



Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Aeroespacial

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE TRANSFERÊNCIA TERRA-LUA

Autor: Nicholas De Capdeville
Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva
Coorientador: Prof. Dr. Giancarlo Santilli

Brasília, DF
2021



Nicholas De Capdeville

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE TRANSFERÊNCIA TERRA-LUA

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Aeroespacial) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Aeroespacial).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Coorientador: Prof. Dr. Giancarlo Santilli

Brasília, DF

2021

Nicholas De Capdeville

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE TRANSFERÊNCIA
TERRA-LUA/ Nicholas De Capdeville. – Brasília, DF, 2021-
101 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2021.

1. hohmann transfer. 2. weak stability boundary transfer. I. Prof. Dr. William
Reis Silva. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. ANÁLISE
COMPARATIVA DE MÉTODOS DE TRANSFERÊNCIA TERRA-LUA

CDU 02:141:005.6

Nicholas De Capdeville

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE TRANSFERÊNCIA TERRA-LUA

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Aeroespacial) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Aeroespacial).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 24 de Maio de 2021:

Prof. Dr. William Reis Silva
Orientador

Prof. Dr. Giancarlo Santilli
Coorientador

Prof. Dr. Renato Alves Borges
Convidado

Brasília, DF
2021

Este trabalho é dedicado à minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por guiar e iluminar o meu caminho. Aos meus pais, Guy de Capdeville e Solange de Figueiredo Salermo Capdeville, que sempre estiveram ao meu lado me apoiando em todas as decisões tomadas na minha vida e que nunca duvidaram de mim. À minha irmã, Anne de Capdeville que sempre me ajudou e esteve presente nos momentos difíceis. Ao meu orientador, Professor Doutor William Reis Silva e coorientador, Professor Doutor Giancarlo Santilli, por, além de serem excelentes professores e terem criado uma excelente percepção da área que quero seguir futuramente, estiveram sempre dispostos a ajudar em qualquer problema que aparecesse ao longo do caminho. Por fim, aos meus colegas de curso Carlos Eduardo Palhares Pettengill e Antonino Salustiano Martins, por estarem comigo em todas as dificuldades durante o curso e, juntos, termos conseguido seguir em frente.

*"Tão logo alguém descubra a arte de voar, não faltarão humanos vivendo na Lua e em
Júpiter".
(Johannes Kepler)*

Resumo

Este trabalho tem por objetivo fazer uma análise comparativa entre dois dos métodos mais utilizados ao se fazer uma transferência Terra-Lua. A transferência de Hohmann, abraçada pelo método das *patched conics* e a transferência de alto impulso específico e baixo empuxo representada pelo modelo de n-corpos serão apresentadas de maneira direta e com embasamento matemático para que uma comparação de eficiência e eficácia possa ser feita. Inicialmente é estudada a interação entre dois corpos regida pela Lei da Gravitação Universal de Newton e as manobras orbitais mais eficientes envolvidas neste modelo. Explora-se as transferências interplanetárias envolvendo janelas de oportunidade, esferas de influência e o método das *patched conics*. Subsequentemente, apresenta-se o problema restrito de três corpos e suas derivações, como a constante de Jacobi e os pontos de Lagrange, para então caracterizar as transferências de baixo empuxo utilizando captura gravitacional por meio de variedades invariantes e *weak stability boundaries* e, dessa maneira, obter uma comparação com embasamento científico e confiabilidade entre os métodos apresentados por meio de simulações feitas com o software STK - Astrogator.

Palavras-chave: transferência Terra-Lua. problema restrito de três corpos. transferência de baixo empuxo. transferência de Hohmann. *weak stability boundary*.

Abstract

This work aims to make a comparative analysis between two of the most used methods when making an Earth to Moon transfer. The Hohmann transfer, embraced by the patched conics method, and the low thrust and high specific impulse transfer, represented by the n-body model, will be presented in a direct manner with mathematical support so that a comparison of efficiency and effectiveness can be done. Initially, the interaction between two bodies, based on Newton's Law of Universal Gravitation and the most efficient orbital maneuvers involved in this model are studied. Interplanetary transfers involving windows of opportunity, spheres of influence and the patched conics method are explored. Subsequently, the restricted three-body problem and its derivations, such as the Jacobi constant and Lagrange points are presented, to then characterize the low-thrust transfers with ballistic capture using invariant manifolds and weak stability boundaries and to obtain a scientific based and reliable comparison between both methods through simulations with the software STK - Astrogator.

Key-words: Earth-to-Moon transfer. restricted three-body problem. low thrust transfer. Hohmann transfer. weak stability boundary.

Lista de ilustrações

Figura 1 – <i>Lunar Lander</i> - Apollo 11. (GARBER, 2007)	20
Figura 2 – Perfil da Missão GRAIL. (NASA, 2011)	21
Figura 3 – Transferência de Hohmann. (CURTIS, 2014)	24
Figura 4 – Transferência de Hohmann Bi-elíptica. (CURTIS, 2014)	26
Figura 5 – Relação de eficiência entre as manobras de Hohmann e Bi elíptica. (CURTIS, 2014)	28
Figura 6 – Variação da força gravitacional de um planeta em comparação à dis- tância da sua superfície. (CURTIS, 2014)	29
Figura 7 – Três regiões das <i>patched conics</i> . (FAA, 2018)	31
Figura 8 – Geometria da fase geocêntrica. (FERNANDES, 2012)	33
Figura 9 – Geometria da fase selenocêntrica. (FERNANDES, 2012)	34
Figura 10 – Configuração do PR3C. (CURTIS, 2014)	39
Figura 11 – Disposição dos dois pontos lagrangianos Sol-Terra mais próximos EL_1 , EL_2 e dos cinco Terra-Lua LL_1 - LL_5 . (PARKER, 2013)	44
Figura 12 – Posição dos Pontos de Lagrange no sistema Terra-Lua. (CURTIS, 2014)	45
Figura 13 – Regiões proibidas (cinza) e regiões permitidas (branco) para valores diferentes da constante de Jacobi [km^2/s^2]. (CURTIS, 2014)	47
Figura 14 – Transferências de baixo empuxo com captura gravitacional no sistema girante Sol-Terra vista de cima da eclíptica . (PARKER, 2014)	48
Figura 15 – Variedades invariantes da órbita <i>Lyapunov</i> em torno do ponto de La- grange L_1 . Em vermelho, variedade instável e em azul, variedade está- vel. (BELBRUNO; GIDEA; TOPPUTO, 2010)	51
Figura 16 – À esquerda, variedades de duas órbitas <i>Lyapunov</i> integradas à superfície de seção Σ . À direita, um mapa de Poincaré mostra a passagem de uma W^U para uma W^S . A interseção dessas curvas representa conexões heteroclínicas. (DAVIS RODNEY L. ANDERSON; BORN, 2010)	52
Figura 17 – Projeção no plano da eclíptica de uma transferência de baixo empuxo com captura gravitacional. (BELBRUNO; MILLER, 1993)	53
Figura 18 – Os ângulos α , θ , φ , definem a direção de propagação da trajetória em relação à Terra no tempo $t = 0$. Em $t = 0$ o eixo x aponta na direção da linha Terra-Sol e β é o ângulo entre o eixo x e a linha Terra-Lua. (BELBRUNO; MILLER, 1993)	56
Figura 19 – Estimativa da distância entre a WSB r_3^* e a Terra (BELBRUNO; MIL- LER, 1993)	57
Figura 20 – Componentes envolvidas na transferência Terra-Lua com captura gra- vitacional (BELBRUNO; MILLER, 1993)	58

Figura 21 – Simulação numérica da trajetória da missão <i>Hiten</i> projetada no plano da eclíptica. (BELBRUNO; MILLER, 1993)	59
Figura 22 – À esquerda, a trajetória da transferência feita pela sonda <i>Hiten</i> . À direita, a interação dos tubos das variedades invariantes do sistema Sol-Terra e Terra-Lua permitem uma transferência econômica com efeitos perturbativos do Sol. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)	60
Figura 23 – À esquerda, a parte da trajetória regida pelo ponto de Lagrange L_2 do sistema Sol-Terra. À direita, a parte da trajetória representada pela captura gravitacional pela Lua. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)	62
Figura 24 – À esquerda, a faixa q_2q_1 fora da W^U que se alonga em uma faixa $P^{-1}(q_2)P^{-1}(q_1)$ em torno da W^S . À direita, com mudanças pequenas na velocidade, qualquer ponto pode ser visado se integrado retrogradamente. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)	63
Figura 25 – Na parte superior encontram-se as interseções das variedades dos sistemas Sol-Terra e Terra-Lua. Na parte inferior, após se escolher a condição inicial, integração prógrada levará a sonda a ser capturada gravitacionalmente e retrógrada levará a sonda de volta à Terra. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)	64
Figura 26 – Criando o cenário no STK.	68
Figura 27 – Ajuste dos gráficos 2D.	68
Figura 28 – Cenário para transferências Terra-Lua.	69
Figura 29 – Sequência de controle de missão inicial Hohmann.	70
Figura 30 – Cenário inicial da transferência.	71
Figura 31 – Solução convergida em 6 iterações.	72
Figura 32 – Cenário após o primeiro <i>targeting</i>	72
Figura 33 – Plano B de um corpo central. (GRAPHICS, 2021)	73
Figura 34 – Solução convergida em 5 iterações.	73
Figura 35 – Cenário após o segundo <i>targeting</i>	74
Figura 36 – Sequência de controle de missão para o swing by lunar.	74
Figura 37 – Cenário após o swing by.	75
Figura 38 – Sequência de controle de missão para inserção em órbita lunar.	75
Figura 39 – Solução convergida em 0 iterações.	76
Figura 40 – Transferência de Hohmann para 100 km LLO.	76
Figura 41 – Transferência de Hohmann para 3000 km LLO.	77
Figura 42 – Sequência de controle de missão inicial WSB.	78
Figura 43 – Transferência de baixo empuxo de segundo quadrante no sistema girante Sol-Terra. (BELBRUNO, 2000)	79
Figura 44 – Solução convergida em 92 iterações.	80
Figura 45 – Solução convergida em 34 iterações.	81

Figura 46 – Cenário após aplicação do primeiro impulso.	81
Figura 47 – Solução convergida em 114 iterações.	82
Figura 48 – Cenário após definição da direção da trajetória.	83
Figura 49 – Solução convergida em 2 iterações.	84
Figura 50 – Cenário com energia orbital e direção corretas.	84
Figura 51 – Solução convergida em 12 iterações.	85
Figura 52 – Solução convergida em 89 iterações.	85
Figura 53 – Solução convergida em 79 iterações.	85
Figura 54 – Cenário da trajetória de captura gravitacional no periselênio.	86
Figura 55 – Sequência de controle de missão final.	86
Figura 56 – Solução convergida.	87
Figura 57 – Transferência de baixo empuxo com captura gravitacional para 100 km LLO.	87
Figura 58 – Transferência de baixo empuxo com captura gravitacional para 3000 km LLO.	88
Figura 59 – Gráfico de eficiência das transferências que ocorreram em 2007.	92
Figura 60 – Gráfico de eficiência das transferências que ocorreram em 2021.	93

Lista de tabelas

Tabela 1 – Histórico de missões Terra-Lua bem sucedidas. Adaptado de (NASA, 2019)	22
Tabela 2 – Localização dos pontos de Lagrange Terra-Lua no plano xy (MELO, 2006)	44
Tabela 3 – Comparação entre parâmetros obtidos nas simulações e em (BELBRUNO, 2000).	90
Tabela 4 – Resultados dos parâmetros obtidos para as transferências feitas em abril de 2021.	90
Tabela 5 – Resultados de Δv e Δt obtidos nas simulações.	91
Tabela 6 – Dados específicos de cada impulso aplicado nas transferências.	91
Tabela 7 – Comparação entre transferências Terra-Lua. Adaptado de (BELBRUNO; MILLER, 1993)	93
Tabela 8 – Partes da transferência Terra-Lua. Adaptado de (BELBRUNO; MILLER, 1993)	94

Lista de abreviaturas e siglas

ECI	Earth-Centered Inertial - Sistema inercial centrado na Terra
GTO	Geostationary Transfer Orbit - Órbita de transferência geoestacionária
LEO	Low Earth Orbit - Órbita baixa terrestre
LLO	Low Lunar Orbit - Órbita baixa lunar
MCS	Mission Control Sequence - Sequência de controle de missão
PR3BP	Planar Restricted Three Body Problem - Problema planar circular restrito de três corpos
SOI	Sphere of Influence - Esfera de influência
STK	Systems Tool Kit
TLI	Trans-Lunar Injection - Injeção translunar
WSB	Weak Stability Boundary - Limite de estabilidade fraca
W^S	Stable Manifold - Variedade estável
W^U	Unstable Manifold - Variedade instável

Lista de símbolos

φ	Ângulo da trajetória de voo
λ	Ângulo de fase
σ	Razão de massa adimensionalizada
ω	Velocidade angular
Ω	Potencial efetivo
Σ	Seção de Poincaré
θ, φ	Ângulos esféricos em relação à massa central
α	Ângulo da direção da velocidade relativa ao corpo central no plano perpendicular a l
β	Ângulo entre a linha Sol-Terra e a linha Terra-Lua
$\Phi(t)$	Trajétória descrevendo o movimento de m
Φ_C	Estado de captura de m relativo à Lua em $t = t_0$
$\Phi_k(t)$	Trajétória de m relativo a Terra, Lua para $k = 3, 4$
$\hat{\Phi}$	Trajétória de m relativo à Terra em $t = T$
Γ	Trajétória Terra-Lua conectando Φ_i e Φ_{ii}

Sumário

	Introdução	18
0.0.1	Objetivos	18
0.0.2	Metodologia	18
0.0.3	Justificativa	19
0.0.4	Organização do trabalho	19
1	HISTÓRICO DE MISSÕES TERRA-LUA	20
2	MANOBRAS ORBITAIS	23
2.1	Introdução	23
2.2	Transferência de Hohmann	24
2.2.1	Cálculo do Δv	25
2.3	Transferência de Hohmann Bi-Elíptica	26
2.3.1	Comparação Transferência de Hohmann e Bi-Elíptica	26
3	TRAJETÓRIAS INTERPLANETÁRIAS E A MISSÃO LUNAR	29
3.1	Introdução	29
3.2	Esferas de Influência	29
3.3	Janelas de Oportunidade	30
3.4	Método das <i>Patched Conics</i>	31
3.4.1	Método Aplicado à Missão Lunar	31
4	O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS E SUAS APLICA- ÇÕES	38
4.1	Introdução	38
4.2	Problema Restrito de 3 Corpos (PR3C)	38
4.2.1	Histórico	38
4.2.2	Equações do Movimento	39
4.3	Normalização do Problema Circular Planar Restrito de 3 Corpos	42
4.4	Pontos Lagrangianos	43
4.5	Constante de Jacobi e a Região de Hill	45
5	TRANSFERÊNCIAS DE BAIXO EMPUXO PARA A LUA COM CAPTURA GRAVITACIONAL	48
5.1	Introdução	48
5.2	Captura Gravitacional	49
5.3	Órbitas Periódicas	49

5.4	<i>Weak Stability Boundaries e Variedades Invariantes</i>	50
5.4.1	Mapas de Poincaré	51
5.5	Modelo de Transferência Terra-Lua de Baixo Empuxo com Efeitos Perturbativos do Sol	52
5.5.1	Formulação Matemática do Modelo	53
5.6	Missão <i>Hiten</i>	59
5.6.1	Introdução	59
5.6.2	Modelo de Missão	59
5.6.3	Itinerário da Trajetória	61
5.6.4	Método de Construção da Transferência	62
5.6.5	Captura Gravitacional pela Lua	62
5.6.6	Ponto de Lagrange Sol-Terra e Torção de Órbitas	63
5.6.7	Conexão Entre as Duas Partes da Transferência	63
6	SIMULAÇÕES	65
6.1	Systems Tool Kit (STK)	65
6.2	Astrogator	66
6.2.1	Modelo de Lançamento	66
6.2.2	Propagador de Órbita	67
6.2.3	<i>Targeting</i>	67
6.2.4	Missões Analisadas	67
6.3	<i>Design dos Cenários Para Visualização das Transferências</i>	67
6.4	Simulação da Transferência de Hohmann	69
6.4.1	Configuração da Sequência de Controle de Missão - MCS	70
6.4.2	Palpite Para a Injeção Translunar	71
6.4.3	Cálculo da Época de Lançamento e Tempo de <i>Coast</i>	71
6.4.4	Configuração da Chegada no Periselênio	73
6.4.5	Swing By Lunar	74
6.4.6	Inserção em Órbita Lunar	75
6.5	Simulação da Transferência de Baixo Empuxo Para a Lua Com Captura Gravitacional	77
6.5.1	Configuração da Sequência de Controle de Missão	78
6.5.2	Determinação da Data de Lançamento	79
6.5.3	Palpite Para a Injeção Translunar	80
6.5.4	Cálculo da Época de Lançamento e Tempo de <i>Coast</i>	82
6.5.5	Ajuste da Energia Orbital da Transferência	83
6.5.6	Captura Gravitacional pela Lua	84
6.5.7	Inserção em Órbita Lunar	86
7	RESULTADOS E DISCUSSÃO	89

7.1	Introdução	89
7.2	Parâmetros Orbitais da Órbita de Captura	90
7.3	Comparação de Δv e Δt	91
7.3.1	Análise de Eficiência	92
8	CONCLUSÃO	95
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICES	99
	APÊNDICE A – RELATÓRIO DE MISSÕES	100
A.0.1	Relatório de Missão da Transferência de Hohmann - 2007	100
A.0.2	Relatório de Missão da Transferência de Baixo Empuxo - 2007	100
A.0.3	Relatório de Missão da Transferência de Hohmann - 2021	100
A.0.4	Relatório de Missão da Transferência de Baixo Empuxo - 2021	101

Introdução

0.0.1 Objetivos

Uma das maiores decisões a serem tomadas ao planejar uma missão espacial é, sem dúvidas, a escolha das manobras orbitais que comportem os requisitos do projeto, sejam eles de gasto de propelente ou de tempo, os quais estão intimamente ligados ao custo final.

Tendo em vista que não possuímos reabastecimento durante uma missão, o foco na escolha de uma manobra é o Δv total, que representa a mudança de velocidade necessária para percorrer todo o trajeto programado. Quanto maior o Δv total necessário, maior a quantidade de propelente que será utilizada e, conseqüentemente, menor a capacidade de levar *payload* e a vida útil da missão.

Entretanto, busca-se encontrar um equilíbrio entre a quantidade de *payload* que se deseja levar, o limite de tempo no qual a missão deve ser feita e o custo final total. Uma viagem espacial pode ser relativamente rápida e gastar enormes quantidades de propelente, porém, só permitir levar uma pequena massa de carga paga, tendo em vista que a massa de propelente ocupa a maior parte do veículo lançador. Missões podem também utilizar pouco Δv , por meio de manobras de alto impulso específico e baixo empuxo utilizando-se propulsão elétrica. Embora leve mais tempo para que a missão seja concluída, uma quantidade muito maior de carga paga pode ser inclusa e o custo final da operação pode se tornar mais razoável. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

Portanto, este trabalho tem como objetivo apresentar diferentes tipos de transferência Terra-Lua e compará-los em termos de gasto de propelente e tempo de trajetória.

0.0.2 Metodologia

Em suma, existem muitos tipos de métodos, sua utilização varia de missão para missão e a sua determinação depende principalmente dos requisitos do projeto. Como o foco deste trabalho é a viagem Terra-Lua, as manobras apresentadas serão as mais utilizadas para esse tipo de trajeto, sendo elas a transferência de Hohmann abraçada pelo método das *patched conics* e transferências de alto impulso específico e baixo empuxo diretas e utilizando os Pontos de Lagrange. Dessa maneira, uma comparação entre os métodos poderá ser feita e uma determinação de qual é o mais eficaz e mais apropriado, para cada situação, será apresentada.

O embasamento científico que será apresentado para o entendimento do primeiro método está pautado na dinâmica Kepleriana de dois corpos, considerando janelas de

oportunidade e esferas de influência, enquanto o segundo método é regido pelo problema restrito de três corpos e suas implicações como os pontos Lagrangianos e constante de Jacobi. Busca-se um entendimento claro a partir de demonstrações analíticas e numéricas presentes na literatura.

0.0.3 Justificativa

Tendo em vista o crescimento do interesse por missões lunares nas últimas décadas, após um hiato de aproximadamente 10 anos na década de 1980, o estudo desse tipo de trajetória vem se tornando cada vez mais pertinente. Diferentes tipos de manobras vem sendo analisados e a busca por transferências econômicas tem ganhado grande visibilidade desde sua proposta em (BELBRUNO, 1987) e aplicação em missões reais, apresentada em (BELBRUNO; MILLER, 1993). Por isso, uma análise comparativa entre dois dos métodos mais utilizados neste tipo de missão é esclarecedora e muito informativa.

0.0.4 Organização do trabalho

O capítulo 1 apresenta um histórico básico de viagens Terra-Lua. O capítulo 2 introduz manobras orbitais se pautando nas transferências de Hohmann e bi-elíptica. O capítulo 3 tem como foco trajetórias interplanetárias e apresenta o método de aproximação das *patched conics*. O capítulo 4 é responsável por demonstrar o problema restrito de três corpos e fazer a sua conexão com os capítulos subsequentes. O capítulo 5 estuda as transferências de baixo empuxo utilizando captura gravitacional e faz uma análise da missão Japonesa *Hiten*. O capítulo 6 é responsável por apresentar detalhadamente as simulações e os métodos utilizados para construir as transferências apresentadas no trabalho. O capítulo 7 compara os métodos e valores de Δv , Δt e gasto de propelente obtidos para cada trajetória e, adicionalmente, os compara com resultados presentes na literatura. O capítulo 8 faz uma conclusão a partir dos dados apresentados e uma análise objetiva sobre o trabalho como um todo.

1 Histórico de Missões Terra-Lua

Por milhares de anos a Lua intrigou a imaginação dos seres humanos, porém apenas nos tempos modernos começamos a visitar este corpo. Primeiro com robôs, depois com astronautas. Essa exploração nos ensinou muito sobre a evolução do sistema solar e sobre nós mesmos. Por séculos conhecemos os seus efeitos sobre as marés e ciclos biológicos, mas foi necessária a entrada da era espacial para nos mostrar que a Lua está fundamentalmente conectada com a existência humana. (SPUDIS, 2008)

A corrida espacial durante a Guerra Fria foi essencial para o desenvolvimento de novas tecnologias e perspectivas de missões para a Lua. Seja desde Janeiro de 1959, com a pequena esfera Soviética Luna 1 se tornando a primeira sonda a escapar a gravidade da terra e a chegar a cerca de 6400 km da Lua, trazendo inúmeras fotografias, ou mesmo com o programa Apollo, que levou, em Julho de 1969, Neil Armstrong e Edwin "Buzz" Aldrin ao Mar da Tranquilidade, apresentado na Figura 1. Logo, a Lua se tornou um dos desafios primordiais para os seres humanos comprovarem as suas habilidades tecnológicas. (DRAKE, 2020)



Figura 1 – *Lunar Lander* - Apollo 11. (GARBER, 2007)

Duas décadas de exploração se passaram com inúmeras viagens, desde seu início em 1959. A década de 1980 não teve missões para a Lua até que em 1990 houve o seu retorno com a primeira missão lunar Japonesa (*Hiten*). Uma missão que se destacou por utilizar uma transferência de baixo empuxo com uma captura gravitacional na Lua que requeria menos Δv se comparada à uma transferência de Hohmann convencional. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

Desde então, o número de viagens para a Lua continua crescendo com missões

como a GRAIL (*Gravity Recovery and Interior Laboratory*), apresentada na Figura 2, que mapeou variações do campo gravitacional lunar (BARNETT, 2019) e utilizou transferências de baixo empuxo com ajuda do Ponto de Lagrange L_1 do sistema Sol-Terra e a missão ARTEMIS que planeja levar o próximo homem e a primeira mulher à superfície da Lua em 2024 para estabelecer exploração sustentável e utilizar o conhecimento adquirido para mandar, posteriormente, astronautas para Marte. (DUNBAR, 2020)

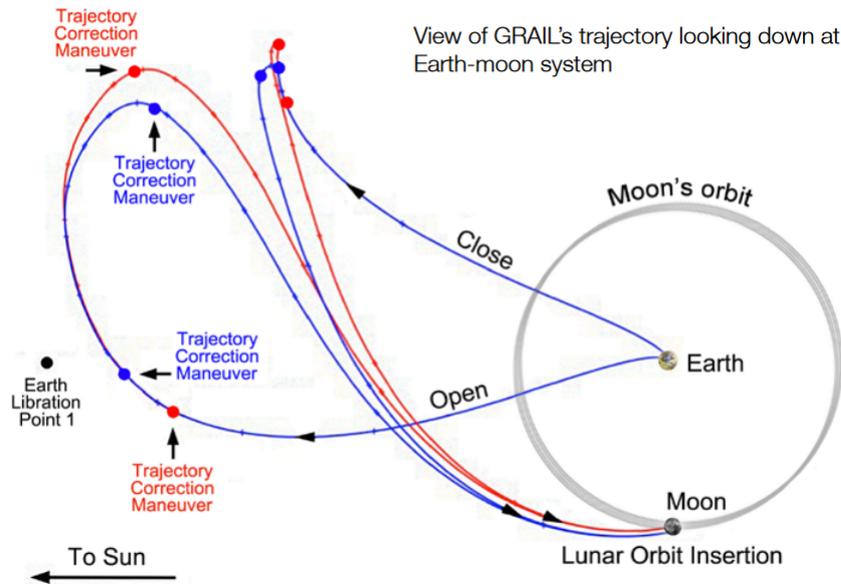


Figura 2 – Perfil da Missão GRAIL. (NASA, 2011)

Trajetórias novas e eficientes de uma transferência de *Low Earth Orbit* para *Low Lunar Orbit* nunca deixaram de ser buscadas por pesquisadores da área. A transferência de Hohmann moldada pelo método de aproximação das *patched conics* (BATTIN, 1987) é considerado o método mais fácil e comum utilizado por seu modelo se tratar de dinâmica de dois corpos e conseguir representar uma aproximação boa dos problemas complexos, possui uma trajetória que pode durar apenas $\Delta t = 3$ dias, porém com um Δv relativamente alto para injetar a nave na órbita final em torno da Lua. (TOPPUTO, 2013)

Como tentativa de reduzir os custos das manobras, surgiram as transferências de baixo empuxo, regidas pelo modelo de n-corpos, propostas e comprovadas por (BELBRUNO; MILLER, 1993). Estas estão sendo preferidas àquelas não só por terem um custo melhor, mas também por terem maiores janelas de oportunidade, o tempo maior de duração da transferência, de até $\Delta t = 160$ dias, ajuda se houverem correções de trajetória a serem feitas e, com o uso de propulsão elétrica, o custo pode ser reduzido ainda mais. (TOPPUTO, 2013)

O conjunto de missões Terra-Lua bem sucedidas desde o início da corrida espacial encontra-se exposto na tabela 1:

MISSÕES LUNARES DE SUCESSO				
NOME	PAÍS	LANÇAMENTO	CHEGADA	TIPO
Luna 1	URSS	02/01/1959	04/01/1959	Impacto
Pioneer 4	EUA	03/03/1959	04/03/1959	Flyby
Luna 2	URSS	12/09/1959	13/09/1959	Impacto
Luna 3	URSS	04/10/1959	06/10/1959	Flyby
Ranger 7	EUA	28/07/1964	31/07/1964	Impacto
Ranger 8	EUA	17/02/1965	20/02/1965	Impacto
Ranger 9	EUA	21/03/1965	24/03/1965	Impacto
Zond 3	URSS	18/07/1965	20/07/1965	Flyby
Luna 9	URSS	31/01/1966	03/02/1966	Pouso
Luna 10	URSS	31/03/1966	03/04/1966	Órbita
Surveyor 1	EUA	30/05/1966	30/06/1966	Pouso
Lunar Orbiter 1	EUA	10/08/1966	14/08/1966	Órbita
Luna 11	URSS	24/08/1966	27/08/1966	Órbita
Luna 12	URSS	22/10/1966	25/10/1966	Órbita
Lunar Orbiter 2	EUA	06/11/1966	10/11/1966	Órbita
Luna 13	URSS	21/12/1966	24/12/1966	Pouso
Lunar Orbiter 3	EUA	05/02/1967	08/02/1967	Órbita
Surveyor 3	EUA	17/04/1967	20/04/1967	Órbita
Lunar Orbiter 4	EUA	04/05/1967	08/05/1967	Órbita
Lunar Orbiter 5	EUA	01/08/1967	05/08/1967	Órbita
Surveyor 5	EUA	08/09/1967	11/09/1967	Pouso
Surveyor 6	EUA	07/11/1967	10/11/1967	Pouso
Surveyor 7	EUA	07/01/1968	10/01/1968	Pouso
Luna 14	URSS	07/04/1968	10/04/1968	Órbita
Zond 5	URSS	15/09/1968	18/09/1968	Flyby
Zond 6	URSS	10/11/1968	14/11/1968	Flyby
Apollo 8	EUA	21/12/1968	24/12/1968	Órbita
Apollo 10	EUA	18/05/1969	21/05/1969	Órbita
Luna 15	URSS	13/07/1969	18/07/1969	Órbita
Apollo 11	EUA	16/07/1969	20/07/1969	Coletas
Zond 7	URSS	07/08/1969	11/08/1969	Flyby
Apollo 12	EUA	14/11/1969	17/11/1969	Coletas
Luna 16	URSS	12/09/1970	20/09/1970	Coletas
Zond 8	URSS	20/10/1970	24/10/1970	Flyby
Luna 17	URSS	10/11/1970	17/11/1970	Pouso
Lunokhod 1	URSS	10/11/1970	17/11/1970	Rover Lunar
Apollo 14	EUA	31/01/1971	04/02/1971	Coletas
Apollo 15	EUA	26/07/1971	29/07/1971	Coletas
PFS-1	EUA	26/07/1971	04/08/1971	Órbita
Luna 19	URSS	28/09/1971	03/10/1971	Órbita
Luna 20	URSS	14/02/1972	21/02/1972	Coletas
Apollo 16	EUA	16/04/1972	19/04/1972	Coletas
PFS-2	EUA	16/04/1972	24/04/1972	Órbita
Apollo 17	EUA	07/12/1972	10/12/1972	Coletas
Luna 21	URSS	08/01/1973	15/01/1973	Órbita
Lunokhod 2	EUA	08/01/1973	15/01/1973	Rover Lunar
Mariner 10	EUA	03/11/1973	05/11/1973	Flyby
Luna 22	URSS	29/05/1974	02/06/1974	Órbita
Luna 23	URSS	28/10/1974	06/11/1974	Coletas
Luna 24	URSS	09/08/1976	18/08/1976	Coletas
Hiten	JAPÃO	24/01/1990	19/03/1990	Órbita/Impacto
Clementine	EUA	25/01/1994	19/02/1994	Órbita/Impacto
Lunar Prospector	EUA	07/01/1998	11/01/1998	Órbita/Impacto
SMART-1	EUROPA	27/09/2003	15/11/2004	Órbita/Impacto
SELENE (Kaguya)	JAPÃO	14/09/2007	03/10/2007	Órbita/Impacto
Chang'e 1	CHINA	24/10/2007	05/11/2007	Órbita/Impacto
Chandrayaan-1	ÍNDIA	22/10/2008	12/11/2008	Órbita
Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO)	EUA	18/06/2009	23/06/2009	Órbita
LCROSS	EUA	18/06/2009	09/10/2009	Impacto
Chang'e 2	CHINA	01/10/2010	05/10/2010	Órbita
ARTEMIS	EUA	2010	2011	Órbita
Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL)	EUA	10/09/2011	01/01/2012	Órbita
Lunar Atmosphere and Dust Environment Explorer (LADEE)	EUA	07/09/2013	06/10/2013	Órbita
Chang'e 3	CHINA	06/12/2013	14/12/2013	Pouso
Yutu	CHINA	06/12/2013	14/12/2013	Rover Lunar
Chang'e 5-Test Vehicle	CHINA	23/10/2014	27/10/2014	Flyby
Queqiao	CHINA	20/05/2018	14/06/2018	Órbita
Chang'e 4 and Yutu 2	CHINA	07/12/2018	03/01/2019	Rover Lunar

Tabela 1 – Histórico de missões Terra-Lua bem sucedidas. Adaptado de (NASA, 2019)

2 Manobras Orbitais

2.1 Introdução

O estudo de manobras orbitais e interações entre corpos no universo pode ser feito de diversas formas e com variados níveis de dificuldade. O método mais simples ao se estudar a interação entre eles é o problema de dois corpos que consiste em um modelo direto no qual deve-se assumir duas premissas (BATE; WHITE, 1971):

1. Os corpos são considerados esféricos e assume-se que suas massas então concentradas nos seus centros.
2. Não existem forças internas e nem externas atuando nos corpos além da força gravitacional agindo ao longo da linha que liga o centro dos mesmos.

