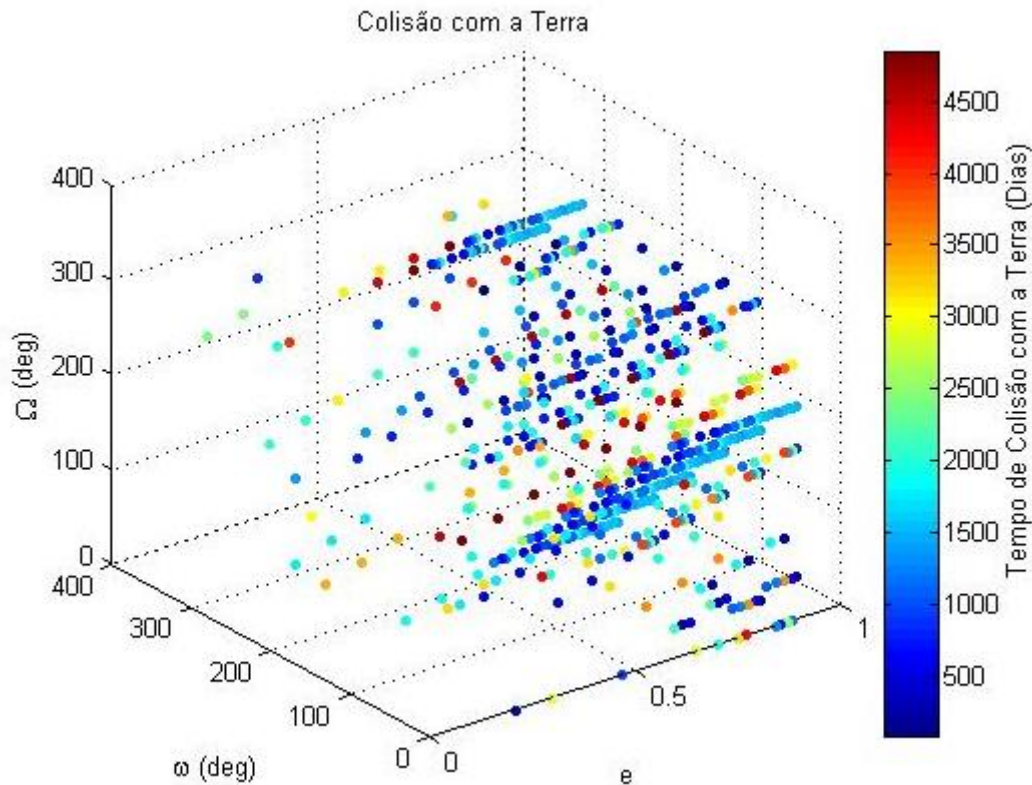


Figura 13: Colisão com a Terra, em função da e , Ω e ω

As missões da figura 13 são consideradas fracassadas, uma vez que saíram da órbita geoestacionária e reentraram na atmosfera, resultando em problemas, como os descritos em 2.4.

É possível notar que a grande maioria das trajetórias que colidiram com a terra possuíam excentricidade mais elevada. Dentre as 617 missões incluídas nessa categoria, apenas 3.4% dos casos tinham excentricidade menor que 0.5.

As cores do gráfico representam o tempo de missão associado a cada trajetória explorada. Em geral, as missões fracassaram ainda na faixa azul, abaixo de 2000 dias. 28.5% das missões falharam após esse período.

5.2.2 Escapes do Sistema Terra-Lua

No problema dinâmico de 6 corpos, estipula-se um C_j adequado, onde a partícula transita entre os reinos da Terra e da Lua pelo ponto Lagrangeano L1, porém não é capaz de escapar do sistema Terra-Lua. Contudo, essa estipulação serve apenas como um guia para determinar as condições iniciais mais apropriadas que serão evoluídas no tempo. Nesse caso, é importante ressaltar que C_j varia ao longo da evolução temporal e, portanto, escapes do sistema são possíveis.

As figuras 14, 15, 16 e 17, representam as missões que escaparam ao sistema antes do tempo limite de 5000 dias.

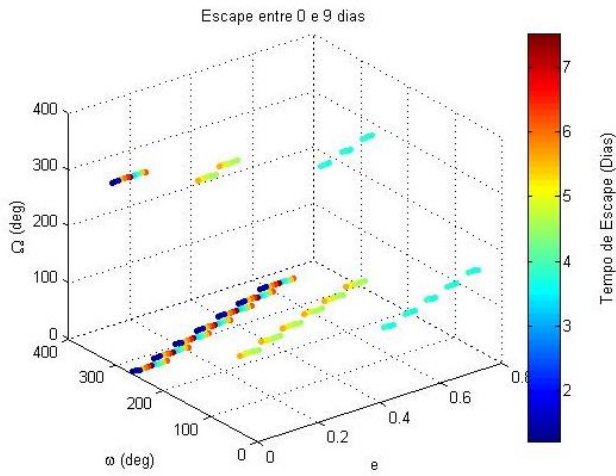


Figura 14: Escape entre 0 e 9 dias

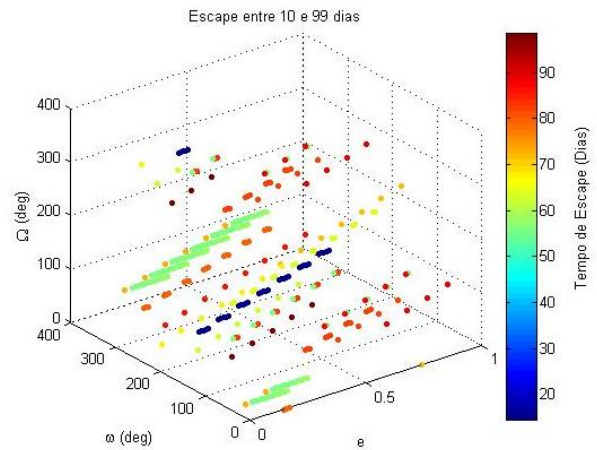


Figura 15: Escape entre 10 e 99 dias.

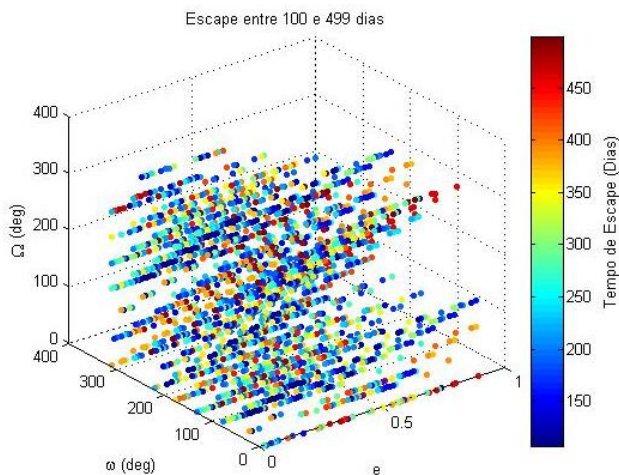


Figura 16: Escape entre 100 e 499 dias

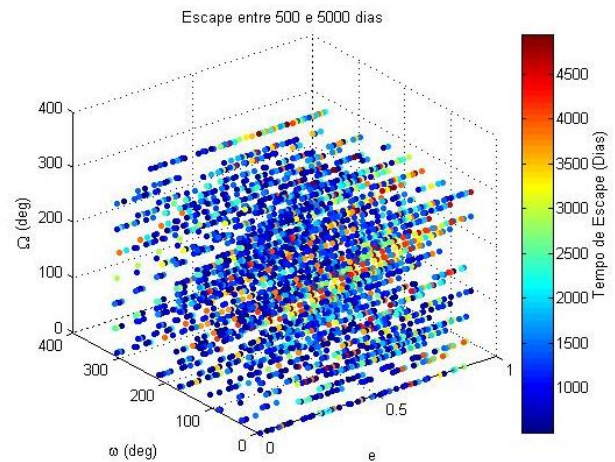
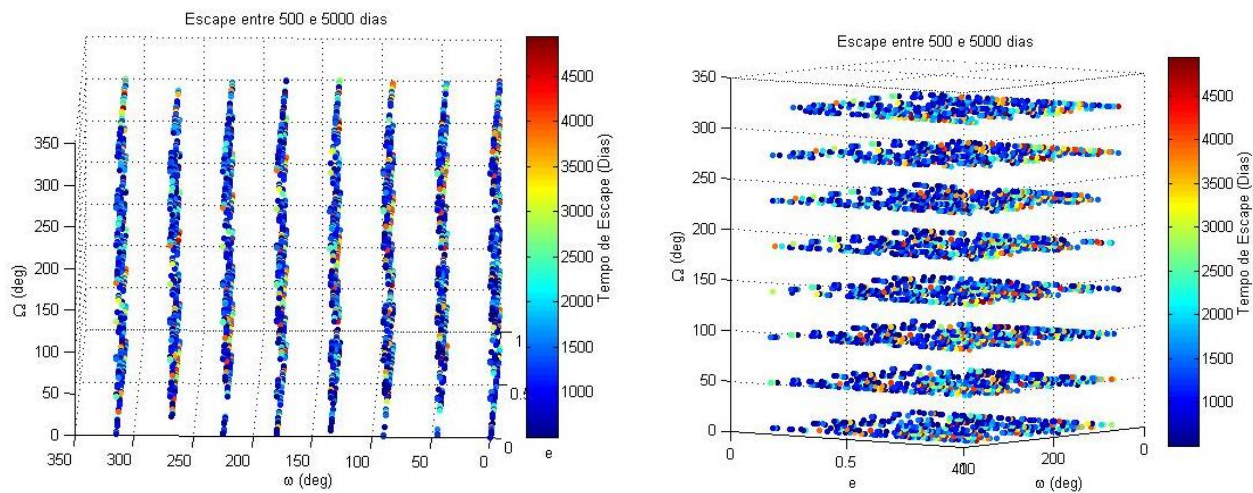


Figura 17: Escape entre 500 e 5000 dias

Nas figuras 14 e 15, é perceptível a relação entre Ω e ω quando consideramos o fator tempo. A adição de cores ao gráfico provoca o efeito escada, onde missões com o argumento do perigeu mais elevado e nodo ascendente mais baixo, escaparam na mesma faixa de tempo que missões com argumento do perigeu mais baixo e ascensão do nodo ascendente mais elevado.

Ao rotacionar o gráfico da figura 17, é possível perceber a clara natureza padronizada dos dados. Esse padrão é apenas uma resposta ao passo de variação proposto, de 45° , ao argumento do perigeu e ascensão reta do nodo ascendente e se aplica a todos os plots que respeitam a variação dos parâmetros orbitais descrita em 4.1. De qualquer forma, indica uma massiva quantidade de missões que falharam devido ao escape do sistema.



Figuras 18 e 19: Visão lateral - Escape entre 500 e 5000 dias

Das 7104 missões, 6049 resultaram em escape. Do número de fracassos nessa categoria, temos que, 51.34% escaparam após o dia 500, 38.46% entre 100 e 499 dias, 6.35% entre 10 e 99 dias e, por fim, 3.83% das missões escaparam entre 0 e 9 dias.

5.2.3 Trajetórias Estáveis

Caso a partícula não colida com a Lua, com a Terra ou escape do sistema, a evolução temporal é interrompida quando o tempo limite T_f de 5000 dias é atingido. Trajetórias com essas características são consideradas estáveis e a princípio, não são capazes de atingir o objetivo proposto.

