

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Estudo Numérico do Processo de Captura de um Ferrofluido em uma Junção T

Por,

Hugo Marmorini de Moraes

Brasília, 14 de dezembro de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Estudo Numérico do Processo de Captura de um Ferrofluido em uma Junção T

Por,

Hugo Marmori de Moraes

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Adriano Possebon Rosa, UnB/ENM (Orientador) _____

Prof. Braulio Gutierrez Pimenta, UnB/ENM _____

Prof. André von Borries Lopes, UnB/ENM _____

Brasília 14 de dezembro de 2020

Resumo

Este trabalho consiste na simulação do escoamento de um ferrofluido em um tubo T. O objetivo é observar a capacidade de modificar as vazões de saída por meio de um campo magnético. Para isso foi desenvolvido um programa para solucionar o problema de forma numérica por meio do método de projeção de segunda ordem. Foram simulados escoamentos variando o número de Reynolds para fluidos Newtonianos e para ferrofluidos, variou-se o número de Reynolds, o número Magnético e o tipo de campo aplicado. Os resultados mostram que é possível modificar a vazão e até impedir o escoamento do fluido pelos braços. Quanto maior o número magnético, maior a tendência do fluido em seguir a direção do campo. Apesar da simplicidade em modificar a vazão, evitar a formação de vórtices relacionados aos descolamento do fluido devido à inércia, mostrou-se uma tarefa mais árdua.

Palavras-chaves: CFD, ferrofluido, junção t, método de projeção, diferenças finitas

Abstract

This work consists of simulating the flow of a ferrofluid in a T-tube. The objective is to observe the ability to modify the outflow rates through a magnetic field. A program was developed to solve the problem numerically using the second-order projection method. Flows were simulated varying the Reynolds number for Newtonian fluids. For ferrofluids, the Reynolds number, the Magnetic number, and the type of field applied were varied. The results show that it is possible to modify the flow and even prevent the flow of fluid through the arms. The greater the magnetic number, the greater the tendency of the fluid to follow the direction of the field. Despite the simplicity in modifying the flow, avoiding the formation of vortexes related to fluid detachment due to inertia, it proved to be a more arduous task

Key-words: CFD, ferrofluid, T-junction, projection method, finite differences

Lista de Figuras

Figura 1 – Partícula de um ferrofluido	11
Figura 2 – Evolução dos modelos de CFD, dos modelos de escoamento e dos aviões (HIRSCH, 2007)	20
Figura 3 – Esquema de discretização de um domínio em 1D	21
Figura 4 – Representação do método explícito - i representa os nós em x e n o avanço no tempo	23
Figura 5 – Representação do método implícito - i representa os nós em x e n o avanço no tempo	24
Figura 6 – Representação do método de Crank-Nicolson - i representa os nós em x e n o avanço no tempo	24
Figura 7 – Esquema da malha defasada	27
Figura 8 – Esquema do método do estêncil para um problema 2D	29
Figura 9 – Comparação entre os diferentes métodos iterativo: Jacobi, Gauss-seidel, SOR, Gradiente, Gradiente conjugado, ADI, Gradiente conjugado pré condicionado pela matriz simétrica do SOR e gradiente conjugado pré condicionado pela matriz dos coeficientes da diagonal	30
Figura 10 – Esquema da cavidade	32
Figura 11 – Convergência de malha para Reynolds 100	34
Figura 12 – Convergência de malha para Reynolds 400	35
Figura 13 – Convergência de malha para Reynolds 1000	35
Figura 14 – Comparação dos Perfis de velocidade de u em $x = 0,5$ com Reynolds 100 para diferentes métodos	36
Figura 15 – Comparação dos Perfis de velocidade de u em $x = 0,5$ com Reynolds 400 para diferentes métodos	37
Figura 16 – Comparação dos Perfis de velocidade de u em $x = 0,5$ com Reynolds 1000 para diferentes métodos	37
Figura 17 – Comparação dos Perfis de velocidade de v em $y = 0,5$ com Reynolds 100 para diferentes métodos	38
Figura 18 – Comparação dos Perfis de velocidade de v em $y = 0,5$ com Reynolds 400 para diferentes métodos	38

Figura 19 – Comparação dos Perfis de velocidade de v em $y = 0,5$ com Reynolds 1000 para diferentes métodos	39
Figura 20 – Linha de Corrente para $Re = 100$	40
Figura 21 – Linha de Corrente para $Re = 400$	40
Figura 22 – Linha de Corrente para $Re = 1000$	41
Figura 23 – Esquema do comprimento de desenvolvimento	42
Figura 24 – Variação da pressão em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 1$.	45
Figura 25 – Variação da velocidade U em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 1$	45
Figura 26 – Variação da velocidade V em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 1$	46
Figura 27 – Variação da pressão em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 10$.	46
Figura 28 – Variação da velocidade U em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 10$	47
Figura 29 – Variação da velocidade V em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 10$	47
Figura 30 – Variação da pressão em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 100$	48
Figura 31 – Variação da velocidade U em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 100$	48
Figura 32 – Variação da velocidade V em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 100$	49
Figura 33 – Desenho do escoamento com Degrau	51
Figura 34 – Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 15 e $Re = 200$	52
Figura 35 – Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 30 e $Re = 200$	53
Figura 36 – Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 45 e $Re = 200$	53
Figura 37 – Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 60 e $Re = 200$	53
Figura 38 – Campo de velocidades para $Re = 200$, $x = [0:20]$. A escala de cores representa o módulo do vetor velocidade	54
Figura 39 – Campo de velocidades para $Re = 200$, $x = [0:10]$. A escala de cores representa o módulo do vetor velocidade	54
Figura 40 – Campo de velocidades para $Re = 200$, centralizado no ponto de recolamento do escoamento na parte inferior do domínio	55
Figura 41 – Ponto de recolamento para diversos números de Reynolds	56
Figura 42 – Desenho do escoamento em uma junção T	57
Figura 43 – Desenho do tratamento das paredes do domínio	58
Figura 44 – Variação da vazão na saída 2, leste, de acordo com o número de Reynolds	61
Figura 45 – Campo de velocidade para $Re = 10$, escala de cores representa o módulo da velocidade	63
Figura 46 – Campo de velocidade para $Re = 10$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	64
Figura 47 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$	64

Figura 48 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$	65
Figura 49 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$	65
Figura 50 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$	65
Figura 51 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $f(x)$ corresponde ao perfil de velocidade completamente desenvolvido para uma vazão unitária e velocidade máxima de 1,5; $Re = 10$	66
Figura 52 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 10$	66
Figura 53 – Campo de velocidade para $Re = 50$, escala de cores representa o módulo da velocidade	67
Figura 54 – Campo de velocidade para $Re = 50$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	67
Figura 55 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$	68
Figura 56 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$	68
Figura 57 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$	68
Figura 58 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$	69
Figura 59 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 50$	69
Figura 60 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 50$	70
Figura 61 – Campo de velocidade para $Re = 100$, escala de cores representa o módulo da velocidade	71
Figura 62 – Campo de velocidade para $Re = 100$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	71
Figura 63 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$	72
Figura 64 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$	72
Figura 65 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$	72
Figura 66 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$	73
Figura 67 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 100$	73
Figura 68 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 100$	74
Figura 69 – Variação da vazão, Q , de acordo com o aumento do número de Reynolds para a o braço principal, Q_2 , e o braço secundário, Q_3	75

Figura 70 – Desenho da Junção em T apresentando as regiões do domínio e as paredes correspondentes. Vermelho para as paredes da entrada, laranja para a saída leste e azul para a saída sul	76
Figura 71 – Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1 , escala de cores representa o módulo da velocidade	78
Figura 72 – Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	78
Figura 73 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1	79
Figura 74 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1	79
Figura 75 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1	80
Figura 76 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1	80
Figura 77 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1	80
Figura 78 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1	81
Figura 79 – Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2 , escala de cores representa o módulo da velocidade	82
Figura 80 – Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	82
Figura 81 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2	83
Figura 82 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2	83
Figura 83 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2	83
Figura 84 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2	84
Figura 85 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2	84
Figura 86 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2	85
Figura 87 – Campo de velocidade para $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1 , escala de cores representa o módulo da velocidade	85
Figura 88 – Campo de velocidade para $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	86
Figura 89 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1	86
Figura 90 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1	87

Figura 91 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50, Mn = 25, \mathbf{H}_1$	87
Figura 92 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50, Mn = 25, \mathbf{H}_1$	88
Figura 93 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 50, Mn = 25, \mathbf{H}_1$	88
Figura 94 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 50, Mn = 25, \mathbf{H}_1$	89
Figura 95 – Campo de velocidade para $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$, escala de cores representa o módulo da velocidade	89
Figura 96 – Campo de velocidade para $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	90
Figura 97 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$	90
Figura 98 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$	91
Figura 99 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$	91
Figura 100 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$	92
Figura 101 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$	92
Figura 102 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 50, Mn = 20, \mathbf{H}_2$	93
Figura 103 – Campo de velocidade para $Re = 100, Mn = 14, \mathbf{H}_1$, escala de cores representa o módulo da velocidade	93
Figura 104 – Campo de velocidade para $Re = 100, Mn = 14, \mathbf{H}_1$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	94
Figura 105 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100, Mn = 14, \mathbf{H}_1$	94
Figura 106 – Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100, Mn = 14, \mathbf{H}_1$	95
Figura 107 – Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100, Mn = 14, \mathbf{H}_1$	95
Figura 108 – Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100, Mn = 14, \mathbf{H}_1$	96
Figura 109 – Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 100, Mn = 14,$ \mathbf{H}_1	96
Figura 110 – Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 100, Mn = 14, \mathbf{H}_1$	96
Figura 111 – Campo de velocidade para $Re = 100, Mn = 10, \mathbf{H}_2$, escala de cores representa o módulo da velocidade	97
Figura 112 – Campo de velocidade para $Re = 100, Mn = 10, \mathbf{H}_2$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade	97
Figura 113 – Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100, Mn = 10, \mathbf{H}_2$	98

Figura 114–Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2	98
Figura 115–Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2	99
Figura 116–Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2	99
Figura 117–Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2	99
Figura 118–Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2	100
Figura 119–Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_1 e $Re = 10$	100
Figura 120–Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_2 e $Re = 10$	101
Figura 121–Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_1 e $Re = 50$	101
Figura 122–Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_2 e $Re = 50$	102
Figura 123–Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_1 e $Re = 100$	102
Figura 124–Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_2 e $Re = 100$	103
Figura 125–Vazões para $Re = 10$, $Re = 50$ e $Re = 100$ de acordo com o número magnético	103
Figura 126–Vazões para $Re = 10$, $Re = 50$ e $Re = 100$ de acordo com o número magnético, $x = [0,3]$	104

Lista de Tabelas

Tabela 1	– Tempo que cada método precisou para resolver o problema	31
Tabela 2	– Malhas utilizadas e parâmetros para cada número de Reynolds, a malha foi utilizada onde há o “X”	33
Tabela 3	– Parâmetros para as simulações	43
Tabela 4	– Malhas utilizadas e valores de U obtidos para Reynolds igual a 1	43
Tabela 5	– Malhas utilizadas e valores de U obtidos para Reynolds igual a 10	43
Tabela 6	– Malhas utilizadas e valores de U obtidos para Reynolds igual a 100	43
Tabela 7	– Comparação entre as diferentes razões de aspecto	44
Tabela 8	– Domínios e malha utilizados no problema permanente	44
Tabela 9	– Resultados da convergência de malha para Reynolds 5	51
Tabela 10	– Resultados da convergência de malha para Reynolds 50	51
Tabela 11	– Resultados da convergência de malha para Reynolds 100	52
Tabela 12	– Dimensões do domínio da junção T	58
Tabela 13	– Dados das simulações de convergência de malha	59
Tabela 14	– Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 20$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,3$	59
Tabela 15	– Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 20$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,15$	59
Tabela 16	– Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 20$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,075$	60
Tabela 17	– Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 100$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,3$	60
Tabela 18	– Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 100$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,15$	60
Tabela 19	– Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 100$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,075$	60
Tabela 20	– Vazões para a simulação transiente, $Re = 100$, $CFL = 0,3$	60
Tabela 21	– Dimensões do domínio da junção T	61
Tabela 22	– Dados de vazão em diferentes tempos para $Re = 20$	62
Tabela 23	– Dados de vazão em diferentes tempos para $Re = 50$	62

Tabela 24 – Dados de vazão em diferentes tempos para $Re = 100$	62
Tabela 25 – Tipos de escoamento e os parâmetros da simulação	77
Tabela 26 – Valores dos parâmetros para a simulação	77

Lista de abreviaturas e siglas

ADI	<i>Alternating Direction Implicit method</i>
BFS	<i>Backward Facing Step</i>
CFD	<i>Computacional Fluid Dynamics</i>
CFL	<i>Courant-Friedrichs-Lewy</i>
GC	<i>Gradiente Conjugado</i>
GCPSSOR	Gradiente Conjugado pré-condicionado pela matriz simétrica do SOR
FF	Ferrofluido
NS	<i>Navier-Stokes</i>
SOR	<i>Sucessive over relaxation</i>
TDMA	<i>Tridiagonal Matrix algorithm</i>

Lista de símbolos

A	Matriz dos coeficientes
b	Vetor independente
B	Campo de indução magnética
Co	Número de Courant
C_n	Constante n
D	Distância entre placas
d_h	Diâmetro hidrodinâmico
d_m	Diâmetro magnético
E	Energia interna
e	Energia interna específica
F	Parâmetro qualquer
$f(x)$	Função qualquer
\mathbf{F}_i	Vetor Força i
\mathbf{F}_c	Vetor Força de contato
\mathbf{F}_s	Vetor Força de superfície
\mathbf{f}	vetor força de campo por volume
\mathbf{f}_m	vetor força de Kelvin por volume
\mathbf{g}	Gravidade
G	Fator de amplificação do erro
Gr	Número de Grashof
H	Campo magnético

H	Intensidade do campo magnético
\mathbf{I}	Tensor identidade
\mathbf{J}	Distribuição de corrente
\mathbf{J}_b	Distribuição de corrente limitada
\mathbf{J}_f	Distribuição de corrente livre
k_b	Constante de Boltzmann
K	Constante de anisotropia do material
\mathbf{K}	Tensor condutividade térmica
L	Comprimento do domínio
L_n	Comprimento auxiliar n
$L(\alpha)$	Função de Langevin
m	Massa
\mathbf{m}	Momento de dipolo magnético
\mathbf{M}	Magnetização
\mathbf{M}_d	Magnetização do sólido
\mathbf{M}_s	Magnetização de saturação
Mn	Número magnético
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor normal
N	Número de nós
Nu	Número de Nusselt
N_x	Número de nós em x
N_y	Número de nós em y
P	Pressão
Pr	Número de Prandtl
q	Carga elétrica
\mathbf{q}	Vetor fluxo de calor
Q	Calor

Ra	Número de Rayleigh
Re	Número de Reynolds
S	Superfície
T	Temperatura
T_f	Temperatura fria
T_{fluido}	Temperatura do fluido
T_q	Temperatura quente
T_s	Temperatura na superfície
t	Tempo
t_n	Tempo n
\mathbf{t}	Vetor traction
\mathbf{u}	Vetor velocidade
\mathbf{u}^*	Vetor velocidade intermediária
u	Componente da velocidade na direção x
v	Componente da velocidade na direção y
V	Volume
W	Trabalho
\mathbf{w}	Vetor de incógnitas do sistema linear
w_{ij}	Componente ij da matriz de incógnitas
\mathbf{X}	Coordenada Lagrangeana
\mathbf{x}	Coordenada Euleriana
x	Coordenada x
x_i	Nó i em x
y	Coordenada y
y_j	Nó j em y
α_m	Parâmetro magnético
α_T	Difusividade térmica

α_0	Parâmetro magnético de referência
ρ	Massa específica
σ	Tensor de tensões
η	Viscosidade dinâmica
μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo
ν	Viscosidade cinemática
Δt	Passo no tempo
Δx	Distância entre dois pontos em x
Δy	Distância entre dois pontos em y
Ω	Vorticidade
ϕ	Componente da pressão
Ψ	Campo Potencial Magnético
τ_{Br}	Tempo de relaxação Browniano
τ_N	Tempo de relaxação Néel
χ_m	Susceptibilidade magnética
θ	Diferença de temperatura adimensional

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	1
1.1.1	Ferrofluido	1
1.1.2	Junção T	2
1.2	Objetivos	3
1.3	Organização do trabalho	3
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
2.1	Coordenadas Lagrangeanas e Eulerianas	5
2.2	Equações de balanço	6
2.2.1	Balanço de massa	6
2.2.2	Balanço de momento	7
2.2.3	Balanço de energia	7
2.3	Transferência de calor	9
2.4	Ferrodinâmica	9
2.5	Ferrofluido	10
2.5.1	Tempo de relaxação	11
2.5.2	Magnetização	12
2.6	Eletromagnetismo	13
2.7	Equações constitutivas	14
2.8	Números adimensionais	15
3	METODOLOGIA NUMÉRICA	19
3.1	Introdução	19
3.2	Diferenças finitas	20
3.2.1	Método de Euler explícito, implícito e Crank-Nicolson	22
3.3	Método de projeção de primeira e segunda ordem	25
3.3.1	Malha defasada	27
3.4	Consistência, Estabilidade e convergência	27
3.5	Sistemas lineares	29

3.6	Validação do método numérico	31
3.6.1	Cavidade	31
3.6.1.1	Convergência de Malha	33
3.6.1.2	Regime Permanente	35
3.6.2	Escoamento entre placas	41
3.6.2.1	Convergência de malha	42
3.6.2.2	Regime permanente	44
	4 RESULTADOS	50
4.1	Degrau	50
4.1.1	Convergência de Malha	51
4.1.2	Convergência de Domínio	52
4.1.3	Recolamento	55
4.2	Junção T	56
4.2.1	Convergência de malha	57
4.2.2	Validação	60
4.2.3	Escoamento permanente	61
4.2.4	Sem campo magnético	62
4.2.4.1	Escoamento permanente	62
4.2.4.2	Vazão	74
4.2.5	Com campo magnético	75
4.2.5.1	Escoamento permanente	77
4.2.5.2	Vazão	100
	5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	105
5.1	Conclusão	105
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	106
	REFERÊNCIAS	107
	ANEXO A EQUAÇÕES DISCRETIZADAS	111
	ANEXO B ALGORITMO DO GRADIENTE CONJUGADO PRÉ-CONDICIONADO PELA MATRIZ SIMÉTRICA DO SOR	114
B.1	Método do gradiente	114
B.2	Método do gradiente conjugado	115
B.3	Pré-condicionamento	116
B.4	Gradiente conjugado pré-condicionado pela matriz simétrica do SOR	116

	ANEXO C ALGORITMO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES, DE NAVIER-STOKES MODIFICADA E DE ENERGIA	118
C.1	Fluido Newtoniano	118
C.2	Ferrofluido	118

1 Introdução

1.1 Contextualização

1.1.1 Ferrofluido

Um ferrofluido consiste em uma suspensão coloidal de partículas magnéticas em um fluido base newtoniano (ROSENSWEIG, 2013). Desde 1960, vem se desenvolvendo os ferrofluidos estáveis para diversas aplicações dentre elas: transformar calor em trabalho sem a utilização de partes mecânicas, utilização no controle e no posicionamento do fluido por meio de forças magnéticas.

