



Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Departamento de Estatística - EST

Um ensaio sobre preços e volatilidade dos retornos de títulos do Tesouro Direto

Carlos Leonardo Henrique Zucarello Freire Feijó Braga

Monografia apresentada para a obtenção do
título de Bacharel em Estatística.

Brasília

2019

Carlos Leonardo Henrique Zucarello Freire Feijó Braga

Um ensaio sobre preços e volatilidade dos retornos de títulos do Tesouro Direto

Orientador: Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Monografia apresentada para a obtenção do
título de Bacharel em Estatística.

Brasília

2019

Carlos Leonardo Henrique Zucarello Freire Feijó Braga

**Um ensaio sobre preços e volatilidade dos retornos de títulos do
Tesouro Direto**

Monografia apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília
como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Aprovada em 10 de Dezembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Raul Yukihiro Matsushita - UnB
Orientador

Prof. Eduardo Yoshio Nakano - UnB

Prof. André Luiz Fernandes Cançado - UnB

Brasília
2019

*“A verdadeira dificuldade não está
em aceitar ideias novas, mas
escapar das antigas.”*

John Maynard Keynes

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha esposa, que me acompanhou nessa jornada desde seu início, em 2010. Seu incentivo e parceria contribuíram muito ao longo destes anos.

Agradeço à minha mãe Maria da Graça e ao meu padrinho Roberto por todo o apoio!

Aos professores da ENCE e da UnB, pelas excelentes aulas.

Agradeço também aos colegas de Secretaria do Tesouro Nacional, que em posições de chefia, me incentivaram e permitiram a sequência nesta graduação.

RESUMO

O recente aumento do número de investidores em títulos públicos federais através do Canal do Tesouro Direto popularizou este tipo de investimento no Brasil. Diante disso, analisar o comportamento dos preços e retornos destes ativos mostrou-se interessante, pois foi possível verificar a possibilidade de obtenção de retornos acima da média. Desta forma, o trabalho faz uma revisão da literatura sobre processos estocásticos e modelos para avaliação de retornos, com a proposição de uma estratégia de operações com estes ativos.

Palavras-chave: dívida pública, volatilidade, retorno, processos estocásticos.

ABSTRACT

The recent increase in the number of investors in federal government bonds through the Treasury Direct Channel has popularized this type of investment in Brazil. Therefore, analyzing the behavior of prices and returns of these assets was interesting, as it was possible to verify the possibility of obtaining above average returns. Thus, the paper reviews the literature on stochastic processes and models for valuation of returns, proposing a strategy of operations with these assets.

Keywords: public debt, volatility, return, stochastic process.

LISTA DE SIGLAS

CBLC	Câmara Brasileira de Liquidação e Custódia
DPF	Dívida Pública Federal
FAC	Função de Autocorrelação
FACP	Função de Autocorrelação Parcial
HME	Hipótese do Mercado Eficiente
IPCA	Índice de Preços ao Consumidor Amplo
LFT	Letra Financeira do Tesouro
LTN	Letra do Tesouro Nacional
MB	Movimento Browniano
NTN-B	Nota do Tesouro Nacional série B
PIB	Produto Interno Bruto
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e Custódia
STN	Secretaria do Tesouro Nacional
TVE	Teoria do Valor Extremo

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Série histórica do preço do Tesouro Prefixado 2018	22
Figura 2: Série histórica do preço do Tesouro IPCA 2019	23
Figura 3: Série histórica do preço do Tesouro SELIC 2017 24	
Figura 4: Passeio Aleatório	30
Figura 5: Movimento browniano padrão	33
Figura 6: Ponte browniana	36
Figura 7: Movimento browniano com <i>drift</i>	36
Figura 8: Movimento browniano geométrico	37
Figura 9: Processo Ornstein-Uhlenbeck	39
Figura 10: Série histórica do preço do Tesouro Prefixado 2018	45
Figura 11: Comparativo entre o preço projetado x preço de mercado do Tesouro Prefixado vencido em 2018	48
Figura 12: Comparativo entre o retorno do investidor e retorno tradicional	50
Figura 13: Resultados figuras da análise exploratória da série retorno do investidor	51
Figura 14: Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial do retorno do investidor	52

SUMÁRIO

1. Introdução	14
2. Metodologia	17
3. Dívida pública e tesouro direto	18
3.1. Como o Governo financia seus gastos?	20
3.2. O Tesouro Direto	21
3.2.1. Os títulos prefixados (antigas LTN's)	22
3.2.2. Os títulos indexados ao IPCA (antigas NTN-B's)	23
3.2.3. Os títulos indexados à SELIC (antigas LFT's)	23
3.2.4. As etapas da estratégia de emissão de títulos públicos federais	24
4. Processos estocásticos, volatilidade e revisão da literatura sobre modelagem da volatilidade de ativos financeiros	27
4.1. Processos relacionados ao movimento browniano	29
4.1.1. Passeio Aleatório (<i>Random Walk</i>)	30
4.1.2. Movimento browniano: um breve histórico	31
4.1.3. Movimento browniano padrão	32
4.1.4. Processo de Markov	33
4.1.5. Processo de Lévy	34
4.2. Processos construídos a partir do movimento browniano	35
4.2.1. Movimento browniano como ponte	35
4.2.2. Movimento browniano com <i>drift</i>	36
4.2.3. Movimento browniano geométrico	37
4.2.4. Processo Ornstein-Uhlenbeck	38
4.3. Volatilidade	39
4.3.1. Modelos de Médias Móveis (MA)	40
4.3.2. Modelos de Alisamento ou Suavização Exponencial (EWMA)	41
4.3.3. Modelos Autorregressivos (AR)	42
4.3.4. Modelos Mistos (ARMA)	42
4.3.5. Modelos ARIMA	42
4.3.6. Modelos ARCH	43
4.3.7. Modelos GARCH	43

5. Análise das séries de preços e retornos do tesouro prefixado e proposição da estratégia para operações	45
5.1. Análise da Série de Preços de Compra do Tesouro Prefixado 2018	47
5.2. Análise das Séries de Retornos: de mercado x do investidor	49
5.3. Proposição da Estratégia de Operação	53
5.4. Ajuste do Modelo mais indicado para o retorno do investidor	54
6. Conclusão	55
Referências bibliográficas	57

1. INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho é estudar o comportamento dos preços, retornos e volatilidade dos retornos dos títulos públicos federais negociados no canal do Tesouro Direto. Especificamente, em uma situação hipotética, objetiva-se elaborar uma estratégia para operações com estes ativos¹, de modo que o investidor obtenha resultados acima de seus retornos esperados, e em intervalos de tempo proporcionalmente menores aos dos tempos de vida do ativo.

Em análise preliminar sobre o comportamento dos variados papéis negociados no Canal do Tesouro Direto (prefixados e indexados ao IPCA e à SELIC), percebe-se claramente que os ativos indexados à taxa SELIC são pouco voláteis em relação aos papéis prefixados e indexados à inflação. Por conta disso, as pequenas variações diárias positivas desses ativos fortalecem um argumento comumente utilizado por muitos analistas de mercado de que os papéis indexados à taxa SELIC podem ser vistos com fins de proteção (*hedge*) ou mesmo para manutenção de liquidez, remunerada, no caso de uma carteira diversificada composta por títulos públicos. Por outro lado, os prefixados e os atrelados à inflação surgem como opções para agentes que intencionam retornos superiores aos retornos esperados, em períodos mais curtos do que a vida destes ativos.

Dito isso, e a partir de uma estratégia definida para as operações, a busca por ativos interessantes seria a próxima etapa. Para alinhar a estratégia das operações de acordo com o cenário macroeconômico recente e mesmo o atual, entendemos que a recente trajetória de queda nas taxas de juros e inflação são os principais fatores para essa seleção de ativos. Além disso, esse cenário de baixas taxas de inflação e de juros parece ser o mais provável para o curto prazo.

No caso dos papéis prefixados, como a taxa de retorno é definida no momento da compra do ativo, sua precificação está diretamente relacionada ao comportamento esperado da taxa SELIC, pois esta serve de parâmetro para que o mercado precifique o ativo, já que seu preço hoje reflete a expectativa sobre o comportamento futuro da taxa

¹ De maneira geral, neste trabalho, tratamos os títulos públicos federais como ativos, pois a ênfase é a perspectiva do investidor que adquire estes títulos. Por outro lado, na perspectiva do Governo Federal, que emite tais títulos, trata-se de um passivo da União que deve ser honrado no vencimento dos papéis.

básica de juros. Se esta taxa se mostra em queda, o preço atual deste ativo sobe; e em caso de aumento da taxa básica, seu preço atual cai.

Por outro lado, os ativos indexados à inflação não se mostram como os mais indicados para quem deseja a obtenção de retornos mais elevados atualmente, já que a economia não tem apresentado sinais de recuperação que poderia levar a inflação a níveis mais elevados no curto prazo. Portanto, entendemos que a estratégia de operações nos próximos meses, pautada em títulos prefixados dado o objetivo de maximização dos retornos poderia ser atrativa.

Outro motivo para escolha do Tesouro Prefixado é o fato de esses papéis terem seus preços na data de compra e de vencimento conhecidos, o que os diferenciam dos demais títulos emitidos pela Secretaria do Tesouro Nacional. Além disso, este conhecimento dos preços no momento da compra e na data de vencimento (ausência de incerteza) caracteriza essas séries de preços como um processo estocástico denominado Ponte Browniana, assunto este que será abordado no capítulo que trata de processos estocásticos.

Em particular, pretende-se aplicar modelos estatísticos de séries temporais para a análise do comportamento do retorno e sua volatilidade dos títulos prefixados, pois é essa volatilidade que traz as oportunidades para obtenção de ganhos acima do esperado. Para tanto, além desta introdução, o trabalho está organizado em quatro capítulos.

O primeiro traz uma abordagem descritiva sobre a Dívida Pública Federal, seu planejamento estratégico, sobre o canal do Tesouro Direto e as principais características dos títulos e suas formas de precificação.

O segundo capítulo resume a literatura sobre alguns processos estocásticos e modelos utilizados para avaliação da volatilidade dos retornos de ativos financeiros. Ou seja, a ideia é selecionar um dos modelos revisitados para avaliar a volatilidade dos retornos do ativo prefixado estudado. Essa parte do trabalho será fundamental para a seleção do modelo utilizado para a análise das séries de preços e retornos do Tesouro Prefixado vencido no ano de 2018.

Em geral, as análises sobre retornos de ativos financeiros são baseadas em uma única série de preços, como no caso das ações, por exemplo. Estes ativos são

precificados continuamente durante o funcionamento do mercado. No entanto, no caso dos títulos públicos federais, a precificação não é contínua. O apreçamento ocorre em três momentos ao longo do dia: na abertura e no fechamento do mercado e uma precificação intermediária. Desta forma, são gerados dois preços em cada um destes momentos: preço de compra e de venda, não coincidentes. A esta diferença dá-se o nome de *spread*.

Dito isso, este trabalho introduz no terceiro capítulo uma definição de retorno mais próxima da realidade. Em geral, os retornos são avaliados sobre um único preço de mercado. Contudo, na prática, ao vender um título público, o investidor deve arcar com um *spread*, tal que o valor de venda é sempre inferior ao da compra. Desse modo, em nosso estudo, a volatilidade contempla não só a evolução das taxas de variação dos preços de compra (ou de venda), mas também incorpora a variação do *spread* do investimento. Nesse mesmo capítulo é realizada a análise estatística das séries temporais, tanto de forma descritiva quanto inferencial, por meio de figuras e testes de hipóteses aplicados às séries em tela, com a proposição de um modelo para estimação da volatilidade dos retornos do ativo escolhido. Em seguida, é proposta uma estratégia de operações para os próximos meses, ou seja, para o curto prazo, ou mesmo para momentos onde exista consolidação da taxa de inflação em patamares baixos e de queda na taxa básica de juros da economia.

Finalmente, no último capítulo, são apresentados os resultados e considerações finais.

2. METODOLOGIA

A metodologia de análise estatística neste trabalho pode ser descrita como uma análise das séries temporais dos preços e retornos do Tesouro Prefixado vencido em 2018, por meio das quais objetiva-se a proposição de uma estratégia para operações no mercado de renda fixa, com a qual seja possível a obtenção de retornos “extraordinários”, ou seja, retornos acima da média. Um breve resumo de alguns modelos pertinentes ao nosso projeto se encontra no Capítulo 3. Cabe ressaltar que, embora nem todos os modelos descritos tenham sido aplicados em nosso trabalho, preferimos relatá-los na íntegra, uma vez que todos eles compuseram nosso rol de modelos estudados.

Assim, tomamos as características das séries de preços dos papéis como base para avaliação da composição da carteira, de acordo com o atual cenário de queda da taxa básica de juros e da taxa de inflação. Ou seja, na definição da composição da carteira, entendemos que os títulos indexados à SELIC seriam utilizados com fins de proteção e os papéis prefixados como os mais indicados, no atual cenário, para a concretização de retornos acima dos retornos esperados.

Foi realizada uma análise dos preços e retornos do tipo de ativo selecionado. Para isso, utilizou-se a série histórica dos preços (série diária) do Tesouro prefixado vencido em 2018, emitido pela Secretaria do Tesouro Nacional, no canal do Tesouro Direto. A base de dados utilizada se inicia em janeiro de 2004 e termina em dezembro de 2017, e foi obtida no site do Tesouro Transparente².

Os métodos estatísticos de análise de séries temporais foram utilizados. Para isso, utilizou-se o *software* estatístico R. As séries analisadas foram de preços e retornos conforme definições ao longo do capítulo 3.