Da Lei da Gravitação Universal proposta por Newton, a força gravitacional é dada por:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

Onde:

- F é a magnitude da força gravitacional.
- G é a constante gravitacional de valor $6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.
- m_1 e m_2 são as massas de cada corpo.
- r é a distância entre os dois corpos.

Ao se descrever a equação 2.1 em coordenadas polares, é possível chegar à equação da órbita que define o caminho do corpo m_2 em torno de m_1 :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.2)$$

Onde a é o semieixo maior da órbita, e é a excentricidade e θ é a anomalia verdadeira (CURTIS, 2014). A excentricidade da órbita determina qual seção cônica representará a trajetória, de maneira que:

- $e = 0$ Círculo
- $0 < e < 1$ Elipse
- $e = 1$ Parábola
- $e > 1$ Hipérbole

As manobras orbitais são governadas por esse problema e são extremamente importantes para se desenhar uma trajetória eficiente entre dois corpos no espaço. Uma das manobras mais conhecidas e utilizadas na mecânica orbital é a transferência de Hohmann.

2.2 Transferência de Hohmann

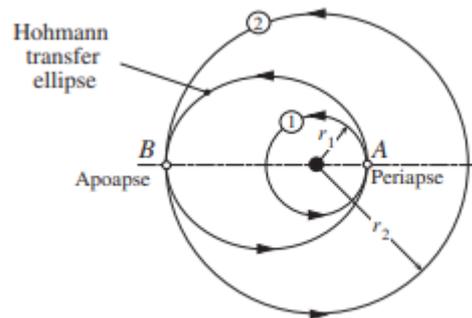


Figura 3 – Transferência de Hohmann. (CURTIS, 2014)

A transferência de Hohmann, idealizada por Walter Hohmann em 1925, é a manobra mais eficiente energeticamente, utilizando-se dois impulsos entre duas órbitas circulares coplanares que compartilham um mesmo foco. O periapsis e o apoapsis da elipse de transferência são os raios dos círculos internos e externos, respectivamente. Durante a manobra, apenas metade da elipse é percorrida, o que pode ocorrer em qualquer direção, do círculo interno pro externo e vice versa. (CURTIS, 2014)

Da mecânica orbital básica temos que a energia de uma órbita depende apenas de seu semieixo maior a .

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (2.3)$$

Logo, intuitivamente, assume-se que quanto maior o semieixo maior da órbita, maior será a sua energia específica.

Observando-se a Figura 3, a manobra se inicia na órbita circular de estacionamento 1 e em A é dado um incremento de velocidade Δv_A na direção de voo necessária para se chegar à uma trajetória elíptica de maior energia. Após o percurso de A para B , outro

incremento de velocidade Δv_B circulariza a órbita e termina a transferência. O gasto total de energia se torna $\Delta v_{Total} = \Delta v_A + \Delta v_B$. Sem este último, o veículo espacial continuaria na órbita de transferência elíptica e retornaria a A . (CURTIS, 2014)

2.2.1 Cálculo do Δv

O cálculo dos valores de Δv é gerado a partir das Leis de Kepler e equações da astrodinâmica. (CURTIS, 2014)

O semieixo maior de uma elipse pode ser calculado a partir da equação

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (2.4)$$

A primeira Lei de Kepler determina a excentricidade de uma elipse como,

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \quad (2.5)$$

A velocidade orbital em uma trajetória elíptica pode ser calculada pela equação

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} \quad (2.6)$$

Usando as equações acima como premissa para o cálculo e analisando cada vetor velocidade envolvido na manobra, encontramos:

Velocidade da órbita circular LEO inicial

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad (2.7)$$

Velocidade da órbita de transferência

$$v_t = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} \quad (2.8)$$

Velocidade da órbita circular final

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad (2.9)$$

Logo:

$$\Delta v_A = v_t - v_1 \quad (2.10)$$

e

$$\Delta v_B = v_2 - v_t \quad (2.11)$$

Manipulando as equações, encontramos,

$$\Delta v_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \quad (2.12)$$

e

$$\Delta v_B = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \quad (2.13)$$

Por fim, temos o ΔV_{Total} como,

$$\Delta v_{Total} = \Delta v_A + \Delta v_B \quad (2.14)$$

2.3 Transferência de Hohmann Bi-Elíptica

Existe também, entretanto, a transferência de Hohmann Bi-elíptica, a qual utiliza a trajetória de duas semi elipses coaxiais que se estendem além da órbita circular final. Veja a Figura 4.

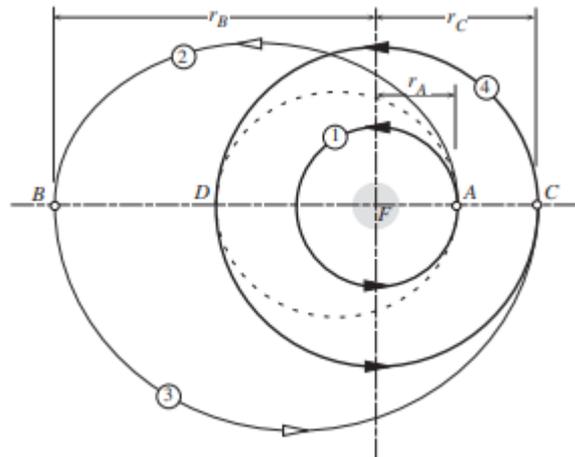


Figura 4 – Transferência de Hohmann Bi-elíptica. (CURTIS, 2014)

Cada uma das elipses é tangente a uma das órbitas circulares e são tangentes entre si em B , que é suficientemente distante do foco com o intuito de deixar o valor de Δv_B muito baixo. Quando r_B aproxima-se do infinito, Δv_B aproxima-se de zero. (CURTIS, 2014)

2.3.1 Comparação Transferência de Hohmann e Bi-Elíptica

Para saber qual das duas é mais eficiente é necessário fazer uma comparação entre o Δv_{Total} de cada uma.

Assumindo v_o como a velocidade orbita circular interna 1,

$$v_o = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}} \quad (2.15)$$

Adimensionalizando os valores de Δv de cada manobra e assumindo α e β como razões dos valores de raio do apoapsis e periapsis das elipses 2 e 3, respectivamente:

$$\Delta v_H = \frac{\Delta v_{total}}{v_o})_{Hohmann} \quad (2.16)$$

$$\Delta v_{BE} = \frac{\Delta v_{total}}{v_o})_{Bi-elíptica} \quad (2.17)$$

$$\alpha = \frac{r_C}{r_A} \quad (2.18)$$

$$\beta = \frac{r_B}{r_A} \quad (2.19)$$

Calculando os valores de Δv para cada manobra temos

$$\Delta v_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\sqrt{2}(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha(1+\alpha)}} - 1 \quad (2.20)$$

e

$$\Delta v_{BE} = \sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}} - \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\frac{2}{\beta(1+\beta)}}(1-\beta) \quad (2.21)$$

Se a diferença entre Δv_H e Δv_{BE} em função de α e β for plotada em um gráfico, o resultado é muito informativo e determinante para a hora de escolher um dos tipos de manobra em uma missão. (CURTIS, 2014)

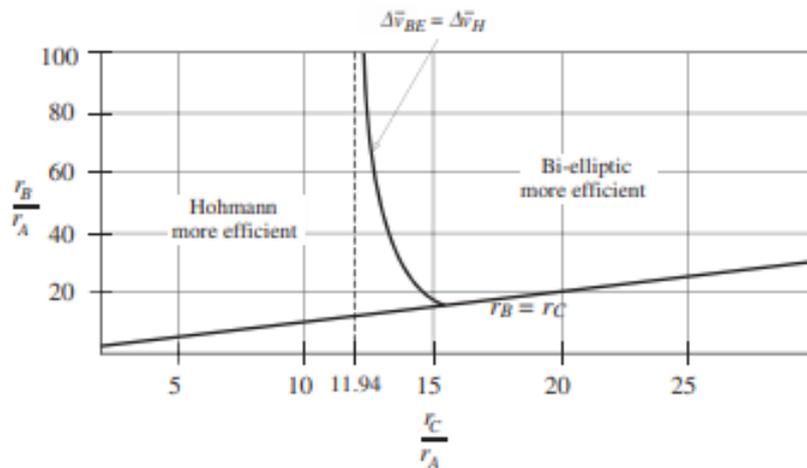


Figura 5 – Relação de eficiência entre as manobras de Hohmann e Bi elíptica. (CURTIS, 2014)

Da Figura 5, observa-se que enquanto a órbita circular externa r_C for até 11.94 vezes maior que a interna r_A , a transferência de Hohmann tradicional será a manobra mais eficiente em termos de energia. Se esta razão for maior que 15.58, a transferência bi elíptica se torna a melhor opção. Entre esses dois valores, grandes valores de apoapsis r_B favorecem a bi elíptica enquanto pequenos valores, Hohmann tradicional.

Com a teoria do funcionamento desta manobra definida, é possível analisá-la em termos práticos que envolvem trajetórias interplanetárias e assim moldar uma solução para uma missão Terra-Lua que envolva essa manobra.

3 Trajetórias Interplanetárias e a Missão Lunar

3.1 Introdução

O estudo de trajetórias interplanetárias envolve uma série de variáveis que devem ser levadas em conta para que a missão seja cumprida. Desde o método a ser utilizado, até escolhas de manobras orbitais, esferas de influência dos planetas ou astros envolvidos e janelas de oportunidades. O objetivo deste capítulo é apresentar o planejamento de uma missão interplanetária e como ela deve ser moldada para o caso Terra-Lua.

3.2 Esferas de Influência

De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a atração gravitacional do Sol mantém todos os planetas sob sua influência. Contudo, quando se está próximo o suficiente de um determinado planeta, a influência da gravidade do mesmo sobrepõe-se a do Sol. Pela lei da gravidade, a força gravitacional F_g decresce rapidamente com a distância r do centro de atração. Se F_{g0} é a força gravitacional na superfície de um planeta de raio r_0 , observa-se na Figura 6 que, em 10 raios de distância, a força já se torna 1% do que era na superfície e, eventualmente, a força do campo gravitacional do Sol se tornará maior do que a do planeta em si. (CURTIS, 2014)

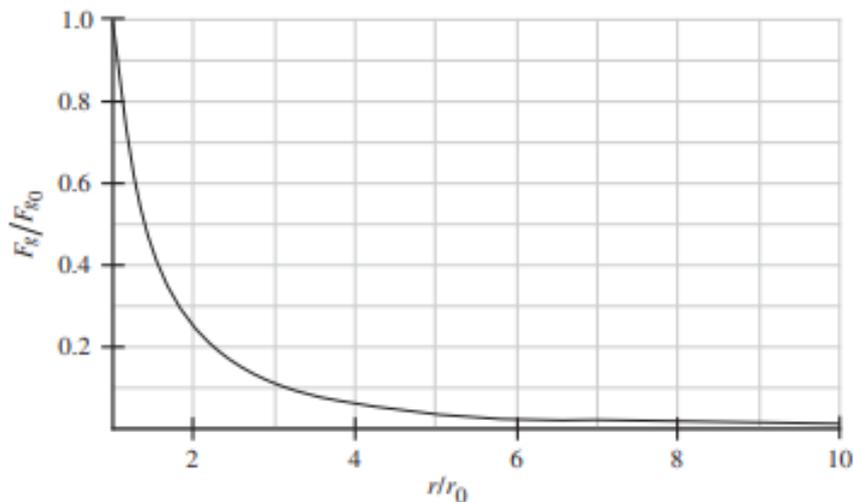


Figura 6 – Variação da força gravitacional de um planeta em comparação à distância da sua superfície. (CURTIS, 2014)

Logo, a esfera de influência nada mais é do que a região em que a força gravitacional principal atuante no planeta é a força dele mesmo e pode ser calculada por:

$$\frac{r_{SOI}}{R} = \left(\frac{m_p}{m_s}\right)^{\frac{2}{5}} \quad (3.1)$$

Onde r_{SOI} é o raio da esfera de influência, R é a distância entre o sol e o planeta e m_p e m_s , são as massas do planeta e do sol, respectivamente. (CURTIS, 2014)

3.3 Janelas de Oportunidade

Um veículo lançador em uma missão interplanetária não pode simplesmente ser lançado a qualquer momento devido às limitações naturais e operacionais envolvidas. A determinação de quando a missão deve ser iniciada é uma tarefa complexa que exige várias considerações. O período de tempo entre quando o veículo pode ser lançado e chegar no seu objetivo, considerando as restrições necessárias, é chamado de janela de oportunidade e pode ser dividida em janela diária (duração de algumas horas) e janela mensal (duração de alguns dias de um mês ou ciclo lunar).

Ao se analisar o caso prático das missões Apollo, 4 considerações principais restringiam a janela de oportunidade (WHEELER, 2009):

1. O azimute do lançamento deve estar entre 72° e 108° por questões de segurança em relação à densidade populacional em caso de ser necessário abortar a missão e para fins de rastreamento da órbita.
2. A performance da sonda/veículo lançador é definida pela quantidade de propelente que este pode carregar. Portanto, em termos de eficiência, para se chegar a locais de pouso em latitudes mais ao norte da Lua, opta-se por escolher injeções a partir do oceano Pacífico que passam acima do plano orbital da Lua e precisam de menos mudança de inclinação. Enquanto uma injeção a partir do oceano Atlântico chega mais eficientemente a locais de pouso em latitudes mais ao sul.
3. Para que as condições de iluminação no local de descida e pouso planejado sejam ideais para se obter a melhor visibilidade possível, o ângulo de elevação do Sol deve estar entre 7° e 20° de longitude, tendo em vista que a região com iluminação aceitável muda ao passo que a Lua rotaciona, de leste para oeste, 13° por dia.
4. Dado um local de pouso na Lua, um lançamento só é possível se no dia a iluminação estiver aceitável e se o local escolhido estiver dentro dos limites de latitude que eram atingíveis para aquela longitude naquele dia específico.

Portanto, escolhendo-se apenas um local de pouso na Lua, seguindo as restrições impostas, resta apenas um dia por mês lunar ideal para uma missão Terra-Lua. Por isso, normalmente, opta-se por escolher múltiplos locais de pouso para ampliar as possibilidades de lançamento e corrigir possíveis falhas ou atrasos de missão.

3.4 Método das *Patched Conics*

O método das *patched conics* é baseado na dinâmica de dois corpos (Kepleriana), na qual a movimentação do veículo espacial pode ser descrita por cônicas e onde o conceito de esfera de influência é utilizado. (FILHO, 2015) Ao analisarmos uma missão de um planeta 1 para um planeta 2, ao se utilizar este método, devemos, primeiramente, determinar uma trajetória heliocêntrica, como a elipse de transferência de Hohmann, que levará o veículo do planeta 1 ao planeta 2. Depois, uma trajetória planetocêntrica hiperbólica de saída do planeta 1 e uma de entrada no planeta 2. Dessa forma conseguimos unir três cônicas que regem a nossa trajetória interplanetária. (CURTIS, 2014)

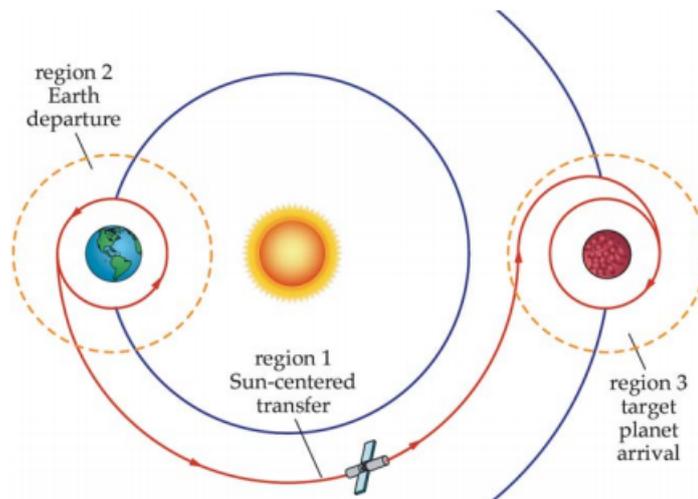


Figura 7 – Três regiões das *patched conics*. (FAA, 2018)

3.4.1 Método Aplicado à Missão Lunar

Ao se tratar de uma missão lunar, o método das *patched conics* deve ser remodelado. Tendo em vista que a esfera de influência da Terra é em torno de $SOI_{terra} = 1.000.000$ km e o raio orbital da Lua é $r_{lua} = 384.400$ km, a órbita da Lua é determinada primordialmente pela Terra. Desse modo, ao aplicar o método, ignora-se o Sol e considera-se que o veículo espacial é influenciado apenas pela Terra e pela Lua. (CURTIS, 2014) Então a

esfera de influência da Lua se torna:

$$\frac{r_{SOI}}{R} = \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (3.2)$$

$$r_{SOI} = 384400 \left(\frac{73,48 \times 10^{21}}{5974 \times 10^{21}} \right)^{\frac{2}{5}} = 66200\text{km} \quad (3.3)$$

Para se traçar uma trajetória de uma órbita de estacionamento LEO para uma LLO utilizando este método, deve-se assumir algumas premissas. A formulação matemática que será aqui apresentada foi desenvolvida por (FERNANDES, 2012) e (BATE; WHITE, 1971) e analisada e aprimorada por (FILHO, 2015).

As premissas aplicadas são:

1. A Terra está fixa no espaço.
2. A excentricidade da órbita da Lua em torno da Terra é negligenciada.
3. O veículo espacial faz o seu voo no plano orbital da Lua.
4. Os campos gravitacionais da Terra e da Lua são centrais e seguem a lei do inverso do quadrado.
5. A trajetória possui duas fases diferentes: geocêntrica e selenocêntrica. A geocêntrica é a parte da trajetória que começa no local de aplicação do primeiro incremento de velocidade e se estende até a entrada da esfera de influência da Lua. A selenocêntrica se inicia dentro da esfera de influência da Lua e termina no ponto de aplicação do segundo incremento de velocidade. Em qualquer uma das fases o veículo está sob influência gravitacional de apenas um corpo, Terra ou Lua.
6. O modelo de dois impulsos é aplicado. Estes impulsos são aplicados tangencialmente à órbita LEO inicial e à órbita LLO final.

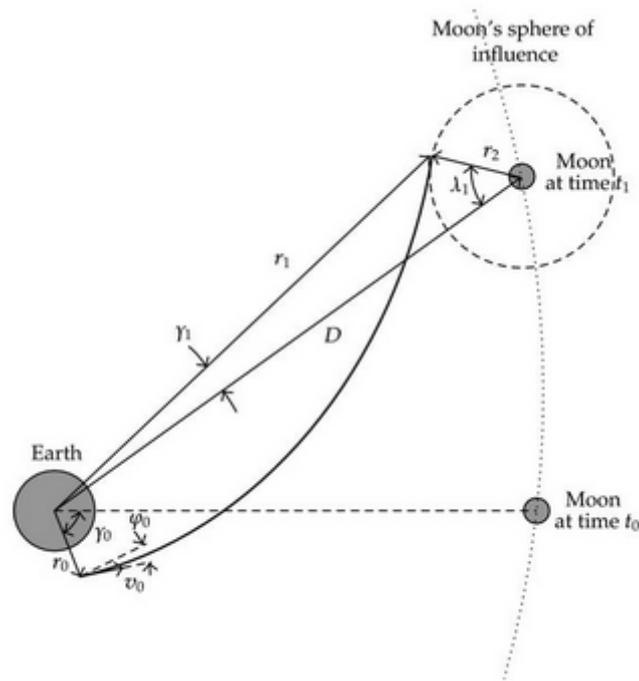


Figura 8 – Geometria da fase geocêntrica. (FERNANDES, 2012)

O método das *patched conics* pode ser determinado por completo por meio de quatro variáveis: o raio da órbita circular inicial r_0 , a velocidade v_0 do veículo no ponto de aplicação do primeiro incremento de velocidade depois que este foi dado, o ângulo da trajetória de voo φ_0 do veículo no ponto de inserção da trajetória geocêntrica o qual, se considerada a premissa número 6, temos $\varphi_0 = 0$ e o ângulo de fase λ_1 que determina o momento em que a trajetória geocêntrica atravessa a esfera de influência da Lua.

Dado um conjunto de condições iniciais $(r_0, v_0, \varphi_0, \lambda_1)$, os valores de energia orbital e momento angular específico da fase geocêntrica podem ser obtidos utilizando as equações básicas de problema de dois corpos, como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu_E}{r_0} \quad (3.4)$$

$$h = r_0v_0\cos(\varphi_0) \quad (3.5)$$

Onde μ_E é o parâmetro gravitacional da Terra.

A partir da Figura 8 e utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$r_1 = \sqrt{D^2 + r_2^2 - 2Dr_2\cos\lambda_1} \quad (3.6)$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{r_2}{r_1} \sin\lambda_1 \quad (3.7)$$

Onde D é a distância média Terra-Lua e os subscritos 1 e 2 representam as quantidades relacionadas às trajetórias geocêntricas e selenocêntricas, respectivamente, no ponto de contato da trajetória geocêntrica com a esfera de influência da Lua.

Utilizando as equações de energia e momento angular, conseguimos calcular a velocidade v_1 e o ângulo da trajetória de voo φ_1 :

$$v_1 = \sqrt{2 \left(\varepsilon + \frac{\mu_E}{r_1} \right)} \quad (3.8)$$

$$\cos(\varphi_1) = \frac{h}{r_1 v_1} \quad (3.9)$$

A fase selenocêntrica começa no ponto em que a trajetória geocêntrica atravessa a SOI da Lua. A geometria dessa fase é apresentada na Figura 9 para uma chegada em LLO no sentido horário.

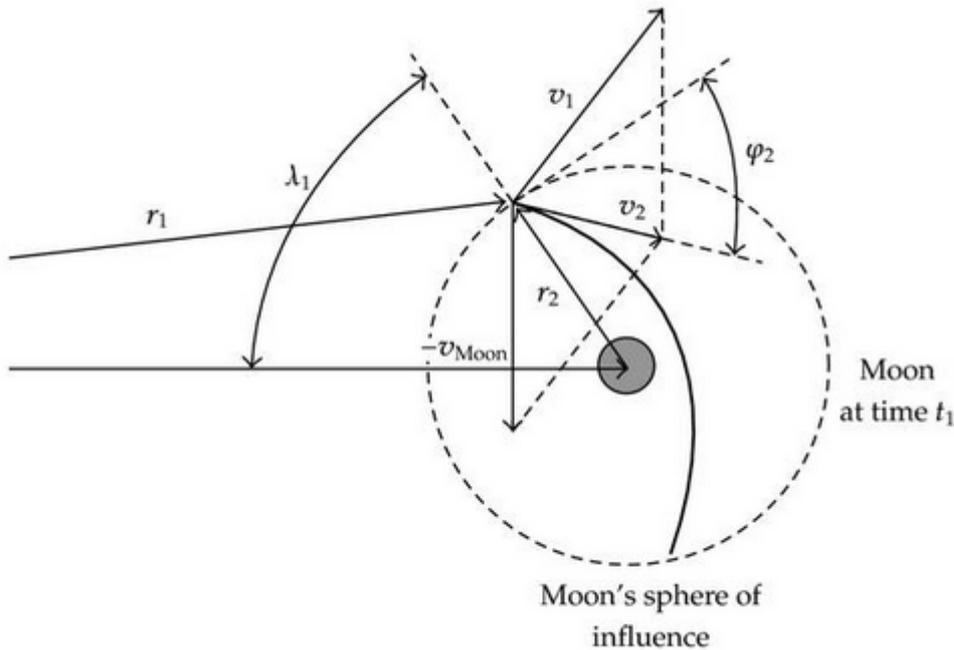


Figura 9 – Geometria da fase selenocêntrica. (FERNANDES, 2012)

Tendo em vista que o subscrito 2 é relacionado ao movimento relativo à Lua, temos:

$$r_2 = R_S \quad (3.10)$$

$$v_2 = v_1 - v_M \quad (3.11)$$

Onde R_S é o raio da esfera de influência da Lua e v_M é o vetor velocidade da Lua em relação à Terra. O vetor velocidade v_2 pode ser determinado com o uso de geometria:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_M^2 - 2v_1v_M\cos(\varphi_1 - \lambda_1)} \quad (3.12)$$

O ângulo de trajetória de voo φ_2 é determinado pela equação:

$$\tan(\lambda_1 \pm \varphi_2) = -\frac{v_1 \sin(\varphi_1 - \lambda_1)}{v_M - v_1 \cos(\varphi_1 - \lambda_1)} \quad (3.13)$$

A variação positiva desta última equação representa a chegada à lua no sentido horário, enquanto a variação negativa representa o sentido anti-horário.

O semieixo maior a_f e a excentricidade e_f da trajetória selenocêntrica podem ser encontrados usando as equações:

$$a_f = \frac{r_2}{2 - Q_2} \quad (3.14)$$

$$e_f = \sqrt{1 + Q_2(Q_2 - 2)\cos^2(\varphi_2)} \quad (3.15)$$

Onde $Q_2 = \frac{r_2 v_2^2}{\mu_M}$ e μ_M é o parâmetro gravitacional da Lua.

O segundo incremento de velocidade é aplicado no periselênio da trajetória selenocêntrica tal que as condições finais, antes do impulso, são definidas por:

$$r_{PM} = a_f(1 - e_f) \quad (3.16)$$

$$v_{PM} = \sqrt{\frac{\mu_M(1 + e_f)}{a_f(1 - e_f)}} \quad (3.17)$$

Entretanto, sabendo que a órbita lunar final, assim como a órbita LEO, é circular, r_{PM} deve ser igual ao raio r_f da LLO.