Ferrofluidos são utilizados, por exemplo, em HDs. Devido à grande proximidade do disco com o sistema de leitura, qualquer poeira ou fumaça que possa ficar nessa região danifica o sistema, por isso o fluido sela o sistema impedindo que este tenha o funcionamento prejudicado (POPPLEWELL, 1984). Em motores de passo que requerem uma alta precisão e por consequência a proteção do sistema, utiliza-se também fluidos magnéticos que ficam presos ao eixo devido a força magnética do próprio motor (RAJ; MOSKOWITZ; CASCIARI, 1995).

Sistemas de alto-falante precisam de dissipação do calor e amortecimento. É nesse ponto que entram os ferrofluidos, além de transmitirem o calor para outras partes da caixa de som, eles fornecem o amortecimento necessário, o qual ainda pode ser alterado por meio da mudança do campo magnético (POPPLEWELL, 1984).

Também é comum encontrar fluidos magnéticos sendo aplicados em sensores para a medição de ângulos. Basicamente um ímã é imerso em um ferrofluido que o mantém levitando e detecta as variações nas angulações (RAJ; MOSKOWITZ; CASCIARI, 1995).

Na área da saúde, o ferrofluido pode ser utilizado para transportar fármacos - *Magnetic drug targeting* (MDT) - e ajudar no tratamento do câncer. O MDT consiste em transportar remédios por meio de gotas guiadas pelo campo magnéticos com os agentes quimioterápicos presos às partículas (GANGULY et al., 2005). Já para o câncer, células tumorais são mais sensíveis ao calor, desta forma uma alta temperatura imposta, associada à quimioterapia, intensificam o tratamento. Porém é necessário que este aquecimento seja localizado, para isso pode-se utilizar o próprio ferrofluido. Esse fluido se mantém em

uma posição definida devido ao campo e a aplicação de um campo alternado ocasiona a hipertemia, aumentando assim a temperatura em um ponto localizado (HIERGEIST et al., 1999).

Junto com todas essas aplicações, tem-se desenvolvido muitos estudos para verificar a capacidade de um ferrofluido intensificar as trocas de calor, desde estudos experimentais (LAJVARDI et al., 2010), até estudos numéricos nas mais diversas geometrias (GERDROODBARY et al., 2018).

1.1.2 Junção T

A junção T é um componente com 3 aberturas, duas de saída e uma de entrada ou duas de entrada e uma de saída. Está presente em instalações hidráulicas, dutos de ar condicionado, tubulação de fluido refrigerante e até sistemas de resfriamento de reatores nucleares (AZZOPARDI; WHALLEY, 1982). Trata-se de uma conexão tão comum que já apresenta valores tabelados de queda de pressão (WHITE, 2010).

Muito tem-se estudado de forma experimental a capacidade desta configuração em formar bolhas e gotas em escoamentos multifásicos (GARSTECKI et al., 2006), inclusive com emulsão de ferrofluidos (TAN; NGUYEN, 2011), devido ao formato da sua geometria que permite esse fenômeno.

Esse tipo de configuração de domínio apresenta uma grande importância na indústria. Junções T estão presentes nas mais diversas tubulações (ABDULWAHID; INJETI; DAKHIL, 2012), além disso, pode ser utilizada para o estudo do escoamento do sangue e a formação de zonas de recirculação que estão associadas a doenças cardiovasculares (HAYES; NANDAKUMAR; NASR-EL-DIN, 1989). A junção T já foi estudada com vários tipos de fluidos e escoamentos, seja com viscoelásticos em regime permanente (MATOS; OLIVEIRA, 2014) ou com fluidos inelásticos em regime transiente com pulsações (MATOS; OLIVEIRA, 2013). Gerdroodbary et al. (2018) realizou um estudo com um ferrofluido para verificar a influência do campo magnético na intensificação das trocas de calor, porém o estudo se limitou a apenas uma configuração de escoamento: com uma entrada e duas saídas de forma simétrica.

Com fluidos Newtonianos - e para base deste projeto - Hayes, Nandakumar e Nasr-El-Din (1989) verificaram a influência do número de Reynolds, da espessura do braço auxiliar do domínio e das condições de contorno, que poderiam ser pressão nula nas saídas, ou divisão do escoamento forçada. Segundo o autor, ao aumentar o número de Reynolds, aumenta-se a quantidade de fluido que se mantém no eixo principal, quando utilizadas condições de pressão nula na saída. Quanto aos vórtices formados, sempre há formação de zonas de recirculação no braço auxiliar, é necessário que se atinja altos números de Reynolds para que apareça uma segunda zona de recirculação no braço principal.

Esse tipo de componente de tubulação também pode ser utilizada para separação

de fases em um escoamento bifásico (AZZOPARDI; WHALLEY, 1982). Dependendo da forma de entrada do fluido e da divisão do mesmo, a distribuição será de forma não igualitária das fases. Por causa dessa capacidade, esse elemento é utilizado em indústrias de processamento químico e na indústria petrolífera (SAIEED et al., 2016). Além disso, estuda-se muito a fadiga térmica causada pelas diferentes temperaturas dos fluidos que estão entrando na junção T (NAKAMURA et al., 2015).

Apesar de ser um tipo de conexão comum, com diversos estudos na área, não há trabalhos sobre a capacidade de modificar o escoamento, mais precisamente a vazão.

1.2 Objetivos

O problema para este estudo é: como controlar o escoamento em uma junção T? Para isso propõe-se nesse trabalho o estudo do escoamento de um fluido magnético dentro de uma junção T por meio de simulações numéricas. Espera-se que seja possível controlar todo o fluxo do fluido magnético, vencendo a difusão viscosa e a inércia do próprio fluido.

Para este trabalho, o objetivo principal é observar a capacidade de controlar o escoamento e as vazões de saída por meio de um campo magnético. Os objetivos secundários são

- Verificar a capacidade de controlar o escoamento de um ferrofluido na junção T, o objetivo é impedir o movimento do fluido para qualquer um dos braços;
- Desenvolver um código próprio para a simulação do escoamento de ferrofluidos em diferentes geometrias simples;
- Estudar o papel dos números adimensionais associados ao escoamento de fluidos da ferrodinâmica.

1.3 Organização do trabalho

Com base nos objetivos apresentado, este trabalho está dividido da seguinte forma: além deste capítulo, existem outros 4 correspondentes à fundamentação teórica, metodologia numérica, resultados e conclusão.

O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, são apresentados todos os conceitos necessários para este Projeto de Graduação. Nele há as equações de balanço, a teoria de ferrofluidos e as equações governantes que serão solucionadas no capítulo 3 e no capítulo 4.

Na terceira parte do estudo, é descrito toda a metodologia numérica utilizada e são mostrados, principalmente, o método das diferenças finitas e o método de projeção.

Além disso, é feita a validação do programa desenvolvido para a simulação por meio da solução do problema da cavidade e do escoamento entre placas.

No capítulo 4 apresenta-se os primeiros resultados obtidos. Primeiramente é introduzido o problema do degrau, o escoamento nessa geometria é similar ao da junção T quanto à questão de ser necessário um comprimento para o fluido se desenvolver pós-recolamento e pelo fato de ser necessário alterar o domínio. Por último, é mostrado resultados para o fluido Newtoniano e o ferrofluido escoando em uma junção T.

No capítulo 5, o último, é apresentado a conclusão para este projeto, recapitulando o que foi trabalhado e os resultados obtidos. Também é mostrado possibilidades para futuros trabalhos.

2 Fundamentação teórica

2.1 Coordenadas Lagrangeanas e Eulerianas

Dois tipos de coordenadas geométricas são comumente utilizadas para descrever o movimento: as coordenadas lagrangeanas e as coordenadas eulerianas. As coordenadas lagrangeanas acompanham o movimento da partícula, escolhe-se um ponto \mathbf{X} em dado t_0 , o elemento de corpo que estiver neste ponto neste exato momento receberá um rótulo, a coordenada inicial, e seu movimento será acompanhado. Conseqüentemente, quaisquer alterações em suas características serão devidamente percebidas. Já nas coordenadas eulerianas escolhe-se um ponto no espaço \mathbf{x} e fixa-se as atenções nele, não importa que a partícula que estivesse ocupando esse espaço tenha se movido, só se percebe alterações que tenham ocorrido neste ponto.

Para descrever as variações que um corpo sofre utiliza-se a derivada total. Basicamente, trata-se de um derivada lagrangeana mantendo \mathbf{X} constante. A derivada é descrita segundo a equação:

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \cdot \nabla F. \quad (2.1)$$

Em que F seria uma propriedade/parâmetro qualquer, \mathbf{u} é o vetor velocidade e t é o tempo. A derivada no tempo com \mathbf{x} constante é chamada de derivada euleriana, ela avalia apenas as alterações no tempo naquele ponto, enquanto que o termo do gradiente é o termo advectivo - ou convectivo - associado a variações espaciais.

Fora da mecânica dos fluidos as coordenadas lagrangeanas e eulerianas se confundem devido ao fato das deformações em sólidos serem de baixa magnitude (CHANDRASEKHARAI; DEBNATH, 2014). Porém na mecânica dos fluidos existe esse distanciamento devido às grandes deformações, desta forma separa-se esses dois tipos de coordenadas. O ideal seria a utilização das coordenadas lagrangeanas, mas trata-se de um processo muito custoso pois seria necessário acompanhar diversos elementos no escoamento. Por isso, as coordenadas eulerianas acabam sendo mais empregadas.

2.2 Equações de balanço

Para apresentar as equações de balanço, primeiramente, é necessário introduzir o teorema de transporte de Reynolds (TTR). Segundo o TTR, a derivada total de uma função f qualquer pode ser descrita segundo a variação no tempo da função dentro do volume somado ao fluxo de f da mesma pelas superfícies do volume de controle, $S(t)$ (ARIS, 2012), na forma matemática:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(\mathbf{x}, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.2)$$

A função f pode ser qualquer escalar ou tensor, $V(t)$ é o volume do volume de controle em determinado tempo t e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície apontando para fora. Outra forma de descrever o TTR é através da aplicação do teorema da divergência na integral de superfície, o que leva a

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) \right] dV. \quad (2.3)$$

2.2.1 Balanço de massa

Considera-se uma partícula de fluido de volume dV , massa específica ρ em um instante t e a acompanha-se essa partícula, a massa - dm - não pode se alterar ao longo do tempo (MILNE-THOMSON, 1996), logo

$$\frac{Ddm}{Dt} = \frac{D(\rho dV)}{Dt} = 0. \quad (2.4)$$

Pelo teorema de transporte de Reynolds, equação (2.3), pela conservação da massa, equação (2.4), e utilizando f como ρ , chega-se ao resultado:

$$\frac{Dm}{Dt} = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (2.5)$$

Por meio do teorema da localização (MILNE-THOMSON, 1996)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é uma das formas da equação da continuidade em coordenadas eulerianas. Se o escoamento é incompressível, a massa específica não varia ao longo do tempo e espaço, portanto a derivada no tempo euleriana será nula na equação (2.6) e o ρ pode ser retirado do divergente e passar para o outro lado dividindo. Desta forma tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.7)$$

Neste caso, diz-se que o campo é solenoidal. O resultado obtido na equação (2.7) será de extrema importância no desenvolvimento das outras equações e do método numérico.

2.2.2 Balanço de momento

A segunda lei de Newton define que o somatório das forças atuantes em um corpo é igual à variação do momento linear, logo

$$\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s = \frac{d(m\mathbf{u})}{dt}, \quad (2.8)$$

sendo \mathbf{F}_c as forças de campo e \mathbf{F}_s as forças de superfície.

Existem dois tipos de força que podem agir sobre um elemento de fluido: forças de campo - agem a distância do fluido - e forças de contato - agem na superfície do elemento de fluido. As forças de campo, por estarem relacionadas ao volume, são descritas como

$$\mathbf{F}_c = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (2.9)$$

em que \mathbf{f} é uma força de campo qualquer por unidade de massa. As forças atuantes na superfície podem ser descritas segundo uma integral por toda a superfície do vetor \mathbf{t} conforme

$$\mathbf{F}_s = \iint_S \mathbf{t} dS, \quad (2.10)$$

com dS como a área infinitesimal. \mathbf{t} é o vetor de tensões, ou *traction*, e é definido como o produto escalar entre o vetor normal a superfície e o tensor de tensões - $\boldsymbol{\sigma}$ - (ARIS, 2012), ou seja

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.11)$$

Aplicando o teorema da divergência na equação (2.10) e substituindo as equações (2.9), (2.10) e (2.11) na equação (2.8), assim como utilizando o TTR obtêm-se

$$\iiint_V \frac{D(\rho\mathbf{u})}{Dt} dV = \iiint_V \rho \mathbf{f} dV + \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.12)$$

Colocando todos os termos na mesma integral de volume, chega-se a

$$\iiint_V \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) dV = 0. \quad (2.13)$$

Aplicando o teorema da localização, é obtido a equação de Cauchy:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.14)$$

Essa equação será utilizada ao longo de todo projeto, pois a diferença entre um fluido Newtoniano e um ferrofluido no balanço de momento será apenas no tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$.

2.2.3 Balanço de energia

Segundo a primeira lei da termodinâmica, a variação da energia é a soma do calor recebido e do trabalho realizado sobre o volume (BOLES; ÇENGEL, 2013)

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt}. \quad (2.15)$$

Em que E é a energia interna, Q o calor transmitido e W o trabalho.

A energia de um elemento é uma soma da energia cinética - E_c ,

$$E_c = m \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \quad (2.16)$$

e da energia interna, E_t ,

$$E_t = mc_v T, \quad (2.17)$$

na qual c_v é o calor específico à volume constante do material, o calor específico voltará a ser referenciado, porém como c . Como o trabalho é voltado para ferrofluidos que tem como fluido base líquidos, o calor específico a pressão constante e o a volume constante se confundem, logo não há necessidade de diferenciá-los neste trabalho. A partir das equações (2.16) e (2.17), a energia interna pode ser descrita como:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + e \right) dV \quad (2.18)$$

Em que e é a energia interna por unidade de volume.

Assumindo \mathbf{q} como o fluxo de calor ao longo de uma superfície, visto que o calor é um fenômeno que ocorre na fronteira do volume de controle, a taxa de calor que entra no corpo é

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \iint_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.19)$$

Aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV. \quad (2.20)$$

Por último, a taxa de trabalho - potência - pode ser descrita a partir do produto escalar da força pela velocidade, conforme definido nas equações do balanço de força, a potência seria

$$\frac{\delta W}{dt} = \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (2.21)$$

Substituindo as equações (2.18), (2.19) e (2.21) na primeira lei da termodinâmica, equação (2.15), chega-se à primeira forma do balanço de energia:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + e \right) dV = - \iint_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \iiint_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \iint_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (2.22)$$

Separando a parte cinética da energia interna, a equação da energia para a temperatura toma a forma (ARIS, 2012)

$$\frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}). \quad (2.23)$$

A equação (2.23) mostra que a energia interna muda de acordo com o fluxo de calor e com a taxa de deformação, sendo dependente da equação constitutiva que descreve o tensor de tensões.

2.3 Transferência de calor

Existem 4 mecanismos de troca de calor: condução, convecção, radiação e mudança de fase (BEJAN; KRAUS, 2003). A condução é o modo de troca em que o calor se difunde em um sólido ou em fluido estacionário. A convecção é quando ocorre a troca de calor entre uma superfície e um fluido em movimento, nesse caso também há condução. A radiação é o método pelo qual a troca de calor ocorre por meio de ondas eletromagnéticas entre superfícies ou entre uma superfície e um fluido. Como o próprio nome diz, a troca de calor por mudança de fase é a transferência de energia térmica em processos que envolvem as mudanças de estado da matéria - sólido, líquido e gasoso (BEJAN; KRAUS, 2003). Para este trabalho o foco é na condução e na convecção.

Para cada uma das formas apresentadas existe uma equação característica, no caso da condução unidimensional (CENGEL; GHAJAR, 2009), temos

$$q = -kA \frac{dT}{dx}, \quad (2.24)$$

em que k é a condutividade térmica do material, A é a área da seção transversal e dT/dx é a derivada da temperatura ao longo do eixo x . O calor tende a ir do ponto de maior temperatura para o de menor, contrário ao sinal da derivada, por isso existe o sinal negativo na equação (2.24). Para a convecção utiliza-se a lei de Newton

$$q = hA_s(T_s - T_{fluido}), \quad (2.25)$$

em que h é o coeficiente de transferência de calor convectivo, A_s é a área em contato com o fluido, T_s é a temperatura da superfície e T_{fluido} é a temperatura do fluido.

Existem duas formas de convecção, a natural e a forçada. A convecção natural é induzida pelas diferenças de massa específica resultantes do gradiente de temperatura do fluido. O aumento da temperatura diminui a massa específica do fluido, fazendo-o se movimentar para cima, enquanto que a parte mais fria e mais densa se move para baixo. Já na convecção forçada, o escoamento é independente das variações de massa específica e temperatura (BEJAN; KRAUS, 2003).