² www.tesourotransparente.gov.br

3. DÍVIDA PÚBLICA E TESOURO DIRETO

A Teoria Clássica das Finanças Públicas, consolidada a partir das obras de Musgrave e Musgrave (1980) e Stiglitz (1986), tenta evidenciar os aspectos teóricos da Ciência Econômica aplicáveis às peculiaridades do Setor Público. Nesse sentido, algumas questões iniciais podem ser consideradas, como por exemplo, os porquês da existência do governo, quais seriam os objetivos da política fiscal e porque em geral o gasto público aumentou como proporção do PIB ao longo do tempo, na maioria dos países.

Dito isso, é interessante tratar de um conceito básico, mas fundamental nas Finanças Públicas: as falhas de mercado. Generalizando, são essas falhas de mercado que justificam a existência de um governo. Em economia, o modelo de concorrência perfeita³ seria o modelo no qual a alocação dos recursos seria ótima, ou seja, a situação mais eficiente possível, onde nenhum agente econômico poderia atingir um nível mais elevado de bem-estar, sem piorar o de outro indivíduo. Contudo, pode-se afirmar que tal modelo tem objetivos mais didáticos do que de aplicação prática, já que no mundo real mercados organizados em concorrência perfeita são inexistentes. Assim, a impossibilidade de se obter mercados organizados de acordo com o modelo de concorrência perfeita pode ser explicada por meio da existência das falhas de mercado. Algumas dessas falhas são descritas a seguir.

i) Bens Públicos

De acordo com GIAMBIAGI (2001), “bens públicos são aqueles cujo consumo ou uso é indivisível ou não rival. O seu consumo por parte de um indivíduo ou grupo social não prejudica o consumo do mesmo bem pelos demais integrantes da sociedade. Todos se beneficiam da produção de bens públicos mesmo que alguns mais do que outros. Alguns exemplos seriam a iluminação pública, justiça, segurança pública e defesa nacional.”.

³ O modelo de concorrência perfeita é uma abstração teórica, na qual são tomadas como verdadeiras as hipóteses de informação completa e perfeita, grande número de ofertantes e demandantes no mercado, preço dado pelo mercado, lucro econômico igual a zero e homogeneidade do produto ou serviço negociado neste mercado, ou seja, não diferenciação.

ii) Monopólios Naturais

A ocorrência de monopólios naturais é comum em alguns setores da Economia, onde há retornos crescentes de escala ou mesmo economias de rede, pode ser mais eficiente que exista apenas um fornecedor neste mercado, pois os custos de produção unitários são decrescentes conforme se aumenta a produção.

iii) Externalidades

As externalidades são situações onde a atuação de um agente econômico afeta direta ou indiretamente outros agentes econômicos, positiva ou negativamente. Um exemplo de externalidade positiva seria os benefícios causados a toda sociedade quando uma criança está matriculada na escola. Não somente a criança se beneficia da educação recebida, mas também toda a sociedade. Por outro lado, as externalidades negativas são situações onde a atuação de um agente econômico prejudica um ou mais agentes. Uma indústria que despeja rejeitos de produção em um rio prejudica a população que faz uso da água deste rio para satisfação das suas necessidades de alimentação, higiene e mesmo para saciar sua sede.

iv) Mercados Incompletos

Um mercado é dito incompleto quando um bem ou serviço não é ofertado, mesmo com o custo de produção abaixo do preço que os potenciais demandantes estariam dispostos a pagar. Esta ausência de oferta também induziria a ação do Estado no mercado.

v) Informação Imperfeita

Para que os mercados funcionem de forma adequada, é interessante que as informações relevantes sejam de conhecimento de todos os agentes que atuam em diversos mercados. Ou seja, o governo pode atuar criando uma legislação que traga mais transparência por exemplo. A assimetria de informações já causou sérios problemas na economia mundial e por isso deve ser aprimorada e minimizada pelo governo.

vi) Desemprego e Inflação

Ainda segundo GIAMBIAGI (2001), “o livre funcionamento do sistema de mercado não soluciona problemas como a existência de altos níveis de desemprego e inflação. Neste caso, há espaço para a atuação do Estado no sentido de implementar políticas que visem à manutenção do funcionamento do sistema econômico o mais próximo possível do pleno emprego e da estabilidade de preços.

Apresentados estes conceitos, as justificativas para a existência de um Governo se tornam mais claras e objetivas. A existência de falhas de mercado demonstra que o sistema de mercado não é capaz de desempenhar as funções alocativa, distributiva e estabilizadora por si só, trazendo a necessidade do Estado para corrigir estas falhas e melhorar o funcionamento do sistema como um todo.

Uma vez com o entendimento dos porquês da existência de um Governo, podemos dar sequência aos temas de interesse no presente artigo, por meio dos tópicos que se seguem.

3.1. Como o Governo Federal financia os seus gastos?

Para que o governo execute políticas públicas e desempenhe as suas funções básicas: alocativa, distributiva e estabilizadora, é preciso obter recursos financeiros. Uma das formas para obtenção de recursos é a tributação. O monopólio de tributar é do Estado.

A outra forma de captar recursos para financiar seus gastos (gasto público) é por meio do endividamento público, ou seja, por meio da emissão de títulos públicos no mercado e esta alternativa de financiamento do gasto público é o foco do presente artigo.

Atualmente, no caso do Brasil, a Secretaria do Tesouro Nacional, vinculada ao Ministério da Economia, é a instituição que possui o monopólio da emissão de títulos públicos federais. Uma vez que o mercado compra estes papéis, o Governo arrecada um volume financeiro que, em complemento ao que arrecada por meio do Sistema

Tributário, permite que ele desempenhe o seu papel de agente planejador e executor de políticas públicas.

Como estes papéis possuem uma data futura como prazo de vencimento, o Tesouro Nacional é obrigado a resgatar esses títulos nesta data. Assim, enquanto estes papéis não vencem, seus detentores fazem jus a uma remuneração, que induz os agentes a terem interesse por estes títulos (abrir mão de consumo presente para maior consumo futuro).

Por definição, os papéis soberanos são os ativos livres de risco, pois a priori o Governo tem o monopólio da emissão de títulos e também de moeda (Banco Central), que serviria para recomprar estes papéis em seu vencimento. Logo, este poder do Estado de criar moeda e obter recursos sempre que realiza leilões de títulos (mercado primário), traz uma capacidade de endividamento ao Governo que os demais agentes econômicos não possuem. É como se não houvesse limite para o endividamento público. Na verdade, trata-se apenas de um mecanismo de escolha intertemporal, onde a sociedade de hoje recebe bens e serviços públicos ofertados pelo Estado, em troca de um pagamento de principal e juros desta dívida no futuro.

Todavia, cabe destacar que esta discussão sobre o tamanho do endividamento público não é objeto deste trabalho. A intenção aqui é de analisar o comportamento dos preços dos passivos emitidos pela STN e propor uma estratégia para obtenção de ganhos acima dos ganhos esperados, já que a volatilidade se encontra presente em papéis que, a priori, não possuem risco de *default*.

3.2. O Tesouro Direto.

O Tesouro Direto é o programa que permite a compra e venda de títulos públicos federais por pessoas físicas pela internet. Foi criado pela Secretaria do Tesouro Nacional em conjunto com a Câmara Brasileira de Liquidação e Custódia – CBLC - no ano de 2002. Seus objetivos principais são facilitar o acesso a investimentos em títulos públicos federais e incentivar a formação de poupança de longo prazo. A STN basicamente emite os papéis por meio de emissões diretas para finalidades específicas definidas em leis (colocação não-competitiva); ofertas públicas (leilões, mercado

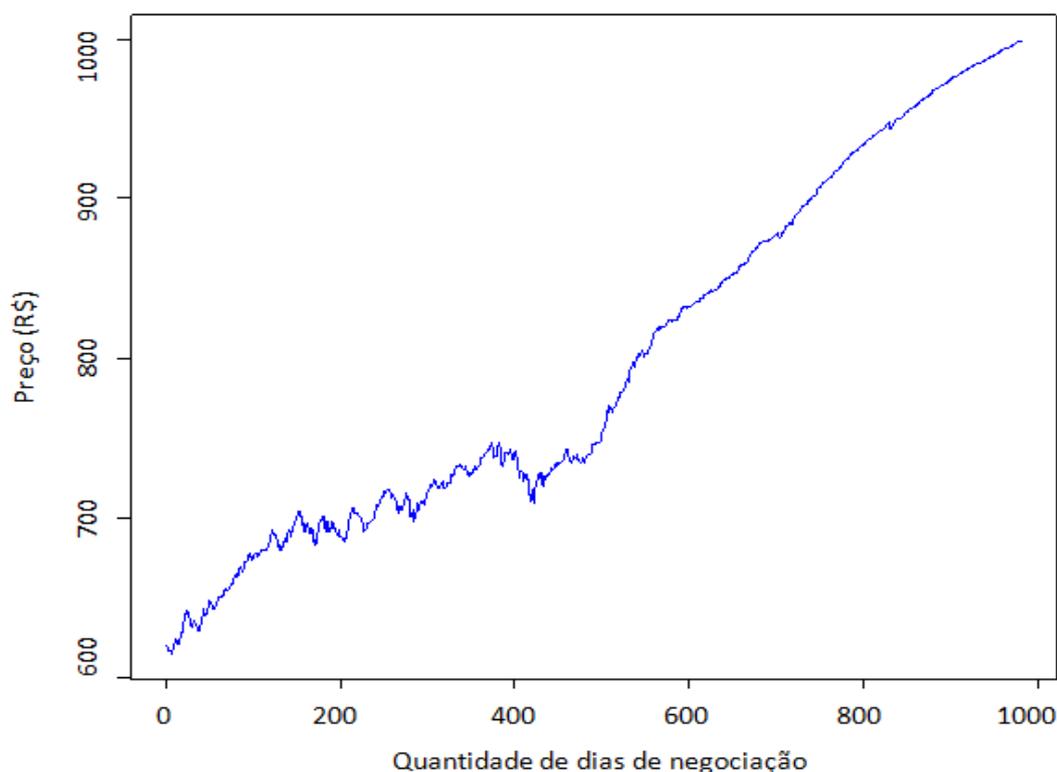
primário) com a participação direta de instituições financeiras (*dealers*) e vendas a pessoas físicas (Tesouro Direto).

Basicamente, a STN disponibiliza papéis prefixados e pós-fixados indexados à SELIC e ao IPCA, com ou sem o pagamento de cupons de juros semestrais. A seguir, são elencadas as características dos papéis atualmente emitidos, bem como sua forma de precificação⁴.

3.2.1. Os títulos prefixados (antigas LTN's).

Os títulos prefixados são os mais simples em termos de precificação no mercado brasileiro, pois não há pagamento de cupom de juros e apresentam apenas um fluxo de principal na data de vencimento do título. Cabe destacar que o valor unitário de principal a ser pago será sempre de R\$1.000,00, independente da data de emissão ou do resgate do título. A figura 1 exemplifica a trajetória percorrida pelo preço do Tesouro Prefixado vencido em janeiro de 2018, com 982 observações diárias, ao longo de toda sua vida útil, ou seja, entre 27 de janeiro de 2014 e 27 de dezembro de 2017.

Figura 1: Série histórica de preço do Tesouro Prefixado 2018



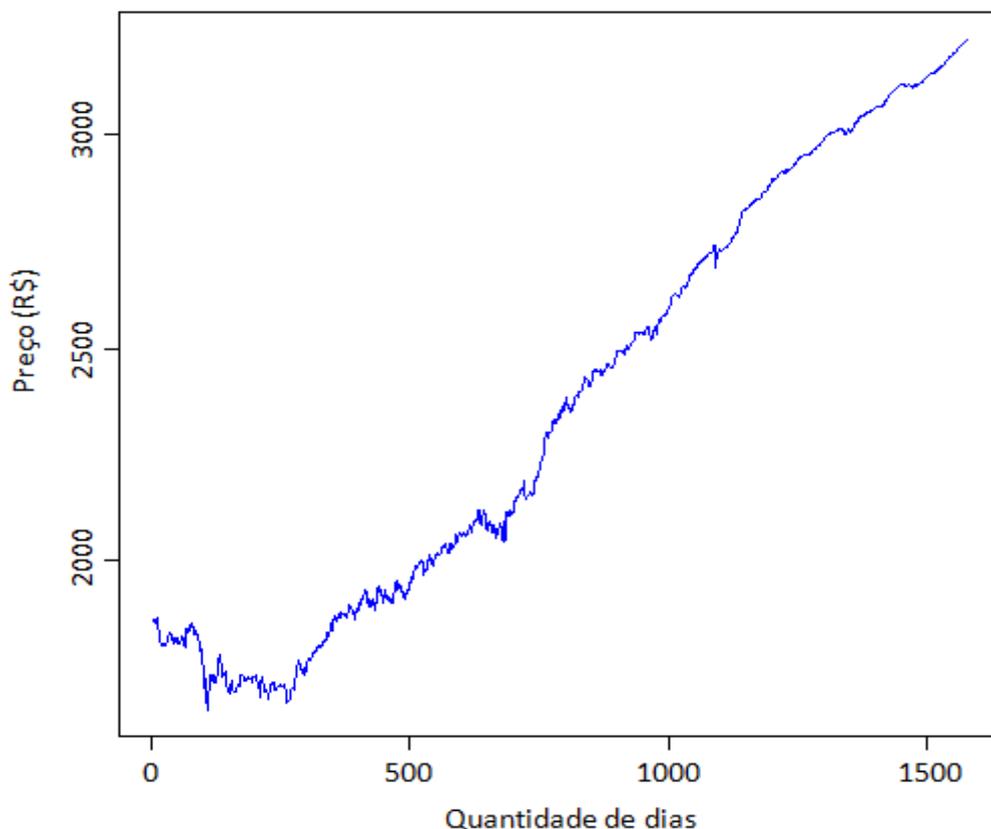
Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*.

