



PROJETO DE GRADUAÇÃO II

Estudo da Deformação Plástica Progressiva em Metais

Por

Stefan Wiggers Viggiano

Brasília, 02 de dezembro de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

Estudo da Deformação Plástica Progressiva em Metais

Por

Stefan Wiggers Viggiano

Relatório submetido como requisito parcial
para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Edgar Nobuo Mamiya
Universidade de Brasília
Orientador

Prof. Fábio Comes de Castro
Universidade de Brasília

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira
Universidade de Brasília

Brasília
02 de dezembro de 2020

Agradecimentos

Aos meus amigos pelo companheirismo e momentos vividos. À minha família pelo apoio e bons ensinamentos. E ao Prof. Edgar Mamiya, cujo conhecimento e rigorosidade no ensino foram a minha melhor experiência acadêmica.

Resumo

Este trabalho analisa os modelos de Prager, Armstrong-Frederick, Chaboche, Ohno-Wang e Jiang (simplificado) para plasticidade cíclica. Em especial o fenômeno da deformação plástica progressiva, ou *ratchetting*, é considerado. Utilizando dados experimentais produzidos por Chen (2005) para o aço JIS S45C, foi considerada a capacidade do modelo de Jiang de prever carregamentos completamente reversos e carregamentos com tensão média. Para os carregamentos completamente reversos e o carregamento uniaxial com tensão média o modelo foi capaz de prever os resultados experimentais. Para os carregamentos axial-torsionais com presença de tensão média, no entanto, o modelo de Jiang (simplificado) apresentou dificuldade na modelagem dos experimentos.

Palavras-chave: Plasticidade cíclica. Deformação plástica progressiva. *Ratchetting*.

Abstract

This work describes the models developed by Prager, Armstrong-Frederick, Chaboche, Ohno-Wang and Jiang (simplified) for cyclic plasticity. Particularly the ratchetting phenomenon is considered. By means of experimental data produced by Chen (2005), the ability of the Jiang model to predict completely reversed loadings and loadings with means stresses was assessed. The model was able to represent the experimental data for the completely reversed loadings and for the uniaxial loading with mean stress. The multiaxial loadings, however, presented a problem for the modelling of the results.

Keywords: Cyclic plasticity. Ratchetting.

Lista de figuras

Figura 1 – Comportamento elasto-plástico cíclico com controle por deformação do alumínio 2024-T4. (DOWLING, 2013).	2
Figura 2 – Acumulação de deformação observada em carregamentos com tensão média não nula.	7
Figura 3 – Representação da acumulação de deformação por meio de um gráfico $\varepsilon^r \times N$	8
Figura 4 – Comportamento uniaxial do modelo de Prager.	10
Figura 5 – Comportamento unidimensional do modelo de Armstrong e Frederick.	10
Figura 6 – Comportamento unidimensional do modelo de Chaboche em um carregamento controlado por deformação.	12
Figura 7 – Comportamento unidimensional do modelo de Ohno-Wang.	13
Figura 8 – Comportamento unidimensional do modelo de Jiang.	14
Figura 9 – Mínimo efeito do parâmetro χ no modelo de Jiang para carregamentos completamente reversos.	23
Figura 10 – Comparação entre os modelos de Chaboche, Ohno-Wang e Jiang para os mesmos parâmetros r e c	23
Figura 11 – Geometria utilizada nos ensaios considerados. (CHEN, 2005).	35
Figura 12 – Casos 8-11 dos carregamentos multiaxiais considerados.	37
Figura 13 – Casos 12-15 dos carregamentos multiaxiais considerados.	38
Figura 14 – Simulação do modelo de Jiang para três ciclos com tensão axial simples completamente reversa.	40
Figura 15 – Simulação do modelo de Jiang para três ciclos com tensão cisalhante simples completamente reversa.	40
Figura 16 – Determinação do parâmetro χ por meio de ensaio uniaxial com presença de tensão média.	41
Figura 17 – Comportamento do modelo de Jiang para o ensaio uniaxial com <i>ratchetting</i>	42
Figura 18 – Comportamento do modelo de Jiang para o ensaio uniaxial com <i>ratchetting</i>	42
Figura 19 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 8.	44
Figura 20 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 8.	44
Figura 21 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 9.	45

Figura 22 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 9.	45
Figura 23 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 10. .	46
Figura 24 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 10.	47
Figura 25 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 11. .	48
Figura 26 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 11.	48
Figura 27 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 12. .	50
Figura 28 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 12.	51
Figura 29 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 13. .	52
Figura 30 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 13.	52
Figura 31 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 12.	53
Figura 32 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 13.	53
Figura 33 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 14. .	54
Figura 34 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 14.	54
Figura 35 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 15. .	55
Figura 36 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 15.	56
Figura 37 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 14.	57
Figura 38 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 15.	57

Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades monotônicas do aço JIS S45C.	35
Tabela 2 – Ensaio completamente reversos.	36
Tabela 3 – Ensaio com presença de tensão média.	36
Tabela 4 – Parâmetros materiais utilizados.	36
Tabela 5 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 8.	43
Tabela 6 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 9.	46
Tabela 7 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 10.	47
Tabela 8 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 11.	49
Tabela 9 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 12.	50
Tabela 10 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 13.	51
Tabela 11 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 14.	55
Tabela 12 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 15.	56

Lista de símbolos

α	Centro do domínio elástico
c	Parâmetro material dos modelos com termo de recuperação
$d\gamma$	Multiplicador plástico
$\Delta\gamma$	Incremento do multiplicador plástico
E	Módulo de elasticidade
\mathbb{E}	Domínio elástico
\mathbf{e}	Deformação desviadora
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Deformação
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Deformação elástica
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Deformação plástica
$\boldsymbol{\varepsilon}^r$	Deformação axial acumulada
f	Função de Mises caracterizadora da posição da tensão no domínio elástico
G	Módulo de elasticidade em cisalhamento
$\boldsymbol{\gamma}^r$	Deformação cisalhante acumulada
H	Parâmetro material do modelo de Prager
\mathbf{I}	Tensor identidade
(i)	Índice de i -ésimo termo presente nos modelos com decomposição aditiva do <i>backstress</i>

\mathbf{L}	Direção do tensor $\boldsymbol{\alpha}$
λ	Parâmetro de Lamé
μ	Parâmetro de Lamé
N	Número do ciclo de carregamento
\mathbf{N}	Normal exterior ao domínio elástico
ν	Coefficiente de Poisson
\mathbf{O}	Tensor nulo
dp	Norma do tensor deformação
r	Parâmetro material dos modelos com termo de recuperação
\mathbf{S}	Tensão desviadora
σ	Tensão
σ_u	Tensão última
σ_Y	Tensão de escoamento
$\text{tr}()$	Traço de um tensor
$trial$	Indicador de estado tentativo
τ_Y	Tensão de escoamento em cisalhamento simples
$\ \mathbf{U}\ $	Norma do tensor \mathbf{U}
\mathbf{U}^T	Transposto do tensor \mathbf{U}
χ	Parâmetro material dos modelos de Ohno-Wang e Jiang
W	Fator multiplicativo do termo de recuperação
$\langle \rangle$	Colchetes de MacCauley
\star	Indicador de comportamento axial simples
\diamond	Indicador de comportamento cisalhante simples

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivo	3
1.2	Organização	3
	2 DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS	4
2.1	Relação tensão-deformação elástica	4
2.2	Domínio elástico	4
2.3	Encruamento	5
2.4	Multiplicador plástico	6
2.5	Condições de complementaridade e de persistência	6
2.6	<i>Ratchetting</i>	7
	3 LEIS DE ENCRUAMENTO	9
3.1	Prager	9
3.2	Armstrong-Frederick	9
3.3	Chaboche	11
3.4	Ohno-Wang	12
3.5	Jiang	13
3.6	Leis de encruamento unidimensionais	15
3.6.1	Tensão axial simples	15
3.6.2	Cisalhamento simples	18
	4 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS MATERIAIS	21
4.1	Prager	21
4.2	Armstrong-Frederick	21
4.3	Chaboche, Ohno-Wang e Jiang	22
4.3.1	Método I para determinação de r e c	24
4.3.2	Método II para determinação de r e c	24
4.3.3	Determinação de χ	25
	5 ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO	26
5.1	Método de Euler implícito	26

5.2	Método de Newton-Raphson	27
5.2.1	Funções escalares	27
5.2.2	Funções vetoriais	27
5.3	Algoritmo de Integração	28
5.3.1	Carregamentos controlados por deformação	29
5.3.2	Carregamentos com componentes de tensão prescrita	33
	 6 METODOLOGIA	 35
6.1	Material e experimentos	35
6.2	Parâmetros materiais	36
6.3	Implementação computacional e simulações	37
	 7 RESULTADOS E DISCUSSÃO	 39
7.1	Ensaio completamente reversos	39
7.2	Ensaio uniaxial com tensão média	39
7.3	Ensaio multiaxiais	42
7.3.1	Ensaio 8	43
7.3.2	Ensaio 9	44
7.3.3	Ensaio 10	46
7.3.4	Ensaio 11	47
7.3.5	Ensaio 12 e 13	50
7.3.6	Ensaio 14 e 15	53
7.3.7	Análise dos ensaios multiaxiais	58
	 8 CONCLUSÃO E ESTUDOS FUTUROS	 59
8.1	Estudos futuros	60
	 REFERÊNCIAS	 61

1 Introdução

A previsão de vida à fadiga de componentes submetidos a carregamentos cíclicos exige a descrição do comportamento do material em diversos contextos. Em situações onde há presença de deformação plástica a previsão da relação tensão-deformação é fundamental. Observa-se nesses casos não linearidade durante o encruamento e presença de ciclos de histerese, como representado na Fig. 1, que mostra o comportamento elasto-plástico cíclico do alumínio 2024-T4 em um carregamento controlado por deformação. Diversas dificuldades na modelagem surgem em tais condições devido ao endurecimento, amolecimento, visco-plasticidade, *ratchetting* e outros fenômenos.

No contexto do comportamento elasto-plástico cíclico diversos modelos podem ser utilizados para a representação da relação tensão-deformação. Os modelos de Prager (1949) e Armstrong e Frederick (1966) servem como base, propondo leis de encruamento capazes de representar apenas de forma genérica os resultados experimentais. O modelo de Prager apresenta uma lei de encruamento linear sendo, em desacordo com experimentos, incapaz de estabelecer um limite para as tensões. Além disso a deformação plástica progressiva, ou *ratchetting*, não é prevista pelo modelo de Prager. Tal fenômeno ocorre em carregamentos cíclicos com presença de tensão média, onde observa-se acumulação da deformação plástica ao longo de muitos ciclos de carregamento. O modelo de Armstrong-Frederick (A-F), por sua vez, apresenta encruamento não linear, em maior concordância com a maioria dos metais, e é capaz de prever o *ratchetting*. Apesar disso o modelo de A-F apresenta dificuldades na caracterização da variedade de materiais e fenômenos existentes, por exemplo prevendo acumulação de deformação plástica muito maior do que a observada em experimentos.

A tentativa de desenvolver leis de encruamento mais gerais levou ao modelo de Chaboche (1979), cujas equações constitutivas baseiam-se no modelo de Armstrong-Frederick. O principal progresso desenvolvido por Chaboche é a decomposição aditiva do encruamento em termos que evoluem na forma de A-F. Como consequência a ampla gama

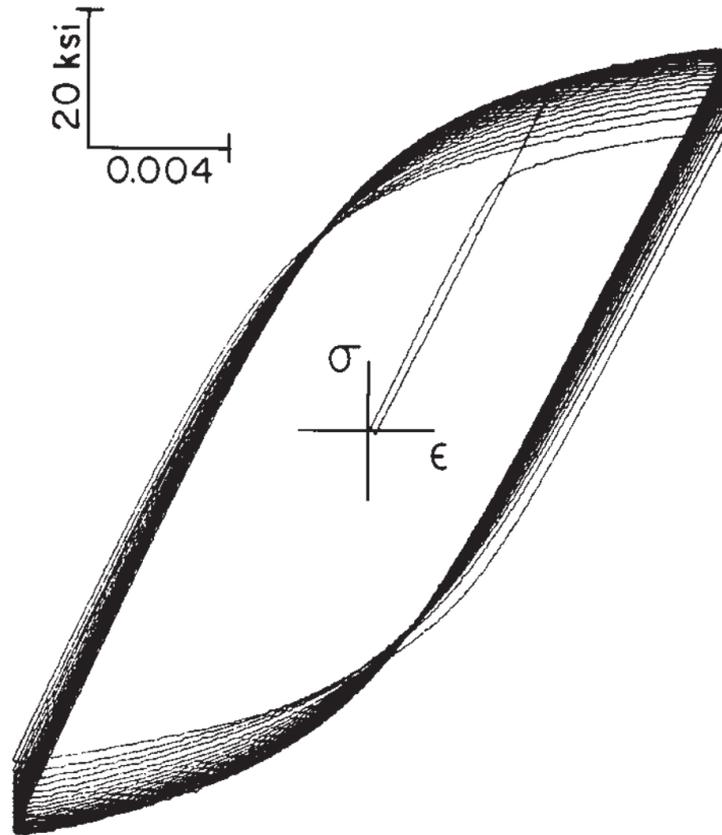


Figura 1 – Comportamento elasto-plástico cíclico com controle por deformação do alumínio 2024-T4. (DOWLING, 2013).

de metais existentes pode ser melhor representada. Ainda assim este modelo apresenta incapacidade na modelagem de carregamentos complexos. Assim como no modelo de A-F, o *ratchetting* e carregamentos não proporcionais ainda exigem melhor desenvolvimento das leis de encruamento.

Dessa forma Ohno e Wang (1993) e Jiang e Sehitoglu (1996) propuseram adaptações do modelo de Chaboche. Os dois modelos contêm parâmetros capazes de controlar com mais precisão o encruamento, e em situações com presença de tensão média observa-se que a previsão de acumulação de deformação plástica está em melhor acordo com os resultados experimentais. Para carregamentos não proporcionais, por sua vez, os modelos de Ohno-Wang e Jiang também são melhor capazes de prever a direção e quantidade do *ratchetting*.

1.1 Objetivo

O objetivos deste trabalho são:

- Estudar os modelos de Prager, Armstrong-Frederick, Chaboche, Ohno-Wang e Jiang (simplificado) para plasticidade cíclica em contexto multiaxial, considerado em especial o fenômeno da deformação plástica progressiva, ou *ratchetting*, que ocorre em carregamentos cíclicos com presença de tensão média.
- Analisar a capacidade do modelo de Jiang (simplificado) para representar o cortamento elasto-plástico cíclico do aço JIS S45C em carregamentos unidimensionais completamente reversos, com tensão média e carregamentos axial-torsionais com tensão média.

1.2 Organização

Este relatório contém primeiramente uma revisão dos conceitos fundamentais necessários para a descrição do comportamento elasto-plástico cíclico. Em seguida as leis de encruamento para os modelos de Prager, Armstrong-Frederick, Chaboche, Ohno-Wang e Jiang são apresentadas. A determinação dos parâmetros materiais para cada modelo é considerada para ensaios uniaxiais no capítulo seguinte. Subsequentemente o algoritmo de integração é considerado, onde descrevem-se os métodos de Euler implícito para integração numérica e o método de Newton-Raphson para determinação de zeros de funções. A metodologia utilizada no estudo dos modelos considerados é apresentada, seguida dos resultados e discussão. Por fim é feita a conclusão.

2 Definições Fundamentais

A descrição do comportamento elasto-plástico baseia-se em algumas definições fundamentais, que são introduzidos neste capítulo. Como uma referência mais aprofundada pode ser consultado o livro de Lemaitre e Chaboche (1990).

2.1 Relação tensão-deformação elástica

Pequenas deformações são consideradas, e o tensor deformação pode ser decomposto em uma parcela elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e uma parcela plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, de acordo com:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (2.1)$$

Em materiais isotrópicos a deformação elástica é relacionada ao tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ por meio da relação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (2.2)$$

onde λ e μ são os parâmetros de Lamé, definidos por meio do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (2.3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.4)$$

2.2 Domínio elástico

O domínio elástico \mathbb{E} é definido como a região no espaço das tensões onde o material apresenta comportamento elástico. Neste trabalho considera-se a descrição do domínio

elástico pela função $f = f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ de Mises:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \leq 0, \quad (2.5)$$

onde σ_Y é a tensão de escoamento, $\boldsymbol{\alpha}$ é o centro do domínio elástico, também chamado de *backstress* e \mathbf{S} é denominada tensão desviadora e definida como:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}. \quad (2.6)$$

A norma $\|\mathbf{U}\|$ de um tensor \mathbf{U} é definida como:

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}, \quad (2.7)$$

onde:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \text{tr}(\mathbf{U}^T \mathbf{V}). \quad (2.8)$$

Observa-se que no interior do domínio elástico, quando $f < 0$, o material apresenta comportamento elástico. No contorno de \mathbb{E} , quando $f = 0$, o material pode apresentar comportamento elástico ou elasto-plástico, dependendo da direção do carregamento. A condição $f \leq 0$ exige que a tensão nunca esteja fora do domínio elástico.

Aplicando a definição de \mathbf{S} , Eq. (2.6), na Eq. (2.2) obtém-se uma relação para a tensão desviadora em função das deformações total e plástica, na forma:

$$\mathbf{S} = 2\mu(\mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (2.9)$$

onde:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}. \quad (2.10)$$

A Eq. (2.9) é válida considerando que $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0$, condição que é atendida em metais, onde observa-se em geral deformação plástica a volume constante.