2.4 Ferrohidrodinâmica

Quando trata-se da interação entre campos eletromagnéticos e fluidos, pode-se dividir em 3 categorias (ROSENSWEIG, 2013):

- Eletrohidrodinâmica: associado às forças elétricas;
- Magnetohidrodinâmica: associado às forças magnéticas em fluidos condutores de eletricidade - Força de Lorentz;

- Ferrohidrodinâmica: associado às forças magnéticas em fluidos não condutores

Na ferrohidrodinâmica a força magnética que influencia no escoamento ocorre devido a força de polarização que requer a magnetização do fluido e gradientes do campo magnético - força de Kelvin:

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}, \quad (2.26)$$

em que \mathbf{f}_m é a força de Kelvin por unidade de volume, μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo, \mathbf{M} é a magnetização e \mathbf{H} o campo magnético. A magnetização consiste na média da direção dos dipolos do momento magnético, trata-se da resposta de um corpo magnético a um campo externo aplicado. Um sólido ferromagnético é composto de vários domínios com direções preferenciais do dipolo magnético, quando não está magnetizado, as direções do momento de dipolo de cada domínio está orientado de forma aleatória, e na média, a magnetização é nula. Quando aplica-se um campo \mathbf{H} , o corpo pode reagir de diferentes formas à magnetização (ROSENSWEIG, 2013):

- Ferromagnético: Apresenta magnetização espontânea, os momentos se alinham na direção e sentido do campo aplicado
- Antiferromagnético: Magnetização espontânea, momentos organizados, porém de forma alternada no sentido, ocasionando uma magnetização nula
- Ferrimagnético: Momentos alinhados de forma desigual
- Paramagnético: Momentos alinhados com o campo aplicado
- Diamagnético: Momentos no sentido oposto ao campo aplicado

Um ferrofluido é caracterizado como superparamagnético, pois se comporta como um paramagnético, com os momentos alinhados com o campo aplicado, porém com uma intensidade maior se comparado a um material paramagnético.

2.5 Ferrofluido

Um ferrofluido consiste em uma suspensão coloidal estável de partículas que interagem com o campo magnético. Esses corpos são materiais feitos de Ferro, Níquel e Cobalto, que são materiais magnéticos. Além disso, cada partícula é coberta por um surfactante que impede que as partículas se agreguem, contribuindo para a estabilidade do fluido, que está diretamente ligada à capacidade do mesmo em manter suas características ao longo do tempo e de determinados processos. As partículas suspensas em um líquido são diretamente afetadas pelo movimento browniano - causado pelo choque das moléculas do fluido com as partículas. Este tipo de movimento tem influência direta na estabilidade,

pois será ele que impedirá gradientes de concentração devido a um campo magnético, formação de agregados devido as forças de Van der Waals, além de impedir a sedimentação (ROSENSWEIG, 2013). Como citado anteriormente, é necessário a presença de surfactantes. Trata-se de compostos que impedem a aproximação excessiva entre partículas. A presença do surfactante ocasiona na existência de 2 tipos de diâmetros:

- Diâmetro Magnético (d_m): diâmetro que o campo magnético percebe. Consiste basicamente em duas vezes o raio da partícula
- Diâmetro hidrodinâmico (d_h): diâmetro que afeta o escoamento do fluido ou que é percebido pelo mesmo. Neste caso acrescenta-se 2 vezes a espessura do surfactante ao diâmetro magnético, ou seja,

$$d_h = d_m + 2\delta, \quad (2.27)$$

em que δ é a espessura da camada de surfactante.

Na Figura 1 é apresentado um esquema da partícula magnética que fica suspensa no fluido.

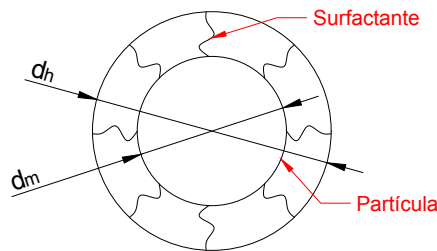


Figura 1: Partícula de um ferrofluido

A partir do volume que uma partícula ocupa, calcula-se a razão entre o o volume ocupado pela partícula pelo volume ocupado pelo fluido, este parâmetro é o ϕ . Existem 2 tipos de ϕ : o ϕ_m que é a razão entre o volume percebido pelo campo magnético pelo volume total do fluido e o ϕ_h que é a razão entre o volume percebido pelo fluido pelo volume total do próprio fluido.

2.5.1 Tempo de relaxação

O tempo de relaxação consiste na mudança da direção da magnetização depois da mudança do campo aplicado. Ao alterar o campo magnético aplicado, existem 2 mecanismos principais de relaxação e ambos estão diretamente associados ao tamanho da partícula. No primeiro mecanismo considera-se que tanto o momento de dipolo quanto

a partícula estão presos e rotacionam juntos, desta forma este mecanismo é influenciado pelo movimento browniano e pela viscosidade do fluido que afetam diretamente a movimentação da partícula, definido pela equação (ROSENSWEIG, 2013):

$$\tau_{Br} = 3 \frac{V\eta}{k_b T}. \quad (2.28)$$

em que τ_{Br} é o tempo de relaxação browniano, V é o volume da partícula η é a viscosidade dinâmica do fluido, T é a temperatura e k_b a constante de Boltzmann.

Já o segundo mecanismo está relacionado à capacidade da partícula em superar a anisotropia do domínio e conseguir mudar a direção do momento de dipolo, mecanismo descoberto por Néel, para isto ela deve superar novamente o movimento browniano (ROSENSWEIG, 2013),

$$\tau_N = \frac{e^{\frac{KV}{k_b T}}}{f_0}, \quad (2.29)$$

em que τ_N é o tempo de relaxação de Néel, V é o volume da partícula, K é a constante de anisotropia do material e f_0 é uma frequência. Neste mecanismo não há influência da rotação da partícula na direção do momento, visto que estes não se movimentam juntos.

Como apresentado nas equações (2.29) e (2.28), para cada relaxamento existe um tempo característico associado, o tempo de menor magnitude predomina a relaxação. Ambos os mecanismos dependem do volume da partícula, entretanto o tempo de relaxação pelo mecanismo de Néel sofre uma maior influência do diâmetro, como pode ser visto na equação (2.29) em que a variação do volume influencia de forma exponencial (ROSENSWEIG, 2013) o tempo de relaxação. Para partículas muito pequenas, menor que 10 nanômetros, é razoável admitir que o tempo predominante é o de Neel. Essa hipótese acarreta algumas questões como: a magnetização vai ser colinear com o campo magnético, o fluido vai ser simétrico, entre outras.

2.5.2 Magnetização

A magnetização consiste na média volumétrica dos momentos de dipolos das partículas

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i^n \mathbf{m}_i. \quad (2.30)$$

Aqui \mathbf{m}_i é o momento de dipolo da partícula i , dado por

$$\mathbf{m} = M_d V, \quad (2.31)$$

em que M_d é a magnetização do sólido. A magnetização é a resposta de um corpo a um campo magnético. Conforme aumenta-se o intensidade do campo, mais próximo da magnetização de saturação, o corpo fica. A magnetização de saturação do ferrofluido é calculada como

$$M_s = \phi_m M_d. \quad (2.32)$$

Para um ferrofluido diluído, a magnetização é obtida segundo a equação de Langevin (ROSENSWEIG, 2013)

$$M = M_s L(\alpha_m), \quad (2.33)$$

em que

$$L(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha}, \quad (2.34)$$

no qual α_m é a razão entre a energia magnética e a energia térmica e \coth a função cotangente hiperbólica. Quanto maior for o α_m , maior a magnetização do fluido na direção do campo magnético. O α_m pode ser calculado segundo a equação

$$\alpha_m = \frac{\pi \mu_0 M_d H d_m^3}{6kT}. \quad (2.35)$$

Para α_m pequeno, a função de Langevin torna-se um terço de α_m , com isso é possível definir uma relação direta entre o campo magnético e a magnetização por meio da susceptibilidade magnética

$$\chi_i = \frac{M}{H} = \frac{\pi \phi_m \mu_0 M_d^2 d_m^3}{18kT}. \quad (2.36)$$

As implicações do α_m e da susceptibilidade magnética é que ao aplicar-se um campo, o valor da magnetização de um corpo dependerá de duas energias, a magnética e a térmica. Conforme aumenta-se a intensidade do campo, maior a tendência do momento de dipolo do material se alinhar à direção do campo, apesar dos esforços do movimento browniano.

2.6 Eletromagnetismo

A força magnética aplicada em uma carga q com velocidade \mathbf{u} devido a um campo indutivo magnético \mathbf{B} é dado pela equação

$$\mathbf{F}_l = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.37)$$

Uma consequência importante que pode ser vista nesta equação é que as forças magnéticas não realizam trabalho, já que um produto vetorial gera um vetor perpendicular a \mathbf{u} e \mathbf{B} (GRIFFITHS, 1962).

O campo indutivo magnético tem seu divergente nulo, o que implica que não existem fontes ou sorvedouros no magnetismo. Porém o seu rotacional é não nulo e a equação gerada é conhecida como lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.38)$$

em que \mathbf{J} é a distribuição de corrente. A distribuição de corrente é dividida em \mathbf{J}_b e \mathbf{J}_f em que

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.39)$$

e pode ser dito como distribuição de corrente limitada. Já \mathbf{J}_f consistiria na corrente que passa por um fio, por exemplo, denominada corrente livre. Neste trabalho será tratado um

regime sem corrente livre, logo \mathbf{J}_f é nulo. Desta forma, apenas a distribuição de corrente fechada que contribui para o campo indutivo. Pode se dizer que um objeto magnetizado cria um campo indutivo \mathbf{B} e vice-versa.

As propriedades \mathbf{B} , \mathbf{H} - que é usualmente chamado de campo magnético auxiliar - e \mathbf{M} são relacionados segundo a equação:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}). \quad (2.40)$$

Se comparado com a equação (2.39) e a equação (2.38) nota-se que o campo magnético \mathbf{H} tem rotacional nulo. Por isso pode ser descrito segundo um potencial Ψ

$$-\nabla\Psi = \mathbf{H}. \quad (2.41)$$

Aplicando o divergente à lei de ampere chega-se a equação

$$\nabla^2\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (2.42)$$

Quando é necessário encontrar o campo magnético, soluciona-se a equação (2.42).

Para solucionar um problema mais completo de ferrofluidos, além da equação de Navier-Stokes e do campo magnético, é necessário uma equação para a magnetização. Para isso são utilizados modelos de magnetização. Estes modelos são utilizados para avançar a média volumétrica do momento de dipolo ao longo do tempo e são utilizados em regimes que a magnetização não apresenta a mesma direção do campo magnético. Um dos mais comuns é o modelo de Shliomis, (ROSENSWEIG, 2013)

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}(\Omega \times \mathbf{M}) - \frac{1}{\tau_{br}}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \frac{\mu_0}{6\eta\phi_m}\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad (2.43)$$

em que \mathbf{M}_0 consiste na magnetização de equilíbrio, a magnetização do fluido na direção do campo se não houvesse perturbações, descrito pela função de Langevin, equação (2.34); Ω é a vorticidade.

No caso de fluidos simétricos superparamagnéticos, não há necessidade de modelos de magnetização, pois o momento de dipolo da partícula não sofrerá influências devido ao escoamento, visto que esse não está preso ao movimento da própria partícula.

2.7 Equações constitutivas

Nas equações diferenciais parciais (2.14) e (2.18) aparece o tensor de tensões, tensor que pode ser dado a partir de equações constitutivas: funções que descrevem a relação entre efeitos observáveis e as propriedades internas da matéria. As equações constitutivas são obtidas diretamente de experimentos ou por meio de generalizações matemáticas de dados experimentais. Ao serem desenvolvidas, é necessário observar a invariância da equação com relação ao sistema de coordenadas, isso implica que ao aplicar uma transformação

ortogonal, a equação constitutiva deve manter o mesmo formato (CHANDRASEKHARAIAH; DEBNATH, 2014).

Um exemplo de equação é a lei de Fourier para a condução de calor:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T, \quad (2.44)$$

em que \mathbf{K} é o tensor condutividade térmica, T a temperatura e \mathbf{q} o vetor fluxo de calor.

Para cada fluido apresentado, newtoniano ou ferrofluido, existe uma equação constitutiva para o tensor de tensões que é aplicado as equações de balanço. No caso de fluidos Newtonianos

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \eta(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T), \quad (2.45)$$

em que P é a pressão, \mathbf{I} o tensor identidade e η a viscosidade dinâmica. Aplicando a equação (2.45) à equação de Cauchy (2.14) resulta

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.46)$$

em que \mathbf{g} é o vetor gravidade. Essa equação é conhecida como a equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível. Para um ferrofluido, no caso simétrico, o tensor de tensões é dado como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \eta(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) - \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}. \quad (2.47)$$

Aplicando o tensor de tensões da equação (2.47) à equação (2.14), obtém-se a equação de Navier-Stokes modificada

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.48)$$

O balanço de energia para um fluido newtoniano é dado pela equação diferencial (CENGEL; GHAJAR, 2009)

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \eta \Phi, \quad (2.49)$$

em que k é a condutividade térmica do fluido e Φ é a função de dissipação viscosa (CENGEL; GHAJAR, 2009). Esta função é importante em escoamentos altamente viscosos, como óleo em mancais, ou de alta velocidade, como voo de aviões, porém no caso deste trabalho, ela apresenta um papel mínimo (CENGEL; GHAJAR, 2009), portanto ela será desconsiderada. Além disso, a equação (2.49) será utilizada para ferrofluidos, pois o calor gerado pelas forças magnéticas é mínimo no caso deste escoamento.

2.8 Números adimensionais

A equação de Navier-Stokes pode ser facilmente adimensionalizada a partir da introdução de parâmetros característicos - U para a velocidade, L para o comprimento,

ρU^2 para a pressão determinados pelas características do fluido e do escoamento - e variáveis adimensionais, como

$$t' = t \frac{U}{L}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad (2.52)$$

e

$$P' = \frac{P - P_0}{\rho U^2}. \quad (2.53)$$

O parâmetro P_0 é uma pressão de comparação pré-definida, pode ser 1 atmosfera, ou a pressão do escoamento não perturbado, ou até mesmo nula. As variáveis com um apóstrofe são adimensionais. Introduzindo as variáveis (2.50), (2.51), (2.52), (2.53) na equação (2.46), chega-se a forma adimensionalizada da equação de Navier-Stokes

$$\frac{D\mathbf{u}'}{Dt'} = -\nabla P' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}'. \quad (2.54)$$

Em que Re é o número de Reynolds, calculado segundo a equação:

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}. \quad (2.55)$$

Os números adimensionais tem sua importância por correlacionar escoamentos que a princípio são diferentes devido às suas propriedades físicas, em apenas uma resposta. Ou seja, ao se solucionar a equação (2.54) para, por exemplo, Reynolds igual a 1, qualquer combinação de propriedades físicas que resulte no mesmo número adimensional, no caso 1, terá uma resposta similar. Diz-se que os escoamentos são dinamicamente similares (BATCHELOR, 2000).

Como já dito, os números adimensionais correlacionam diferentes propriedades em apenas uma variável e acabam por indicar a predominância de certos comportamentos. Por exemplo: o número de Reynolds pode ser entendido como uma razão entre as forças de inércia e as forças viscosas, em baixos Reynolds - $Re \ll 1$ - as forças viscosas predominam o escoamento e a parte convectiva poderia ser desconsiderada na equação de Navier-Stokes.

Para um ferrofluido superparamagnético simétrico, são necessários mais 2 parâmetros característicos

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{H}}{H_0} \quad (2.56)$$

e

$$\mathbf{M}' = \frac{\mathbf{M}}{\phi_m M_d}. \quad (2.57)$$

Em que H_0 é a intensidade do campo, \mathbf{H} é o vetor campo magnético e \mathbf{H}' o campo adimensional, já na equação da magnetização \mathbf{M}' a magnetização adimensional. A partir

dessas duas equações (2.56) e (2.57) surge mais um número adimensional, que representa a influência do campo magnético (AMINFAR; MOHAMMADPOURFARD; ZONOUZI, 2013).

$$Mn = \frac{\mu_0 \phi_m H_0 M_d}{\rho U^2}. \quad (2.58)$$

Esse número é conhecido como número magnético e representa uma razão entre as forças do campo magnético e as forças de inércia. Desta forma a equação (2.48) na forma adimensional fica como

$$\frac{D\mathbf{u}'}{Dt'} = -\nabla P' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}' + Mn(\mathbf{M}' \cdot \nabla) \mathbf{H}'. \quad (2.59)$$

Para o balanço de energia interna, a temperatura é adimensionalizada por meio de uma diferença com base na temperatura quente, T_q , que consiste na maior temperatura no escoamento, e na temperatura fria, T_f , que consiste na menor temperatura do escoamento (CENGEL; GHAJAR, 2009), conforme a seguinte equação

$$\theta = \frac{T - T_f}{T_q - T_f}, \quad (2.60)$$

na qual θ é a temperatura adimensional. Da equação (2.60), a diferença de temperatura adimensional varia, geralmente, de 0 a 1. A equação para a temperatura, em sua forma adimensional, é dada por

$$\frac{D\theta}{Dt'} = \frac{1}{RePr} \nabla^2 \theta. \quad (2.61)$$

O novo número adimensional é o número de Prandtl, Pr que relaciona duas constantes difusivas, a viscosidade cinemática e difusividade térmica, por meio de uma razão conforme a seguinte equação (CENGEL; GHAJAR, 2009):

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_T}. \quad (2.62)$$

Quando o número de Prandtl é maior que 1, maior a difusão viscosa e quando menor que 1, maior a difusão térmica. Uma das consequências práticas é que em $Pr \gg 1$ o escoamento necessita de uma distância maior para se desenvolver termicamente, já que a camada limite térmica difunde com uma maior dificuldade.

O número de Nusselt é a razão entre a capacidade de transferência de calor por convecção pela capacidade de transferir calor por meio da condução, ele é dado como (CENGEL; GHAJAR, 2009)

$$Nu = \frac{hL}{k}, \quad (2.63)$$

em que h é coeficiente de transferência de calor por convecção, k é a condutividade térmica do fluido e L é um comprimento característico do escoamento. Se o número de Nusselt é maior que 1 significa que a convecção intensificou as trocas de calor e é mais eficiente que

a condução (CENGEL; GHAJAR, 2009). Um exemplo dessa intensificação é o caso do ar, a sua condutividade térmica é baixa e por isso ele é utilizado para isolar termicamente. Porém, quando em movimento, as trocas de calor aumentam consideravelmente.

Diferentemente do número de Reynolds, do número de Prandtl e do número magnético, o número de Nusselt não é um parâmetro pré-estabelecido do escoamento. Ele é uma consequência de como o escoamento se desenvolve e, por isso, ele não é definido e sim calculado. Em um problema em que as equações estão na forma adimensional, o número de Nusselt pode ser calculado conforme

$$Nu = \left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{y=y_p} . \quad (2.64)$$

que é a derivada da diferença de temperatura adimensional na direção normal à parede do escoamento.

Quando se trabalha com convecção, um dos grandes desafios é encontrar o coeficiente de transferência de calor. Com o número de Nusselt a tarefa é simplificada, já que determinando esse número, basta aplicá-lo na equação (2.63).