⁴ "Precificar" um título público significa apenas descontar um fluxo de caixa a determinada taxa de desconto para uma data selecionada.

3.2.2. Os títulos indexados ao IPCA (antigas NTN-B's).

Os títulos indexados ao IPCA são pós-fixados e podem ou não pagar cupom de juros. Já o valor principal e dos juros são atualizados, desde a data-base, pelo IPCA. No vencimento, esses papéis pagam R\$1.000,00, corrigidos pelo indexador desde a data-base até a data de resgate. A figura 2 mostra a trajetória do preço do Tesouro IPCA vencido em março de 2017, com 1581 observações, ao longo de toda a sua vida útil, ou seja, entre 14 de janeiro de 2013 e 14 de maio de 2019.

Figura 2: Série histórica de preço do Tesouro IPCA 2019



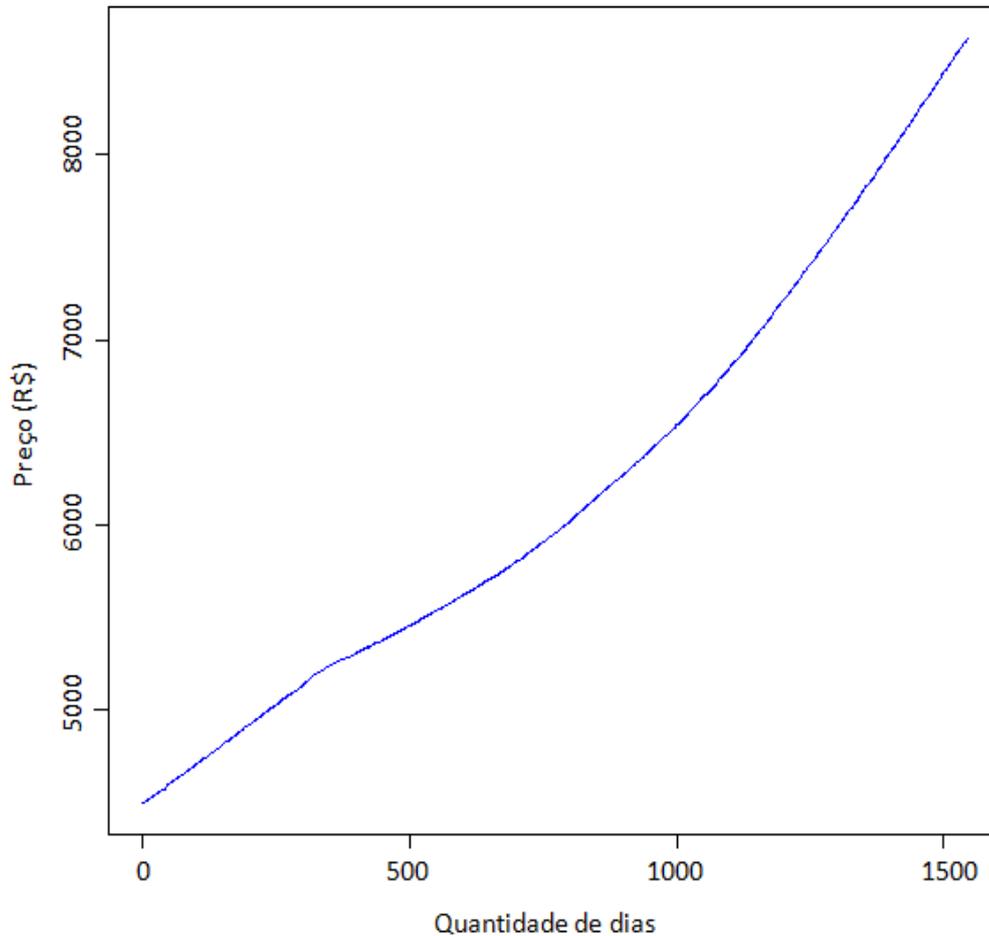
Fonte: Elaborado pelo autor no *software* R.

3.2.3. Os títulos indexados à SELIC (antigas LFT's).

Os títulos indexados à taxa SELIC são pós-fixados e possuem estrutura semelhante ao prefixados já que não pagam cupons de juros e apresentam um único fluxo de caixa de principal na data de vencimento do título. Porém, o valor do principal é atualizado pela taxa SELIC acumulada no período, isto é, os R\$1.000,00 pagos no

vencimento são corrigidos pelo seu indexador, desde a data-base até a data do resgate. A figura 3 apresenta a trajetória percorrida pelo preço do Tesouro SELIC vencido em março de 2017, com 1544 observações, ao longo de toda a sua vida útil, ou seja, entre 03 de janeiro de 2011 e 06 de março de 2017.

Figura 3: Série histórica de preço do Tesouro SELIC 2017



Fonte: Elaborado pelo autor no *software* R.

3.2.4. As etapas da estratégia de emissão de títulos públicos federais.

Uma vez apresentados os ativos da dívida pública federal, uma das questões interessantes que surge e merece ser destacada é o que está por trás deste canal de negociação, que é o planejamento estratégico da Dívida Pública Federal. Esta é a fase que antecede a emissão dos títulos, no sentido de quantificar esta emissão, ou seja, quanto deve ser emitido e que tipos de papéis serão emitidos.

Grosso modo, a estratégia de administração da Dívida Pública engloba um plano para o curto prazo (até um ano), uma estratégia de transição de médio e longo prazo (mais do que um ano), e possui forte relação com o *benchmark* de longo prazo, também chamado *steady state*.

Para entendimento direto e simples, abaixo são resumidas as etapas do processo de planejamento estratégico da dívida pública brasileira:

- i) Definição dos objetivos de longo prazo;
- ii) Análise de cenários macroeconômicos;
- iii) Discussões preliminares de cenários e restrições;
- iv) Desenho da estratégia de curto prazo;
- v) Definição das metas: resultados esperados da estratégia;
- vi) Elaboração da estratégia de transição; e,
- vii) Planejamento tático da dívida, execução e monitoramento.

No primeiro estágio, basicamente busca-se definir uma estrutura de dívida ótima (qual seria a melhor composição para se atingir). Em seguida, ocorrem discussões metodológicas, com a criação de cenários determinísticos para que sejam levados em conta os fatores de risco, perspectivas macroeconômicas internas e externas e até mesmo com levantamento de cenário político interno, que poderiam influenciar a gestão da Dívida Pública Federal.

Na fase seguinte, o principal ponto é a velocidade com a qual os objetivos de longo prazo ora definidos poderão ser atingidos. Já durante a fase do desenho da estratégia de curto prazo, com os diversos cenários escolhidos, realiza-se o levantamento das necessidades de financiamento para o período de planejamento, quando são observados os vencimentos projetados para um ano e dos recursos orçamentários destinados à amortização da dívida. Ou seja, é nesta fase do planejamento que ocorre a quantificação da necessidade de financiamento do Governo Federal, isto é, da necessidade de emissão. São analisados os cenários, as diversas alternativas para a composição da nova emissão (pré ou pós, indexados à SELIC ou IPCA, por exemplo).

Uma vez com as simulações realizadas, os resultados são submetidos aos tomadores de decisão. Ainda são realizadas avaliação sobre riscos associada a cada

estratégia de emissão. Dentre estes riscos, os principais seriam o risco de mercado, que é avaliado principalmente em razão da composição da Dívida Pública Federal e o risco de refinanciamento, que se relaciona com a concentração de vencimentos no curto prazo, prazo médio do estoque de dívida e de variação do fluxo de caixa. A etapa seguinte trata de aspectos de governança.

A etapa de transição explora a trajetória desejada para a DPF, que seria o elo entre o curto e o longo prazo. Na última etapa são discutidos aspectos específicos dos títulos que serão emitidos no curtíssimo prazo, a posição de caixa do Tesouro Nacional e a definição do cronograma das emissões para o próximo período. Nesta etapa também ocorre o monitoramento para eventuais correções em termos de composição ou trajetória, visando à convergência às metas estabelecidas.

Uma vez com esses conceitos apresentados, é interessante uma exploração do que já foi desenvolvido ao longo dos anos em termos de modelagem de preços, retornos e volatilidades, para que os objetivos deste artigo sejam direcionados aos modelos mais adequados para avaliação e proposição de uma estratégia de operações com os títulos públicos disponíveis para compra nos próximos meses ou mesmo anos.

4. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS, VOLATILIDADE E REVISÃO DA LITERATURA SOBRE MODELAGEM DA VOLATILIDADE DE ATIVOS FINANCEIROS

Prever o futuro sempre foi um desafio para a humanidade, em diversas áreas. A partir do século XX, o mundo presenciou o aprofundamento do conhecimento científico, o surgimento e o desenvolvimento da estatística e da teoria das probabilidades, com aprofundamento da abordagem físico-matemática. Esses conhecimentos têm sido aplicados de forma bem-sucedida e com resultados importantes em todas as áreas do conhecimento. Modelos inspirados na metodologia de Box e Jenkins (1970) consideram que os dados apresentam distribuição de probabilidades dita gaussiana, ou seja, com parâmetros bem conhecidos (média e desvio padrão), e em que valores futuros podem ser de alguma forma, influenciados pelos valores passados.

Dito isso, seria lógica, a priori, a aplicação desta mesma metodologia e modelos daí derivados aos ativos financeiros. No mercado financeiro, com dados abundantes e disponíveis a qualquer interessado no tema, seria possível construir modelos estatístico-matemáticos de forma a buscar retornos acima da média (retorno esperado), ao se projetar o preço de ativos e, adicionalmente, se proteger de oscilações indesejadas de preços, provisionando adequadamente contra eventuais perdas.

Contudo, a aplicação do modelo gaussiano mostrou-se relativamente adequada somente em momentos de normalidade dos mercados, mas pouco aplicável a situações de estresse, ou mesmo para capturar eventos extremos. Pode-se afirmar que os eventos financeiros, sociais, políticos incomuns são situações extremas que surgem repentina e inesperadamente, com o potencial de criar variações muito acima da média no preço dos ativos financeiros. A explicação para a inadequação do uso da distribuição gaussiana para previsão de eventos extremos, como observado diversas vezes nos mercados financeiros mundiais, seria o fato de a distribuição normal possuir caudas com baixas probabilidades para a ocorrência desses eventos extremos.

Desde os anos 1920, diversos matemáticos têm estudado esse tema, até que em 1928, os matemáticos R.A. Fisher e L.H.C. Tippett apresentaram o que hoje se conhece como Teoria do Valor Extremo (TVE). Publicaram um artigo que mostrava que os

eventos extremos seguem distribuições típicas e próprias. Nos dias atuais, a Teoria do Valor Extremo é muito usada para estimar o risco de tragédias naturais e dimensionamento de obras como barragens de água para abastecimento e a geração de hidroeletricidade por exemplo.

Fator não menos importante e intrínseco aos ativos financeiros, que limita a aplicação do modelo gaussiano, é a sugerida “falta de memória” dos retornos, conhecida como *random walk*, que caracterizaria a clássica Hipótese do Mercado Eficiente, apresentada por Fama (1965). Tal hipótese afirma que o preço à vista de uma ação reflete todas as informações e expectativas dos atores do mercado, que sua cotação seria totalmente imprevisível a partir de informações históricas como preço ou volume ou qualquer outra variável. Como consequência da não adequação do modelo gaussiano às caudas da distribuição das séries de retornos de ativos financeiros e também como decorrência da falta de autocorrelação desses retornos, surgiria naturalmente a necessidade de uma abordagem alternativa.

Já em 1963, Mandelbrot apresenta um resultado teórico importante ao generalizar o Teorema Central do Limite tratando a curva de Gauss como um caso particular de uma família de distribuições mais ampla: a de Lévy. Iniciava-se um novo horizonte de pesquisas para a substituição dos modelos gaussianos por modelos baseados na distribuição de Lévy. Especificamente, em seu estudo sobre o mercado de algodão norte-americano mostrou que a distribuição do retorno dos preços tinha a mesma forma funcional para diversas escalas de tempo, isto é, as distribuições possuíam a propriedade de invariância por mudança de escala temporal. Além disso, estas distribuições apresentavam caudas com comportamento em lei de potência, mais longas das que as distribuições gaussianas. Baseado nestas duas propriedades sugeriu que as distribuições empíricas fossem modeladas pelas distribuições estáveis de Lévy.

Podemos definir um processo estocástico como uma coleção de variáveis aleatórias. Matematicamente, fixamos um espaço de probabilidade, uma tripla (Ω, ζ, P) , formada por um conjunto Ω , uma sigma-álgebra ζ em Ω e uma medida positiva P nessa sigma-álgebra, tal que $P(\Omega) = 1$, na qual Ω é chamado de espaço amostral e os elementos de ζ são chamados eventos. A medida P é a medida de probabilidade, e $P(\zeta)$,

para $E \in \zeta$, é a probabilidade de ocorrência do evento E . Além do espaço de probabilidade, fixamos também uma família de índices T .

Um processo estocástico é definido como $\{X_t; t \in T\}$ e trata-se de uma coleção de variáveis aleatórias $X_t: \Omega \rightarrow R$ (ou R^d), para cada $t \in T$. Interessante notar que $X: = \{X(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$ é um processo estocástico, é uma função de dois argumentos, para todo $t \in T$ fixo, $X(t, \cdot)$ é uma variável aleatória e para ω fixo, $X(\cdot, \omega)$ é uma função do tempo, conhecida como realização ou trajetória do processo estocástico.

Os processos estocásticos podem ser vistos como modelos matemáticos para a ocorrência de um experimento ou fenômeno aleatório em cada um dos tempos $t \in T$. O espaço de probabilidades se relaciona com a aleatoriedade, isto é, para cada ponto fixado $\omega \in \Omega$, a função $t \mapsto X_t(\omega); t \in T$ é uma realização do processo X associado a ω .