2.3 Encruamento

O encruamento é caracterizado pela variação na posição e no tamanho do domínio elástico, e ocorre apenas durante a evolução da deformação plástica. A translação do domínio elástico é denominada de encruamento cinemático, enquanto a variação no tamanho do domínio elástico é denominada de encruamento isotrópico. Neste trabalho considera-se apenas a translação do domínio elástico, uma vez que em metais submetidos

a carregamentos cíclicos observa-se predominância do encruamento cinemático em relação ao isotrópico. Tal translação é caracterizada pela evolução do seu centro $\boldsymbol{\alpha}$ e pode tomar variadas formas. A diferença entre os modelos apresentados neste trabalho está na lei de encruamento proposta por cada um.

2.4 Multiplicador plástico

O multiplicador plástico $d\gamma$ é uma quantidade positiva que representa a magnitude da evolução da deformação plástica. De acordo com a noção de normalidade a evolução da deformação plástica ocorre na direção normal exterior ao domínio elástico. No modelo de Mises:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\gamma\mathbf{N}, \quad d\gamma \geq 0, \quad (2.11)$$

onde \mathbf{N} é:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\|}. \quad (2.12)$$

O fato de que $d\gamma \geq 0$ garante que a deformação plástica sempre evolui na direção normal exterior ao domínio elástico.

Definindo a norma da evolução de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ como dp :

$$dp = \|d\boldsymbol{\varepsilon}^p\|, \quad (2.13)$$

e observando que $\|\mathbf{N}\| = 1$, pode-se escrever:

$$dp = d\gamma. \quad (2.14)$$

2.5 Condições de complementaridade e de persistência

O comportamento elasto-plástico também é submetido às condições de complementaridade (Kuhn-Tucker) e de persistência. A condição de complementaridade exige que:

$$d\gamma f = 0, \quad (2.15)$$

enquanto a condição de persistência exige que:

$$d\gamma df = 0. \quad (2.16)$$

Juntas elas garantem que durante a evolução da deformação plástica a tensão permaneça no contorno do domínio elástico, e que a evolução da deformação plástica não ocorra no interior no domínio elástico.

2.6 Ratchetting

O fenômeno do *ratchetting*, também denominado de deformação cíclica progressiva, é observável em carregamentos com presença de tensão média não nula. A Fig. 2 ilustra um exemplo de tal comportamento. Observa-se que ao longo dos ciclos de carregamento ocorre acumulação de deformação. Para deformações axiais e cisalhantes tal acumulação é denominada respectivamente de ε^r e γ^r e definida para um ciclo como:

$$\varepsilon^r = \varepsilon_{max}, \quad (2.17)$$

e

$$\gamma^r = \frac{\gamma_{max}}{\sqrt{3}}. \quad (2.18)$$

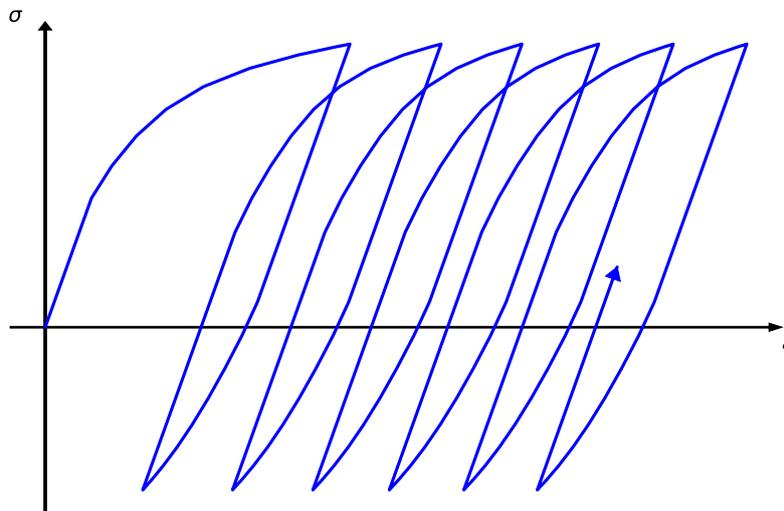


Figura 2 – Acumulação de deformação observada em carregamentos com tensão média não nula.

Uma forma usual de representar a acumulação de deformação é por meio de um gráfico $\varepsilon^r \times N$ ou $\gamma^r \times N$, onde N é o número do ciclo. A Fig. 3 mostra uma exemplificação desse gráfico. Como representado, observa-se em experimentos comportamento não

linear nos primeiros ciclos, seguido de uma estabilização na evolução do *ratchetting* e comportamento linear.

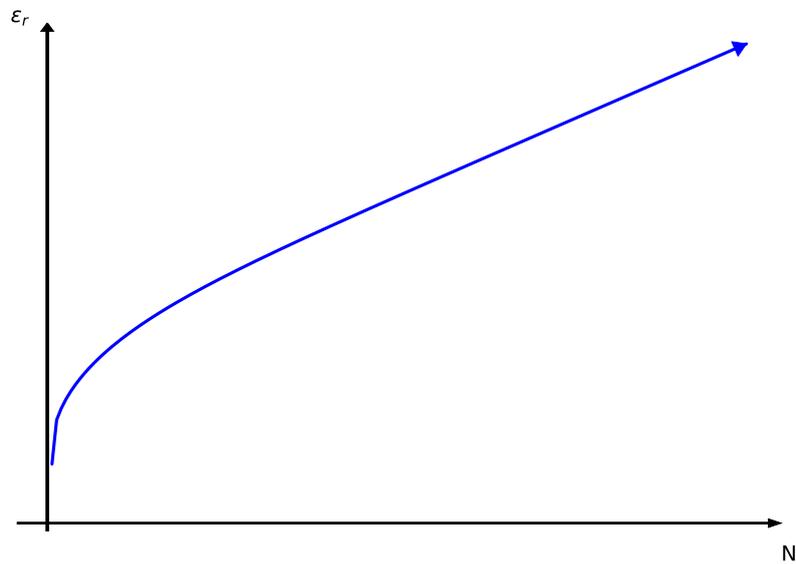


Figura 3 – Representação da acumulação de deformação por meio de um gráfico $\varepsilon^r \times N$.

3 Leis de Encruamento

Os modelos considerados neste trabalho, Prager (1949), Armstrong e Frederick (1966), Chaboche (1979), Ohno e Wang (1993) e Jiang e Sehitoglu (1996) (simplificado), apresentam diferentes leis para evolução do domínio elástico, que são apresentadas neste capítulo.

3.1 Prager

No modelo de Prager a lei de encruamento é definida como:

$$d\boldsymbol{\alpha} = H d\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (3.1)$$

onde H é um parâmetro material. A Fig. 4 mostra o comportamento uniaxial do modelo de Prager em um carregamento completamente reverso controlado por deformação, onde observa-se encruamento linear.

3.2 Armstrong-Frederick

O modelo de Armstrong-Frederick (A-F) considera uma lei de encruamento na forma:

$$d\boldsymbol{\alpha} = c(r\mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha})dp, \quad (3.2)$$

onde c e r são parâmetros materiais. A Fig. 5 mostra o comportamento unidimensional para o modelo de A-F. Observa-se que neste modelo o encruamento é não linear. Tal fato permite ao modelo representar com melhor qualidade o comportamento não linear observado em experimentos.

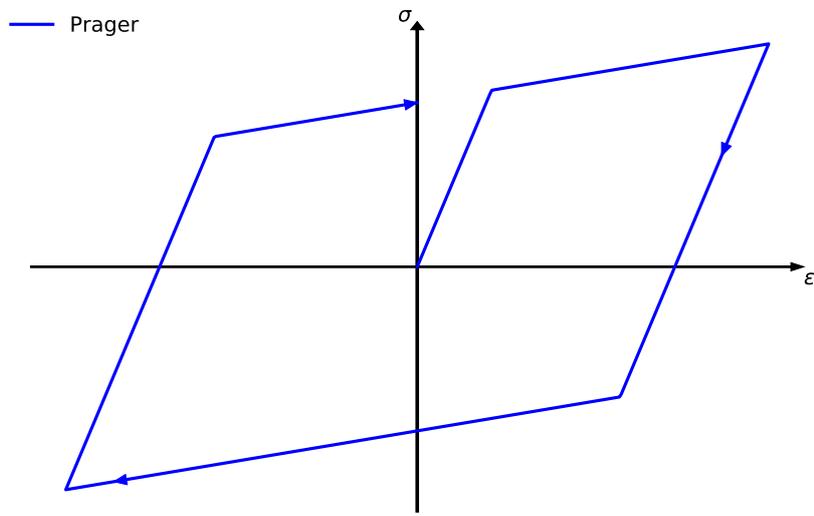


Figura 4 – Comportamento uniaxial do modelo de Prager.

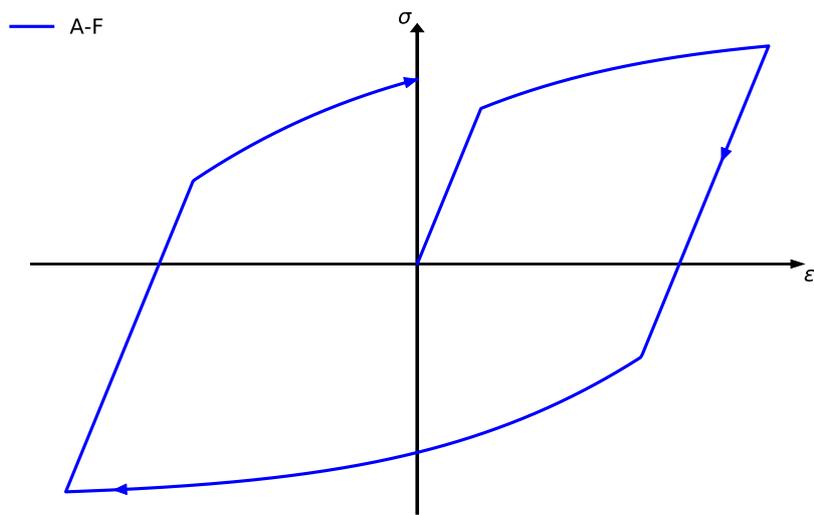


Figura 5 – Comportamento unidimensional do modelo de Armstrong e Frederick.

Nota-se também que enquanto o termo:

$$c r \mathbf{N} dp, \tag{3.3}$$

corresponde ao termo de Prager, com $H = c r$, o termo:

$$c \alpha dp \tag{3.4}$$

presente na Eq. (3.2) é denominado termo de recuperação. Este é responsável pela não linearidade do encruamento, diminuindo o valor de $d\boldsymbol{\alpha}$ à medida que o *backstress* aumenta. Por outro lado, quando:

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = r, \quad (3.5)$$

a evolução de $\boldsymbol{\alpha}$ é:

$$d\boldsymbol{\alpha} = c r(\mathbf{N} - \mathbf{L})dp, \quad (3.6)$$

onde \mathbf{L} representa a direção do tensor $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{L} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}. \quad (3.7)$$

Como $\|\mathbf{N}\| = 1$:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{L} \leq 1, \quad (3.8)$$

e:

$$d\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L} = c r(\mathbf{N} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}) dp. \quad (3.9)$$

Além disso $\|\mathbf{L}\| = 1$ e:

$$d\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L} = c r(\mathbf{N} \cdot \mathbf{L} - 1) dp \leq 0, \quad (3.10)$$

portanto:

$$d\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L} \leq 0, \quad (3.11)$$

o que significa que, quando $\|\boldsymbol{\alpha}\| = r$, a evolução do *backstress* em sua própria direção é não positiva. O parâmetro r se apresenta portanto como um fator limitante de $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ no modelo de A-F.

3.3 Chaboche

O modelo de Chaboche considera uma decomposição do *backstress* em q termos:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=0}^q \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \quad (3.12)$$

onde cada termo $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ evolui de acordo com a lei de encruamento de A-F:

$$d\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = c^{(i)}(r^{(i)}\mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}^{(i)})dp. \quad (3.13)$$

As partes $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ possuem seus parâmetros materiais correspondentes $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$. A principal evolução do modelo de Chaboche em relação ao modelo de A-F é a presença de mais graus de liberdade. Tal propriedade permite a modelagem de uma maior variedade de materiais. A Fig. 6 mostra o comportamento unidimensional do modelo de Chaboche.

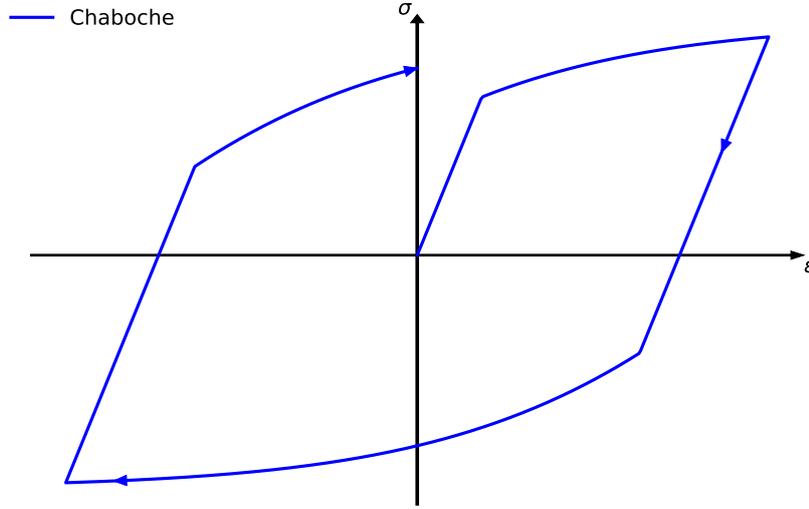


Figura 6 – Comportamento unidimensional do modelo de Chaboche em um carregamento controlado por deformação.

3.4 Ohno-Wang

O modelo de Ohno-Wang faz parte de uma classe mais geral de modelos na qual, além de considerar uma decomposição do *backstress* como no modelo de Chaboche, a lei de encruamento é escrita como:

$$d\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = c^{(i)}(r^{(i)}\mathbf{N} - W^{(i)}\boldsymbol{\alpha}^{(i)})dp. \quad (3.14)$$

O termo $W^{(i)}$ tem a função de controlar o efeito do termo de recuperação. Observa-se que o modelo de Chaboche é escrito nesses termos considerando $W^{(i)} = 1$. O modelo de Ohno-Wang propõe:

$$W^{(i)} = \left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} \langle \mathbf{N} \cdot \mathbf{L}^{(i)} \rangle, \quad (3.15)$$

onde $\chi^{(i)}$ é um parâmetro material, $\mathbf{L}^{(i)}$ é definido como:

$$\mathbf{L}^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{(i)}}{\|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|}, \quad (3.16)$$

e:

$$\langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2}, \quad (3.17)$$

são os colchetes de MacCauley. A Fig. 7 mostra o comportamento unidimensional do modelo de Ohno-Wang.

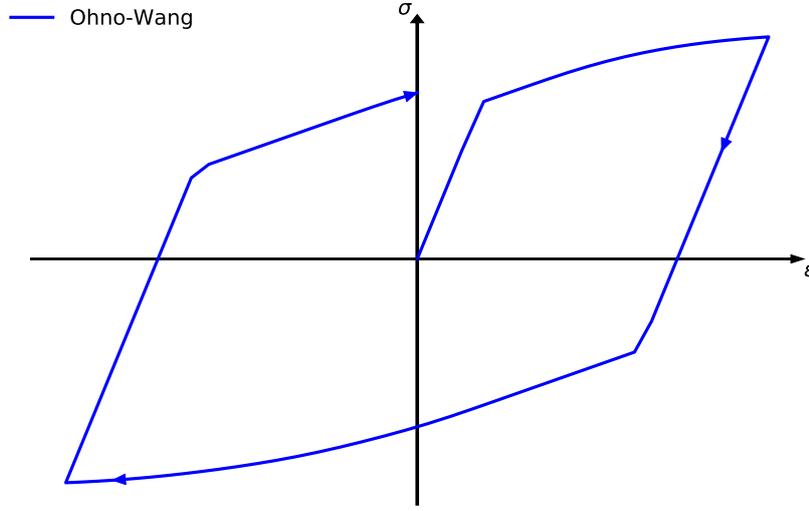


Figura 7 – Comportamento unidimensional do modelo de Ohno-Wang.

3.5 Jiang

Neste relatório é considerada uma versão simplificada do modelo de Jiang, que também considera a decomposição do *backstress* de acordo com a Eq. (3.12) e a lei de encruamento na forma:

$$d\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = c^{(i)}(r^{(i)}\mathbf{N} - W^{(i)}\boldsymbol{\alpha}^{(i)})dp. \quad (3.18)$$

O modelo de Jiang propõe para $W^{(i)}$ no entanto:

$$W^{(i)} = \left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}}. \quad (3.19)$$

A Fig. 8 mostra o comportamento unidimensional dos modelo de Jiang.