As trajetórias que atingiram estabilidade podem ser vistas no gráfico da figura 20:

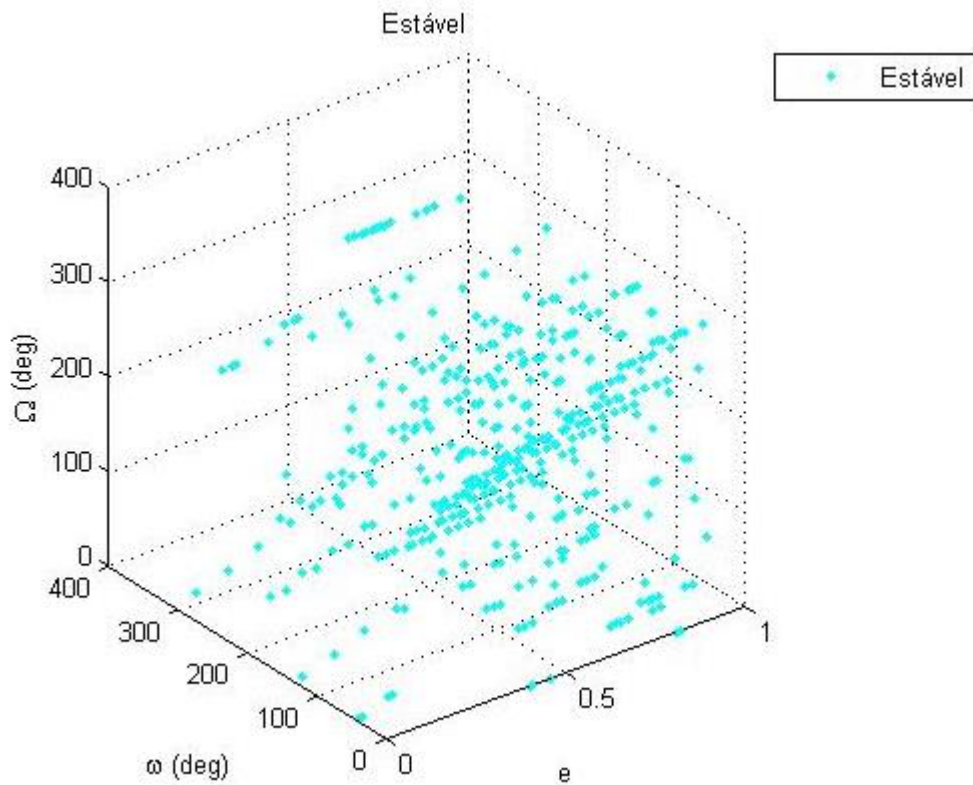


Figura 20: Trajetórias estáveis

De acordo com a definição feita em 4.1, as trajetórias estáveis são aquelas que atingiram o tempo limite de 5000 dias e não colidiram, tampouco escaparam do sistema.

Do total de condições iniciais evoluídas, 409 delas se tornaram trajetórias estáveis, onde 15.9% possuíam excentricidade abaixo de 0.5.

5.2.4 Colisões com a Lua

Diferente dos casos anteriores, as missões dessa seção atingiram o objetivo final, escapando da órbita terrestre e resultando em captura pelo campo gravitacional da Lua.

Na figura 21, podemos visualizar as missões que tiveram êxito e terminaram em colisão catastrófica com a superfície lunar.

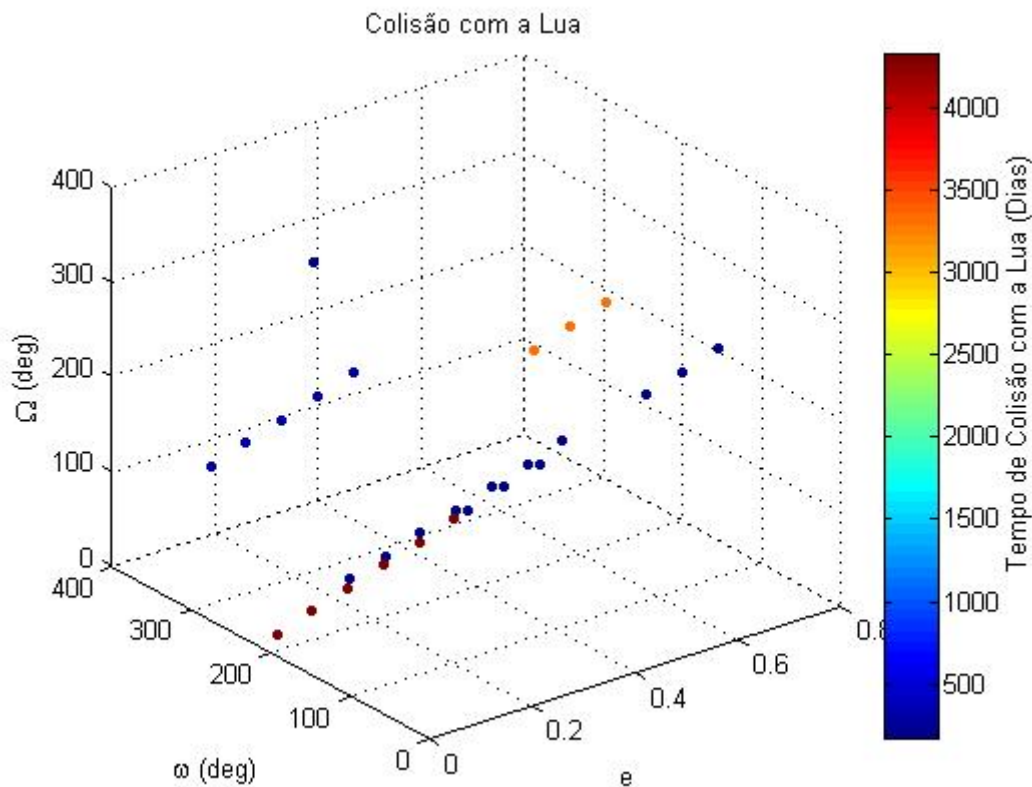


Figura 21: Trajetórias de colisão com a Lua

As trajetórias bem sucedidas, que partiram da órbita geoestacionária, transitaram pelo ponto Lagrangeano L1 e colidiram com a Lua levaram em média 1434.72 dias para concluírem a missão. É importante ressaltar que a captura do satélite pelo campo gravitacional lunar é considerada colisão.

Dentre todas as simulações, 0.39% das condições iniciais obtiveram êxito. Um total de 28 missões com resultado satisfatório.

O estudo desses casos de sucesso pode revelar a viabilidade econômica desse tipo de manobra. A manutenção da órbita geoestacionária de maneira sustentável é de fundamental importância, contudo, deve ser feita de forma eficiente. Manobras demasiadamente custosas inviabilizariam qualquer projeto semelhante, delegando a tarefa de limpeza da órbita GEO a outros métodos de mitigação.

5.3 Trajetória

Com as simulações devidamente caracterizadas como colisões com a Terra, escapes, estáveis e colisões com a Lua, podemos levantar os dados de

todas as missões bem sucedidas. A tabela a seguir apresenta os dados mais interessantes.

Trajetórias de Colisão com a Lua						
	a (Km)	e	i (rad)	Ω (rad)	ω (rad)	Colisão (dias)
1	383154	.05	.000	3.927	.000	4333
2	383154	.26	.000	4.712	.000	173
3	383154	.56	.000	5.498	.000	221
4	383154	.05	.000	3.142	.785	4333
5	383154	.26	.000	3.927	.785	173
6	383154	.56	.000	4.712	.785	221
7	383154	.05	.000	2.356	1.571	4333
8	383154	.26	.000	3.142	1.571	173
9	383154	.56	.000	3.927	1.571	221
10	383154	.05	.000	1.571	2.356	4333
11	383154	.26	.000	2.356	2.356	173
12	383154	.06	.000	5.498	2.356	307
13	383154	.05	.000	.785	3.142	4333
14	383154	.26	.000	1.571	3.142	173
15	383154	.06	.000	4.712	3.142	307
16	383154	.62	.000	4.712	3.142	3306
17	383154	.05	.000	.000	3.927	4333
18	383154	.26	.000	.785	3.927	173
19	383154	.56	.000	1.571	3.927	221
20	383154	.06	.000	3.927	3.927	307
21	383154	.62	.000	3.927	3.927	3306
22	383154	.26	.000	.000	4.712	173
23	383154	.56	.000	.785	4.712	221
24	383154	.06	.000	3.142	4.712	307
25	383154	.62	.000	3.142	4.712	3306
26	383154	.56	.000	.000	5.498	221
27	383154	.06	.000	2.356	5.498	307
28	383154	.26	.000	5.498	5.498	173

Tabela 2: Trajetórias de colisão com a Lua.

Selecionando uma dessas 28 missões, podemos analisar sua trajetória e consumo de propelente.

Para o presente trabalho, façamos a simulação da missão 4 para uma análise mais detalhada. Temos então como condições iniciais, $a = 383154$ Km, $e = 0.05$, $i = 0$, $\Omega = 3.142$ e $\omega = 0.785$.

5.3.1 Deslocamento da Partícula em Relação a Terra

Utilizando os dados da missão 4, temos a trajetória do deslocamento da partícula em relação à Terra, expressa em função do tempo nas figuras 22, 23, 24 e 25:

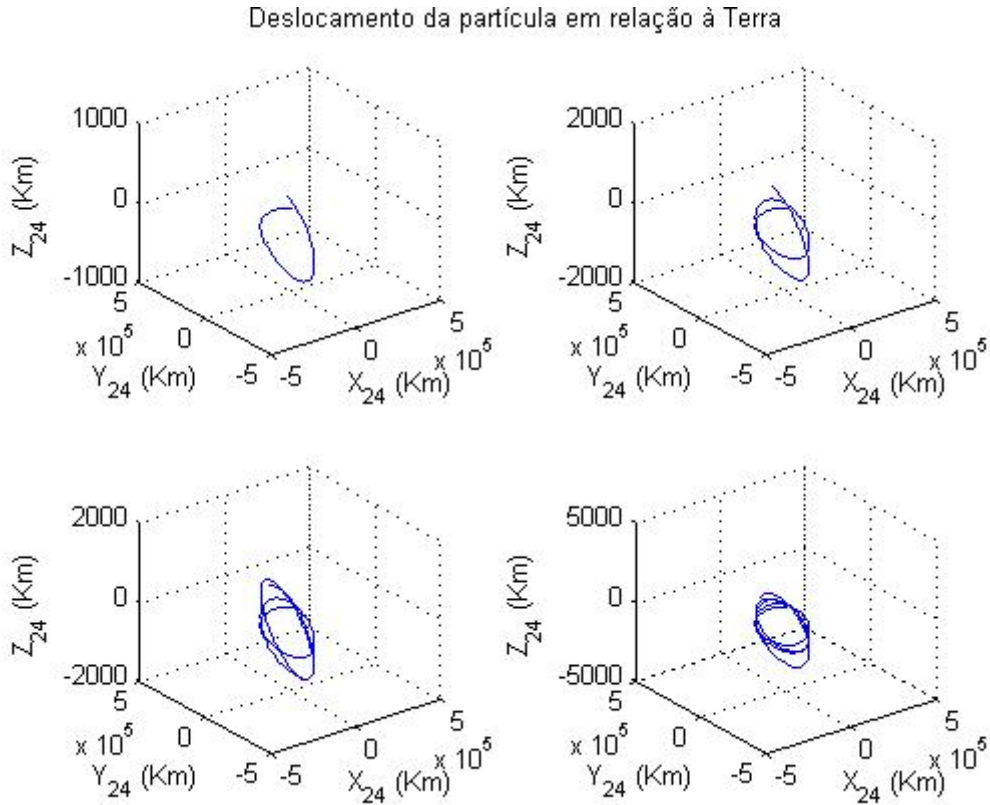


Figura 22: Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz, de 0 a 1249 dias.