Os diferentes processos se diferenciam basicamente em razão das diferentes possibilidades para o espaço de parâmetros ou espaço de estados ou pelas características das trajetórias e suas relações in(dependência) entre as variáveis aleatórias de cada processo. A seguir, serão descritos alguns processos estocásticos, com a intenção de enquadrar as séries de preços dos títulos públicos federais dentro de um tipo de processo específico e seguir com a análise de forma mais direcionada ao modelo que será ajustado.

4.1. Processos relacionados ao movimento browniano.

É possível mostrar que o movimento browniano (MB) é um processo markoviano, uma martingal e um processo de Lévy. Assim, serão apresentadas algumas propriedades do movimento browniano como, por exemplo, recorrência e transcendência de suas trajetórias.

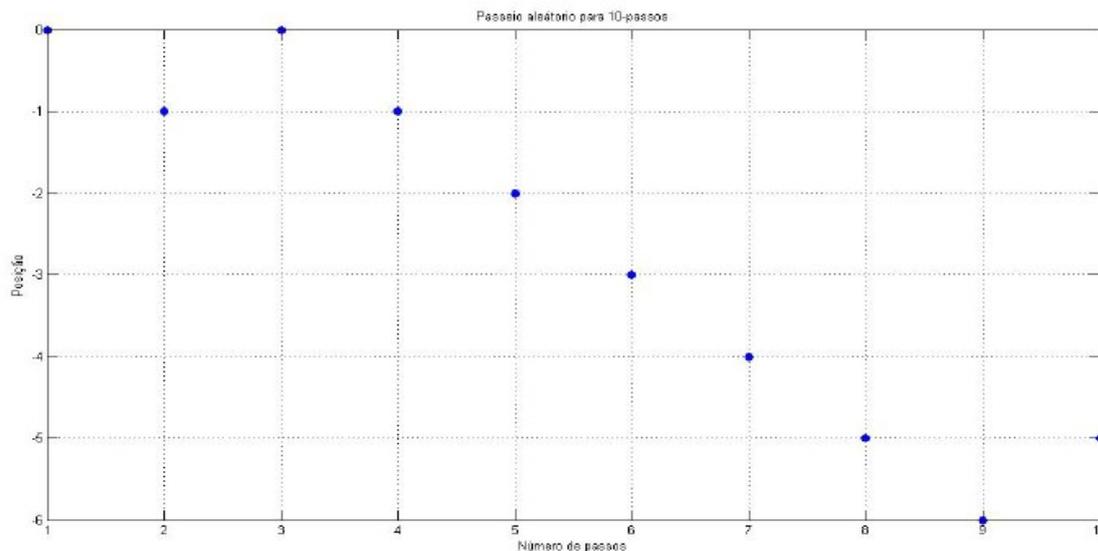
i. Passeio Aleatório (*Random Walk*).

Para facilitar o entendimento das características do movimento browniano, discorrer sobre passeios aleatórios pode ser interessante para introduzir o assunto. Assim, apresentamos o conceito de maneira intuitiva e resumida, através de passeios

aleatórios na forma discreta. A ideia é que com passos (movimentos ou deslocamentos) cada vez menores e mais frequentes, no limite, poderíamos generalizar o conceito para o caso contínuo.

Seja $X_n = \{X_n: n = 0, 1, \dots\}$ um processo estocástico em tempo discreto que evolui conforme mostrado abaixo:

Figura 4: Passeio Aleatório



Fonte: (Duque, 2014).

O processo é iniciado em $X_0 = 0$, e segue com os movimentos até $n = 10$. Interessante observar que no primeiro movimento atinge-se o estado X_1 , que pode ser para $+1$ com probabilidade p ou para o estado -1 , com probabilidade $1-p$. Estes movimentos seguem até o estado final, seguindo a mesma lógica do primeiro movimento. De maneira mais formal, poderíamos definir passeio aleatório conforme se segue.

Sejam ξ_1, ξ_2, \dots uma sequência infinita de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, (i.i.d). A sequência das somas $(S_n)_{n=0, 1, 2, \dots}$ das somas $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, para $n = 1, 2, \dots$ é denominada passeio aleatório. Ou, de modo equivalente, um processo estocástico $(X_n)_{n \geq 1}$ é um passeio aleatório se os seus incrementos $X_{n+1} - X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

4.1.2. Movimento browniano: um breve histórico.

O início dos estudos sobre processos estocásticos data de 1785 quando Jan Ingenhousz (1730-1799) descobriu o processo da fotossíntese ao observar o movimento em zigue-zague das partículas em suspensão de pó de carvão na superfície do álcool, que depois seria chamado movimento browniano, devido ao relatório de Robert Brown (1773-1858) elaborado em 1827, ao observar partículas de pólen na superfície da água que produziam movimentos irregulares continuamente.

O primeiro autor a descrever matematicamente o movimento browniano foi Thorvald N. Thiele em 1880, em um artigo sobre o método dos mínimos quadrados. Já em 1900, Louis Bachelier estuda o processo em sua tese de doutorado *A Teoria da Especulação*, no entanto, Albert Einstein em 1905 com um estudo independente explicou estes movimentos postulando que as partículas sob observação estão sujeitas a perpétuas colisões com moléculas do meio circundante.

O tratamento mais rigoroso em termos matemáticos sobre movimento browniano só foi desenvolvido em 1923 por Norbert Wiener (1894–1964), que construiu uma distribuição associada como uma medida no espaço de caminhos contínuos. A importância do artigo de Wiener não foi plenamente reconhecida até depois do trabalho pioneiro de Kolmogorov (1931a, 1933-1956), Lévy (1934-1935), e Feller (1936). No entanto, seu método era aplicável ao caso específico desse processo e somente após o estabelecimento dos fundamentos axiomáticos da teoria de probabilidade por Kolmogorov, em 1929-1933, que se torna possível o tratamento rigoroso dos processos estocásticos em geral, como são conhecidos atualmente.

Um modelo mais elegante para o movimento físico browniano foi proposto por Langevin (1909), Ornstein e Uhlenbeck (1930). Wiener também introduziu integrais estocásticas para L²-funções deterministas, que foram mais tarde estudadas em maior detalhe por Paley, Wiener, e Zygmund (1933). A expansão de funcionais brownianos caóticos foi descoberto por Wiener (1938), e a teoria de integrais múltiplas com respeito ao movimento browniano foi desenvolvida em um artigo de Itô (1951c). A lei do logaritmo iterado foi descoberta por Khinchin: num primeiro momento (1923, 1924) para sequências de Bernoulli, e mais tarde (1933–48) para movimento browniano. Um estudo sistemático das trajetórias do movimento browniano foi iniciado por Lévy (1937-

1954, 1948-1965), que demonstrou a existência da variação quadrática em (1940) e as leis em arco-seno (1939, 1948-1965). Apesar de ter muitas provas sobre esse fato, a dedução baseada nas propriedades de simetria básica, foi uma novidade. A propriedade forte de Markov foi usada implicitamente na obra de Lévy e outros, mas o resultado não foi cuidadosamente definido e provado até Hunt (1956).

Alguns textos sobre probabilidade possuem explicações detalhadas para o movimento browniano, como por exemplo: Itô e McKean (1965–96), Freedman (1971–83b), Karatzas and Shreve (1988–91), e Revuz and Yor (1991–94). Para informações adicionais sobre o assunto e outras informações em integrais múltiplas sugere-se a leitura de Wiener-Itô por Kallianpur (1980), Dellacherie, Maisonneuve, e Meyer (1992), e Nualart (1995).

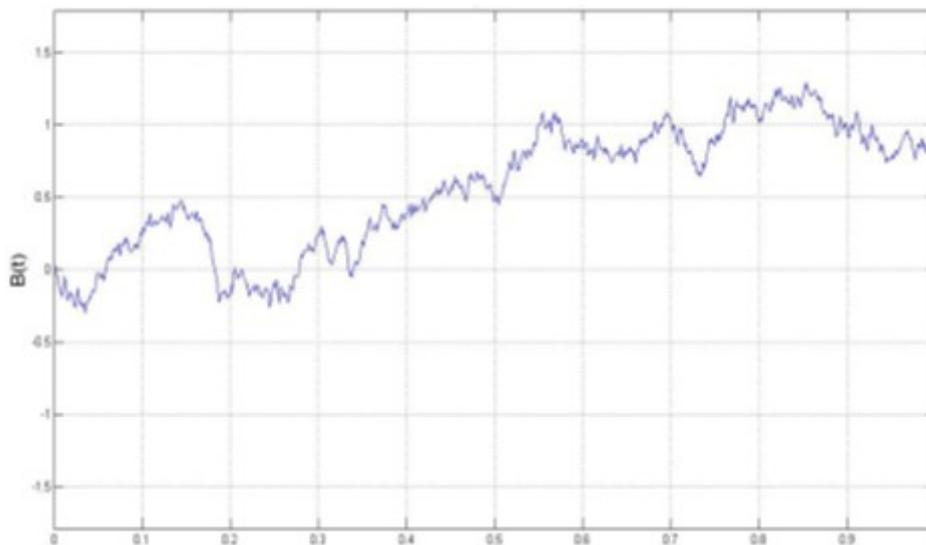
4.1.3. Movimento browniano padrão.

Seja um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{Z}, P) , fixo. O movimento browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ é um processo estocástico em $R: B(\cdot, \cdot): \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R$, e $(\omega, t) \mapsto B(\omega, t) = B_t(\omega)$, que satisfaça a:

- i) Para quase todo $\omega \in \Omega$ fixado, $B(\omega, \cdot): [0, \infty) \rightarrow R$ é uma função contínua e $B_0(\omega) = B(\omega, 0) = 0$ (começa em zero quase certamente).
- ii) Para uma partição qualquer $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, os incrementos do processo B_t são independentes, isto é, os movimentos do processo nestes intervalos disjuntos do tempo são independentes uns dos outros.
- iii) A distribuição do incremento $B_{t+h} - B_t$ não depende de t , ou seja, os incrementos são estacionários, ou seja, para $s < t$, o incremento do processo entre s e t depende apenas da diferença $t - s$ e não depende de t e s .
- iv) B_t tem distribuição normal com média zero e variância t , isto é, $B_t \sim N(0, t)$.

A figura 5 ilustra bem a trajetória de um processo com estas características, em $[0, 1]$:

Figura 5: Movimento browniano padrão



Fonte: (Duque, 2014).

É possível demonstrar que $\text{Cov}[B_t, B_s] = E[B_t, B_s]$ e que a correlação entre dois MB, B_t e B_s , é igual a $\frac{\min(s, t)}{\sqrt{t}\sqrt{s}}$. Vários autores construíram provas da existência do movimento browniano. Aqui chamamos atenção à construção de Lévy-Ciesielski, na qual são provadas as condições i) a iv) supracitadas para o intervalo $(0, 1]$ e em seguida estendida para $(0, \infty)$ de tal forma que sejam mantidas as propriedade i) a iv).

Outro fato importante para o movimento browniano, é que caso ele não seja iniciado em zero, ele continua seguindo distribuição normal. Seja B_t um MB iniciando em $x \in \mathbb{R}$. Este é o processo $B_t^x = x + B_t$. Se o processo é iniciado em x , então B_t tem distribuição normal com média x e variância t , isto é, $B_t^x \sim N(x, t)$.

4.1.4. Processo de Markov.

Sabe-se que os processos Markovianos representam uma das mais importantes classes de processos estocásticos, não só por sua gama de aplicações, mas também pela interação com outras áreas da matemática, por exemplo, com análise funcional, teoria espectral e teoria de operadores. De modo mais geral, podemos dizer que o processo de Markov está relacionado a uma função de transição homogênea no tempo, que dá origem a um semigrupo de contração por intermédio da propriedade de Chapman-Kolmogorov.

De uma forma intuitiva, os processos de Markov são modelos em que, assumindo que é conhecido o estado atual do sistema, os estados anteriores não têm influência sobre os estados futuros do sistema. Esta condição é chamada de propriedade de Markov, ou seja, dado os estados no passado $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$, o presente X_n e o futuro X_{n+1} , é verdadeira a igualdade abaixo:

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} \vee X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = P[X_{n+1} = x_{n+1} \vee X_n = x_n].$$

Com esta igualdade, percebe-se que a probabilidade do evento futuro depende apenas do evento presente $X_n = x_n$.

Para mais detalhes dos processos de Markov, ver Ethier e Kurtz (1986).

4.1.5. Processo de Lévy.

As distribuições de Lévy, também conhecidas como Pareto-Lévy, Lévy-estáveis ou distribuições estáveis, são uma família de distribuições que permitem várias possibilidades para simetrias e curtose, além de terem importantes propriedades matemáticas. Essa família foi caracterizada por Paul Lévy nos anos de 1920 e 1930 (LÉVY, 1937). Alguns autores preferem chamar de distribuição de Lévy, apenas um caso particular da família de distribuições estáveis, o que não é o caso desse trabalho. A aplicabilidade das distribuições de Lévy à modelagem financeira advém do fato de que essa generaliza a distribuição gaussiana e permite *heavy tails*, caudas longas ou gordas, e assimetria, frequentemente observadas em dados financeiros (DANIELSSON; DE VRIES, 1997; CURTO, 2002). Sua definição matemática é dada com base em sua função característica, pois somente para alguns casos especiais existem soluções analíticas para a função densidade de probabilidade.

$$E \exp(iu X) = \exp(-\gamma |u|^\alpha (\text{signu})(\gamma |u|^{1-\alpha} - 1) + i\delta u), \text{ para } \alpha \neq 1$$

$$E \exp(iu X) = \exp(-\gamma |u| (\text{signu}) \ln(\gamma |u| + i\delta u)), \text{ para } \alpha = 1$$

O parâmetro α é chamado de índice da lei, índice de estabilidade ou ainda expoente característico e varia em $(0,2]$. O parâmetro β é chamado assimetria da lei e

varia entre $[-1, 1]$. Se $\beta = 0$, a distribuição é simétrica, se $\beta > 0$ é assimétrica para direita, e se $\beta < 0$ é assimétrica para esquerda. Os parâmetros α e β determinam a forma da distribuição. O parâmetro γ é um parâmetro de escala, e pode ser qualquer número positivo. O parâmetro δ é de localização, e translada a distribuição para direita se $\delta > 0$, e para esquerda se $\delta < 0$.