Os dois tipos de convecção podem ocorrer simultaneamente, ou cada tipo de convecção pode dominar. Isso depende da razão

$$\frac{Gr}{Re^2} \quad (2.65)$$

no qual Re é o número de Reynolds e Gr é o número de Grashof. O número de Grashof é um número adimensional relacionado a força de empuxo (BEJAN; KRAUS, 2003), definido como

$$Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2}, \quad (2.66)$$

em que g é a gravidade, β o coeficiente de expansão térmica, T_s a temperatura da superfície, T_∞ a temperatura do fluido, L o comprimento característico e ν a viscosidade dinâmica. Quando a razão (2.65) está próxima de 1, nenhum mecanismo de convecção domina, tanto a natural como a forçada tem a sua contribuição. Já quando é muito maior que 1, a natural governa, e quando muito menor que 1, a convecção forçada governa (CENGEL; GHAJAR, 2009).

Um outro número adimensional relacionado a convecção natural é o número de Rayleigh que é o produto do número de Grashof pelo número de Prandtl (BEJAN; KRAUS, 2003)

$$Ra = GrPr. \quad (2.67)$$

Para este trabalho será utilizado apenas a convecção forçada.

Deste ponto em diante, todos os parâmetros estarão na forma adimensional com exceção da equação de calor na seção 3.2.1, portanto, não será mais utilizado o apóstrofo para essa indicação.

3 Metodologia Numérica

3.1 Introdução

A equação que descreve o escoamento de um fluido Newtoniano é a equação de Navier-Stokes. Apesar de reproduzir fielmente a física de um fluido, inclusive em casos de turbulência (MOIN; MAHESH, 1998), a presença de suas não-linearidades ocasiona a inexistência de uma solução geral para a equação. Existem casos especiais em que é possível encontrar alguma equação condizente com a realidade: escoamentos de baixíssimo Reynolds, “creeping flow”, fluidos desenvolvidos, escoamento de Couette, escoamento de Poiseulle, entre outros (WANG, 1991).

Uma forma de contornar esse problema consiste em realizar experimentos. Eles permitem de forma eficiente medir determinados parâmetros em um escoamento, porém isso pode se tornar uma tarefa árdua, custosa e demorada. Uma segunda alternativa é a utilização de métodos numéricos (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Os métodos numéricos surgiram no século XVI (GOLDSTINE, 2012), mas apenas no século XX eles se tornaram praticáveis devido o advento do computador (FERZIGER; PERIĆ, 2002). Desde então ocorreu um grande avanço em diversas áreas relacionadas à mecânica dos fluidos, como pode ser visto na Figura 2 que mostra um comparativo entre o avanço dos modelos de CFD, a introdução de complexidades nas simulação, o tamanho das malhas e o lançamento de aviões ao longo dos anos. Além da aviação, passou a ser possível o estudo dos mais diversos problemas, como: o escoamento do sangue e sua relação com doenças cardiovasculares (BYUN; RHEE, 2004); a otimização de trocadores de calor e verificação do seu funcionamento (BHUTTA et al., 2012); o estudo da ventilação de estações de metrô (YUAN; YOU, 2007), entre outros diversos estudos.

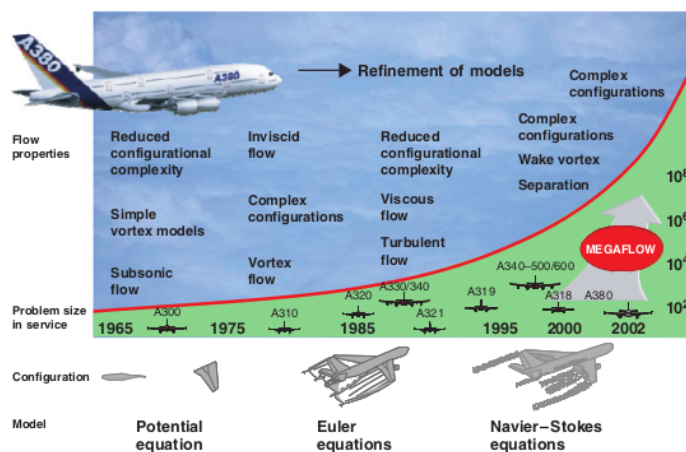


Figura 2: Evolução dos modelos de CFD, dos modelos de escoamento e dos aviões (HIRSCH, 2007)

Devido a todo esse avanço, hoje em dia é possível realizar simulações em computadores pessoais em questão de minutos. A nível de comparação no primeiro estudo numérico da cavidade, um dos computadores utilizados - Bendix G15 - conseguia armazenar apenas 2160 palavras na memória e 16 na memória de rápido acesso e pesava 438 kg (KAWAGUTI, 1961).

Por tudo já apresentado, a formulação numérica foi escolhida para este trabalho, em detrimento do método analítico e da realização de experimentos. Será utilizado ao longo do projeto o método de projeção, o método de diferenças finitas e o método do gradiente conjugado pré-condicionado pela matriz simétrica do SOR para solucionar a equação de Navier-Stokes. Não serão feitas hipóteses simplificadoras com a finalidade de retirar termos da equação discretizada.

Nas próximas seções todos esses métodos serão apresentados, assim como o programa de computador escrito em Fortran 95 será validado.

3.2 Diferenças finitas

A ideia por trás do método de diferenças finitas é de basicamente aproximar uma derivada por meio da razão entre duas diferenças, conforme (HIRSCH, 2007)

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (3.1)$$

basicamente é a definição de derivada sem que Δx tenda a zero. Pelo fato de Δx não tender a zero, surge um erro denominado de erro de truncamento, que não é apresentado na equação (??). Conforme diminui-se esse valor, o erro tende a diminuir de acordo uma potência p , denominada ordem de acurácia do método.

Para avaliar a derivada de primeira ordem em um determinado ponto x , existem 3 fórmulas principais: a diferença para frente, a diferença para trás e a diferença central. A

diferença para frente consiste em aproximar a derivada em x utilizando o valor da função em um ponto $x + \Delta x$, equação (3.1); enquanto que na para trás aproxima-se por meio de uma valor anterior, no caso em $x - \Delta x$

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

Esses dois métodos consistem em métodos de primeira ordem utilizando apenas 2 pontos. Já nas diferenças centrais, é utilizado os valores da função em $x - \Delta x$ e $x + \Delta x$ conforme a equação

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.3)$$

e este método é de segunda ordem (HIRSCH, 2007).

O método de diferenças finitas requer a discretização do domínio em uma malha com diversos nós. Para incorporar esse fator as derivadas apresentadas, enumera-se cada valor de x , portanto para uma derivada em x_i , utiliza-se seus valores em x_{i-1} e/ou x_{i+1} , as equações (3.1), (3.2) e (3.3) tomam a forma apresentada nas equações

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (3.4)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (3.5)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (3.6)$$

Em alguns casos é necessário calcular em $x_{i+1/2}$, nesse caso utiliza-se uma média entre x_i e x_{i+1} . Na Figura 3 é apresentado em esquema da discretização de um domínio em uma dimensão.

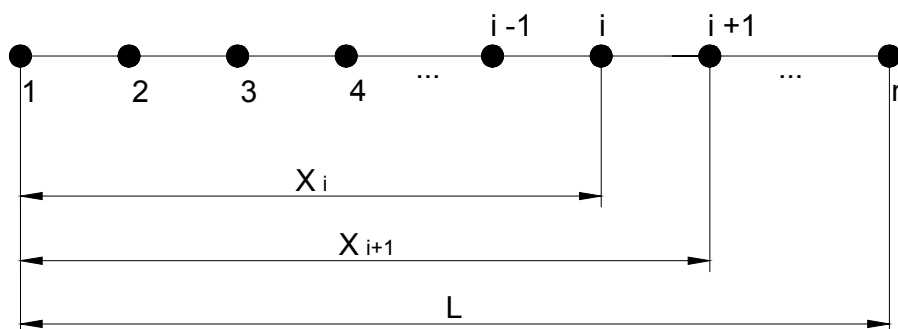


Figura 3: Esquema de discretização de um domínio em 1D

Para aumentar a ordem do método é necessário utilizar um maior número de pontos, que no caso seriam o $i + 2$ ou $i - 2$ e continua desta forma (HIRSCH, 2007). Para

as diferenças com um lado prioritário, é apresentado a aproximação nas equações para frente e para trás:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x}, \quad (3.7)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2\Delta x}. \quad (3.8)$$

Já para derivadas de segunda ordem, é mais comumente utilizado a derivada central:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (3.9)$$

Na equação de Navier-Stokes, as derivadas de primeira ordem estão na parte convectiva da derivada total, enquanto que as de segunda ordem estão na parte difusiva proveniente da parte viscosa do tensor de tensões. A parte difusiva não costuma apresentar contratempos para a solução numérica, com exceção quando utiliza-se o método explícito no tempo. Já para a convectiva é necessário alguns cuidados, tendo em vista que trata-se do transporte convectivo do momento linear, portanto a direção e o sentido da velocidade apresentam um fator importante na solução do problema.

Quando se utiliza as diferenças centrais para a derivada de primeira ordem, atribui-se o mesmo peso da derivada para um ponto a montante e a jusante de x_i , o que pode gerar instabilidades (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Porém esse problema pode ser contornado por meio da utilização de uma malha mais fina.

Um dos métodos para a derivada de primeira ordem é o método do Upwind. Este consiste em utilizar derivadas com um lado prioritário, escolhido de acordo com a direção e sentido da velocidade naquele ponto. Escolhe-se sempre o sentido contrário ao da velocidade do escoamento, desta forma prioriza-se de onde o escoamento está vindo. Nesse método são utilizadas as equações (3.4) e (3.5). Apesar de uma maior estabilidade, este método cria uma difusão numérica aumentando o erro. Por isso, pode-se utilizar o Upwind de segunda ordem, representado pelas equações (3.7) e (3.8), que apresenta uma difusão numérica bem menor mantendo a acurácia e a estabilidade (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

3.2.1 Método de Euler explícito, implícito e Crank-Nicolson

Até o momento foram mostrados formas de representar as derivadas no espaço. No tempo existem 3 métodos mais comuns: o Euler explícito, o Euler implícito e o Crank-Nicolson.

Em um problema transiente, como o da condução de calor unidimensional,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.10)$$

em que T é a temperatura, t o tempo, x o espaço e α_T a difusividade térmica - a parte espacial da equação é discretizada a partir de uma diferença centrada, equação (3.6). Porém, existe a questão de em que tempo será avaliada a parte espacial: em n , $n + 1$, ou $n + 1/2$.

Ao aproximar a derivada do espaço em no tempo n , a equação (3.10) toma a forma da equação

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha_T \left(\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right). \quad (3.11)$$

Quando esta derivada é avaliada no tempo n , chama-se este método de Euler Explícito. Basicamente ele consiste em descrever o valor do T_i^{n+1} a partir dos seus valores já conhecidos. Na Figura 4 é apresentada a representação deste método. Esse método é de simples implementação e não requer a solução de um sistema linear para identificar os valores em $n + 1$.

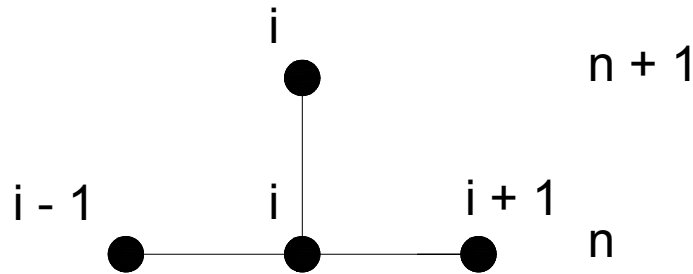


Figura 4: Representação do método explícito - i representa os nós em x e n o avanço no tempo

Apesar da fácil implementação, trata-se de um método condicionalmente estável. Isso quer dizer que certas condições de estabilidade são necessárias para o que o método seja estável. Por exemplo, na equação do calor unidimensional, deve-se satisfazer a seguinte condição

$$\alpha_T \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1/2. \quad (3.12)$$

A partir dessa condição é possível observar a velocidade que o passo no tempo tem que diminuir conforme refina-se a malha para que o método seja estável, isso limita a capacidade do método. Serão necessários muitos passos no tempo em malhas mais finas aumentando consideravelmente o tempo necessário para o cálculo (HIRSCH, 2007).

Já no método de Euler Implícito, a derivada espacial é considerada no tempo $n + 1$,

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha_T \left(\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right). \quad (3.13)$$

Neste método é necessário resolver um sistema para encontrar os valores $n + 1$, Figura 5. Entretanto, diferentemente do método explícito, no caso da equação de calor, ele se torna incondicionalmente estável, permitindo a livre variação do Δt e do Δx (HIRSCH, 2007).

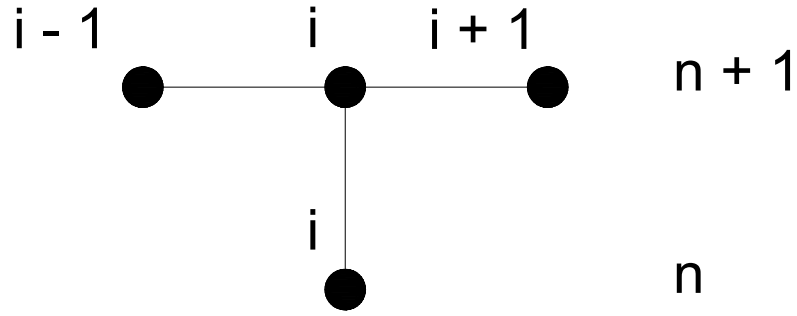


Figura 5: Representação do método implícito - i representa os nós em x e n o avanço no tempo

Apesar da maior estabilidade e a possibilidade de utilizar passos de tempo maiores, o método implícito não é tão acurado em representar a realidade. Por isso que opta-se por utilizar o método de Crank-Nicolson.

Este método consiste em representar a parte espacial com o tempo n e $n + 1$, ou seja, no tempo $n + 1/2$. Trata-se de uma aproximação de uma derivada muito mais próxima da realidade. Desta forma, a parte espacial consistiria em uma média entre o valores no tempo n e $n + 1$, conforme apresentado na equação

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_T}{2} \left(\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right). \quad (3.14)$$

Assim como na forma implícita, é necessário a resolução de um sistema linear para encontrar os valores em $n + 1$, porém ele é mais estável e mais acurado que os outros métodos (HIRSCH, 2007). Na Figura 6 é apresentado o esquema do método de Crank-Nicolson

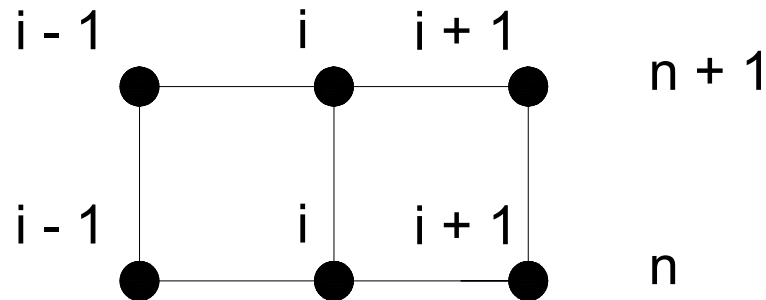


Figura 6: Representação do método de Crank-Nicolson - i representa os nós em x e n o avanço no tempo

Para o código, foram utilizados o método implícito e o método de Crank-Nicolson para o avanço no tempo. Apesar da sua estabilidade para o caso da equação do calor, a presença de não linearidades na equação de NS implica sempre na possibilidade de instabilidades. Essa questão será abordada mais adiante.

3.3 Método de projeção de primeira e segunda ordem

Tratar numericamente a equação de Navier-Stokes incompressível não é uma tarefa fácil, além das não linearidade já conhecidas, existe o problema da pressão. Uma das abordagens para solucionar esse contratempo é o método de projeção (CHORIN, 1967).

Discretizando a equação de Navier-Stokes no tempo chega-se à seguinte equação

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} - \nabla P^{n+1}, \quad (3.15)$$

o termo convectivo será sempre tratado de forma explícita, visto que trata-se de um termo não linear e a sua implementação de forma implícita acarretaria na mudança do método (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Um dos termos da equação governante em questão é a contribuição da força causada pela pressão na variação da velocidade. Ele é dado como o gradiente da pressão, equação (2.46). Entretanto, não existe uma relação direta entre a velocidade e a pressão para que se possa remover essa variável do problema, nem mesmo utilizando a equação da continuidade. A formulação vorticidade e função de corrente é usualmente utilizada para não ter que lidar com a pressão. Essa abordagem se baseia na relação que o laplaciano da função de corrente é igual a vorticidade do fluido, porém esse método se restringe a problemas bidimensionais. Uma segunda abordagem seria aplicar o divergente à equação (2.46), desta forma o termo relacionado à pressão tomaria a forma de um laplaciano. Porém este método apresenta limitações em escoamentos transientes e na implementação das condições de contorno (CHORIN, 1967).

Proposto em 1967, o método de projeção consiste na criação de uma compressibilidade artificial do fluido para desta forma ser possível desacoplar a velocidade da pressão (CHORIN, 1967). Presume-se que existe uma velocidade intermediária \mathbf{u}^* , a qual se aplicado o divergente não resultaria em 0, ou seja, seria compressível. Portanto insere-se na equação (3.15) \mathbf{u}^* somando e subtraindo, resultando em

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} - \nabla P^{n+1}. \quad (3.16)$$

Divide-se a equação (3.16) em duas equações, uma sem a pressão e outra com:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^* \quad (3.17)$$

e

$$\frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*)}{\Delta t} = -\nabla P^{n+1}, \quad (3.18)$$

respectivamente. Aplicando o divergente na equação (3.18) o termo \mathbf{u}^{n+1} se anula por ser incompressível e pressão passa a ser acompanhada por um laplaciano, conforme a equação

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \nabla^2 P^{n+1}. \quad (3.19)$$

Com esta equação em mãos, é possível resolver a pressão e aplicar a correção em \mathbf{u}^* para se obter \mathbf{u}^{n+1} :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla P^{n+1}. \quad (3.20)$$

Para um método de segunda ordem - Crank-Nicolson - existem diversas abordagens, desde formulações sem pressão até a criação de uma nova variável ϕ . A questão do problema está em como aproximar a parte convectiva para $n + 1/2$ e em como associar a pressão as equações. Dependendo da forma dessa associação, perde-se a ordem do método.