Dessa maneira, as equações até agora apresentadas formam um problema de valor de contorno que consiste em determinar um valor v_0 para um conjunto específico (r_0, φ_0) que satisfaça a condição final $r_{PM} = r_f$ para um certo λ_1 . Este problema pode ser resolvido utilizando o algoritmo Newton-Raphson (STOER; BULIRSCH, 2002), que a cada iteração o valor de v_0 chega mais próximo do correto, dado uma certa tolerância.

Depois de resolver o problema de valor de contorno e encontrar o valor de v_0 , os incrementos de velocidade dados a cada impulso são determinados por:

$$\Delta v_{LEO} = v_0 - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_0}} \quad (3.18)$$

$$\Delta v_{LLO} = \sqrt{\frac{\mu_M(1+e_f)}{a_f(1-e_f)}} - \sqrt{\frac{\mu_M}{r_f}} \quad (3.19)$$

Para fins de constatação o primeiro incremento de velocidade quando se está saindo da Terra para a Lua é o Δv_{LEO} , quando analisada a missão de volta da Lua, o primeiro incremento se torna o Δv_{LLO} . Logo, encontra-se o valor total de Δv :

$$\Delta v_{Total} = \Delta v_{LEO} + \Delta v_{LLO} \quad (3.20)$$

O tempo total de voo T na viagem de ida é a soma do tempo de cada fase do trajeto

$$T = \Delta t_E + \Delta t_M \quad (3.21)$$

Onde Δt_E é o tempo de voo na fase geocêntrica e Δt_M na fase selenocêntrica. Esses valores são calculados por:

$$\Delta t_E = \sqrt{\frac{a_0^3}{\mu_E}} (E_1 - e_0 \sin(E_1)) \quad (3.22)$$

$$\Delta t_M = \sqrt{\frac{(-a_f)^3}{\mu_M}} (e_f \sinh(F_2) - F_2) \quad (3.23)$$

As anomalias excêntrica E_1 e hiperbólica F_2 são obtidas a partir de:

$$\cos(E_1) = \frac{1}{e_0} \left(1 - \frac{r_1}{a_0} \right) \quad (3.24)$$

$$\cosh(F_2) = \frac{1}{e_f} \left(1 - \frac{r_2}{a_f} \right) \quad (3.25)$$

O semieixo maior e excentricidade da trajetória geocêntrica são dados por:

$$a_0 = \frac{r_0}{2 - Q_0} \quad (3.26)$$

$$e_0 = \sqrt{1 + Q_0(Q_0 - 2)\cos^2(\varphi_0)} \quad (3.27)$$

$$\text{Onde } Q_0 = \frac{r_0 v_0^2}{\mu_E}$$

Por fim, o ângulo de fase inicial γ_0 entre o veículo espacial e a Lua no momento do primeiro impulso é:

$$\gamma_0 = f_1 - f_0 - \gamma_1 - \omega_M \Delta t_E \quad (3.28)$$

Onde $\omega_M = \sqrt{\frac{\mu_E}{D^3}}$ é a velocidade angular da Lua em torno da Terra, $f_0 = 0$ por ser a anomalia verdadeira no ponto de inserção na trajetória geocêntrica, enquanto f_1 é a anomalia verdadeira no ponto de contato entre a trajetória geocêntrica e a SOI da Lua e é expressa por:

$$\cos(f_1) = \frac{\cos(E_1) - e_0}{1 - e_0 \cos(E_1)} \quad (3.29)$$

4 O Problema Restrito de Três Corpos e Suas Aplicações

4.1 Introdução

Embora a transferência direta das *patched conics* continue sendo muito utilizada para missões interplanetárias e lunares por ser eficaz e rápida, um método inovador foi proposto por (BELBRUNO, 1987) e aplicado em 1991 na missão de resgate do veículo espacial Japonês, *Hiten* (BELBRUNO; MILLER, 1990), que utilizou uma transferência de baixo empuxo que se beneficiou da perturbação do Sol e empregou uma captura balística na Lua, levando à uma redução de uso de combustível significativa se comparada à manobra normalmente utilizada.

Diferentemente da transferência de Hohmann que é baseada no modelo de dois corpos, as transferências de baixo empuxo se pautam em um modelo mais completo e realista. A introdução a este tipo de modelo é complexa e, nele, perde-se a capacidade da obtenção de soluções analíticas pois o problema não é mais integrável. A conservação do momento angular some e os parâmetros orbitais são definidos apenas como uma variação do movimento Kepleriano de dois corpos. E mesmo que os modelos de n -corpos fossem governados pela dinâmica Newtoniana, eles se tornariam caóticos e o desenho da trajetória, desafiador. (F VASILE M, 2004)

O melhor incremento a ser dado ao problema de dois corpos, neste caso, reside no problema circular restrito de três corpos (PCR3C) o qual envolve apenas uma integral de movimento (Constante de Jacobi) que traz informações necessárias para o novo tipo de trajetória por meio dos pontos lagrangianos e as órbitas periódicas e quasi-periódicas que se formam em torno deles e suas associadas variedades invariantes (generalização de superfície). (F VASILE M, 2004)

Neste capítulo o PR3C e os fatores que derivam dele serão expostos com intuito de facilitar o entendimento do problema em termos gerais e conseqüentemente introduzir a transferência de baixo empuxo de maneira fluida.

4.2 Problema Restrito de 3 Corpos (PR3C)

4.2.1 Histórico

O problema de três corpos foi apresentado primeiramente por Isaac Newton no século XVII. Porém, as leis do movimento criadas por Newton tinham como foco o mo-

vimento de dois corpos, tornando inviável o estudo do movimento de três corpos, se aproximações não fossem feitas.

Euler, posteriormente, sugeriu o estudo considerando uma das massas sendo infinitesimal. Dessa maneira, dado dois corpos de massa m_1 e m_2 , sob influência de suas atrações gravitacionais mútuas, o terceiro corpo de massa negligenciável, movia-se no plano definido por estes dois corpos, porém a influência gravitacional do corpo infinitesimal no movimento dos outros corpos era restrita (SILVA, 2017). Assim, surgiu o problema restrito de três corpos, o qual descreve inúmeras interações do sistema solar, incluindo o movimento da Lua.

4.2.2 Equações do Movimento

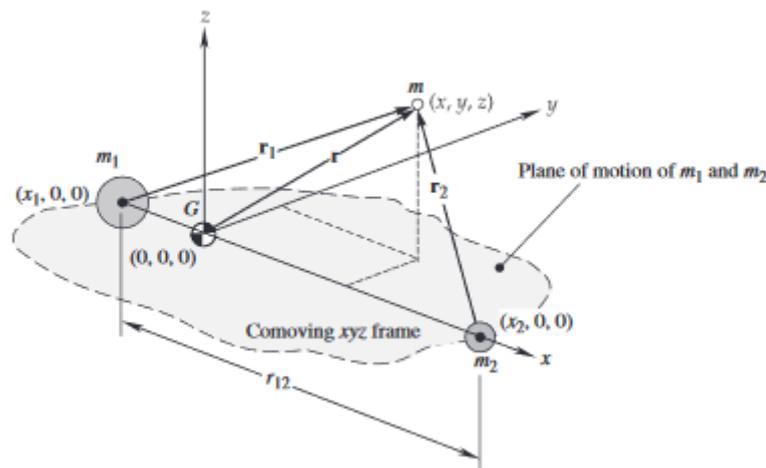


Figura 10 – Configuração do PR3C. (CURTIS, 2014)

Considere dois corpos m_1 e m_2 , movendo sob a influência mútua de suas gravidades e assuma que a órbita em torno deles é um círculo de raio r_{12} . Considere um sistema de referência xyz móvel, não inercial no qual a origem reside no centro de massa G do sistema de dois corpos, com o eixo x apontado para m_2 , o eixo y fica no plano orbital ao qual o eixo z é ortogonal. Neste sistema girante de referência, m_1 e m_2 aparentam estar em repouso devido ao equilíbrio entre a força gravitacional e a força centrípeta fictícia necessária para manter um caminho circular em torno do centro de massa do sistema. (CURTIS, 2014)

Da dedução do PR3C por (CURTIS, 2014), ao assumir que a m_1 e $m_2 \gg m$, como no caso de um satélite orbitando a Lua, temos que a massa total do sistema $M = m_1 + m_2$ onde m_1 seria a massa da Terra, m_2 a da Lua e o parâmetro gravitacional deste sistema seria $\mu = GM$.

Para se definir a posição de m_1 e m_2 no plano orbital, utiliza-se o conceito de

centro de massa:

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \quad (4.1)$$

Pela Figura 10, r_{12} é a distância entre m_2 e m_1 , logo

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}r_{12} \quad (4.2)$$

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}r_{12} \quad (4.3)$$

Para fins de simplificação, as razões constantes de massa adimensionais serão representadas por:

$$\sigma_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (4.4)$$

$$\sigma_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.5)$$

Após a definição das posições dos dois corpos, o objetivo está em definir a influência gravitacional que estes possuem sobre o corpo de massa m . Ressalva que não existe uma solução fechada para este tipo de problema, mas conclusões gerais podem ser tomadas a partir das equações do movimento.

Dito isso, a posição do corpo m relativo aos outros corpos é dada por:

$$\mathbf{r}_1 = (x - x_1)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = (x + \sigma_2r_{12})\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.6)$$

e

$$\mathbf{r}_2 = (x - x_2)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = (x - \sigma_1r_{12})\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.7)$$

Logo, o vetor posição da massa m em relação ao centro de massa é:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.8)$$

Tendo em vista que o sistema de coordenadas xyz está girando com uma velocidade angular ω relativa ao espaço inercial, as equações da velocidade e aceleração absolutas considerando um sistema girante são:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_G + \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel} \quad (4.9)$$

e

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_{\mathbf{G}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (4.10)$$

Onde $\mathbf{v}_{\mathbf{G}}$ é a velocidade inercial do centro de massa e \mathbf{v}_{rel} e \mathbf{a}_{rel} são:

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.11)$$

e

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.12)$$

Sabe-se que a velocidade angular inercial $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}$ de uma órbita circular é constante e depende apenas do período T pela fórmula:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.13)$$

e que o período orbital é definido por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r_{12}^{\frac{3}{2}} \quad (4.14)$$

Fazendo uma substituição simples, encontra-se

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{r_{12}^3}} \quad (4.15)$$

Considerando que a velocidade do centro de massa $\mathbf{v}_{\mathbf{G}}$ é constante, então $\mathbf{a}_{\mathbf{G}} = 0$. O mesmo se aplica à $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, reduzindo assim a equação 4.10 para:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (4.16)$$

Fazendo as devidas substituições de valores na equação 4.16 chegamos a aceleração inercial em termos do sistema girante:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x)\hat{\mathbf{i}} + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y)\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.17)$$

Aplicando a segunda lei de Newton no corpo de massa m :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (4.18)$$

Logo,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3}\mathbf{r}_2 \quad (4.19)$$

Substituindo os valores de \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , igualando 4.17 e 4.19 e separando cada componente, chegamos a três equações escalares de movimento para o problema restrito de três corpos:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = -\frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \sigma_2r_{12}) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \sigma_1r_{12}) \quad (4.20)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y = -\frac{\mu_1}{r_1^3}y - \frac{\mu_2}{r_2^3}y \quad (4.21)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu_1}{r_1^3}z - \frac{\mu_2}{r_2^3}z \quad (4.22)$$

4.3 Normalização do Problema Circular Planar Restrito de 3 Corpos

O problema circular, planar, restrito de três corpos é um caso particular do problema de três corpos geral. Devido às suas particularidades, no caso em questão, assumimos que os corpos primários, Terra e Lua, movem-se em órbitas circulares e coplanares ao redor do centro de massa do sistema com a mesma velocidade angular e que o movimento do corpo de massa infinitesimal m_3 fica restrito ao plano das órbitas e é regido pela atração gravitacional de m_1 e m_2 . Sabe-se que as órbitas de objetos no Sistema Solar não estão em um mesmo plano e também não são circulares, porém, este método descreve com boa aproximação o movimento destes corpos e é extremamente utilizado no estudo da mecânica celeste. (MELO, 2006)

Normalizações podem ser feitas para simplificar as equações do movimento geral 4.20, 4.21, 4.22. Primeiramente, para adimensionalizar o sistema, considera-se a razão entre a massa da menor primária e a massa total do sistema $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, em segundo lugar, normaliza-se a distância entre as primárias como $r_{12} = 1$. A unidade de tempo utilizada considera os períodos orbitais das primárias em torno do seu centro de massa T_1 e T_2 iguais a 2π e, conseqüentemente, movimento médio $n_i = 2\pi/T_i$ e velocidades angulares em relação ao centro de massa serão iguais a 1. (MELO, 2006)

É comum, nessas situações, introduzir um sistema novo de coordenadas (x,y,z) baricêntrico girante (sinódico), que possui sua origem no centro de massa das primárias com os eixo x e y girando com velocidade angular igual a de m_1 e m_2 em relação à

origem. Para efeitos de normalização, a posição de m_1 neste sistema é $(-\mu, 0)$ e m_2 está posicionada em $(1 - \mu, 0)$. (BELBRUNO; TOPPUTO, 2012)

Após terem sido feitas as normalizações necessárias, as equações do movimento se tornam

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu\frac{x - 1 + \mu}{r_2^3} \quad (4.23)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - (1 - \mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} \quad (4.24)$$

$$\ddot{z} = -(1 - \mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\frac{z}{r_2^3} \quad (4.25)$$

Onde r_1 e r_2 são a distância do terceiro corpo para as primárias de maior e menor massa, respectivamente

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2} \quad (4.26)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2} \quad (4.27)$$

Lembra-se que ao se tratar de um problema no plano orbital (x,y), a coordenada z sumirá das equações apresentadas.

4.4 Pontos Lagrangianos

Os Pontos de Lagrange, foram inicialmente descobertos e apresentados pelo matemático Giuseppe Luigi Lagrange em 1772 por meio do estudo do problema geral de três corpos. Estes consistem em cinco pontos de equilíbrio (L_1 - L_5) em que uma pequena massa pode orbitar com um padrão constante na vizinhança de duas massas grandes que orbitam entre si, reduzindo desta maneira o gasto de combustível necessário para se manter em uma posição específica. Esses pontos são locais em que a atração gravitacional das duas grandes massas igualam a força centrípeta necessária para que m tenha velocidade e aceleração nulas e uma vez colocado um corpo lá, este em repouso ficaria relativamente à m_1 e m_2 , indefinidamente. (NASA, 2018)

A nomenclatura adotada neste trabalho assume que L_1 fica entre as duas primárias e L_2 fica mais distante ao lado direito da menor primária, como apresentado na Figura 11

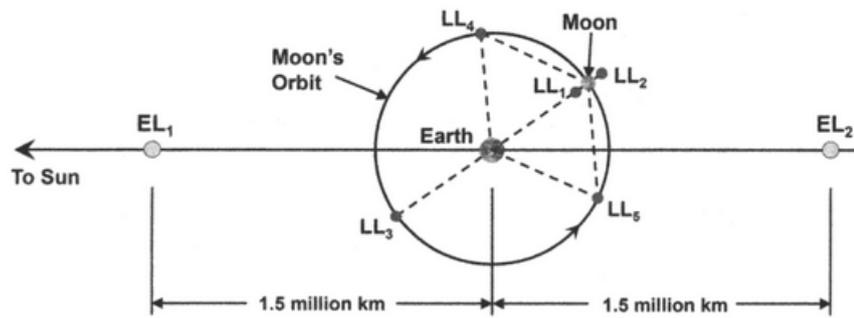


Figura 11 – Disposição dos dois pontos lagrangianos Sol-Terra mais próximos EL_1 , EL_2 e dos cinco Terra-Lua LL_1 - LL_5 . (PARKER, 2013)

Estes pontos de equilíbrio já foram muito utilizados em missões espaciais que visavam a observação do Sol como a Sun-Earth Explorer 3 em 1978, o *Solar and Heliocentric Observatory* (SOHO) em 1995 e o *Advanced Composition Explorer* em 1997 que foram colocados em uma órbita *Halo* em torno do ponto L_1 do sistema Sol-Terra. Mais recentemente, em 2001, o *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) foi colocado no ponto L_2 do sistema Sol-Terra para medir radiação cósmica de fundo e com o lançamento programado para 2021, o satélite sucessor do *Hubble*, *James Webb Space Telescope* que ficará orbitando o ponto L_2 . (CURTIS, 2014)

Para encontrar estes pontos de equilíbrio basta aplicar as condições de velocidade e aceleração nulas nas equações de movimento do problema restrito de três corpos.

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \quad (4.28)$$

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0 \quad (4.29)$$

Após o desenvolvimento dos cálculos com as condições iniciais dadas, é possível estimar o local de cada ponto de Lagrange relativo ao centro da terra e em função da distância entre as duas grandes massas, neste caso, Terra e Lua. De acordo com (CURTIS, 2014):

Ponto de Lagrange	X	Y
L_1	0.8369	0
L_2	1.1556	0
L_3	-1.0051	0
L_4	0.4878	0.8660
L_5	0.4878	-0.8660

Tabela 2 – Localização dos pontos de Lagrange Terra-Lua no plano xy (MELO, 2006)

Dos cinco Pontos Lagrangianos, 3 são instáveis e 2 são estáveis. Os instáveis L_1 , L_2 e L_3 estão no eixo que liga as duas massas grandes e são chamados de pontos colineares. Os estáveis são os pontos L_4 e L_5 que são chamados de triangulares por formarem triângulos equiláteros com as primárias em dois de seus vértices.

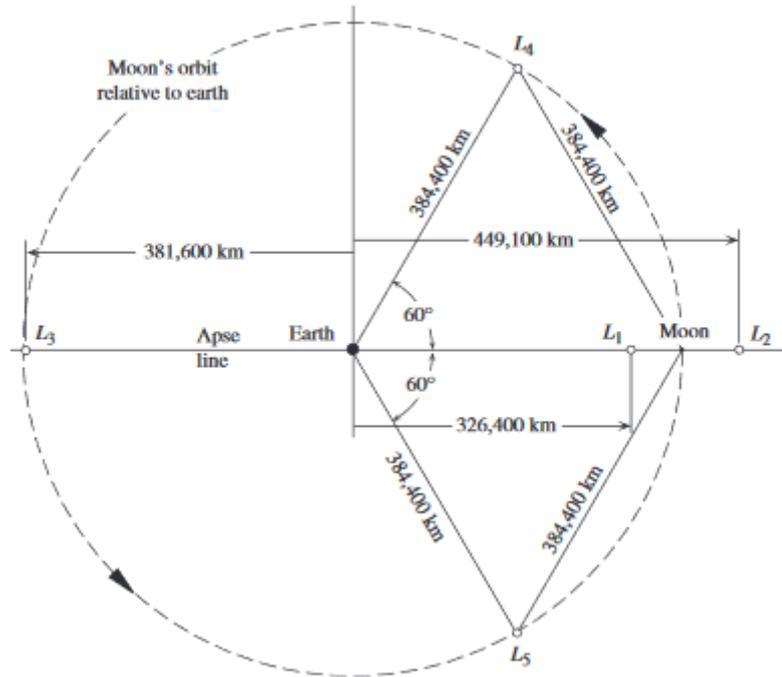


Figura 12 – Posição dos Pontos de Lagrange no sistema Terra-Lua. (CURTIS, 2014)

4.5 Constante de Jacobi e a Região de Hill

A constante ou integral de Jacobi, C , descoberta pelo matemático alemão Carl Jacobi em 1836, é uma integral única no movimento da partícula secundária m em um problema de três corpos, da mesma maneira que a energia e o momento angular são constantes do movimento relativo em um problema de dois corpos. (CURTIS, 2014)

De acordo com (DAVIS RODNEY L. ANDERSON; BORN, 2010), se multiplicarmos as equações do movimento 4.23, 4.24, 4.25 por $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$, respectivamente, somarmos o lado esquerdo e direito de todas elas e integrarmos para obter a constante de Jacobi, temos:

$$C = 2\Omega - V^2 \quad (4.30)$$

Onde Ω é o potencial efetivo e V é a velocidade, os quais podem ser determinados por:

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (4.31)$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (4.32)$$

A constante de Jacobi adimensionalizada e normalizada no sistema de coordenadas sinódico resulta em

$$C = x^2 + y^2 + 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 \quad (4.33)$$

Embora a integral de Jacobi não apresente uma solução exata para o problema, ela é utilizada para delimitar regiões de transito proibido para a massa infinitesimal m . Os limites que separam áreas permitidas de proibidas são obtidos ao tomar $\dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = 0$ na equação 4.33. Logo:

$$C = x^2 + y^2 + 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (4.34)$$

Para um dado valor de C , superfícies de velocidade zero são então determinadas e a interseção destas com o plano xy define as curvas de velocidade zero, também conhecidas como Região de Hill, que delimitam as regiões permitidas e proibidas do plano e correspondem a valores negativos da constante de Jacobi. (MELO, 2006)

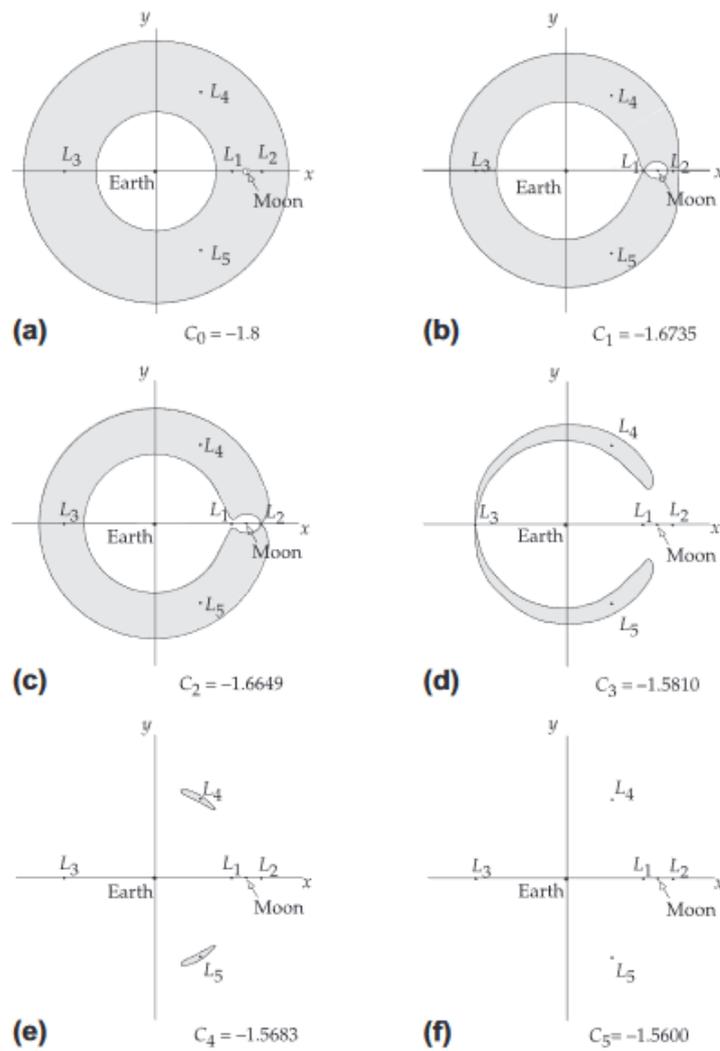


Figura 13 – Regiões proibidas (cinza) e regiões permitidas (branco) para valores diferentes da constante de Jacobi [km^2/s^2]. (CURTIS, 2014)

5 Transferências de Baixo Empuxo Para a Lua Com Captura Gravitacional

5.1 Introdução

Transferências de baixo empuxo entre a Terra e a Lua vem recebendo crescente atenção nos últimos anos pela sua natureza flexível em termos de janelas de oportunidade e seu potencial em reduzir o consumo de combustível neste tipo de trajeto. As missões Artemis e GRAIL demonstraram os benefícios desse tipo de transferência. A missão Artemis, por exemplo, só foi possibilitada por contar com uma transferência de baixo empuxo, pois nenhum dos seus dois veículos espaciais possuía o combustível necessário para uma transferência tradicional. A missão GRAIL se beneficiou da flexibilidade dessa manobra de baixo empuxo e estabeleceu um período de lançamento robusto de 21 dias. (PARKER, 2014)

Existem inúmeros tipos de famílias de trajetórias de baixo empuxo, algumas tem como finalidade a entrada em uma órbita polar em torno da Lua, algumas tem como foco a chegada à órbitas periódicas ou quasi-periódicas em torno dos pontos Lagrangianos L_1 e L_2 do sistema Terra-Lua e algumas são destinadas à superfície lunar. Estas transferências contam sempre com uma injeção translunar (TLI), algumas correções de trajetória e uma manobra de inserção que conta com uma captura balística, também conhecida como captura gravitacional, pela Lua, reduzindo significativamente o Δv da manobra em questão. Adicionalmente, *flybys* lunares e/ou *Earth Phasing Orbits* podem ocorrer alterando a performance da transferência. (PARKER, 2013)

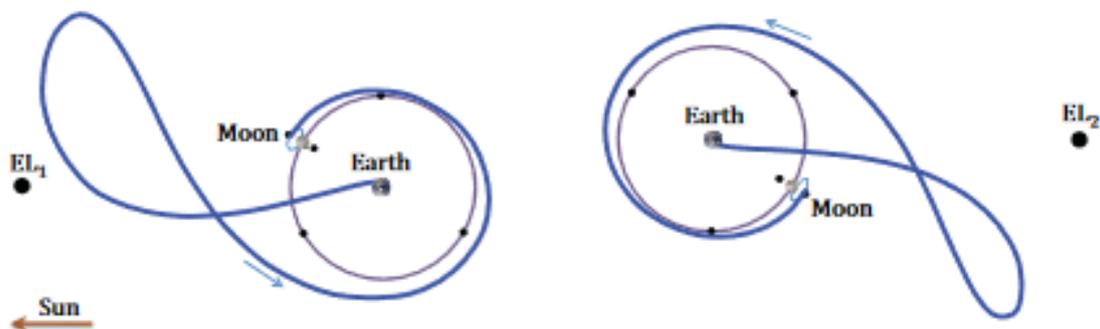


Figura 14 – Transferências de baixo empuxo com captura gravitacional no sistema girante Sol-Terra vista de cima da eclíptica . (PARKER, 2014)

A transferência que será estudada neste capítulo é caracterizada pela utilização dos efeitos perturbativos do sistema Terra-Lua-Sol sobre a sonda de massa infinitesimal m durante toda a trajetória, afim de se chegar à uma captura gravitacional. Trata-se de um problema de quatro corpos que, de maneira semelhante ao método das *patched conics*, será tratado como dois problemas de três corpos. A técnica para tal feito requer uma estimativa de regiões no espaço de fase (espaço posição-velocidade) onde os efeitos perturbativos da Terra-Lua-Sol sobre m se equilibram. Essas regiões são chamadas de *Weak Stability Boundaries* (WSB) e são definidas ao se estudar o movimento estável em relação a um corpo específico. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

De acordo com (KOON MARTIN W. LO; ROSS, 2000) se dois sistemas de problema de três corpos com seus pontos lagrangianos e associadas variedades invariantes se intersectarem na configuração do espaço, a transferência com um baixo Δv é possível.

Para que este tipo de trajetória de baixo custo seja compreendido, a explicação de cada fator determinante será dada a seguir e o seu método aplicado na missão *Hiten* será exposto.

5.2 Captura Gravitacional

O fenômeno da captura gravitacional e suas aplicações estão entre as vertentes mais estudadas em Mecânica Celeste nas últimas duas décadas. Principalmente por ser convenientemente explorado para colocar naves espaciais em órbitas de corpos celestes como uma técnica de reduzir o consumo de combustível. (MELO, 2006)

Este fenômeno é previsto pelo PR3C e ocorre quando um corpo em baixa velocidade muda de uma trajetória hiperbólica com energia positiva $H > 0$ em torno de uma das primárias para uma órbita elíptica com energia negativa $H < 0$ sem o uso de sistemas propulsivos. (MELO, 2006) e (PRADO, 2006)

Da equação da Vis-Viva, a energia Kepleriana é dada por:

$$H = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (5.1)$$

A captura gravitacional é essencial pois ao eliminar a velocidade hiperbólica de excesso V_∞ relativa à Lua, o gasto de propelente se torna nulo. Embora essa captura seja instável, ela requer um quantidade de Δv negligenciável para se tornar estável, isto é, para dar ao menos uma revolução em torno da Lua. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

5.3 Órbitas Periódicas

Transferências de baixo empuxo frequentemente utilizam os pontos Lagrangianos como parte do caminho que reduzirá a quantidade de propelente para se chegar a Lua ou

mesmo como o destino final para a inserção de satélites ou sondas em torno dos pontos.