4.2. Processos construídos a partir do movimento browniano:

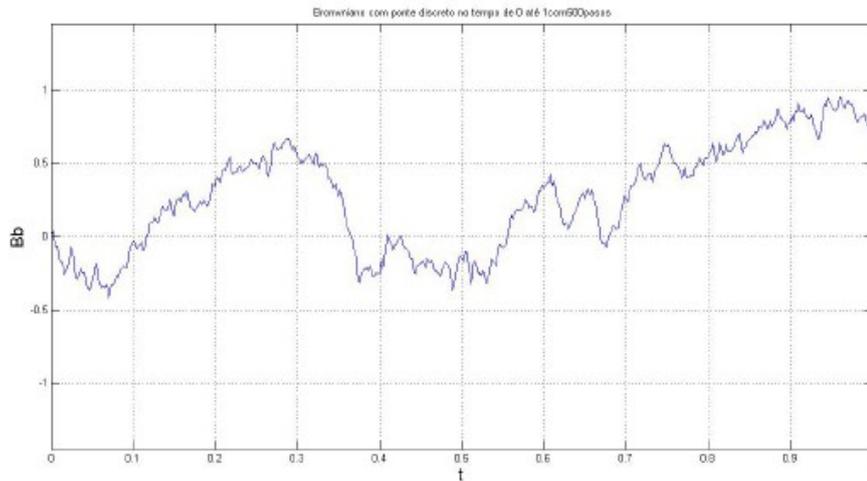
4.2.1. Movimento Browniano como ponte.

Seja $(B_t)_{t \geq 0}$ um processo dito movimento browniano. Dizemos que o processo $Bb_t = B_t - \frac{t}{T} B_T$, $t \in [0, T]$, com $T > 0$ é um movimento browniano como ponte. Interessante observar que Bb_t é um processo gaussiano, pois B_t e B_T são processos gaussianos. Em $t = 0$ temos que $Bb_0 = 0$ e em $t = T$ temos $Bb_t = 0$. Além disso, o processo Bb_t é um processo contínuo já que B_t é contínuo. O valor esperado do processo Bb_t é zero. Já sua variância é dada por $\frac{t(T-t)}{T}$, $t \in [0, T]$ com $T > 0$. Ou seja, como o processo Bb_t é gaussiano e a variável aleatória B_T também é gaussiana, possuem covariância zero e desta forma são independentes.

Uma diferença entre o movimento browniano como ponte e o movimento browniano padrão é o fato de as pontes não apresentarem incrementos estacionários independentes. Em suma, o processo browniano como ponte, Bb_t é um processo estocástico gaussiano, centrado com incrementos não independentes não estacionários.

A figura 6 apresenta uma ponte browniana, para $T = 1$, com 500 passos.

Figura 6: Movimento browniano como ponte.

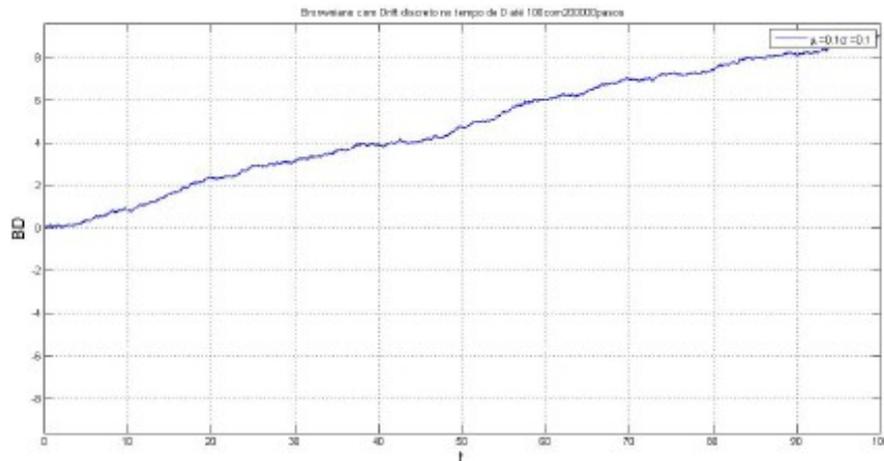


Fonte: (Duque, 2014).

4.2.2. Movimento Browniano com *drift*.

Seja $(B_t)_{t \geq 0}$ um processo dito movimento browniano. Dizemos que o processo $BD_t = \mu t + \sigma B_t$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ é um movimento browniano com *drift*, ou com tendência ou ainda, aritmético. Este processo também é gaussiano e é contínuo já que B_t é contínuo. Tem-se que em $t = 0$, $BD_0 = 0$. O valor esperado para este processo é μt e sua variância é dada por $\sigma^2 t$. Este tipo de processo apresenta incrementos independentes e estacionários. Em suma, é um processo gaussiano, centrado com incrementos independentes e estacionários. A figura 7 apresenta um típico movimento browniano com *drift*,

Figura 7: Movimento browniano com *drift*.



Fonte: (Duque, 2014).

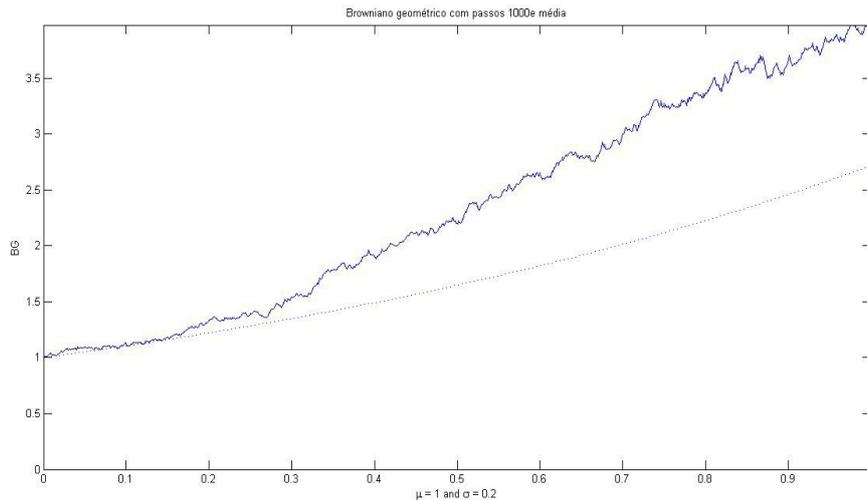
4.2.3. Movimento Browniano geométrico.

Seja $(B_t)_{t \geq 0}$ um movimento browniano e considere o processo $BG_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$, onde $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. O processo BG_t é chamado de Movimento Browniano Geométrico, onde observa-se que em $t = 0$, tem-se que $BG_t = 1$. O processo BG_t é um processo contínuo quase certamente, já que a função exponencial é contínua e BG_t é contínuo e a composta de duas funções contínuas é contínua. O valor esperado para o processo é $e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$ e sua variância é $e^{2\mu t + \sigma^2 t} - 1$. Para um $s \leq t$, temos que $B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s}$.

Além disso, interessante observar que o movimento browniano geométrico, BG_t é um processo estocástico com distribuição lognormal, com parâmetros μt e $\sigma\sqrt{t}$. Outra característica interessante neste tipo de processo é que os incrementos de BG_t não são independentes nem estacionários.

A figura 8 apresenta um MB geométrico para $t \in [0,1]$, $\mu = 0.2$ e $\sigma = 1$, com 1000 transições ou passos.

Figura 8: Movimento browniano geométrico



Fonte: (Duque, 2014).

4.2.4. Processo Ornstein-Uhlenbeck.

Em Finanças, o Processo Ornstein-Uhlenbeck é um processo de reversão à média, bastante comum para descrever a dinâmica de taxas de juros e volatilidades estocásticas de retornos dos ativos. Pode-se definir este processo como se segue.

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma dW(t),$$

onde $W(t)$ é um processo padrão de Wiener, σ é parâmetro de volatilidade do processo e representa o nível de intensidade das perturbações estocásticas, μ é o valor ao qual o processo possui reversão e θ representa a velocidade desta reversão.

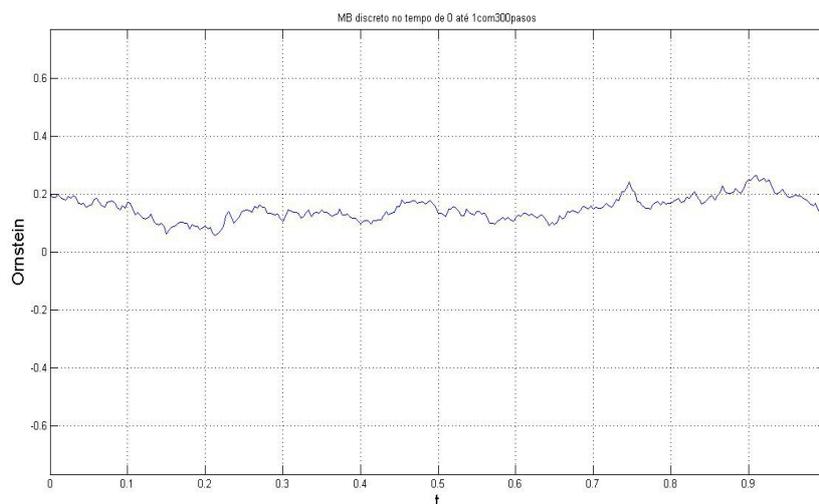
A solução e desenvolvimento em detalhes do Processo de Ornstein-Uhlenbeck podem ser encontrados em Alves (2008).

É possível definir este processo conforme o que se segue. Seja $(B_{\dot{t}t})_{t \geq 0}$ um processo dito movimento browniano. O processo $BO_t = ve^{-\beta t} + \frac{\sigma e^{-\beta t}}{\sqrt{2\beta}} B_{e^{2\beta t} - 1}$, para $t \geq 0$,

$\beta > 0$, com $\sigma \in R$. O parâmetro β é denominado coeficiente de *drift* e σ^2 é o parâmetro de difusão. O processo BO_t é chamado Processo de Ornstein-Uhlenbeck.

A figura 9 apresenta um Processo de Ornstein-Uhlenbeck, $t \in [0,1]$, $\beta = 2$ e $\sigma = 0.01$ e $v=0.2$, com 300 transições ou passos.

Figura 9: Processo Ornstein-Uhlenbeck



Fonte: (Duque, 2014).

4.3. Volatilidade.

Dario (2004, p. 1) define a volatilidade de um ativo como a medida mais simples para mensurar a incerteza com relação ao preço futuro de um ativo. Damodaran (2006) afirma que qualquer medida da incerteza pode ser chamada de risco.

Para ilustrar, poderíamos ordenar, a priori, os ativos em termos de risco. Por definição, os ativos com o menor nível de risco são os papéis emitidos pela Secretaria do Tesouro Nacional, dado que um governo que emite sua própria moeda e dívida denominada nesta mesma moeda sempre teria a capacidade de honrar seus compromissos, ou seja, refinanciar sua dívida pública, mesmo que com a emissão de dívida nova (títulos ou moeda).

Com níveis um pouco mais elevados em termos de risco poderíamos citar as debêntures emitidas pelas empresas privadas de grande porte. Em seguida, os ativos financeiros atrelados a moedas estrangeiras, por exemplo, até que atingiríamos ações ou mesmo derivativos, como as opções de compra e venda de ações ou outros ativos negociados no mercado futuro.

Dadas as particularidades de cada ativo, como ter ou não prazo de vencimento, ser indexado à taxa de juros, ou mesmo à inflação, ser negociado no mercado à vista ou

futuro, em moeda nacional ou estrangeira, cada um deles terá um comportamento diferente em termos de preço, retornos e volatilidades.

JORION (2003) afirma que uma das questões mais relevantes em finanças é o risco dos ativos financeiros ao longo do tempo. Ao tomar a decisão de investimento em ativos financeiros, cabe ao agente tentar prever o risco de sua escolha, dentro de uma série de alternativas de alocação de recursos.

Para Fernandes e Mota (2004), o estudo da volatilidade tem grande importância na área de finanças, em especial no apreçamento de derivativos e gerenciamento de risco.

Dado o principal objetivo deste artigo, optou-se por analisar um título público federal já vencido para se estudar sua volatilidade. O título selecionado foi o Tesouro Prefixado vencido em 2018. No próximo capítulo detalharemos como este papel é negociado no mercado e como são precificados.

Em razão da ampla variedade de modelos para se estimar volatilidades de ativos financeiros, a revisão literária mostra-se um bom norteador para a elaboração deste trabalho. Após pesquisa sobre modelagem de volatilidades de ativos financeiros, foi nítida a percepção de que a maioria dos estudos envolve retorno (razão entre o preço de venda e o preço de compra) ao invés de preços. As principais razões seriam o fato de séries de retornos serem mais fáceis de manipular do que as séries de preços e porque sua forma possui propriedades estatísticas mais interessantes. A seguir, são explicitados alguns dos principais modelos citados na literatura e que consideramos interessantes.