Além da lei de encruamento no formato da Eq. (3.18), o modelo de Jiang possui relações capazes de influenciar os parâmetros materiais c , χ e σ_Y . Define-se uma superfície de memória representada pela função g^{R_M} :

$$g^{R_M} = \|\boldsymbol{\alpha}\| - R_M \leq 0, \quad (3.20)$$

em que a variável R_M evolui na forma:

$$dR_M = \mathbb{H}(g^{R_M})\langle \mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \rangle - c_M \left\langle 1 - \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|}{R_M} \right\rangle dp. \quad (3.21)$$

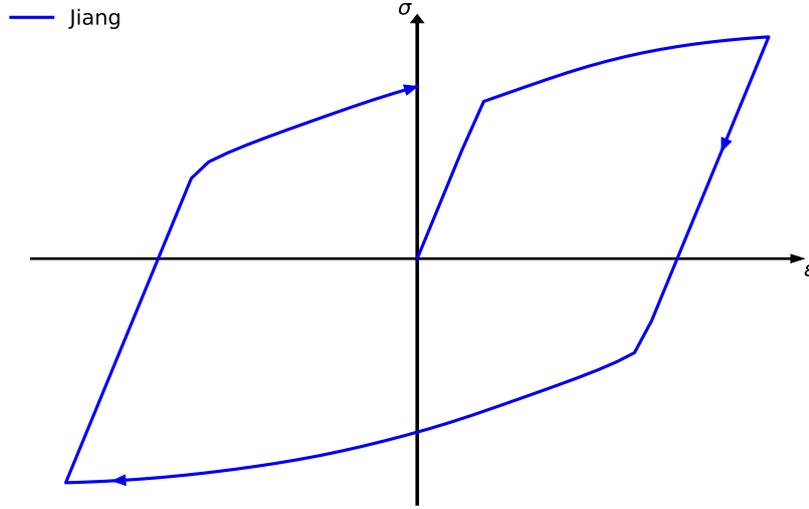


Figura 8 – Comportamento unidimensional do modelo de Jiang.

Na Eq. (3.21) \mathbb{H} é a função de Heaviside:

$$\mathbb{H}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

a quantidade \mathbf{L} é definida como:

$$\mathbf{L} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}, \quad (3.23)$$

e c_M é um parâmetro material. Esta superfície de memória é capaz de representar os últimos ciclos de carregamentos e auxiliar na modelagem de comportamentos transientes. O amolecimento e endurecimento do material é considerado no modelo de Jiang por meio da relação:

$$c^{(i)} = c_0^{(i)} (1 + a_1^{(i)} e^{-b_1^{(i)} p} + a_2^{(i)} e^{-b_2^{(i)} p}), \quad (3.24)$$

com parâmetros materiais $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}$. O efeito da não proporcionalidade no *ratcheting*, por sua vez, é considerado por meio da variação do parâmetro χ :

$$\chi^{(i)} = \chi_0^{(i)} (2 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{L}^{(i)}), \quad (3.25)$$

onde $\chi_0^{(i)}$ pode ser relacionado à superfície de memória:

$$\chi_0^{(i)} = Q^{(i)} (1 + a_x e^{b_x R_M}), \quad (3.26)$$

com $Q^{(i)}, a_x$ e b_x parâmetros materiais. O modelo de Jiang também inclui a variação da tensão de escoamento na forma:

$$\sigma_Y = k_1 (1 + a_k e^{c_k R_m}), \quad (3.27)$$

onde k_1 , a_k e c_k são parâmetros materiais.

De modo a simplificar a implementação do modelo de Jiang, no entanto, as Eq. (3.21), Eq. (3.24), Eq. (3.25) e Eq. (3.27) não foram utilizadas nas simulações apresentadas neste trabalho.

3.6 Leis de encruamento unidimensionais

As leis de encruamento apresentadas podem ser simplificadas para casos de tensões unidimensionais. São apresentados os casos de tensão axial simples e cisalhamento simples.

3.6.1 Tensão axial simples

Para o caso de tração simples a tensão é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

A tensão desviadora \mathbf{S} é portanto:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Assumindo que em seu estado inicial o tensor $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ é desviador a evolução de $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ também é desviadora pois, de acordo com a Eq. (3.14):

$$d\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = c^{(i)}r^{(i)}(\mathbf{N} - W^{(i)}\boldsymbol{\alpha}^{(i)})dp,$$

$d\boldsymbol{\alpha}$ é uma combinação linear de dois tensores desviadores, $\boldsymbol{\alpha}$ e \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}}{\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\|}.$$

Além disso assumindo as componentes iniciais y e z de $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ iguais conclui-se a partir de $S_y = S_z$ que:

$$\alpha_y^{(i)} = \alpha_z^{(i)}, \quad (3.30)$$

$$N_y = N_z. \quad (3.31)$$

Considerando componentes cisalhantes nulas, uma vez que \mathbf{S} não as possui, o tensor $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser escrito portanto como:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Para calcular \mathbf{N} determina-se primeiramente $\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x - \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x + \frac{1}{2}\alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x + \frac{1}{2}\alpha_x \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

e $\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\|$:

$$\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \sigma_x - \frac{3}{2}\alpha_x \right|. \quad (3.34)$$

O tensor \mathbf{N} é portanto:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \sigma_x - \frac{3}{2}\alpha_x \right|} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x - \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x + \frac{1}{2}\alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x + \frac{1}{2}\alpha_x \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

enquanto a função $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ é:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \sigma_x - \frac{3}{2}\alpha_x \right| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y. \quad (3.36)$$

Observa-se também que a evolução da deformação plástica $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é desviadora pela Eq. (2.11):

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\gamma \mathbf{N},$$

e portanto pode ser escrita como:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x^p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}d\varepsilon_x^p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}d\varepsilon_x^p \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

enquanto sua norma dp :

$$dp = \sqrt{\frac{3}{2}} |d\varepsilon_x^p|. \quad (3.38)$$

Selecionando apenas a componente x da lei de encruamento, Eq. (3.14), escreve-se:

$$d\alpha_x^{(i)} = c^{(i)}(r^{(i)}N_x - W^{(i)}\alpha_x^{(i)})dp, \quad (3.39)$$

e substituindo dp e N_x :

$$N_x = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_x - \frac{3}{2}\alpha_x}{|\sigma_x - \frac{3}{2}\alpha_x|} \quad (3.40)$$

obtém-se:

$$d\overset{\star}{\alpha}^{(i)} = \overset{\star}{c}^{(i)} (\overset{\star}{r}^{(i)} \overset{\star}{N} - \overset{\star}{W}^{(i)} \overset{\star}{\alpha}^{(i)}) d\overset{\star}{p}, \quad (3.41)$$

onde:

$$\overset{\star}{\alpha}^{(i)} = \frac{3}{2}\alpha_x, \quad (3.42)$$

$$\overset{\star}{N} = \frac{\sigma_x - \overset{\star}{\alpha}}{|\sigma_x - \overset{\star}{\alpha}|}, \quad (3.43)$$

$$d\overset{\star}{p} = |d\varepsilon_x^p|, \quad (3.44)$$

$$\overset{\star}{c}^{(i)} = \sqrt{\frac{3}{2}}c, \quad (3.45)$$

$$\overset{\star}{r}^{(i)} = \sqrt{\frac{3}{2}}r, \quad (3.46)$$

e $\overset{\star}{W}^{(i)}$ é dependente do modelo. No modelo de Armstrong-Frederick $\overset{\star}{W}^{(i)} = 1$, enquanto no modelo de Ohno-Wang:

$$\overset{\star}{W}^{(i)} = \left(\frac{|\overset{\star}{\alpha}^{(i)}|}{\overset{\star}{r}^{(i)}} \right)^{\overset{\star}{\chi}^{(i)}} \left\langle \overset{\star}{N} \overset{\star}{L}^{(i)} \right\rangle, \quad (3.47)$$

com:

$$\overset{\star}{\chi}^{(i)} = \chi, \quad (3.48)$$

$$\overset{\star}{L}^{(i)} = \frac{\overset{\star}{\alpha}^{(i)}}{|\overset{\star}{\alpha}^{(i)}|}. \quad (3.49)$$

No modelo de Jiang:

$$\overset{\star}{W}^{(i)} = \left(\frac{|\overset{\star}{\alpha}^{(i)}|}{\overset{\star}{r}^{(i)}} \right)^{\overset{\star}{\chi}^{(i)}}. \quad (3.50)$$

Defini-se também uma função $\overset{\star}{f}$:

$$\overset{\star}{f} = |\sigma_x - \overset{\star}{\alpha}| - \sigma_Y \leq 0, \quad (3.51)$$

com:

$$f^* = \sqrt{\frac{3}{2}}f. \quad (3.52)$$

Embora f^* seja uma função diferente de f , pode ser utilizada da mesma maneira na determinação da condição de escoamento. Observa-se em f^* que o raio de escoamento para tensão axial simples é a tensão de escoamento σ_Y , o que explica a existência do fator multiplicativo $\sqrt{2/3}$ na função tridimensional.

Nota-se que no modelo de Prager a lei de encruamento uniaxial é escrita como:

$$d\alpha^* = \dot{H}d\varepsilon_x^p, \quad (3.53)$$

com:

$$\dot{H} = \frac{2}{3}\dot{H}. \quad (3.54)$$

3.6.2 Cisalhamento simples

No caso de cisalhamento simples a tensão é descrita por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

e a tensão desviadora é:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

De fato $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}$.

Pelas mesmas condições impostas a $\boldsymbol{\alpha}$ na descrição das leis de encruamento para tensão axial simples, o *backstress* $\boldsymbol{\alpha}$ é

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{xy} & 0 \\ \alpha_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

e $\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} - \alpha_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} - \alpha_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

e $\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\|$:

$$\|\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{2} |\sigma_{xy} - \alpha_{xy}|. \quad (3.59)$$

O tensor \mathbf{N} é portanto:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2} |\sigma_{xy} - \alpha_{xy}|} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} - \alpha_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} - \alpha_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

enquanto a função $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ é:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{2} |\sigma_{xy} - \alpha_{xy}| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y. \quad (3.61)$$

Descrevendo a evolução da deformação plástica como:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} 0 & d\varepsilon_{xy}^p & 0 \\ d\varepsilon_{xy}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

sua norma dp é:

$$dp = \sqrt{2} |d\varepsilon_{xy}^p|. \quad (3.63)$$

Selecionando apenas a componente xy da lei de encruamento escreve-se portanto:

$$d\alpha_{xy}^{(i)} = c^{(i)} (r^{(i)} N_{xy} - W^{(i)} \alpha_{xy}^{(i)}) dp, \quad (3.64)$$

e substituindo dp e N_{xy} :

$$N_{xy} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma_{xy} - \alpha_{xy}}{|\sigma_{xy} - \alpha_{xy}|} \quad (3.65)$$

obtem-se:

$$d\dot{\alpha}^{(i)} = \dot{c}^{(i)} (\dot{r}^{(i)} \dot{N} - \dot{W}^{(i)} \dot{\alpha}^{(i)}) d\dot{p}, \quad (3.66)$$

onde:

$$\dot{\alpha}^{(i)} = \alpha_{xy}, \quad (3.67)$$

$$\dot{N} = \frac{\sigma_{xy} - \dot{\alpha}}{|\sigma_{xy} - \dot{\alpha}|}, \quad (3.68)$$

$$d\dot{p} = |d\varepsilon_{xy}^p|, \quad (3.69)$$

$$\dot{c}^{(i)} = \sqrt{2} c^{(i)}, \quad (3.70)$$

$$\dot{r}^{(i)} = \sqrt{2} r^{(i)}, \quad (3.71)$$

e $\dot{W}^{(i)}$ é dependente do modelo. No modelo de Chaboche $\dot{W}^{(i)} = 1$, enquanto no modelo de Ohno-Wang:

$$\dot{W}^{(i)} = \left(\frac{|\dot{\alpha}^{(i)}|}{\dot{r}^{(i)}} \right)^{\dot{\chi}^{(i)}} \langle \dot{N} \dot{L}^{(i)} \rangle, \quad (3.72)$$

com:

$$\dot{\chi}^{(i)} = \chi^{(i)}, \quad (3.73)$$

$$\dot{L}^{(i)} = \frac{\dot{\alpha}^{(i)}}{|\dot{\alpha}^{(i)}|}. \quad (3.74)$$

No modelo de Jiang:

$$\dot{W}^{(i)} = \left(\frac{|\dot{\alpha}^{(i)}|}{\dot{r}^{(i)}} \right)^{\dot{\chi}^{(i)}}. \quad (3.75)$$

Defini-se também a função \dot{f} :

$$\dot{f} = |\sigma_{xy} - \dot{\alpha}| - \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_Y \leq 0, \quad (3.76)$$

com:

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{2}}{2} f. \quad (3.77)$$

A função \dot{f} pode ser utilizada como condição de escoamento para o caso de cisalhamento simples. Para o modelo de Prager a lei de encruamento é escrita como:

$$d\dot{\alpha} = \dot{H} d\varepsilon_{xy}^p, \quad (3.78)$$

com:

$$\dot{H} = 2H. \quad (3.79)$$

Nota-se a relação entre o raio de escoamento em cisalhamento simples τ_Y e a tensão de escoamento em tração simples:

$$\tau_Y = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_Y, \quad (3.80)$$

consistente com a teoria de Mises.

4 Determinação dos parâmetros materiais

Os métodos para determinação dos parâmetros materiais de cada modelo são descritos neste capítulo. Todos os métodos consideram um conjunto de ensaios uniaxiais completamente reversos e controlados por deformação. Além disso os modelos de Ohno-Wang e Jiang fazem uso de um ensaio uniaxial com *ratchetting*.

4.1 Prager

Considerando o conjunto de ensaios completamente reversos disponíveis denominam-se σ_a e ε_a^p as amplitudes de tensão e de deformação plástica, respectivamente. Considera-se a integração da lei de encruamento uniaxial de Prager entre os pontos de deformação plástica mínima e máxima. Para um ciclo escreve-se:

$$\sigma_a = \overset{\star}{H} \varepsilon_a^p + \sigma_Y. \quad (4.1)$$

A Eq. (4.1) pode ser utilizada em um ajuste linear dos parâmetros $\overset{\star}{H}$ e σ_Y . Alternativamente é possível prescrever o valor de σ_Y e realizar o ajuste apenas de $\overset{\star}{H}$. Nota-se que para determinar o parâmetro tridimensional H utiliza-se a relação:

$$H = \frac{3}{2} \overset{\star}{H}. \quad (4.2)$$

4.2 Armstrong-Frederick

Da mesma forma que no modelo de Prager a determinação dos parâmetros materiais para o modelo de A-F considera a integração da lei de encruamento uniaxial. A relação

resultante da aplicação de tal integração para as amplitudes de tensão e deformação plástica resulta em:

$$\sigma_a = \overset{\star}{r} \tanh\left(\overset{\star}{c} \varepsilon_a^p\right) + \sigma_Y. \quad (4.3)$$

A Eq. (4.3) pode ser utilizada para fazer um ajuste não linear dos parâmetros materiais $\overset{\star}{r}$ e $\overset{\star}{c}$, incluindo ou não a tensão de escoamento. As relações:

$$c = \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{\star}{c}, \quad (4.4)$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{\star}{r}, \quad (4.5)$$

são válidas para determinação de r e c .

4.3 Chaboche, Ohno-Wang e Jiang

A determinação dos parâmetros r e c para os modelos de Chaboche, Ohno-Wang e Jiang é descrita para dois métodos diferentes. O primeiro considera a integração analítica do modelo de Chaboche, enquanto o segundo considera um caso particular da lei de encruamento de Jiang. Observa-se que os dois métodos podem ser utilizados na determinação dos parâmetros r e c para Chaboche, Ohno-Wang e Jiang. Para justificar tal fato pretende-se demonstrar que em ciclos completamente reversos os três modelos apresentam comportamento similar, e que em tais casos os parâmetros χ têm pouca influência. Nota-se que é usual utilizar o mesmo valor de χ para todos os termos:

$$\chi^{(i)} = \chi, \quad (4.6)$$

de modo a simplificar o processo de determinação deste parâmetro.

Na Fig. 9 observa-se pelo modelo de Jiang simulações uniaxiais com controle de deformação completamente reversa. Para cada amplitude foram considerados três diferentes valores de χ , com parâmetros r e c constantes. Observa-se uma mínima influência da variação de χ no formato dos ciclos e nas amplitudes de tensão. Tal fato é observável também para o modelo de Ohno-Wang. A Fig. 10 por sua vez mostra os modelos de Chaboche, Ohno-Wang e Jiang com parâmetros materiais iguais em todos os modelos, também em ensaios completamente reversos. Na Fig. 10 observa-se por outro lado que em ciclos completamente reversos os modelos de Chaboche, Ohno-Wang e Jiang apresentam comportamento similar. Tais constatações permitem afirmar dois fatos a respeito dos

parâmetros materiais. Primeiramente os parâmetros r e c são intercambiáveis entre os três modelos. Por outro lado o parâmetro χ tem pouca influência nos ciclos completamente alternados controlados por deformação. Tal fato permite realizar a determinação de r e c por meio dos ciclos completamente alternados do material.

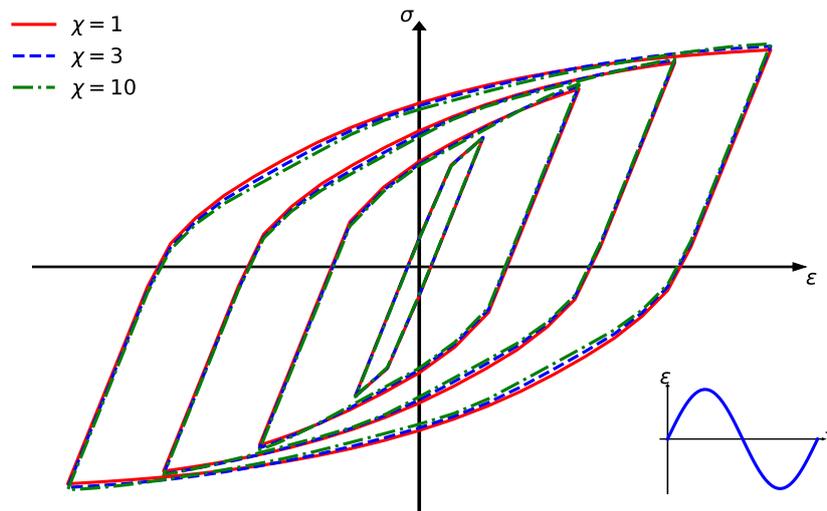


Figura 9 – Mínimo efeito do parâmetro χ no modelo de Jiang para carregamentos completamente reversos.

