



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS**

**ROBERTO LUCAS DAMACENO DOS SANTOS**

**ESTRATÉGIA DE EMPACOTAMENTO PARA UMA FIRMA**

**MONOPOLISTA MULTIPRODUTO:**

Uma análise sob a perspectiva de modelos do tipo  
Principal-Agente

Brasília, 2021

**ROBERTO LUCAS DAMACENO DOS SANTOS**

**ESTRATÉGIA DE EMPACOTAMENTO PARA UMA FIRMA  
MONOPOLISTA MULTIPRODUTO:**

Uma análise sob a perspectiva de modelos do tipo Principal-Agente

**Orientador:** Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza

**Área de pesquisa:** Economia industrial

Brasília, 2021



## Resumo

Uma firma monopolista, que tem a capacidade de manipular os preços dos produtos que vende, deseja buscar a melhor estratégia possível para maximizar seus lucros. Porém, ela possivelmente irá enfrentar obstáculos como restrições legais e informação imperfeita sobre o mercado. Neste trabalho analisamos a situação de uma firma monopolista que atua em dois mercados diferentes e qual seria a melhor estratégia para essa firma: empacotamento (*bundling*) ou componentes puros (*pure components*). No empacotamento, a firma somente vende os dois bens de maneira conjunta, em um pacote, enquanto em componentes puros, ela vende os bens apenas de maneira separada. Para isso, usamos o modelo Principal-Agente com seleção adversa. Cada mercado possui dois tipos de consumidores, os que valoram pouco ou muito o bem em questão. Cada uma das situações é representada por uma maximização com algumas restrições, as quais podem ser simplificadas a ponto de se chegar a uma maximização sem restrições. Após determinar a expressão do lucro em cada situação, ambas em função da proporção  $\mu$  de consumidores que valoram muito o bem e do spread de incerteza (diferença entre valoração alta e baixa), é feita uma comparação entre ambas a fim de determinar sob quais condições uma estratégia é superior à outra. A essa condição damos o nome de diferencial de lucro. Após isso, são feitas algumas simulações alterando os valores de  $\mu$  e  $\alpha$  e analisando como o diferencial de lucro se comporta. De maneira geral, conclui-se que existem valores para cada parâmetro para os quais o empacotamento sempre será melhor, independente do valor do outro. Entretanto, sempre que componentes puros é uma possível melhor opção para a firma, pode ocorrer uma alteração em algum dos parâmetros que torne o empacotamento mais vantajoso. Assim, a gama de situações nas quais o empacotamento é mais lucrativo é superior à gama de situações onde componentes puros é a melhor escolha.

## **Abstract**

A monopolistic firm, which has the ability to manipulate the prices of the products it sells, wants to seek the best possible strategy to maximize its profits. However, it will possibly face obstacles such as legal restrictions and imperfect information about the market. This paper analyzes the situation of a monopolistic firm that operates in two different markets and what would be the best strategy for this firm: bundling or pure components. In bundling, the firm only sells the two goods together, in a package, while in pure components it sells the goods only separately. For this, the tooling of principal-agent models, which deal with adverse selection, was used. Each market has two types of consumers, those who have low or high valuation over the good. Each situation is represented by a maximization with some constraints, which can be simplified to the point of reaching an maximization without constraints. After determining the profit expression in each situation, both depending on the proportion  $\mu$  of consumers who highly value the good and the uncertainty spread (difference between high and low valuation), a comparison is made between the two in order to determine under which conditions one strategy is superior to the other. We call this condition profit differential. After that, some simulations are made by changing the values  $\mu$  and  $\alpha$  and analyzing how the profit differential behaves. In general, it is concluded that there are values of each parameters for which bundling will always be better, regardless of the value of the other. Also, whenever pure components are a possible best option for the firm, a change in any of the parameters may occur that makes packaging more advantageous. Thus, the range of situations in which bundling is more profitable is superior to the range of situations where pure components is the best option .



## 1. Introdução

Muitas vezes, na vida real, os consumidores se deparam com mercados onde as firmas participantes possuem influência real sobre os preços dos produtos. Elas deixam de ser tomadoras de preços e passam a conseguir distorcê-los, e assim aumentar seus lucros em relação à situação onde o mercado é competitivo. Em outras palavras, os preços cobrados podem acabar superando os custos marginais de produção dos bens. Desta forma, há um aumento do excedente dos produtores às custas de uma perda de excedente por parte dos consumidores, sendo esta geralmente maior que aquela, caracterizando uma perda de peso morto (*deadweight loss*), ou seja, há uma diminuição do excedente total apropriado pela sociedade.

Entretanto, essa distorção nos preços não ocorre de uma maneira única. As firmas podem empregar diversas estratégias na venda de seus produtos, e escolherão de acordo com as características dos mercados em questão. Entre essas características podem estar número de concorrentes, preferências dos consumidores, regulamentação do setor, complementaridade (ou substituíbilidade) dos bens, entre outras.

Uma estratégia que pode ser eficiente na busca por maiores lucros por parte das firmas é o empacotamento (*bundling*). Esta estratégia consiste em vender dois ou mais bens de maneira conjunta, em um pacote, ao invés de oferecê-los apenas de maneira separada (*pure components*). Há também a possibilidade de a firma oferecer tanto o pacote contendo os bens como os bens de maneira isolada, o que é chamado na literatura de empacotamento misto (*mixed bundle*). Geralmente o preço do pacote apresenta um desconto em relação à soma dos preços de seus componentes, justamente para torna-los mais atrativos para o público alvo.

Existe uma infinidade de mercados onde o empacotamento e suas variantes são empregadas de maneira recorrente, sendo inclusive a estratégia predominante em alguns deles. Um bom exemplo é o mercado de redes de *fast*

*food*, onde a empresa oferece tanto os lanches em forma de combo (por exemplo, pacote com hambúrguer, batata frita e refrigerante), como seus componentes separados. Desta forma, o cliente tem liberdade de escolher qual combinação de produtos ele deseja adquirir, e a firma determina o preço de cada uma dessas possíveis combinações. Outro setor em que é comum essa prática é o de telecomunicações. As firmas de telecomunicações geralmente prestam serviços de telefonia fixa e móvel, banda larga e TV por assinatura, e apresentam diferentes pacotes contendo dois ou mais desses serviços, além de vendê-los separadamente. Cada bem pode apresentar diferentes qualidades (como velocidade da banda larga ou número de canais disponíveis), dando variabilidade aos possíveis pacotes e permitindo à firma escolher a estratégia mais adequada para aumentar seus lucros, tenha ela concorrentes ou não. Leandro e Gomes (2019) mostram os efeitos da concorrência nos preços e qualidade dos componentes dos pacotes para o caso desse setor no Brasil.

De maneira geral, a literatura disponível sobre o tema coloca o empacotamento como uma ferramenta poderosa à disposição da firma para aumentar seus lucros por algumas razões. Uma delas seria a capacidade que o empacotamento tem de diminuir a dispersão de valorações dos indivíduos sobre os bens, permitindo à firma uma extração mais completa do excedente dos consumidores. Dessa forma, estaria agindo como uma ferramenta de discriminação de preços. Outra razão seria o fato de o empacotamento por parte de uma firma monopolista poder tanto diminuir os potenciais lucros de uma firma que queira entrar no mercado e aumentar os lucros da firma titular, evitando a concorrência, como diminuir os lucros da firma concorrente mesmo que ela consiga entrar no mercado. Há uma ampla gama de situações onde o empacotamento pode ser usado, incluindo os mais diversos mercados com as mais diversas características, evidenciando a relevância desse tipo de estratégia. Diversos desses casos serão exemplificados no capítulo 2 onde é feita uma revisão sobre a literatura de empacotamento.

## **1.1 Objetivo**

Observando a diversidade de aplicações reais que possui o empacotamento e considerando que esta é uma prática legal e simples de ser executada pelas firmas, o presente trabalho busca apresentar uma modelagem de empacotamento para uma firma monopolista multiproduto sob uma perspectiva de seleção adversa. A intenção é apresentar um modelo matemático que tem como plano de fundo o referencial teórico de modelos do tipo Principal-Agente, onde os agentes possuem alguma informação privada (conhecida apenas por eles) que é relevante para o principal (firma vendedora) no problema de maximizar seu lucro. Desta forma, busca-se verificar qual seria a melhor forma disponível ao principal de oferecer seus produtos aos consumidores com a intenção de obter os maiores lucros possíveis, condicional a certas características dos agentes e do processo de produção.

## **1.2 Metodologia**

Para estudar os possíveis benefícios do empacotamento para uma firma monopolista será apresentado um modelo do tipo principal-agente no qual uma firma monopolista com determinadas funções de custo de produção para cada bem se depara com alguns tipos de agentes, sendo que cada tipo valora os bens oferecidos de forma diferente. Entretanto, a firma não conhece o tipo de cada agente, mas somente a distribuição dos tipos na sociedade. Desta forma, a firma deseja oferecer os bens ou combinações destes de forma específica a fim de induzir os agentes de cada tipo a comprarem justamente o pacote desenhado pra eles, visando maximizar seus lucros. A partir disso, busca-se entender sob quais condições o empacotamento pode ou não ser mais lucrativos que a simples venda individual dos produtos envolvidos.

## 2. Literatura sobre empacotamento

A estratégia de empacotamento (*bundling*) pode ser adotada por uma firma que deseje aumentar o seu lucro frente a uma massa de consumidores distintos. Assim sendo, vários são os estudos que buscam entender essa estratégia e suas diversas aplicações. Adams e Yellen (1976), um dos estudos pioneiros sobre o tema, estuda a situação de uma firma monopolista que vende dois produtos. Mesmo quando não há economias de custo na produção e transação do pacote (bens 1 e 2 vendidos conjuntamente), ou quando não há complementaridade no consumo dos bens, a estratégia de empacotamento pode ser mais lucrativa do que simplesmente vender os bens separadamente (*pure components*), seja ela de empacotamento puro (*pure bundling*), onde se vende somente o pacote com os dois produtos, ou de empacotamento misto (*mixed bundling*), onde se vende o pacote e os produtos separadamente. Porém, a lucratividade de cada possível configuração de venda depende da distribuição dos preços de reserva dos consumidores para cada bem, bem como da estrutura de custos.

O referencial usado para ranquear as três situações possíveis seria o caso em que a firma monopolista consegue praticar uma discriminação de preços perfeita, ou seja, cumpre três critérios: extrai todo excedente dos consumidores que compram o bem (Extração), exclui consumidores que possuem preço de reserva menor que o custo do bem do mercado (Exclusão), e consegue vender para todo consumidor que possui preço de reserva maior que o custo do bem (Inclusão).