4.3.1. Modelos de Médias Móveis (MA).

Nesta classe de modelos, a volatilidade é considerada como o desvio padrão dos retornos do ativo financeiro que ocorrem dentro de um período móvel de extensão fixa. Podemos dizer que foi um dos primeiros modelos encontrados na literatura, e continua sendo amplamente usado no mercado.

O estimador utilizado nesta metodologia pode ser calculado de acordo com a fórmula abaixo:

$$\sigma_t = \frac{1}{N} \left[\sum_{t=1}^N (r_t - \bar{r}_t)^2 \right]^{0.5}, \text{ onde:}$$

σ_t é a volatilidade do ativo;

r_t é o retorno no dia t;

\bar{r}_t é a média dos retornos; e

N é a extensão da janela de tempo.

Uma dificuldade característica deste modelo está em determinar qual valor da janela de tempo escolher: valores grandes sugerem maior precisão na estimação da volatilidade, porém dados históricos muito antigos perdem relevância na previsão do futuro.

O método de média móvel para estimativa de volatilidade pode parecer frágil por assumir o mesmo grau de importância para todas as observações presentes ao longo do tempo. Este problema, contudo, será corrigido em modelos subsequentes. Por outro lado, uma das vantagens destes modelos é que apresentam uma menor sensibilidade a valores extremos e possui apenas um parâmetro, referente ao período passado levado em consideração.

4.3.2. Modelos de Alisamento ou Suavização Exponencial (EWMA).

Estes modelos são uma evolução dos modelos citados no item anterior, pois atribuem pesos relativos no momento em que os dados amostrais são coletados. O objetivo desta técnica é amenizar o problema das diferentes datas para coleta de dados. Em RiskMetrics (1996) há uma ampla explicação desta técnica, sendo interessante observar que os dados antigos teriam pesos menores relativamente aos dados mais recentes, indicando que o preço de amanhã seria um preço mais próximo ao preço de ontem do que do preço em datas mais distantes.

Pode ser especificado da seguinte forma:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) \epsilon_{t-1}^2$$

4.3.3. Modelos Autorregressivos (AR).

Considerando ϵ_t um processo discreto puramente aleatório, com média 0 e variância σ_ϵ^2 , um processo Z_t é chamado de processo autorregressivo de ordem p, ou AR(p), se $Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + \dots + \alpha_p Z_{t-p} + \epsilon_t$.

4.3.4. Modelos Mistos (ARMA).

Os processos autorregressivos e de médias móveis, combinam as características de processos AR(p) e MA(q), sendo uma classe de modelos úteis e parcimoniosos para descrever dados de séries temporais, (CHATFIELD, 1984). O modelo ARMA(p,q) é definido por: $Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + \dots + \alpha_p Z_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}$.

4.3.5. Modelos ARIMA.

Na prática, muitas séries temporais não são estacionárias e os modelos descritos até aqui são apropriados para séries estacionárias. Sendo assim, para ajustar estes modelos a uma série temporal observada, é necessária a remoção das fontes de variação não estacionárias. Caso uma série observada for não estacionária na média, é possível remover a tendência tomando-se uma ou mais diferenças.

Um modelo ARMA no qual Z_t é substituído pela sua d-ésima diferença $\nabla^d Z_t$ é capaz de descrever alguns tipos de séries não estacionárias. A série diferenciada pode ser denotada por: $\nabla^d Z_t = (1 - B)^d Z_t$.

O processo autorregressivo integrado e de médias móveis chamado ARIMA(p, d, q) é dado pela equação abaixo:

$$\nabla^d Z_t = \alpha_1 \nabla^d Z_{t-1} + \dots + \alpha_p \nabla^d Z_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}$$

Um processo estacionário que se torna estacionário após d diferenças é dito ser não estacionário homogêneo, ou integrado de ordem d, $I(d)$, (CHATFIELD, 1984).

4.3.6. Modelos ARCH.

No início da década de 1980, surgiram os modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional, ARCH (Engle, 1982).

O modelo ARCH – Modelo Autoregressivo de Heterocedasticidade Condicional foi proposto com o objetivo de modelar séries financeiras. Um processo X_t é um processo ARCH de ordem q , se: $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, onde:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q X_{t-q}^2, \text{ sendo}$$

σ_t uma sequência não negativa de variáveis aleatórias, ε_t uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e α_i são parâmetros.

4.3.7. Modelos GARCH.

Ainda nos anos 1980, os modelos ARCH foram generalizados por Bollerslev (1986), originando vasta literatura. De acordo com Bueno (2011), a principal razão para o surgimento desses modelos é que, os modelos econométricos até então enfatizavam apenas o primeiro momento condicional, enquanto as dependências de ordens superiores eram perturbações aleatórias, consideradas em seus momentos incondicionais. Essas dependências expressariam a existência de aglomerações na série e a alternância de períodos de baixa volatilidade com períodos de alta volatilidade.

A principal contribuição destes modelos seria a distinção de uso entre momentos de segunda ordem condicionais e não condicionais. Enquanto a matriz de covariância não condicional para as variáveis de interesse pode ser invariante no tempo, a matriz de covariância condicional depende de estados passados. Ainda segundo aquele autor, empiricamente, observa-se não normalidade em séries financeiras, dada a alta probabilidade de eventos extremos. E assim, estes modelos GARCH teriam a capacidade de modelar este fato estilizado.

Uma vez com muitos parâmetros necessários para ajuste dos modelos ARCH, eis que para reduzir este problema, Bollerslev (1986) sugere um modelo mais conservador na quantidade de parâmetros, o modelo de heterocedasticidade condicional autorregressivo generalizado, GARCH, no qual a equação da variância passa a ser:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \epsilon \sigma_{t-j}^2$$

Assim, com essa breve revisão dos modelos, seguimos com a apresentação do procedimento para identificação do modelo a ser ajustado para a série em análise.

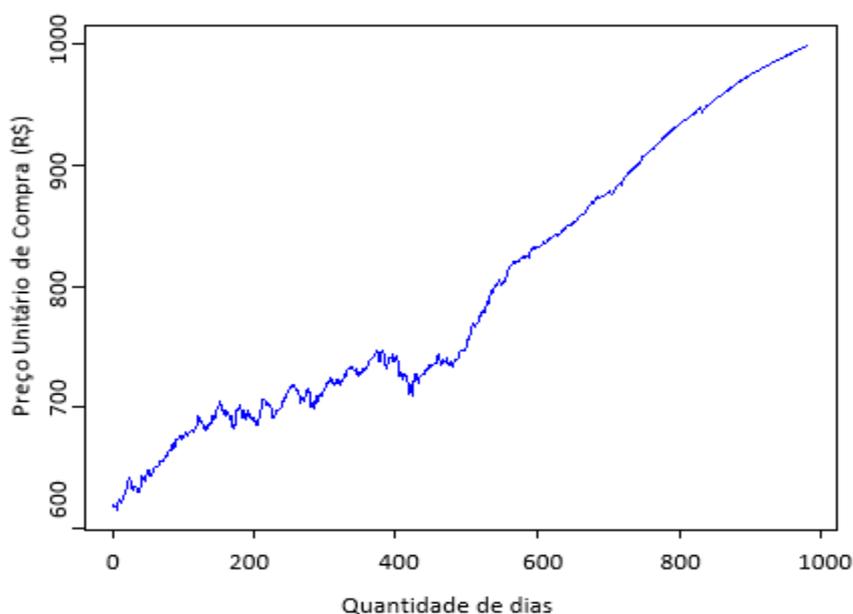
Segundo Box e Jenkins (1970) e Morettin e Toloí (2004) o procedimento de identificação consiste em três etapas, em que a primeira se realiza a verificação da necessidade de transformação da série original, com o objetivo de estabilizar a variância. A segunda é a determinação da ordem dos parâmetros do modelo, onde o primeiro parâmetro é o grau de diferenciação necessário à estabilização da série temporal, principalmente em relação à tendência e sazonalidade. Este procedimento é feito por meio da análise do correlograma, ou seja, pela função de autocorrelação, onde são apresentados os valores da autocorrelação em relação a defasagens k . Conforme descrevem (Morettin; Toloí, 2004) e (Ehlers, 2007), caso o correlograma apresente comportamento onde os valores da autocorrelação amostral r_k decaem para zero de forma relativamente lenta, há indícios de não estacionariedade da série e a série precisa ser diferenciada. Já com a série estacionária, a última etapa é identificar a ordem autorregressiva p , a qual é determinada pela variação da função de autocorrelação parcial (FACP) da série que está sendo analisada e a ordem de médias móveis q que é determinada pela função de autocorrelação (FAC) da série em análise. Cabe destacar que McLeod e Li (1983) apontam que o uso excessivo de diferenciações resulta em um número negativo de autocorrelação de ordem 1 da série diferenciada e que o número incorreto de diferenças acarreta um aumento da variância da série transformada.

5. ANÁLISE DAS SÉRIES DE PREÇOS E RETORNOS DO TESOIRO PREFIXADO E PROPOSIÇÃO DA ESTRATÉGIA PARA OPERAÇÕES

Este capítulo pretende realizar uma análise para a série de preços e retornos de um título prefixado. Para isso, selecionamos o título vencido mais recentemente (2018) com intuito de avaliar a trajetória de seu preço e comportamento dos retornos. Títulos vencidos antes deste período poderiam apresentar comportamentos mais “distantes” dos papéis lançados e não vencidos ainda.

Como apresentado no capítulo anterior, uma característica interessante dos ativos prefixados é o fato da ausência de incerteza com relação ao preço do ativo tanto no momento da compra (a qualquer momento) quanto na data do vencimento, *ex ante*. Como no vencimento todo título prefixado vale R\$1.000,00 e o mercado precifica diariamente estes ativos (três vezes ao dia), sabe-se o ponto inicial e final das séries de preço de compra e venda. Isto indica ausência de incerteza nos limites do intervalo de tempo correspondente ao tempo de vida do ativo. A figura 10 apresenta a trajetória de preço unitário de compra de mercado do Tesouro Prefixado vencido em 2018.

Figura 10: Série histórica do Tesouro Prefixado 2018



Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*.

Outro ponto que podemos chamar a atenção é que o preço deste ativo nunca atinge R\$1.000,00 a não ser na data de vencimento. Nenhum agente teria interesse em comprar algo por mais de R\$1.000,00 hoje, quando sabe que numa data futura de vencimento, o agente receberia R\$1.000,00 em seu regaste. Ou seja, o mercado precifica este ativo basicamente em razão da taxa de juros e sua estrutura a termo e do tempo que resta até o vencimento do ativo, dado que no vencimento este ativo vale R\$1.000,00. Assim, quanto menor o preço unitário de compra, maior o retorno (taxa de compra), em caso de carregamento do papel até o vencimento.

Antes de descrever a estratégia e analisar as séries em si, é interessante definirmos as variáveis de interesse. A primeira delas é o preço unitário de compra, que é o preço de mercado do ativo a cada dia. A segunda variável de preço importante é o preço unitário de venda. A terceira variável de preço que interessa, que denominamos expectativa de preço do ativo, é o preço esperado dia a dia para o papel, dados o preço unitário de compra no lançamento e o valor de face. Ou seja, é possível calcular o incremento diário, fixo, que incidindo dia a dia para remunerar o ativo, levaria seu preço unitário de compra no lançamento ao valor de face (ou preço unitário de venda na data de vencimento). Chamaremos este incremento diário de “tau”.

Com relação ao retorno de interesse neste trabalho, chamamos a atenção ao fato de que este retorno do investidor utiliza os preços unitários de compra e venda (medição realizada pela manhã)⁵, e podemos relacioná-los de acordo com a seguinte equação:

$$P_t^* = (1 + L_t) P_{t-1}, \text{ onde:}$$

P_t^* é o preço unitário de venda em t ;

P_{t-1} é o preço unitário de compra em $t-1$; e

L_t é uma taxa de retorno diária.

A partir da equação acima, é possível escrever:

$$\frac{P_t^c}{P_{t-1}^c} = (1+L_t) \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}^c}, \text{ onde:}$$

⁵ Interessante observar que a maioria dos estudos oferece uma análise do retorno de um ativo em razão de apenas um preço de mercado, quando a precificação é contínua. No caso dos títulos públicos, só há precificação em três momentos do dia: manhã, uma medição intermediária e a última ao final do dia. A forma proposta para cálculo do retorno utiliza as duas séries de preço: preços unitários de compra e venda.

P_t^* é o preço unitário de venda em t ;

P_{t-1}^i é o preço unitário de venda em $t-1$;

P_{t-1} é o preço unitário de compra em $t-1$;

Então, temos que:

$$P_{t-1} = (1+D_t) P_{t-1}^i, \text{ onde:}$$

D_t corresponde à diferença entre os preços unitários de compra e venda (taxa).

Assim, rearranjando as equações acima, temos:

$$\frac{P_{t-1}}{P_{t-1}^i} = (1 + D_t)$$

Desta forma, é possível decompor o preço unitário de venda da forma abaixo:

$$P_t^i = i(1+L_t) (1 + D_t) P_{t-1}^i$$

Ou seja, o preço unitário de venda em t pode ser escrito como o preço de venda em $t-1$ multiplicado pelas taxas de retorno do investidor e pelo *spread*⁶.