Segundo Brown, Cortez e Minion (2001), um método de segunda ordem que mantém a ordem tanto na velocidade de na pressão é método apresentado nas equações

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2}, = \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) - \nabla P^{n-1/2}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \nabla^2 \phi^{n+1}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1} \quad (3.23)$$

e

$$P^{n+1/2} = P^{n-1/2} + \phi^{n+1} - \frac{1}{2Re} \nabla^2 \phi^{n+1}. \quad (3.24)$$

Trata-se de um método no qual o avanço no tempo da pressão é descrito como uma função da própria pressão em um passo anterior a n e do ϕ , dessa forma a equação de Navier-Stokes é calculada com uma pressão atrasada. Além disso, o termo convectivo é baseado segundo o método de Adam-Bashforth, que extrapola o valor de qualquer termo para $n + 1/2$ no tempo a partir dos valores em n e $n - 1$, conforme a equação

$$a^{n+1/2} = \frac{3}{2}a^n - \frac{1}{2}a^{n-1}. \quad (3.25)$$

Com o valor intermediário de \mathbf{u}^* , prossegue-se ao cálculo de ϕ e a correção da velocidade, de forma similar ao método de segunda ordem e por último, calcula-se a nova pressão. Na equação (3.24) existe um fator de correção para a pressão dado pelo laplaciano de ϕ , essa correção mantém a ordem do método.

Para o ferrofluido, a diferença no tratamento é que a equação (3.21) é acrescida da parte magnética avaliada em $n + 1/2$, logo

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2}, = \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n) - \nabla P^{n-1/2} + Mn \mathbf{M}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{H}^{n+1/2}. \quad (3.26)$$

A temperatura é avaliada por meio da seguinte equação

$$\frac{\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla \mathbf{T}^{n+1/2} = \frac{1}{2RePr} \nabla^2 (\mathbf{T}^{n+1} + \mathbf{T}^n). \quad (3.27)$$

No anexo C é apresentado o algoritmo para a solução das equações.

3.3.1 Malha defasada

Avaliar todos os parâmetros no mesmo ponto implica no problema de uma pressão oscilante, para prevenir esse problema utiliza-se a malha defasada. Pressão, velocidade em x e velocidade em y são avaliados em pontos diferentes do domínio, logo cada um desses parâmetros apresenta uma malha com seus próprios índices (i, j) (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Na Figura 7 é apresentado um esquema que mostra onde cada parâmetro será calculado a partir da divisão da malha, os quadrados seriam a componente u da velocidade, os triângulos a componente v e os círculos, a pressão, a temperatura e a magnetização. Os pontos localizados fora do domínio - linha pontilhada vermelha - são os “Ghosts”, pontos auxiliares para o cálculo das condições de contorno.

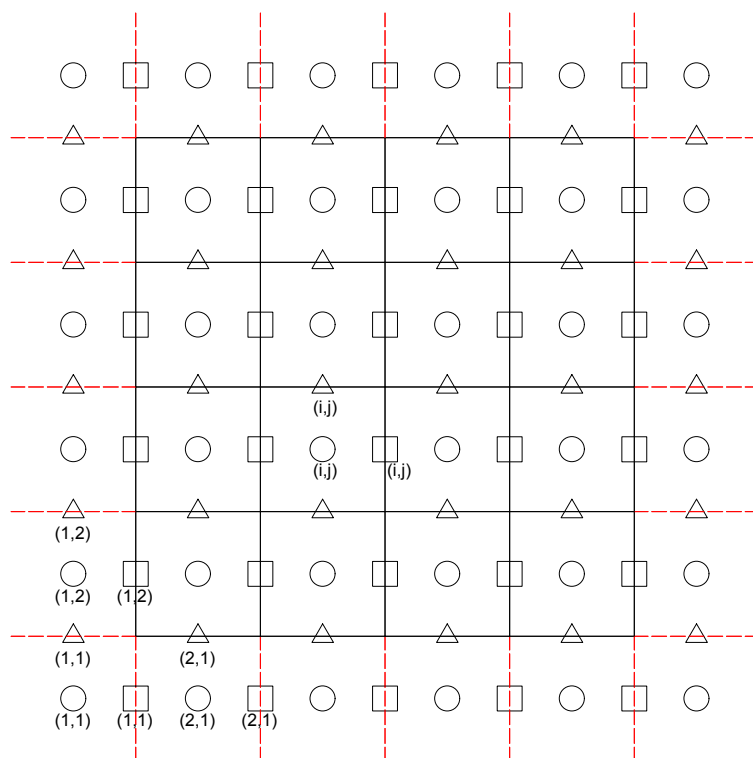


Figura 7: Esquema da malha defasada

A utilização desse tipo de malha implica em modificações na forma como cada nó contribui para as equações discretizadas. Elas são apresentadas no anexo A.

3.4 Consistência, Estabilidade e convergência

Quando se implementa um método numérico, existem 3 critérios que o método numérico deve obedecer:

1. Consistência: o método numérico tende à equação diferencial quando o passo no tempo e no espaço tendem a 0
2. Estabilidade: o erro do método é limitado
3. Convergência: o método converge para a solução real

Essas condições estão interligadas e segundo o Teorema da equivalência de Lax: “para um problema de valor inicial e um método de discretização consistente, a estabilidade é necessária e suficiente para a convergência”. Desta forma, analisa-se a ordem do método e a estabilidade do método. Para a ordem do método: escreve-se as variáveis de uma equação em uma série de Taylor e aplica-se na equação discretizada, a ordem dos termos que são diferentes da equação discretizada original consistem na ordem do método (HIRSCH, 2007).

Já para a estabilidade existem algumas condições. Uma delas é que para que o método numérico, quando este apresenta uma parte explícita, seja convergente é a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Esta condição define que a razão entre o passo no tempo e o passo no espaço multiplicado pela velocidade deve ser menor que o número de Courant. Isso significa que a razão entre o passo no espaço e o passo no tempo tem que ser similar à maior velocidade que um sinal se propaga em uma Equação Diferencial Parcial (MOURA; KUBRUSLY, 2012),

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq C_o. \quad (3.28)$$

Para aumentar a resolução de um método, pode-se diminuir o número de Courant (C_o) Outro parâmetro para garantir a estabilidade do método é a utilização da condição de estabilidade de Von Neumann:

$$|G| \leq 1. \quad (3.29)$$

O G consiste na amplificação do erro a cada passo, ou seja, é uma razão entre o passo em $n + 1$ e o passo em n . Logo se menor que 1, mostra que conforme o método avança, o erro sempre tenderá a diminuir. Essa condição surge da análise de Von Neumann que expande o erro de uma solução numérica em um série de Fourier finita.

Trabalhando o fator G pode-se chegar a uma relação para Δx e Δt para a estabilidade diferente do CFL, como a equação (3.12). A partir desta condição que se define se o método é condicionalmente estável, incondicionalmente estável ou instável. Para o condicionalmente estável, é necessário seguir uma relação entre Δx e Δt para que o método convirja. Já para o incondicionalmente estável, não importa os valores do passo no tempo e no espaço que o método irá convergir e o instável sempre diverge. Geralmente os métodos explícitos tendem a ser condicionalmente estáveis ou instáveis (HIRSCH, 2007).

3.5 Sistemas lineares

Ao se discretizar uma equação chega-se a um sistema linear igual a

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{b}, \tag{3.30}$$

\mathbf{A} a matriz de coeficientes, \mathbf{w} é o vetor de incógnitas e \mathbf{b} o vetor independente. E para cada posição (i, j) dos nós na malha designa-se um valor de $w(i, j)$ e um $b(i, j)$.

Entretanto essa abordagem é muito custosa e rapidamente supera a memória do computador, pois em um problema com uma malha de $N_x \times N_y$ seriam necessário uma matriz \mathbf{A} de $N_x N_y \times N_x N_y$. Além disso, existem diversos zeros espalhados por essa matriz.

Por isso, utiliza-se a formulação do estêncil. Cada valor de x_{ij} depende apenas dos seus valores vizinhos, conforme Figura 8. Desta forma, existiria uma matriz para cada coeficiente: a, b, c, d, e, que estariam dispostas conforme

$$aw_{i-1,j} + bw_{i+1,j} + cw_{i,j} + dw_{i,j-1} + ew_{i,j+1} = Su, \tag{3.31}$$

ou seja, elas representariam a matriz de coeficientes completa \mathbf{A} . Apesar da necessidade de 4 matrizes a mais, o tamanho de todas elas é $N_x \times N_y$.

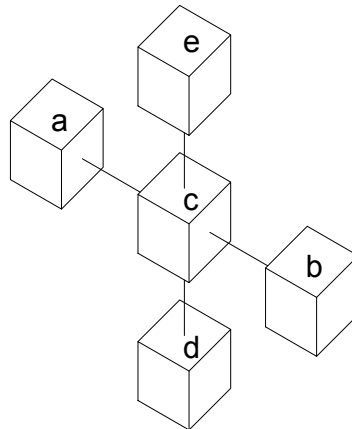


Figura 8: Esquema do método do estêncil para um problema 2D

Da mesma forma que o sistema linear passa para a forma do estêncil, também é necessário passar o método de solução de sistemas lineares escolhido

Uma das formas mais simples de se resolver um sistema linear é através da inversão da matriz \mathbf{A} e a multiplicação à esquerda com o vetor \mathbf{b} ,

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \tag{3.32}$$

Apesar de simples, nem sempre inverter uma matriz é uma tarefa simples. Portanto, utiliza-se métodos iterativos para a solução de sistemas. O método utilizado nesse trabalho é o Gradiente conjugado pré-condicionado pela matriz simétrica do método Sucessive over relaxation (GCPSSOR). Um método mais rápido e que requer um menor número de iterações se comparado com outros métodos iterativos, como pode ser visto na Figura 9 e um tempo menor, como pode ser visto na Tabela 1. O computador utilizado apresenta as seguintes configurações: processador Intel i5 com frequência de 1,7GHz, 2 núcleos e 4 threads, além de memória RAM de 8 GB. Não foi utilizada programação paralela.

Nessa Figura é apresentado o número de iterações necessários para resolver um problema permanente de condução de calor em 2D - equação de Laplace - para diferentes métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, Gradiente, Gradiente conjugado, ADI (TDMA), Gradiente conjugado pré condicionado pela matriz simétrica do SOR e gradiente conjugado pré condicionado pela matriz dos coeficientes da diagonal. Neste problema considerou-se que 3 paredes das placas estão a 0°C e uma a 1°C, utilizou-se uma malha de 50 x 50. O algoritmo do GCPSSOR é apresentado no anexo B.

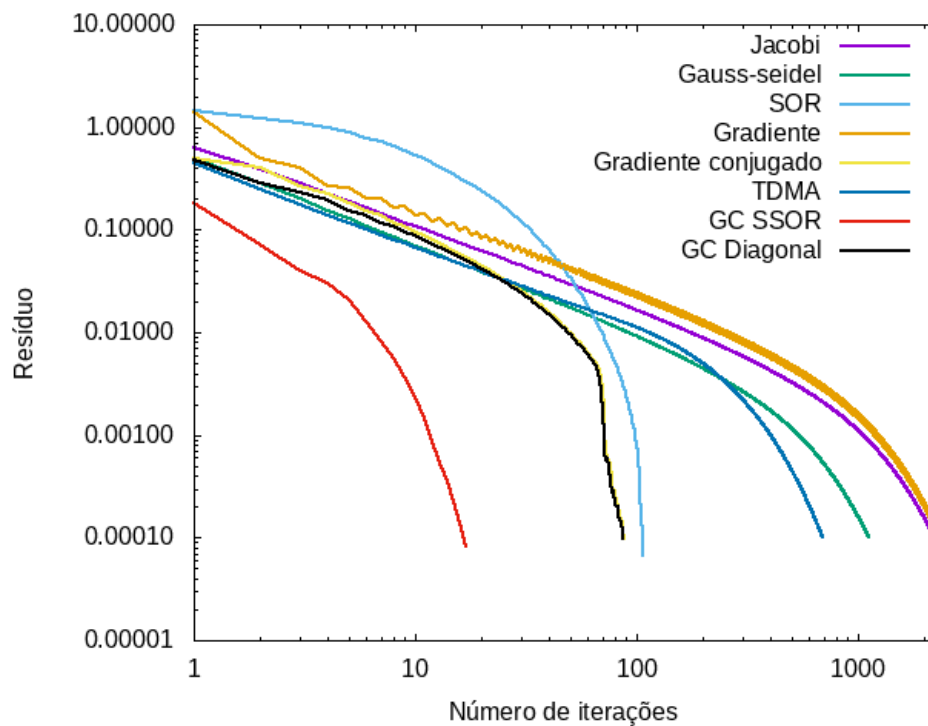


Figura 9: Comparação entre os diferentes métodos iterativo: Jacobi, Gauss-seidel, SOR, Gradiente, Gradiente conjugado, ADI, Gradiente conjugado pré condicionado pela matriz simétrica do SOR e gradiente conjugado pré condicionado pela matriz dos coeficientes da diagonal

Tabela 1: Tempo que cada método precisou para resolver o problema

Método	Tempo (s)
Jacobi	0,19
Gauss-Seidel	0,088
SOR	0,0089
Gradiente	0,25
Gradiente Conjugado	0,0089
ADI (TDMA)	0,22
GC SSOR	0,0044
GC Diagonal	0,011

3.6 Validação do método numérico

Nas próximas seções, o método utilizado e o programa desenvolvido serão validados a partir de diferentes problemas da mecânica dos fluidos. No caso, a cavidade e o comprimento de desenvolvimento no escoamento entre placas.

São apresentados diversos esquemas referentes às configurações dos escoamentos. Onde há parede, é considerado a condição de não deslizamento para a velocidade e para a pressão considera-se que o gradiente será nulo na direção normal à parede, conforme as equações

$$\mathbf{u}(x = x_p, y = y_p) = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

e

$$\nabla P(x = x_p, y = y_p) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (3.34)$$

Nos escoamentos com entrada, será considerado uma velocidade definida e um gradiente de pressão nulo e na saída, será considerado gradiente de velocidade nulo e pressão igual a 0.

3.6.1 Cavidade

O problema da cavidade é conhecido como o escoamento forçado por um cisalhamento devido a uma das paredes ser móvel, enquanto que as outras três, que confinam o fluido, estão paradas. Um esquema representativo é apresentado na Figura 10. Essa configuração cria um vórtice central e outros nos cantos do domínio (BURGGRAF, 1966).

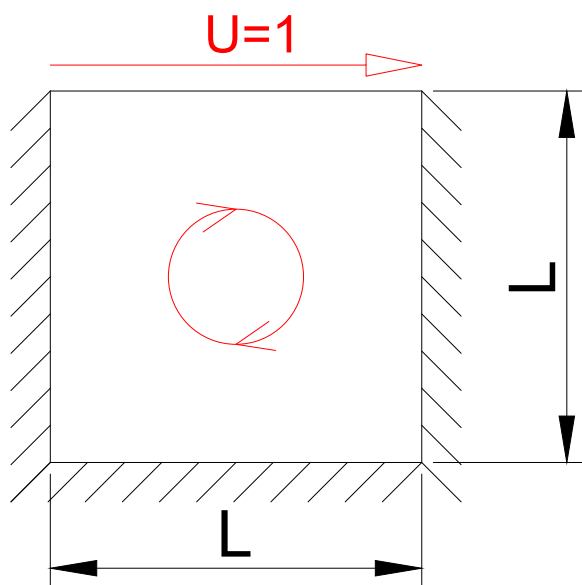


Figura 10: Esquema da cavidade

A cavidade é um dos problemas mais comuns na mecânica dos fluidos e um *benchmark* importante na validação de códigos para simulação numérica (ABDELMIGID et al., 2017). Segundo Shankar e Deshpande (2000):

"... A recirculação em um escoamento gerado pelo movimento de uma ou mais paredes não é apenas tecnologicamente importante, ele é de grande interesse científico pois apresentam quase todo fenômeno que pode ocorrer em um escoamento na geometria mais simples".

Os primeiros estudos datam da década de 60, Kawaguti (1961) foi o primeiro autor a resolver esse problema de forma numérica à partir da formulação vorticidade e função de corrente. O autor utilizou o método das diferenças finitas para solucionar as equações governantes. O trabalho se restringiu a um número de Reynolds máximo de 64 - o autor tentou simular um escoamento com Reynolds de 128, porém não houve convergência - e procurou abordar diferentes razões de aspecto da cavidade (KAWAGUTI, 1961). Devido a limitações da época, a melhor malha utilizada continha apenas 121 nós, com menos de 80 dentro do domínio, a malha com poucos nós impediu a constatação dos vórtices formados nos cantos do domínio.

Burggraf (1966) revisitou o problema, agora com uma malha mais refinada e maiores números de Reynolds. Trata-se do primeiro estudo a apresentar os valores de função de corrente máximos, em módulo, para vários números de Reynolds. Esses eram de no máximo 400, pois acima deste valor não houve convergência. Novamente, foi utilizada a mesma formulação do autor Kawaguti (1961), porém, para atingir maiores números de

Reynolds, foi utilizado um fator de relaxamento.

Interessante ressaltar o pioneirismo destes autores, além da demora para a solução de um problema simples com uma malha grosseira: no caso do Kawaguti (1961) foram necessários 20 minutos e no caso do Burggraf (1966), 30 minutos.

Um dos estudos mais conhecidos é o do Ghia, Ghia e Shin (1982), que avançou ainda mais no número de Reynolds, atingindo até 10000 utilizando o método do Multigrid. Esse método consiste em alterar a malha de forma a suavizar erros. Os dados do Ghia, Ghia e Shin (1982) serão utilizados para comparação do programa criado.

AbdelMigid et al. (2017) trouxeram uma grande revisão do problema da cavidade. Eles compararam os resultados de diversos autores ao longo dos anos e os diferentes métodos utilizados, desde diferenças finitas até Lattice Boltzman.

3.6.1.1 Convergência de Malha

Simulou-se uma cavidade com 3 paredes imóveis e a superior se movendo da esquerda para a direita com velocidade adimensional de 1 e comprimento L de 1, conforme a Figura 10. Foram utilizados 3 formulações conforme apresentado na seção 3.2 e no anexo A.

- Implícito no tempo, difusão por diferenças centrais e convecção por upwind de primeira ordem;
- Crank-Nicolson no tempo, difusão por diferenças centrais e convecção por upwind de segunda ordem;
- Crank-Nicolson no tempo, difusão e convecção por meio das diferenças centrais;

Para os dois itens foram realizados estudos de convergência de malha para 3 números de Reynolds - 100, 400, 1000 - e 3 de razão entre Δt e Δx - 0,5, 0,25, 0,125. Todos os casos simulou-se o problema até o tempo 1. As malhas utilizadas são apresentadas na Tabela 2 junto com os passos no tempo e as distâncias entre nós

Tabela 2: Malhas utilizadas e parâmetros para cada número de Reynolds, a malha foi utilizada onde há o “X”

	Número de Reynolds			$\Delta t/\Delta x$	0,5	0,25	0,125
Malha	100	400	1000	Δx	Δt		
21 × 21	X	X	-	0,05	0,025	0,0125	0,00625
41 × 41	X	X	X	0,025	0,0125	0,00625	0,03125
81 × 81	X	X	X	0,0125	0,00625	0,003125	0,0015625
161 × 161	X	X	X	0,00625	0,003125	0,0015625	0,00078125
321 × 321	X	X	X	0,003125	0,0015625	0,00078125	0,00039062

Como trata-se um domínio quadrado, o número de Nós em x é o mesmo número em y . Escolheu-se o menor valor da função de corrente (Ψ) como objeto de comparação.