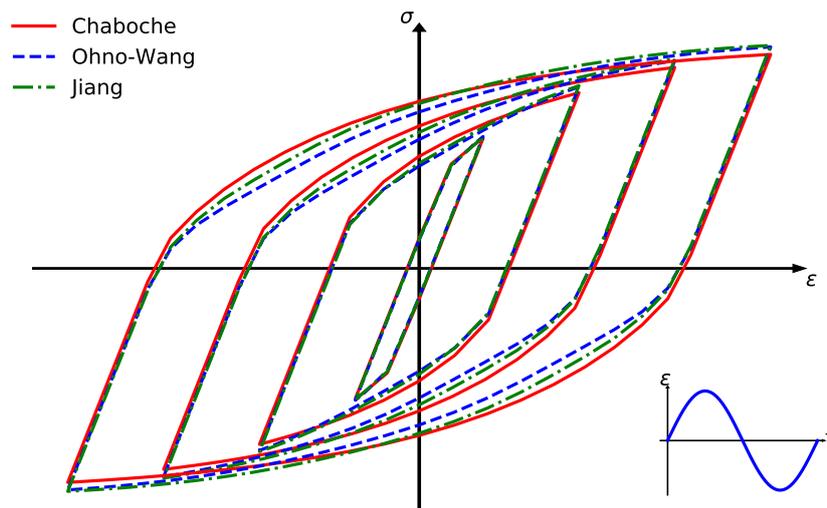


Figura 10 – Comparação entre os modelos de Chaboche, Ohno-Wang e Jiang para os mesmos parâmetros r e c .

4.3.1 Método I para determinação de r e c

Por meio da integração analítica da lei de encruamento de Chaboche aplicada às amplitudes de deformação plástica e de tensão pode-se escrever:

$$\sigma_a = \left[\sum_{i=0}^q r^{*(i)} \tanh \left(\frac{c^{*(i)}}{\varepsilon_a^{p(i)}} \right) \right] + \sigma_Y. \quad (4.7)$$

Esta relação pode ser utilizada em um ajuste não linear pelo método dos quadrados mínimos. A tensão de escoamento pode ou não ser incluída no ajuste.

4.3.2 Método II para determinação de r e c

O Método II considera a lei de encruamento de Jiang no caso especial em que $\chi \rightarrow \infty$. Nessa situação o modelo de Jiang apresenta comportamento linear por partes. Observando novamente que o parâmetro χ apresenta pouco efeito nos ensaios completamente reversos, a determinação dos parâmetros r e c é feita por meio das relações:

$$\frac{c^{*(i)}}{\varepsilon_a^{p(i)}} = \frac{1}{r^{*(i)}}, \quad (4.8)$$

$$r^{*(i)} = \frac{H^{(i)} - H^{(i+1)}}{c^{*(i)}}, \quad (4.9)$$

onde:

$$H^{(1)} = \frac{\sigma_a^1 - \sigma_Y}{\varepsilon_a^{p(1)}}, \quad (4.10)$$

$$H^{(i)} = \frac{\sigma_a^{(i)} - \sigma_a^{(i-1)}}{\varepsilon_a^{p(i)} - \varepsilon_a^{p(i-1)}} \quad (4.11)$$

$$H^{(q+1)} = 0. \quad (4.12)$$

Nota-se que no Método II o número de termos é definido de acordo com o número de ensaios completamente alternados disponíveis para um material. De fato as amplitudes de tensão e de deformação plástica devem ser organizadas de tal forma a obedecer:

$$\varepsilon_a^{p(i)} < \varepsilon_a^{p(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, q - 1, \quad (4.13)$$

onde q é o número de termos.

4.3.3 Determinação de χ

A determinação de $\chi^{(i)}$ para os modelos de Ohno-Wang e Jiang é feita considerando um ensaio uniaxial com presença de tensão média, utilizando-se por simplicidade o mesmo valor de χ para todos os termos. Consideram-se diversas simulações para diferentes χ e representam-se os dados experimentais e as simulações em um gráfico $\varepsilon^r \times N$ (Fig. 3). O valor de χ pode ser determinado graficamente utilizando aquele que melhor representa os resultados.

5 Algoritmo de Integração

A implementação numérica dos modelos apresentados é realizada neste trabalho por meio do uso de dois métodos numéricos: o método de Euler implícito para integração numérica e o método de Newton-Raphson para determinação do zeros de funções. Este capítulo considera primeiramente os dois métodos, e em seguida apresenta o algoritmo de integração utilizado em cada modelo.

5.1 Metodo de Euler implícito

Partindo de um problema de valor inicial na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad (5.1)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (5.2)$$

o método de Euler implícito produz uma sequência de valores y_1, y_2, \dots, y_k que aproximam respectivamente $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_k)$. A determinação de y_{k+1} é feita por:

$$y_{k+1} = y_k + f(y_{k+1}, t_{k+1}). \quad (5.3)$$

Observa-se que, uma vez que o termo y_{k+1} aparece nos dois lados desta equação, nem sempre é possível encontrar uma relação algébrica explícita. Nesses casos pode-se utilizar o método de Newton-Raphson, descrito na próxima seção, para a determinação aproximada de y_{k+1} .

5.2 Método de Newton-Raphson

Esta seção descreve o método de Newton-Raphson para determinação do zero de funções. São consideradas tanto funções escalares quanto funções vetoriais.

5.2.1 Funções escalares

Considera-se uma função g :

$$g = g(x), \quad (5.4)$$

cujo zero \bar{x} é o valor de x que atende:

$$g(\bar{x}) = 0. \quad (5.5)$$

O método de Newton-Raphson é um método iterativo para determinação de valores aproximados de \bar{x} . Partindo de um valor inicial x^0 , escreve-se para cada termo subsequente:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g(x^k)}{g'(x^k)}, \quad k \geq 0, \quad (5.6)$$

onde x^{k+1} é em geral uma aproximação melhor para \bar{x} do que x^k , de acordo com:

$$|x^{k+1} - \bar{x}| < |x^k - \bar{x}|. \quad (5.7)$$

Determinação de $g'(x^k)$ por diferenças finitas

Em certas situações pode ser conveniente calcular a derivada da função g por um método numérico. O método das diferenças finitas propõe:

$$g'(x^k) = \frac{g(x^k + \delta) - g(x^k)}{\delta}, \quad (5.8)$$

onde $|\delta| \ll 1$ é um número pequeno.

5.2.2 Funções vetoriais

Considera-se uma função vetorial \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad (5.9)$$

cujo zero $\bar{\mathbf{x}}$ é o valor de \mathbf{x} que atende:

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Para determinar valores aproximados de $\bar{\mathbf{x}}$ o método de Newton-Raphson considera um valor inicial \mathbf{x}^0 e k iterações na forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{G}(\mathbf{x}^k))(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{G}(\mathbf{x}^k), \quad k \geq 0, \quad (5.11)$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{G})$ é o Jacobiano da função \mathbf{G} . O valor \mathbf{x}^{k+1} é em geral uma aproximação melhor para $\bar{\mathbf{x}}$ do que \mathbf{x}^k , de acordo com:

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\| < \|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}\|. \quad (5.12)$$

Nota-se que a determinação de \mathbf{x}^{k+1} a partir da Eq. (5.11) exige a solução de um sistema linear.

Determinação de $\mathbf{J}(\mathbf{G}(\mathbf{x}^k))$ por diferenças finitas

Nota-se que o método apresentado exige o cálculo do Jacobiano \mathbf{J} . Em situações em que não é possível fazer uma descrição analítica do Jacobiano as derivadas parciais podem ser calculadas por meio de diferenças finitas:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}^k)_v}{\partial x_w^k} = \frac{\mathbf{G}(x_1^k, \dots, x_w^k + \delta, \dots, x_s^k)_v - \mathbf{G}(x_1^k, \dots, x_s^k)_v}{\delta}, \quad (5.13)$$

com:

$$w = 1, 2, \dots, s \quad v = 1, 2, \dots, r, \quad (5.14)$$

onde s é a dimensão de \mathbf{x}^k , r é a dimensão de $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$ e $|\delta| \ll 1$ é um número pequeno.

5.3 Algoritmo de Integração

O algoritmo de integração numérica dos modelos considerados nesse trabalho é apresentado nesta seção e é baseado no algoritmo de integração apresentado por Simo e Hughes (1998). Para carregamentos controlados por deformação faz-se uso apenas do método de Euler implícito. Carregamentos controlados por tensão em uma ou mais componentes, por sua vez, consideram o método de Newton-Raphson para garantir as condições de contorno.

5.3.1 Carregamentos controlados por deformação

Considera-se primeiramente um estado material inicial onde todas as variáveis $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e $\boldsymbol{\alpha}$ são conhecidas. Para um material inicialmente isotrópico considera-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{O}, \quad (5.15)$$

e

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{O}. \quad (5.16)$$

Este estado do material corresponde ao valor inicial necessário para a aplicação do método de Euler. Em um carregamento completamente controlado por deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.17)$$

a deformação no estado $n + 1$ é conhecida, e a determinação do estado material $n + 1$ a partir do estado n consiste em dois passos. No primeiro é utilizado um estado denominado *trial* cuja evolução a partir do estado n apresenta comportamento completamente elástico. Nesse caso:

$$d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{O}, \quad (5.18)$$

e

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{O}. \quad (5.19)$$

A discretização por meio do método de Euler implícito é dada por:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\alpha}_n, \quad (5.20)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \quad (5.21)$$

A tensão no estado *trial* pode ser calculada por meio da Eq. (2.2):

$$\boldsymbol{\sigma}^{trial} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e.$$

Para verificar se o estado *trial* é de fato a solução que atende às equações constitutivas considera-se a admissibilidade desse passo por meio do valor de f_{n+1}^{trial} :

$$f_{n+1}^{trial} = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y. \quad (5.22)$$

Caso $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ o passo é admissível e:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \quad (5.23)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial}, \quad (5.24)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,trial}. \quad (5.25)$$

Caso contrário, $f_{n+1}^{trial} > 0$, o passo é elasto-plástico. Nesse caso ocorre evolução da deformação plástica:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\gamma\mathbf{N}, \quad (5.26)$$

e escreve-se pelo método de Euler implícito:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}. \quad (5.27)$$

As equações para a evolução do *backstress* são diferentes para cada modelo.

Prager

A discretização da lei de encruamento de Prager pelo método de Euler implícito é dada por:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + H\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\alpha}_n + H\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}. \quad (5.28)$$

Por meio da condição de consistência aplicada ao passo $n + 1$ é possível obter:

$$\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^{trial}, \quad (5.29)$$

e

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{2\mu + H}, \quad (5.30)$$

o que permite a determinação de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ por meio das Eq. (5.27) e Eq. (5.28). A tensão $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser determinada por meio das Eq. (2.1) e Eq. (2.2) aplicadas ao ponto $n + 1$.

Armstrong-Frederick

Para o modelo de A-F a discretização pelo método de Euler implícito é:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + c\Delta\gamma(r\mathbf{N}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1}), \quad (5.31)$$

o que fornece juntamente com a condição de consistência:

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}, \quad (5.32)$$

e

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y + 2\mu\Delta\gamma + \frac{\Delta\gamma rc}{1 + c\Delta\gamma} - \|\mathbf{U}\| = 0. \quad (5.33)$$

onde:

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}_n^{trial} - \frac{\boldsymbol{\alpha}^{trial}}{1 + c\Delta\gamma}, \quad (5.34)$$

Observa-se que para determinar $\Delta\gamma$ escreve-se:

$$g(\Delta\gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y + 2\mu\Delta\gamma + \frac{\Delta\gamma rc}{1 + c\Delta\gamma} - \|\mathbf{U}\|, \quad (5.35)$$

e o valor de $\Delta\gamma$ pode ser determinado por meio do método de Newton-Raphson.

Chaboche

Para o modelo de Chaboche a discretização pelo método de Euler implícito é dada para cada termo $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ como:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} = \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + c^{(i)}\Delta\gamma(r^{(i)}\mathbf{N}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}). \quad (5.36)$$

Aplicando a condição de consistência ao ponto $n + 1$ obtém-se as equações para determinação de $\Delta\gamma$ e \mathbf{N}_{n+1} :

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}, \quad (5.37)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \sum_{i=0}^q \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}}{(1 + c^{(i)}\Delta\gamma)}, \quad (5.38)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y + 2\mu\Delta\gamma + \sum_{i=0}^q \frac{\Delta\gamma h^i}{1 + c^i\Delta\gamma} - \|\mathbf{U}\| = 0, \quad (5.39)$$

onde $\Delta\gamma$ pode ser determinado por meio da aplicação do método de Newton-Raphson à função g :

$$g(\Delta\gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y + 2\mu\Delta\gamma + \sum_{i=0}^q \frac{\Delta\gamma h^i}{1 + c^i\Delta\gamma} - \|\mathbf{U}\|. \quad (5.40)$$

Ohno-Wang

No modelo de Ohno-Wang a lei de encruamento é discretizada de acordo com:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta\gamma c^{(i)}(r^{(i)}\mathbf{N}_{n+1} - W_{n+1}^{(i)}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}), \quad (5.41)$$

onde:

$$W_{n+1}^{(i)} = \left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} \langle \mathbf{N}_{n+1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(i)} \rangle, \quad (5.42)$$

e

$$\mathbf{L}_{n+1}^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}}{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}\|}. \quad (5.43)$$

A determinação de $\Delta\gamma$ e \mathbf{N}_{n+1} é feita por meio do método de Newton para funções vetoriais reescrevendo as equações discretizadas como:

$$W_{n+1}^{(i)} - \left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} \langle \mathbf{N}_{n+1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(i)} \rangle = 0, \quad (5.44)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} - \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + \Delta\gamma c^{(i)} r^{(i)} \mathbf{N}_{n+1}}{1 + c^{(i)} \Delta\gamma W_{n+1}^{(i)}} = \mathbf{O}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{N}_{n+1} - \frac{\mathbf{U}_{n+1}}{\|\mathbf{U}_{n+1}\|} = \mathbf{O}, \quad (5.46)$$

e

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y + 2\mu\Delta\gamma + \sum \frac{\Delta\gamma r^{(i)} c^{(i)}}{1 + c^{(i)} \Delta\gamma W_{n+1}^{(i)}} - \|\mathbf{U}\| = 0, \quad (5.47)$$

onde:

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{s}^{trial} - \sum \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}}{(1 + c^{(i)} \Delta\gamma W_{n+1}^{(i)})}. \quad (5.48)$$

Jiang

No modelo de Jiang as equações constitutivas são discretizadas pelo método de Euler implícito de acordo com:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} = \boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + \Delta\gamma c^{(i)}(r^{(i)}\mathbf{N}_{n+1} - W_{n+1}^{(i)}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}), \quad (5.49)$$

onde:

$$W_{n+1}^{(i)} = \left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}}. \quad (5.50)$$

Reescrevem-se então essas equações como:

$$W_{n+1}^{(i)} - \left(\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} = 0, \quad (5.51)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i)} - \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)} + \Delta\gamma c^{(i)} r^{(i)} \mathbf{N}_{n+1}}{1 + c^{(i)} \Delta\gamma W_{n+1}^{(i)}} = \mathbf{O}, \quad (5.52)$$

$$\mathbf{N}_{n+1} - \frac{\mathbf{U}_{n+1}}{\|\mathbf{U}_{n+1}\|} = \mathbf{O}, \quad (5.53)$$

e

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y + 2\mu\Delta\gamma + \sum \frac{\Delta\gamma c^{(i)} r^{(i)}}{1 + c^{(i)} \Delta\gamma W_{n+1}^{(i)}} - \|\mathbf{U}_{n+1}\| = 0, \quad (5.54)$$

onde:

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{S}^{trial} - \sum \frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{(i)}}{(1 + c^{(i)} \Delta\gamma W_{n+1}^{(i)})}. \quad (5.55)$$

O método de Newton-Raphson para funções vetoriais pode ser utilizado para determinar $\Delta\gamma$ e \mathbf{N}_{n+1} .

5.3.2 Carregamentos com componentes de tensão prescrita

Em carregamentos com tensão prescrita em uma ou mais direções utiliza-se o método de Newton-Raphson para funções vetoriais para garantir as condições de contorno. Considera-se um carregamento onde em cada direção apenas a deformação ou a tensão é prescrita.