Deslocamento da partícula em relação à Terra

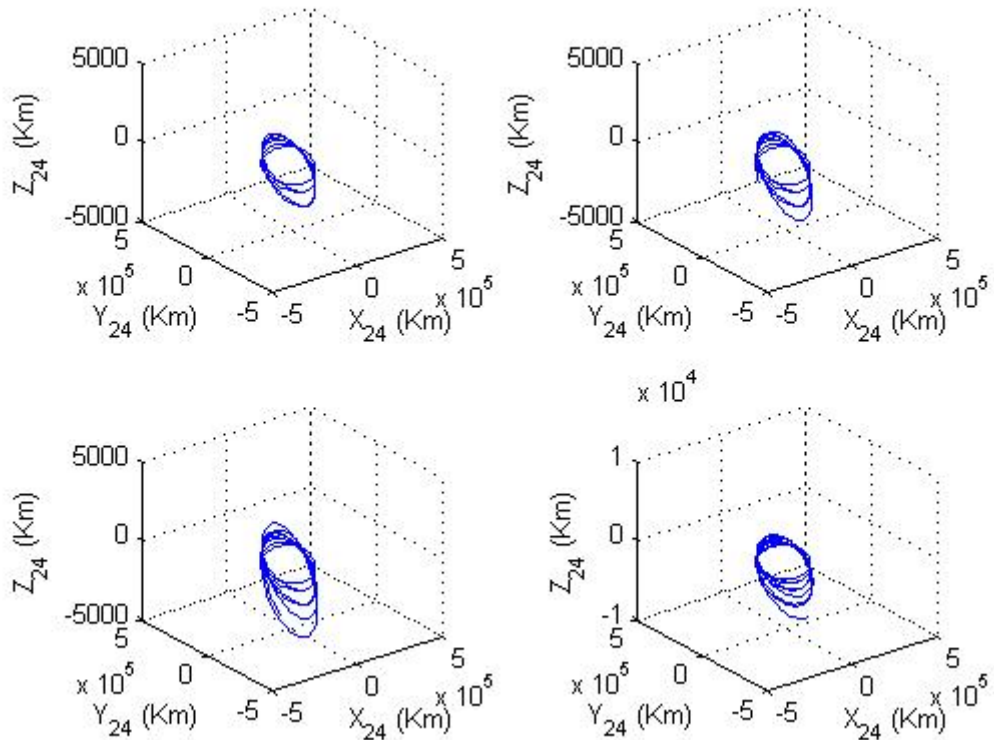


Figura 23: Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz , de 1250 a 2499 dias.

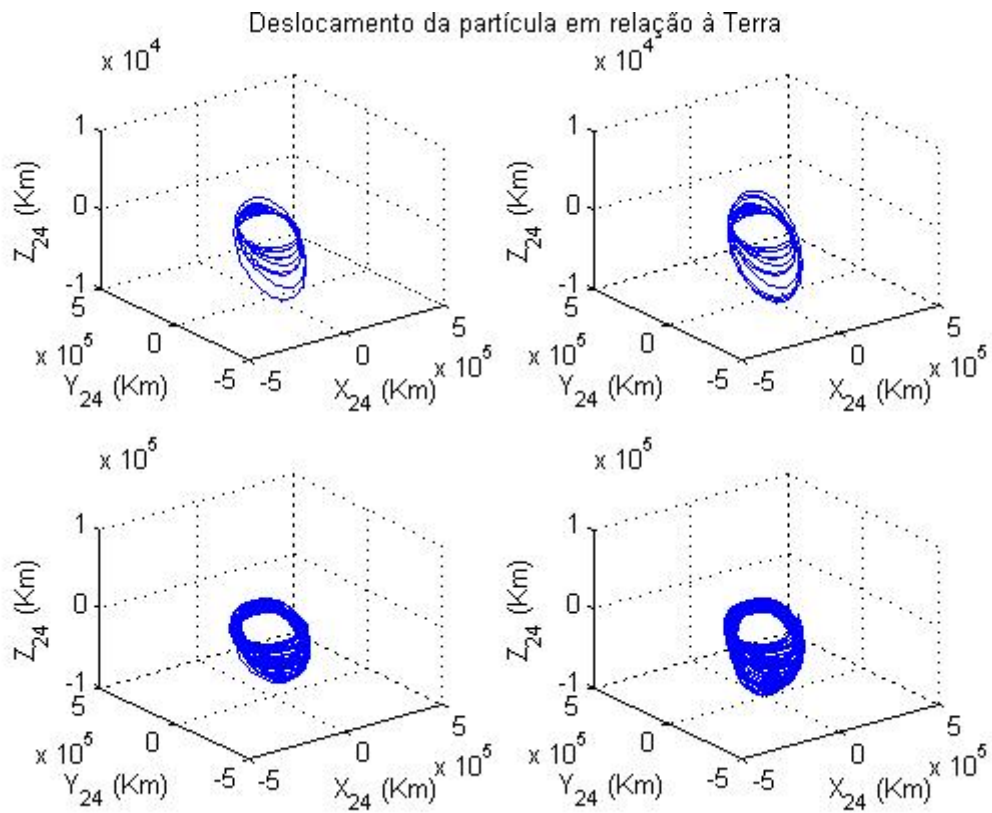


Figura 24: Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz , de 2500 a 3749 dias.

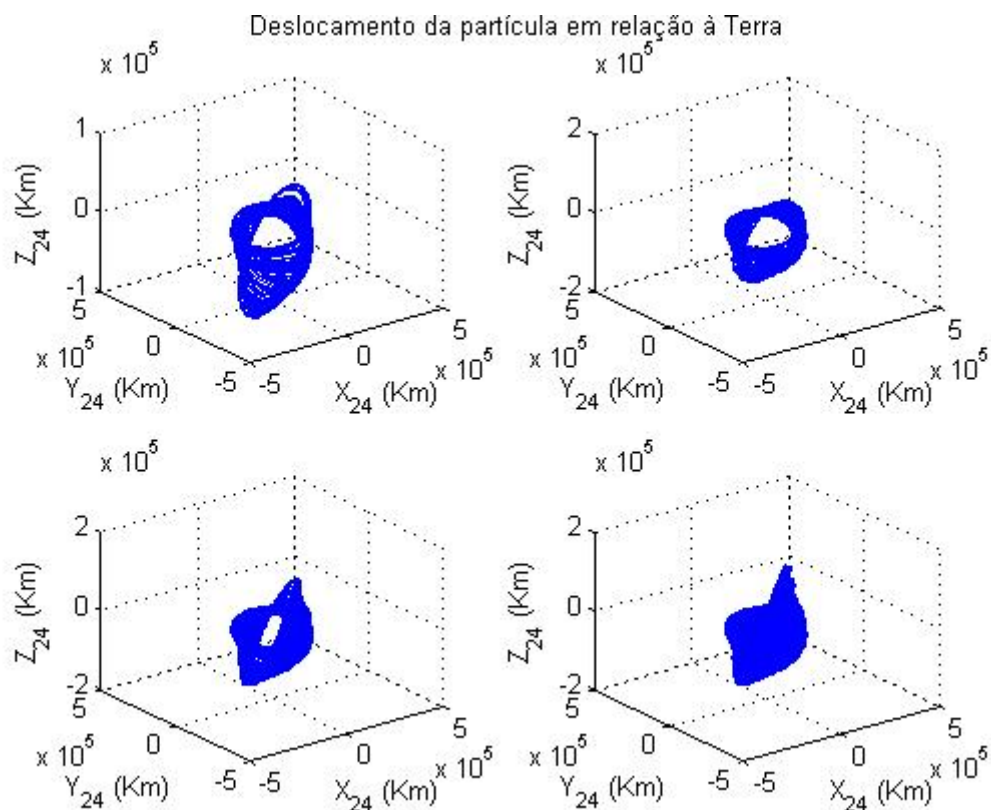


Figura 25: Deslocamento em relação a Terra, no plano xyz, de 3750 a 5000 dias

As projeções das trajetórias foram feitas no espaço de tempo de 5000 dias em integração prógrada, onde a Terra se encontra na origem do plano xyz.

5.3.2 Deslocamento da Partícula em Relação a Lua

Ainda utilizando os parâmetros orbitais da missão 4, temos nas figuras 26, 27, 28 e 29, a mesma simulação, contudo, o deslocamento da partícula apresentado é em relação ao nosso satélite natural.

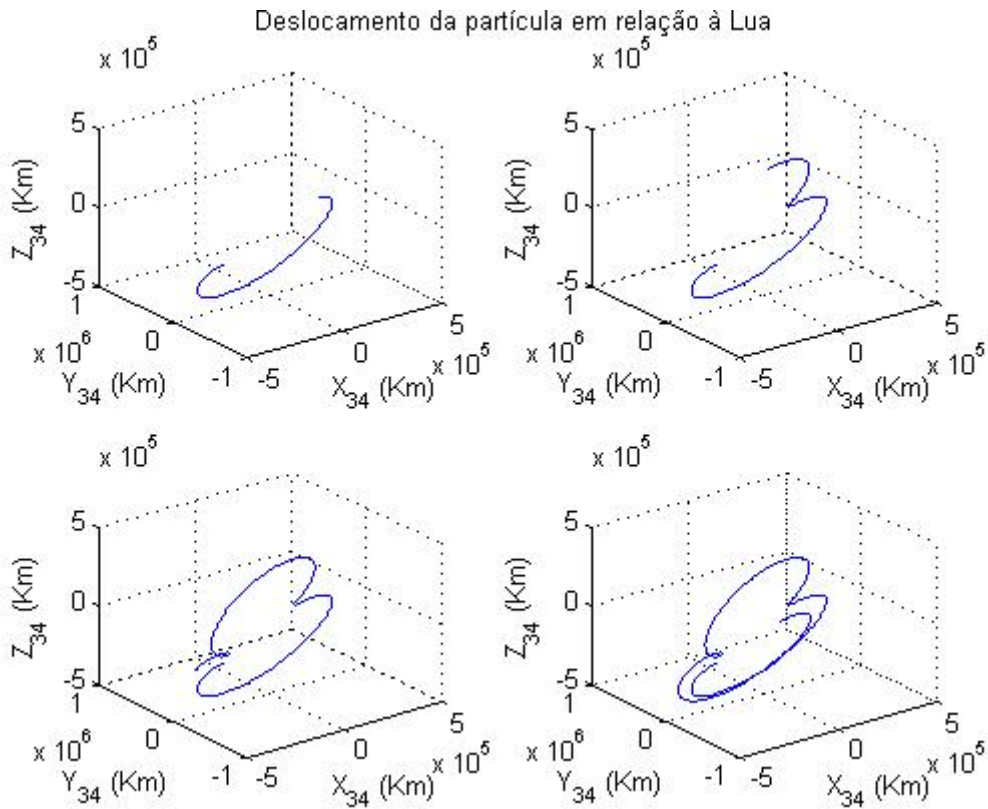


Figura 26: Deslocamento em relação a Lua, no plano xyz, de 0 a 1249 dias.

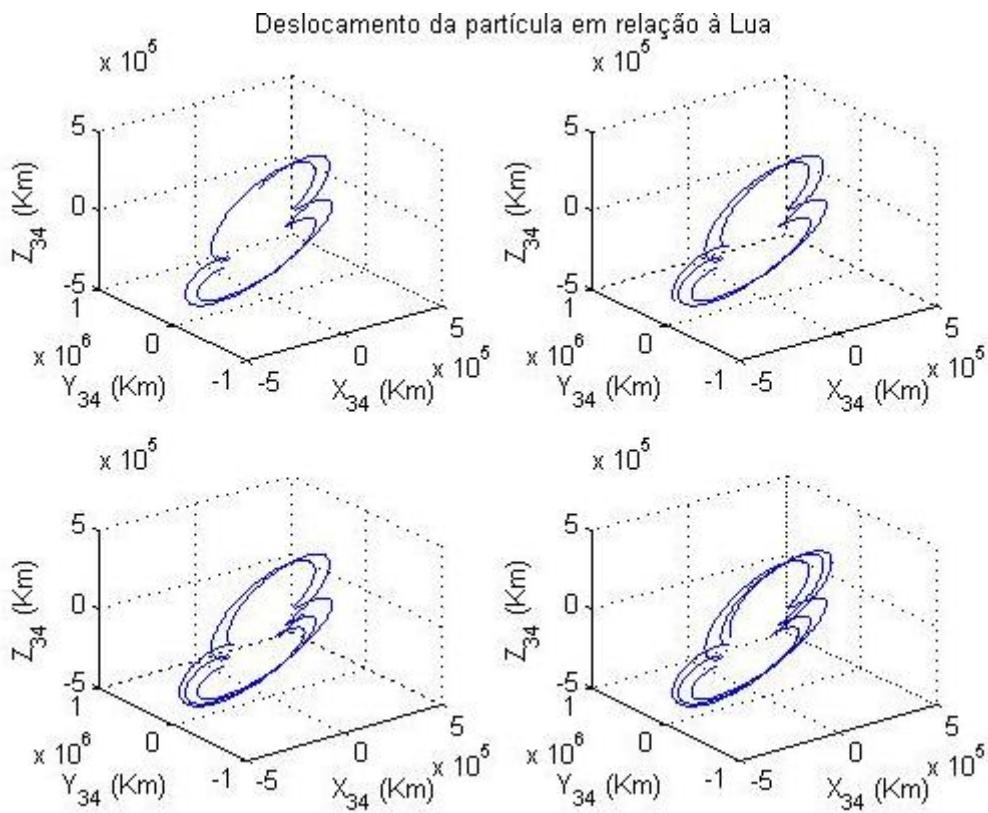


Figura 27: Deslocamento em relação a Lua, no plano xyz, de 1250 a 2499 dias.