Conforme os custos vão se tornando menores em relação aos preços de reserva, maior o lucro do empacotamento puro em comparação ao monopólio simples. Isso porque a inclusão de compradores que antes não compravam e a maior eficiência na extração do excedente dos compradores aumenta o lucro em maior medida do que a exclusão de compradores que ocorre no monopólio simples. Já quando comparada à estratégia de empacotamento misto, o empacotamento simples será sempre menos lucrativo que aquele quando violar o critério de Exclusão. Os lucros de empacotamento misto serão ainda maiores caso aqueles consumidores com preço de reserva alto para o pacote tenham preços de reserva similares para os dois produtos, e caso aqueles que tenham preço de reserva alto para um dos produtos e baixo para o outro tenham preço de reserva baixo para o pacote. A estratégia de empacotamento misto permite ao monopolista tanto extrair excedente dos compradores do pacote, como dos consumidores com preço de reserva alto para um dos produtos, e que antes não compravam o pacote, por meio da venda separada desse produto.

Nos casos em que há correlação entre as valorações dos produtos por parte dos consumidores, quanto menos positiva for essa correlação, maior será a vantagem da firma ao adotar empacotamento misto ao invés da estratégia de monopólio simples (aumenta a Inclusão), podendo inclusive, além de vender o pacote, aumentar os preços dos produtos separados.

Em McAfee, McMillan e Whinston (1989) o estudo se baseia no modelo proposto por Adam e Yellen (1976) para conduzir uma análise sobre a lucratividade de empacotamento misto comparado à venda de componentes puros em dois cenários distintos: um no qual a firma pode monitorar as compras dos consumidores, e outro no qual isso não é possível. O modelo apresenta um monopolista e dois produtos com custos marginais de produção constantes. As demandas pelos bens são independentes e cada consumidor demanda no máximo uma unidade de cada bem. Além disso, as valorações dos indivíduos sobre os bens são conjuntamente distribuídas. Considera-se a existência de pelo menos uma parcela de consumidores que valoram o bem acima do custo

marginal deste, e que não há a possibilidade de haver revenda entre os consumidores.

O estudo é focado nas duas estratégias citadas, mas destaca que quando comparamos empacotamento puro e empacotamento misto, esta segunda sempre será pelo menos tão boa quanto a primeira desde que o preço de cada bem separado seja igual ao preço do pacote menos seu respectivo custo marginal. No cenário em que o monopolista não monitora as compras dos consumidores, é preciso que o preço do pacote seja menor ou igual aos preços individuais somados, o que não ocorre no primeiro cenário, onde ele pode evitar que os consumidores comprem os bens isoladamente.

Observando o caso especial onde as valorações dos bens são distribuídas de forma independente, mostra-se que o empacotamento domina componentes puros. Uma situação interessante também descrita no artigo ilustra o caso de um duopólio sobre dois bens, onde cada firma produz uma versão diferente dos bens, e os consumidores valoram cada uma dessas versões de maneira diferente. As firmas podem escolher qual estratégia irão adotar, porém de maneira simultânea. A conclusão a que se chega é a de que caso as distribuições das valorações dos bens sejam independentes, a estratégia que consiste em vender apenas os bens separadamente nunca será um equilíbrio de Nash.

Já em Nalebuff (2004), uma perspectiva diferente sobre empacotamento é apresentada. O estudo considera a situação de uma firma com poder de mercado nos bens A e B que tem de lidar com a concorrência de outra firma com um substituto perfeito de um dos produtos, onde em ambos os mercados as valorações dos consumidores são uniformemente distribuídas e independentes, e ambas as firmas possuem custo marginal nulo.

Seja para prevenir outra firma de entrar no mercado de um dos bem, seja para aumentar seus lucros quando já há concorrência em um dos mercados, o empacotamento se mostra uma ferramenta útil, podendo até evitar que a firma titular tenha de baixar preços para atingir seus objetivos.

Entretanto, como o preço do pacote é maior que de um dos bens isoladamente, o consumidor marginal desse pacote agora é mais valioso, o que gera um incentivo para firma em baixar os preços deste.

Os potenciais lucros da firma entrante são reduzidos quando a firma titular pratica o empacotamento, e mesmo que a firma titular não impeça a concorrente de entrar no mercado de A ou B, ela ainda assim terá lucros maiores vendendo A e B conjuntamente do que apenas oferecendo os bens separadamente. Tal estratégia possibilita à firma diminuir a dispersão de valorações dos bens entre os consumidores, permitindo uma maior extração do excedente destes, principalmente em bens com valorações negativamente correlacionadas.

Já com relação ao empacotamento como barreira à entrada, quanto mais positivamente correlacionadas forem as valorações dos bens, maior sua eficiência, já que a firma concorrente, que vende apenas um dos bens, não conseguirá satisfazer completamente seus clientes. O artigo mostra que mesmo no caso em que a firma titular tenha de manter seus preços nos níveis pré-entrada da concorrente, ainda assim o empacotamento diminui os potenciais lucros de uma firma que queira entrar no mercado de um dos bens.

Outro estudo interessante é apresentado em Schmalensee (1982), que usa como base para sua análise dois produtos, um que é vendido em um mercado competitivo, e outro que é vendido por um monopolista. Estes bens possuem demandas independentes, e, portanto, não possuem qualquer complementariedade ou substituição entre si. Considera-se que a produção de ambos os bens apresenta um custo constante por unidade, e que os consumidores desejam comprar no máximo uma unidade de cada bem caso o preço destes seja menor que seus preços de reserva.

Neste cenário, a estratégia da firma em vender apenas o pacote dos dois bens é no máximo tão lucrativa quanto vender os bens separadamente, já que com bens separados a firma é capaz de vender o bem 2 (monopólio) para aqueles consumidores que o valorem acima de seu preço e valoram tanto o

pacote quanto o bem 1 (competitivo) abaixo de seu preço, algo que não ocorre com a venda exclusiva do pacote.

Porém, a firma pode optar por vender tanto o pacote como o bem 2 isoladamente, configurando uma estratégia de empacotamento misto. Desta forma, basta que o preço do pacote seja maior que o preço do bem 2 isoladamente e menor que a soma dos preços dos dois bens para que a firma consiga aumentar seus lucros em comparação com a venda exclusiva dos bens separados. Nesse caso, alguns consumidores que valoram o bem 1 abaixo de seu preço acabam adquirindo esse bem por meio do pacote, permitindo a extração de excedente dos indivíduos que valoram pouco o bem 1 e muito o bem 2. Isso pode levar outras firmas do mercado competitivo a acusar o monopolista de estar tentando monopolizar o mercado competitivo, prejudicando a concorrência.

Quanto mais negativamente correlacionadas forem as valorações dos dois bens, maior a capacidade do monopolista de aumentar seus lucros por meio do empacotamento. Entretanto, por mais que o lucro do monopolista aumente, o bem-estar social pode tanto diminuir como aumentar, dependendo da distribuição de valorações entre os indivíduos. No caso oposto, quanto mais positivamente correlacionadas as valorações dos bens, mais essa estratégia tem a sua eficácia reduzida.

Analisando um mercado mais específico onde se vendem bens de informação, Bakos e Brynjolfsson (1999) apresenta um modelo um pouco diferente, onde são considerados  $n$  bens vendidos por uma única firma. Os consumidores podem adquirir apenas uma unidade de cada bem ou não adquirir o bem, sendo impossível haver a revenda desses bens entre eles. Cada tipo de consumidor valora um determinado bem de maneira diferente, sendo que essa valoração individual do bem varia conforme a quantidade de bens adquiridos.

Assumindo algumas hipóteses acerca dos custos marginais de produção dos bens (bens de informação possuem custo marginal baixo ou zero e são

muitas vezes digitais) e das valorações dos indivíduos, o estudo conclui que vender  $n$  bens em forma de pacote pode ser muito superior a vender os  $n$  bens separadamente. Conforme  $n$  cresce, a firma consegue se apropriar de uma parcela cada vez maior da área abaixo da curva de demanda, diminuindo tanto a perda de peso morto como o excedente apropriado pelo consumidor em comparação à situação onde só se vende os bens separadamente. Dessa forma, tanto o peso morto quanto o excedente do consumidor (ambos em relação a cada bem) convergem para zero, e a firma atinge seu lucro máximo. Isso ocorre, pois, por meio da lei dos grandes números, pode-se garantir que há cada vez mais consumidores com valorações sobre o pacote perto da média.

Já com relação aos custos marginais, é possível concluir que quando estes assumem valores substanciais, o empacotamento se torna menos lucrativo que a venda separada. Um exemplo disto ocorre quando o custo marginal do pacote é maior que a valoração média deste. Logo, dados os custos marginais, é a distribuição de valorações entre os indivíduos que vai determinar se o empacotamento de  $n$  bens será lucrativo ou não, podendo ser não lucrativo mesmo com custos marginais zerados, desde que o pacote contenha bens com valorações negativas para alguns consumidores.

Outra situação na qual a venda separada é mais lucrativa que o empacotamento se dá quando a probabilidade dos consumidores apresentarem altas valorações para os bens é significativamente maior do que a probabilidade de apresentarem valorações baixas, ou quando a diferença entre valorações altas e baixas é grande, ou quando ambos os fenômenos ocorrem. Desta forma, mesmo sem empacotamento, a firma já consegue extrair grande parte do excedente dos consumidores.

Os autores também concluem que o empacotamento é mais lucrativo que a venda separada quando o preço por produto no pacote for menor que a valoração média desse produto quando se compram  $n$  bens (quantidade que vem no pacote). Assim, o lucro da firma aumenta de forma monotônica na quantidade de bens no pacote, ou seja, quanto maior for o número desses

bens, maior será o lucro da firma comparado à venda separada deles. Esse fato possibilita à firma criar economias de escopo mesmo sem economias de custo na produção advindas de tecnologia, distribuição ou consumo. Um caso particular interessante do modelo ocorre quando os bens possuem demandas individuais lineares e custos marginais nulos, proporcionando à firma aumentar seus lucros qualquer que seja o pacote escolhido por ela.

Analisando um contexto mais atual, onde se tem a internet como um meio de distribuição em massa de produtos, Hitt e Chen (2005) avaliam os efeitos do empacotamento customizado em mercados onde os produtos apresentam custos marginais baixos, mas não negligíveis, e custos de distribuição semelhantes entre si. O empacotamento customizado consiste em uma firma oferecer quaisquer  $M$  produtos de um conjunto maior de  $N$  produtos por um preço fixo. Assim, o consumidor tem a possibilidade de escolher os  $M$  produtos de sua preferência e pagar um montante determinado pela firma para essa quantidade.