Numera-se primeiramente as componentes prescritas de deformação e de tensão respectivamente como:

$$\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_m, \quad (5.56)$$

e

$$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_{6-m}, \quad (5.57)$$

e as deformações desconhecidas como:

$$\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_{6-m}. \quad (5.58)$$

Em seguida considera-se uma função vetorial denominada **step** que mapeia as deformações desconhecidas $\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_{6-m}$ às tensões conhecidas $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{6-m}$. Esta função foi definida anteriormente para passos elásticos e elasto-plásticos em todos os modelos considerados, embora nota-se que não se sabe previamente se o passo é elástico ou não. Deseja-se portanto que:

$$\mathbf{step}(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_{6-m}) = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{6-m}). \quad (5.59)$$

Definindo \mathbf{G} como:

$$\mathbf{G}(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_{6-m}) = \mathbf{step}(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_{6-m}) - (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{6-m}) \quad (5.60)$$

pode-se utilizar o método de Newton-Raphson para funções vetoriais para determinar o vetor de deformações que produz o zero de \mathbf{G} . Tal solução pode ser utilizada para aplicar um passo completamente controlado por deformação. Para determinar se a função **step** deve corresponder ao passo elástico ou o passo elasto-plástico considera-se um estado *trial* por meio da função **step** elástica e a sua admissibilidade por meio da condição f_{n+1}^{trial} .

6 Metodologia

6.1 Material e experimentos

Foram considerados dados experimentais produzidos por Chen (2005) para o aço JIS S45C, cujas propriedades mecânicas são mostradas na Tabela 1. Os ensaios foram realizados em corpos de prova com a geometria mostrada na Fig. 11.

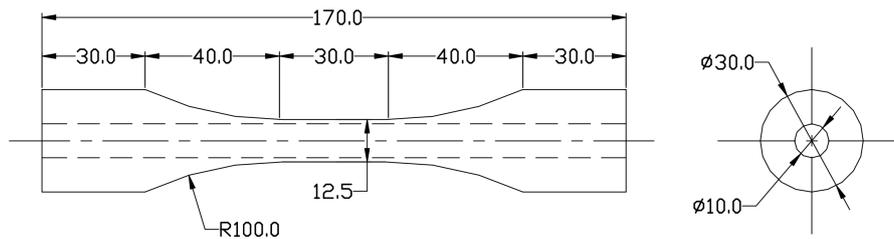


Figura 11 – Geometria utilizada nos ensaios considerados. (CHEN, 2005).

Foram simulados pelo modelo de Jiang (simplificado) quinze experimentos sendo eles: seis ensaios uniaxiais completamente reversos com deformações axiais ou cisalhantes, um ensaio axial simples com tensão média e oito ensaios axial-torsionais com presença de tensão média. Os ensaios completamente reversos tiveram controle por deformação. Os ensaios com tensão média tiveram controle por tensão axial e, nos ensaios axial-torsionais, controle por deformação cisalhante. As Tabelas 2 e 3 descrevem os ensaios, enquanto as Fig. 12 e Fig. 13 mostram os caminhos percorridos nos ensaios multiaxiais.

Tabela 1 – Propriedades monotônicas do aço JIS S45C.

σ_u (MPa)	σ_Y (MPa)	τ_Y (MPa)	E (GPa)	G (GPa)	ν
798	590	320	205	79	0.298

Tabela 2 – Ensaios completamente reversos.

Ensaio	$\varepsilon_a(\%)$	$\gamma_a(\%)$
1	0.50	0
2	0.70	0
3	1.00	0
4	0	0.70
5	0	1.04
6	0	1.56

Tabela 3 – Ensaios com presença de tensão média.

Ensaio	$\sigma_a(MPa)$	$\sigma_m(MPa)$	$\gamma_a(\%)$	$\gamma_m(\%)$
7	370	100	0	0
8	0	100	0.866	0
9	50	50	0.866	0
10	50	50	0.866	0
11	50	50	0.866	0
12	50	50	0.866	0
13	50	50	0.866	0
14	50	100	0.866	0
15	50	100	0.866	0

6.2 Parâmetros materiais

O parâmetros materiais r e c utilizados foram produzidos por Chen (2005) considerando a decomposição aditiva do *backstress* em oito termos. Os métodos para determinação de r e c apresentados na seção 4.3 não foram utilizados por apresentarem resultados inferiores com relação àqueles produzidos por Chen. O parâmetro χ foi considerado igual para todos os termos, e sua determinação foi feita por meio do ensaio axial com tensão média (Ensaio 7). A Tabela 4 mostra as constantes utilizadas nas simulações.

Tabela 4 – Parâmetros materiais utilizados.

termo	1	2	3	4	5	6	7	8
$r(MPa)$	71.8	34.2	24.8	17.3	23.1	25.3	22.6	62.3
c	2041	1020	544	408	272	163	102	68
χ	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8

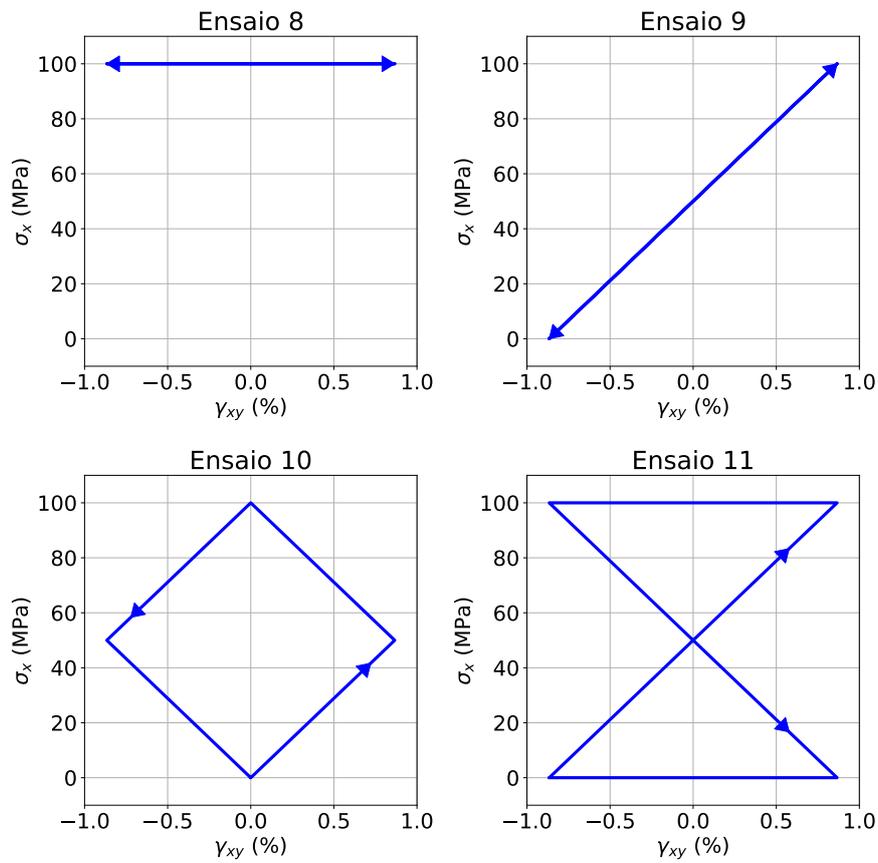


Figura 12 – Casos 8-11 dos carregamentos multiaxiais considerados.

6.3 Implementação computacional e simulações

Os algoritmos para integração numérica foram implementados em linguagem computacional Python 3. O modelo de Jiang (simplificado) foi utilizado nas simulações dos quinze ensaios realizados por Chen.

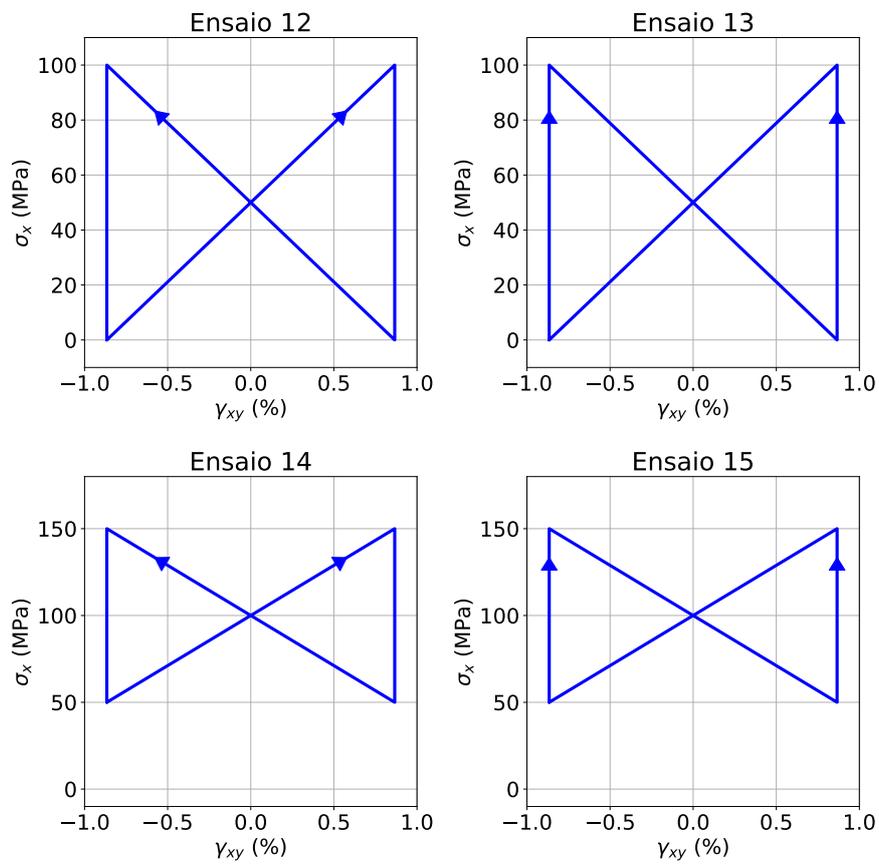


Figura 13 – Casos 12-15 dos carregamentos multiaxiais considerados.

7 Resultados e Discussão

Os quinze ensaios considerados foram simulados pelo modelo de Jiang (simplificado). Este capítulo apresenta a comparação entre as simulações e os resultados experimentais obtidos por Chen (2005). Além disso, simulações pelo modelo de Ohno-Wang realizadas por Chen são também representadas para os ensaios multiaxiais.

7.1 Ensaios completamente reversos

A Fig. 14 mostra as simulações para os ensaios completamente reversos com carregamento axial. Observa-se que de forma geral os carregamentos experimentais foram bem representados, apesar da presença de uma pequena diferença no formato dos ciclos de histerese. Observa-se também a presença de uma leve diferença entre os comportamentos em tração e em compressão: o valor absoluto da tensão máxima em compressão é maior do que a em tração.

Na Fig. 15 observam-se os ciclos completamente reversos em cisalhamento simples. Apesar do ajuste não considerar o comportamento cisalhante as constantes foram capazes de representar de forma consistente os ciclos experimentais desse tipo de carregamento. Nota-se no entanto uma leve diferença entre o comportamento linear elástico simulado e experimental. Tal fato pode ser atribuído a uma anisotropia do material ou à uma evolução contínua da deformação plástica do material.

7.2 Ensaio uniaxial com tensão média

O carregamento uniaxial com tensão média (Ensaio 7) apresenta *ratchetting* e foi utilizado na determinação do parâmetro χ . Foram realizadas simulações com valores

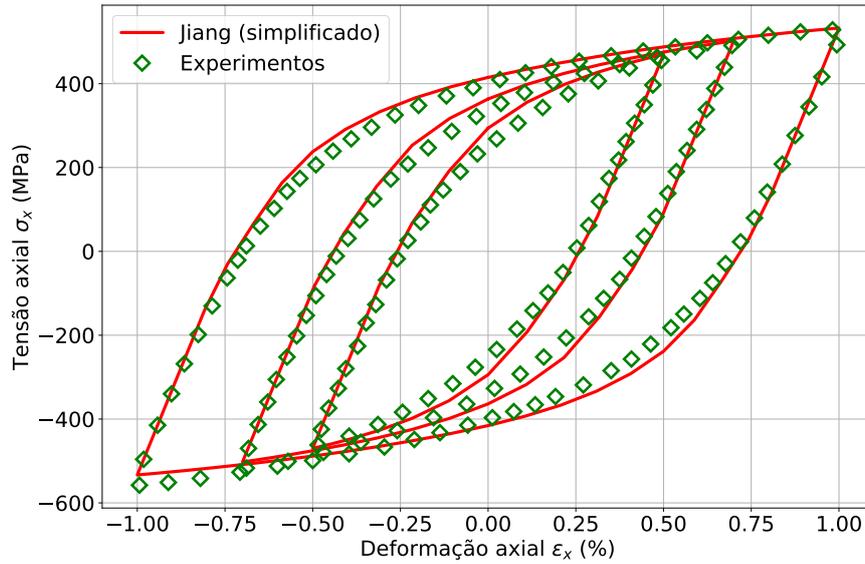


Figura 14 – Simulação do modelo de Jiang para três ciclos com tensão axial simples completamente reversa.

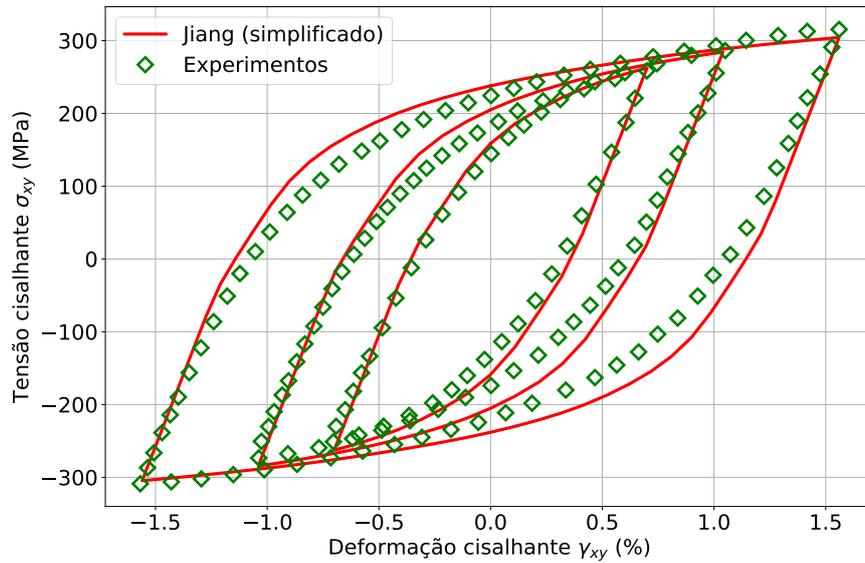


Figura 15 – Simulação do modelo de Jiang para três ciclos com tensão cisalhante simples completamente reversa.

de χ entre 3.7 e 5.3 e selecionado graficamente aquele que melhor prediz a acumulação de deformação experimental. A Fig. 16 mostra os resultados experimentais para ε^r e simulações para três diferentes valores de χ . O valor escolhido para o modelo de Jiang foi $\chi = 4.8$. Observa-se que o aumento de χ provoca a diminuição da acumulação de

deformação plástica. Nota-se também na Fig. 16 que nos primeiros ciclos o comportamento $\varepsilon^r \times N$ é não linear. Para os últimos ciclos, no entanto, a taxa de evolução de ε^r atinge uma estabilização e o comportamento é linear.

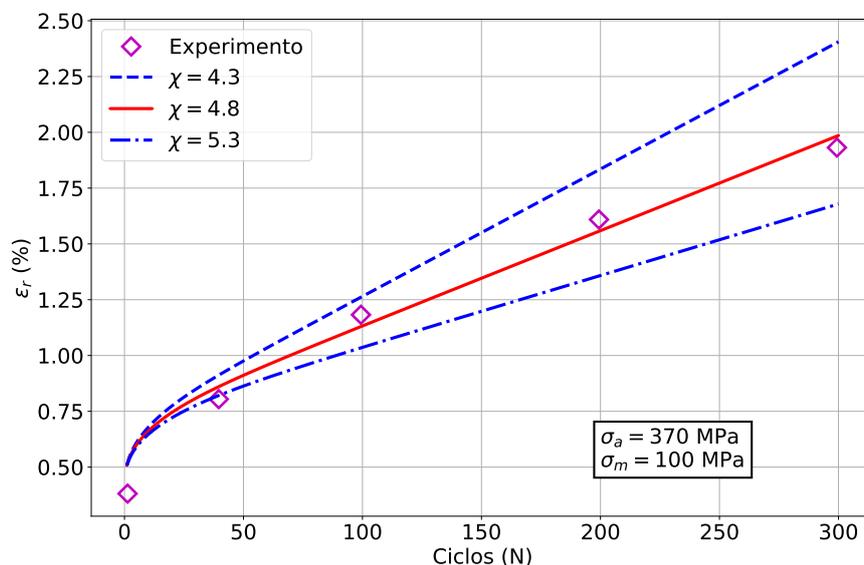


Figura 16 – Determinação do parâmetro χ por meio de ensaio uniaxial com presença de tensão média.

A Fig. 17, por outro lado, mostra os primeiros 50 ciclos do comportamento tensão-deformação axial observado na simulação do Ensaio 7, com $\chi = 4.8$. Devido à ausência dos dados experimentais correspondentes não é possível realizar uma comparação com os experimentos produzidos por Chen. Dessa forma a capacidade do modelo de Jiang de representar os ciclos de histerese do Ensaio 7 é desconhecida: o ajuste do parâmetro χ considera apenas a deformação máxima observada em cada ciclo. É possível, no entanto, observar o não fechamento dos ciclos de histerese que ocorre em carregamentos com tensão média. Tal ausência de fechamento é a responsável pela acumulação de deformação plástica ao longo de muitos ciclos.