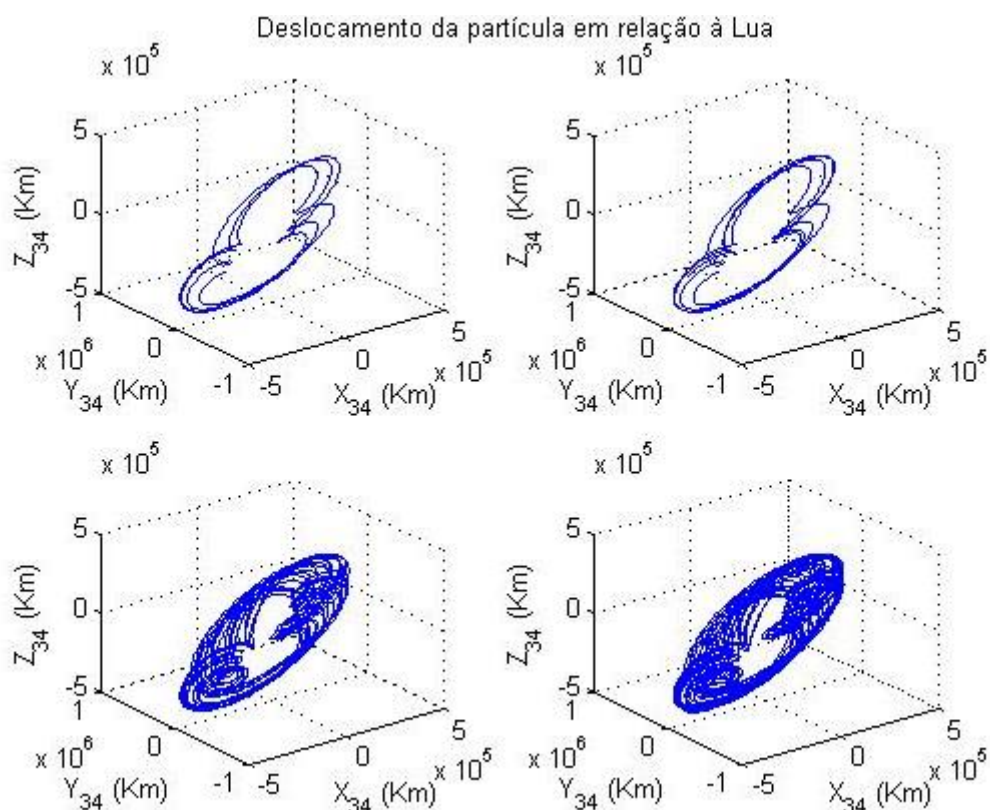


Figura 28: Deslocamento em relação a Lua, no plano xyz , de 2500 a 3749 dias.

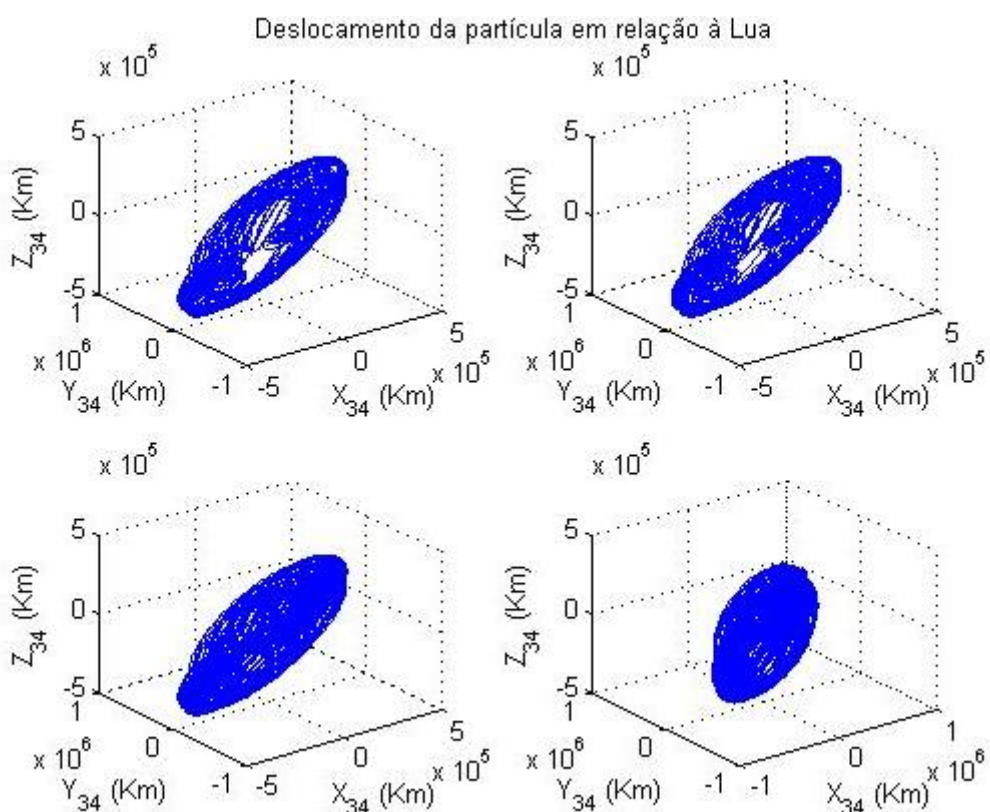


Figura 29: Deslocamento em relação a Lua, no plano xyz , de 3750 a 5000 dias.

A dinâmica natural da trajetória dita o movimento que cobre grandes distâncias. Influência direta do alto valor do semieixo maior proposto como condição inicial. Contudo, a partícula permanece prisioneira a todo momento e é incapaz de deixar o sistema.

5.3.3 Deslocamento da Partícula em Relação ao Baricentro Terra-Lua

Talvez a visão mais significativa é aquela em relação ao baricentro do sistema Terra-Lua. A simulação que se refere à missão 4 é mais uma vez representada, dessa vez no plano xy , e em relação ao baricentro do sistema. As figuras 30, 31, 32 e 33 mostram o deslocamento da partícula.

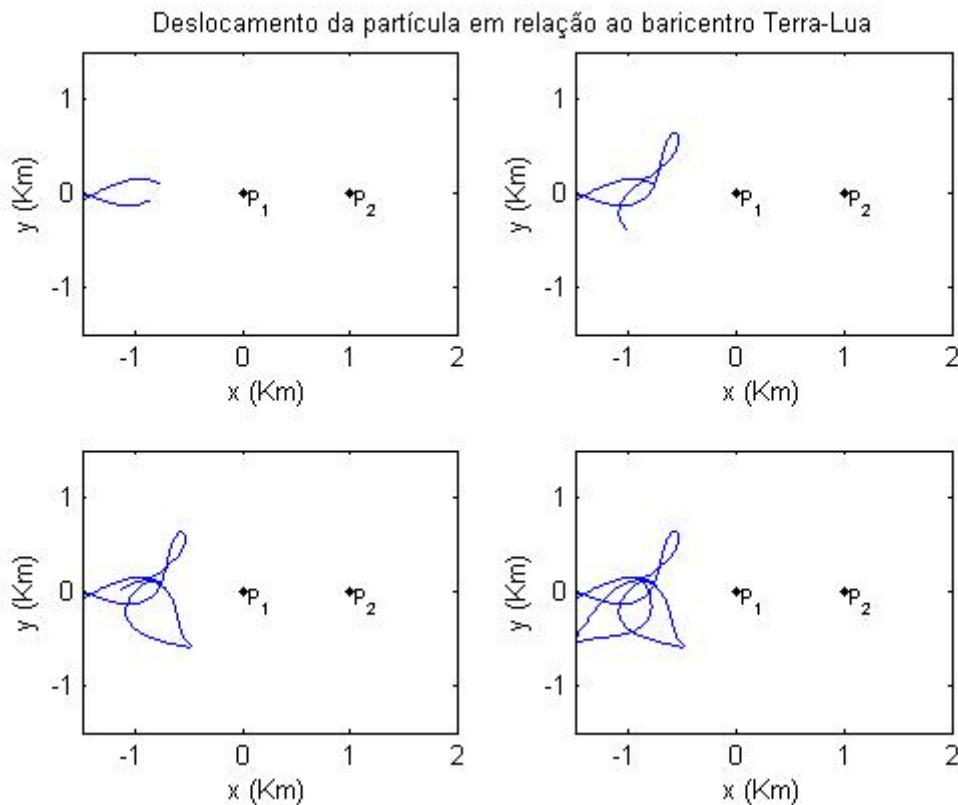


Figura 30: Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz , de 0 a 1249 dias.

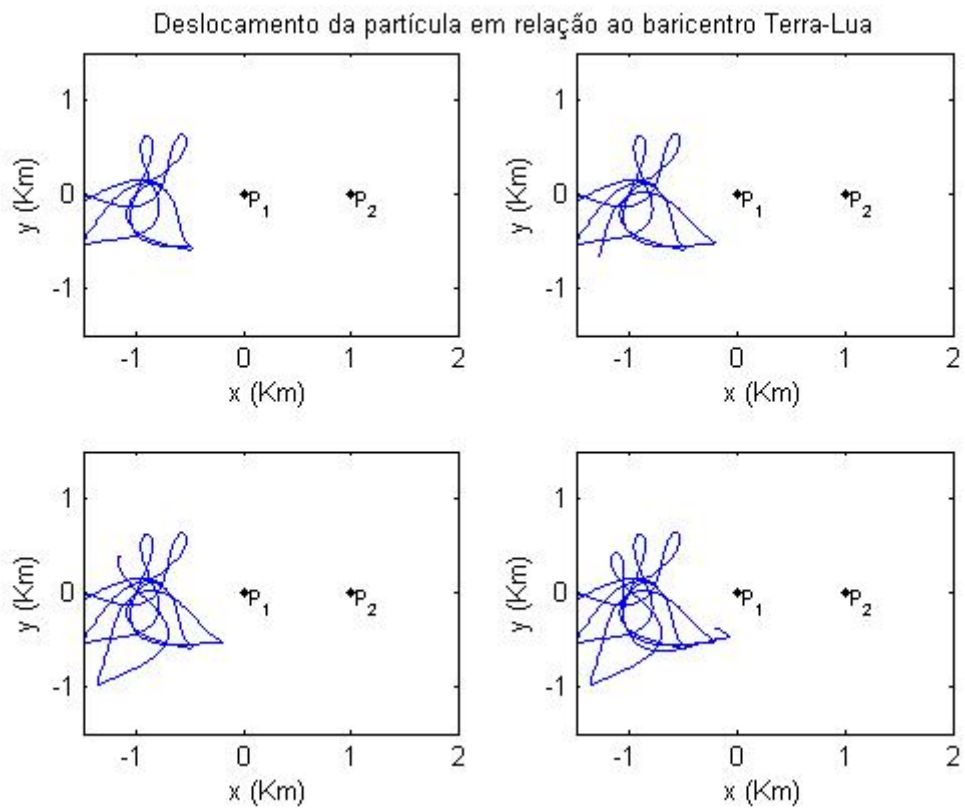


Figura 31: Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz , de 1250 a 2499 dias.