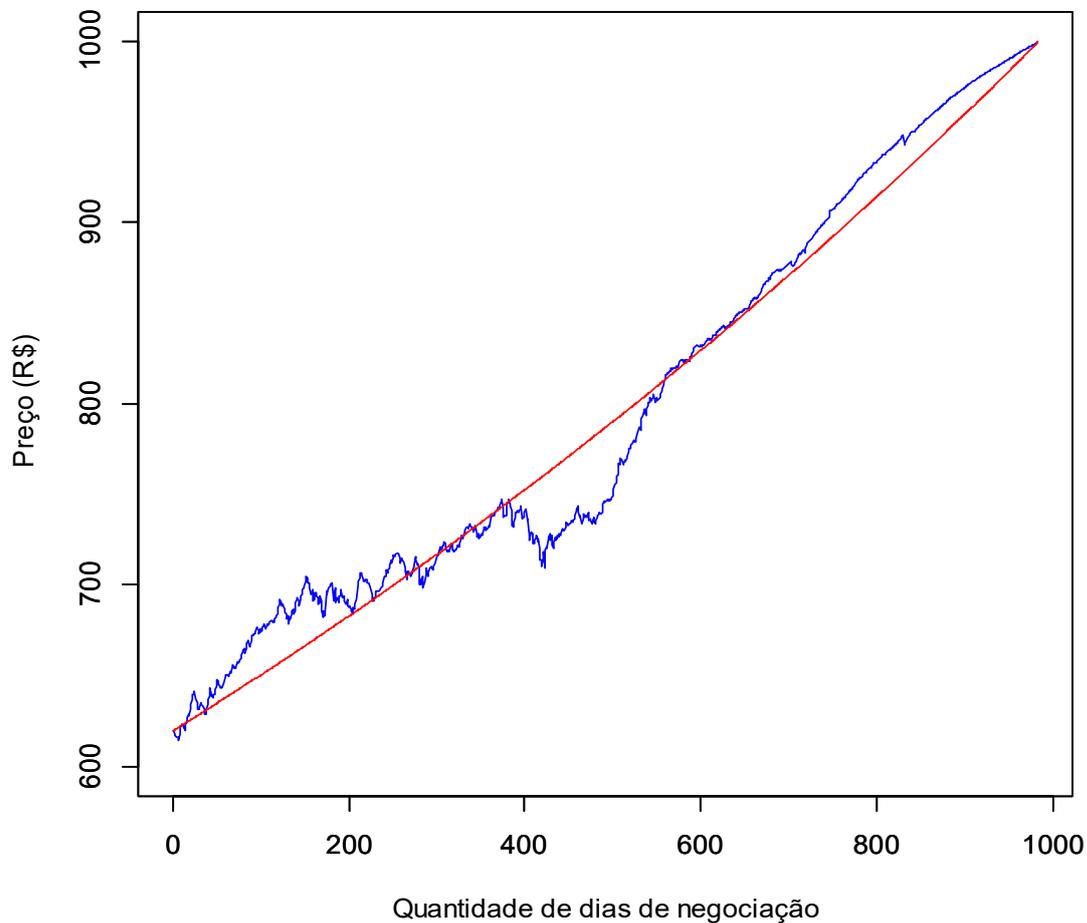
A seguir são apresentadas as trajetórias das séries de interesse.

5.1. Análise da Série de Preços de Compra do Tesouro Prefixado 2018.

A figura 11 apresenta as duas trajetórias de preço do ativo: o preço de mercado em azul e o preço esperado em vermelho (teórico).

⁶ Estamos definindo como *spread* a diferença entre os preços unitários de compra e venda, que decorre do fato de a precificação não ser contínua. O *spread* acaba por permitir que, em caso de pequenas oscilações dos preços no mercado secundário não exijam uma nova precificação.

Figura 11: Comparativo dos preços projetado e realizado para o Tesouro Prefixado vencido em 2018.



Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*.

Primeiramente, é interessante observar a trajetória de preço esperado, a qual foi projetada com base nos preços de compra no lançamento e o preço de venda no vencimento, conhecidos. Dada a quantidade de dias de negociação do ativo, foi calculada a taxa fixa (“tau”) que ao incidir dia a dia sobre o preço de lançamento, levaria ao valor de face definido em R\$1.000,00.

Chamamos esta trajetória de teórica porque na verdade este preço esperado ao longo da série não é o preço marcado pelo mercado. Uma vez que o ativo é lançado, os agentes econômicos (investidores) começam a adquirir o papel, fazendo com que seu preço assuma uma trajetória diferente da teórica projetada. Por razões de demanda e oferta, há um descolamento do preço de mercado em relação ao preço teórico. E seriam

estes afastamentos, possíveis indicativos para a definição dos momentos de compra e venda por parte dos agentes. Esta divergência de trajetórias pode ser atribuída à volatilidade do mercado, e é ela que pode oferecer as melhores oportunidades para obtenção de ganhos acima da média.

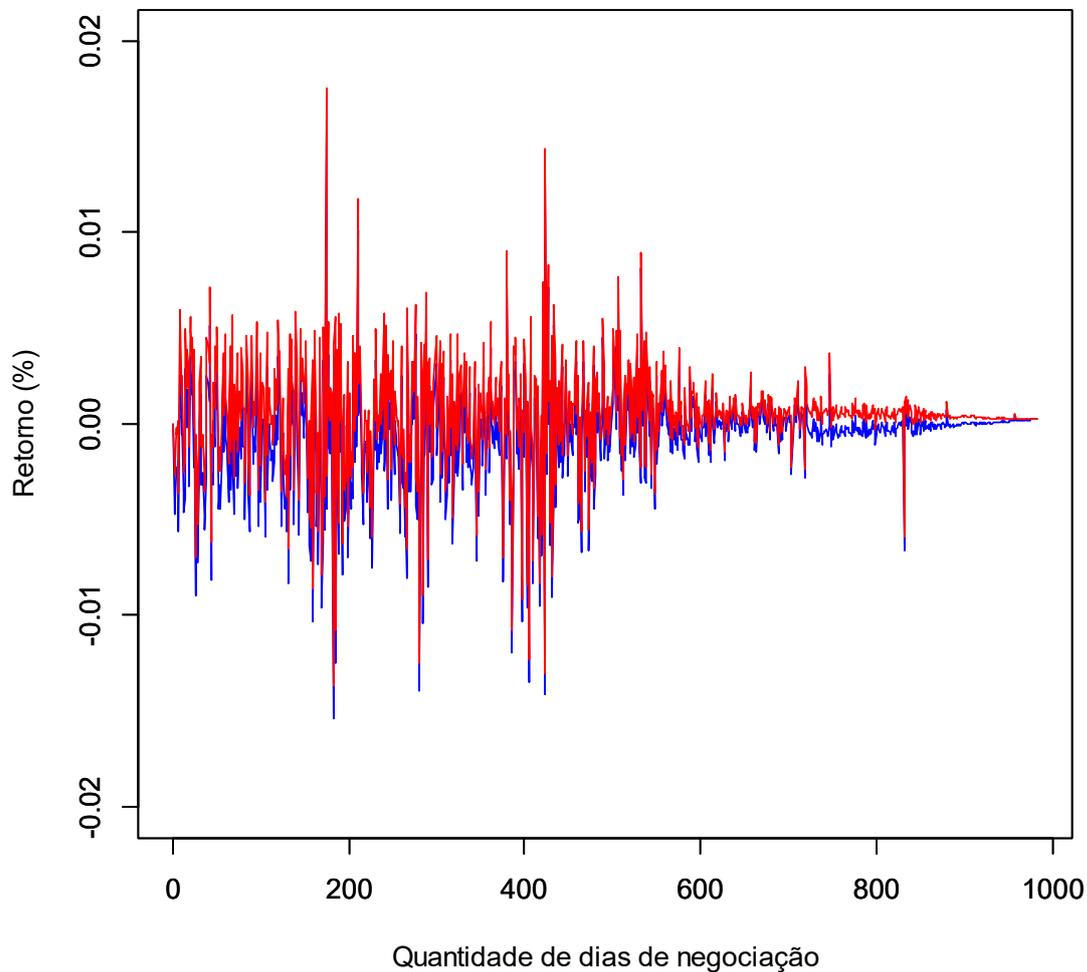
Na figura acima, claramente percebe-se maior volatilidade na primeira metade da vida útil do ativo, pois no início da vida útil praticamente não há agentes vendendo e muitos agentes comprando. Naturalmente seu preço de mercado sobe e supera o preço teórico. Uma vez que os investidores entendem que seus retornos realizados são superiores ao retorno esperado, se inicia um movimento de venda (realização deste lucro) e o preço se reaproxima do preço teórico novamente. Ou seja, sempre que os investidores percebem que o preço de mercado está acima do preço teórico, aumentam as vendas e estes preços convergem. Por outro lado, quando o preço de mercado está abaixo do preço teórico, aumentam as compras e caem as vendas e o preço volta a subir. Este movimento ocorre algumas vezes ao longo da primeira metade da série.

Com a aproximação da data de vencimento, menor a incerteza, pois os agentes sabem que nesta data o título valerá R\$1.000,00 e a volatilidade parece se dissipar. Isto pode ser entendido como uma redução das oportunidades de retornos acima do esperado (não há tanto tempo para especular). Desta forma, para fins de retornos acima da média, há indícios de que a compra do ativo deve ser realizada na primeira metade da vida útil do ativo, no momento em que o preço de mercado se encontrar mais distante do preço teórico, para baixo. Este momento de entrada pode ser identificado ao se acompanhar o comportamento do retorno do investidor, onde houver picos de volatilidade destes retornos, que será analisado no item a seguir.

5.2. Análise das Séries de Retornos: de mercado x do investidor.

A figura 12 retrata o comportamento dos retornos de interesse neste trabalho: o retorno projetado, baseado apenas na série de preço unitário de compra e o retorno que chamamos de retorno do investidor, calculado com base no preço de compra e de venda (retorno realizado pelo agente que compra o ativo em t e vende o ativo em $t+k$).

Figura 12: Comparativo entre o retorno do investidor (linha azul) e retorno tradicional (linha vermelha)



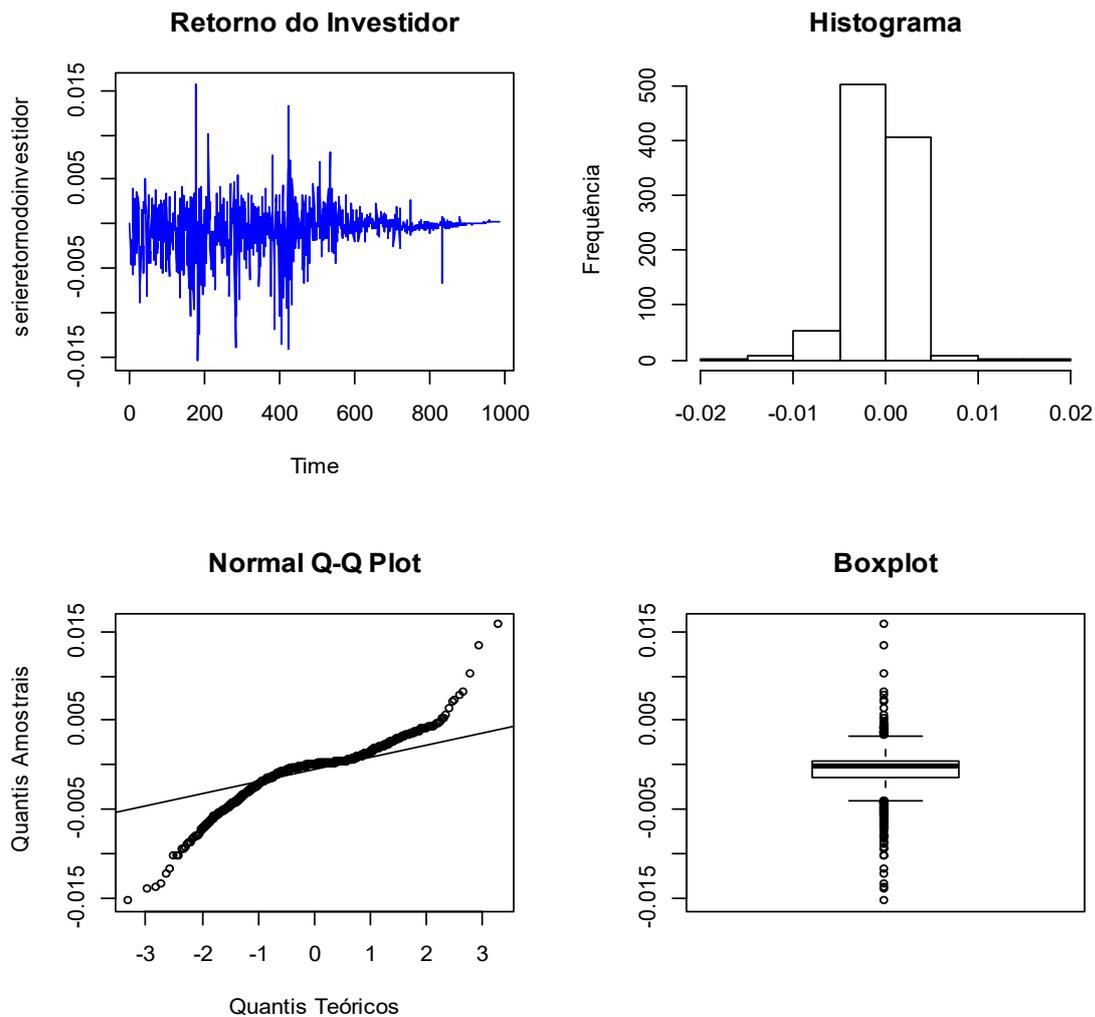
Fonte: Elaborado pelo autor no *software* R.

Ao analisar as séries do retorno do investidor e o retorno tradicional, percebemos comportamento semelhante, e destacamos a maior divergência entre elas a partir da segunda metade da vida útil do ativo. Além disso, podemos apontar o *spread* como a razão por esta divergência.

A princípio, foram realizados testes de normalidade e estacionariedade, ambos com rejeição das hipóteses nulas. Não normalidade já era uma característica esperada, já que retornos de ativos financeiros não seguem distribuição gaussiana de acordo com a literatura revisada. Já a não estacionariedade da série do retorno do investidor pode ser explicada também pelo *spread*.