No modelo proposto, uma firma monopolista é a responsável pela venda dos  $N$  bens disponíveis, e o custo de prover quaisquer  $M$  bens é o mesmo, independente dos bens. Considera-se que os consumidores apresentam, entre si, diferentes preferências sobre os bens individuais, e ainda, que cada indivíduo valora apenas um subconjunto do total de produtos disponíveis. Existem  $H$  tipos de indivíduos na economia, cada tipo representando uma proporção do total de indivíduos e tendo uma disposição a pagar por  $m$  bens (qualquer que seja o  $m$ ) diferente. Cada indivíduo deseja adquirir no máximo uma unidade de cada bem.

Desta forma, a firma precisa lidar com um problema de autosseleção, já que ela não consegue perceber de que tipo é o consumidor, e, portanto, tem que determinar os preços dos vários pacotes com quantidades diferentes de bens de forma a induzir os consumidores a comprarem o pacote desenhado para o seu tipo de forma espontânea. A situação se configura como uma discriminação de segundo grau.

Se valendo dos supostos acima, os pesquisadores concluem que o empacotamento customizado gera os mesmos lucros que o empacotamento misto (onde as firmas determinam quais produtos estão no pacote) caso o máximo que um tipo de indivíduo aceita pagar por  $M$  bens (pacote desenhado para seu tipo) seja igual ao que ele aceitaria pagar por um pacote desenhado para ele pela firma no empacotamento misto e pelo menos tão alto quanto um outro tipo qualquer estaria disposto a pagar por esse mesmo pacote. Ou seja, a solução ótima das duas estratégias é a mesma e os indivíduos escolhem os mesmos pacotes no empacotamento customizado que escolheriam no empacotamento misto. Porém é ressaltado que esse resultado deixa de valer quando há pacotes com a mesma quantidade de bens, mas com preços distintos no empacotamento misto.

O estudo também chega ao resultado de que caso a firma adote o empacotamento customizado, todos os tipos de consumidores que chegam a consumir (nem todos consomem) se apropriam de algum excedente, exceto o tipo mais baixo a consumir, que paga justamente o máximo que está disposto a pagar. Já o tipo mais alto, e apenas ele, sempre consome um pacote do mesmo tamanho que consumiria caso fosse o único tipo. Além disso, nota-se que o tamanho ótimo do pacote é não-crescente nos custos marginais. Outro resultado importante é que o empacotamento customizado gera um maior lucro para a firma do que uma estratégia de tarifa de duas partes quando há mais de um tipo de consumidor no mercado.

Como componentes puros e empacotamento puro são casos específicos do empacotamento customizado, é possível realizar comparações entre os dois. O empacotamento customizado passa a ser preferível à medida que os custos marginais crescem e as valorações dos consumidores sobre os bens ficam mais heterogêneas, já que esta estratégia consegue oferecer pacotes para cada tipo de consumidor e promover uma maior discriminação (extraindo mais excedente), enquanto as outras duas não.

Da mesma forma, essa capacidade de discriminação do empacotamento

customizado pode torná-lo atraente mesmo nos casos onde componentes puros ou empacotamento puro seriam preferíveis (custos marginais altos, e custos marginais negligíveis e heterogeneidade limitada dos indivíduos, respectivamente). Em uma situação onde os custos marginais são baixos, há restrição orçamentária para os indivíduos, e estes valoram uma parcela relativamente pequena de bens, o empacotamento customizado também se torna mais atraente que as demais estratégias.

Um cenário diferente pode surgir quando os consumidores não possuem total conhecimento sobre a utilidade (ou ausência desta) que um determinado produto pode proporcionar. Em Basu e Vitharana (2009), os autores buscam estudar a situação de uma firma monopolista, vendedora de dois produtos de valores similares para os consumidores, que pode oferecer as seguintes estratégias: componentes puros, empacotamento puro e empacotamento misto. Cada consumidor deseja no máximo uma unidade de cada bem, sempre buscando maximizar seu excedente.

Cada bem pode ser útil ou não para o consumidor, de acordo com uma função que depende de um parâmetro  $D$ , comum entre os consumidores, e cada consumidor atribui uma probabilidade ao bem de ser útil ou não, que depende de um parâmetro  $\alpha$  que indica a habilidade do consumidor de perceber, antes da compra, se o bem é útil ou não pra ele. O seu preço de reserva para um bem é dado por  $(1 - \beta)$ , onde  $\beta$  é o resultado da multiplicação entre  $\alpha$  e  $D$ , e representa o nível de conhecimento sobre o produto. Quanto maior for o  $\alpha$ , maior será essa habilidade, ou ainda, maior o conhecimento sobre a real utilidade do bem. O preço de reserva para o pacote de cada consumidor é igual à soma de seus preços de reserva para cada bem presente no pacote. Assume-se que os consumidores são neutros ao risco.

Desta forma, a firma encara quatro tipos de consumidores (combinações de preço de reserva alto e baixo para os dois bens) e deve decidir qual estratégia utilizar, levando em conta que os custos marginais de cada bem são iguais e constantes. Considera-se o caso especial no qual o conhecimento  $\beta$  é uniformemente distribuído sobre  $[0, K]$ .

Quando o custo marginal de um dos produtos é baixo e a diferença entre valorações altas e baixas é pequena para os produtos, o lucro é maximizado quando a firma oferece apenas o pacote a um preço médio ou baixo, obrigando consumidores que valoram apenas um dos bens a comprar ambos. Isso ocorre, pois, o bem com custo marginal baixo dá à firma margem suficiente para possíveis descontos no preço do pacote, e os bens do pacote não permitem à firma cobrar preços altos pois os preços de reserva dos consumidores são baixos. Já quando o custo marginal é alto ou a diferença entre valorações altas e baixas é grande para ambos os produtos, tanto componentes puros como empacotamento misto podem ser estratégias ótimas.

Quanto maiores forem os segmentos de consumidores que valoram muito apenas um dos bens, mais eficiente será o empacotamento misto em relação ao empacotamento puro, já que além de vender o pacote para aqueles que já o comprariam, ainda atrai consumidores que valoram muito apenas um bem a comprá-los por um preço alto.

Porém, à medida que a proporção de consumidores que valoram muito os dois bens cresce, componentes puros passa a ser mais eficiente, já que se vende os dois produtos a um preço alto para boa parte dos consumidores. Entretanto, se a proporção de consumidores que valoram pouco os dois bens aumenta, aí o empacotamento misto volta a ser superior a componentes puros, já que consegue atender também a esse segmento de consumidores de valoração baixa, mais relevantes agora. Portanto, percebe-se que custos marginais, proporções de tipos de indivíduos na população e distribuição de conhecimento na população são determinantes para a determinação da melhor estratégia para a firma.

Em alguns mercados com características especiais, os resultados do empacotamento podem ser distintos daqueles usualmente encontrados. Um bom exemplo disto ocorre nos mercados bilaterais, onde algumas plataformas oferecem um determinado bem ou serviço e conectam os dois lados do mercado que surgem à partir de seu produto: os produtores independentes,

que produzem bens complementares ao da plataforma e que só são úteis caso o consumidor possua o bem da plataforma, e os consumidores, que desejam comprar tanto o bem da plataforma quanto os dos produtores independentes. A presença de mais consumidores com acesso à plataforma gera uma renda potencial maior para os produtores, enquanto mais produtores independentes tornam a plataforma mais atrativa para os consumidores

É nesse contexto que Chao e Dardenger (2013) desenvolvem seu estudo. Considera-se uma plataforma monopolista, oferecendo um único produto, que interage com os produtores cobrando *royalties* por unidade de produto independente vendido pelo direito de produzir e vender produtos compatíveis com a plataforma, e cobra dois preços dos consumidores: um pelo acesso à plataforma e outro pelo conteúdo integrado. No caso em que há o pacote, há um preço correspondente para ele também. A plataforma possui custos marginais nulos.

Há dois tipos de consumidores: aqueles que, por algum motivo, já adquiriram acesso à plataforma (base instalada) mas não aos conteúdos integrados dos produtores, e aqueles que não adquiriram nenhum dos produtos ainda. Cada consumidor compra apenas uma unidade de cada produto. Aos que já adquiriram a plataforma, suas utilidades dependem apenas da aquisição do conteúdo integrado, enquanto para os demais, depende dos custos de transporte do produto da plataforma até eles, se eles compram ou não o conteúdo integrado independente, e da utilidade marginal do produto integrado.

Já pelo lado dos produtores independentes de conteúdo integrado, estes são obrigados a se juntarem à plataforma para poderem produzir produtos compatíveis com ela. Seu lucro por consumidor leva em conta o lucro por unidade vendida, os *royalties* pagos à plataforma, e a fração de consumidores que já têm acesso à plataforma e os potenciais novos consumidores da plataforma. Todos participantes possuem expectativas racionais. Primeiro, a plataforma decide sua estratégia (se empacota ou não) e seus preços. Após isso, consumidores decidem se compram e produtores *independentes* decidem a qualidade de seus conteúdos.

Seguindo certos supostos e a modelagem acima, o artigo conclui que sempre que o empacotamento misto for possível, ele será uma estratégia dominante sobre componentes puros e empacotamento puro, já que age como uma ferramenta de discriminação de preços, induzindo os consumidores a revelarem seus verdadeiros tipos (ou o mais próximo disto). Quando a taxa de *royaltys* é determinada exogenamente, tem-se, como o empacotamento misto, a mesma solução encontrada tradicionalmente em mercados unilaterais, ou seja, os preços dos componentes separados são maiores que sob a estratégia de componentes puros, e o preço do pacote é menor que a soma dos preços dos componentes separados sob componentes puros.

No entanto, quando essa taxa é determinada de maneira endógena, surge um resultado diferente daquele geralmente encontrado em outros estudos. Com exceção do preço do conteúdo independente, todos os demais preços caem, isto é, tanto a taxa de *royaltys* quanto o preço de acesso à plataforma para os consumidores caem em relação ao cenário de componentes puros. Isso ocorre principalmente pois o empacotamento misto é capaz extrair de forma mais eficiente o excedente do consumidor cobrando preços não lineares (o que não ocorre com os produtores, já que a taxa de *royaltys* é fixa). Assim, a firma tem incentivos para aumentar a demanda dos consumidores, e alcança esse objetivo diminuindo a taxa de *royaltys*, o que faz com que mais produtores independentes produzam conteúdo para a plataforma, atraindo mais consumidores e, conseqüentemente, elevando a qualidade do conteúdo independente.