Este fenômeno só é possível pela existência de famílias de órbitas periódicas e quasi-periódicas ao redor dos pontos de Lagrange as quais já foram muito estudadas pela comunidade científica e são classificadas em três tipos:

1. Órbita *Lissajous*
2. Órbita *Halo*
3. Órbita *Lyapunov*

Órbitas *Lissajous* são um tipo de órbita quasi-periódica que percorrem uma trajetória em torno de um toro, mas que nunca se fecham no mesmo ponto, requerendo uma quantidade de energia para se manterem ao passar do tempo. Órbitas *Halo* são um caso especial de órbitas *Lissajous* periódicas onde as frequências dentro e fora do plano se estabilizam. Órbitas *Lyapunov* são órbitas planas e periódicas e serão vistas de novo quando a missão *Hiten* for analisada. (DAVIS RODNEY L. ANDERSON; BORN, 2010)

5.4 *Weak Stability Boundaries* e Variedades Invariantes

Seja a transferência para os pontos de Lagrange L_1 , L_2 do sistema Terra-Lua ou para uma órbita polar em torno da Lua, o método descoberto por (BELBRUNO, 1987) envolve o uso de *weak stability boundaries* e, posteriormente, a sua conexão com variedades invariantes foi comprovada. As *weak stability boundaries* são regiões de transição no espaço onde os efeitos dinâmicos da interação dos campos gravitacionais dos corpos primários sobre a sonda de massa infinitesimal se equilibram e que definem se o seu movimento é estável ou não. Este tipo de região existe sobre a Lua - WSB(L), devido os efeitos da Terra e do Sol e sobre a Terra - WSB(T), devido os efeitos da Lua e do Sol. As transferências são obtidas ao se utilizar trajetórias que conectem as WSB. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

Na matemática, ao se falar de uma variedade, entende-se como um espaço topológico, uma superfície. Um objeto que, quando examinado localmente, em porções pequenas, assemelha-se a um espaço euclidiano. (SCHUTZER, 2019) Variedades invariantes são definidas como trajetórias que assintoticamente partem ou se aproximam de uma órbita. A variedade instável (W^U) inclui o conjunto de todas as possíveis trajetórias em que uma partícula parte de sua órbita nominal ao se fazer uma integração prógrada. A variedade estável (W^S) engloba o conjunto de todas as possíveis trajetórias que possibilitam a chegada à uma determinada órbita nominal. Cada órbita, se fixado um valor C em uma variação de energia apropriada, possui dois conjuntos de variedades estáveis e instáveis associados: uma correspondendo à perturbação positiva e outra à perturbação negativa. (DAVIS RODNEY L. ANDERSON; BORN, 2010)

Dessa maneira, variedades estáveis e instáveis são variedades bidimensionais localmente difeomorfas a cilindros. (BELBRUNO; GIDEA; TOPPUTO, 2010)

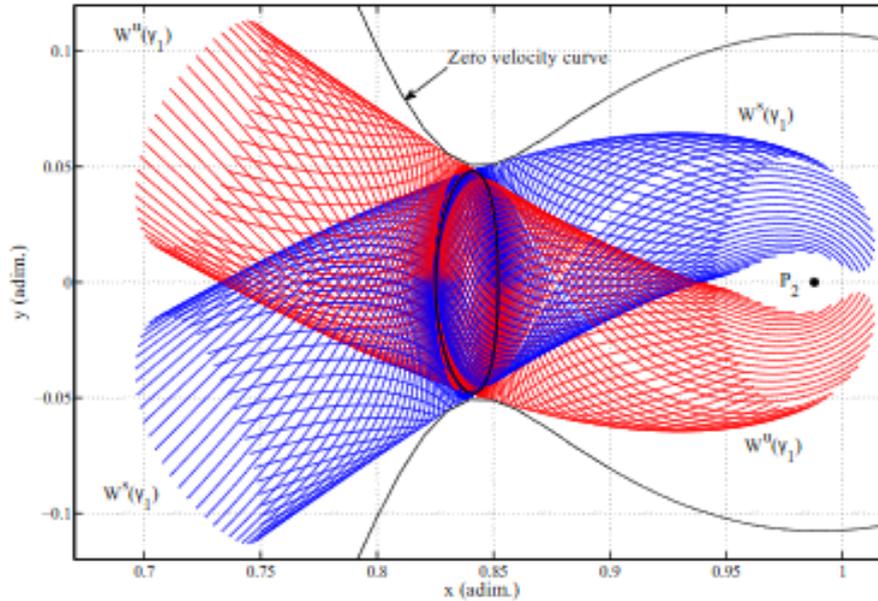


Figura 15 – Variedades invariantes da órbita *Lyapunov* em torno do ponto de Lagrange L_1 . Em vermelho, variedade instável e em azul, variedade estável. (BELBRUNO; GIDEA; TOPPUTO, 2010)

5.4.1 Mapas de Poincaré

O uso de variedades invariantes em transferências entre órbitas utilizando o problema circular, planar, restrito de três corpos já foi bastante explorado e se resume na conexão entre variedades estáveis e instáveis. Os estudos de (CONLEY, 1968) e (MCGEHEE, 1969) provaram a existência de conexões homoclínicas, situadas na interseção entre uma W^S e uma W^U de um ponto de equilíbrio ou órbita periódica. Por outro lado, (KOON MARTIN W. LO; ROSS, 2000) demonstrou a existência de conexões heteroclínicas, situadas na interseção entre a W^U de uma órbita periódica e a W^S de uma outra órbita periódica. (DAVIS RODNEY L. ANDERSON; BORN, 2010)

Mapas de Poincaré são utilizados para localizar essas conexões heteroclínicas entre órbitas de mesma energia ou mesma constante de Jacobi. Neste mapa, para um dado sistema n -dimensional, uma superfície de dimensão $(n - 1)$ de seção Σ pode ser colocada transversalmente ao fluxo. O mapa é criado intersectando uma trajetória em \mathbb{R}^n com a seção Σ . (DAVIS RODNEY L. ANDERSON; BORN, 2010)

Ao se analisar um mapa de Poincaré construído para uma transferência entre as órbitas *Lyapunov* em torno dos pontos Lagrangianos 1 e 2 do sistema Terra-Lua, temos:

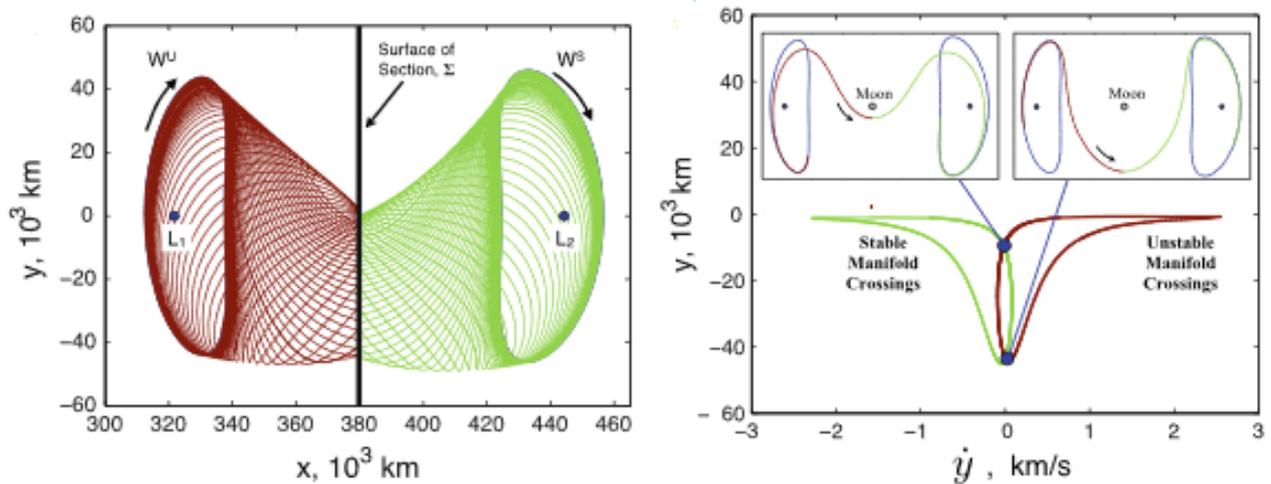


Figura 16 – À esquerda, variedades de duas órbitas *Lyapunov* integradas à superfície de seção Σ . À direita, um mapa de Poincaré mostra a passagem de uma W^U para uma W^S . A interseção dessas curvas representa conexões heteroclínicas. (DAVIS RODNEY L. ANDERSON; BORN, 2010)

5.5 Modelo de Transferência Terra-Lua de Baixo Empuxo com Efeitos Perturbativos do Sol

O modelo de missão Terra-Lua, utilizando-se os benefícios das *weak stability boundaries* para se obter uma captura gravitacional no fim do trajeto, proposto por (BELBRUNO; MILLER, 1993), consiste, essencialmente, em sair de uma órbita baixa em torno da Terra e fazer um *flyby* na Lua para ganhar a energia necessária para se chegar à WSB(T) que se encontra à, aproximadamente, quatro distâncias Terra-Lua ou 1.5×10^6 km. Quando a sonda de massa m se encontra na WSB(T), pequenas variações desviam a trajetória devido a sensibilidade desta região. Desta maneira, uma pequena quantidade de Δv pode ser despendida por propulsores elétricos para corresponder às condições iniciais de uma captura gravitacional conectando WSB(T) e WSB(L).

Em um exemplo deste tipo de transferência apresentado na Figura 17, o Sol está localizado no lado oposto da Terra quando a sonda se encontra na WSB(T). Estudos indicam que a função primária do Sol neste tipo de transferência está em remover o momento angular da órbita da massa m , dessa maneira, a dinâmica da órbita associada ao método das WSB se relaciona com a maré solar e oportunidades de lançamento ocorrem duas vezes a cada mês lunar. (MILLER; BELBRUNO, 1991)

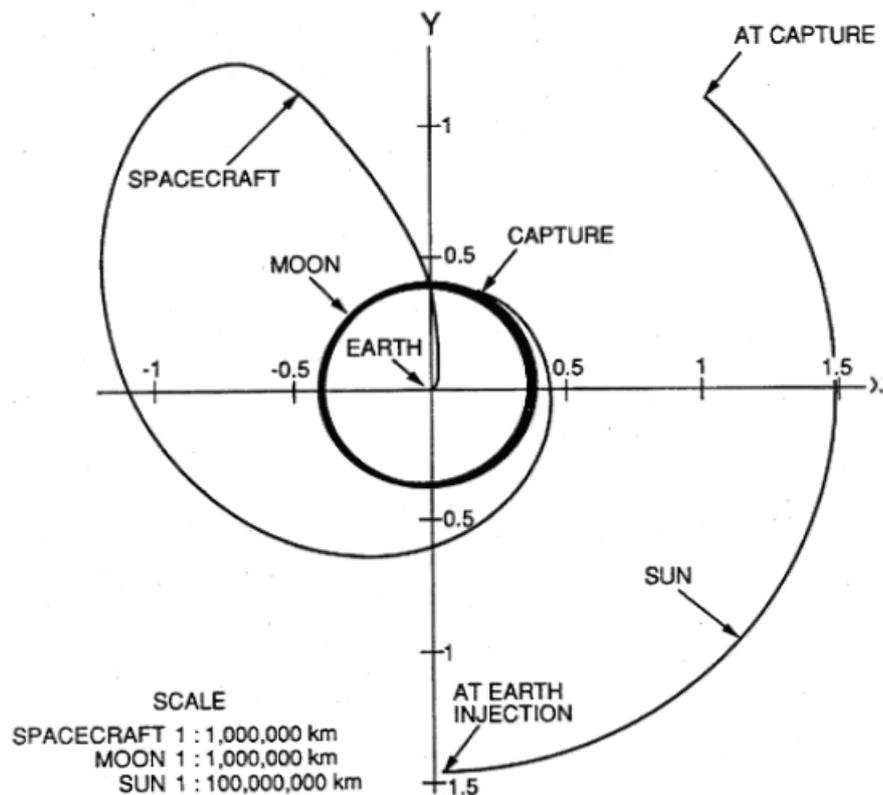


Figura 17 – Projeção no plano da eclíptica de uma transferência de baixo empuxo com captura gravitacional. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

O método apresentado oferece duas vantagens em relação às abordagens clássicas. A primeira está na ida até a WSB(T), permitindo um aumento do periapsis por um Δv ínfimo devido a sensibilidade da região. A segunda vantagem consiste no fato de que ao se beneficiar da WSB(L), por meio da captura gravitacional, a velocidade hiperbólica de excesso é eliminada e quando a trajetória entra em seu periapsis com as suas condições de captura necessárias, à uma determinada distância da Lua, a trajetória possui um estado elíptico em relação à Lua, possibilitando a colocação de carga paga em órbita circular e diminuindo ainda mais o Δv da transferência. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

5.5.1 Formulação Matemática do Modelo

Devido a não linearidade do problema, os resultados são obtidos por integração numérica e a geometria por teoria de sistemas dinâmicos que explica vários comportamentos observados. A formulação geral do conceito de transferências utilizando as *weak stability boundaries* apresentada a seguir foi criada por (BELBRUNO; MILLER, 1993).

O movimento da massa infinitesimal m é descrito pelo problema de quatro corpos entre m , Sol, Terra e Lua e a única força agindo entre as massas é dada pela lei da

gravitação universal, dessa maneira, as equações do movimento são dadas por:

$$m_k \ddot{x}_k = \sum_{i=1}^4 G m_i m_k |x_i - x_k|^{-3} (x_i - x_k) \quad (5.2)$$

Onde $k = 1, 2, 3, 4$ e $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}) \in \mathfrak{R}^3$ é a posição em coordenadas inerciais (x, y, z) da massa infinitesimal m_k . Portanto, fazendo as substituições necessárias, chegamos a um sistema de ordem 12. De acordo com (MELO, 2006),

Para a massa m_1 :

$$\ddot{x}_{11} = \mu_2 \frac{x_{21} - x_{11}}{r_{12}^3} + \mu_3 \frac{x_{31} - x_{11}}{r_{13}^3} + \mu_4 \frac{x_{41} - x_{11}}{r_{14}^3} \quad (5.3)$$

$$\ddot{x}_{12} = \mu_2 \frac{x_{22} - x_{12}}{r_{12}^3} + \mu_3 \frac{x_{32} - x_{12}}{r_{13}^3} + \mu_4 \frac{x_{42} - x_{12}}{r_{14}^3} \quad (5.4)$$

$$\ddot{x}_{13} = \mu_2 \frac{x_{23} - x_{13}}{r_{12}^3} + \mu_3 \frac{x_{33} - x_{13}}{r_{13}^3} + \mu_4 \frac{x_{43} - x_{13}}{r_{14}^3} \quad (5.5)$$

Para a massa m_2 :

$$\ddot{x}_{21} = \mu_1 \frac{x_{11} - x_{21}}{r_{12}^3} + \mu_3 \frac{x_{31} - x_{21}}{r_{23}^3} + \mu_4 \frac{x_{41} - x_{21}}{r_{24}^3} \quad (5.6)$$

$$\ddot{x}_{22} = \mu_1 \frac{x_{12} - x_{22}}{r_{12}^3} + \mu_3 \frac{x_{32} - x_{22}}{r_{23}^3} + \mu_4 \frac{x_{42} - x_{22}}{r_{24}^3} \quad (5.7)$$

$$\ddot{x}_{23} = \mu_1 \frac{x_{13} - x_{23}}{r_{12}^3} + \mu_3 \frac{x_{33} - x_{23}}{r_{23}^3} + \mu_4 \frac{x_{43} - x_{23}}{r_{24}^3} \quad (5.8)$$

Para a massa m_3 :

$$\ddot{x}_{31} = \mu_1 \frac{x_{31} - x_{11}}{r_{13}^3} + \mu_2 \frac{x_{31} - x_{21}}{r_{23}^3} + \mu_4 \frac{x_{41} - x_{31}}{r_{34}^3} \quad (5.9)$$

$$\ddot{x}_{32} = \mu_1 \frac{x_{32} - x_{12}}{r_{13}^3} + \mu_2 \frac{x_{32} - x_{22}}{r_{23}^3} + \mu_4 \frac{x_{42} - x_{32}}{r_{34}^3} \quad (5.10)$$

$$\ddot{x}_{33} = \mu_1 \frac{x_{33} - x_{13}}{r_{13}^3} + \mu_2 \frac{x_{33} - x_{23}}{r_{23}^3} + \mu_4 \frac{x_{43} - x_{33}}{r_{34}^3} \quad (5.11)$$

Para a massa m_4 :

$$\ddot{x}_{41} = \mu_1 \frac{x_{41} - x_{11}}{r_{14}^3} + \mu_2 \frac{x_{41} - x_{21}}{r_{24}^3} + \mu_3 \frac{x_{31} - x_{41}}{r_{34}^3} \quad (5.12)$$

$$\ddot{x}_{42} = \mu_1 \frac{x_{42} - x_{12}}{r_{14}^3} + \mu_2 \frac{x_{42} - x_{22}}{r_{24}^3} + \mu_3 \frac{x_{32} - x_{42}}{r_{34}^3} \quad (5.13)$$

$$\ddot{x}_{43} = \mu_1 \frac{x_{43} - x_{13}}{r_{14}^3} + \mu_2 \frac{x_{43} - x_{23}}{r_{24}^3} + \mu_3 \frac{x_{33} - x_{43}}{r_{34}^3} \quad (5.14)$$

Onde:

$$r_{12}^2 = (x_{21} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{12})^2 + (x_{23} - x_{13})^2 \quad (5.15)$$

$$r_{13}^2 = (x_{31} - x_{11})^2 + (x_{32} - x_{12})^2 + (x_{33} - x_{13})^2 \quad (5.16)$$

$$r_{14}^2 = (x_{41} - x_{11})^2 + (x_{42} - x_{12})^2 + (x_{43} - x_{13})^2 \quad (5.17)$$

$$r_{23}^2 = (x_{31} - x_{21})^2 + (x_{32} - x_{22})^2 + (x_{33} - x_{23})^2 \quad (5.18)$$

$$r_{24}^2 = (x_{41} - x_{21})^2 + (x_{42} - x_{22})^2 + (x_{43} - x_{23})^2 \quad (5.19)$$

$$r_{34}^2 = (x_{41} - x_{31})^2 + (x_{42} - x_{32})^2 + (x_{43} - x_{33})^2 \quad (5.20)$$

Retomando a dedução de (BELBRUNO; MILLER, 1993), os valores iniciais $x_k(0)$ e $\dot{x}_k(0)$ para $k = 2, 3, 4$ representados pelo Sol, Terra e Lua, respectivamente, são dados pela época de interesse correspondente a $t = 0$. Busca-se encontrar os valores $x_1(0)$ e $\dot{x}_1(0)$ para m chegar à Lua com uma captura gravitacional dada uma certa posição em torno da Terra.

Considerando que a transferência com WSB utiliza regiões onde o movimento estável acontece em relação a um corpo central, no caso em questão, Terra e Lua, a equação 5.2 pode ser remodelada para que o movimento seja definido em relação a cada um desses corpos. Dessa maneira, em relação à Terra, $\bar{x}_k = x_k - x_3$ onde $\bar{x}_3 = 0$ é a origem. Este sistema de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é não inercial onde as equações do movimento para \bar{x}_k , $k = 1, 2, 4$ são definidas por:

$$m_k \ddot{\bar{x}}_k = \sum_{i=1}^4 G m_i m_k |\bar{x}_i - \bar{x}_k|^{-3} (\bar{x}_i - \bar{x}_k) - \sum_{i=1}^4 G m_i m_3 |\bar{x}_i|^{-3} \bar{x}_i \quad (5.21)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado em relação à Lua assumindo $\bar{x}_k = x_k - x_4$, para $i = 1, 2, 3$.

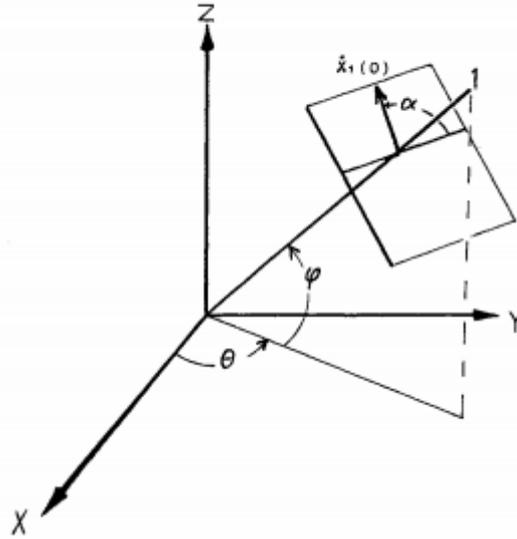


Figura 18 – Os ângulos α , θ , φ , definem a direção de propagação da trajetória em relação à Terra no tempo $t = 0$. Em $t = 0$ o eixo x aponta na direção da linha Terra-Sol e β é o ângulo entre o eixo x e a linha Terra-Lua. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

O movimento estável em relação à Terra é definido escolhendo-se a direção radial D da Terra dada pelos ângulos esféricos $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Assume-se l como a linha que divide a direção D ao meio e que começa na origem. $\Phi(t) = [x_1(t), \dot{x}_1(t)]$ representa a trajetória do movimento de m tal como a solução para a equação 5.21, tal que $x_1(0) \in l$ e

$$[x_1(0), \dot{x}_1(0)] = \sum_{k=1}^3 x_{1k}(0)\dot{x}_{1k}(0) = 0 \quad (5.22)$$

Assume-se também que, o estado Kepleriano de m em l , para $t = 0$, tem a mesma excentricidade $e \in [0, 1)$. O semiplano P , na Figura 19, passando por l e perpendicular a $x_1(0)$ é transversal à curva $x_1(t)$ em $t = 0$. Ou seja, o ângulo entre $\dot{x}_1(0)$ e P é diferente de zero. A sonda de massa m gira em torno da Terra sob as seguintes condições:

1. A posição $x_1(0) \in P$
2. Existe um primeiro momento $T > 0$, tal que $x_1(T)$ é transversal a P
3. A distância de m para a Terra será menor do que a distância da Terra para o Sol quando a órbita de m projetada no plano Terra-Sol, antes de retornar a P , atravessar a linha que liga a Terra ao Sol.

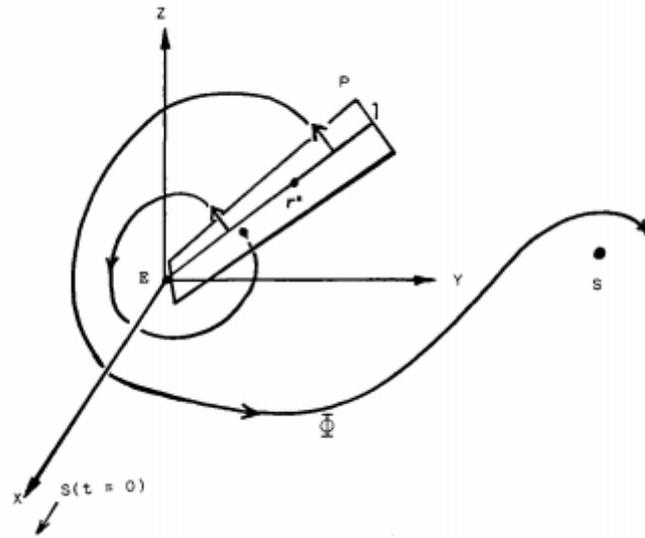


Figura 19 – Estimativa da distância entre a WSB r_3^* e a Terra (BELBRUNO; MILLER, 1993)

Se $|x_1(0)|$ é suficientemente pequeno, m irá girar em torno da Terra onde T é próximo a um período Kepleriano e $\Phi(T) \approx \Phi(0)$. Neste caso os efeitos perturbativos do Sol e da Lua são negligenciados. Entretanto, com o aumento de $|x_1(0)|$ a sonda irá girar em torno da Terra, mas entrará em uma órbita Φ mais distante do seu estado elíptico inicial devido às perturbações do Sol e da Lua que agora impactam mais. Análises numéricas mostram que para um valor suficientemente grande de $|x_1(0)|$, m será puxado para longe da Terra e acabará violando a terceira condição. É provado numericamente que uma distância bem definida $r^* > 0$ existe tal que o movimento da sonda é definido como estável se $r < r^*$ e instável se $r > r^*$.

Do mesmo modo, pode-se determinar o movimento estável ao redor da Lua. A nova linha de referência l deve ser centrada na Lua e troca-se o Sol pela Terra e a Terra pela Lua na definição. Onde r_k^* , $k = 3, 4$, é determinado em relação à partícula m_k , logo:

$$r_k^* = r_k^*(\theta, \varphi, \alpha, \beta, e) \quad (5.23)$$

Então WSB_k , onde $k = 3, 4$ representa as *weak stability boundaries* da Terra e da Lua, respectivamente, é definida por:

$$WSB_k = \{r_k^* | \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], \alpha \in [0, 2\pi], \beta \in [0, 2\pi], e \in [0, 1)\} \quad (5.24)$$

Existe uma relação contínua de dependência entre r_k^* e e , provada numericamente, em que quando $e \rightarrow 1$, $r_k^* \rightarrow 0$. Dessa maneira, para determinados $r_k^*, \theta, \varphi, \alpha, \beta$, existe um

valor único de e ,

$$e = e(r_k^*, \theta, \varphi, \alpha, \beta) \quad (5.25)$$

Tendo em vista que as definições das variáveis envolvidas neste tipo de trajeto foram explicadas, a transferência Terra-Lua com captura gravitacional pode ser apresentada mais detalhadamente em quatro passos utilizando o auxílio da Figura 20.

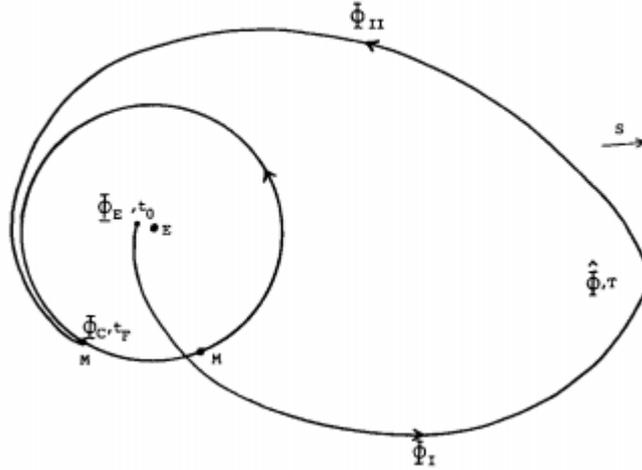


Figura 20 – Componentes envolvidas na transferência Terra-Lua com captura gravitacional (BELBRUNO; MILLER, 1993)

1. Integra-se retrogradamente a trajetória $\Phi(t)$, começando de Φ_C em $t = t_F$ até $\hat{\Phi} = \Phi_3(T)$ para $T < t_F$, a qual é próxima da WSB_3 , aproximadamente 1.5×10^6 km da Terra.
2. Assume-se Φ_E como o estado inicial de m em relação à Terra para $t = t_0 < T$. Para uma posição fixa relativa à Terra, varia-se a velocidade inicial $\dot{x}(t_0)$ de Φ_E tal que m escape a Terra, faça um *flyby* na Lua para receber um aumento de energia e vá para a posição $\hat{x} \in \mathcal{R}^3$ de $\hat{\Phi}$ em $t = T$.
3. Deixa-se $\Phi_{ii}(t) = [x_{ii}(t), \dot{x}_{ii}(t)]$ ser a trajetória de captura de $\hat{\Phi}$ até Φ_C e deixa-se Φ_i ser a trajetória de Φ_E até $\hat{\Phi}$. Normalmente, a velocidade inicial $\dot{x}_{ii}(T)$ em Φ_{ii} não será igual à velocidade final $\dot{x}_i(T)$ em Φ_i , sendo necessário um $\Delta v = \dot{x}_{ii}(T) - \dot{x}_i(T)$.
4. A trajetória Γ , obtida juntando Φ_i a Φ_{ii} , representa a transferência Terra-Lua utilizando captura gravitacional.

Como mencionado anteriormente, a solução deste problema só é possível ser obtida numericamente. O segmento de Φ_i até \hat{x} é encontrado com o método de Newton utilizando corretor diferencial. Uma integração numérica de Runge-Kutta de quarta ordem é utilizada

para integrar a equação 5.2. Métodos mais refinados que consideram pressão da radiação solar, as perturbações devido ao achatamento dos polos da Terra e efemérides planetárias começam com as soluções convergidas da equação 5.2 e essas são utilizadas como palpite inicial para um integrador de ordem 14 com o modelo mais realístico. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

5.6 Missão Hiten

5.6.1 Introdução

Em 1990 uma missão Japonesa lançou duas sondas, Muses-A e Muses-B, que eram conectadas e foram colocadas em uma órbita altamente elíptica em torno da Terra. Muses-B tinha como plano se desconectar e seguir uma transferência de Hohmann para a Lua. A nave chegou à Lua, porém a missão não foi um sucesso por falhas mecânicas. Desejava-se então, mandar a nave Muses-A, renomeada *Hiten*, para uma órbita em torno da Lua, mas a quantidade de propelente disponível não permitiria uma transferência via Hohmann ou bi-elíptica. A transferência de baixo empuxo utilizando captura gravitacional foi proposta para salvar a missão. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

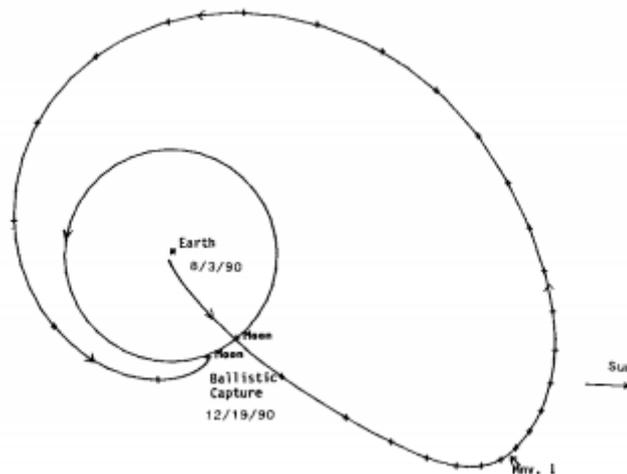


Figura 21 – Simulação numérica da trajetória da missão *Hiten* projetada no plano da eclíptica. (BELBRUNO; MILLER, 1993)

5.6.2 Modelo de Missão

A explicação do modelo da missão que será apresentada foi dada por (KOON M.W.LO; ROSS, 2001):

Como discutido anteriormente, o sistema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-Sonda pode ser aproximado a dois conjuntos de problemas de três corpos. Dentro de cada problema de três corpos, se o conhecimento sobre estruturas de variedades invariantes asso-

ciado aos pontos de Lagrange L_1 e L_2 for utilizado, a transferência de uma órbita LEO de 200 km para a região onde a estrutura das variedades invariantes dos pontos Lagrangianos do sistema Sol-Terra interagem com as do sistema Terra-Lua se torna possível.