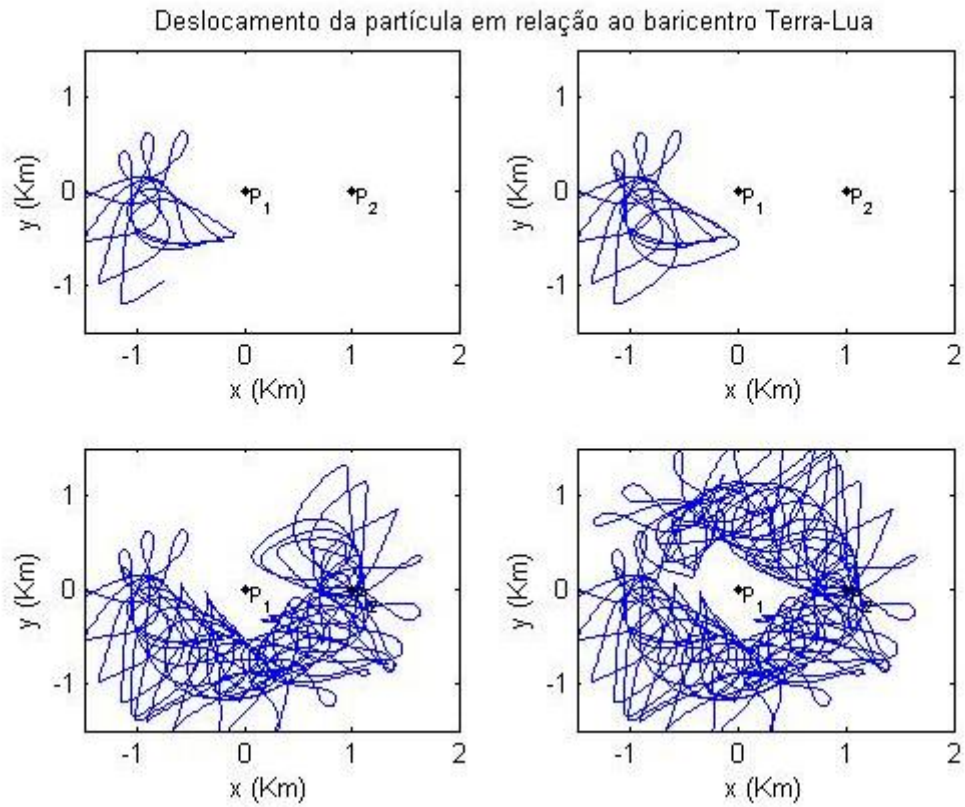


Figura 32: Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz, de 2500 a 3749 dias.

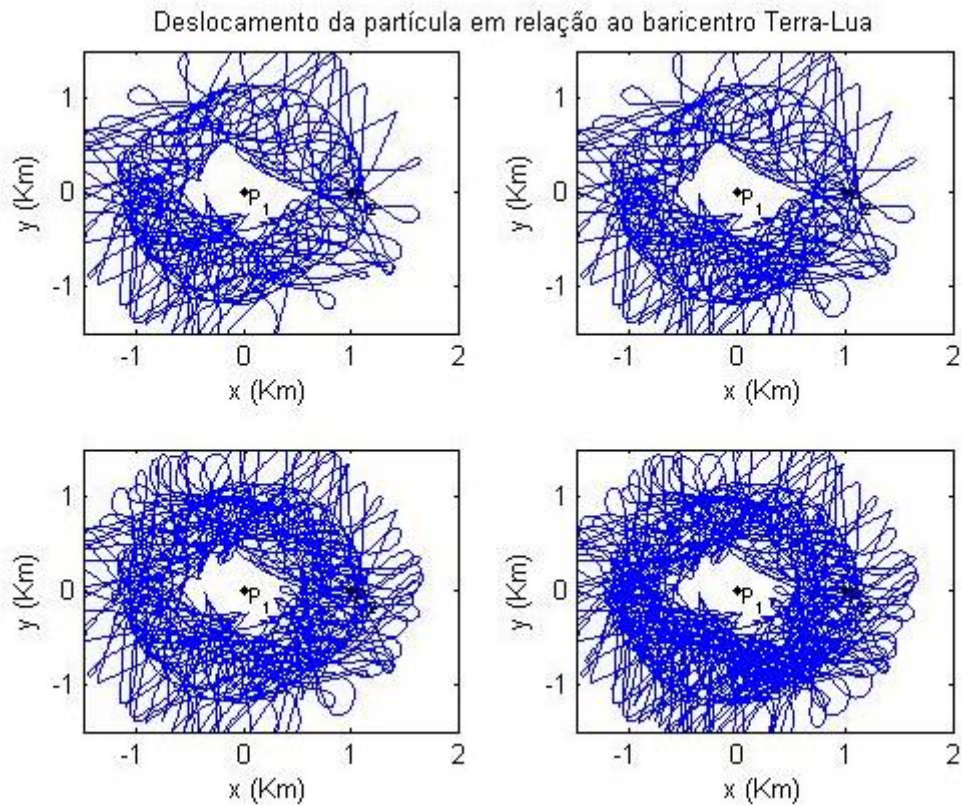


Figura 33: Deslocamento em relação ao baricentro Terra-Lua, no plano xyz, de 3750 a 5000 dias.

A progressão da missão 4 no referencial sinódico sob a perspectiva do baricentro do sistema Terra-Lua traz de maneira mais clara a interação da partícula com os dois corpos. A partir da figura 32c, já é possível ver a partícula orbitando as proximidades da Lua (p_2).

Com a evolução temporal, a partícula continua a revolução que engloba a Terra (p_1), mesmo após a aproximação visualizada em 32c, devido ao elevado valor do semieixo maior estipulado inicialmente.

Finalmente, a missão cumpre seu destino por volta do dia 4333 e invade em definitivo a esfera de influência gravitacional da Lua através do ponto Lagrangeano L_1 .

5.3.4 Parâmetros Orbitais

Os parâmetros orbitais variam de acordo com a evolução temporal. Nas figuras 34, 35 e 36, temos, respectivamente, a representação do semieixo maior, excentricidade e inclinação ao longo do tempo.

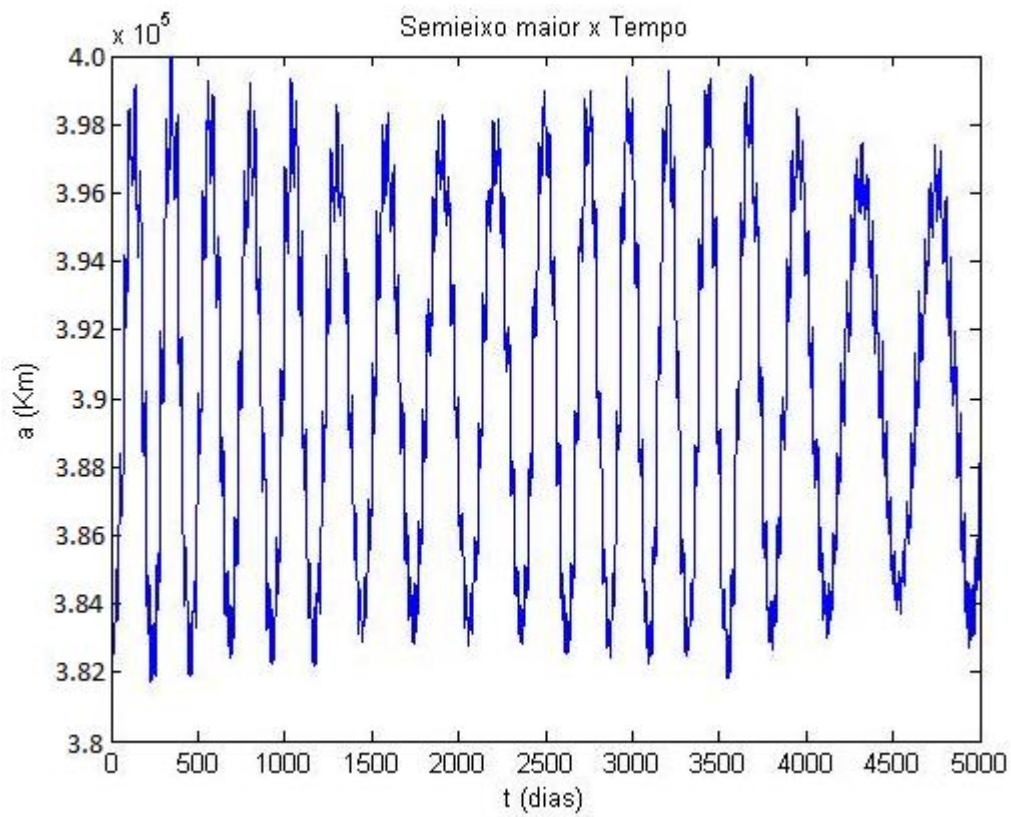


Figura 34: Variação do semieixo maior em função do tempo.

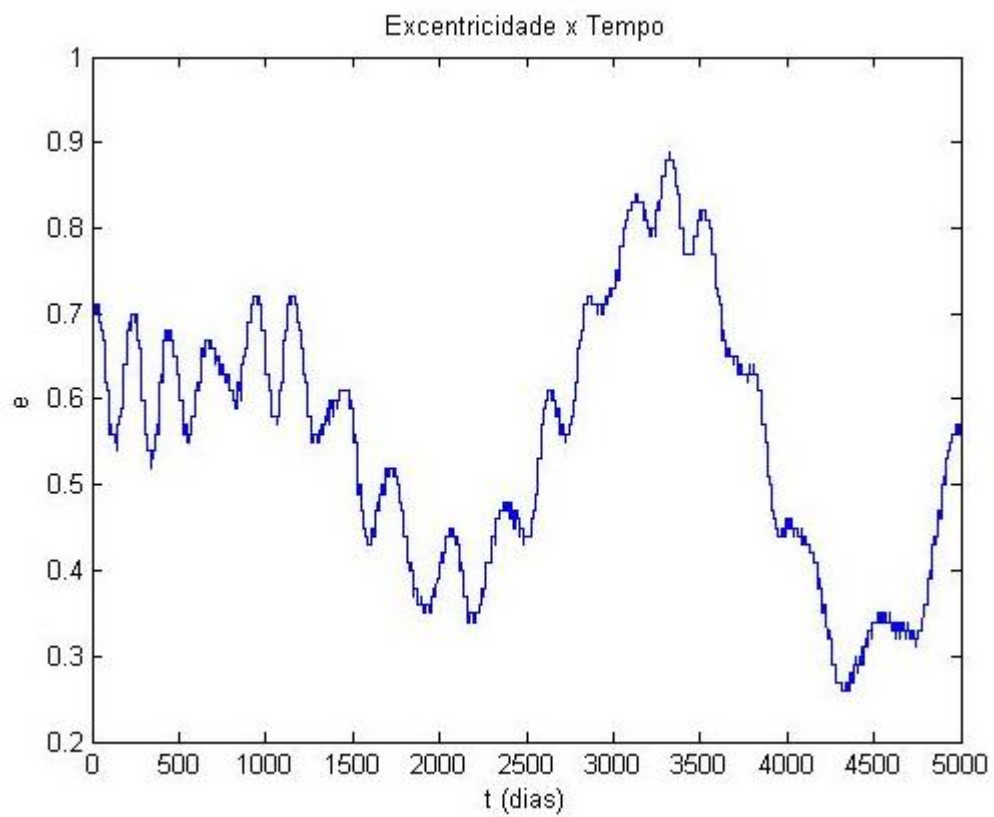


Figura 35: Variação da excentricidade em função do tempo.