Os resultados da convergência de malha são apresentados nas Figuras 11, 12, 13, eles mostram o comportamento do valor mínimo de Ψ . Conforme aumentou-se o número de nós das malhas, mais próximo foram os resultados, até que, em determinado ponto, deixa de ocorrer a variação significativa do valor da função de corrente. Para Reynolds igual a 100, ocorreu a melhor convergência, com todas as ordens e passos no tempo convergindo de forma similar. Já para os números de Reynolds maiores, o método de segunda ordem se mostrou mais efetivo, principalmente com Reynolds igual a 1000.

No método de segunda ordem com a razão entre Δt e Δx em 0,5 ocorreu uma oscilação no erro, Figuras 11 e 12. Uma das explicações possíveis é que se trata de um caso com um passo no tempo grande em um regime transiente, o que pode ter afetado os resultados para malhas mais grosseiras.

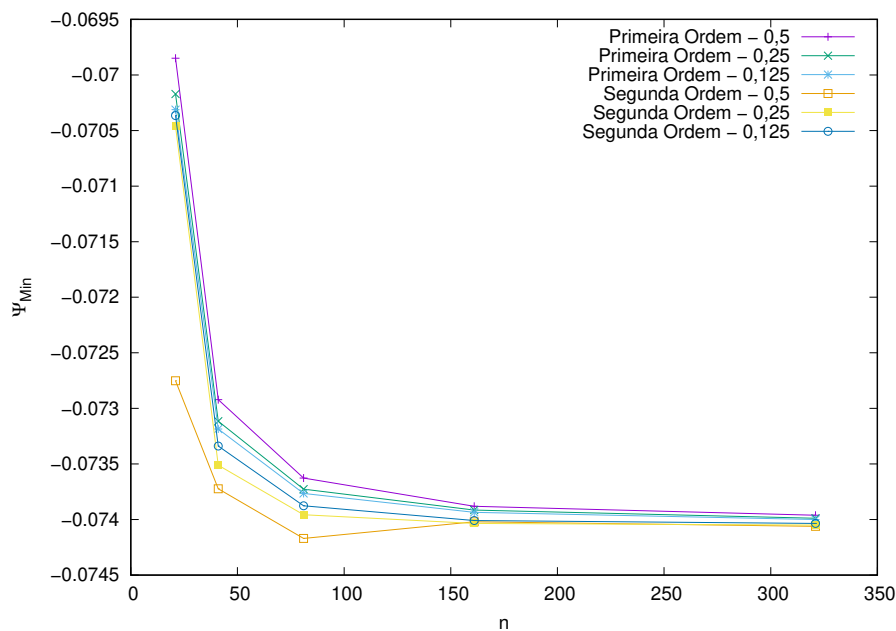


Figura 11: Convergência de malha para Reynolds 100

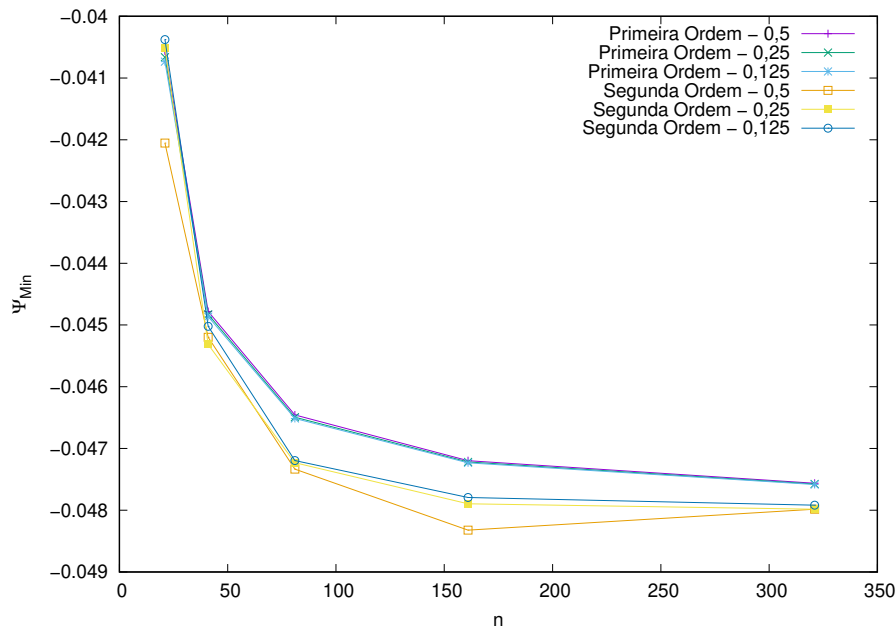


Figura 12: Convergência de malha para Reynolds 400

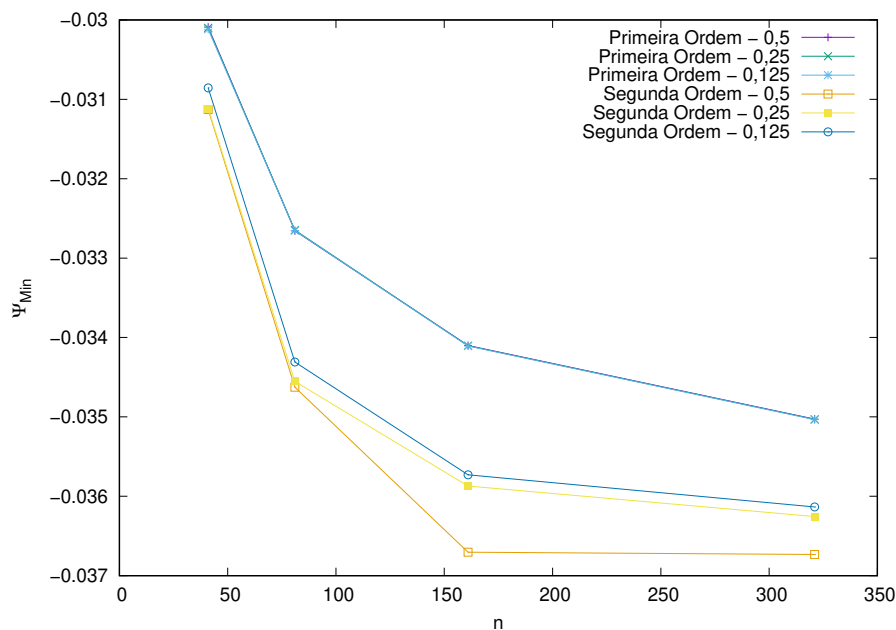


Figura 13: Convergência de malha para Reynolds 1000

3.6.1.2 Regime Permanente

Para avaliar o regime permanente, verificou-se se os resultados eram compatíveis com os dados do perfil de velocidade do Ghia, Ghia e Shin (1982).

Para as simulações dos regimes permanentes, optou-se por uma malha de 151 x 151 e Δt de 0,0013. Novamente simulou-se escoamentos com Reynolds de 100, 400 e 1000 até o tempo de 15, 60 e 150, respectivamente. Foram feitas comparações dos perfis de velocidade na direção x em $x = 0,5$ e na direção y em $y = 0,5$ de cada método

apresentado com os resultados do Ghia, Ghia e Shin (1982). Os gráficos são apresentados nas Figuras 14, 15 e 16, para a velocidade u com os números de Reynolds de 100, 400, 1000, respectivamente; nas Figuras 17, 18 e 19 para a velocidade v com os números de Reynolds de 100, 400 e 1000, respectivamente. Como já se era esperado com base nos resultados anteriores, conforme o número de Reynolds aumenta, pior fica os resultados para o método de primeira ordem. Enquanto que as duas formulações com métodos de segunda ordem no tempo apresentam resultados consistentes tanto para baixos, quanto para altos Reynolds.

O pior desempenho do método de primeira ordem está associado a utilização do upwind de primeira ordem. Este método cria uma difusão artificial contribuindo para as diferenças notadas nos gráficos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; HIRSCH, 2007).

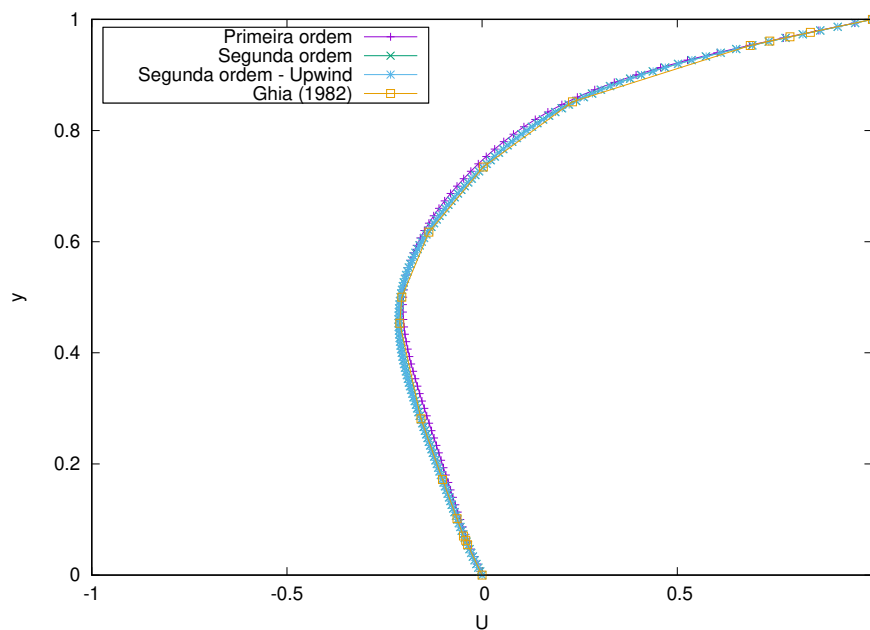


Figura 14: Comparação dos Perfis de velocidade de u em $x = 0,5$ com Reynolds 100 para diferentes métodos

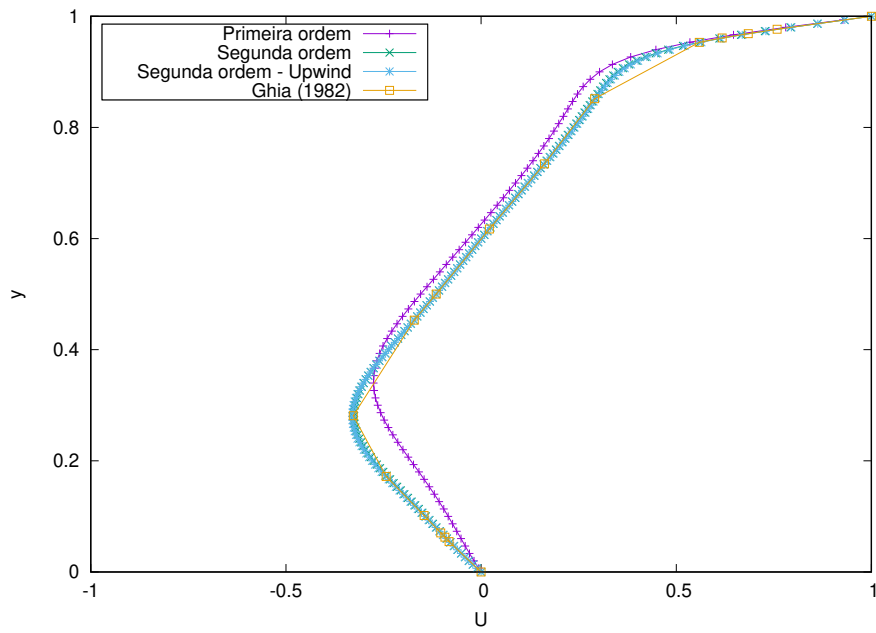


Figura 15: Comparação dos Perfis de velocidade de u em $x = 0,5$ com Reynolds 400 para diferentes métodos

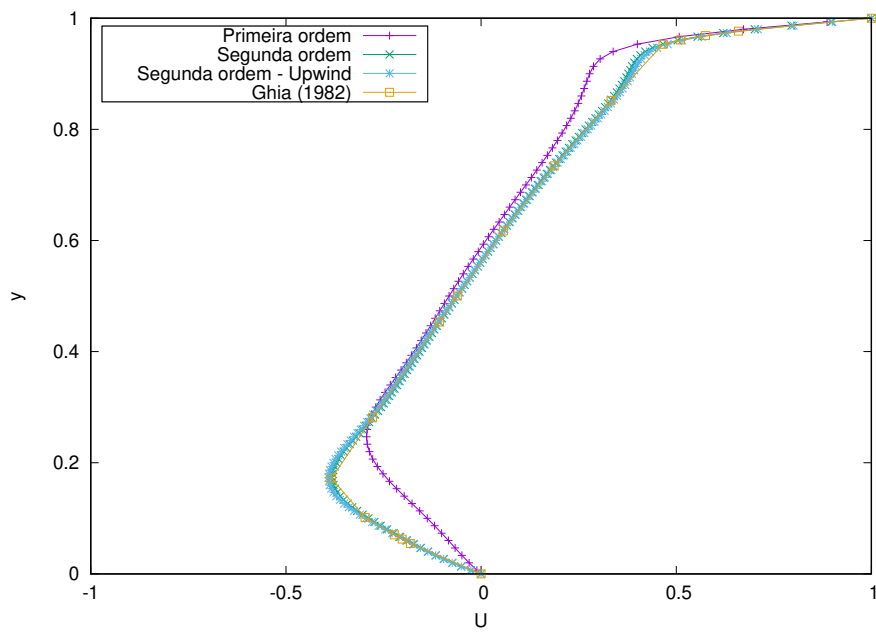


Figura 16: Comparação dos Perfis de velocidade de u em $x = 0,5$ com Reynolds 1000 para diferentes métodos

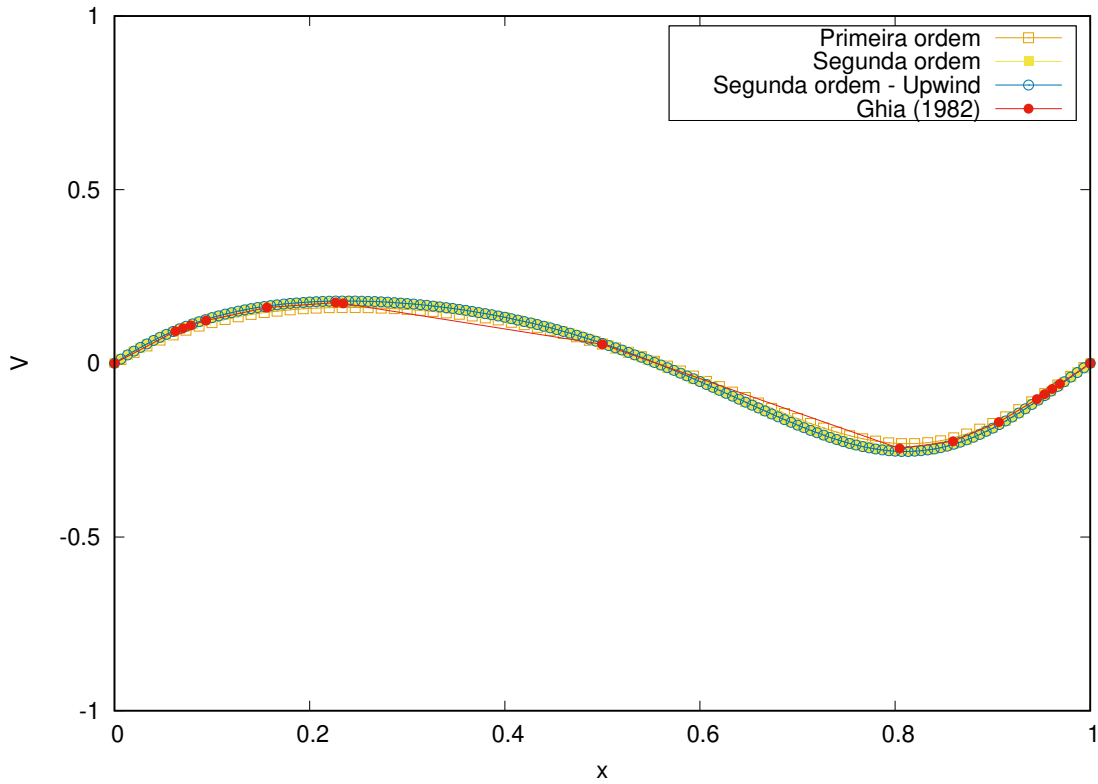


Figura 17: Comparação dos Perfis de velocidade de v em $y = 0,5$ com Reynolds 100 para diferentes métodos

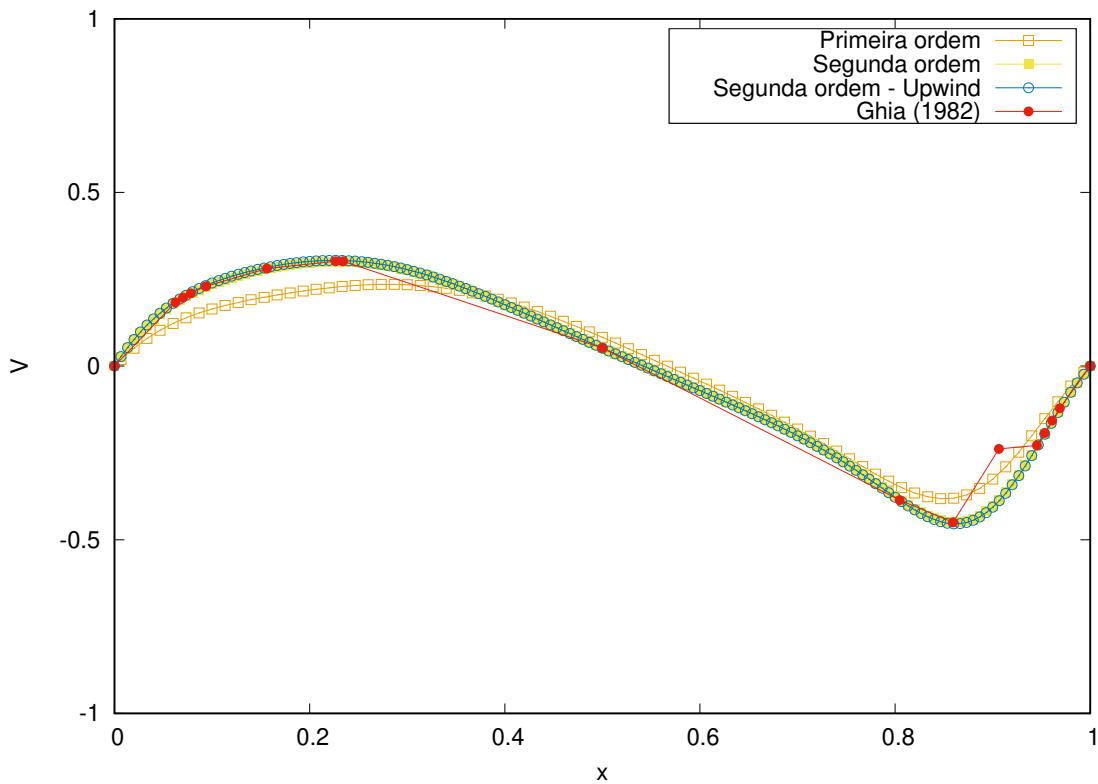


Figura 18: Comparação dos Perfis de velocidade de v em $y = 0,5$ com Reynolds 400 para diferentes métodos