Utiliza-se a sensibilidade dessas regiões para fazer uma "torção" de trajetórias próxima dos tubos das variedades invariantes e assim encontrar uma transferência econômica entre o sistema Sol-Terra e o sistema Terra-Lua. As variedades do sistema Terra-Lua permitem a existência de canais que possibilitam a captura gravitacional da sonda pela Lua.

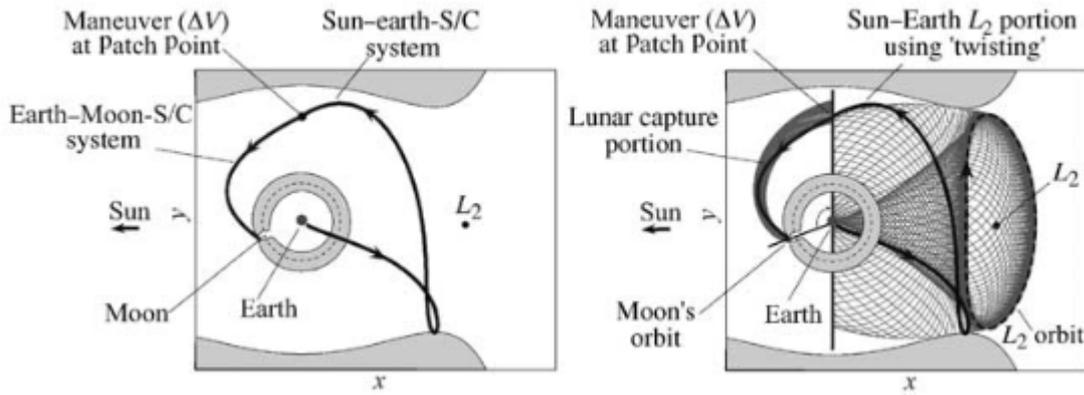


Figura 22 – À esquerda, a trajetória da transferência feita pela sonda *Hiten*. À direita, a interação dos tubos das variedades invariantes do sistema Sol-Terra e Terra-Lua permitem uma transferência econômica com efeitos perturbativos do Sol. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

Considerando que estamos conectando dois problemas circulares, planares, restritos de três corpos, as mesmas normalizações são aplicadas às equações do movimento e as equações que regem esse modelo são as mesmas apresentadas no capítulo 4: 4.23,4.24,4.25,4.31. Assume-se (x, y) como a a posição da sonda no plano, logo o movimento é descrito por:

$$\Omega_x = \ddot{x} - 2\dot{y} \quad (5.26)$$

$$\Omega_y = \ddot{y} - 2\dot{x} \quad (5.27)$$

Os subíndices de Ω são derivadas parciais da variável em questão e:

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{(1 - \mu)}{r_s} + \frac{\mu}{r_e} \quad (5.28)$$

Onde r_s e r_e são as distâncias entre a sonda e o Sol e entre a sonda e a Terra, respectivamente.

A energia da sonda é dada por:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega(x, y) \quad (5.29)$$

Logo, a relação da energia com a constante de Jacobi é:

$$C = -2H \quad (5.30)$$

Foi deduzido também por (BELBRUNO; GIDEA; TOPPUTO, 2010) que, para este tipo de trajetória, a teoria das *weak stability boundaries* se sobrepõe à teoria das variedades invariantes para uma gama significativa de energias.

5.6.3 Itinerário da Trajetória

O caminho tomado para a realização desta trajetória é específico e se divide em quatro partes fundamentais:

1. Da Terra para o ponto L_2 do sistema Sol-Terra utilizando a variedade estável do mesmo ponto Lagrangiano.
2. Torção no ponto L_2 do sistema Sol-Terra para entrada na variedade instável do mesmo ponto Lagrangiano.
3. Da variedade instável do ponto L_2 do sistema Sol-Terra para a variedade estável do ponto L_2 do sistema Terra-Lua.
4. Da variedade instável do ponto L_2 do sistema Terra-Lua para uma órbita em torno da Lua.

Estas etapas podem ser facilmente visualizadas na Figura 23, onde as variedades estáveis estão representadas em verde e as instáveis em vermelho.

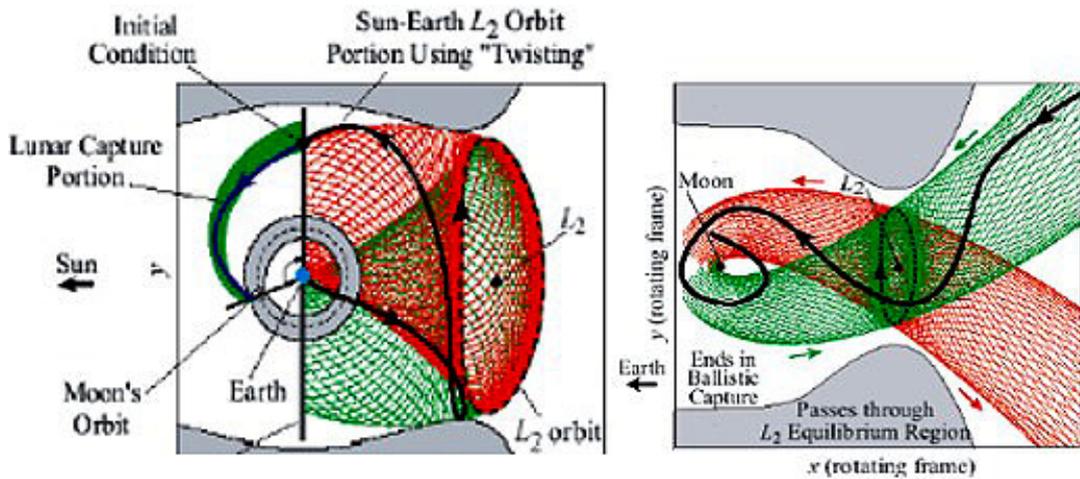


Figura 23 – À esquerda, a parte da trajetória regida pelo ponto de Lagrange L_2 do sistema Sol-Terra. À direita, a parte da trajetória representada pela captura gravitacional pela Lua. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

5.6.4 Método de Construção da Transferência

A construção da trajetória é feita principalmente no sistema girante Sol-Terra usando uma seção de Poincaré Σ ao longo de uma linha de abscissa constante passando pela Terra. Essa seção junta a parte do ponto de Lagrange Sol-Terra à parte de captura gravitacional da trajetória. A estratégia consiste em achar uma condição inicial de posição e velocidade para a sonda na seção de Poincaré tal que, ao se fazer uma integração prógrada, será guiada pela W^S do ponto L_2 Terra-Lua até a região de captura gravitacional pela Lua e que quando integrada retrogradamente, a sonda será abraçada pelas variedades do sistema Sol-Terra e retornará à Terra. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

5.6.5 Captura Gravitacional pela Lua

Ao se intersectar o corte de Poincaré da W^S de uma órbita *Lyapunov* em torno de L_2 do sistema Terra-Lua com uma seção de Poincaré do sistema Sol-Terra, encontra-se uma curva fechada na qual qualquer sonda com condições iniciais dentro desta curva será capturada gravitacionalmente pela Lua se integrado progradamente. Ou seja, sob sua dinâmica natural entrará na esfera de influência da Lua $SOI_{lua} = 66.200$ km e irá dar pelo menos uma volta em torno dela. Neste caso, um pequeno Δv resulta em uma captura estável e, dessa maneira, as passagens em L_1 e L_2 são fechadas pela variação da constante de Jacobi. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

5.6.6 Ponto de Lagrange Sol-Terra e Torção de Órbitas

Dos estudos feitos por (KOON MARTIN W. LO; ROSS, 2000) sabe-se que quanto mais próxima uma órbita inicial estiver do tubo da variedade no seu caminho para a região de equilíbrio, maior será a sua torção ao sair desta região. Ou seja, uma pequena mudança na condição inicial pode mudar drasticamente o destino de uma órbita. Essa sensibilidade pode ser utilizada para retornar uma sonda à uma órbita LEO de 200 km em torno da Terra.

Ao se analisar a seção de Poincaré na Figura 24, à esquerda, pode-se observar como uma minúscula faixa de órbitas q_2q_1 fora do corte de Poincaré da W^U , se integrado retrogradamente, se transforma em uma longa faixa de órbitas $P^{-1}(q_2)P^{-1}(q_1)$ que se estende por toda a W^S .

Os pontos na faixa q_2q_1 representam órbitas que possuem a mesma posição, mas velocidades um pouco diferentes. Dessa maneira, escolhendo uma condição inicial apropriada fora da curva é possível fazer uma integração retrógrada que produza uma trajetória de retorno à órbita de estacionamento terrestre.

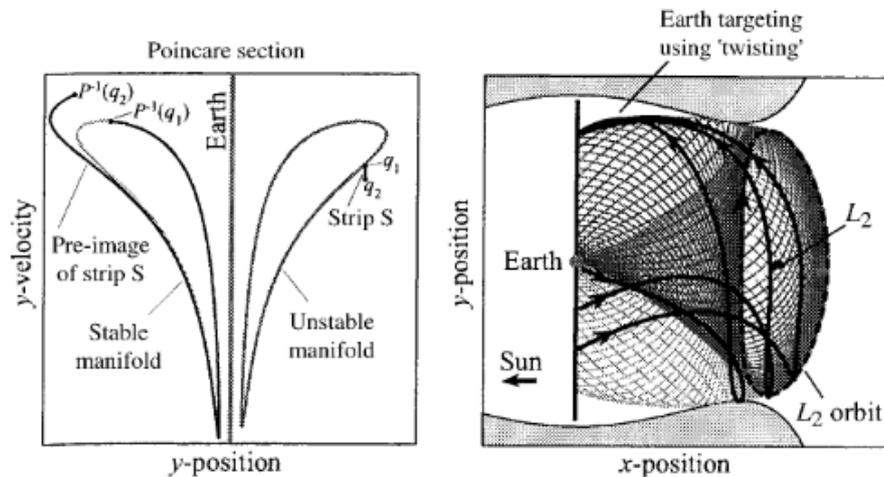


Figura 24 – À esquerda, a faixa q_2q_1 fora da W^U que se alonga em uma faixa $P^{-1}(q_2)P^{-1}(q_1)$ em torno da W^S . À direita, com mudanças pequenas na velocidade, qualquer ponto pode ser visado se integrado retrogradamente. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

5.6.7 Conexão Entre as Duas Partes da Transferência

A fase da Lua pode ser variada até que as variedades do ponto L_2 do sistema Terra-Lua e do sistema Sol-Terra intersectem. Ao se observar a parte superior da Figura 25, uma sonda será capturada gravitacionalmente pela Lua se uma integração prógrada for feita no interior da curva cinza e no exterior da curva preta. Na parte inferior, se uma integração retrógrada for feita, a órbita irá abraçar a W^U de volta à região de equilíbrio

do ponto L_2 do sistema Sol-Terra fazendo uma torção e então irá abraçar a W^S e retornar à órbita de estacionamento da Terra.

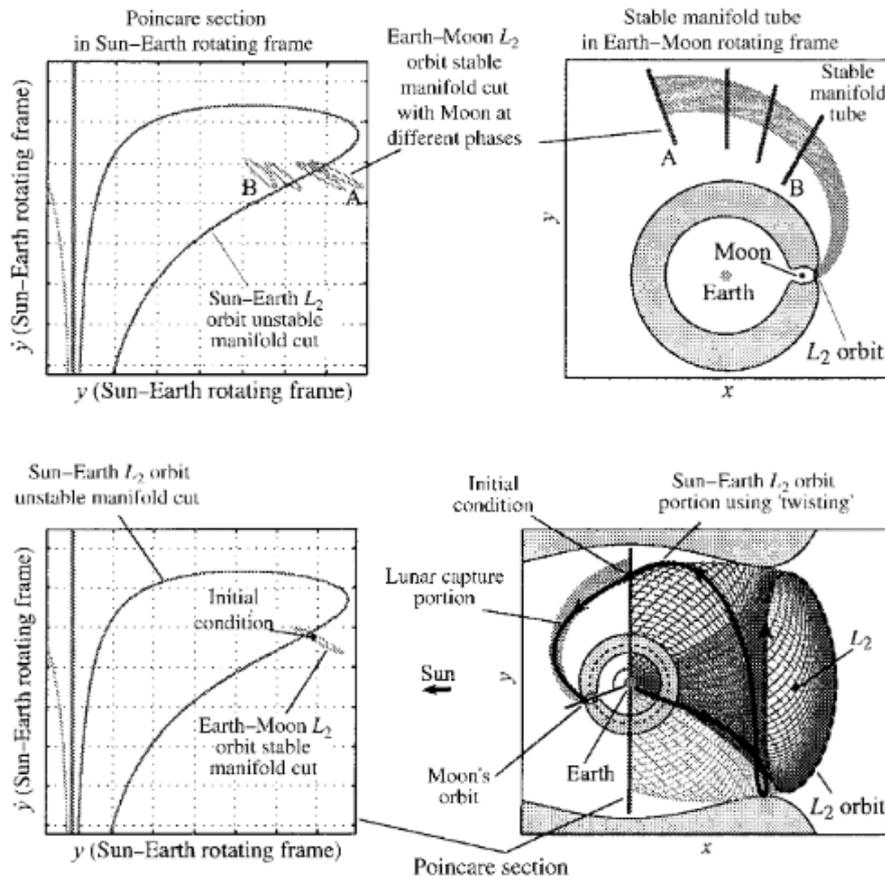


Figura 25 – Na parte superior encontram-se as interseções das variedades dos sistemas Sol-Terra e Terra-Lua. Na parte inferior, após se escolher a condição inicial, integração prógrada levará a sonda a ser capturada gravitacionalmente e retrógrada levará a sonda de volta à Terra. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

Tendo em vista que essa transferência demanda um Δv pequeno no local de conexão das variedades e que a captura gravitacional pela Lua requer $\Delta v = 0$, a quantidade de propelente necessária para inserção em órbita lunar é reduzida em 20% comparado a uma transferência de Hohmann tradicional. Esta manobra é possibilitada devido ao fato de que, de uma órbita circular de 200 km em torno na Terra, são necessários aproximadamente 3150 m/s, que são fornecidos pelo veículo lançador, para se chegar aos pontos L_1 e L_2 do sistema Terra-Lua. Por mais 50 m/s, é possível chegar aos pontos L_1 e L_2 do sistema Sol-Terra. Ou seja, a sonda precisa de quase o mesmo tanto de propelente para atingir dois sistemas diferentes de pontos Lagrangianos. (KOON M.W.LO; ROSS, 2001)

6 Simulações

6.1 Systems Tool Kit (STK)

Para simular as manobras apresentadas no trabalho, o software da plataforma AGI (*Analytical Graphics Inc.*), Systems Tool Kit, foi utilizado. O STK fornece um ambiente de simulação baseado em física para a análise e visualização de sistemas complexos no contexto de missões aeroespaciais, de defesa e telecomunicações.

Para simular diferentes tipos de missões, o STK conta com propagadores de órbitas para satélites. Propagar consiste na determinação da trajetória de um corpo com o passar do tempo. De acordo com as Leis de Newton, a trajetória de um corpo depende do seu estado inicial (posição e orientação em um tempo definido) e as forças atuando sobre ele, com o passar do tempo. Dessa maneira, propagadores de alta fidelidade buscam incluir todos os modelos de força importantes que estão agindo sobre corpo em estudo. Os propagadores de baixa fidelidade aproximam os efeitos de algumas forças enquanto desconsideram completamente outras. O STK possui três classes de propagadores de órbita disponíveis: (KIT, 2016)

1. Propagadores Analíticos (Baixa Fidelidade)

Geram resultados rápidos e as trajetórias do corpo obtidas são aproximadas. São a melhor opção quando busca-se modelar uma órbita sem ter que modelar manobras de manutenção para a mesma. Os propagadores analíticos disponíveis pelo software STK são:

- **TwoBody** (propagador de movimento Kepleriano)
- **J2 Perturbation** (propagador da perturbação J2 de primeira ordem)
- **J4 Perturbation** (propagador da perturbação J4 de segunda ordem)
- **SGP4 for LEO satellites** (propagador simplificado de perturbações gerais)
- **11 Parameter** (propagador de modelos geoestacionários usando os arquivos 11-Parameter)
- **GPS** (propagador do modelo de movimento de uma nave espacial GPS)

2. Propagadores Semianalíticos (Fidelidade Intermediária)

Possuem mais precisão do que os propagadores analíticos por incorporarem algumas técnicas numéricas ao invés de fazerem tantas aproximações e geram resultados mais rápidos do que os propagadores de integrações numéricas completas.

- **LOP** (preditor de órbita de longo prazo)
- **SGP4 for non-LEO satellites** (propagador simplificado de perturbações gerais)

3. Propagadores de Integração Numérica (Alta Fidelidade)

São muito mais precisos comparados aos anteriores, com o correto *step size*. Tempo de geração de resultados é sacrificado em prol da precisão, neste tipo de propagador. O modelo de órbitas é entregue pela utilização de algoritmos completos, efemérides corretas e é tipicamente a melhor solução para modelar problemas reais.

- **Astrogator** (propagador de trajetórias, planejamento de manobras e inclui capacidade de *targeting*)
- **HPOP** (propagador de órbita de alta precisão)

Tendo em vista que este trabalho possui como objetivo a simulação de missões reais que necessitam de alta precisão, efemérides corretas, planejamento de diversas manobras, desenho de trajetórias e algoritmos que sejam capaz de utilizar a função de *targeting*, optou-se por trabalhar com o propagador Astrogator que é extensivamente utilizado na literatura para a análise de trajetórias como a transferência de Hohmann e também para trajetórias de natureza tridimensional complexa como a transferência de baixo empuxo e alto impulso específico para a Lua.

6.2 Astrogator

O propagador Astrogator foi desenvolvido comercialmente pela *Analytical Graphics, Inc.* em cooperação com a divisão de análise dinâmica da NASA *Goddard Space Flight Center*. (BELBRUNO, 2000)

A sua arquitetura modular fornece uma estrutura de abordagem para a maioria de trajetórias de missões espaciais e, dessa maneira, calcula as efemérides de satélites ao se executar uma sequência de controle de missão, ou MCS, que é definida de acordo com os requisitos da missão. (KIT, 2016)

6.2.1 Modelo de Lançamento

O modelo de lançamento do Astrogator para o tipo de análises que serão feitas é simples. Este modelo é configurado a partir da inserção em LEO ou do vetor de estado do fim da queima (*burnout*), representado relativamente ao sistema fixo Terra-Corpo. Esses parâmetros são normalmente obtidos pelo analista de trajetória do veículo lançador. Além dos parâmetros de fim de queima, o tempo de voo do lançamento ao *burnout* é inserido. Assume-se que o estado de fim de queima permanecerá o mesmo em relação ao sistema

fixo Terra-Corpo para uma grande variedade de horários e dias de lançamento, dessa maneira, Astrogator adiciona o tempo de voo à época de lançamento, rotaciona o estado fixo do corpo para um sistema de coordenada inercial e o utiliza como o vetor de estado inicial para a órbita LEO. Dessa forma, a trajetória pode ser obtida de maneira prógrada. (BELBRUNO, 2000)

6.2.2 Propagador de Órbita

Todos os algoritmos de propagadores de órbita consistem em integradores numéricos de passo variável de Runge-Kutta. O usuário tem a capacidade de configurar o corpo central de integração, o modelo de harmônicos esféricos, o modelo atmosférico, efeitos perturbativos do problema de três corpos e pressão de radiação solar. (BELBRUNO, 2000)

6.2.3 Targeting

O Astrogator conta com um algoritmo de *targeting* que é o corretor diferencial. O algoritmo calcula numericamente uma matriz de sensibilidade que é utilizada para estimar as correções necessárias nas variáveis de controle com base na diferença dos valores desejados. É possível variar a perturbação utilizada para calcular numericamente as derivadas parciais e outros parâmetros que acelerem a velocidade de convergência. Esta ferramenta é extremamente útil para diversos tipos de missão. (BELBRUNO, 2000)

6.2.4 Missões Analisadas

A premissa por trás das missões simuladas neste trabalho foi de analisar comparativamente o desempenho em termos de Δv e tempo de missão, Δt , de uma transferência de Hohmann e uma transferência de baixo empuxo com captura gravitacional pela Lua, partindo de uma órbita LEO de 300 km de altitude e fazendo uma inserção em órbita LLO de 100 km acima da superfície lunar no mês de Abril do ano 2021. Adicionalmente, simulou-se estas transferências com chegada na Lua em órbita circular com raio de periapsis = 3000 km, em Abril do ano de 2007, para efeito de comparação com dados do mesmo período presentes na literatura.

Os métodos empregados para a obtenção destas trajetórias serão apresentados a seguir e se encontram com detalhes desde o *design* do cenário para se obter uma boa visualização das trajetórias, até a apresentação e comparação dos resultados adquiridos com relatórios gerados pelo software utilizado.

6.3 Design dos Cenários Para Visualização das Transferências

Tendo em vista que o design inicial dos cenários dos dois tipos de transferência são similares e, essencialmente, apenas valores diferem de um para o outro, esta seção será apresentada em conjunto para depois especificar cada tipo de manobra envolvida em

cada uma das missões. A descrição detalhada desta análise conta com a ajuda do tutorial presente em ([GRAPHICS, 2021](#)) .

Nas descrições a seguir, as palavras em **negrito** correspondem aos comandos dentro do software utilizado.

Primeiramente, ao se iniciar o aplicativo STK, deve-se clicar na opção "**Create a Scenario**", escolher o nome que se quer dar ao projeto, a data de início da análise e a data de fim da mesma. Para a transferência de Hohmann escolhe-se uma data de fim de *+30 days* e, para a de baixo empuxo, de *+160 days*.

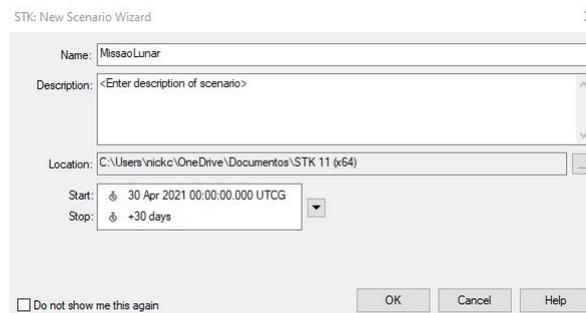


Figura 26 – Criando o cenário no STK.

Após a criação do novo cenário, deve-se mudar o *step size* para cada tipo de missão. Para isso, entra-se na opção "**Scenario Properties**", seleciona-se a página "**Basic - Time**", e altera-se o passo para 3 minutos no caso da transferência de Hohmann e 3 horas para a transferência de baixo empuxo.

Na opção "**Scenario Properties 2D Graphics - Global Attributes**", algumas alterações devem ser feitas para melhor visualização da trajetória. A Figura 27 define tais mudanças:

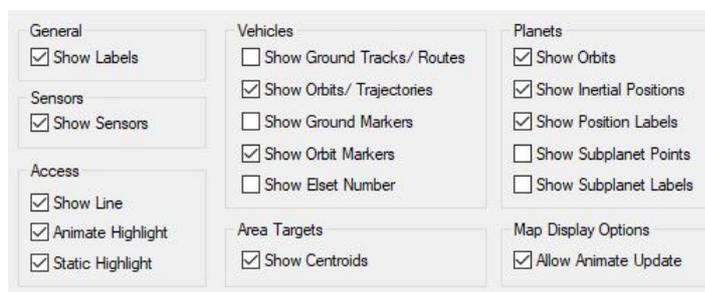


Figura 27 – Ajuste dos gráficos 2D.

O próximo passo é adicionar os planetas e veículo espacial envolvidos nas missões em questão. Para os dois tipos, contamos com o Sol, Terra e Lua e uma sonda que fará a trajetória. Para isso, abre-se o menu "**Insert STK Objects**", insere-se 3 planetas e um satélite. Na página "**Basic - Definition**" de cada planeta, altera-se o corpo central

para o respectivo em questão, e cria-se um satélite que, na página "**Basic - Orbit**", o propagador é alterado para Astrogator.

Nas propriedades deste satélite, em "**2D Graphics - Attributes (Custom Intervals)**", seleciona-se o botão "**More**" e opta-se por um tipo de marcador em círculo. Ainda nos gráficos 2D, na página "**Pass**", altera-se "**Ground Track Lead Type**" para "**None**" e "**Orbit Track Lead Type**" para "**All**". Na página "**3D Graphics - Pass**", seleciona-se a opção "**Inherit from 2D Graphics**", em "**Model**", o tamanho do pixel é adaptado para 7 e em "**Detail Thresholds**" coloca-se a opção "**Marker, Label**" no valor máximo.

As trajetórias das transferências são visualizadas por meio da janela de gráficos 3D do software STK. Para obter uma observação de qualidade que facilite a visualização de parâmetros orbitais em relação à Terra, adiciona-se uma grade com sistema de coordenadas inercial centrado na Terra (ECI). Para isso, seleciona-se as propriedades do botão "**3D Graphics Window**" e na página "**Grids**", dentro da opção "**Space Grid**", "**ECI Coordinates**" e "**Show Radial Lines**" podem ser selecionados. Na página "**Advanced**", altera-se a opção "**Max Visible Distance**" para $1e + 010$ km.

O mesmo é feito para a Lua. Duplica-se o "**3D Graphics Window**" no menu "**View**" e altera-se o corpo central para a Lua.

Após seguir os passos acima, o cenário deve estar como apresentado na Figura 28:

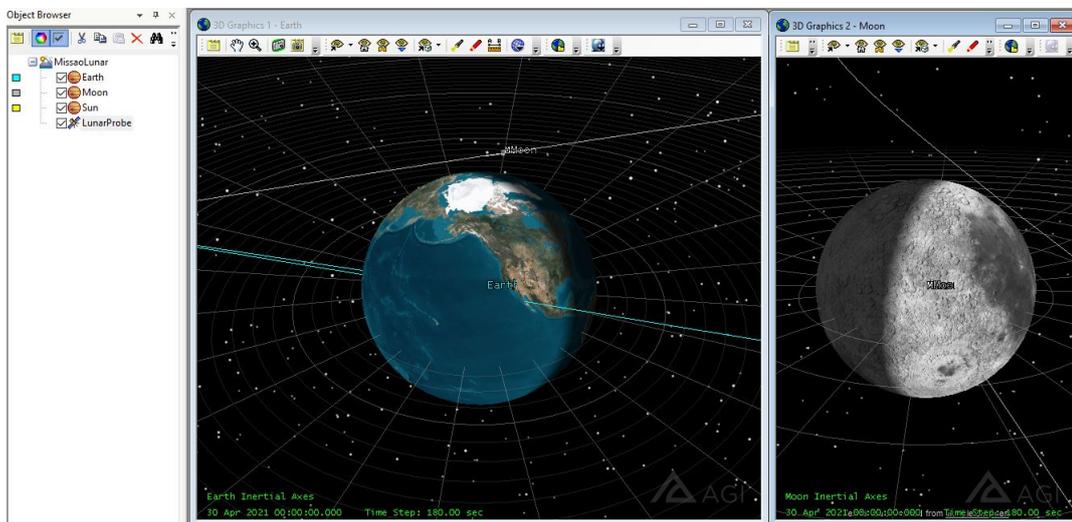


Figura 28 – Cenário para transferências Terra-Lua.

6.4 Simulação da Transferência de Hohmann

O modelo empregado na simulação da transferência de Hohmann Terra-Lua neste trabalho é direto, efetivo e foi embasado em (GRAPHICS, 2021). Nesta primeira análise, foi utilizada uma sequência que inicia-se em um lançamento partindo de Cabo Canaveral,

nos EUA, entra em uma órbita LEO de 300 km, onde permanece até a aplicação da manobra de Injeção Translunar (TLI), que será propagado até as vizinhanças da Lua para então chegar no seu periapsis e por fim entrar em órbita LLO de 100 km e inclinação $i = 90^\circ$.