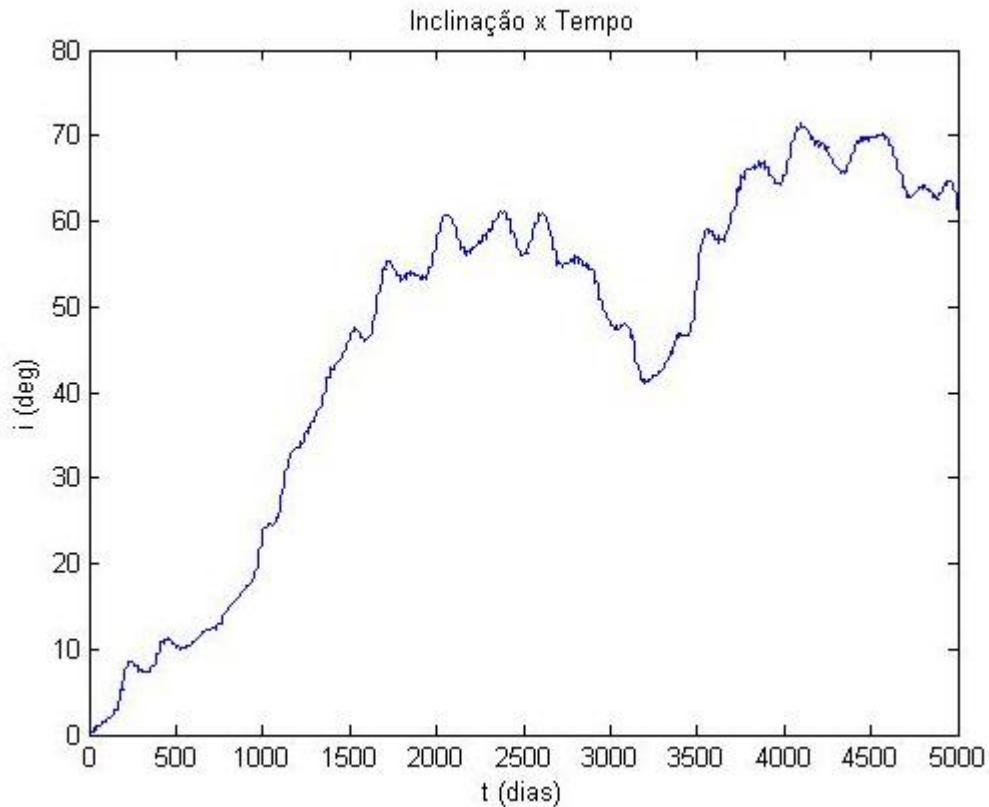


Figura 36: Variação da inclinação em função do tempo.

O ponto de captura realizado pelo campo gravitacional acontece por volta do dia 4333.

O semieixo maior varia de pouco menos de 382 mil até seu valor máximo de 400 mil quilômetros. Lembrando o valor inicial $a = 383154$ km e a distância média Terra-Lua de 384400 km, podemos notar uma oscilação de semieixo maior dentro do esperado.

As figuras 37, 38 e 39, trazem respectivamente, o semieixo maior, excentricidade e inclinação, dessa vez, todos em função do tempo de voo, que nada mais é que o tempo total transcorrido durante as manobras.

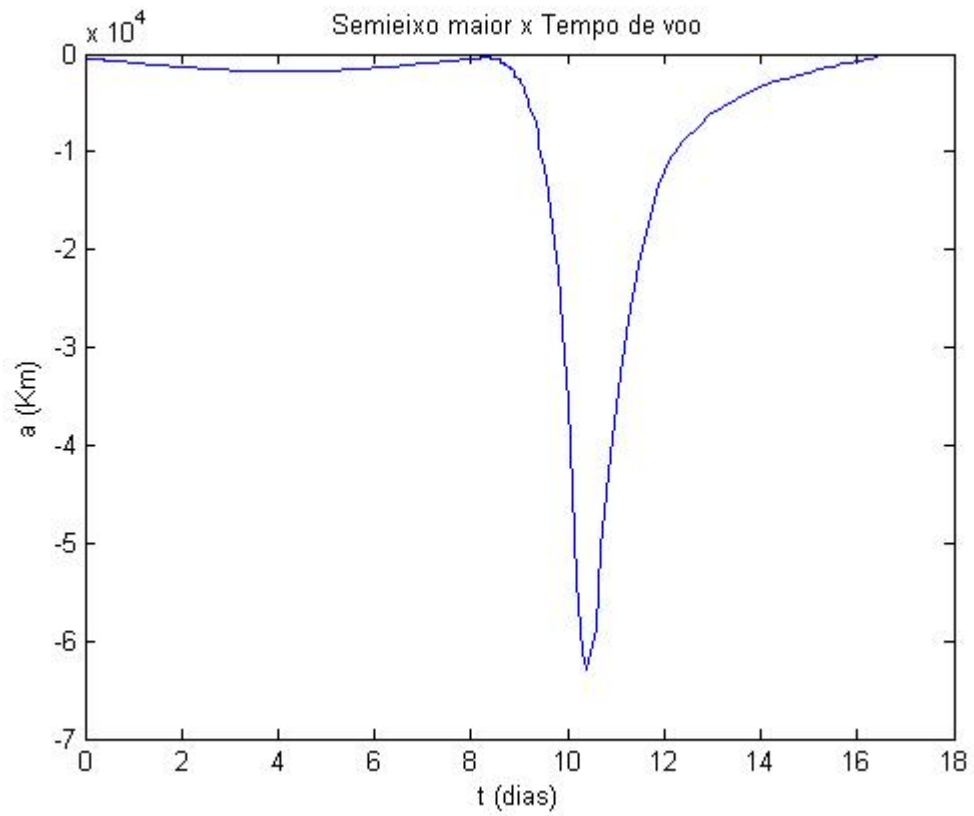


Figura 37: Variação do semieixo maior em função do tempo de voo.

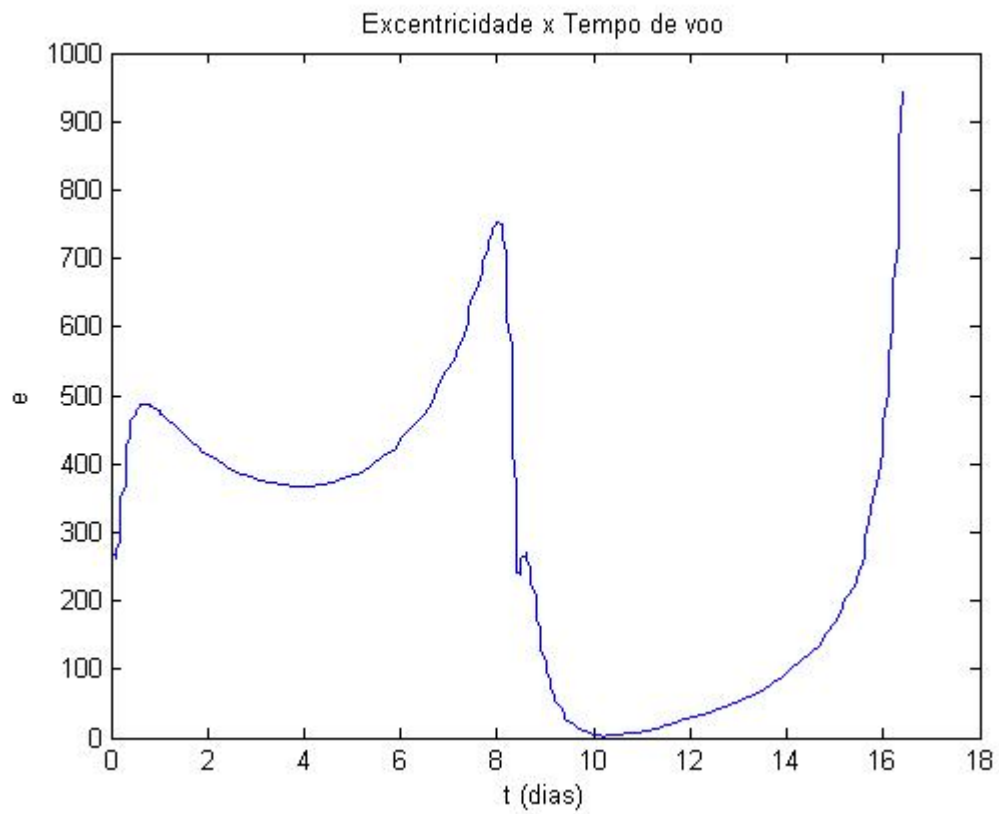


Figura 38: Variação da excentricidade em função do tempo de voo.

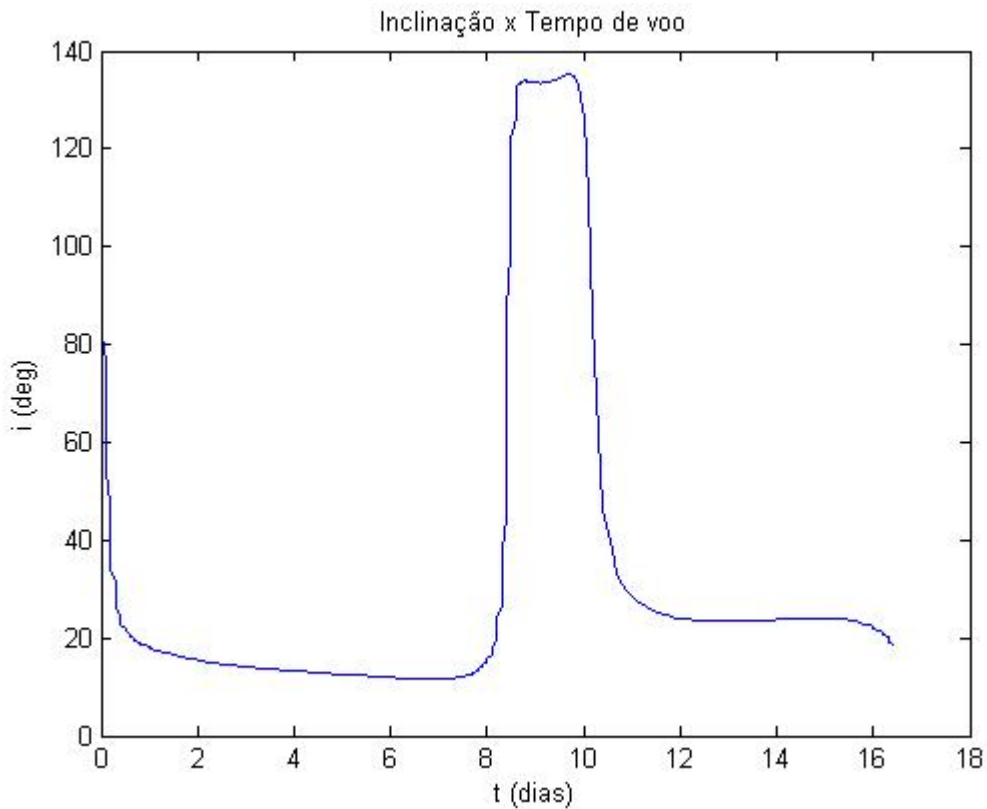


Figura 39: Variação da inclinação em função do tempo de voo.

Próximo ao décimo dia, os gráficos demonstram grande impacto nos parâmetros orbitais. O semieixo maior sofre queda brusca e se recupera em seguida, enquanto a excentricidade e inclinação sofrem a mesma queda entre 10 e 11 dias, porém antecedidas por um crescimento considerável a partir do oitavo dia.

5.4 Tempo de Voo

O tempo de voo é aquele transcorrido durante a manobra de transferência de Hohmann. O gráfico da figura 40 apresenta a duração da manobra em função do tempo. A barra de cores indica o ΔV necessário.