É possível também na mesma simulação analisar o comportamento da deformação axial nas direções y e z . A Fig. 18 mostra a acumulação de deformação na direção y . Observa-se que ocorre *ratcheting* no sentido oposto àquele presente na direção x (Fig. 17). A deformação na direção z apresenta o mesmo comportamento. Tal fato é explicado pela condição imposta aos modelos de evolução da deformação plástica a volume constante. Há portanto uma compensação nas direções y e z do *ratcheting* presente na direção x .

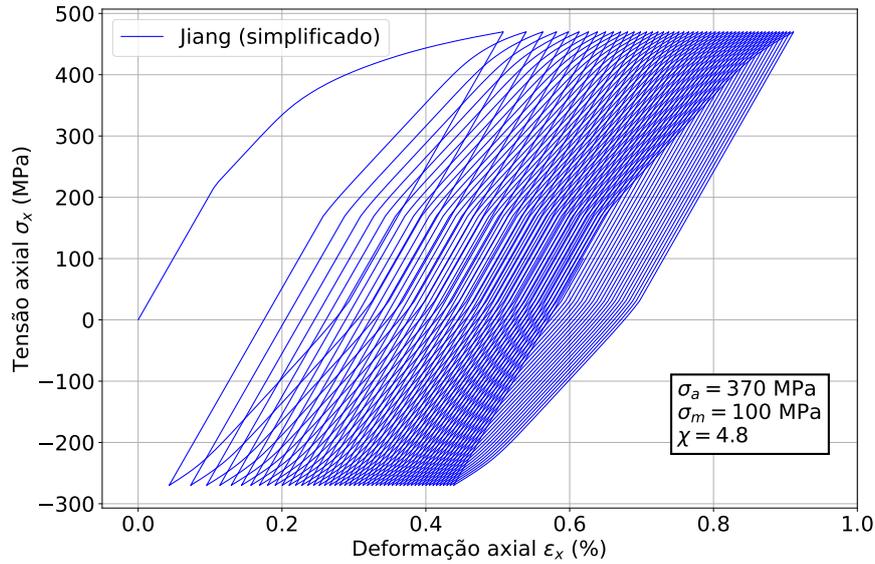


Figura 17 – Comportamento do modelo de Jiang para o ensaio uniaxial com *ratchetting*.

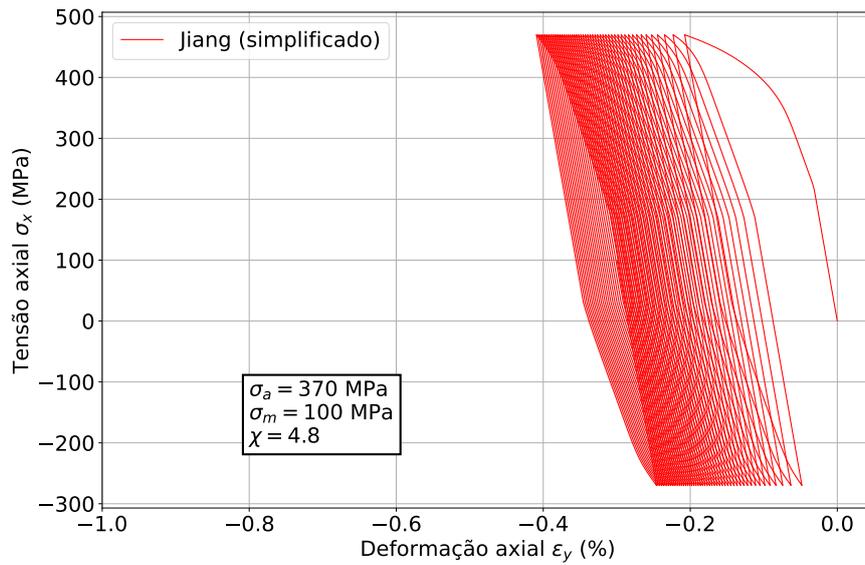


Figura 18 – Comportamento do modelo de Jiang para o ensaio uniaxial com *ratchetting*.

7.3 Ensaios multiaxiais

Foram simulados oito ensaios multiaxiais pelo modelo de Jiang considerando os carregamentos descritos na seção 6.1. As Fig. 19 - Fig. 35 mostram a comparação entre os resultados experimentais e as simulações do modelo de Jiang por meio de gráficos

$\varepsilon^r \times N$. Simulações pelo modelo de Ohno-Wang realizadas por Chen (2005) também foram representadas. De modo a caracterizar a qualidade das simulações o erro apresentado pelos dois modelos em cada ensaio foi apresentado nas Tabelas 5 a 12. O erro é definido em um dado ciclo como:

$$\text{Erro} = \frac{\varepsilon_M^r - \varepsilon_{exp}^r}{\varepsilon_{exp}^r}, \quad (7.1)$$

onde ε_M^r é a deformação acumulada prevista por um modelo e ε_{exp}^r é a deformação acumulada experimental. Nota-se que em alguns casos a quantidade ε_M^r foi extrapolada para os últimos ciclos do carregamento considerando comportamento linear.

7.3.1 Ensaio 8

A Fig. 19 mostra a comparação entre os modelos de Jiang, Ohno-Wang e os resultados experimentais produzidos por Chen para o Ensaio 8. Os modelos apresentaram erros significativos nas previsões: na Tabela 5 observa-se que o modelo de Jiang apresentou erro de 465% para o ciclo de número 150, enquanto o modelo de Ohno-Wang apresentou erro de 240%. Na Fig. 20, por outro lado, representa-se o comportamento tensão-deformação da simulação pelo modelo de Jiang. É possível observar uma simetria do gráfico ao redor do eixo $\sigma_{xy} = 0$ correspondente à simetria observada no carregamento prescrito ao redor do eixo $\gamma_{xy} = 0$. Nota-se que nas ordenadas utiliza-se a tensão cisalhante σ_{xy} ao invés de σ_x . Como o carregamento prescreve σ_x constante não seria possível visualizar os ciclos de histerese de outra maneira.

Tabela 5 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 8.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	2.992	5.618	8.245
	Erro (%)	254	363	465
Ohno-Wang	ε^r (%)	2.027	3.486	4.960
	Erro (%)	140	187	240
Experimento	ε^r (%)	0.843	1.212	1.458

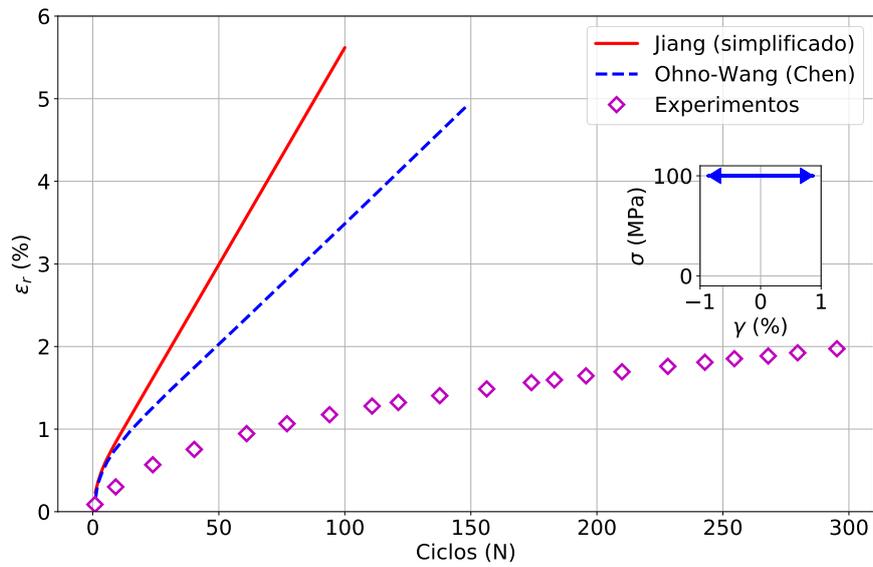


Figura 19 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 8.

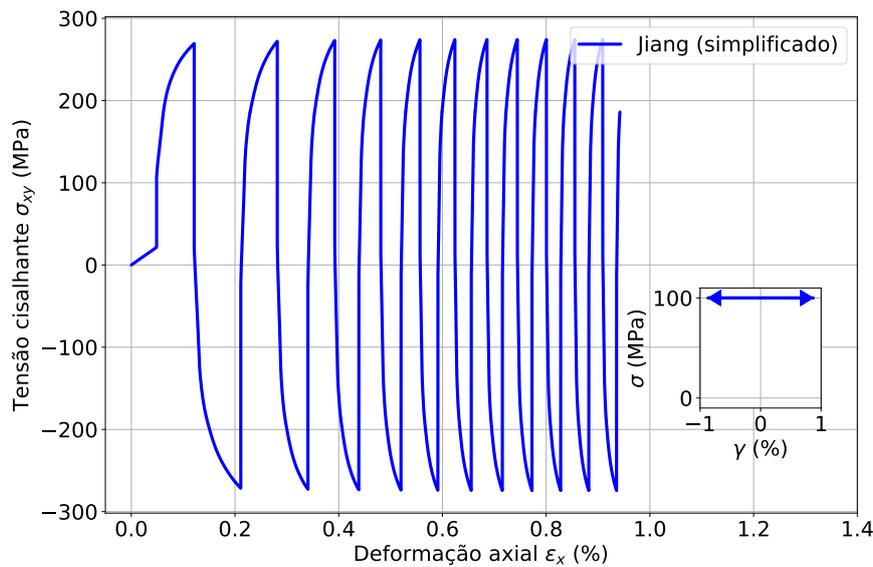


Figura 20 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 8.

7.3.2 Ensaio 9

Na Fig. 21 observa-se acumulação de deformação prevista para os modelos de Jiang e Ohno-Wang e os resultados experimentais para o Ensaio 9. Em comparação com os resultados apresentados para o Ensaio 8 observa-se deformação plástica progressiva significativamente menor. Além disso os erros apresentados na Tabela 6, de até 74% no

modelo de Jiang e 62% no de Ohno-Wang, são também menores em relação ao Ensaio 8. A Fig. 22 mostra o comportamento tensão-deformação simulado pelo modelo de Jiang.

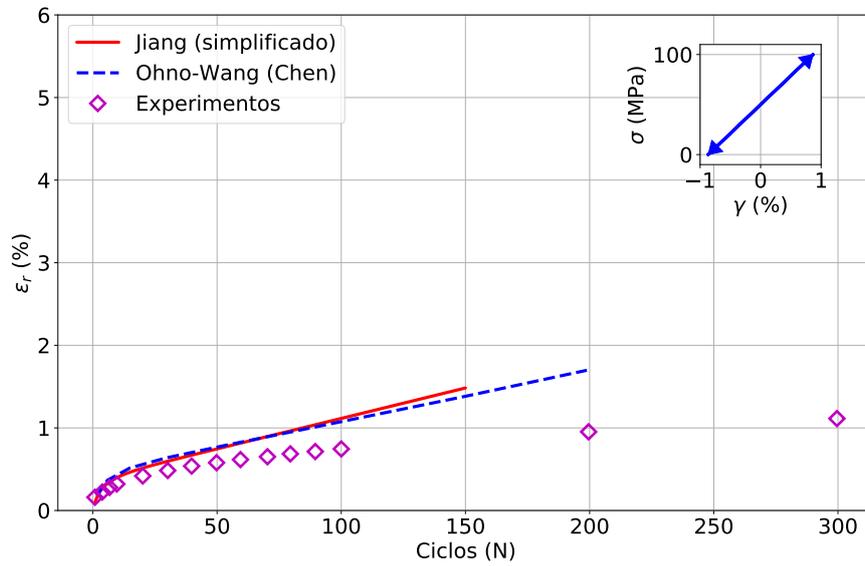


Figura 21 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 9.

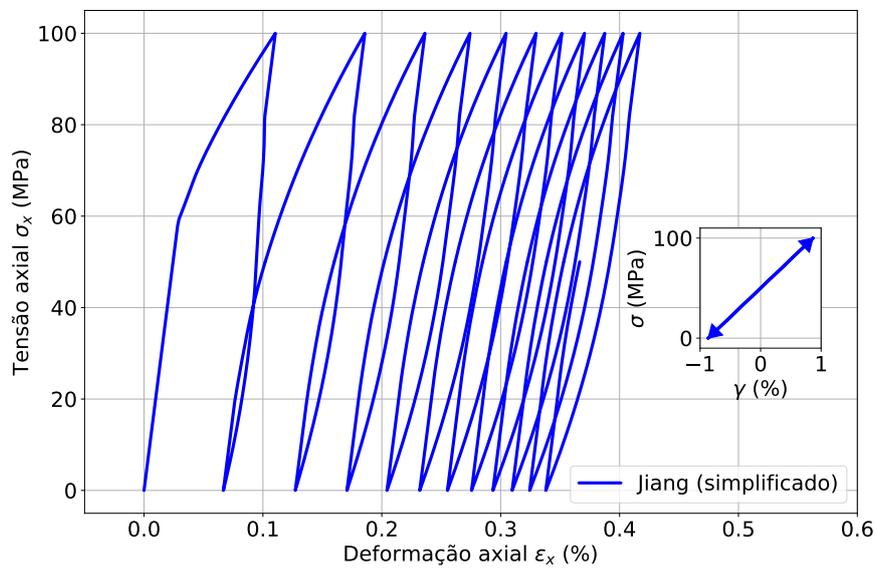


Figura 22 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 9.

Tabela 6 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 9.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	0.746	1.115	1.483
	Erro (%)	28	49	74
Ohno-Wang	ε^r (%)	0.767	1.075	1.382
	Erro (%)	32	44	62
Experimento	ε^r (%)	0.579	0.745	0.849

7.3.3 Ensaio 10

Os resultados das simulações e experimentos para o Ensaio 10 são mostrados na Fig. 23, enquanto os erros obtidos para os dois modelos estão incluídos na Tabela 7. Observou-se para o ciclo de número 150 erro máximo de 127% para os modelo de Jiang, enquanto o modelo de Ohno-Wang apresentou erro de 47%. Assim como observado nos Ensaio 8 e 9 a aplicação de mais ciclos de carregamento tem a tendência de aumento nos erros, devido à inclinação acentuada das simulação em relação aos experimentos. A Fig. 24 mostra o comportamento tensão-deformação observado no modelo de Jiang para o Ensaio 10.

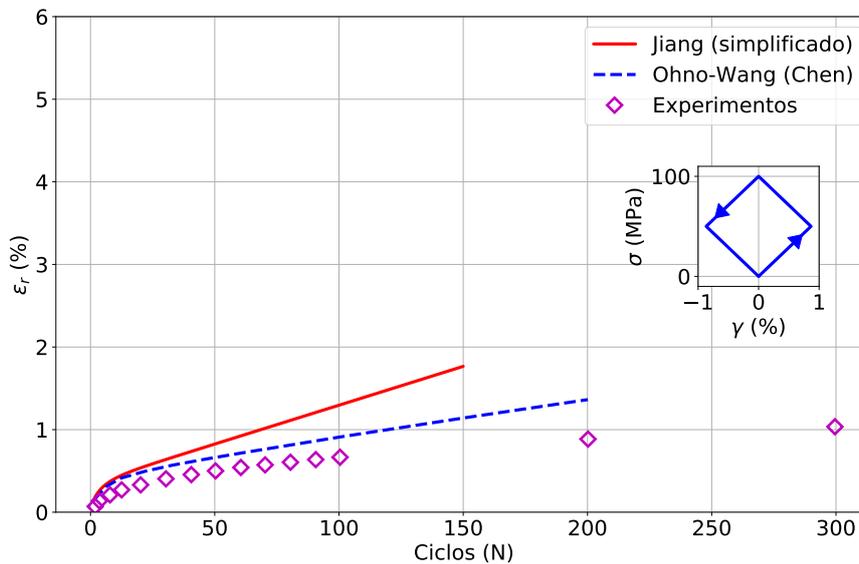


Figura 23 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 10.

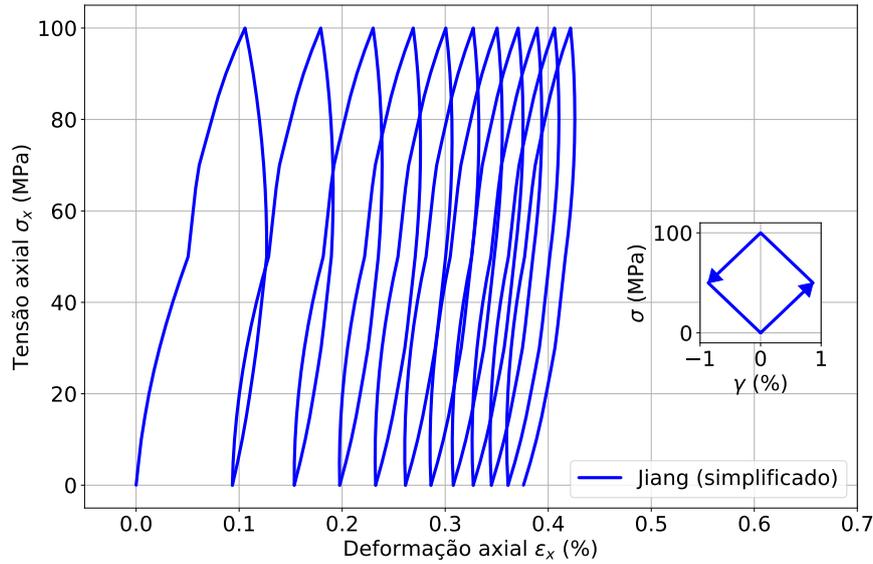


Figura 24 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 10.