Um cenário semelhante é explorado em Prasad, Venkatesh e Mahajan (2010), considerando produtos com externalidades de rede (*network externalities*), ou seja, produtos os quais a utilidade proporcionada ao consumidor depende também da quantidade de outros indivíduos que consomem esse produto. O propósito do estudo é verificar como diferenças nos custos marginais e externalidades de rede dos produtos influenciam a decisão da firma pela melhor estratégia.

Para tanto, considera-se uma firma monopolista de dois bens, e consumidores que desejam no máximo uma unidade de cada bem. A utilidade destes depende tanto da utilidade intrínseca que o produto proporciona, como das externalidades de rede dos produtos, dependendo, portanto, da demanda total pelo produto no mercado. O estudo assume que os consumidores podem prever perfeitamente qual será a demanda de equilíbrio. A firma pode escolher entre as estratégias de componentes puros, empacotamento puro ou empacotamento misto, sendo que neste último pode oferecer o pacote e ambos os bens separadamente ou o pacote e apenas um dos bens separadamente.

Começando por uma comparação entre componentes puros e empacotamento puro, verifica-se que caso ambos os bens não apresentem externalidades de rede, há perda de bem-estar social em componentes puros já que alguns consumidores não são atendidos, o que não ocorre caso as externalidades de rede de cada bem sejam suficientemente grandes. Caso não haja externalidades de rede, o empacotamento puro é ótimo quando os custos marginais dos produtos são pequenos, já que uma queda no preço do pacote é compensada pela captura tanto de consumidores que só valoram muito um dos bens, como aqueles que possuem valoração moderada para ambos. Essa compensação é ainda maior quando há externalidades de rede.

No caso em que apenas um dos produtos apresentam externalidades de rede, quanto maior for a magnitude desta, mais atrativo se torna a estratégia de componentes puros, já que se consegue vender tal produto a um preço alto sem reduções correspondentes na demanda. Tal aumento de preço não é alcançado sob empacotamento puro pois tem-se a necessidade de vender, juntamente com o produto com alta externalidade, o produto com externalidade de rede baixa (menos atrativo aos consumidores).

Incluindo agora a situação onde os produtos tenham custos marginais iguais e considerando-se o empacotamento misto e suas variantes, caso apenas um dos produtos apresente externalidades de rede, então a estratégia de empacotamento misto onde se oferece apenas o pacote e o produto com

externalidade será ótima caso o grau de externalidade seja maior que o custo marginal. Caso o grau de externalidade não seja grande o suficiente, então o empacotamento misto padrão é mais eficiente.

De maneira semelhante, caso ambos produtos apresentem externalidades de rede, à medida que estas vão se tornando maiores em relação aos custos marginais, o empacotamento puro vai se tornando mais eficiente, caso contrário, empacotamento misto padrão é favorecido. Isso demonstra o *trade-off* da firma quando há externalidades, que tem que decidir se cobra ou não preços altos daqueles consumidores que valoram muito apenas um dos bens, mas para isso tem que aumentar o preço do pacote (ou então esses consumidores comprariam o pacote), excluindo consumidores com valorações moderadas. Quanto maiores forem os graus de externalidade, maior o custo de excluir consumidores.

Quando os custos marginais são diferentes, se tivermos um bem com custo marginal baixo e apenas ele possuir externalidades de rede, é mais eficiente para a firma oferecer o pacote e este bem separadamente do que o pacote e ambos os bens à medida que o grau de externalidade cresce, já que a venda isolada do bem por si só já é atrativa, mas também porque aqueles que valoram pouco o bem passam a valorar mais pelo aumento de externalidade, passando a comprar o pacote. Oferecer o bem sem externalidade isoladamente diminuiria a venda do pacote e o benefício gerado pela externalidade do outro bem. Porém, caso esse grau de externalidade cresça ainda mais, o bem pode ser vendido a um preço alto e ainda assim penetrar todo o mercado, tornando ótima a estratégia de componentes puros. Isso ocorre, pois, com a presença do pacote, o produto com externalidade seria usado para subsidiar a venda do outro, gerando ineficiência.

Custos marginais baixos aumentam as situações em que apenas a oferta do pacote e do bem com externalidades é ótima. O mesmo ocorre quando ambos os bens apresentam externalidades de rede, porém, quando o valor destas cresce suficientemente, a estratégia ótima passa a ser o empacotamento puro, e não mais componentes puros. A firma consegue cobrar

um preço alto pelo pacote, suficiente para aproveitar as externalidades que os consumidores usufruem.

Além dos motivos já citados para se adotar o empacotamento, a incerteza sobre a demanda do produto também configura um motivo relevante. Tal incerteza surge quando a firma não conhece a distribuição de tipos de consumidores na sociedade, tornando mais difícil de escolher uma estratégia maximizadora de lucro. Uma maneira possível da firma lidar com essa situação seria adotando a estratégia de empacotamento interpessoal (*interpersonal bundling*), onde os consumidores têm de formar um grupo para atingir a compra de uma determinada quantidade do produto (ou intervalo de quantidades), à qual a firma aplica um desconto, ou seja, desconto pelo pacote.

Em Cheng e Zhang (2015) estuda-se justamente esse cenário. Considera-se uma firma monopolista que vende seu produto para dois tipos de consumidores: com valoração alta e com valoração baixa, sendo o tipo do consumidor informação privada dele. Porém, apesar de não conseguir identificar de que tipo é o consumidor, a firma sabe qual a magnitude da valoração baixa e alta. Cada consumidor deseja adquirir no máximo uma unidade do bem. Os consumidores possuem uma função de distribuição conjunta, porém a firma desconhece essa função, logo não sabe a proporção de cada tipo de consumidor na população.

No caso em que a firma posta um único preço, ela cobrará um preço alto e venderá apenas para aqueles consumidores com valoração alta caso o lucro obtido desta forma seja maior que o lucro obtido cobrando um preço baixo e vendendo para ambos os tipos de consumidores, e vice-versa. Logo, percebe-se que quando a firma posta um preço único, este irá depender da quantidade de cada tipo de consumidor. Caso a firma opte por oferecer um desconto para pacotes de tamanho específico, ela irá postar um preço unitário para unidades fora do pacote e um preço unitário menor caso haja a compra coletiva do pacote.

Analisando os possíveis cenários, o estudo conclui que caso haja

empacotamento interpessoal com no máximo dois intervalos de quantidade demandada onde a firma aplica desconto, este será mais lucrativo que vender apenas o produto separadamente para cada consumidor. Isso ocorre, pois, caso o preço sem empacotamento seja o preço alto, apenas consumidores com valoração alta irão comprar. Entretanto, a firma pode oferecer um desconto unitário no pacote com  $x$  unidades, cobrando o preço baixo por unidade, de forma que esse pacote seja pelo menos tão lucrativo quanto apenas postar o preço alto, sendo que este desconto só se aplicaria caso a quantidade de consumidores com valoração alta e baixa estivessem na região em que o empacotamento interpessoal é mais lucrativo.

De forma similar, caso o preço postado pela firma quando não há empacotamento fosse o preço baixo, ela poderia melhorar sua situação cobrando um preço alto por unidade até uma quantidade máxima vendida, deixando o preço baixo apenas na região em que o empacotamento interpessoal é mais lucrativo. Em ambos os casos, a firma aumenta seu lucro esperado. O estudo mostra ainda que, sob certas condições acerca da quantidade de cada tipo de consumidor, a estratégia de empacotamento interpessoal é ótima do ponto de vista da firma.

O artigo ainda discute outros potenciais benefícios do empacotamento interpessoal. Um deles se dá quando alguns consumidores não conhecem o produto. A firma, então, deve levar isso em conta na hora de determinar os possíveis tamanhos do pacote, já que aqueles que conhecem o produto terão incentivos a passar aos outros informações sobre este e assim conseguir o desconto que desejam. Isso irá possivelmente aumentar a demanda da firma e seus lucros.

Outro potencial benefício se daria caso os consumidores de alta valoração incorressem em custos (tempo, logística etc.) para participar da compra coletiva do pacote. A firma poderia determinar um tamanho mínimo para o pacote, com certa dificuldade de ser atingido, de forma a desincentivar esses consumidores de alta valoração a tentar conseguir o desconto, induzindo-os a pagar o preço mais caro. Essa estratégia seria especialmente

lucrativa caso a proporção de consumidores com valoração alta para o bem fosse grande. Assim, percebe-se que o empacotamento interpessoal, em diversas situações, possibilita à firma estabelecer descontos ótimos para cada nível de demanda especificados, isto é, para cada pacote, caso estes sejam atingidos, sendo uma forma de dirimir os efeitos da incerteza.

### 3. Modelo

Para descobrirmos se é mais vantajoso para a firma monopolista vender os bens separadamente ou por meio de um pacote, devemos ter um modelo para cada uma dessas situações e, posteriormente, comparar os lucros em cada uma delas. Para isso, serão assumidas algumas premissas em cada caso, **a fim** de simplificar a análise, porém mantendo a intuição econômica por trás do resultado.

Uma premissa comum a ambas situações é que todo tipo de consumidor irá consumir alguma quantidade do bem, ou seja, a firma não pode excluir consumidores de participar do mercado. Cada consumidor possui um parâmetro  $\theta$  em sua função de utilidade relativo à valoração que este possui sobre o bem em questão, que pode ser alto ou baixo. Além disso, os parâmetros de valoração  $\theta$  dos consumidores são iguais nos mercados dos bens A e B, ou seja, a valoração alta no mercado de A é igual à valoração alta no mercado de B, e analogamente para a valoração baixa.

Vamos considerar também que a proporção  $\mu$  de indivíduos que possuem valoração alta no mercado do bem A é a mesma que no mercado de B, situação análoga para a proporção de indivíduos com valoração baixa,  $1 - \mu$ . Além disso,  $\mu \in (0, 1)$ . Essas hipóteses simplificam o modelo, facilitando a obtenção de seus resultados.

Nos modelos do tipo Principal-Agente, o principal tem conhecimento sobre os tipos de agentes que existem e suas proporções na sociedade. Porém, ele não consegue discriminar quais agentes são de cada tipo. Dessa forma, é preciso que o Principal desenhe contratos que levem cada tipo de

agente a escolher justamente aquele contrato que foi desenhado para seu tipo. Isso se dá por meio de restrições de incentivo, que estabelecem que o agente sempre estará pelo menos tão bem escolhendo o contrato desenhado para seu tipo quanto se escolhesse o contrato desenhado para outro tipo qualquer.