6.4.1 Configuração da Sequência de Controle de Missão - MCS

1. Entrar na página do satélite "**Basic - Orbit**";
2. Apagar segmentos existentes na MCS;
3. Adicionar um "**Target Sequence**" seguido de um segmento de lançamento, um propagador, uma manobra e outros dois propagadores, respectivamente. Como na Figura 29:

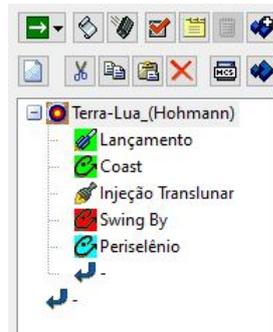


Figura 29 – Sequência de controle de missão inicial Hohmann.

4. Selecionar o segmento "**Lançamento**" e mudar a época para a desejada. Para esta simulação a época escolhida foi **24 Apr 2021 00:00:00.000 UTCG**.
5. Selecionar o segmento "**Coast**" e ajustar o valor "**Trip**" da condição de parada "**Duration**" para 90 minutos, que é aproximadamente uma órbita.
6. Selecionar o segmento "**Injeção Translunar**", verificar se o tipo de manobra selecionado é impulsivo e mudar a opção "**Attitude Control**" para "**Thrust Vector**". Adicionar o valor 3120 m/s à direção "**Cartesian X**".
7. Selecionar o segmento "**Swing By**". Mudar o tipo de propagador para "**Cislunar**". Adicionar uma condição de parada de "**R Magnitude**" e ajustar o valor "**Trip**" para 300000 km. Deletar a condição de parada "**Duration**".
8. Selecionar o segmento "**Periselênio**". Mudar o tipo de propagador para "**Cislunar**". Ajustar o valor "**Trip**" da condição de parada "**Duration**" para 10 dias. Adicionar uma condição de parada de "**Altitude**" com o valor "**Trip**" de 0 km e

com a Lua como corpo central. Adicionar uma condição de parada de "**Periapsis**" com a Lua como corpo central.

6.4.2 Palpite Para a Injeção Translunar

Após a configuração da MCS e um bom palpite inicial de Injeção Translunar é possível usar o recurso *targeting* para encontrar o horário de lançamento e o tempo de *coast* na órbita de estacionamento, corretos.

1. Clicar no botão "**Run the entire MCS**";
2. Observar a sonda se aproximando da Lua:

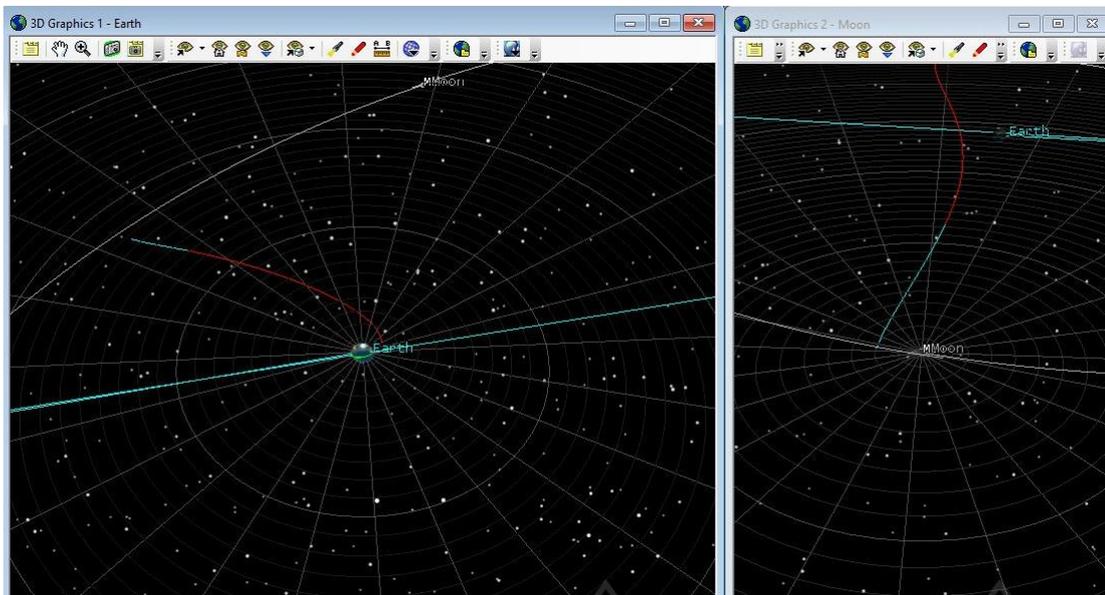


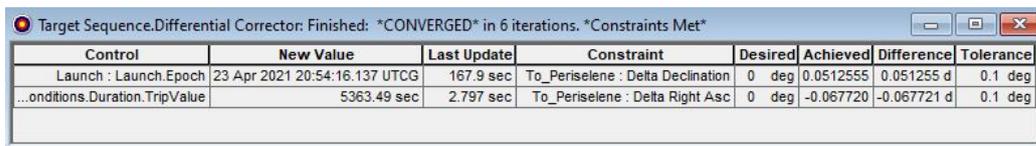
Figura 30 – Cenário inicial da transferência.

6.4.3 Cálculo da Época de Lançamento e Tempo de *Coast*

A utilização do *targeter* para chegar à Lua é útil neste momento. Para isso, utiliza-se a época de lançamento e o tempo de *coast* como variáveis de controle. O Astrogator é capaz de variar estes valores até encontrar determinadas restrições impostas. As restrições utilizadas serão **Delta Right Asc** e **Delta Declination**, que representam a diferença dos ângulos *Right Ascension* e *Declination* entre a sonda e o corpo central selecionado.

1. Selecionar o segmento "**Lançamento**" e adicionar "**Epoch**" como variável de controle.
2. Selecionar o segmento "**Coast**" e adicionar "**Trip**" como variável de controle.

3. Selecionar o segmento "Periselênio", clicar na opção "Results", "MultiBody", selecionar "Delta Right Asc" e "Delta Declination" como restrições e verificar se a Lua está como corpo central em ambos.
4. Selecionar o segmento "Target Sequence", "Parameters", "Launch.Epoch" e ajustar "Perturbation" para 1 minuto e "Max Step" para 1 hora. Selecionar também "StoppingConditions.Duration.TripValue" e ajustar "Perturbation" para 1 minuto e "Max Step" para 5 minutos.
5. Na área "Equality Constraints", definir o valor de "Delta Right Asc" e "Delta Declination" como 0°.
6. Na página "Convergence", aumentar o "Maximum Iterations" para 100.
7. Mudar a ação do "Target Sequence" para "Run active profiles".
8. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.



Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
Launch : Launch.Epoch	23 Apr 2021 20:54:16.137 UTCG	167.9 sec	To_Periselene : Delta Declination	0 deg	0.0512555	0.051255 d	0.1 deg
...onditions.Duration.TripValue	5363.49 sec	2.797 sec	To_Periselene : Delta Right Asc	0 deg	-0.067720	-0.067721 d	0.1 deg

Figura 31 – Solução convergida em 6 iterações.

9. Observar a mudança na janela de gráficos 3D:

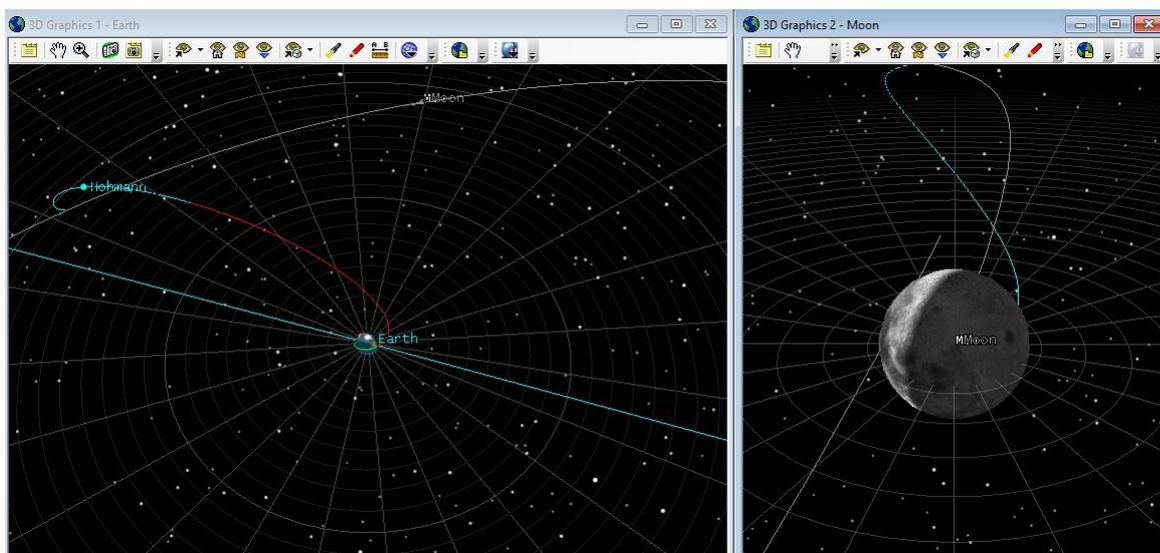


Figura 32 – Cenário após o primeiro *targeting*.

6.4.4 Configuração da Chegada no Periselênio

Uma vez que a direção correta da trajetória está definida, um bom método para *swing by* ou *rendezvous* em missões espaciais é o *targeting* do plano B que permite que a sonda tenha uma trajetória hiperbólica específica ao passar por um determinado corpo.

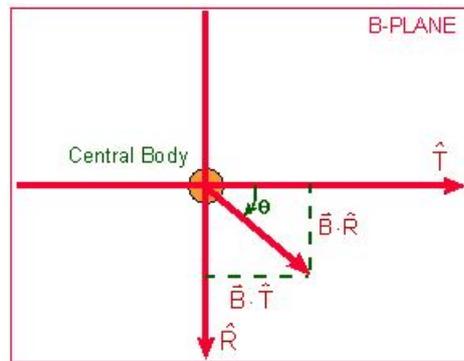


Figura 33 – Plano B de um corpo central. (GRAPHICS, 2021)

Dessa maneira, é possível buscar a chegada na Lua com uma altitude do periapsis de 100 km e inclinação $i = 90^\circ$, como previsto pela missão. Para isso:

1. Selecionar o segmento "**Periselênio**", clicar na opção "**Results**", abrir a pasta "**MultiBody**", selecionar **BDotT** e **BDotR** como restrições e verificar se a Lua está como corpo central em ambos.
2. Selecionar o segmento "**Target Sequence**", "**Properties**", selecionar os parâmetros de controle "**Launch.Epoch**", "**StoppingConditions.Duration.TripValue**" e "**ImpulsiveMnvr.Cartesian.XSDU**". Em "**Equality Constraints**", desmarcar **Delta Right Asc** e **Delta Declination**, selecionar **BDotT** e **BDotR** e ajustar o valor de **BDotR** para 4500 km e **BDotT** para 0 km. O valor escolhido para **BDotT** gera uma órbita polar e o valor escolhido para **BDotR** gera uma órbita de raio 1837 km.
3. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.

Target Sequence.Differential Corrector: Finished: *CONVERGED* in 5 iterations. *Constraints Met*							
Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
Launch : Launch.Epoch	23 Apr 2021 21:18:09.522 UTCG	-0.024821 se	To_Periselene : BDotR	4500 km	4500 km	-0.0038459	0.1 km
...onditions.Duration.TripValue	5363.11 sec	5.5088e-06 s	To_Periselene : BDotT	0 km	-0.007520	-0.0075204	0.01 km
...ulsiveMnvr.Cartesian.XSDU	3121.48 m/sec	-1.7394e-05					

Figura 34 – Solução convergida em 5 iterações.

4. Observar a mudança na janela de gráficos 3D:

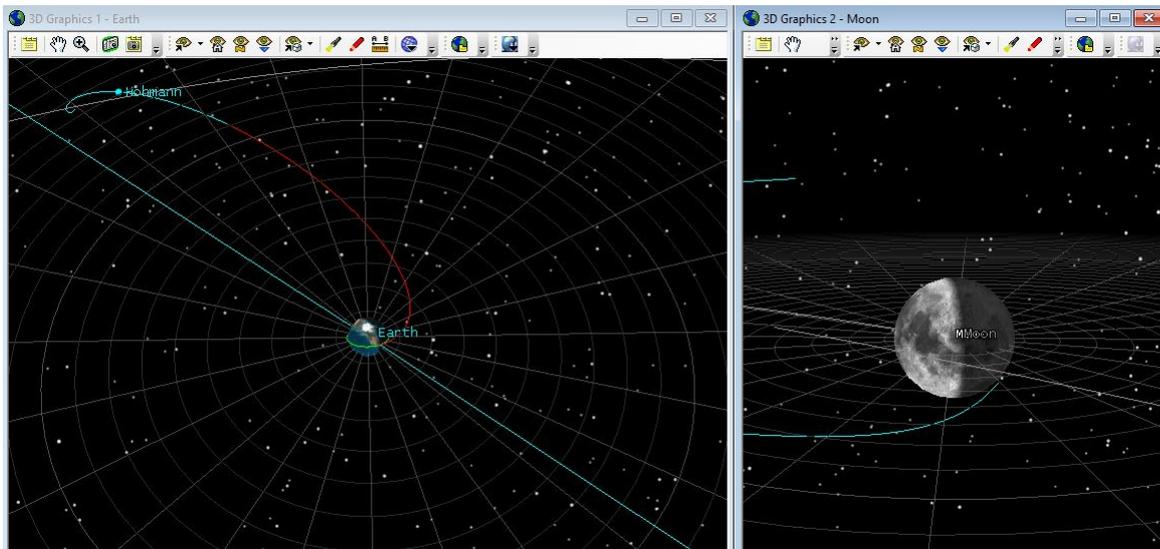


Figura 35 – Cenário após o segundo *targeting*.

6.4.5 Swing By Lunar

Neste ponto da simulação, após a chegada no periselênio, é necessário a presença de uma nova manobra de inserção em órbita lunar para que a sonda não faça apenas um swing by na Lua e escape, devido à trajetória hiperbólica da mesma. O swing by pode ser observado da seguinte maneira:

1. Adicionar um novo segmento de propagação na sequência de controle de missão.



Figura 36 – Sequência de controle de missão para o swing by lunar.

2. Alterar o tipo de propagador para "**Moon HPOP Default v10**" e alterar o valor "**Trip**" da condição de parada "**Duration**" para 3 dias.
3. Rodar a MCS.
4. Observar a mudança na janela de gráficos 3D da Lua.

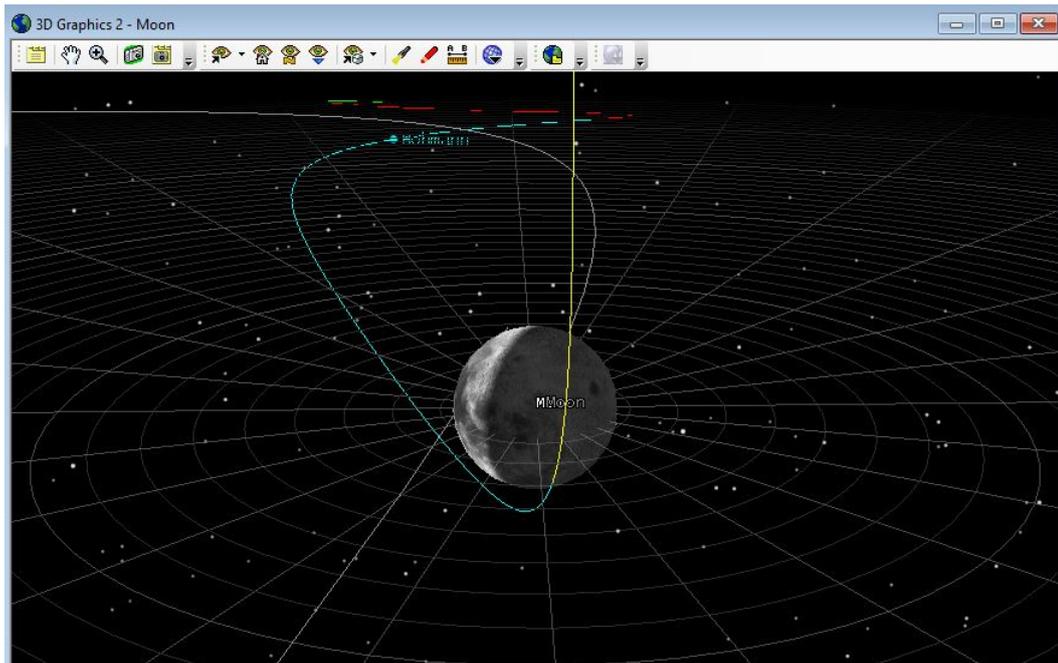


Figura 37 – Cenário após o swing by.

6.4.6 Inserção em Órbita Lunar

Para circularizar a órbita em torno da Lua por meio de um segundo Δv precisa-se adicionar alguns segmentos à MCS.

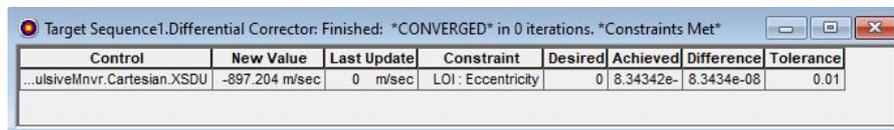
1. Adicionar um novo segmento "**Target Sequence**" ao fim da MCS, um segmento de "**Maneuver**" abaixo dele e o segmento "**Órbita Lunar**" abaixo dos dois.



Figura 38 – Sequência de controle de missão para inserção em órbita lunar.

2. Selecionar o segmento "**LOI**", verificar se o tipo de manobra é impulsivo, mudar o "**Attitude Control**" para "**Thrust Vector**", mudar o "**Thrust Axes**" para "**VNC(Moon)**" e selecionar a componente de velocidade "**Cartesian X**" como variável de controle.

3. Selecionar o segmento "LOI", abrir "Results", abrir a pasta "Keplerian Elements" e adicionar "Eccentricity" como uma restrição. Verifica se o corpo central é a Lua.
4. Selecionar o segundo "Target Sequence", em "Properties", selecionar como parâmetro de controle o "Cartesian X" e, como restrição, "Eccentricity". Como busca-se circularizar a órbita, o valor escolhido para a excentricidade é 0.
5. Mudar a ação do "Target Sequence" para "Run active profiles".
6. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.



Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
...ulsiveMnvr.Cartesian.XSDU	-897.204 m/sec	0 m/sec	LOI : Eccentricity	0	8.34342e-	8.3434e-08	0.01

Figura 39 – Solução convergida em 0 iterações.

7. Observar o cenário final da transferência de Hohmann.

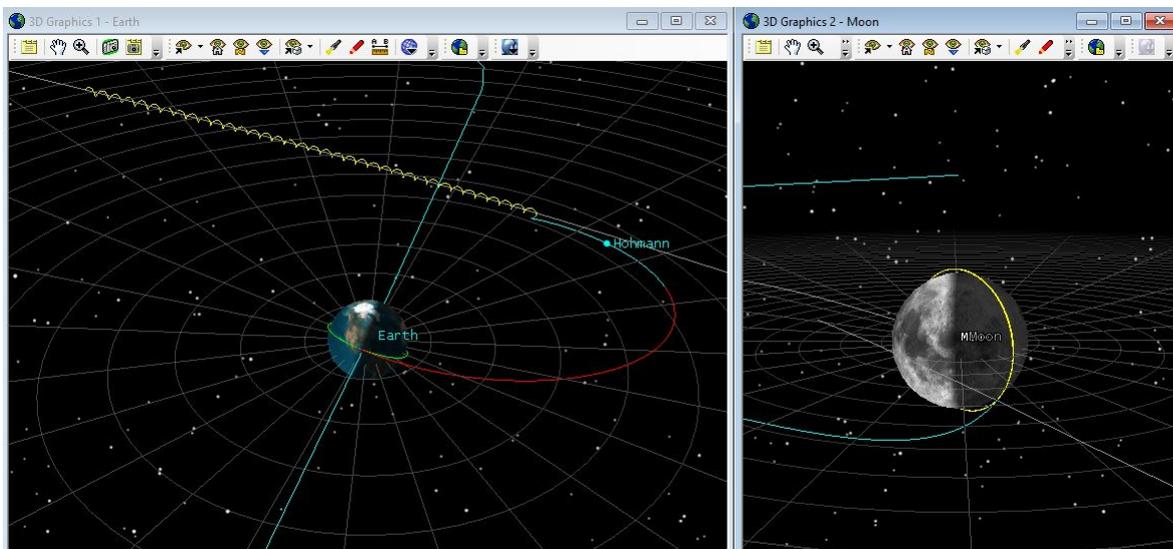


Figura 40 – Transferência de Hohmann para 100 km LLO.

8. Um relatório detalhado dos resultados obtidos e parâmetros orbitais de cada parte da sequência de controle de missão pode ser encontrado ao clicar no botão "Analysis", "Report and Graph Manager", "Installed Styles" e então "MCS Summary".

O mesmo processo foi aplicado para a uma transferência de Hohmann com órbita lunar circular final de 3000 km em Abril de 2007. O cenário final é observado na Figura 41:

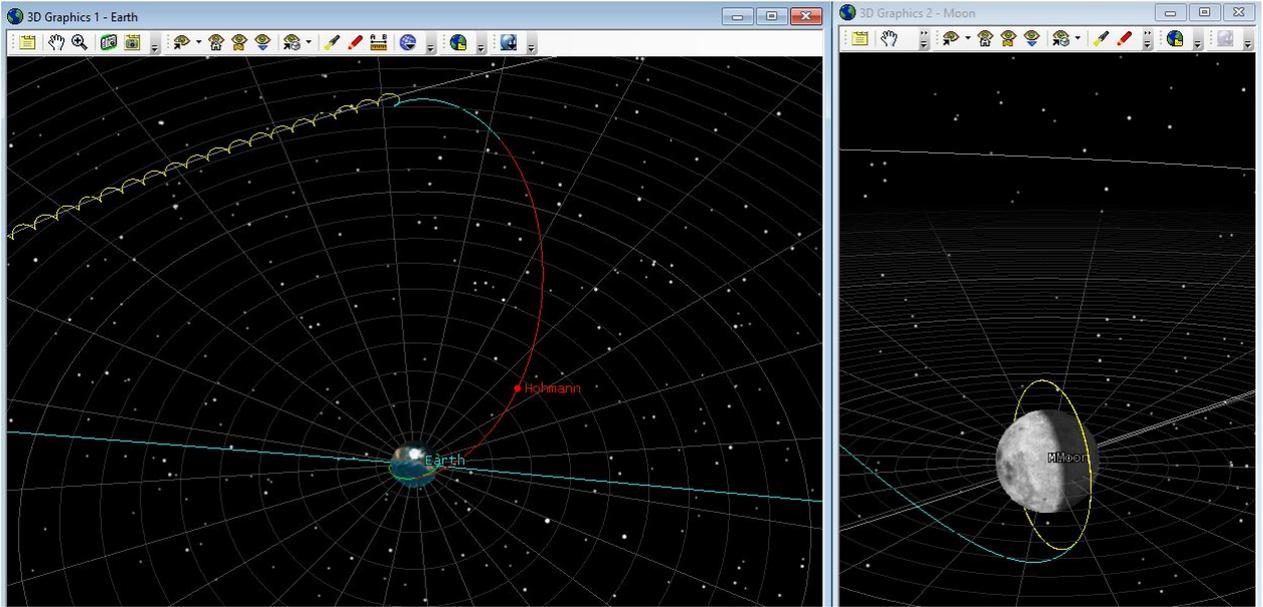


Figura 41 – Transferência de Hohmann para 3000 km LLO.

6.5 Simulação da Transferência de Baixo Empuxo Para a Lua Com Captura Gravitacional

Como apresentado nos capítulos anteriores, a transferência de baixo empuxo, criada por (BELBRUNO, 1987), revolucionou o campo de missões Terra-Lua. Em (BELBRUNO, 2000), Belbruno apresentou um algoritmo para simulação de missões que utiliza as *weak stability boundaries*, que conta apenas com integrações prógradas no tempo e que é baseado essencialmente em um *targeting* 2×2 , onde varia-se a velocidade V_E e o ângulo de trajetória de voo γ_E , em relação à Terra, até que se encontre uma determinada distância radial r_M e inclinação i_M desejadas, em relação à Lua.

$$V_E, \gamma_E \rightarrow r_M, i_M \quad (6.1)$$

Neste método, V_E é variado até que se chegue em um apoapsis de aproximadamente 1.5×10^6 km, onde se encontra a *weak stability boundary* da Terra. γ_E é escolhido inicialmente para ter um valor perto de 0. A época de lançamento é determinada por uma distância angular específica entre os corpos primários e a trajetória de captura gravitacional é obtida ao se atingir um determinado valor de r_M e i_M , com energia, em relação à Lua, C_3 negativa e excentricidade $e < 1$, que representa a entrada na *weak stability boundary* da Lua.

6.5.1 Configuração da Sequência de Controle de Missão

1. Entrar na página do satélite "**Basic - Orbit**";
2. Apagar segmentos existentes na MCS;
3. Adicionar um "**Target Sequence**" seguido de um segmento de lançamento, um propagador, uma manobra e outros três propagadores, respectivamente. Como na Figura 42:

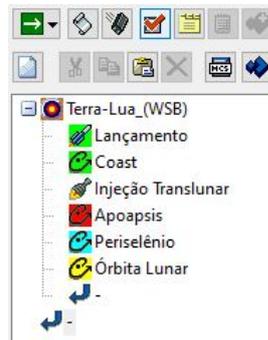


Figura 42 – Sequência de controle de missão inicial WSB.

4. Selecionar o segmento "**Lançamento**" e mudar a época para a desejada. Para esta simulação a época escolhida foi **22 Apr 2021 00:00:00.000 UTCG**.
5. Selecionar o segmento "**Coast**" e ajustar o valor "**Trip**" da condição de parada "**Duration**" para 0 minutos.
6. Selecionar o segmento "**Injeção Translunar**", verificar se o tipo de manobra selecionado é impulsivo e verificar se a opção "**Attitude Control**" está como "**Along Velocity Vector**". Adicionar o valor 0 m/s ao campo "**Delta V Magnitude**".
7. Selecionar o segmento "**Apoapsis**". Verificar se o tipo de propagador selecionado é "**Earth HPOP Default v10**". Adicionar uma condição de parada de "**Apoapsis**" com a Terra como corpo central. Deletar a condição de parada "**Duration**".
8. Selecionar o segmento "**Periselênio**". Verificar se o tipo de propagador selecionado é "**Earth HPOP Default v10**". Adicionar uma condição de parada de "**Periapsis**", mudar o corpo central para Lua e a opção "**Repeat Count**" para 2. Adicionar uma condição de parada de "**R Magnitude**" com o valor "**Trip**" de 50000 km, mudar o "**Reference Point**" para o centro da Lua e a opção "**Repeat Count**" para 2.

6.5.2 Determinação da Data de Lançamento

De acordo com (BELBRUNO, 2000), a geometria envolvida entre o Sol, Terra e Lua, no momento do lançamento, é determinante para este tipo de transferência. Como pode ser observado na Figura 43:

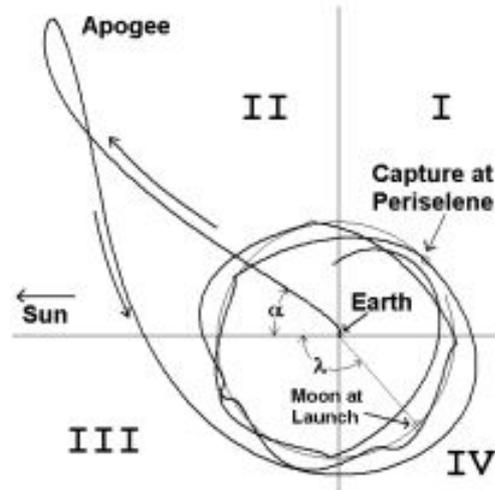


Figura 43 – Transferência de baixo empuxo de segundo quadrante no sistema girante Sol-Terra. (BELBRUNO, 2000)

Para transferências em que o apoapsis se encontra no segundo quadrante, um bom primeiro palpite para o ângulo λ , entre o vetor Terra-Sol e o vetor Terra-Lua, é $\lambda = 130^\circ$. Para transferências de quarto quadrante, a geometria é variada 180° . Dessa forma, escolhendo-se um mês para a missão, o corretor diferencial consegue encontrar o dia com a geometria necessária. Para isso:

1. Selecionar o segmento "**Lançamento**" e adicionar "**Epoch**" como variável de controle. Clicar na opção "**Results**", selecionar "**Angle Between Vector**", alterar o valor de "**Vector 1**" para "**Earth Sun**" e "**Vector 2**" para "**Earth Moon**".
2. Selecionar o segmento "**Target Sequence**", em "**Properties**", selecionar o parâmetro de controle "**Launch.Epoch**", em "**Equality Constraints**", selecionar "**Angle Between Vectors**" e alterar o seu valor para 130° .
3. Selecionar o segmento "**Target Sequence**". Na área de parâmetros de controle, selecionar "**Launch.Epoch**" e ajustar "**Perturbation**" para 1 minuto e "**Max Step**" para 1 hora. Selecionar também "**StoppingConditions.Duration.TripValue**" e ajustar "**Perturbation**" para 1 minuto e "**Max Step**" para 1 hora.
4. Na página "**Convergence**", aumentar o "**Maximum Iterations**" para 200.
5. Mudar a ação para "**Run active profiles**".

6. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.

Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
Lançamento : Launch.Epoch	23 Apr 2021 12:46:40.000 UTCG	500 sec	...ento : Angle Between Vectors	130 deg	129.962 d	-0.037894 d	0.1 deg

Figura 44 – Solução convergida em 92 iterações.

Logo, o dia 23 de abril é o correto para o lançamento com a geometria necessária para este tipo de transferência.

6.5.3 Palpite Para a Injeção Translunar

Quando tratamos de transferências de baixo empuxo, tendo em vista o seu modelo acoplado do problema restrito de 3 corpos, é extremamente útil trabalhar em termos de energia orbital $C3$ ao invés de velocidades absolutas. (BELBRUNO, 2000) Sabe-se que:

$$C3 = -\frac{\mu}{a} \quad (6.2)$$

Onde $\mu = 398600\text{km}^3/\text{s}^2$ é o parâmetro gravitacional da Terra e a é o semieixo maior da elipse de transferência. Visto que busca-se atingir um raio do apogeu $r_a = 1.5 \times 10^6$ km e parte-se de um raio do perigeu $r_p = 6678$ km, é possível calcular o valor de $C3$ necessário para esta parte da transferência. Assim, temos:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (6.3)$$

Substituindo os valores:

$$a = \frac{1506678}{2} = 753339\text{km} \quad (6.4)$$

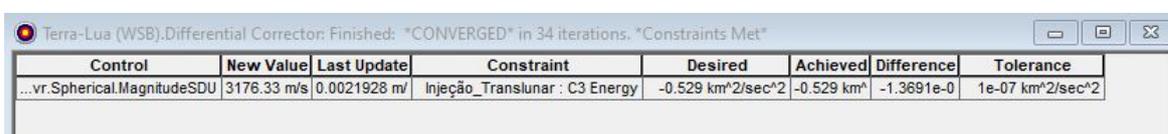
Então:

$$C3 = -\frac{398600}{753339} = -0.529\text{km}^2/\text{s}^2 \quad (6.5)$$

Com o valor de $C3$ em mãos, utiliza-se a função de *targeting* do Astrogator para achar o valor de Δv da Injeção Translunar.

1. Selecionar o segmento "**Injeção Translunar**" e Marcar "**Delta V Magnitude**" como variável de controle.

2. Clicar em **"Results"**, **"Target Vector"**, **"C3 Energy"** e verificar se a Terra está como corpo central.
3. Selecionar o segmento **"Target Sequence"**, entrar em **"Properties"**, selecionar **"ImpulsiveMnvr.Spherical.MagnitudeSDU"** em parâmetros de controle, selecionar, em **"Equality Constraints"**, **"C3 Energy"** e alterar o valor desejado para $-0.529\text{km}^2/\text{s}^2$.
4. Mudar a ação para **"Run active profiles"**.
5. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.



Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
...vr.Spherical.MagnitudeSDU	3176.33 m/s	0.0021928 m	Injeção_Translunar : C3 Energy	-0.529 km ² /sec ²	-0.529 km ²	-1.3691e-0	1e-07 km ² /sec ²

Figura 45 – Solução convergida em 34 iterações.

6. Observar a mudança na janela de gráficos 3D da Terra.

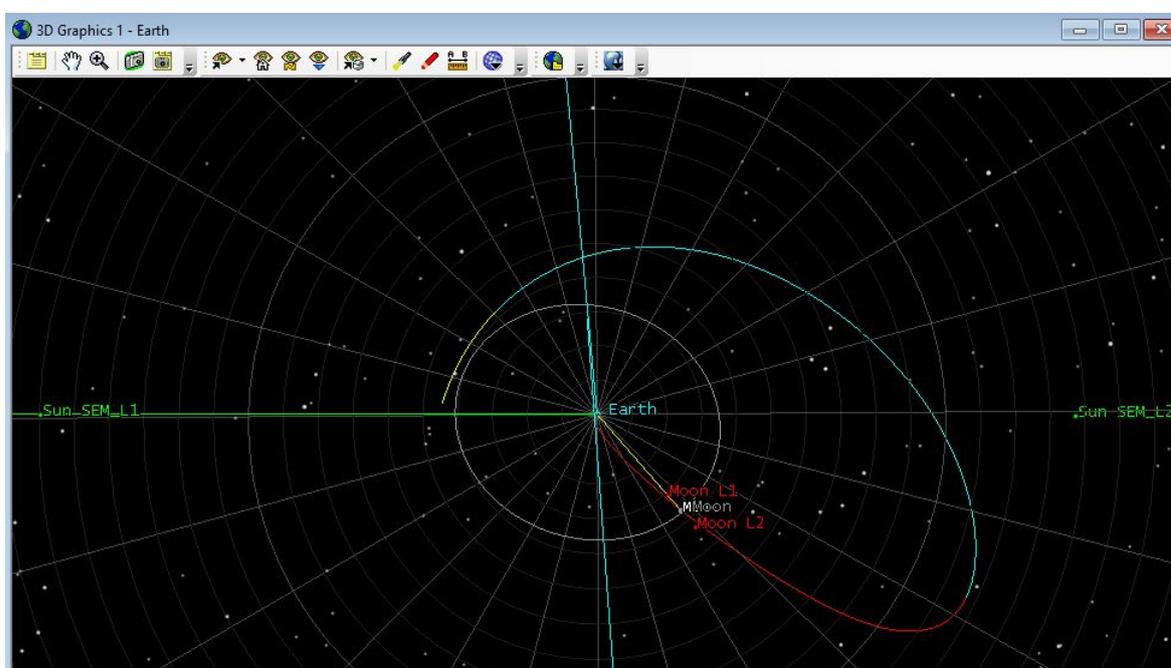


Figura 46 – Cenário após aplicação do primeiro impulso.

Pode-se observar então que o primeiro palpite para o Δv da Injeção Translunar é de $\Delta v = 3176.33 \text{ m/s}$

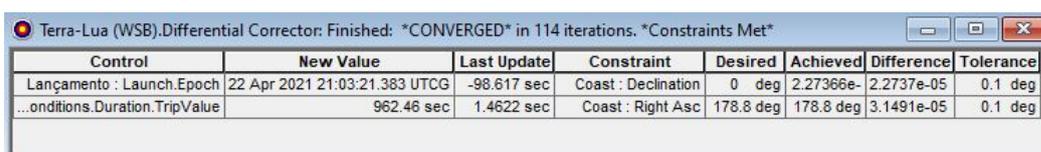
6.5.4 Cálculo da Época de Lançamento e Tempo de *Coast*

De acordo com (BELBRUNO, 2000), a época certa de lançamento e o tempo de *coast* controlam completamente o direcionamento da trajetória após a aplicação do primeiro impulso. Uma ótima forma de determinação destes parâmetros, com o objetivo de chegar na Lua com as condições necessárias, é utilizar os ângulos esféricos *Right Ascension*, α e *Declination*, δ . A época do lançamento define a longitude do nó ascendente (RAAN) e o tempo de *coast* define o argumento do perigeu ω .

Busca-se um ângulo de trajetória de voo que é determinado pela época de lançamento e pelo tempo de *coast* que resulte em uma órbita de captura gravitacional pela Lua ao final da transferência.

Um bom palpite inicial para os ângulos esféricos *Right Ascension* e *Declination*, em uma transferência do segundo quadrante, é de $175^\circ < \alpha < 190^\circ$ e $\delta = 0^\circ$. Utiliza-se a função de *targeting* novamente para estes cálculos.

1. Selecionar o segmento "**Coast**", abrir "**Results**", entrar em "**Spherical Elements**" e adicionar "**Right Asc**" e "**Declination**" com o sistema de coordenadas "**Earth Inertial**" para ambos.
2. Selecionar o segmento "**Target Sequence**", "**Properties**", selecionar os parâmetros de controle "**Launch.Epoch**" e "**StoppingConditions.Duration.TripValue**" e, em "**Equality Constraints**", "**Right Asc**" e "**Declination**". Os valores escolhidos para esta missão foram $\alpha = 178.8^\circ$ e $\delta = 0^\circ$.
3. Mudar ação para "**Run active profiles**".
4. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.



Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
Lançamento : Launch.Epoch	22 Apr 2021 21:03:21.383 UTCG	-98.617 sec	Coast : Declination	0 deg	2.27366e-	2.2737e-05	0.1 deg
...onditions.Duration.TripValue	962.46 sec	1.4622 sec	Coast : Right Asc	178.8 deg	178.8 deg	3.1491e-05	0.1 deg

Figura 47 – Solução convergida em 114 iterações.

5. Observar a mudança na janela de gráficos 3D da Terra.

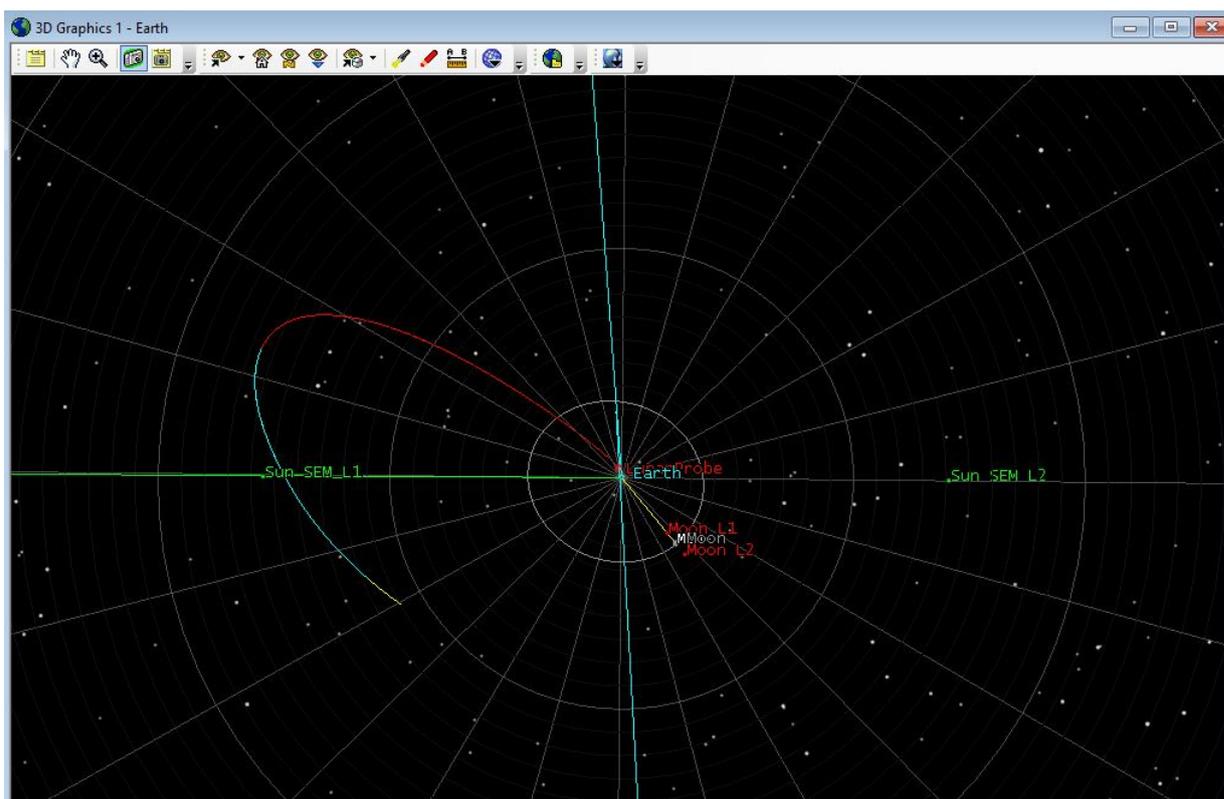
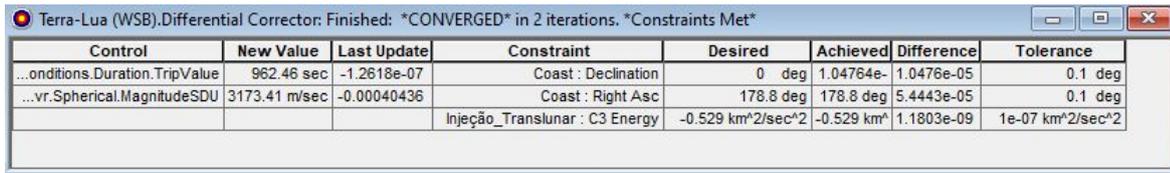


Figura 48 – Cenário após definição da direção da trajetória.

6.5.5 Ajuste da Energia Orbital da Transferência

Após obtida a direção correta para a trajetória, é interessante verificar se a energia orbital continua a mesma que foi preestabelecida no início da missão. Neste caso $C3 = -0.529\text{km}^2/\text{s}^2$. Logo, é interessante utilizar o *targeting* novamente para ajustar a energia da transferência caso não esteja com o valor estipulado.

1. Selecionar o segmento "Target Sequence", "Properties", selecionar como parâmetros de controle "StoppingConditions.Duration.TripValue" e "ImpulsiveMnvr.Spherical.MagnitudeSDU", em "Equality Constraints", selecionar Right Asc, "Declination" e "C3 Energy".
2. Mudar ação para "Run active profiles".
3. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.



Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
...onditions.Duration.TripValue	962.46 sec	-1.2618e-07	Coast : Declination	0 deg	1.04764e-	1.0476e-05	0.1 deg
...vr.Spherical.MagnitudeSDU	3173.41 m/sec	-0.00040436	Coast : Right Asc	178.8 deg	178.8 deg	5.4443e-05	0.1 deg
			Injeção_Translunar : C3 Energy	-0.529 km ² /sec ²	-0.529 km ²	1.1803e-09	1e-07 km ² /sec ²

Figura 49 – Solução convergida em 2 iterações.

4. Observar a mudança na janela de gráficos 3D da Terra.

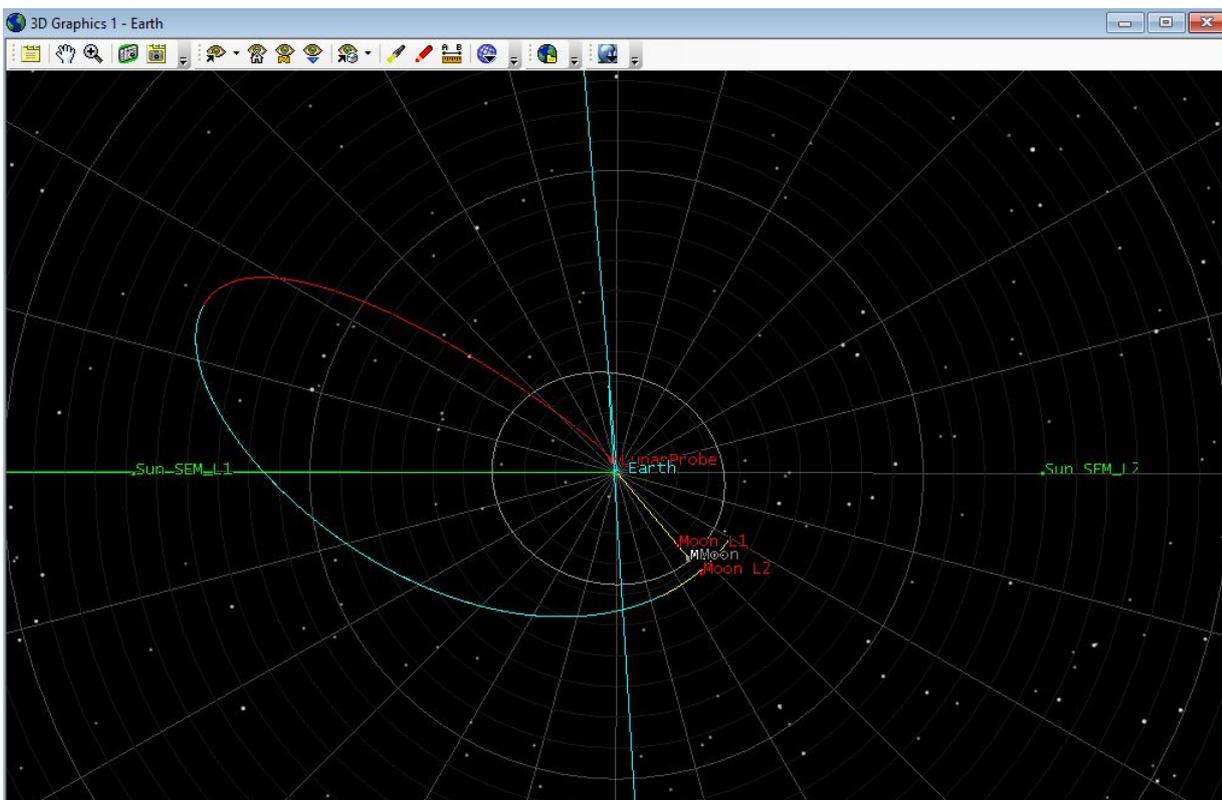


Figura 50 – Cenário com energia orbital e direção corretas.

6.5.6 Captura Gravitacional pela Lua

Com a direção da trajetória e energia orbital definidas, deve-se então buscar a chegada no periapsis lunar com as condições $r_M = 1837$ km e $i_M = 90^\circ$. Porém, este tipo de trajetória, possui diversas passagens pelo periselênio, sendo que a primeira acontece em torno de 1.4×10^6 km, o que não cumpre as exigências das restrições de chegada à Lua impostas pela missão. Logo, deve-se avaliar a segunda e terceira passagens pelo periselênio e escolher a passagem em que a sonda esteja à uma distância de ao menos 50000 km da Lua. (BELBRUNO, 2000) Para isso:

1. Selecionar o segmento "Target Sequence", "Properties", selecionar como parâmetros de controle "StoppingConditions.Duration.TripValue" e "ImpulsiveMnvr.Spherical.MagnitudeSDU", em "Equality Constraints", selecionar "Radius Of Periapsis" e mudar o seu valor para $r_M = 3000$ km, inicialmente.
2. Mudar a ação para "Run active profiles".
3. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.

Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
...onditions.Duration.TripValue	962.51 sec	3.7306e-09 s	...riselene : Radius Of Periapsis	3000 km	3000 km	0.00012958	0.01 km
...vr.Spherical.MagnitudeSDU	3173.78 m/sec	3.7252e-07 m					

Figura 51 – Solução convergida em 12 iterações.

4. Refazer o primeiro passo só que mudando o valor de "Radius Of Periapsis" para $r_M = 1837$ km que corresponde à uma órbita de 100 km.
5. Rodar a MCS novamente.

Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
...onditions.Duration.TripValue	962.462 sec	-1.6394e-09	Periselênio : Radius Of Periapsis	1837 km	1837 km	-2.6351e-0	0.01 km
...vr.Spherical.MagnitudeSDU	3173.77 m/sec	-2.0519e-07					

Figura 52 – Solução convergida em 89 iterações.

6. Selecionar o segmento "Target Sequence", "Properties", selecionar como parâmetros de controle "Launch.Epoch", "StoppingConditions.Duration.TripValue" e "ImpulsiveMnvr.Spherical.MagnitudeSDU", em "Equality Constraints", selecionar "Radius Of Periapsis" e "Inclination" e mudar o valor da inclinação para $i_M = 90^\circ$.
7. Rodar a MCS pela última vez.

Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
Lançamento : Launch.Epoch	22 Apr 2021 21:24:48.615 UTCG	-0.0030921 s	Periselênio : Inclination	90 deg	90 deg	-9.7613e-0	0.1 deg
...onditions.Duration.TripValue	998.51 sec	-8.6605e-05	Periselênio : Radius Of Periapsis	1837 km	1837 km	-0.0046692	0.01 km
...vr.Spherical.MagnitudeSDU	3171.58 m/sec	5.5961e-06 m					

Figura 53 – Solução convergida em 79 iterações.

8. Observar a mudança na janela de gráficos 3D da Terra.

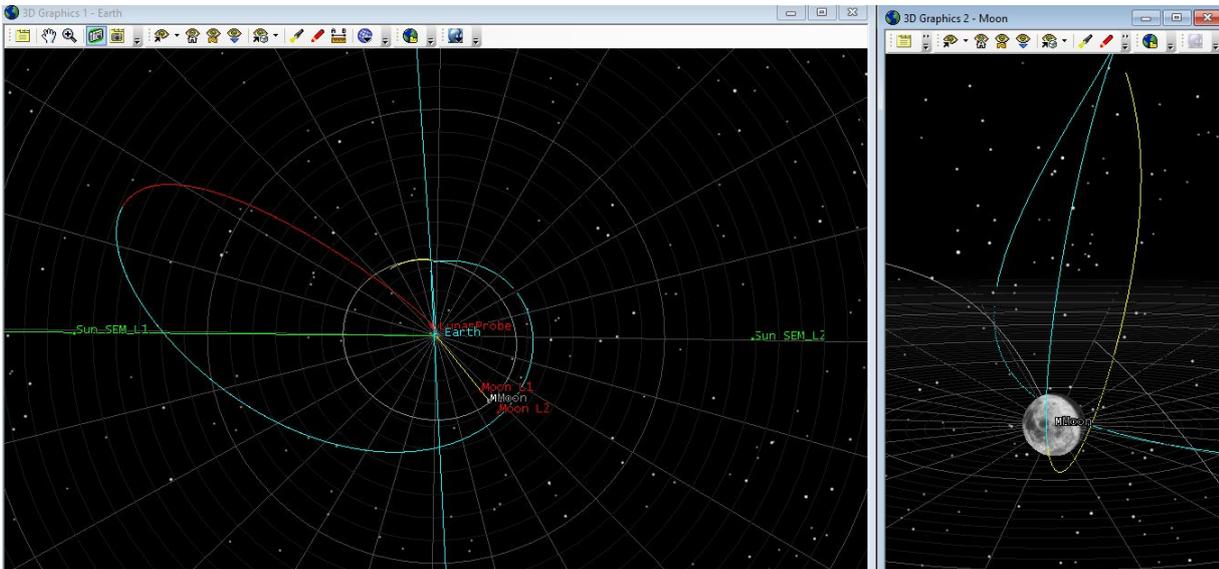


Figura 54 – Cenário da trajetória de captura gravitacional no periselênio.

Pode ser observado, na Figura 54, que a sonda chega à Lua com uma órbita elíptica, ou seja, $e < 1$, logo, uma captura gravitacional foi obtida e a velocidade hiperbólica de excesso foi eliminada, gerando uma grande redução na quantidade de propelente necessário para inserção em órbita lunar.

6.5.7 Inserção em Órbita Lunar

O método para inserção em órbita lunar é idêntico ao apresentado na transferência de Hohmann. Dessa forma:

1. Adicionar um novo segmento "**Target Sequence**" ao fim da MCS, um segmento de "**Maneuver**" abaixo dele e o segmento "**Órbita Lunar**" abaixo dos dois.

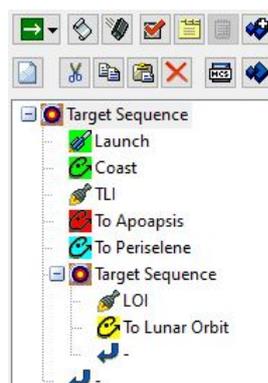


Figura 55 – Sequência de controle de missão final.

2. Selecionar o segmento "LOI", verificar se o tipo de manobra é impulsivo, mudar o "Attitude Control" para "Thrust Vector", mudar o "Thrust Axes" para "VNC(Moon)" e selecionar a componente de velocidade "Cartesian X" como variável de controle.
3. Selecionar o segmento "LOI", "Results", abrir a pasta "Keplerian Elements" e adicionar "Eccentricity" como uma restrição. Verifica se o corpo central é a Lua.
4. Selecionar o segundo "Target Sequence", entrar em "Properties" e selecionar como parâmetro de controle o "Cartesian X" e, como restrição, "Eccentricity". Como busca-se circularizar a órbita, o valor escolhido para a excentricidade é 0.
5. Mudar o valor de "Duration", do segmento "Órbita Lunar", para 28 dias. Que corresponde a um mês lunar.
6. Mudar a ação do "Target Sequence" para "Run active profiles".
7. Rodar a MCS até que a solução tenha convergido com os controles e restrições impostos.



Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
...ulsiveMnvr.Cartesian.XSDU	-644.223 m/sec	0 m/sec	LOI: Eccentricity	0	0.0007343	0.00073439	0.01

Figura 56 – Solução convergida.

8. Observar o cenário final da transferência de baixo empuxo com captura gravitacional pela Lua.

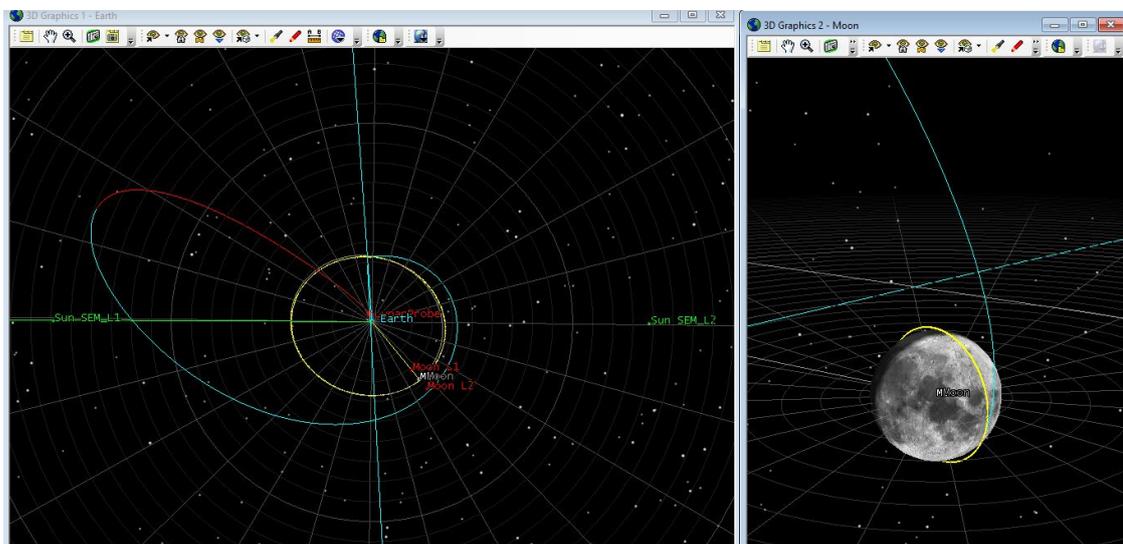


Figura 57 – Transferência de baixo empuxo com captura gravitacional para 100 km LLO.

- Um sumário detalhado dos resultados obtidos e parâmetros orbitais de cada parte da sequência de controle de missão pode ser encontrado ao clicar no botão "**Analysis**", "**Report and Graph Manager**", "**Installed Styles**" e então "**MCS Summary**".

Tendo em vista a simulação presente em (BELBRUNO, 2000) mesmo processo foi aplicado para a uma transferência de de baixo empuxo com captura gravitacional com órbita lunar circular final de 3000 km em Abril de 2007. O cenário final obtido pode ser observado na Figura 60:

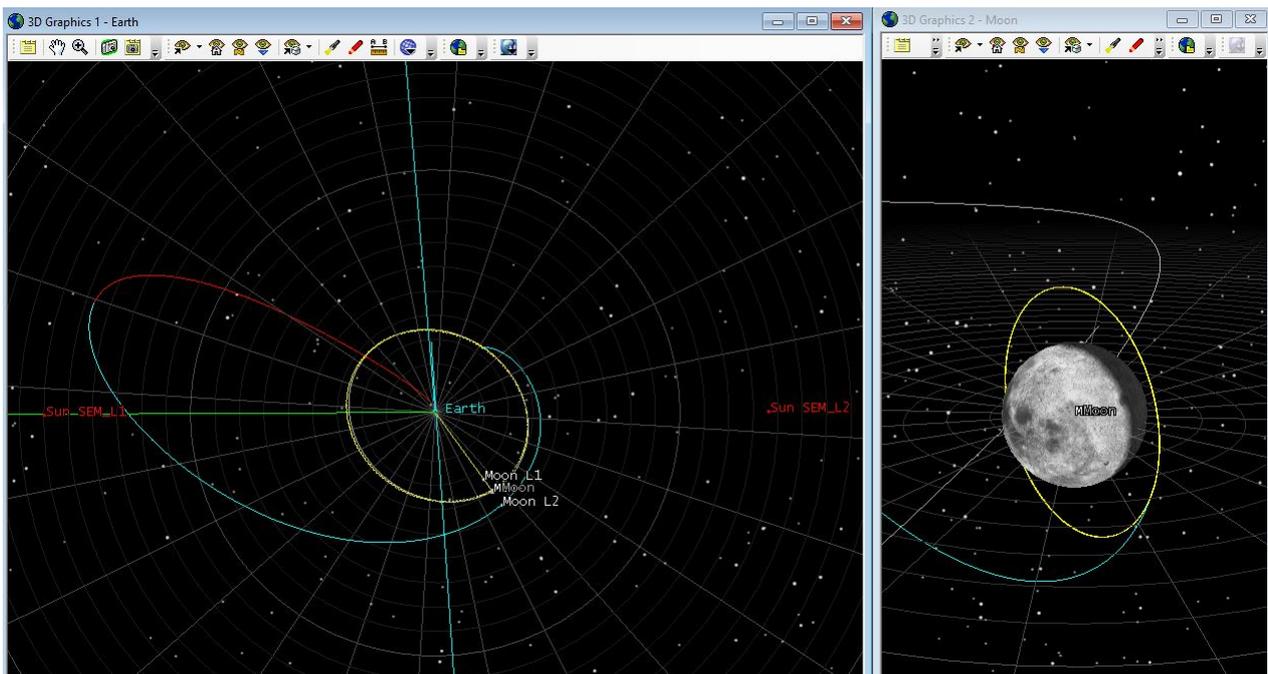


Figura 58 – Transferência de baixo empuxo com captura gravitacional para 3000 km LLO.