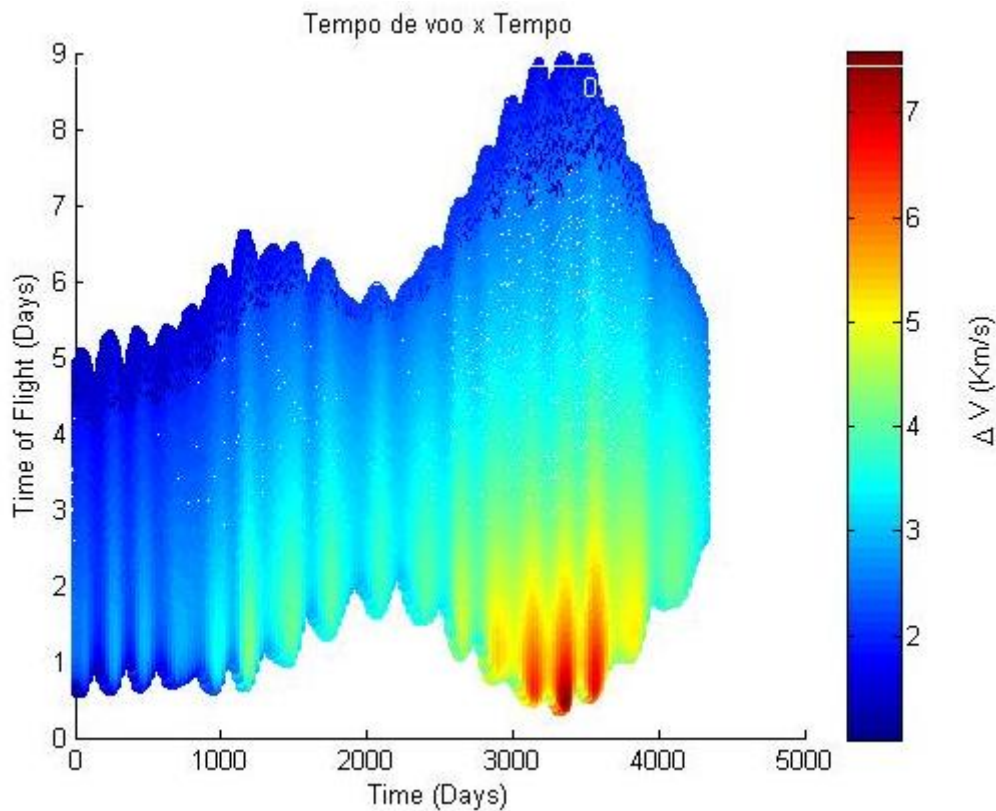


Figura 40: Tempo de voo em função do tempo

Por volta do dia 3330, existe um pico de alto consumo de propelente. Em termos de tempo de voo, esse gasto de propelente é justificável, uma vez que é possível perceber um tempo de voo inferior, quando comparada à região superior do gráfico. Durante a mesma faixa de tempo entre 3100 e 3400 dias, notamos a manobra sendo completada com ΔV inferior, contudo, com tempo de manobra chegando a 9 dias.

O gasto de propelente acentuado é justificável nesse cenário, porém, o tempo de voo é um parâmetro de pouco peso e o esforço deve ser concentrado em economia de recurso energético, enquanto que a duração da manobra possui menor prioridade. De qualquer forma, a representação que relaciona o ΔV necessário e o tempo de voo é válida e deve ser considerada no ranqueamento das missões.

5.5 Energia Característica C_3

Abaixo, temos a representação da energia característica C_3 , aqui chamada de coeficiente balístico.

Lembrando a energia orbital específica (Vis-Viva), entre dois corpos, proveniente da soma entre energia cinética e potencial, temos:

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (92)$$

A relação entre energia orbital específica, coeficiente balístico e a velocidade do corpo quando a distância tende ao infinito (velocidade hiperbólica de excesso V_∞), pode ser vista abaixo:

$$V_\infty = 2\epsilon = C_3 = -\frac{\mu}{a} \quad (93')$$

Como mencionado anteriormente, o sinal negativo indica uma órbita fechada, ao passo que, um valor positivo para C_3 aponta para uma trajetória hiperbólica [3][22].

O gráfico da figura 41 apresenta os valores do coeficiente balístico ao longo do tempo.

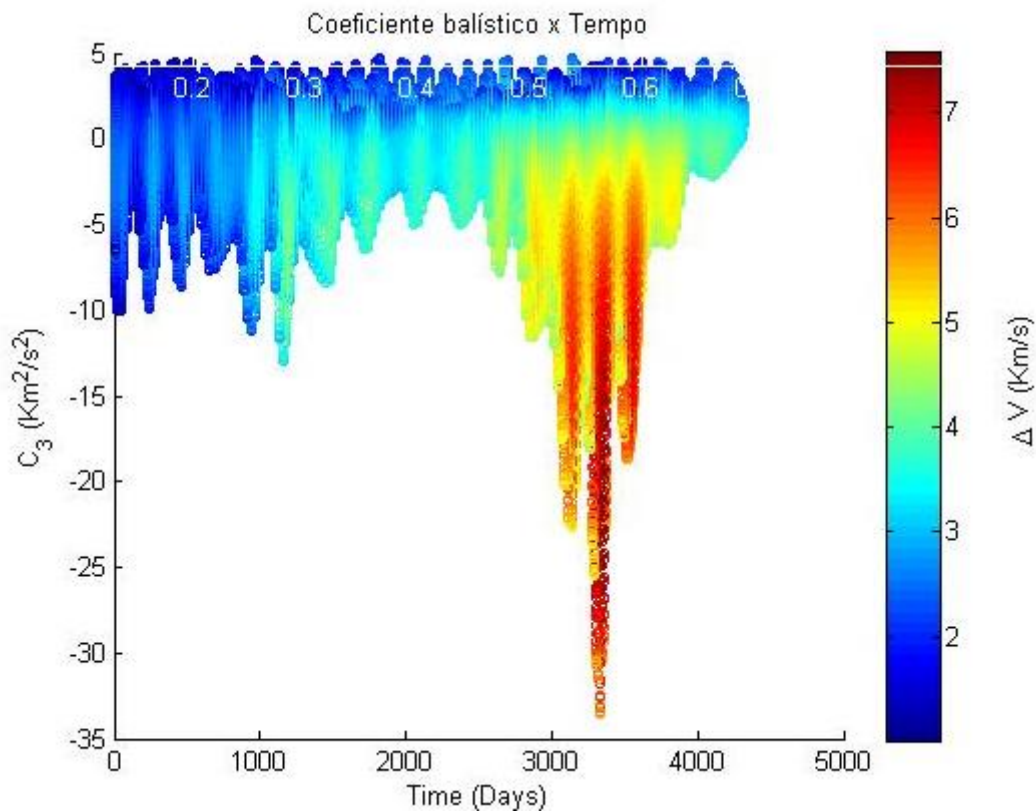


Figura 41: Coeficiente balístico em função do tempo

A captura realizada pelo campo gravitacional da Lua será considerada mais robusta quando o valor de C_3 for menor possível. Em caso da missão se aproximar da superfície lunar, porém não colidir, um valor de C_3 baixo permite a colisão após pequenas manobras subsequentes.

Assim como no tempo de voo, a faixa próxima a 3330 dias indica maior consumo de combustível, e o valor de $-33.5 \text{ Km}^2/\text{s}^2$ para C_3 é fator importante para uma captura mais eficaz. Contudo, deve-se ponderar o gasto excessivo de propelente. Assim sendo, o coeficiente balístico é mais um parâmetro para definir a qualidade da missão.

5.6 ΔV Necessário

O ΔV total, necessário para deixar a órbita geoestacionária e atingir as condições iniciais da missão 4, é calculado nessa seção e apresentado no gráfico da figura 42.

Para cada instante de tempo, durante a evolução temporal da trajetória, a transferência de Hohmann tri-impulsiva é calculada. Dessa forma, é possível determinar o momento mais vantajoso para a execução da manobra. O ΔV total, apresentado no gráfico, é a soma dos três impulsos requeridos.

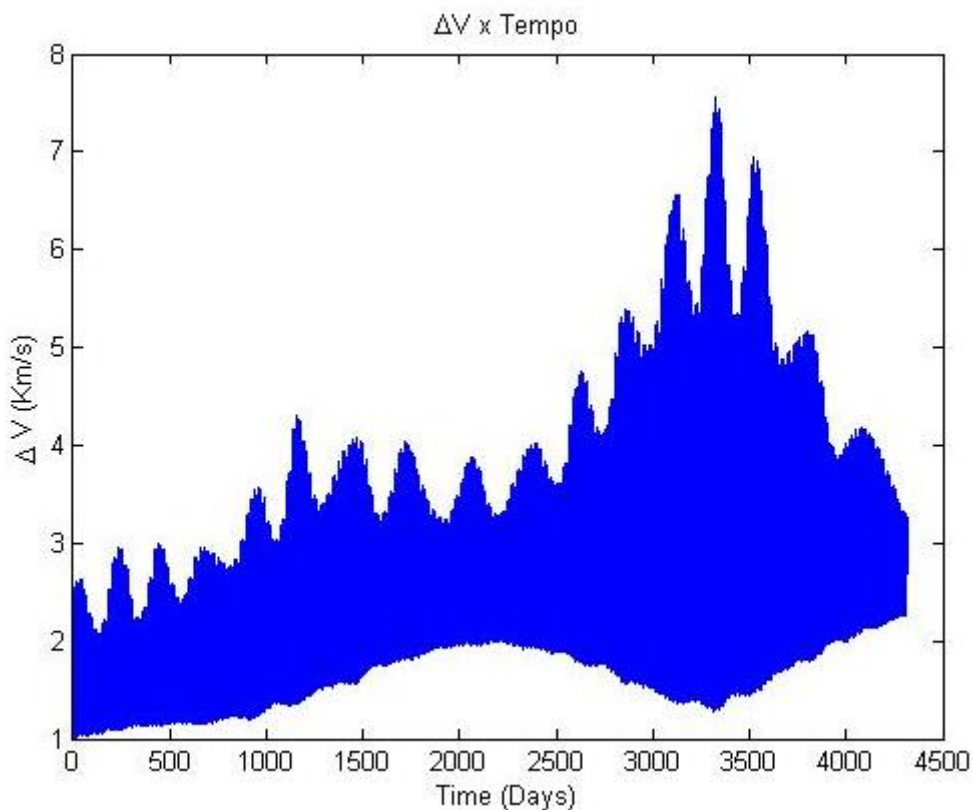


Figura 42: ΔV necessário em função do tempo

Considerando que é desejável uma manobra completa com o menor consumo de propelente possível, a transferência deve ser realizada no ponto do gráfico onde ΔV é mínimo.

Em $t = 0$, o ΔV necessário para a manobra completa é de 1,02 Km/s. Nesse instante de tempo, a inclinação é zero e, portanto, é esperado um ΔV mais baixo, uma vez que a mudança de plano é altamente custosa, quando comparada com a mudança de semieixo maior ou excentricidade.

Os picos de consumo entre os dias de 2750 e 3850 podem ser explicados pela variação mais acentuada da inclinação na mesma faixa temporal.

5.7 Consumo

A trajetória da missão 4 é agora analisada do ponto de vista do consumo de propelente em função do tempo. O gráfico $\Delta m/m_i$, figura 43, é baseado na teoria de Tsiolkovsky e aponta a porcentagem mássica de combustível requerido para a manobra. A massa inicial considerada é de 5635 Kg.

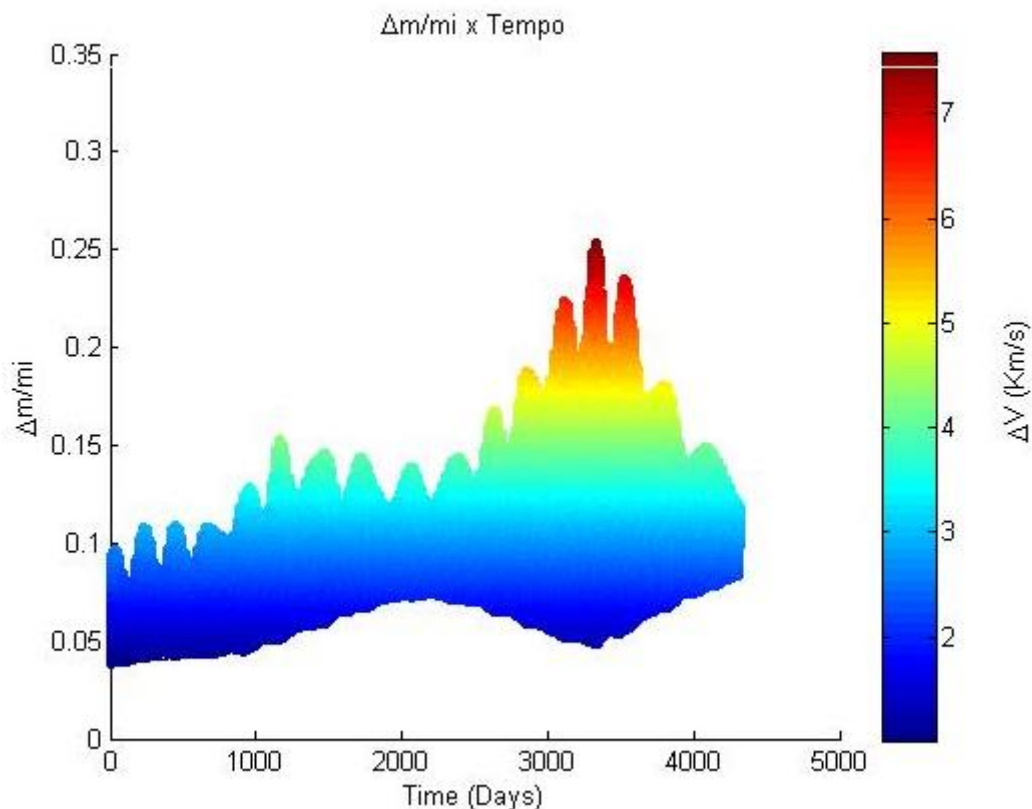


Figura 43: $\Delta m/m_i$ em função do tempo

Como já mencionado anteriormente, o custo da manobra é de fundamental importância e deve se enquadrar dentro dos limites aceitáveis do mundo em que vivemos. Pelo gráfico da figura 43, podemos notar valores de $\Delta m/m_i$ na faixa de 4% do valor da massa inicial. Sendo assim, ao chegar ao final de sua vida operacional, o satélite em que se permite realizar a manobra descrita aqui, deve reter ao menos, os mesmos 4% de massa de propelente frente a sua massa total, para que seja descartado na Lua.