Já as restrições de participação estabelecem que o agente estará tão bem escolhendo o contrato desenhado para seu tipo quanto se escolhesse não participar do mercado (ou qualquer que seja o custo de oportunidade de estar participando).

### 3.1. Componentes puros

Existem dois mercados, o do bem A e o do bem B. A firma atua separadamente em cada um desses mercados, ou seja, não há venda conjunta dos produtos A e B. Em cada um desses mercados existem consumidores que valoram muito o bem (tipo bom), e consumidores que valoram pouco o bem (tipo ruim). Os que valoram muito possuem um parâmetro de valoração  $\bar{\theta}$ , enquanto os que valoram pouco possuem um parâmetro  $\underline{\theta}$ , para ambos mercados, de forma que  $\bar{\theta} > \underline{\theta}$ , e  $\Delta\theta = \bar{\theta} - \underline{\theta} > 0$ . A proporção de cada um desses tipos na sociedade é  $\mu$  para o tipo bom e  $1 - \mu$  para o tipo ruim.

A utilidade dos consumidores é dada pela função:

$$U = \theta q - t$$

em que  $t$  é a transferência paga por cada consumidor à firma pelo consumo da quantidade  $q$  do bem em questão. Podemos notar que a utilidade marginal do consumidor com relação ao bem consumido é constante e justamente o seu parâmetro  $\theta$ , que indica a magnitude da sua valoração sobre o bem. A firma irá possuir uma função de custo no formato:

$$c(q) = \frac{q^2}{2}$$

Essa estrutura da função custo irá facilitar a obtenção das quantidades consumidas por cada tipo de consumidor.

### 3.2. Pacote

Com a firma oferecendo apenas o pacote, os mercados dos bens A e B se fundem em um só. Em princípio, teríamos agora quatro tipos de consumidores, ou seja, quatro tipos de valoração sobre o pacote, fruto da combinação entre os tipos de cada mercado, cada um com sua proporção na sociedade dada pela multiplicação das proporções de cada um dos tipos combinados. Assim, teríamos:

Tipo 1:  $\bar{\theta} + \bar{\theta}$  na proporção  $\mu^2$

Tipo 2:  $\bar{\theta} + \underline{\theta}$  na proporção  $\mu(1 - \mu)$

Tipo 3:  $\underline{\theta} + \bar{\theta}$  na proporção  $(1 - \mu)\mu$

Tipo 4:  $\underline{\theta} + \underline{\theta}$  na proporção  $(1 - \mu)^2$

em que o primeiro  $\theta$  corresponde à valoração do indivíduo no mercado do bem A e o segundo à valoração do indivíduo no mercado de B.

Para simplificar a análise, vamos considerar que a quantidade consumida de pacote é formada metade pelo bem A e metade pelo bem B. Essa consideração nos permite diminuir a quantidade de tipos de consumidores para três, já que os tipos 2 e 3 agora irão possuir a mesma valoração sobre o pacote. Além disso, sem essa hipótese não haveria uma classificação de superioridade entre os tipos 2 e 3 acerca de suas valorações sobre o pacote, de forma que as manipulações com as restrições de incentivo que virão mais à frente seriam impossibilitadas. Dessa forma, a nova distribuição de tipos se torna:

Tipo 1:  $\bar{\theta} + \bar{\theta}$  na proporção  $\mu^2$

Tipo 2:  $\bar{\theta} + \underline{\theta}$  ou  $\underline{\theta} + \bar{\theta}$  na proporção  $2\mu(1 - \mu)$

Tipo 3:  $\underline{\theta} + \underline{\theta}$  na proporção  $(1 - \mu)^2$

As valorações dos tipos 1, 2 e 3 serão representadas por  $\bar{\theta}$ ,  $\tilde{\theta}$  e  $\underline{\theta}$ , respectivamente, onde  $\bar{\theta} > \tilde{\theta} > \underline{\theta}$  e  $\bar{\theta} - \tilde{\theta} = \tilde{\theta} - \underline{\theta} = \Delta\theta$ . A função de utilidade dos consumidores e a função custo da firma permanecem as mesmas do mercado de componentes puros.

### 3.3. Desenvolvendo o modelo de componentes puros

A função objetivo da maximização é o lucro esperado da firma:

$$V = \mu(\bar{t} - \frac{q^2}{2}) + (1 - \mu)(\underline{t} - \frac{q^2}{2})$$

As restrições de incentivo são:

$$\bar{\theta}q - \bar{t} \geq \bar{\theta}q - \underline{t} \quad (\overline{IC})$$

$$\underline{\theta}q - \underline{t} \geq \underline{\theta}q - \bar{t} \quad (\underline{IC})$$

e as restrições de participação são:

$$\bar{\theta}q - \bar{t} \geq 0 \quad (\overline{PC})$$

$$\underline{\theta}q - \underline{t} \geq 0 \quad (\underline{PC})$$

em que  $\bar{\theta}$ ,  $q$  e  $\bar{t}$  são, respectivamente, a valoração, a quantidade consumida e a transferência paga ao principal pelo tipo bom, análogo para o tipo ruim.

Para facilitar o desenvolvimento e compreensão do modelo, iremos colocar as restrições de incentivo em função das rendas informacionais.

Primeiro, em  $(\overline{IC})$ , somamos e subtraímos  $\underline{\theta}q$  no lado direito da desigualdade:

$$\overline{\theta}q - \bar{t} \geq \overline{\theta}q - \underline{\theta}q + \underline{\theta}q - \underline{t}$$

$$\overline{U} \geq \underline{U} + (\Delta\theta) \underline{q} \quad (\overline{IC})$$

De maneira semelhante, somamos e subtraímos  $\overline{\theta}q$  no lado direito de  $(IC)$ , obtendo:

$$\underline{u} \geq \overline{u} - (\Delta\theta) \overline{q} \quad (IC)$$

As restrições de participação se tornam:

$$\overline{U} \geq 0 \quad (\overline{PC})$$

$$\underline{u} \geq 0 \quad (PC)$$

Colocando também as transferências em termos de rendas informacionais, temos:

$$\bar{t} = \overline{\theta}q - \overline{U} \quad (1)$$

$$\underline{t} = \underline{\theta}q - \underline{u} \quad (2)$$

Se observarmos  $(\overline{IC})$  e  $(\overline{PC})$ , podemos perceber que  $\overline{U} > 0$ , ou seja, o tipo bom tem uma renda informacional estritamente maior que zero, já que definimos  $\underline{q} > 0$  e  $\Delta\theta > 0$ . Sendo assim,  $(\overline{PC})$  se torna inócua e podemos ignorá-la. A maneira mais barata de fornecer renda informacional para o agente bom é, portanto, estabelecendo a igualdade em  $(\overline{IC})$ , o que tornaria inócua  $(IC)$  devido à condição de implementabilidade, que surge da soma das restrições de incentivo e que nos mostra que  $\overline{q} \geq \underline{q}$ , mesmo resultado a que se chega manipulando algebricamente  $(\overline{IC})$ , já com a igualdade, e substituindo em  $(IC)$ . Assim, esta última é sempre satisfeita.

Com isso, o problema fica apenas com as restrições  $(\overline{IC})$  e  $(PC)$ , ambas satisfeitas com igualdade:

$$\bar{U} = (\Delta\theta) \underline{q}$$

$$\underline{U} = 0$$

Substituindo  $(\bar{IC})$ ,  $(\underline{PC})$ , (1) e (2) na função-objetivo, temos a seguinte maximização:

$$\text{Max } \mu \left( \bar{\theta} \bar{q} - \frac{\bar{q}^2}{2} \right) + (1 - \mu) \left( \underline{\theta} \underline{q} - \frac{\underline{q}^2}{2} \right) - (\mu \underline{q} (\Delta\theta))$$

Derivando em relação a  $\bar{q}$  e  $\underline{q}$ , e igualando as derivadas a zero, as condições de primeira ordem são:

$$\bar{q} = \bar{\theta}$$

$$\underline{q} = \underline{\theta} - \frac{\mu}{(1-\mu)} (\Delta\theta)$$

Esse resultado se aplica tanto ao mercado do bem A quanto ao mercado do bem B.

### 3.4. Desenvolvendo modelo de pacote

O lucro esperado da firma nesse caso será:

$$V^p = \mu \left( \bar{t} - \frac{\bar{q}^2}{2} \right) + 2\mu(1 - \mu) \left( \tilde{t} - \frac{\tilde{q}^2}{2} \right) + (1 - \mu)^2 \left( \underline{t} - \frac{\underline{q}^2}{2} \right)$$

As restrições de incentivo são:

$$\bar{\theta} \bar{q} - \bar{t} \geq \bar{\theta} \tilde{q} - \tilde{t} \quad (IC1)$$

$$\bar{\theta} \bar{q} - \bar{t} \geq \bar{\theta} \underline{q} - \underline{t} \quad (IC2)$$

$$\tilde{\theta} \tilde{q} - \tilde{t} \geq \tilde{\theta} \bar{q} - \bar{t} \quad (\tilde{IC1})$$

$$\tilde{\theta} \tilde{q} - \tilde{t} \geq \tilde{\theta} \underline{q} - \underline{t} \quad (\tilde{IC2})$$

$$\underline{\theta} \underline{q} - \underline{t} \geq \underline{\theta} \bar{q} - \bar{t} \quad (\underline{IC1})$$

$$\underline{\theta} \underline{q} - \underline{t} \geq \underline{\theta} \tilde{q} - \tilde{t} \quad (\underline{IC2})$$

e as restrições de participação são:

$$\bar{\theta}q - \bar{t} \geq 0 \quad (PC)$$

$$\tilde{\theta}q - \tilde{t} \geq 0 \quad (\tilde{PC})$$

$$\underline{\theta}q - \underline{t} \geq 0 \quad (\underline{PC})$$

Para colocar as restrições de incentivo em função das rendas informacionais, somamos e subtraímos, no lado direito de  $(IC1)$ ,  $(IC2)$ ,  $(\tilde{IC1})$ ,  $(\tilde{IC2})$ ,  $(\underline{IC1})$  e  $(\underline{IC2})$ , respectivamente,  $\tilde{\theta}q$ ,  $\underline{\theta}q$ ,  $\bar{\theta}q$ ,  $\underline{\theta}q$ ,  $\bar{\theta}q$  e  $\tilde{\theta}q$ . As restrições se tornam:

$$\bar{U} \geq \tilde{U} + (\Delta\theta)q \quad (IC1)$$

$$\bar{U} \geq \underline{U} + 2(\Delta\theta)q \quad (IC2)$$

$$\tilde{U} \geq \bar{U} - (\Delta\theta)q \quad (\tilde{IC1})$$

$$\tilde{U} \geq \underline{U} + (\Delta\theta)q \quad (\tilde{IC2})$$

$$\underline{U} \geq \bar{U} - 2(\Delta\theta)q \quad (\underline{IC1})$$

$$\underline{U} \geq \tilde{U} - (\Delta\theta)q \quad (\underline{IC2})$$

As restrições de participação se tornam:

$$\bar{U} \geq 0 \quad (PC)$$

$$\tilde{U} \geq 0 \quad (\tilde{PC})$$

$$\underline{U} \geq 0 \quad (\underline{PC})$$

As transferências, também em função das rendas informacionais, são:

$$\bar{t} = \bar{\theta}q - \bar{U} \quad (1)$$

$$\tilde{t} = \tilde{\theta}q - \tilde{U} \quad (2)$$

$$\underline{t} = \underline{\theta}q - \underline{U} \quad (3)$$

Para obter o contrato ótimo no caso do mercado de pacote, desconsideramos as restrições de incentivo de tipos inferiores para tipos superiores (ou seja,  $(\tilde{IC}1)$ ,  $(\underline{IC}1)$  e  $(\underline{IC}2)$ ), e verificaremos que são satisfeitas.