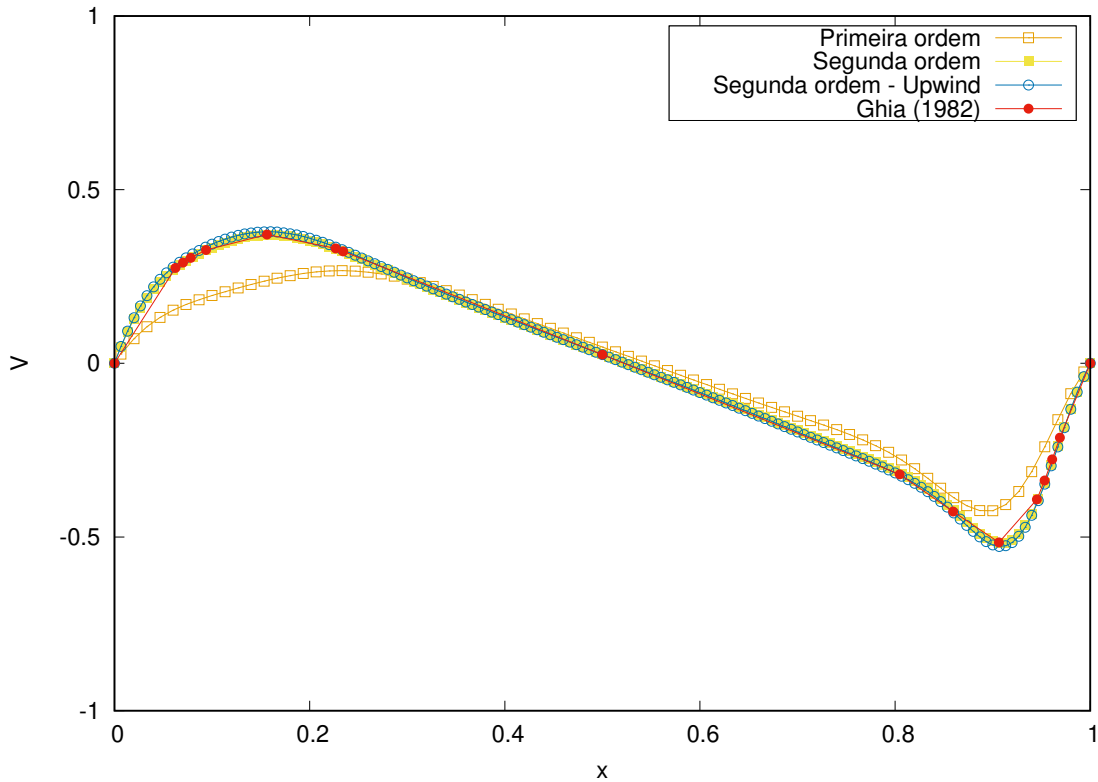


Figura 19: Comparação dos Perfis de velocidade de v em $y = 0,5$ com Reynolds 1000 para diferentes métodos

Levando em consideração os resultados das duas seções 3.6.1.1 e 3.6.1.2 constata-se que o método de primeira ordem convergiu para um resultado com uma razão do passo no tempo pelo espaço de 0,25. Porém, ao analisar os perfis de velocidade, mostra-se que existe uma clara limitação, visto que este não representou os perfis como todos os outros métodos e o trabalho de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Nas Figuras 20, 21 e 22 são apresentadas as linhas de corrente para os números de Reynolds de 100, 400 e 1000, respectivamente. Em todas as Figuras é possível observar a formação das 3 zonas de recirculação, a principal no centro do domínio, e mais 2 secundárias no canto inferior esquerdo e direito.

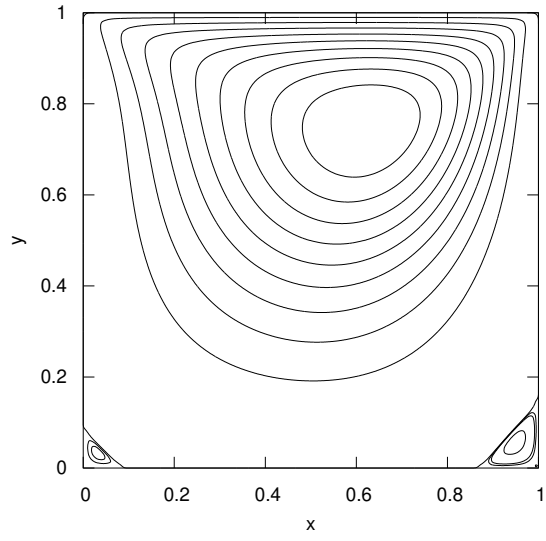


Figura 20: Linha de Corrente para $Re = 100$

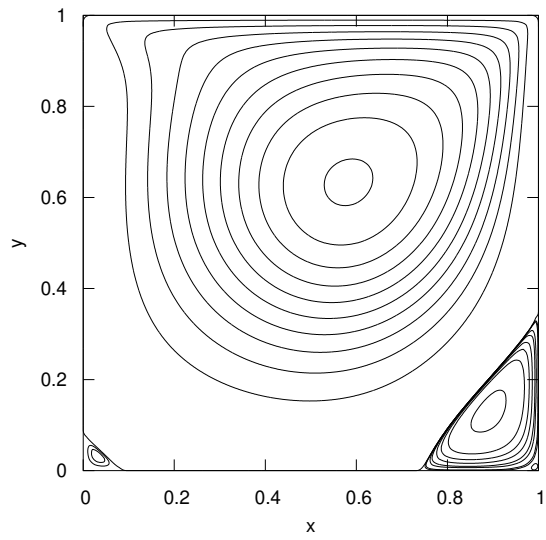


Figura 21: Linha de Corrente para $Re = 400$

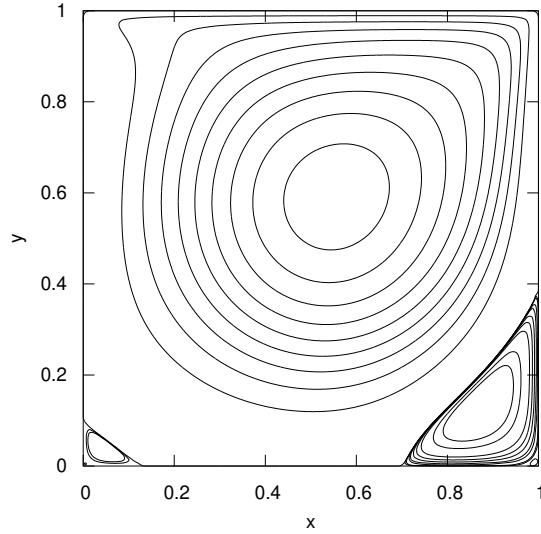


Figura 22: Linha de Corrente para $Re = 1000$

Para as próximas seções só será utilizado a segunda ordem no tempo e no espaço - diferenças centrais para a convecção.

3.6.2 Escoamento entre placas

O escoamento que adentra um tubo ou duas placas paralelas varia ao longo de um certo comprimento devido a interações com a parede. A implicação de uma condição de não deslizamento na parede causa a mudança no perfil de velocidade. Estas variações ocorrem até que os perfis se encontrem no meio da geometria, porém o fluido já terá percorrido determinado comprimento axial (ÇENGEL; CIMBALA, 2015). Essa distância é chamada de comprimento de desenvolvimento ou comprimento de entrada, e quando o fluido para de variar na direção axial, diz-se que o escoamento é desenvolvido. Na Figura 23, é apresentado o esquema do problema em questão, em que L é o comprimento do domínio e L_c o comprimento necessário para o desenvolvimento. Para este problema as condições de contorno são de entrada com velocidade definida e variação nula da pressão, já na saída é invertido, velocidade com variação nula e pressão iguala a zero. Esse é um dos problemas mais comuns na dinâmica dos fluidos, está diretamente associado a camada limite e é estudado de forma intensa desde 1891, (DURST et al., 2005).

Entende-se que o escoamento está desenvolvido quando seu perfil de velocidade passa a ser parabólico e não varia na direção axial (ÇENGEL; GHAJAR, 2009). Sabe-se que o comprimento de desenvolvimento, para altos números de Reynolds varia de forma linear conforme aumenta-se o número de Reynolds,

$$\frac{L_c}{D} = C Re. \quad (3.35)$$

em que L é o comprimento de desenvolvimento, D a distância entre placas ou o diâmetro e C constante de calibração. Porém não existe um consenso sobre o valor exato desta constante, diversos estudos apresentam diferentes resultados variando de 0,028 a 0,09 (DURST et al., 2005), por exemplo: o primeiro estudo numérico encontrou como resultado C_0 igual a 0,057 (HORNBECK, 1964); em 1979 um estudo a partir de uma abordagem analítica encontrou 0,075 (MOHANTY; ASTHANA, 1979) e em 1965, a partir de experimentos, determinaram 0,03 (MCCOMAS; ECKERT, 1965). Além disso, essa equação é válida para altos Reynolds. Para Reynolds menores, entre 1 e 100, utiliza-se a equação

$$\frac{L_c}{D} = C_0 + C_1 Re. \quad (3.36)$$

Essa equação apresenta mais uma constante para que seja levado em conta os efeitos viscosos mais pronunciados nesse tipo de escoamento (DURST et al., 2005).

Durst et al. (2005) propõem uma última equação que descreveria melhor o comprimento de desenvolvimento. A equação,

$$\frac{L_c}{D} = [(0,631)^{1,6} + (0,0442 Re)^{1,6}]^{1/1,6}, \quad (3.37)$$

seria a equação definitiva: ela apresenta uma correção não linear para condizer com os resultados numéricos do autor.

Devido a essa inconstância nos valores e nas equações, para validar o software em um problema de entrada e saída do escoamento será utilizado como parâmetro a convergência de malha, o comportamento da pressão e a formação do perfil parabólico.

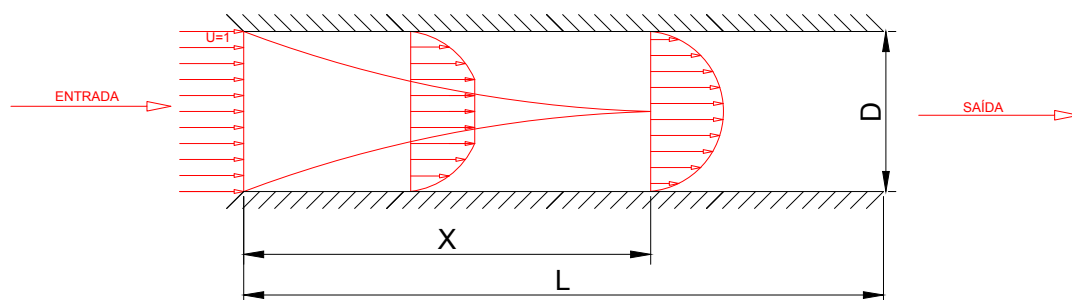


Figura 23: Esquema do comprimento de desenvolvimento

3.6.2.1 Convergência de malha

Foram escolhidos 3 números de Reynolds para as simulações de convergência: 1, 10 e 100. Os domínios apresentam razão entre comprimento e distância entre placas de 4, 4 e 10 respectivamente, esses valores foram definidos com base na equação (3.37), desta

forma garantiu-se que o escoamento estaria completamente desenvolvido na sua saída. O tempo final foi o mesmo valor do comprimento. Essas informações estão reunidas na Tabela 3.

Tabela 3: Parâmetros para as simulações

Re	L/D	Tempo	Comprimento de desenvolvimento,eq. (3.37)
1	4	4	0,637
10	4	4	0,835
100	10	10	4,54

Para cada escoamento utilizou-se malhas com mesmo número de nós - N - em x e y , com exceção do caso $Re = 100$, neste os nós em x eram o dobro de nós em y . Isso causou a presença de uma razão de aspecto entre Δx e Δy diferente de 1, esse fator será avaliado posteriormente. Para comparação entre valores, utilizou-se o valor da velocidade na direção x no centro geométrico do domínio. E por último, utilizou-se um CFL de 0,3, calculado de acordo com a velocidade máxima do escoamento, aproximadamente 1,5, logo o passo no tempo seria um quinto do menor delta espacial.

Os resultados obtidos para a convergência de malha são apresentados nas Tabelas 4, 5 e 6. Todos os escoamentos apresentaram uma convergência do valor de U no centro da malha. O que apresentou mais dificuldades foi o de 100, visto que este apresenta uma não linearidade com maior influência no escoamento, porém convergiu como os outros.

Tabela 4: Malhas utilizadas e valores de U obtidos para Reynolds igual a 1

N_x	N_y	Δx	Δy	Δt	U
21	21	0,2	0,05	0,01	1,4925
41	41	0,1	0,025	0,005	1,4981
81	81	0,05	0,0125	0,0025	1,4995
161	161	0,025	0,00625	0,00125	1,4999

Tabela 5: Malhas utilizadas e valores de U obtidos para Reynolds igual a 10

N_x	N_y	Δx	Δy	Δt	U
21	21	0,2	0,05	0,01	1,4926
41	41	0,1	0,025	0,005	1,4982
81	81	0,05	0,0125	0,0025	1,4996
161	161	0,025	0,00625	0,00125	1,4999

Tabela 6: Malhas utilizadas e valores de U obtidos para Reynolds igual a 100

N_x	N_y	Δx	Δy	Δt	U
101	51	0,1	0,02	0,004	1,4872
201	101	0,05	0,01	0,002	1,4879
401	201	0,025	0,005	0,001	1,4882

Um parâmetro que deve ser abordado é a razão de aspecto. Ele é definido como a razão entre o espaçamento dos nós na direção x pelo espaçamento dos nós na direção y . Uma alta razão de aspecto significa que em y o escoamento é avaliado mais vezes do que em x . Foi verificado a sua influência sobre os resultados de convergência de malha, para isso simulou-se o escoamento com um número de Reynolds de 10 em um domínio com $L = 4$ e $D = 1$, até o tempo $T = 4$. Novamente escolheu-se o valor de U no centro do domínio.

Na Tabela 7 são apresentados os resultados obtidos, assim como as diferentes malhas com as diferentes razões de aspecto. Observa-se que o parâmetro de maior importância para a convergência do método foi o valor entre os nós na direção y do que em x .

Tabela 7: Comparação entre as diferentes razões de aspecto

N_x	N_y	Δx	Δy	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	U
161	41	0,025	0,025	1	1,4977
321	81	0,0125	0,0125	1	1,4995
161	81	0,025	0,0125	2	1,4996
321	161	0,0125	0,00625	2	1,4999
81	161	0,05	0,00625	8	1,4999

3.6.2.2 Regime permanente

Em regime permanente, um escoamento entre placas desenvolvido tem sua pressão variando de acordo com a equação

$$P(x) = C_{\text{pressão}} - 12 \frac{x}{Re}, \quad (3.38)$$

em que a constante $C_{\text{pressão}}$ é fruto da condição de contorno da saída, neste caso, $P(L) = 0$. Em um escoamento desenvolvido, a pressão não varia com y , apenas com x , logo, em todas as alturas, a pressão varia da mesma forma.

Utilizando equação (3.38) como objeto comparativo, passou-se à simulação do problema em regime permanente para avaliar o comportamento da pressão e das componentes da velocidade. Optou-se por 3 números: 1, 10, 100; para Reynolds 1 e 10, simulou-se até o tempo 10, para 100, até 25. Os dados são apresentados na Tabela 8, junto com as malhas utilizadas.

Tabela 8: Domínios e malha utilizados no problema permanente

Re	L/D	T	N_x	N_y	Δx	Δy	Δt
1	4	10	200	100	0,02	0,01	0,002
10	4	10	200	100	0,02	0,01	0,002
100	10	25	250	100	0,04	0,01	0,002

Nas Figuras 24,25 e 26 são apresentados os resultados obtidos na simulação para Re igual a 1, para a pressão, a velocidade em x e em y , respectivamente. Como esperado,

após atingir o ponto em que o escoamento passa a ser desenvolvido a pressão passa a variar de forma linear e a velocidade tanto em x quanto em y passam a ser constantes. A pressão apresenta um gradiente maior, o que é esperado para escoamentos em que a viscosidade apresenta maior papel (WHITE, 2010). A pressão também variou conforme a solução analítica para o escoamento desenvolvido. A velocidade também apresenta um gradiente mais intenso, visto que antes de 1 o escoamento já está completamente desenvolvido, com a sua velocidade no centro atingindo 1,5. Além disso, é interessante visualizar a presença de velocidade na direção y na região de desenvolvimento, o maior pico de velocidade chega a atingir mais de 0,35.