Abaixo são apresentados os resultados dos testes de normalidade e estacionariedade, bem como figuras exploratórias da série do retorno do investidor.

Figura 13: Resultados figuras da análise exploratória da série retorno do investidor.



Fonte: Elaborado pelo autor no *software* R.

Ao observar os figuras acima é possível notar que as caudas da distribuição são um pouco pesadas, fato comum das séries financeiras.

Em todos os testes foram rejeitadas as hipóteses nulas, isto é, a série dos retornos do investidor não apresenta indícios de normalidade (Shapiro-Wilk e JarqueBera) e nem estacionariedade (KPSS).

Os testes foram realizados nos software R e os resultados são apresentados a seguir.

i) Testes de Normalidade:

Shapiro-Wilk normality test: $W = 0.87735$, $p\text{-value} < 2.2e-16$

Jarque Bera Test: $X\text{-squared} = 1569.7$, $df = 2$, $p\text{-value} < 2.2e-16$

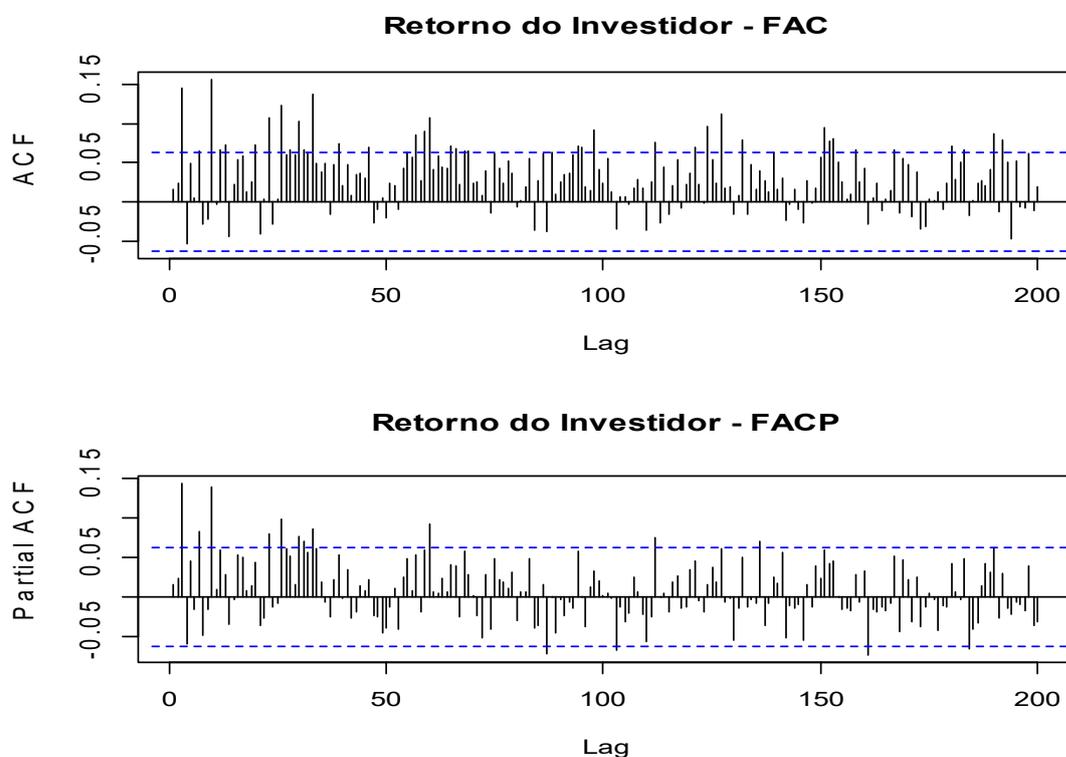
ii) Teste de Estacionariedade:

KPSS Test for Level Stationarity

KPSS Level = 3.0897, Truncation lag parameter = 7, $p\text{-value} = 0.01$

Com o objetivo de complementar a análise da série, a figura 14 contém a FAC (Função de Autocorrelação) e FACP (Função de Autocorrelação Parcial) cujo objetivo é analisar o comportamento dos retornos do investidor.

Figura 14: Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial do retorno do investidor.



Fonte: Elaborado pelo autor no *software* R.

Analisando a FAC e a FACP é possível observar que até o *lag* 200, a série apresenta pontos fora do intervalo “pontilhado”, logo, trata-se de mais uma evidência de que a série não é estacionária.

Em suma, as séries de preços e retornos parecem indicar que os picos de volatilidade são coincidentes com os momentos em que ocorrem vales e topos na série de preços. Desta forma, entendemos que o acompanhamento da série do retorno do investidor pode ser uma boa forma de se identificar os melhores momentos para entrada e saída dos ativos prefixados, dado o objetivo de maximização dos lucros.

Estes picos de volatilidade dos retornos seriam um indício de que os agentes estariam se reposicionando no mercado.

5.3. Proposição da Estratégia de Operação.

A estratégia aqui proposta foi definida em razão do cenário macroeconômico atual, onde as taxas de inflação e de juros estão em níveis baixos, e não há indicativo de que voltarão a subir no curto prazo. Definiu-se a estratégia de operação em títulos públicos com o Tesouro Prefixado e Tesouro Selic, a fim de explorar a volatilidade dos prefixados e buscar retornos acima do retorno esperado; e para manutenção de liquidez com remuneração, optou-se pelo Tesouro Selic em razão de sua baixa volatilidade.

Ou seja, a ideia é manter posição em Tesouro Selic enquanto o preço de mercado do prefixado estiver acima da expectativa de preço. Uma vez que o preço de mercado do prefixado estiver abaixo da expectativa de preço, seria o momento adequado para vender Tesouro Selic e comprar Tesouro Prefixado, observando o pico da volatilidade do retorno. No caso, a ideia não é carregar o prefixado até seu vencimento, pois conforme esta data se aproxima, a volatilidade vai se reduzindo e por consequência, as possibilidades de retornos acima do esperado, dia a dia, também se reduzem.

A ideia seria replicar esta estratégia para vários ativos prefixados e indexados à Selic, para se obter retornos proporcionalmente maiores do que o retorno do papel ao longo de sua vida útil e em um intervalos de tempo relativamente menores do que a vida útil dos papéis.

No caso do Tesouro Prefixado vencido em 2018, caso um investidor tivesse comprado o ativo no lançamento e mantido em carteira até seu vencimento, o retorno total realizado por este agente teria sido de 61,35%, ao longo dos 982 dias de vida do ativo.

5.4. Ajuste do Modelo mais indicado para o retorno do investidor.

Para finalizar esta análise, entendemos que o ajuste de um modelo para os retornos seria interessante. Para tanto, utilizou-se a função “auto.arima” do *software* R e abaixo são apresentados os resultados. Ressaltamos que o modelo abaixo é um exemplo, porém outros modelos podem ser testados para fins de comparação e posteriormente pode ser objeto de aprimoramentos.

ARIMA(0,1,1)

Coefficients:

ma1 -0.9864

s.e. 0.0049

sigma² estimated as 7.184e-06: log likelihood=4416
AIC=-8827.99 AICc=-8827.98 BIC=-8818.22

6. CONCLUSÃO

Uma vez com as análises das séries realizadas, podemos seguir com as conclusões.

Inicialmente era objetivo analisar uma gama maior de títulos, como os indexados ao IPCA e à SELIC, para que fosse realizada uma análise mais completa sobre os variados papéis emitidos pela STN. No entanto, esta tarefa tornaria o trabalho demasiadamente longo para os fins deste trabalho, no que se refere à identificação de oportunidades de retornos acima do esperado. Assim, optou-se por analisar apenas o Tesouro Prefixado vencido em 2018, pois se verificou que o movimento browniano como ponte explicaria bem o comportamento da trajetória dos preços de mercado para compra ou venda deste ativo.

A estratégia de operações proposta, onde o investidor aguarda o momento no qual o preço de mercado fica abaixo do preço esperado para comprar o título e vende quando o preço de mercado supera o preço esperado se mostra interessante, pois obteria retornos proporcionalmente maiores em períodos mais curtos do que se comprasse no lançamento e vendesse no vencimento do título. Aliado a isso, outro ponto observado é que os picos de volatilidade observados na série de retornos do investidor poderiam ser um indicativo dos melhores momentos a comprar e vender este título.

Além disso, a análise de questões de interesse como volatilidade dos retornos e a variabilidade da incerteza ao longo da série pode ser explorada e associada à estratégia proposta de operações nos momentos em que tanto a taxa SELIC quanto a taxa de inflação estiverem em baixos níveis e suas tendências forem de manutenção e mesmo redução destes patamares.

Foi possível verificar que no caso de pontes brownianas, a incerteza se concentra mais ao centro da trajetória dos preços, dado que nos extremos (lançamento e vencimento dos títulos) da série temporal, não há incerteza com relação ao preço de mercado. Também foi possível verificar que, o caso dos títulos prefixados, a primeira metade da vida do papel apresenta maior volatilidade do que na segunda metade, indicando que conforme o vencimento se aproxima os agentes não conseguem identificar oportunidades de retornos acima do esperado.

Os testes de hipóteses para normalidade e estacionariedade rejeitaram as respectivas hipóteses nulas, o que já era esperado por se tratar de dados financeiros. A não estacionariedade da série pode ser atribuída à forma de mensuração do retorno do investidor, que leva em conta o *spread*. É este *spread* que faz com que o retorno do investidor aqui definido seja menor do que o retorno tradicional (medido apenas pela série do preço de compra).

Ressaltamos que a modelagem em si para a volatilidade dos retornos se configurará como tema para uma evolução deste trabalho ou mesmo para um novo estudo no futuro, pois o tempo que seria necessário para enquadrar esta análise seria superior ao tempo para conclusão da análise aqui realizada.

Em projetos futuros, pretende-se atingir uma gama maior de títulos públicos, não vencidos, para que seja possível a realização de projeções para os retornos, com o acompanhamento dos preços dos títulos, e, desta forma, se estruturar novas estratégias para operação no Tesouro Direto no dia a dia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

ALVES, C. A. M.; Modelos de volatilidade estocástica para o índice IBOVESPA. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Rio de Janeiro, 2008.

BOLLERSLEV, T.. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, *Journal of Econometrics* n. 31, p. 307-327, 1986.

BOX, G. E.; JENKINS, G. M.; *Time series analysis: forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day, 1970.

BUENO, Rodrigo De Losso da Silveira. *Econometria de séries temporais*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

CHATFIELD, C. *The Analysis of Time Series*. New York: Chapman & Hall/CRC, 1984. 282 p.

CURTO, J. J. Dias. **Distribuição de Pareto estáveis: aplicação aos índices PSI20, DAX e DJIA**. In: *Temas em métodos quantitativos*. Lisboa: Ed. Silabo, 2002.

DAMODARAN, Aswath. **Avaliação de investimentos: ferramentas e técnicas para determinação do valor de qualquer ativo**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2006.

DANIELSSON, Jon; DE VRIES, Casper G. *Tail index and quantile estimation with very high frequency data*. *Journal of Empirical Finance*, Londres, v. 4, n. 2-3, p. 241-257, Jun. 1997.

DARIO, A. D. G. **Apreçamento de ativos baseados em volatilidade: swaps de volatilidade-variância em um modelo de Heston**. Resenha da BM&F, São Paulo, n. 164, 2004.

DE VRIES, C. G.; HOLS, M. C. A. B. *The limiting distribution of extremal exchange rate returns*. *Journal of Applied Econometrics*, Los Angeles, v. 6, n. 3, p. 287-302, Set. 1991.

DUQUE, O. M. L. **Uma breve análise do movimento browniano**. Tese (Pós-Graduação em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo. Espírito Santo, 2014.

ENGLE, R. F. *Autorregressive conditional heterocedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation*. *Econometrica*. Vol. 50, No 4 (Jul. 1982), pp 987-1008.

ETHIER, S.; KURTZ, T. *Markov processes: characterization and convergence*. Wiley, 1986. (Wiley series in probability and mathematical statistics. Probability and mathematical statistics). Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=BAWnAAAAIAAJ>>

FAMA, Eugene F. *The behaviour of stock prices*. *Journal of Business*, Chicago, v. 38 n. 1, p. 34-105, Jan. 1965.

FAMA, Eugene F. *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. *The Journal of Finance*, 1970.

FERNANDES, M.; MOTA, B. S. Desempenho dos Estimadores de Volatilidade da Bolsa de Valores de São Paulo. *Revista Brasileira de Economia*. Rio de Janeiro. Jul/Set 2004. pp 429-448.

HULL, J. **Fundamentos dos mercados futuros e de opções**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros BM&F, 2005.

GIAMBIAGI, F.; ALÉM, A. C. **Finanças Públicas: Teoria e Prática no Brasil**. 11^a edição, Ed. Elsevier, 2011.

KARATZAS, I.; SHREVE, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer New York, 1991.

LÉVY, Pierre. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris: Gauthier-Villars, 1937.

MCLEORD, A. I.; LI, W. K. **Diagnostic checking arma time series models using square residual autocorrelations.** Journal os Time Series Analysis, New Jersey, v. 4, p. 269-273, 1983.

MORETTIN, P. A; TOLOI, C. **Análise de Séries Temporais.** Ed. Edgard Blucher, 2ª edição, 2006.

MUSGRAVE, R.; MUSGRAVE, P. B. **Finanças Públicas - Teoria e Prática.** São Paulo: Editora Campus - Editora da Universidade de São Paulo, 1980.

MÖRTERS, P.; PERES, Y. **Brownian Motion.** Cambridge University Press, 2010. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics).

NELSON, D. B. **Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach.** Econometria, 1991.

STIGLITZ, J. **Economics of Public Sector.** Norton&Company, Londres, 1986.