Somando  $(\tilde{IC}1)$  e  $(\tilde{IC}2)$ , chegamos à expressão:

$$\bar{U} \geq \underline{U} + (\Delta\theta)(\tilde{q} + \underline{q})$$

e, como  $(\Delta\theta)(\tilde{q} + \underline{q}) > 2(\Delta\theta)\underline{q}$ , podemos excluir  $(\tilde{IC}2)$  por já estar sendo satisfeita. Também vale  $(\underline{PC})$ , o que faz com que  $(\tilde{PC})$  e  $(\tilde{P}\tilde{C})$  também valham (tornando-as inócuas). Basta ver que se  $\underline{U} \geq 0$ , então pelas restrições de incentivo,  $\bar{U}$  e  $\tilde{U}$  também serão maiores que zero, já que  $(\Delta\theta) > 0$  e todo  $q > 0$ .

Dessa forma, ficamos apenas com  $(\tilde{IC}1)$ ,  $(\tilde{IC}2)$  e  $(\underline{PC})$ . Como  $\underline{U}$ ,  $\tilde{U}$  e  $\bar{U}$  diminuem a função objetivo do Principal, ele escolhe justamente a igualdade nessas restrições. As rendas informacionais são, portanto:

$$\underline{U} = 0$$

$$\tilde{U} = (\Delta\theta)\underline{q}$$

$$\bar{U} = (\Delta\theta)(\tilde{q} + \underline{q})$$

Com isso, podemos substituir os valores das rendas informacionais e das transferências na função objetivo, obtendo a seguinte maximização:

$$\text{Max } \mu^2 \left( \bar{\theta} \bar{q} - \frac{\bar{q}^2}{2} \right) + 2\mu(1 - \mu) \left( \tilde{\theta} \tilde{q} - \frac{\tilde{q}^2}{2} \right) + (1 - \mu)^2 \left( \underline{\theta} \underline{q} - \frac{\underline{q}^2}{2} \right) - [\mu^2 (\Delta\theta)(\tilde{q} + \underline{q}) + 2\mu(1 - \mu)(\Delta\theta)$$

Derivando essa expressão em relação a  $\bar{q}$ ,  $\tilde{q}$  e  $\underline{q}$ , e igualando as derivadas a zero, obtemos os seguintes resultados:

$$\bar{q} = \bar{\theta}$$

$$\tilde{q} = \tilde{\theta} - \frac{\mu}{(1-\mu)}(\Delta\theta)$$

$$\underline{q} = \underline{\theta} - \frac{\mu(\mu+2(1-\mu))}{(1-\mu)^2}(\Delta\theta)$$

Essas são, portanto, as quantidades de pacote consumidas por cada tipo de consumidor, em que  $\bar{q} > \tilde{q} > \underline{q}$ .

Agora, vamos verificar que  $(\tilde{IC1})$ ,  $(\underline{IC1})$  e  $(\underline{IC2})$  são satisfeitas por essas quantidades. As restrições que ficaram no problema são satisfeitas com igualdade, e, portanto, temos:

$$\underline{U} = 0$$

$$\tilde{U} = (\Delta\theta)\underline{q}$$

$$\bar{U} = (\Delta\theta)(\tilde{q} + \underline{q})$$

Por  $(\tilde{IC1})$ , temos  $\tilde{U} \geq -(\Delta\theta)\bar{q}$ . Porém, também sabemos que  $\tilde{U} = (\Delta\theta)\underline{q}$ . Portanto, como  $(\Delta\theta)\underline{q} > -(\Delta\theta)\bar{q}$ ,  $(\tilde{IC1})$  é satisfeita. Já em  $(\underline{IC1})$ , temos  $\underline{U} \geq (\Delta\theta)(\tilde{q} + \underline{q}) - 2(\Delta\theta)\bar{q}$ . Como  $(\tilde{q} + \underline{q}) - 2\bar{q} < 0$ , a restrição é inócua, já que em  $(\underline{PC})$  temos  $\underline{U} \geq 0$ . Por fim, em  $(\underline{IC2})$ , temos  $\underline{U} \geq (\Delta\theta)\underline{q} - (\Delta\theta)\tilde{q}$ . Como  $\underline{q} - \tilde{q} < 0$ , a restrição é inócua, pelo mesmo motivo anterior.

#### 4. Resultados

Conhecendo as quantidades consumidas em cada um dos casos, podem-se calcular os lucros da firma e compará-los, a fim de determinar qual estratégia é mais vantajosa. Primeiro, na situação de componentes puros, substituindo as quantidades  $\bar{q}$  e  $\underline{q}$  na função objetivo, temos o seguinte lucro:

$$\pi^c = \left(\frac{\mu}{2}\right)\bar{\theta}^2 + \left(\frac{(1-\mu)}{2}\right)\underline{\theta}^2 + \left(\frac{\mu^2}{2(1-\mu)}\right)(\Delta\theta)^2 - \underline{\theta}\mu(\Delta\theta)$$

onde  $\pi^c$  é o lucro da firma em cada mercado. Como a firma atua nos mercados

do produto A e B, basta duplicar esse lucro para achar o lucro total da firma na situação de componentes puros. Assim, temos:

$$\pi^c = \mu \bar{\theta}^2 + (1 - \mu) \underline{\theta}^2 + \frac{\mu}{1-\mu} (\Delta\theta)^2 - 2\mu(\Delta\theta)$$

Para facilitar a análise e obter uma interpretação econômica mais clara, vamos supor que  $\underline{\theta} = 1$  e  $\bar{\theta} = 1 + \alpha$ . Desta forma, temos  $\Delta\theta = \alpha$ , que representa justamente o spread de incerteza. Substituindo esses termos na expressão do lucro, temos:

$$\pi^c = 1 + \frac{\mu}{1-\mu} \alpha^2$$

Com relação à situação em que há empacotamento, o mesmo procedimento é realizado, ou seja, substitui-se  $\bar{q}$ ,  $\tilde{q}$  e  $\underline{q}$  na função objetivo do principal, encontrando assim o lucro. Dessa forma, tem-se:

$$\pi^p = \left(\frac{\mu^2}{2}\right) \bar{\theta}^2 + (\mu - \mu^2) \tilde{\theta}^2 + \left(\frac{1-2\mu+\mu^2}{2}\right) \underline{\theta}^2 - \tilde{\theta} \mu^2 (\Delta\theta) - \left(\frac{\mu^3}{4(1-\mu)}\right) (\Delta\theta)^2 - \left(\frac{4\mu^2-4\mu^3+\mu^4}{2(1-\mu)^2}\right) (\Delta\theta)^2 + \left(\frac{\mu^3}{2(1-\mu)}\right)$$

Para possibilitar a comparação dos lucros, vamos utilizar os seguintes fatos:

$$\bar{\theta} = 2\bar{\theta}$$

$$\tilde{\theta} = \bar{\theta} + \underline{\theta}$$

$$\underline{\theta} = 2\underline{\theta}$$

$$\Delta\theta = \bar{\theta} - \underline{\theta}$$

É importante notar que o  $\Delta\theta$  de ambas situações possui o mesmo valor. No caso de componentes puros,  $\Delta\theta = \bar{\theta} - \underline{\theta}$ , e na situação de empacotamento, temos que  $\Delta\theta = \bar{\theta} - \tilde{\theta} = \bar{\theta} + \bar{\theta} - \bar{\theta} - \underline{\theta} = \bar{\theta} - \underline{\theta}$ , ou

$\Delta\theta = \tilde{\theta} - \underline{\theta} = \bar{\theta} + \underline{\theta} - \underline{\theta} - \underline{\theta} = \bar{\theta} - \underline{\theta}$ . Por isso, podemos substituir  $\Delta\theta$  por  $\bar{\theta} - \underline{\theta}$  também no caso de empacotamento. Como  $\underline{\theta} = 1$  e  $\bar{\theta} = 1 + \alpha$ , substituindo esses valores na expressão de lucro, temos:

$$\pi^p = 2 + \alpha(-2\mu + 2\mu^2) + \alpha^2 \left( \frac{12\mu^2 - 15\mu^3 + 5\mu^4}{4(1-\mu)^2} \right)$$

Dessa forma, podemos montar a desigualdade  $\pi^p \geq \pi^c$  e verificar sob que circunstâncias ela é verdadeira ou não. A desigualdade fica:

$$2 + \alpha(-2\mu + 2\mu^2) + \alpha^2 \left( \frac{12\mu^2 - 15\mu^3 + 5\mu^4}{4(1-\mu)^2} \right) \geq 1 + \left( \frac{\mu}{1-\mu} \right) \alpha^2$$

Partindo dessa expressão, podemos passar o lado direito da desigualdade para o lado esquerdo. Colocando em evidência os termos comuns (sejam eles  $\alpha$  e  $\alpha^2$ ), chegamos à expressão:

$$1 + \alpha(-2\mu + 2\mu^2) + \alpha^2 \left( \frac{12\mu^2 - 15\mu^3 + 5\mu^4}{4(1-\mu)^2} - \frac{\mu}{1-\mu} \right) \geq 0$$

Podemos ainda colocar os termos entre parênteses em um denominador comum, neste caso,  $4(1-\mu)^2$ . Fazendo isso, obtemos:

$$1 + \alpha(-2\mu + 2\mu^2) + \alpha^2 \left( \frac{-4\mu + 16\mu^2 - 15\mu^3 + 5\mu^4}{4(1-\mu)^2} \right) \geq 0$$

A condição acima determina qual estratégia é mais vantajosa para a firma. Caso a condição seja satisfeita, podemos afirmar que a estratégia de empacotamento é pelo menos tão boa quanto a estratégia de componentes

puros. Caso contrário, a estratégia de componentes puros é melhor. No caso da desigualdade ser satisfeita com desigualdade estrita, então a firma com certeza estaria melhor adotando o empacotamento.