Tabela 7 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 10.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	0.825	1.295	1.766
	Erro (%)	65	95	127
Ohno-Wang	ε^r (%)	0.661	0.908	1.140
	Erro (%)	32	36	47
Experimento	ε^r (%)	0.498	0.664	0.774

7.3.4 Ensaio 11

A Fig. 25 mostra os resultados obtidos nas simulações pelo modelo de Jiang e Ohno-Wang e a comparação com os resultados experimentais para o Ensaio 11. Para o ciclo de número 150 observam-se erros de 261% para o modelo de Jiang e 125% para o modelo de Ohno-Wang, de acordo com a Tabela 8. Na Fig. 26 é representado a relação tensão-deformação do modelo de Jiang. Nota-se em certos trechos o comportamento linear constante da tensão axial σ_x . Tal comportamento de fato corresponde ao carregamento prescrito na direção x .

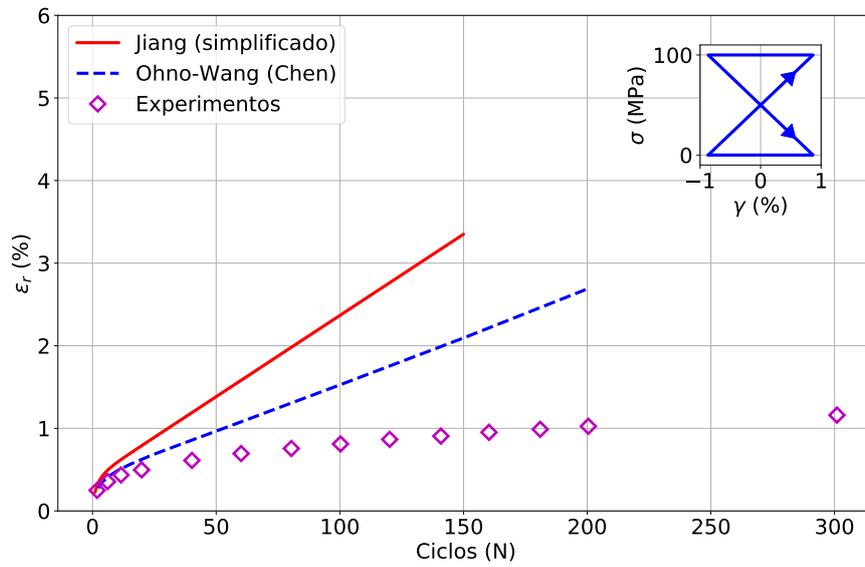


Figura 25 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 11.

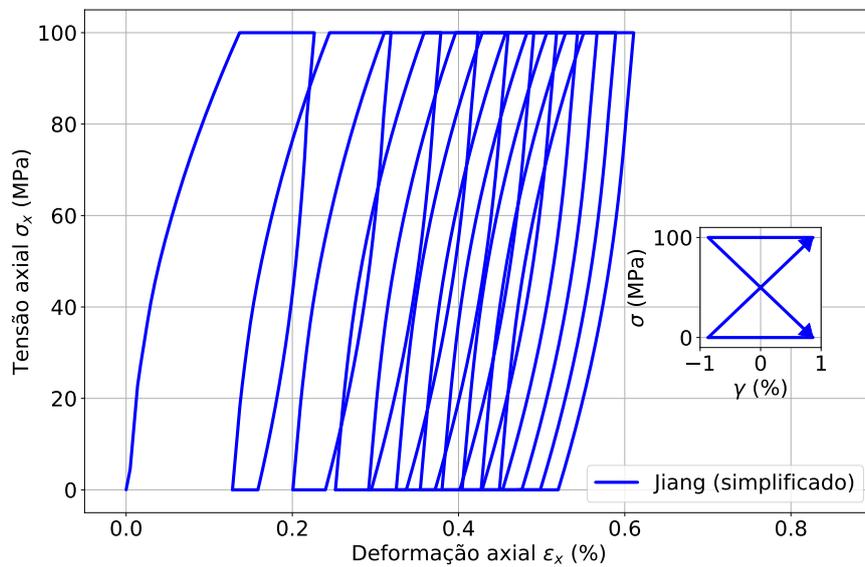


Figura 26 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 11.

Tabela 8 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 11.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	1.383	2.366	3.350
	Erro (%)	111	191	261
Ohno-Wang	ε^r (%)	0.966	1.525	2.094
	Erro (%)	48	88	125
Experimento	ε^r (%)	0.652	0.810	0.927

7.3.5 Ensaio 12 e 13

A Fig. 27 mostra a simulação realizada para o Ensaio 12 com o modelo de Jiang, juntamente com os resultados experimentais e a simulação realizada por Chen pelo modelo de Ohno-Wang. Observam-se erros significativos de até 285% para o modelo de Jiang e 98% para o modelo de Ohno-Wang, de acordo com a Tabela 9. A Fig. 28 mostra o comportamento tensão-deformação observado na simulação pelo modelo de Jiang.

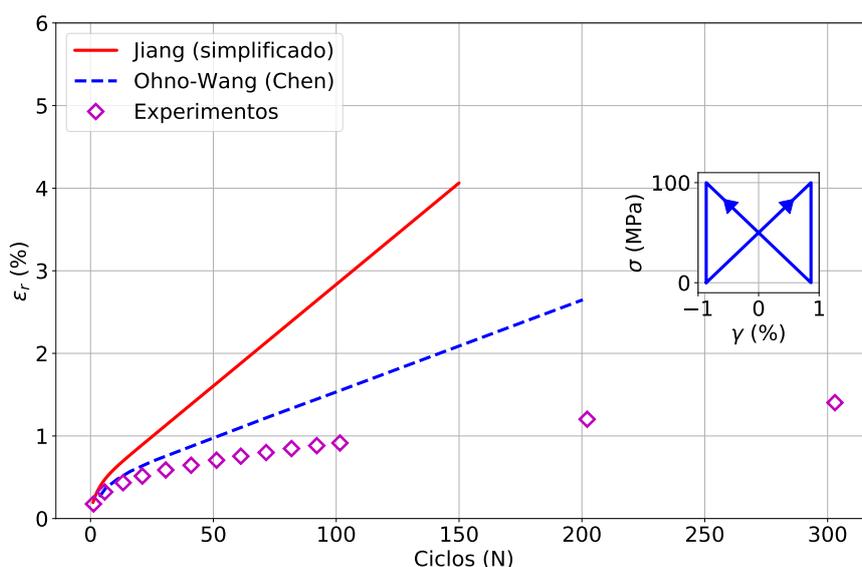


Figura 27 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 12.

Tabela 9 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 12.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	1.605	2.834	4.063
	Erro (%)	129	211	285
Ohno-Wang	ε^r (%)	0.975	1.532	2.088
	Erro (%)	39	68	98
Experimento	ε^r (%)	0.699	0.909	1.053

A Fig. 29 mostra as previsões para a acumulação de deformação plástica para os modelos de Jiang e Ohno-Wang. De acordo com a Tabela 10 os erros para Jiang e Ohno-Wang são de até 78% e 63% respectivamente. Entre todas as simulações realizadas este foi o ensaio que apresentou os menores erros. Além disso, observa-se pequeno crescimento

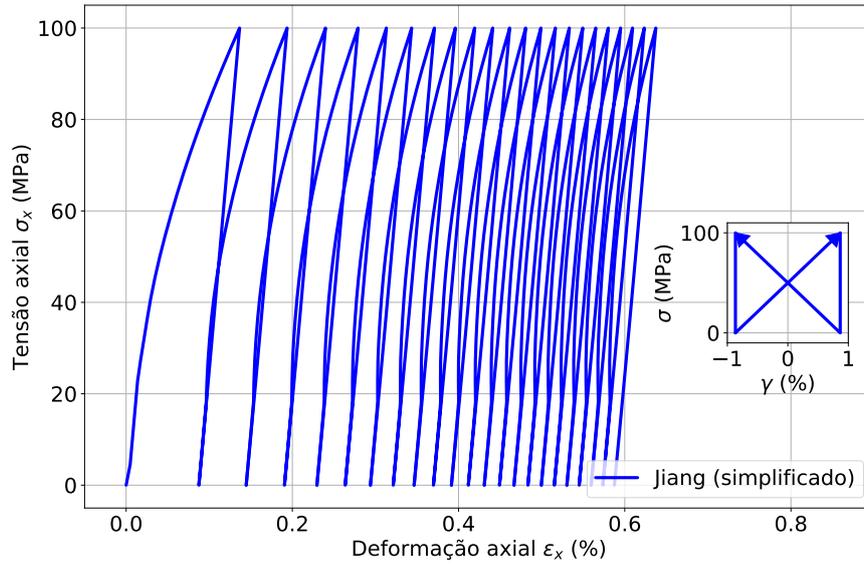


Figura 28 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 12.

no erro entre os ciclos de número 50 e 150, tanto para Jiang quanto para Ohno-Wang, que permanecem na faixa de 51% a 80%. Dessa forma, ao contrário do apresentado nos outros ensaios realizados, a aplicação de mais ciclos de carregamento ao material não aumentaria significativamente os erros apresentados nas simulações. A Fig. 30 mostra o comportamento tensão-deformação observado na simulação do Ensaio 13 pelo modelo de Jiang.

Tabela 10 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 13.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	0.384	0.491	0.593
	Erro (%)	80	63	65
Ohno-Wang	ε^r (%)	0.351	0.456	0.550
	Erro (%)	64	51	53
Experimento	ε^r (%)	0.213	0.300	0.358

Observa-se que tanto nos modelos quanto nos resultados experimentais observou-se deformação plástica progressiva menor para o Ensaio 13 do que o Ensaio 14. Para compreender este resultado considera-se a evolução da deformação plástica nos dois casos, representadas nos gráficos $\sigma_x \times \varepsilon_x^p$ das Fig. 31 e Fig. 32. As regiões marcadas em vermelho correspondem às regiões de evolução da deformação plástica. Observa-se que para o

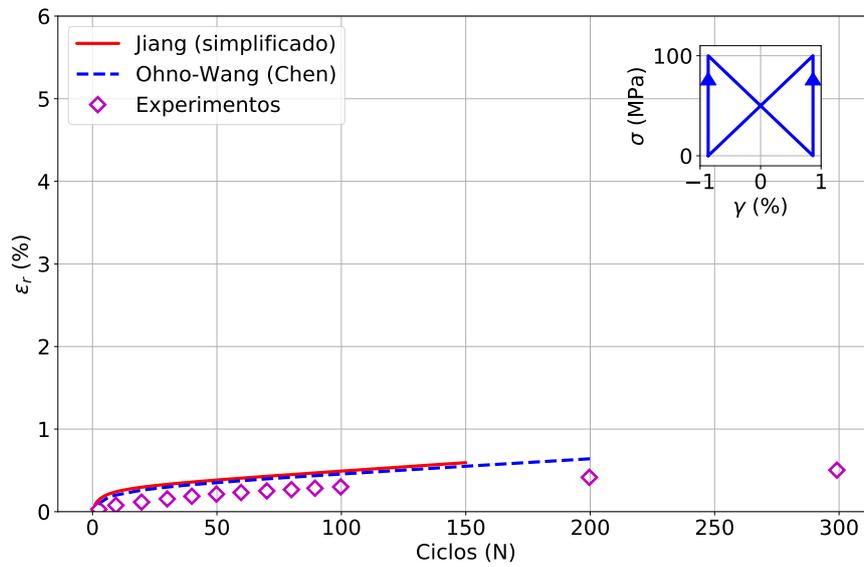


Figura 29 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 13.

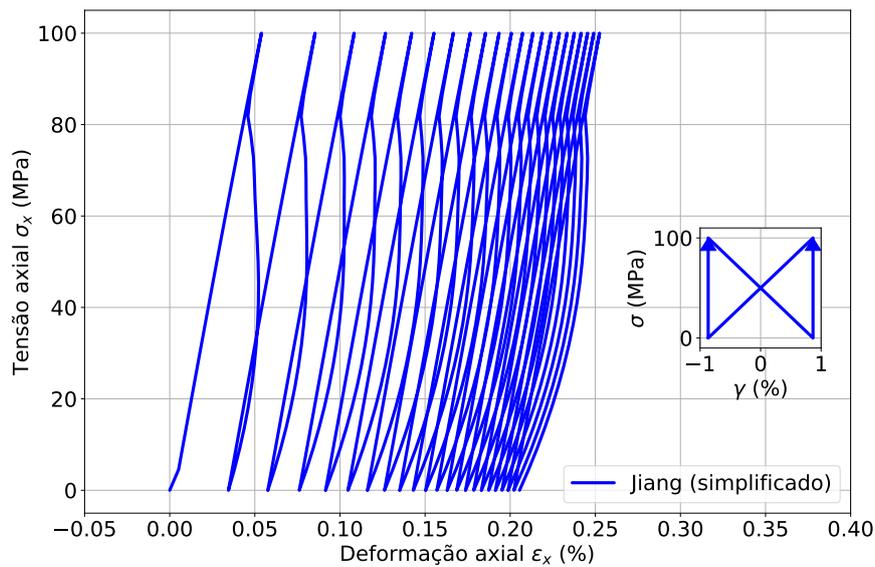


Figura 30 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 13.

Ensaio 12 a evolução da deformação plástica ocorre em níveis de tensão axial maiores em comparação com o Ensaio 13. Tal diferença resulta em maior *ratchetting* observado no Ensaio 12.

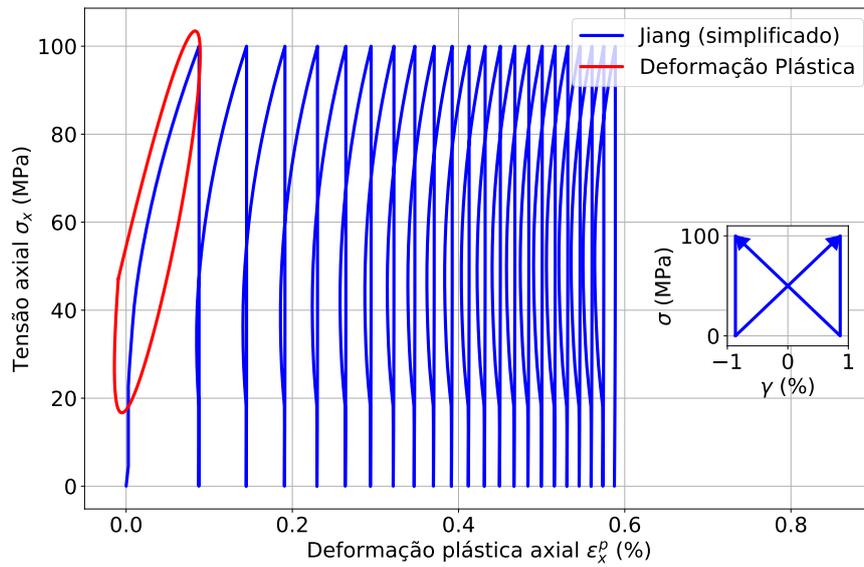


Figura 31 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 12.

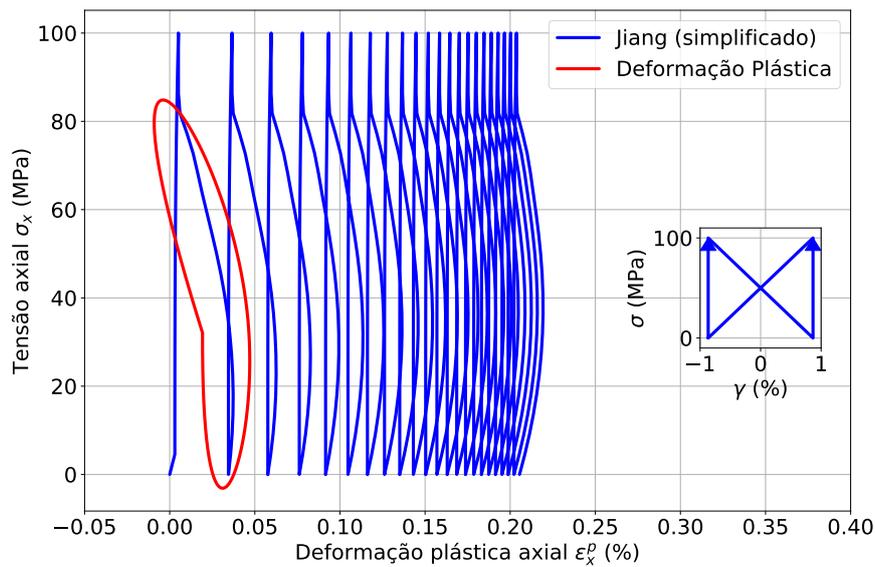


Figura 32 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 13.

7.3.6 Ensaios 14 e 15

A Fig. 33 mostra a comparação entre os resultados experimentais e os modelo de Jiang e Ohno-Wang para o Ensaio 14. Observam-se erros significativos, de até 538% para o modelo de Jiang e 263% para o modelo de Ohno-Wang. Entre todos os ensaios considerados o Ensaio 14 foi aquele com os maiores erros observados, mostrados na

Tabela 10. A Fig. 34 mostra o comportamento tensão-deformação simulado pelo modelo de Jiang.