Nos moldes atuais, suponhamos um satélite, que não possui um plano de mitigação, que vive operacionalmente até o fim completo de seu recurso energético e cumpre todo seu ciclo de aproximadamente 15 anos. Após esse período, é deixado à deriva, na órbita geoestacionária.

Considerando também, que a manobra de mitigação via colisão lunar, possa de fato ser realizada com aproximadamente 4% de massa de propelente e é aplicável ao nosso caso hipotético, podemos intuir então que, a vida útil do satélite em questão seria reduzida em 4%. Assim sendo, caso o método mitigatório de colisão lunar fosse devidamente planejado antes do lançamento, o satélite iniciaria sua manobra de mitigação com 14 anos, 4 meses e 24 dias de uso. Perderia 7 meses e 6 dias de sua vida operacional.

6. Conclusão

O objetivo desse trabalho foi estudar trajetórias de colisão entre satélites geoestacionários e a superfície da Lua, usando o ponto Lagrangeano L1, e o consumo de propelente envolvido, com o intuito de promover a mitigação de space debris em órbita.

Fizemos uma revisão teórica da integral de Jacobi e dos pontos Lagrangeanos. Ambos fornecendo entendimento sobre trajetórias de escape no sistema Terra e Lua.

Ainda nesse documento, a revisão do problema de N-corpos, o problema circular restrito de três corpos, transferência orbital de Hohmann e transferência para mudança de plano, nos fornecem o equacionamento para o cálculo numérico realizado para análise de rotas de colisão entre satélites GEO e a Lua, promovendo a sustentabilidade do meio ambiente espacial.

A breve passagem pelos elementos keplerianos, leis de Kepler e a equação de foguete de Tsiolkovsky nos ajudam a embasar a teoria para um melhor entendimento das manobras realizadas.

Dessa forma, o presente trabalho visa estudar esse método mitigatório que tem como principal vantagem a completa remoção do satélite na região próxima da terra, evitando assim os problemas da reentrada incontrolada devido à instabilidade da órbita cemitério e colisão entre satélites ou partícula-satélite.

A partir dos resultados encontrados aqui, temos que para manobras de colisão com a Lua, um ΔV de aproximadamente 1.02 Km/s é requerido. Considerando o gasto na ordem de 4% da massa total inicial do satélite, temos uma queima de 225.4 Kg de propelente. Para um satélite com expectativa de vida de 15 anos, essa queima de recurso energético representa uma redução de 7.2 meses na sua vida operacional.

Estima-se que um satélite geoestacionário custe entre 150 a 500 milhões de dólares. Fazendo uma média simples desse valor e ainda considerando uma expectativa operacional de 15 anos, o valor diário para esse tipo de satélite gira em torno de 59360 dólares. Nesse caso, uma redução de 7.2 meses de missão, ou seja, o valor aproximado para execução da manobra estudada, seria por volta de 12.8 milhões de dólares.

É importante ressaltar que as atividades dentro da indústria aeroespacial possuem valores monetários grandiosos e perder 7.2 meses da vida operacional de um satélite geoestacionário não é algo economicamente negligenciável. Contudo, o preço a se pagar pode ser considerado pequeno frente ao custo total da missão e o benefício direcionado a sustentabilidade da órbita. O dispêndio fica ainda menor quando lembramos que outras técnicas de mitigação, como a

transferência para órbita cemitério, já são aplicadas atualmente e do gasto crescente em manobras evasivas e rastreamento de detritos.

Nesse trabalho, manobras que não colidiram com a Lua são rotuladas como fracassos, entretanto, aquelas que escaparam do sistema de forma definitiva, ou se estabilizaram nos pontos lagrangeanos L4/L5 podem facilmente ser consideradas missões de sucesso quando visamos o objetivo final, uma vez que, a princípio, não representam risco algum à rede de satélites. Estudos mais aprofundados devem ser analisados para determinar as características dessas missões.

Outros estudos devem ser realizados a título de comparação, como por exemplo, diferentes conjuntos de condições iniciais na colisão com a Lua e manobras semelhantes, porém direcionadas ao Sol. Transferências de demais naturezas, como bi-elíptica e bi-parabólica também devem ser comparadas.

Além disso, outros métodos de mitigação estão sendo cada vez mais relevantes e devem ser considerados como mais um comparativo. O intuito é sempre atingirmos o melhor gerenciamento possível do ambiente espacial, uma vez que a órbita terrestre é um recurso finito e essencial.

Futuros projetos em solo lunar, como a extração de Hélio 3 e o impacto ambiental causado pelo descarte de satélites devem ser estudados em paralelo, para definir a usabilidade da colisão lunar a termos de médio e longo prazo. É importante ressaltar que esse método limpa a órbita geoestacionária, porém contribui para a poluição de nosso satélite natural.

Assim como qualquer outro problema ambiental, apenas nos resta questionar: até que ponto a humanidade está disposta a seguir rumo à prosperidade desconsiderando as consequências? Felizmente, há pessoas preocupadas com essas questões, e no que tange à detritos espaciais, organizações sérias estão envolvidas. Contudo, medidas devem ser tomadas de forma mais energética contra o desmatamento das florestas, poluição da atmosfera, degradação das órbitas e tantos outros subprodutos intrínsecos ao progresso humano. O uso dos recursos naturais deste planeta será um divisor de águas no futuro próximo, portanto, a balança entre crescimento econômico e consciência ambiental deve ser repensada para que o futuro seja ainda mais próspero e saudável.

7. Bibliografia

- [1] BROUCKE, R. **Traveling Between the Lagrange Points and the Moon**. The University of Texas. v. 2, n. 4, 1979.
- [2] CARRARA, Valdemir. **Aerodinâmica de Satélites Artificiais**. Divisão de Mecânica Espacial e Controle, IMPE/DMC, São José dos Campos, SP.
- [3] CURTIS, H. D. **Orbital Mechanics for Engineering Students**. 2 Edition ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2009.
- [4] COLOMBO, Camila, et al. **End-of-Life Disposal Concepts for Libration Point and Highly Elliptical Orbit Missions**, 08 de jul. de 2014.
- [5] DE MELO, C. **Trajatórias Alternativas no Sistema Terra-Lua**, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2006.
- [6] FÉJOZ, Jacques. **The N-body problem**. Université Paris-Dauphine & Observatoire de Paris. P. 03 - 08
- [7] **Frequently asked questions**. European Space Agency. Disponível em: <https://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/FAQ_Frequently_asked_questions>. Acesso em: 06 de out. de 2019.
- [8] **Johannes Kepler: His Life, His Laws and Times**. National Aeronautics and Space Administration. Disponível em: <<https://www.nasa.gov/kepler/education/johannes>>. Acesso em: 15 de maio de 2021.
- [9] JOHNSON. Nicholas L. **Activities on Space Debris in U.S.**, Orbital Debris Program Office, NASA.
- [10] KAKOI, Masaki. **Transfers Between the Earth-Moon and Sun-Earth Systems Using Manifolds and Transit Orbits**, Purdue University, 2005.
- [11] **Kepler's Second Law**. Goddard Space Flight Center, NASA, 7 de abr. de 2014. Disponível em: <<https://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Skepl2nd.htm>>. Acesso em: 15 de maio de 2021
- [12] KESSLER, D. J.; COUR-PALAIS, B. G. **Collision frequency of artificial satellites - The creation of a debris belt**. Journal of Geophysical Research, v. 83, n. A6, p. 2637–2646, 1978.
- [13] KESSLER, D. J. et al. **The Kessler Syndrome: Implications to Future Space Operations**. 1978.
- [14] KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. **LOW ENERGY TRANSFER TO THE MOON**. JPL-Caltech, Pasadena, California, U.S.A.

[15] LYRA, Wladimir. **Dinâmica de sistemas planetários**. Rio de Janeiro, maio de 2014.

[16] **Mitigation Scenarios: Graveyard Orbit 300 km Above GEO**. European Space Agency, 2008. Disponível em: <http://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2008/03/Mitigation_scenarios_Graveyard_orbit_300_km_above_GEO>. Acesso em: 11 de jun. 2020.

[17] MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[18] OLTROGGE, Dan. **The Commercial Space Operations Center**. ITU Satellite Communication Symposium 2017, Argentina, 30 de maio. de 2017.

[19] PRADO, Antônio F. B. Almeida. **Orbital Maneuvers Between the Lagrangian Points and the Primaries in the Earth-Sun System**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, vol 28. Rio de Janeiro, 2006.

[20] SILVA, C. N. P. **Investigação Numérica das Possibilidades de Escape de Trajetórias de Detritos Espaciais Utilizando os Pontos Lagrangianos**. Universidade Federal do ABC, abr. de 2016.

[21] SILVA, William. **Mitigação de Detritos**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 10 de abr. de 2016.

[22] SILVA, William; TERRA, Maisa; CELESTINO, Claudia; MELO, Cristiano. **Dynamics and Mission Design for Space Debris Mitigation in the Geostationary Orbits**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica; Universidade Federal do ABC; Universidade Federal de Minas Gerais. 21 de jun. de 2017.

[23] SILVA, William; TERRA, Maisa; CELESTINO, Claudia; MELO, Cristiano. **Extending Geostationary Orbit Missions for Lunar Observations**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica; Universidade Federal do ABC; Universidade Federal de Minas Gerais.

[24] SILVA, William; TERRA, Maisa; CELESTINO, Claudia; MELO, Cristiano. **Mitigação de detritos espaciais, escape pelos pontos Lagrangianos**, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 13 de abr. de 2017.

[25] **Space Debris by the Numbers**. European Space Agency, 2019. Disponível em:<https://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/Space_debris_by_the_numbers>. Acesso em: 05 de out. 2019.

[26] **The Cost of Space Debris.** European Space Agency, 2020. Disponível em: <http://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris/The_cost_of_space_debris>. Acesso em: 11 de jun. 2020.

[27] UNITED NATION. **Space Debris Mitigation Guidelines of the Committee on the Peaceful Uses of Outer Space.** Vienna, 2010.

[28] **We can't go back to life without satellites.** SatCom Frontier, INTELSAT General, 22 de julho, 2016. Disponível em: <<https://www.intelsatgeneral.com/blog/we-cant-go-back-to-life-without-satellites/>>. Acesso em: 02 de out. de 2019.

[29] WEEDEN, Brian. **2007 Chinese Anti-Satellite Test.** Secure World Foundation, 23 de nov. de 2010.

[30] WEEDEN, Brian. **2009 Iridium-Cosmos Collision.** Secure World Foundation, 10 de nov. de 2010.

[31] **What are Lagrange Points?** European Space Agency. Disponível em: <https://www.esa.int/Enabling_Support/Operations/What_are_Lagrange_points>. Acesso em: 22 de nov. de 2019.

[32] **Where Do Old Satellites Go When They Die?** National Aeronautics and Space Administration, 28 de jun. de 2019. Disponível em: <<https://spaceplace.nasa.gov/spacecraft-graveyard/en/>>. Acesso em: 10 de out. de 2019.