## 5. Simulações

Nesta seção, faremos simulações estabelecendo valores para  $\mu$  e  $\alpha$ , verificando como o diferencial de lucro se relaciona com esses dois parâmetros e como estes se relacionam entre si. Para isso, num primeiro momento, manteremos  $\mu$  constante e, variando  $\alpha$ , veremos como o lucro se comporta. Após isso, iremos manter  $\alpha$  constante e verificaremos como o lucro se comporta quando variamos  $\mu$ . E por último, vamos estabelecer o diferencial de lucro entre empacotamento e componentes puros como sendo zero e, assim, verificar a relação entre  $\mu$  e  $\alpha$ . Para as simulações e plotagem dos gráficos, foi utilizado o software *Scientific Workplace*.

### 5.1. $\mu$ constante

O gráfico abaixo mostra o comportamento do diferencial de lucros para um  $\mu$  constante, à medida que o parâmetro  $\alpha$  cresce:

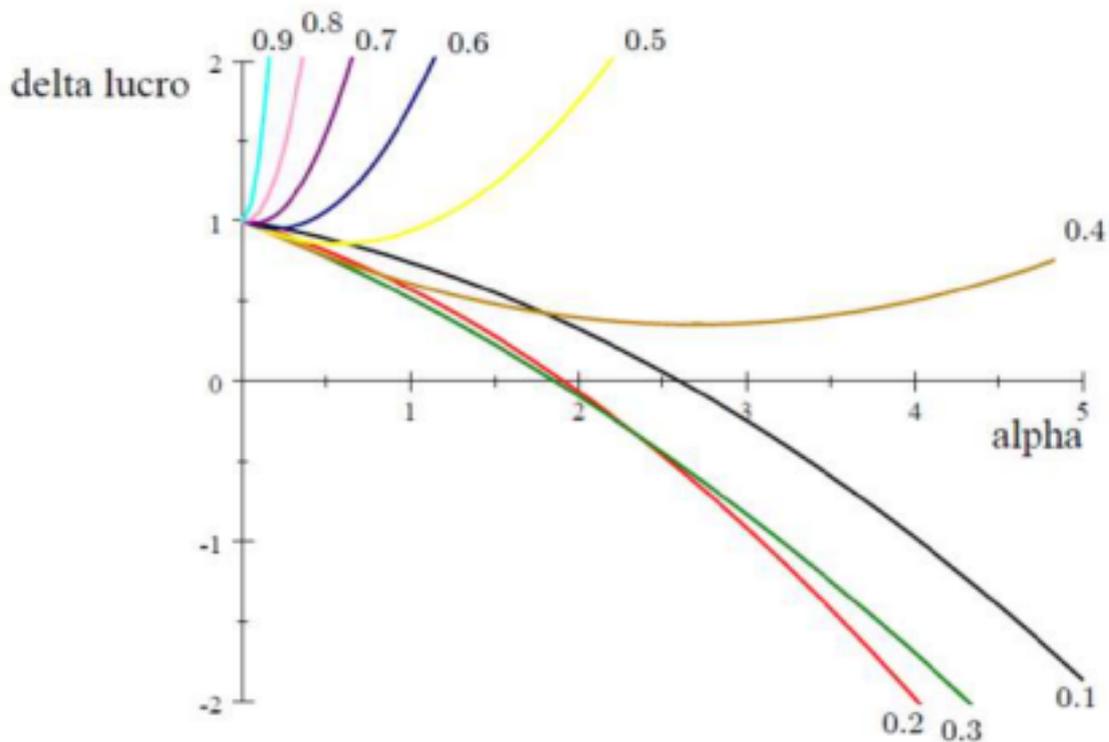


GRÁFICO 1 – Diferencial de lucro para cada  $\mu$  conforme  $\alpha$  cresce.

No gráfico acima, “delta lucro” se refere ao diferencial de lucro, e “alpha” ao parâmetro  $\alpha$ . Como  $\alpha$  pode assumir qualquer valor positivo, vamos restringir a análise para os valores no intervalo (0,5). Em outras palavras, os indivíduos que apresentam valoração alta para um determinado bem valoram, no máximo, seis vezes mais do que os indivíduos que valoram pouco.

Todas as curvas para os diferentes valores de  $\mu$  começam em 1, no eixo vertical, e em algum momento se distanciam, podendo voltar ou não a se aproximar. Para os valores baixos o suficiente de  $\mu$ , o diferencial de lucros se comporta como uma curva monotônica negativamente inclinada, ou seja, à medida que o spread de incerteza cresce, os valores do diferencial vão se aproximando de zero, até ficarem negativos. Há, portanto, para essas curvas, um valor crítico para  $\alpha$  a partir do qual a estratégia de empacotamento passa a ser menos vantajosa que a de componentes puros.

Porém, podemos perceber que a partir de um determinado  $\mu^*$  crítico as

curvas ficam inteiramente acima do eixo horizontal, ou seja, o diferencial é sempre maior ou igual a zero, independente de qual seja o spread de incerteza. Para estes valores de  $\mu$  a firma sempre escolherá adotar o empacotamento. Além disso, quanto mais alto o valor de  $\mu$ , mais positivamente inclinada se torna a curva. Logo, podemos afirmar que para todo  $\mu$  acima desse valor crítico, a firma sempre estará melhor adotando o empacotamento ao invés de componentes puros e essa vantagem será maior quanto maior for  $\alpha$ .

Uma análise mais profunda revela que essas curvas inteiramente acima do eixo horizontal podem ser divididas em dois grupos. Em primeiro lugar, todas essas curvas têm parâmetro  $\mu > \mu^*$ . Existe, porém,  $\mu^{**} > \mu^*$  tal que, para  $\mu^* < \mu < \mu^{**}$ , essas curvas inicialmente decersem e depois voltam a crescer, sem, contudo, ficarem negativas. Para as curvas com  $\mu > \mu^{**}$ , as curvas são monotônicas crescentes. Para valores muito altos de  $\mu$ , as curvas começam a apresentar um comportamento assintótico, crescendo rapidamente.

Para alguns valores de  $\mu$ , a firma pode estar melhor tanto com empacotamento quanto sem ele, porém, para outros valores, o empacotamento é sempre melhor.

## 5.2. $\alpha$ constante

Agora, vamos fixar o parâmetro  $\alpha$  e verificar como o diferencial de lucro se comporta conforme  $\mu$  aumenta:

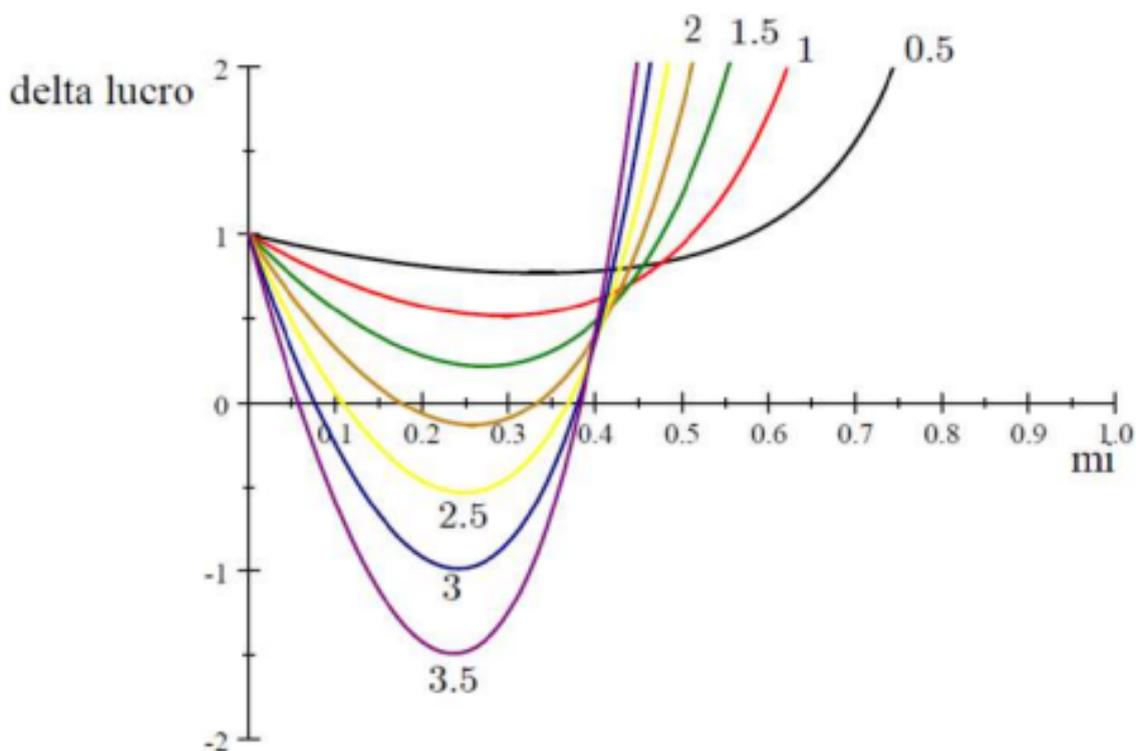


FIGURA 2 – Diferencial de lucro para cada  $\alpha$  conforme  $\mu$  cresce.

Aqui também “delta lucro” se refere ao diferencial de lucro e “mi” é o parâmetro  $\mu$ . O parâmetro  $\alpha$  assume valores entre 0,5 e 3,5. Podemos notar que, quanto maior o spread de incerteza, maior a variação do diferencial de lucro conforme  $\mu$  aumenta. Todas as curvas se comportam de maneira semelhante: começam em 1, e, num primeiro momento, caem, para depois iniciar um movimento de subida.

Para valores suficientemente baixos de  $\alpha$ , temos um grupo de curvas que nunca cruzam o eixo horizontal para baixo. Isso quer dizer que para valores de 0 a um certo  $\alpha^*$  crítico, a estratégia de empacotamento é sempre melhor que a estratégia de componentes puros, independentemente do valor de  $\mu$ .