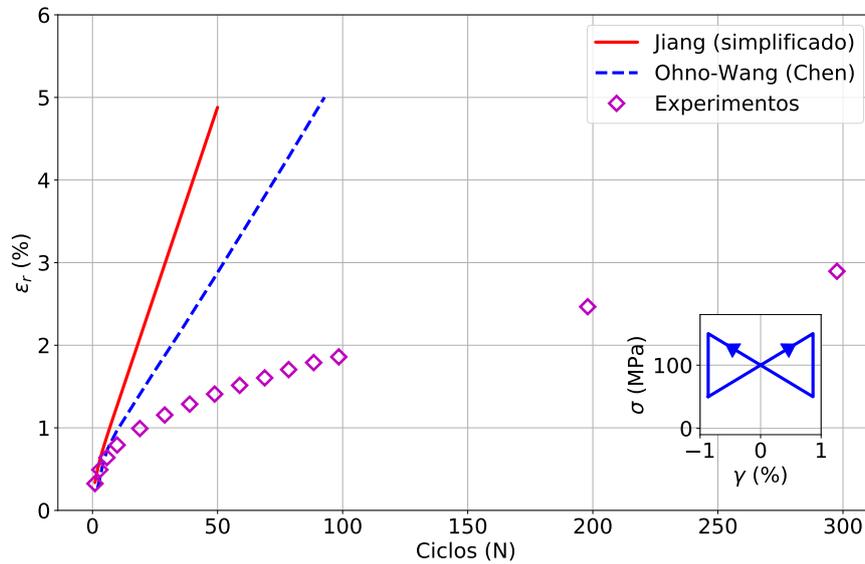


Figura 33 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 14.

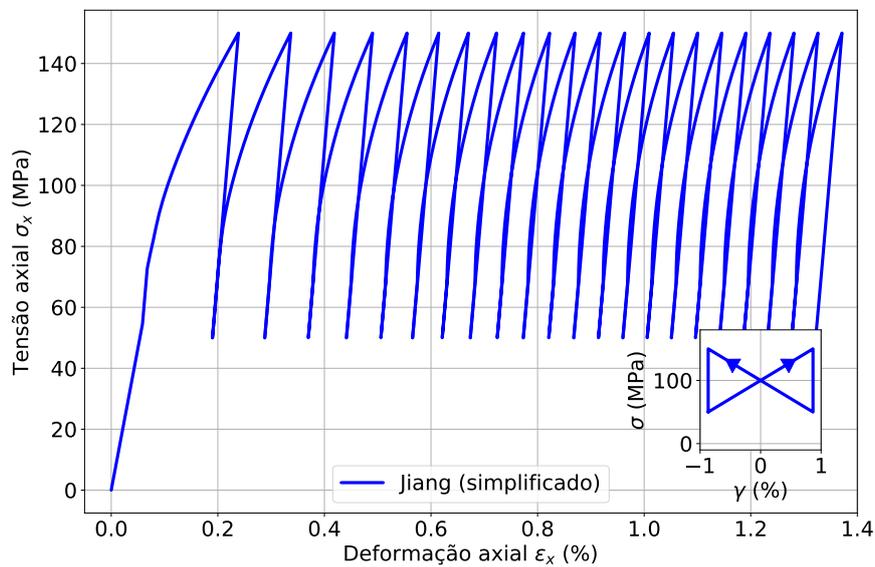


Figura 34 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 14.

Os resultados para a acumulação de deformação plástica para o Ensaio 15 são mostrados na Fig. 35. A Tabela 12, por sua vez, mostra os erros para cada modelo. Observou-se no ciclo de número 150 um erro de 169% para o modelo de Jiang e 43%

Tabela 11 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 14.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	4.880	9.379	13.87
	Erro (%)	243	402	538
Ohno-Wang	ε^r (%)	2.879	5.367	7.892
	Erro (%)	102	187	263
Experimento	ε^r (%)	1.420	1.868	2.173

para o modelo de Ohno-Wang. A Fig. 36 mostra o comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o ensaio.

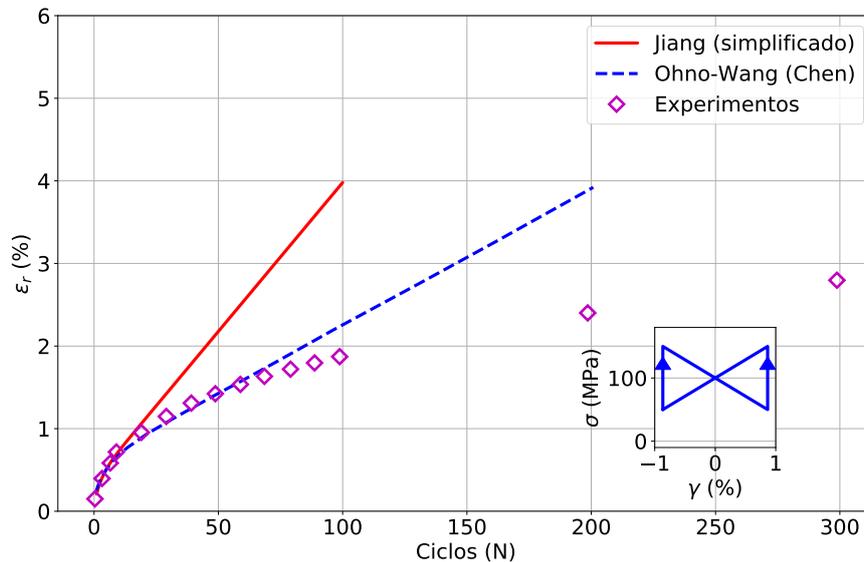


Figura 35 – Simulações pelos modelos de Ohno-Wang e Jiang para o Ensaio 15.

Assim como nos Ensaios 12 e 13, observa-se nos modelos deformação plástica progressiva menor para o Ensaio 13 do que o Ensaio 14. Observa-se nas Fig. 37 e Fig. 38 nas regiões marcadas em vermelho, indicativas de deformação plástica, maiores níveis de tensão axial no Ensaio 14 do que no Ensaio 15. A maior evolução da deformação plástica no Ensaio 15 ocorre devido a tal diferença. Nota-se no entanto que, diferentemente dos Ensaios 12 e 13, não observa-se diferença nos resultados experimentais.

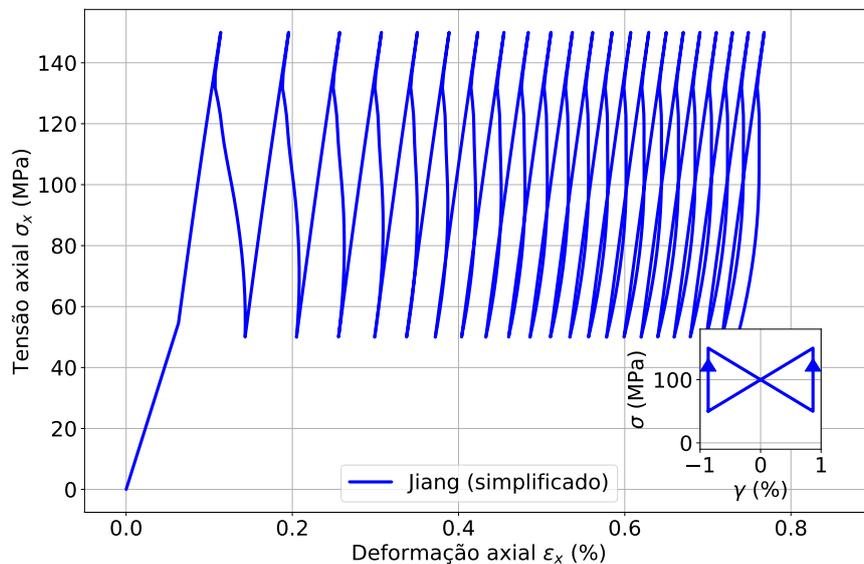


Figura 36 – Comportamento tensão-deformação do modelo de Jiang para o Ensaio 15.

Tabela 12 – Comparação entre os modelos e os resultados experimentais para o Ensaio 15.

Modelo		Ciclo (N)		
		50	100	150
Jiang	ε^r (%)	2.177	3.979	5.781
	Erro (%)	51	111	169
Ohno-Wang	ε^r (%)	1.427	2.256	3.073
	Erro (%)	-0	20	43
Experimento	ε^r (%)	1.436	1.878	2.143

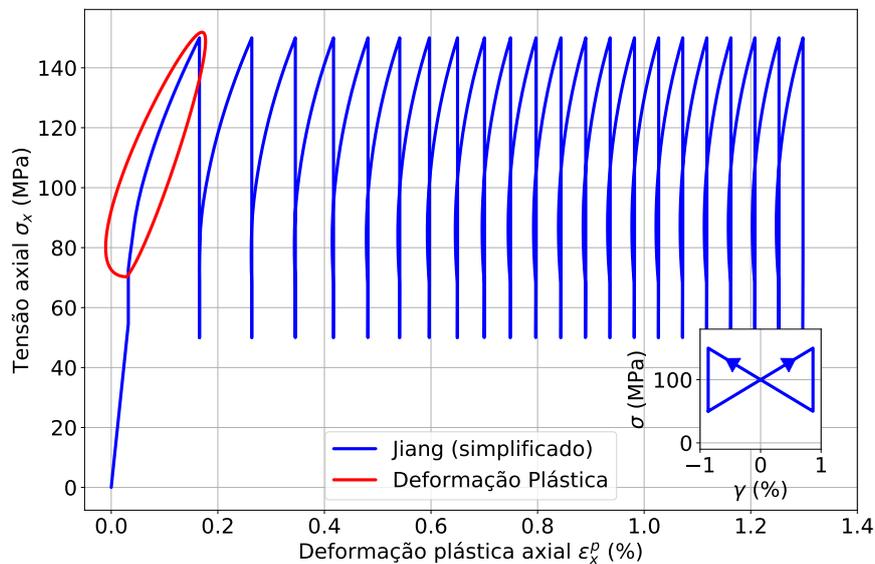


Figura 37 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 14.

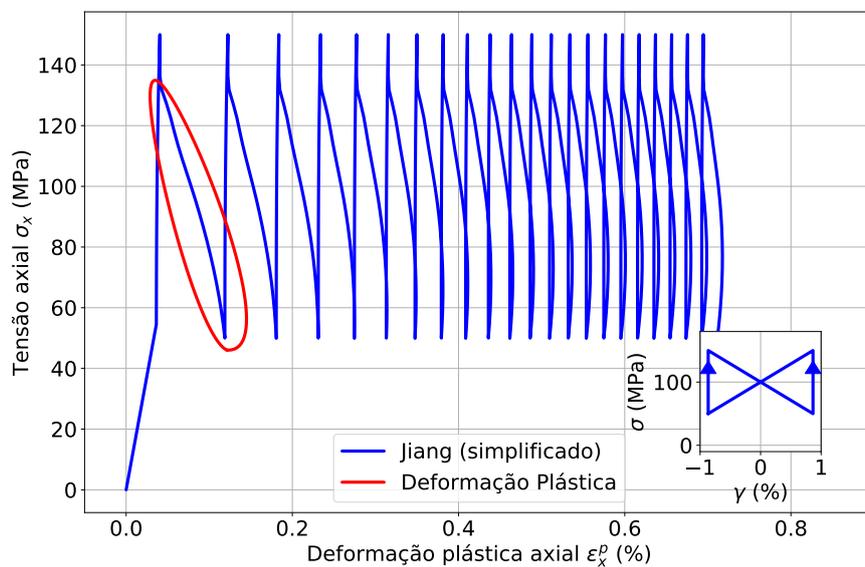


Figura 38 – Região onde ocorre deformação plástica para o Ensaio 15.

7.3.7 Análise dos ensaios multiaxiais

Observa-se que em geral os modelos de Ohno-Wang e Jiang (simplificado) foram incapazes de modelar a acumulação de deformação plástica nos carregamentos multiaxiais. Em todos os casos os modelos previram deformação plástica progressiva maior do que a experimental, com erros nos ciclos de número 150 variando entre 51% no Ensaio 13 e 538% no Ensaio 14. Nota-se também que em todos os casos o modelo de Ohno-Wang apresentou erros menores do que o modelo de Jiang.

Outro fator que explica a divergência entre as simulações pelo modelo de Jiang e os resultados experimentais é a ausência das equações auxiliares capazes de controlar os parâmetros materiais. Em especial a Eq. (3.25):

$$\chi^{(i)} = \chi_0^{(i)}(2 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{L}^{(i)}),$$

que tem a função de controlar o valor de χ em ensaios não proporcionais. Para compreender o efeito desta relação no encruamento observa-se que em um ensaio uniaxial a quantidade $\mathbf{N} \cdot \mathbf{L}$ é unitária. Pode-se determinar o valor de $\chi_0^{(i)}$ por meio do ensaio uniaxial fazendo uso da mesma metodologia utilizada na seção 7.2 para a quantidade χ . Em carregamentos não proporcionais, no entanto, o valor de χ como determinado pela Eq. (3.25) aumenta, e a acumulação de deformação plástica prevista diminui. Observando que os ensaios 8-15 apresentam todos carregamentos não proporcionais a aplicação de tal relação permitiria uma melhora nas simulações.

Com relação aos Ensaios 12-15 observam-se também diferenças causadas pelo sentido percorrido na trajetória. Em ensaios onde a deformação plástica ocorre em níveis de tensão axial maior observa-se maior deformação plástica progressiva. Dessa forma explica-se o maior *ratchetting* nos Ensaios 12 e 14 em comparação com os Ensaios 13 e 15, respectivamente. Tal fenômeno, no entanto, é observado nos resultados experimentais apenas para os Ensaios 12 e 13. Para os Ensaios 14 e 15 observa-se a mesma deformação plástica progressiva experimental.

8 Conclusão e Estudos Futuros

Os modelos de Prager, A-F, Chaboche, Ohno-Wang e Jiang (simplificado) foram apresentados, e simulações foram feitas pelo modelo de Jiang considerando quinze ensaios realizados por Chen (2005). A comparação entre simulações pelo modelo de Jiang, as simulações realizadas por Chen para o modelo de Ohno-Wang e os resultados experimentais levaram às seguintes conclusões:

1. O modelo de Jiang foi capaz de prever corretamente os ciclos de histerese completamente reversos tanto em carregamentos axiais quanto cisalhantes.
2. A escolha correta do parâmetro χ permitiu ao modelo de Jiang prever o *ratchetting* observado no ensaio uniaxial com presença de tensão média.
3. A variação do parâmetro χ tem pouco efeito em ensaios completamente alternados, como mostrado na Fig. 9. A importância deste parâmetro se dá em ensaios com presença de tensão média, onde o aumento de χ diminui o *ratchetting* previsto, de acordo com a Fig. 16.
4. Em ensaios onde observa-se acumulação de deformação plástica axial a condição $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0$ exige *ratchetting* nas outras direções axiais como forma de compensação, como demonstrado por meio das Fig. 17 e Fig. 18.
5. Os modelos de Ohno-Wang e Jiang (simplificado) foram incapazes de prever corretamente os ensaios multiaxiais com *ratchetting* realizados por Chen com o aço JIS S45C.
6. A utilização das equações auxiliares de Jiang seria capaz de melhorar os resultados apresentados pelo modelo. Em especial o aumento de χ em ensaios não proporcionais é implementado no modelo de Jiang e teria impacto significativo nas simulações realizadas.

8.1 Estudos futuros

Embora capaz de representar carregamentos completamente reversos e deformação plástica progressiva uniaxial, a implementação do modelo de Jiang neste trabalho não permitiu a representação correta de carregamentos multiaxiais com tensão média. Além disso, apenas uma pequena parcela de fenômenos foi considerada neste trabalho. Outros tipos de carregamentos e materiais poderiam também ser analisados. Dessa forma sugere-se para estudos futuros:

1. A implementação completa do modelo de Jiang considerando as relações auxiliares existentes.
2. A representação dos tensores desviadores como vetores de cinco dimensões na rotinas computacionais de modo a diminuir o tempo de simulação.
3. A realização de simulações com outros tipos de carregamentos e outros materiais metálicos.
4. A implementação do parâmetro de Tanaka (1994) juntamente com o modelo proposto por Zhang e Jiang (2008), de modo a permitir modelagem de comportamentos mais gerais, em especial o fenômeno do *crosshardening*.
5. A implementação dos modelos estudados em um *software* de elementos finitos, permitindo a aplicação dos modelos em componentes mecânicos.

Referências

ARMSTRONG, P. J.; FREDERICK, C. A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. *G.E.G.B. Report RD/B/N 731*, 1966.

CHEN, X. On the Ohno-Wang kinematic hardening rules for multiaxial ratcheting modeling of medium carbon steel. *Int. J. Plasticity*, 2005.

DOWLING, N. E. *Mechanical Behaviour of Materials*. Harlow Essex, England: Pearson, 2013.

JIANG, Y.; SEHITOGLU, H. Modeling of cyclic ratcheting plasticity, parts I and II. *Department of Mechanical Engineering, University of Nevada, Reno, NV 89557*, 1996.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. *Mechanics of Solid Materials*. The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK: Cambridge University Press, 1990.

OHNO, N.; WANG, J. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, parts I and II. *Int. J. Plasticity* 9, 375–403, 1993.

PRAGER, W. Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *J. Appl. Phys.*, 20, 235, 1949.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mechanics, Vol. 7.: Springer, 1998.

TANAKA, E. A nonproportionality parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, No. 2, pp. 155-173., 1994.

ZHANG, J.; JIANG, Y. Constitutive modeling of cyclic plasticity deformation of a pure polycrystalline copper. *International Journal of Plasticity*, 24, 1890–1915, 2008.