7 Resultados e Discussão

7.1 Introdução

Diversos autores apresentam inúmeros tipos de transferência Terra-Lua em seus trabalhos e os resultados são reveladores quanto à eficiência e variedade de possibilidades ao se escolher um tipo de solução para o problema. A comparação entre tipos diferentes de transferências e os modelos matemáticos envolvidos apresenta uma visão prática e direta do assunto.

Algumas informações básicas e frequentes em relação à transferências lunares podem ser notadas. De acordo com (PARKER, 2013), transferências Terra-Lua necessitam de um valor de energia para a injeção translunar C_3 consistente da ordem de $-2.0 \text{ km}^2/\text{s}^2$ para transferências diretas e entre $-0.6 \text{ km}^2/\text{s}^2$ e $-0.3 \text{ km}^2/\text{s}^2$ para transferências de baixo empuxo. Normalmente transferências diretas duram de 2-12 dias, enquanto as de baixo empuxo podem durar de 70-120 dias, embora os dois tipos possam demorar mais. Para as mesmas condições de chegada na Lua, transferências de baixo empuxo requerem um Δv de inserção em órbita circular em torno de 640 m/s, enquanto transferências diretas requerem, no mínimo, 120 m/s de Δv adicional.

Normalmente, o padrão utilizado para comparação na literatura conta, normalmente, com duas condições de trajetória (TOPPUTO, 2013):

- Uma órbita inicial circular LEO de altitude $h_i = 167 \text{ km}$, $h_i = 200 \text{ km}$ ou $h_i = 300 \text{ km}$.
- Uma órbita final circular LLO de altitude $h_f = 100 \text{ km}$.

As transferências de baixo empuxo com captura gravitacional que serão apresentadas nas simulações são as trajetórias do tipo externas que estão pautadas no modelo matemático apresentado ao longo do trabalho. Este tipo de trajetória conta com a injeção da sonda em uma órbita com o apogeu de aproximadamente $1.5 \times 10^6 \text{ km}$ que é responsável pelo aumento do raio do seu periapsis e que, dessa forma, possibilita a entrada em uma órbita de captura onde a sonda se aproxima da Lua pela parte externa com energia orbital negativa e se estabiliza em torno da mesma utilizando-se uma manobra de inserção lunar.

A análise dos resultados obtidos almeja verificar a compatibilidade dos mesmos com o que está presente na literatura e apresentar uma comparação de parâmetros orbitais, tempo de voo, Δt , e o Δv necessário para cada tipo de transferência.

7.2 Parâmetros Orbitais da Órbita de Captura

O trabalho apresentado por (BELBRUNO, 2000) consistiu em analisar parâmetros obtidos no periselênio da transferência de baixo empuxo com captura gravitacional a qual partia de uma órbita LEO de 300 km e chegava em um raio do periselênio $r_P = 3000$ km. Para efeito comparativo, simulou-se a mesma transferência, na mesma época, para observar se o método de simulação empregado era efetivo e confiável.

Embora o estudo de Belbruno não englobe a análise de uma transferência de Hohmann, esta foi simulada para a mesma época também, tendo em vista que o intuito deste trabalho é uma análise comparativa entre essas manobras.

A tabela de dados de chegada no periapsis lunar contam com os parâmetros: data da transferência, raio do apogeu r_A , raio do periselênio r_P , inclinação da órbita lunar i_P , excentricidade e_P e energia orbital de chegada relativa à Lua $C3_M$.

Transferência	Data	r_A (km)	r_P (km)	i_P (deg)	e_P	$C3_M$ (km ² /s ²)
Hohmann	26/04/07	423454	2999.936	90.2268	1.3284	0.3517
Baixo Empuxo	27/04/07	1.43×10^6	2999.960	89.9993	0.9236	-0.1248
Baixo Empuxo (BELBRUNO, 2000)	27/04/07	1.43×10^6	3000.965	90.0044	0.9262	-0.1206

Tabela 3 – Comparação entre parâmetros obtidos nas simulações e em (BELBRUNO, 2000).

Ao comparar os resultados da transferência de baixo empuxo obtidos no trabalho com os resultados presentes em (BELBRUNO, 2000), percebe-se que os valores estão muito próximos uns dos outros. Portanto, o método escolhido para a simulação, é confiável e eficaz para ser utilizado em outras datas e com outros parâmetros de chegada na Lua.

Com o modelo de simulação correto em mãos, optou-se por simular os dois tipos de transferências no ano de 2021. As missões analisadas partem de uma órbita LEO de 300 km e buscam uma chegada em órbita LLO de 100 km, que equivale a um $r_P = 1837$ km e inclinação $i_P = 90^\circ$.

Os dados obtidos se encontram na tabela abaixo:

Transferência	Data	r_A (km)	r_P (km)	i_P (deg)	e_P	$C3_M$ (km ² /s ²)
Hohmann	23/04/21	446762	1837.505	89.7361	1.4004	2.2791
Baixo Empuxo	22/04/21	1.45×10^6	1837.000	90.000	0.9452	-0.1462

Tabela 4 – Resultados dos parâmetros obtidos para as transferências feitas em abril de 2021.

Os valores entregues pela simulação da transferência de baixo empuxo evidenciam

que uma órbita de captura gravitacional pela Lua foi encontrada, tendo em vista que, a excentricidade de chegada no periselênio $e_P = 0.9452$, representa uma trajetória elíptica de chegada na Lua e, conseqüentemente, uma energia orbital negativa $C3 = -0.1462\text{km}^2/\text{s}^2$, que define, categoricamente, uma captura gravitacional. Dessa forma, a sonda chega à Lua sem velocidade hiperbólica de excesso, necessitando apenas de um Δv para circularizar a órbita final.

Ao analisar os valores da transferência de Hohmann, observa-se que a excentricidade de chegada no periapsis lunar é maior do que 1 e a energia orbital é positiva. Logo, a trajetória de chegada na Lua é hiperbólica, como previsto pelo método das *patched conics*, e possui uma velocidade hiperbólica de excesso v_∞ que aumenta o Δv necessário para a manobra de inserção em órbita lunar.

7.3 Comparação de Δv e Δt

Para a comparação de Δv e Δt , é interessante observar o resultado conjunto das quatro simulações feitas para observar a influência gerada pela mudança de parâmetros de chegada na Lua. O parâmetro v_∞ foi incluído nos dados por ser revelador quanto a natureza dessas transferências. Logo:

Transferência	Ano	r_P (km)	Δv_{total} (m/s)	Δt (dias)	v_∞ (km/s)	Modelo
Hohmann	2007	2999.936	3867.72	8	0.837	<i>Patched conics</i> problema de 2 corpos
Baixo empuxo	2007	2999.960	3661.22	91	0	Problema restrito de 3 corpos
Hohmann	2021	1837.505	4018.68	9	1.509	<i>Patched conics</i> problema de 2 corpos
Baixo empuxo	2021	1837.000	3818.01	92	0	Problema restrito de 3 corpos

Tabela 5 – Resultados de Δv e Δt obtidos nas simulações.

Os resultados de Δv_{total} observados são obtidos ao somar os valores de Δv_1 de injeção translunar, de manobras intermediárias, de captura e de circularização de órbita. Dessa maneira, temos:

Transferência	Ano	Δv_1 (m/s)	Δv_m (m/s)	Δv_C (m/s)	Δv_{circ} (m/s)
Hohmann	2007	3116.48	0	263.03	488
Baixo empuxo	2007	3173.02	0	0	488
Hohmann	2021	3121.48	0	253.20	644
Baixo empuxo	2021	3173.79	0	0	644

Tabela 6 – Dados específicos de cada impulso aplicado nas transferências.

Uma análise dos dados obtidos de Δt confirma inúmeras informações apresentadas durante o trabalho. Primeiramente, o tempo de voo Δt de 8 e 9 dias, encontrado para a transferência de Hohmann, é um bom valor para este tipo de trajetória que normalmente encontra-se entre 2 e 12 dias. O Δt de 91 e 92 dias para transferências de baixo empuxo é um resultado excelente para este tipo de trajetória que normalmente está entre 70 e 120 dias. Contudo, mesmo que o tempo de voo obtido para estas transferências sejam ótimos, esses valores devem contar com um Δv_{total} de qualidade atrelado, para tornar a missão viável.

Os resultados de Δv obtidos foram excelentes e reveladores. A simulação comprovou a presença de velocidade hiperbólica de excesso para transferências de Hohmann e a ausência nas de baixo empuxo, o que era previsto pela teoria apresentada. Nas simulações de Hohmann, o modelo das *patched conics* prevê que, para aproximações em raios do periselênio menores, o valor de v_{∞} deve ser maior e, conseqüentemente, o Δv da transferência também. Os valores de $\Delta v = 4018.68$ m/s para uma chegada em $r_P = 1837$ km e $\Delta v = 3867.72$ m/s para uma chegada em $r_P = 3000$ km, evidenciam um aumento de 3.76%. Pôde-se observar que, a busca por diferentes alturas de chegada na Lua, também influenciam os valores de Δv das transferências de baixo empuxo ao aumentar o Δv_{circ} da trajetória e corresponder a um aumento total de 4.1% no Δv_{total} .

7.3.1 Análise de Eficiência

Para fazer uma análise de eficiência e comparar cada uma das transferências, utilizou-se os dados de Δv_{total} , do impulso de inserção em órbita lunar, Δv_{LOI} , e da quantidade estimada de propelente necessária para cada uma das missões, adquiridos no relatório de missão gerado pelo Astrogator que estão presentes no apêndice do trabalho.

Um gráfico que apresenta a economia entre as transferências em 2007 foi gerado:

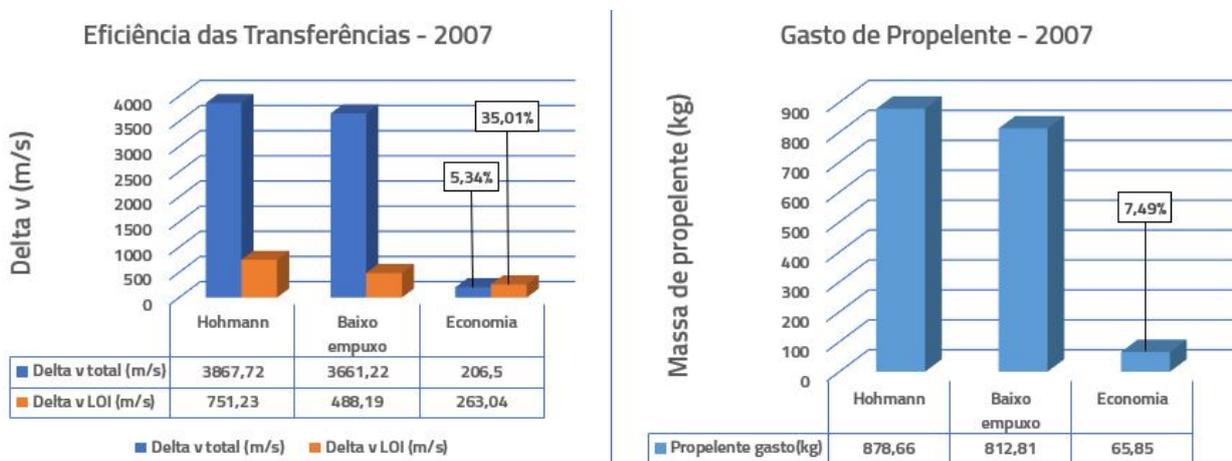


Figura 59 – Gráfico de eficiência das transferências que ocorreram em 2007.

Um gráfico que apresenta a economia entre as transferências em 2021 também foi gerado:

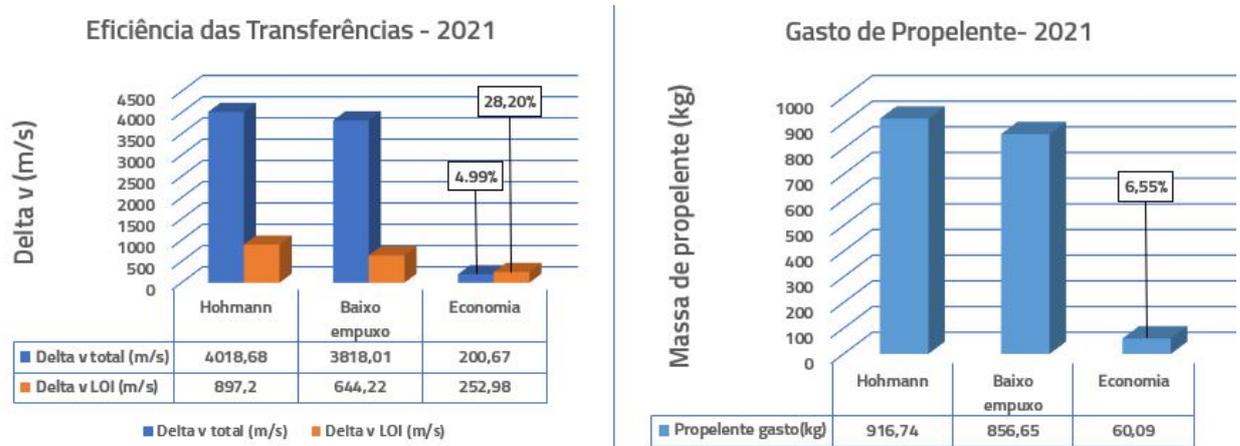


Figura 60 – Gráfico de eficiência das transferências que ocorreram em 2021.

Os resultados obtidos são claramente muito positivos. Além de corroborar o embasamento teórico previamente exposto, apresentou, na prática, uma economia para transferências de baixo empuxo com captura gravitacional na casa de 5% em Δv_{total} para ambas as trajetórias simuladas. Porém, o fator determinante deste tipo de transferência se encontra na economia presente na manobra de inserção em órbita lunar, onde a redução do Δv_{LOI} para a trajetória em 2007 foi da ordem de 35% e, em 2021, da ordem de 28%. Economia esta que possibilita, em algumas circunstâncias, dobrar o *payload* que será colocado em órbita lunar. Por fim, em ambas missões, o gasto total de propelente foi reduzido em 7% aproximadamente.

Em outro trabalho de Belbruno, (BELBRUNO; MILLER, 1993), uma comparação semelhante foi feita. As transferências foram analisadas em termos de Δv e Δt com a finalidade de entrar em uma órbita circular de 100 km em torno da Lua partindo de uma órbita LEO de 167 km.

Transferência	Δv (m/s)	Δt (dias)	Modelo matemático	Tipo
Hohmann	3991	5	<i>Patched conics</i> problema de 2 corpos	Interna
Baixo empuxo	3838	160	Problema restrito de 3 corpos	Externa + <i>flyby</i>

Tabela 7 – Comparação entre transferências Terra-Lua. Adaptado de (BELBRUNO; MILLER, 1993)

Os resultados observados também foram obtidos ao somar os valores de Δv de

injeção translunar, de manobras intermediárias e de captura com circularização de órbita. Logo:

Transferência	Δv_1 (m/s)	Δv_m (m/s)	Δv_C (m/s)	Δv_{circ} (m/s)
Hohmann	3143	0	200	648
Baixo empuxo	3161	29	0	648

Tabela 8 – Partes da transferência Terra-Lua. Adaptado de (BELBRUNO; MILLER, 1993)

Os resultados da análise comparativa das transferências em (BELBRUNO; MILLER, 1993) apresentaram uma redução de 3.8% em Δv_{total} e de 23.5% em Δv_{LOI} . Ao comparar estes resultados com a transferência de 2021 simulada neste trabalho, nota-se que os resultados obtidos foram muito satisfatórios. Onde, em relação ao trabalho de Belbruno, o Δv_{total} apresentou um acréscimo na economia em torno de 1.19%, o Δv_{LOI} , de 4.7%, a ausência de necessidade de *flyby* lunar, manobra intermediária reduzida a 0 m/s e, como uma das principais vantagens, o Δt foi reduzido de 160 dias para 92 dias.

Um relatório completo e detalhado dos resultados de manobras feitas durante as fases de cada uma das missões simuladas pode ser encontrado no apêndice do trabalho.

8 Conclusão

Os resultados apresentados neste trabalho foram fundamentados teoricamente com base em uma literatura extensa de cientistas importantes da área da astrodinâmica e foram embasados, na prática, pelo uso de um software da NASA de alta qualidade e confiabilidade.

Os estudos de trajetórias de baixo empuxo com captura gravitacional representam um grande avanço na comunidade científica. A descoberta, em 1987, de regiões de transição no espaço, onde as interações gravitacionais entre Terra, Lua e Sol para uma massa pequena em movimento se equilibram, foi muito importante para a criação de trajetórias inovadoras para missões espaciais. A conexão entre as *weak stability boundaries* das primárias permitiu a construção de transferências com capturas gravitacionais entre a Terra e a Lua e, posteriormente a sua sobreposição com variedades invariantes foi comprovada numericamente.

As variedades invariantes se mostraram bons substitutos dinâmicos quando o problema perde a analiticidade e necessita de informações adicionais para se construir uma trajetória. A combinação de trajetórias que utilizam as variedades com sistemas de baixo empuxo e alto impulso específico é, definitivamente, de grande relevância para o meio, tendo em vista que este tipo de transferência pode ser utilizado em trajetórias Terra-Vênus, Terra-Marte e, para o caso estudado, Terra-Lua.

Após analisar dados comparativos de vários tipos de transferências, fica clara a diferença e aplicabilidade de cada uma para cada tipo de missão. A transferência de Hohmann, que obteve um tempo de voo de 9 dias, é extremamente útil para missões tripuladas com restrições de tempo para chegar ao destino final. As transferências de baixo empuxo surgem como um novo campo com diferentes possibilidades a serem exploradas. Com duração das trajetórias obtidas em torno de 92 dias e um Δv de inserção em órbita lunar podendo chegar a ser até 35% mais econômico do que Hohmann, este tipo de transferência possui aplicação perfeita para missões de carga, que não possuem restrições de tempo para a transferência ser concluída, onde a massa de *payload* deve ser maximizada.

Desta forma, com os resultados obtidos, acredita-se que os objetivos propostos no início do trabalho foram alcançados e espera-se que este tenha utilidade para a comunidade científica e potencialize o interesse por esta área que está em evidente crescimento e que possui aplicações diversas.

Referências

- BARNETT, A. *In Depth: GRAIL (Ebb and Flow)*. 2019. <<https://solarsystem.nasa.gov/missions/grail/in-depth/>>. Online; Acessado em 21 de setembro de 2020. Citado na página 21.
- BATE, D. D. M. R. R.; WHITE, J. E. *Fundamentals of ASTRODYNAMICS*. [S.l.]: DOVER PUBLICATIONS, INC., 1971. ISBN 0-486-60061-0. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 32.
- BATTIN, R. H. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. New York, NY, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, 1987. ISBN 0-930403-25-8. Citado na página 21.
- BELBRUNO, E.; GIDEA, M.; TOPPUTO, F. Weak stability boundary and invariant manifolds. *Journal on Applied Dynamical Systems*, jan 2010. Citado 3 vezes nas páginas 9, 51 e 61.
- BELBRUNO, E. A. Lunar capture orbits, a method of constructing earth moon trajectories and the lunar gas mission. *AIAA, DGLR, and JSASS*, may 1987. Citado 4 vezes nas páginas 19, 38, 50 e 77.
- BELBRUNO, E. A.; MILLER, J. K. A ballistic lunar capture trajectory for the japanese spacecraft hiten. *Jet Propulsion Laboratory*, 1990. IOM 312/90.41371-EAB. Citado na página 38.
- BELBRUNO, E. A.; MILLER, J. K. Sun-perturbed earth-to-moon transfers with ballistic capture. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, jul 1993. <https://doi.org/10.2514/3.21079>. Citado 17 vezes nas páginas 9, 10, 12, 18, 19, 21, 49, 50, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 93 e 94.
- BELBRUNO, J. C. E. Calculation of weak stability boundary ballistic lunar transfer trajectories. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, aug 2000. DOI: 10.2514/6.2000-4142. Citado 11 vezes nas páginas 10, 12, 66, 67, 77, 79, 80, 82, 84, 88 e 90.
- BELBRUNO, M. G. E.; TOPPUTO, F. Geometry of weak stability boundaries. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, apr 2012. Citado na página 43.
- CONLEY, C. Low energy transit orbits in the restricted three body problem. *SIAM J. Appl. Math.*, v. 16, n. 4, p. 732–746, 1968. Citado na página 51.
- CURTIS, H. D. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. third. [S.l.: s.n.], 2014. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-69685-1>. Citado 14 vezes nas páginas 9, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 39, 44, 45 e 47.
- DAVIS RODNEY L. ANDERSON, D. J. S. K. E.; BORN, G. H. The use of invariant manifolds for transfers between unstable periodic orbits of different energies. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, jun 2010. DOI 10.1007/s10569-010-9285-3. Citado 5 vezes nas páginas 9, 45, 50, 51 e 52.

DRAKE, N. *A brief history of moon exploration*. 2020. <<https://www.nationalgeographic.com/science/space/space-exploration/moon-exploration/>>. Online; Acessado em 14 de setembro de 2020. Citado na página 20.

DUNBAR, B. *In Depth: GRAIL (Ebb and Flow)*. 2020. <<https://www.nasa.gov/specials/artemis/>>. Online; Acessado em 21 de setembro de 2020. Citado na página 21.

F VASILE M, B.-Z. F. T. Interplanetary and lunar transfers using libration points. European Space Agency (Special Publication) ESA SP, p. 583–588, 2004. ISSN: 03796566. Citado na página 38.

FAA. *Interplanetary Travel*. 2018. Disponível em: <https://www.faa.gov/about/office_org/headquarters_offices/avs/offices/aam/cami/library/online_libraries/aerospace_medicine/tutorial/media/III.4.1.6_Interplanetary_Travel.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 31.

FERNANDES, C. M. P. M. Sandro da S. Optimal two-impulse trajectories with moderate flight time for earth-moon missions. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2012, n. Article ID 971983, 2012. <https://doi.org/10.1155/2012/971983>. Citado 4 vezes nas páginas 9, 32, 33 e 34.

FILHO, S. d. S. F. L. A. G. *Optimal round trip lunar missions based on the patched-conic approximation*. third. Departamento de Matemática, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP 12228-900, Brazil 1: Springer, 2015. DOI 10.1007/s40314-015-0247-y. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

GARBER, S. *Apollo 11 Image Gallery*. 2007. <<https://history.nasa.gov/ap11ann/kippsphotos/apollo.html>>. Online; Acessado em 21 de setembro de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 20.

GRAPHICS, I. A. *Astrogator: Moon Mission (with B-Plane Targeting)*. 2021. <tinyurl.com/pn2w44zb>. Citado 4 vezes nas páginas 10, 68, 69 e 73.

KIT, S. T. *Orbit Propagators for Satellites*. 2016. <https://help.agi.com/stk/11.0.1/Content/stk/vehSat_orbitProp_choose.htm>. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.

KOON MARTIN W. LO, J. E. M. W. S.; ROSS, S. D. Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics. *American Institute of Physics*, v. 10, n. 2, jun 2000. Citado 3 vezes nas páginas 49, 51 e 63.

KOON M.W.LO, J. W. S.; ROSS, S. D. Low energy transfer to the moon. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 81, p. 63–73, 2001. <https://doi.org/10.1023/A:1013359120468>. Citado 7 vezes nas páginas 10, 20, 59, 60, 62, 63 e 64.

MCGEHEE, R. *Some homoclinic orbits for the restricted three body problem*. Tese (Doutorado) — University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, (1969), 1969. Citado na página 51.

MELO, C. F. de. *TRAJETORIAS ALTERNATIVAS NO SISTEMA TERRA-LUA*. Tese (Doutorado) — INPE, São Jose dos Campos, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 12, 42, 44, 46, 49 e 54.

- MILLER, J. K.; BELBRUNO, E. A. A method for the construction of a lunar transfer trajectory using ballistic capture. *AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting*, p. 91–100, feb 1991. Citado na página 52.
- NASA. *Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) Launch*. 2011. <https://www.nasa.gov/pdf/582116main_GRAIL_launch_press_kit.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 21.
- NASA. *What is a Lagrange Point?* 2018. <<https://solarsystem.nasa.gov/resources/754/what-is-a-lagrange-point/>>. Citado na página 43.
- NASA. *Moon Missions*. 2019. <<https://moon.nasa.gov/exploration/moon-missions/>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 22.
- PARKER, J. S. *TARGETING LOW-ENERGY BALLISTIC LUNAR TRANSFERS*. 2014. <<https://trs.jpl.nasa.gov/bitstream/handle/2014/41633/10-1859.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Online; Acessado em 5 de Outubro de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 48.
- PARKER, R. L. A. J. S. *Low-Energy Lunar Trajectory Design*. California Institute of Technology Jet Propulsion Laboratory (JPL): John Wiley and Sons, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 9, 44, 48 e 89.
- PRADO, A. F. B. de A. Analytical and numerical approaches to study the gravitational capture in the four-body problem. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 28, sep 2006. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782006000300013> ISSN 1806-3691. Citado na página 49.
- SCHUTZER, W. *Na matematica, mais especificamente na topologia, o que é uma variedade?* 2019. <shorturl.at/pwzOX>. Online; Acessado em 6 de Outubro de 2020. Citado na página 50.
- SILVA, M. R. da. *ESTUDO DE UMA MISSAO ESPACIAL AOS PONTOSCOLINEARES LAGRANGIANOS NO SISTEMATERRA-LUA*. Tese (Doutorado) — INPE, Sao Jose dos Campos, jun 2017. Citado na página 39.
- SPUDIS, P. D. *The Robotic Exploration of the Moon*. 2008. <<https://moon.nasa.gov/exploration/history/>>. Online; Acessado em 14 de setembro de 2020. Citado na página 20.
- STOER, J.; BULIRSCH, R. *Introduction to Numerical Analysis*. third. New York, NY, USA: Springer, 2002. vol. 12. Citado na página 35.
- TOPPUTO, F. On optimal two-impulse earth–moon transfers in a four-body model. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, aug 2013. DOI 10.1007/s10569-013-9513-8. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 89.
- WHEELER, R. *Apollo lunar landing launch window: The controlling factors and constraints*. 2009. <<https://history.nasa.gov/afj/launchwindow/lw1.html>>. Online; Acessado em 20 de outubro de 2020. Citado na página 30.

Apêndices

APÊNDICE A – Relatório de Missões

A.0.1 Relatório de Missão da Transferência de Hohmann - 2007

Civil Air Patrol Use Only
Sattelite-Hohmann

Maneuver	Segment	Start Time (UTCG)	Delta V (m/sec)	Fuel Used (kg)
1	Target Sequence TLI	26 Apr 2007 21:40:57.320	3116.483217	653.305
2	Target Sequence LOI	4 May 2007 00:27:26.062	751.239674	225.355

Global Statistics

Total Est./Act. Finite Burn Duration (sec) - 5170.026
Total Delta V (m/sec) - 3867.722892
Fuel Used (kg) - 878.660

A.0.2 Relatório de Missão da Transferência de Baixo Empuxo - 2007

Civil Air Patrol Use Only
Sattelite-WSB Probe

Maneuver	Segment	Start Time (UTCG)	Delta V (m/sec)	Fuel Used (kg)
1	Target Sequence TLI	23 Apr 2007 22:57:45.461	3173.028852	659.905
2	Target Sequence LOI	27 Jul 2007 02:58:21.060	488.199815	152.904

Global Statistics

Total Est./Act. Finite Burn Duration (sec) - 4782.561
Total Delta V (m/sec) - 3661.228667
Fuel Used (kg) - 812.809

A.0.3 Relatório de Missão da Transferência de Hohmann - 2021

Civil Air Patrol Use Only
Sattelite-Hohmann

Maneuver	Segment	Start Time (UTCG)	Delta V (m/sec)	Fuel Used (kg)
1	Target Sequence TLI	23 Apr 2021 22:57:32.627	3121.483767	653.894
2	Target Sequence LOI	2 May 2021 19:22:28.617	897.203916	262.850

Global Statistics

Total Est./Act. Finite Burn Duration (sec) - 5394.113

Total Delta V (m/sec) - 4018.687683

Fuel Used (kg) - 916.744

A.0.4 Relatório de Missão da Transferência de Baixo Empuxo - 2021

Civil Air Patrol Use Only

Sattelite-WSB Probe

Maneuver	Segment	Start Time (UTCG)	Delta V (m/sec)	Fuel Used (kg)
1	Target Sequence TLI	22 Apr 2021 21:29:20.194	3173.790904	659.993
2	Target Sequence LOI	23 Jul 2021 22:24:26.802	644.222604	196.658

Global Statistics

Total Est./Act. Finite Burn Duration (sec) - 5040.525

Total Delta V (m/sec) - 3818.013508

Fuel Used (kg) - 856.651