Contudo, a partir de  $\alpha^*$ , todas as curvas passam a cruzar o eixo horizontal em dois pontos. Isso faz com que cada uma dessas curvas tenha um intervalo próprio  $(\mu^*, \mu^{**})$  para o qual a estratégia de componentes puros será mais

vantajosa que o empacotamento, e para qualquer outro valor de  $\mu$ , o empacotamento será a melhor alternativa da firma. Com isso, percebe-se que para alguns valores de  $\alpha$ , as duas estratégias podem ser a melhor opção da firma, enquanto para outros valores sempre será preferível o empacotamento.

### 5.3. Diferencial de lucro igual a zero

Por fim, podemos analisar as diversas situações em que o diferencial de lucro é igual a zero e verificar como os dois parâmetros relevantes se relacionam. O gráfico a seguir mostra essas situações:

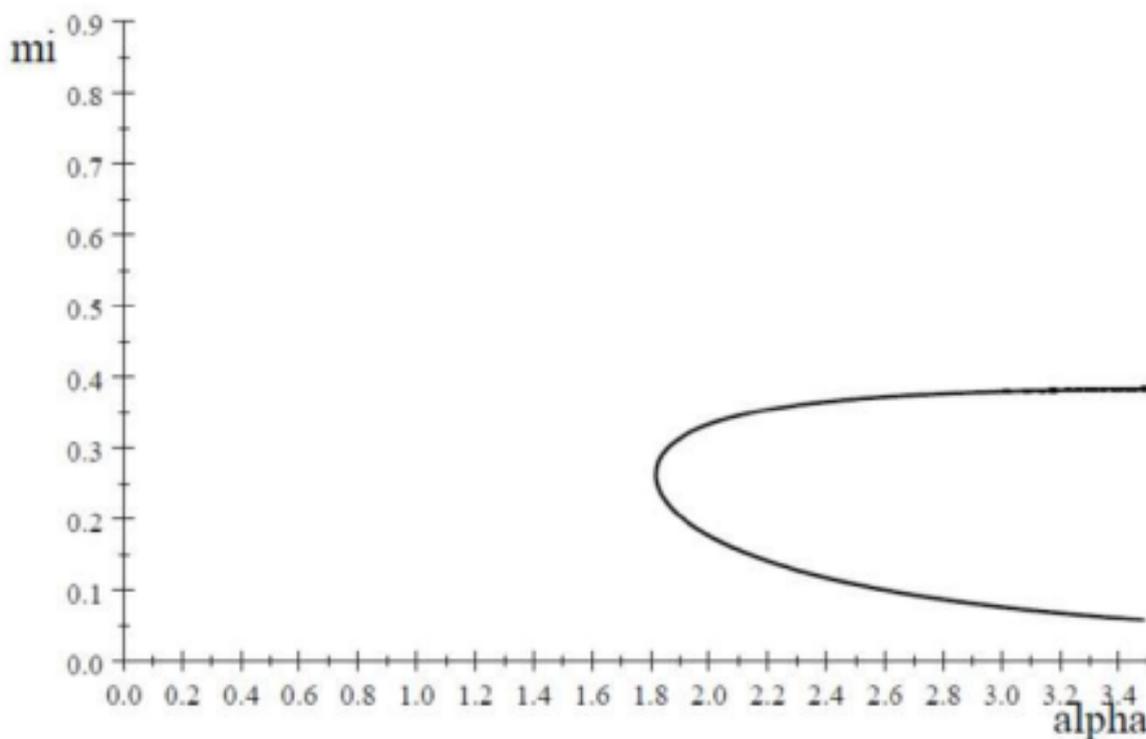


FIGURA 3 – Combinações entre  $\alpha$  e  $\mu$  que zeram o diferencial de lucro

Para a análise em questão, limitou-se o parâmetro  $\alpha$  ao intervalo (0,3.5). Podemos notar que a curva é composta por combinações de valores de  $\alpha$  e  $\mu$  que não abrangem todos os valores possíveis para estes parâmetros. Isso quer dizer que, para certas combinações, não há como a firma ficar indiferente entre as duas estratégias, ou seja, uma delas sempre será melhor que a outra.

Além disso, para cada valor de  $\alpha$  para o qual o diferencial de lucro é zero, existem dois valores de  $\mu$  possíveis para satisfazer essa condição. O formato dessa curva, em conjunto com os gráficos construídos anteriormente, permite concluir que os pontos “dentro” da curva são aqueles nos quais a estratégia de componentes puros é superior à de empacotamento, enquanto que nos pontos “fora” da curva, a estratégia de empacotamento é a melhor escolha da firma. Assim, podemos concluir que, na maior parte das situações, a estratégia de empacotamento será a mais vantajosa para a firma.

## 6. Conclusão

Uma firma pode encarar diversas dificuldades no mercado para obter o melhor lucro com a venda de seus produtos. Uma dessas dificuldades pode ser justamente a impossibilidade de identificar, com certeza, características importantes do seu consumidor, como, por exemplo, o máximo que ele está disposto a pagar pelo bem. Assim, a firma não consegue extrair dele o máximo de excedente que poderia. Uma forma de tentar aumentar essa extração de excedente seria através da utilização da estratégia de empacotamento, com a qual a firma vende de forma conjunta bens que antes só venderia de maneira separada.

Neste trabalho, analisamos a situação de uma firma monopolista multiproduto que atua em dois mercados diferentes e qual seria o impacto no seu lucro, caso ela deixasse de vender os bens separadamente e passasse a vendê-los em forma de pacote. Para tanto, foram levadas em conta algumas hipóteses sobre as funções de utilidade dos consumidores, a distribuição de seus tipos na sociedade, a função de custo da firma e a forma como esses pacotes seriam compostos.

A fim de simplificar o problema, assumiu-se que o pacote seria composto metade pelo bem A e metade pelo bem B, reduzindo assim os tipos de consumidores no mercado. A distribuição dos tipos bom e ruim nos dois mercados também foi considerada igual. Essas hipóteses não são necessárias

para se chegar a um resultado para o modelo, mas facilitam toda a manipulação algébrica para se chegar ao resultado.

Os resultados mostram sob quais condições tal firma teria uma melhoria em seus lucros caso optasse por vender o pacote em vez dos bens separadamente. Essas condições estão em função apenas dos parâmetros  $\alpha$ , que é o spread de incerteza, e do parâmetro  $\mu$  de distribuição dos tipos, todas essas informações conhecidas pela firma desde o momento inicial. Dessa forma, em um cenário semelhante, a firma poderia saber se essa estratégia seria ou não vantajosa para ela, possibilitando-lhe escolher a que mais lhe beneficiasse, bastando substituir na expressão os valores dos parâmetros de valoração dos consumidores e suas distribuições na sociedade.

Caso a desigualdade fosse satisfeita, saberíamos que a estratégia de empacotamento é mais vantajosa (ou pelo menos tão boa quanto) a de componentes puros. De maneira geral, para a maioria dos valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\mu$ , a firma estaria melhor se adotasse o empacotamento.

### Referencial teórico

ADAMS, W. J.; YELLEN, J. L. **Commodity Bundling and the Burden of Monopoly**. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 90, no. 3, pp. 475–498, ago. 1976. Disponível em: [www.jstor.org/stable/1886045](http://www.jstor.org/stable/1886045). Acesso em: 23 Mar. 2021.

Nalebuff, B. **Bundling as an Entry Barrier**. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 119, no. 1, pp. 159–187, fev. 2004. Disponível em: [www.jstor.org/stable/25098680](http://www.jstor.org/stable/25098680). Acesso em: 23 Mar. 2021.

McAfee, R. P.; McMillan, J.; Whinston, M. D.. **Multiproduct Monopoly, Commodity Bundling, and Correlation of Values**. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 104, no. 2, pp. 371–383, maio 1989. Disponível em: [www.jstor.org/stable/2937852](http://www.jstor.org/stable/2937852). Acesso em: 23 Mar. 2021.

Schmalensee, R. **Commodity Bundling by Single-Product Monopolies**. *The Journal of Law & Economics*, vol. 25, no. 1, pp. 67–71, abr. 1982. Disponível em: [www.jstor.org/stable/725225](http://www.jstor.org/stable/725225). Acesso em: 23 Mar. 2021.

LAFFONT, J. J.; MARTIMORT, D. **The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model**. Editora Princeton University Press, 2001.

Bakos, Y.; Brynjolfsson, E. **Bundling Information Goods: Pricing, Profits, and**

**Efficiency.** *Management Science*, vol. 45, no. 12, pp. 1613–1630, dez. 1999.  
Disponível em: [www.jstor.org/stable/2634781](http://www.jstor.org/stable/2634781). Acesso em: 23 Mar. 2021.

Hitt, L.; Chen, P. **Bundling with Customer Self-Selection:** A Simple Approach to Bundling Low-Marginal Cost Goods. *Management Science*, vol. 51, no. 10, pp. 1481-1493, out. 2005. Disponível em: [www.jstor.org/stable/20110437](http://www.jstor.org/stable/20110437). Acesso em: 23 Mar. 2021.

Basu, A.; Vitharana, P. **Impact of Customer Knowledge Heterogeneity on Bundling Strategy.** *Marketing Science*, vol. 28, no. 4, pp. 792-801, jul.-ago. 2009. Disponível em: [www.jstor.org/stable/23884247](http://www.jstor.org/stable/23884247). Acesso em: 23 Mar. 2021.

Chen, Y.; Zhang, T. **Interpersonal Bundling.** *Management Science*, vol. 61, no. 6, pp. 1456-1471, jun. 2015. Disponível em: [www.jstor.org/stable/24551482](http://www.jstor.org/stable/24551482). Acesso em: 23 Mar. 2021.

Chao, Y.; Derdenger, T. **Mixed Bundling in Two-Sided Markets in the Presence of Installed Base Effects.** *Management Science*, vol. 59, no. 8, pp. 1904-1926, ago. 2013. Disponível em: [www.jstor.org/stable/23443840](http://www.jstor.org/stable/23443840). Acesso em: 23 Mar. 2021.

Prasad, A.; Venkatesh, R.; Mahajan, V. **Optimal Bundling of Technological Products with Network Externality.** *Management Science*, vol. 56, no. 12, pp. 2224-2236, dez. 2010. Disponível em: [www.jstor.org/stable/40959631](http://www.jstor.org/stable/40959631). Acesso em: 23 Mar. 2021.