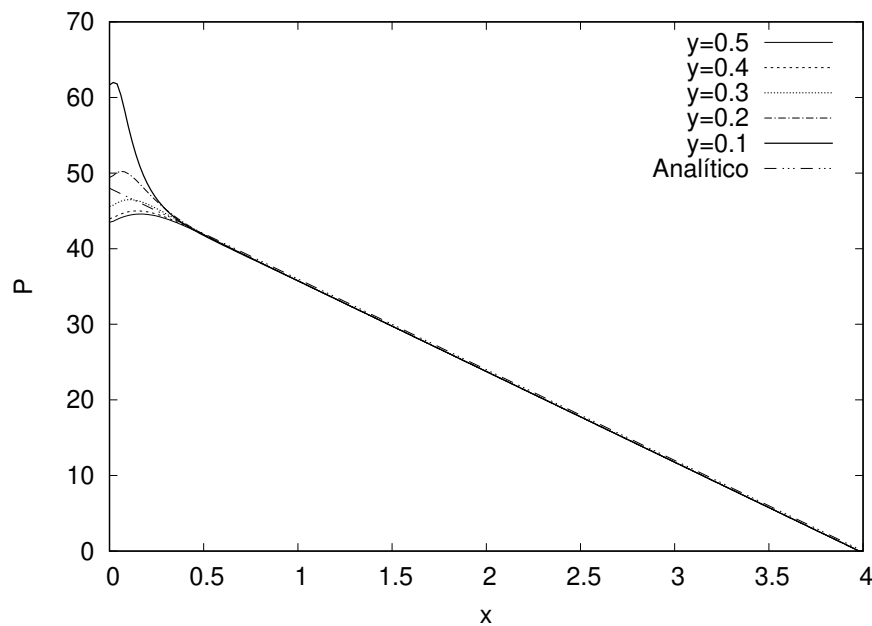


Figura 24: Variação da pressão em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 1$

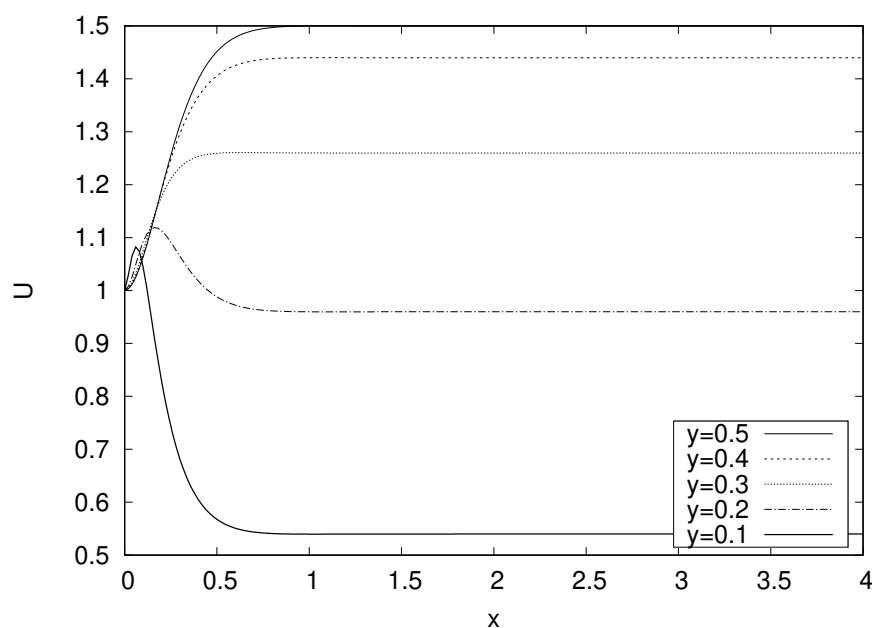


Figura 25: Variação da velocidade U em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 1$

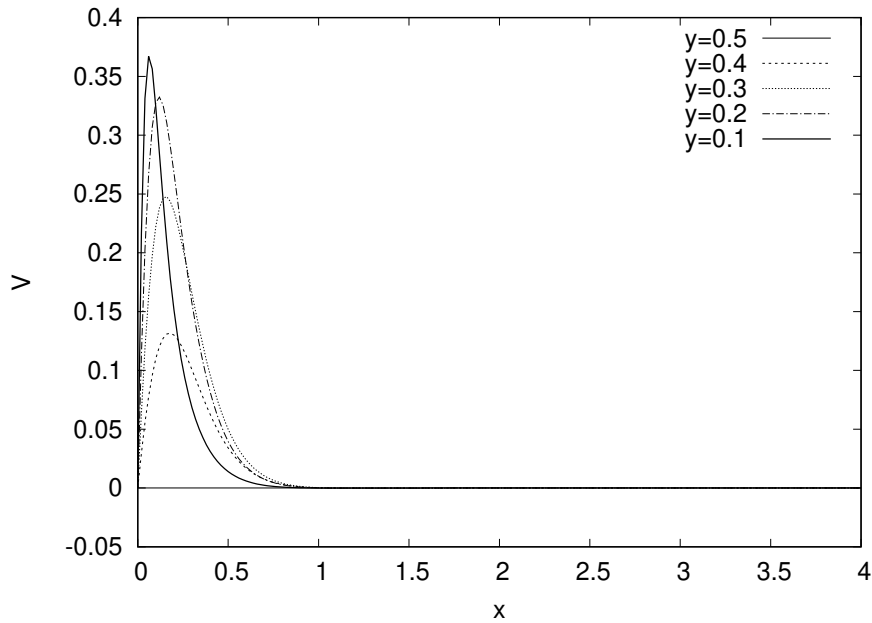


Figura 26: Variação da velocidade V em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 1$

Nas Figuras 27, 28 e 29 são apresentados os comportamentos da pressão, da velocidade em x e em y para $Re = 10$. Em comparação com os resultados para $Re = 1$, os gradientes foram de menor intensidade, ao ponto que demorou mais para o escoamento se desenvolver. Porém ele continuou mantendo o caráter de um fluido desenvolvido, com velocidade constante e pressão caindo de forma linear. Interessante ressaltar os valores de pressão e de velocidade em y que foram menores do que em $Re = 1$.

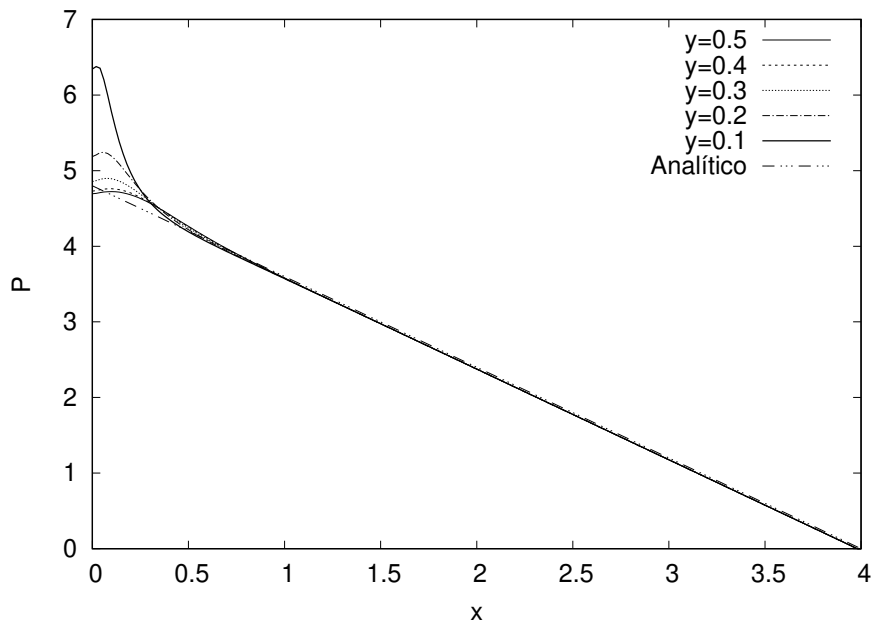


Figura 27: Variação da pressão em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 10$

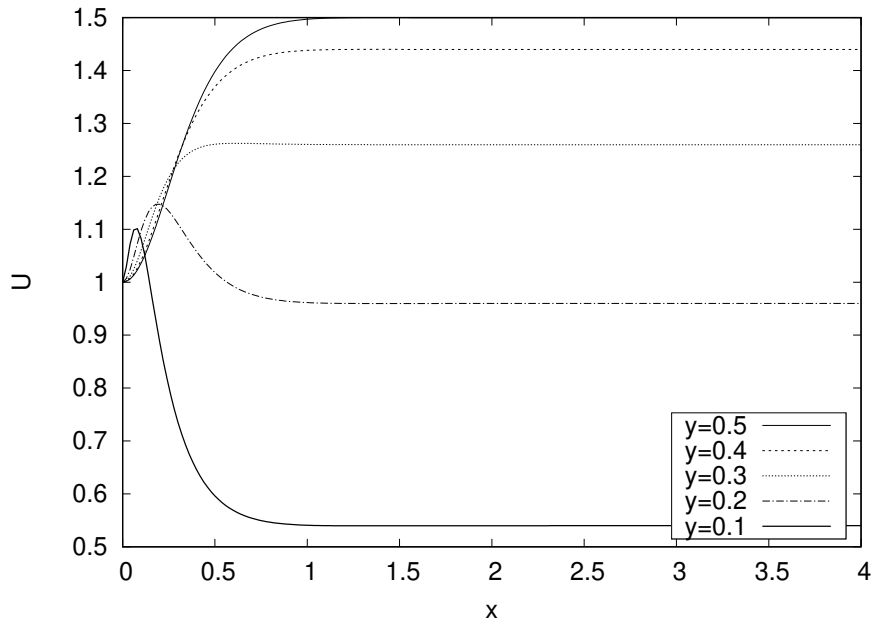


Figura 28: Variação da velocidade U em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 10$

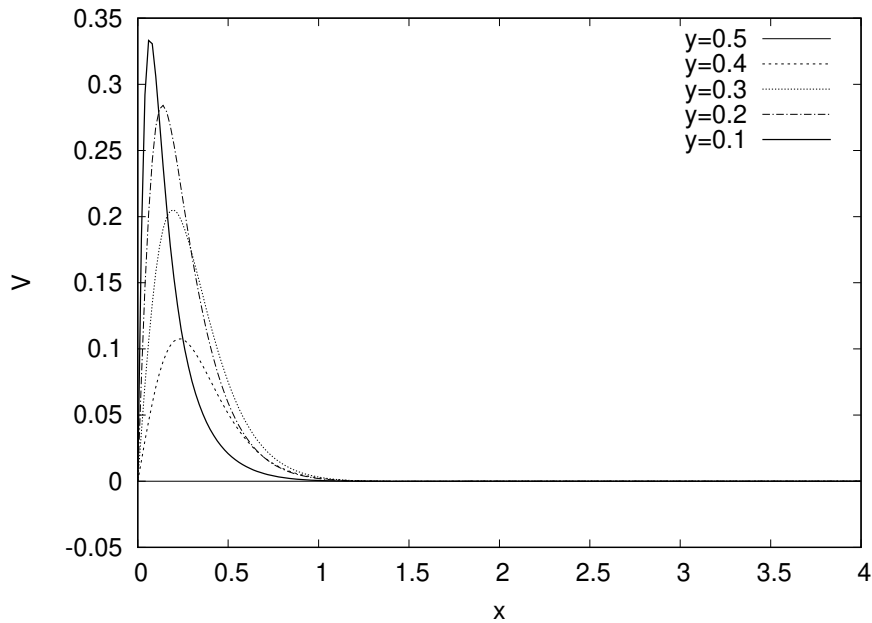


Figura 29: Variação da velocidade V em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 10$

Por último, simulou-se o caso com Re igual a 100. Os resultados são apresentados na forma de gráficos para a pressão, velocidade em x e em y nas Figuras 30, 31 e 32, respectivamente. O escoamento novamente se desenvolveu, atingindo os mesmo resultados estipulados: pressão caindo de forma linear e velocidade sem variação após o ponto desenvolvido.

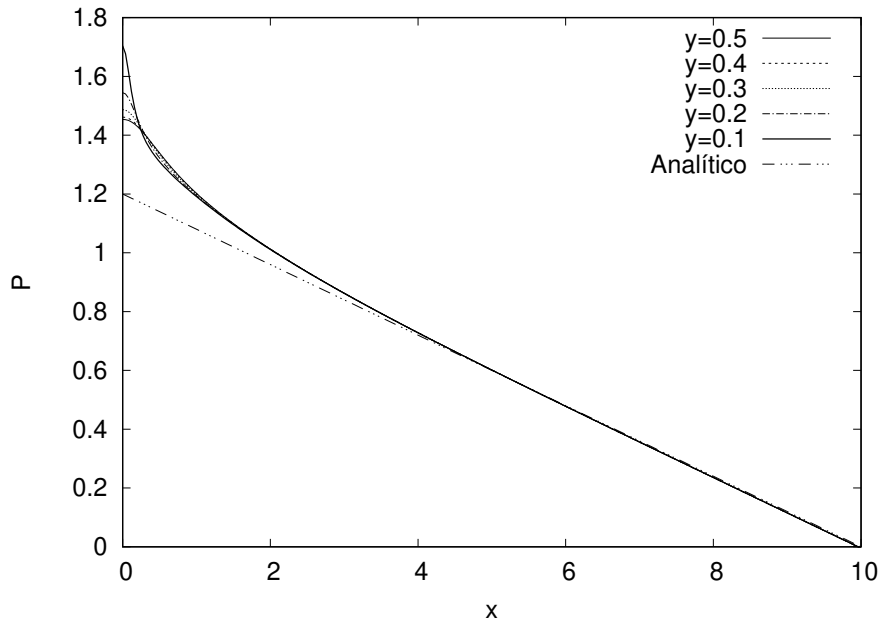


Figura 30: Variação da pressão em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 100$

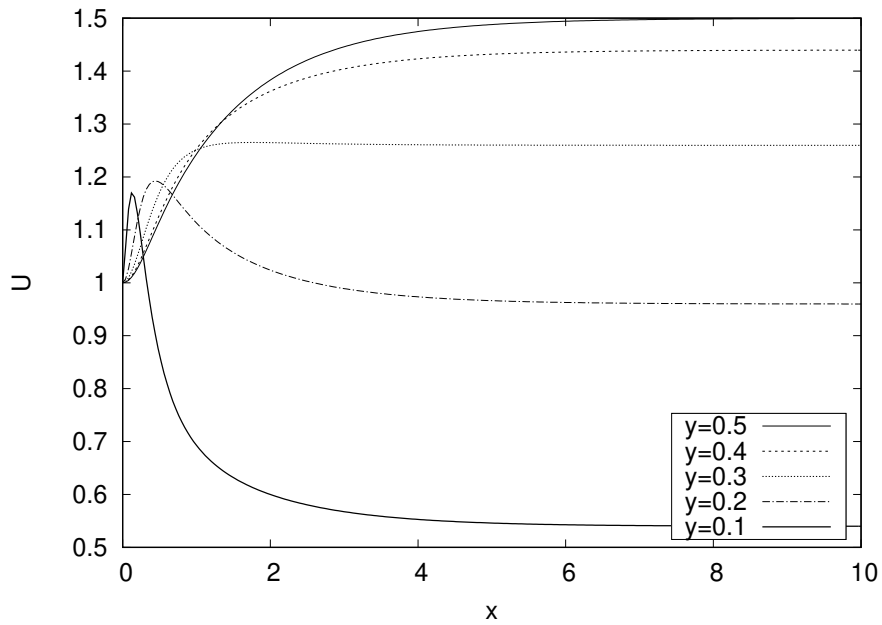


Figura 31: Variação da velocidade U em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 100$

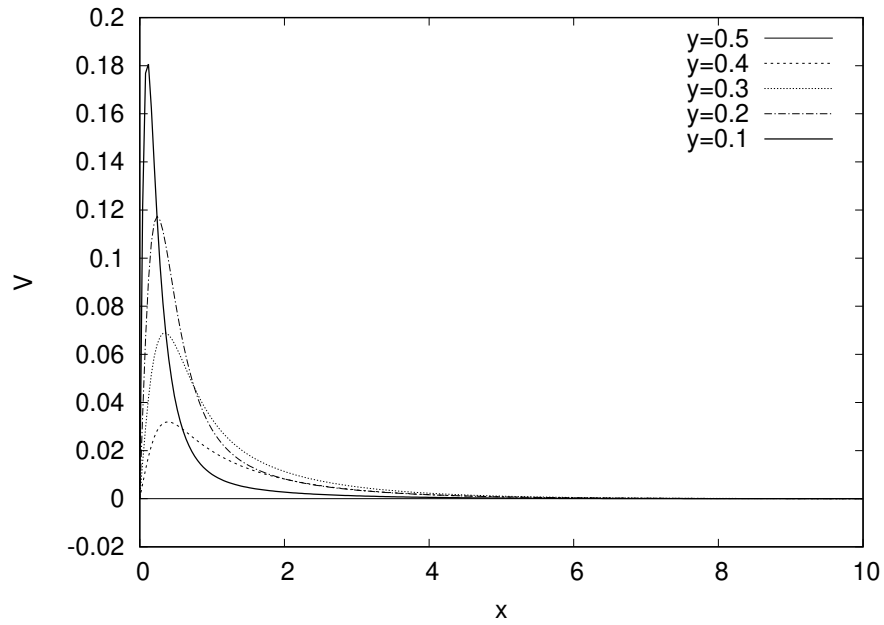


Figura 32: Variação da velocidade V em diferentes alturas ao longo de x para $Re = 100$

Com os resultados mostrados nessa seção, conclui-se que os programas desenvolvidos apresentam plena capacidade de reproduzir a realidade, para escoamentos movidos por um diferencial de pressão, como o escoamento entre placas.

O próximo passo é avaliar o escoamento em um degrau. Trata-se de uma configuração que causa uma expansão abrupta ao fluido e um descolamento do escoamento devido a inércia. Por estar próximo à junção T, ele será apresentado na seção de Resultados.

4 Resultados

Validado o código, passa-se aos resultados. Primeiramente será mostrado o escoamento em um Degrau, também conhecido como *backward facing step* (BFS) e por último será apresentada a junção-T com o fluido Newtoniano e com o ferrofluido.

O BFS é um tipo de escoamento que apresenta diversas similaridades com a junção T: descolamento por inércia, formação de recirculações, entre outras. Além disso, apresenta a importância do comprimento de desenvolvimento do escoamento após os descolamentos. Por isso ele será apresentado como um resultado e será de extrema importância para a escolha do domínio de trabalho.

4.1 Degrau

O degrau consiste em um escoamento com expansão abrupta: o fluido entra na região retangular desenvolvido e após certa distância o canal aumenta em largura. Esse crescimento súbito ocasiona um descolamento devido à inércia do fluido, o que cria vórtices no canto do domínio, mais precisamente no degrau. Esses vórtices são regiões de descolamento do escoamento, pois trata-se de locais com velocidades no sentido contrário à direção principal da movimentação do fluido (ABBOTT; KLINE, 1962). Aumentando o número de Reynolds, aproximadamente em torno de 400, novos vórtices se formam na parte superior do canal maior e, segundo Biswas, Breuer e Durst (2004), a partir deste número de Reynolds o escoamento passa a ser tridimensional e a abordagem em 2D não é capaz de reproduzir a realidade.

Na Figura 33 é apresentado um esquema do escoamento em um degrau. O domínio pode ser montado de duas formas: com um degrau propriamente, L_1 maior que 0; ou com a parede esquerda como uma entrada, comprimento $L_1 = 0$.

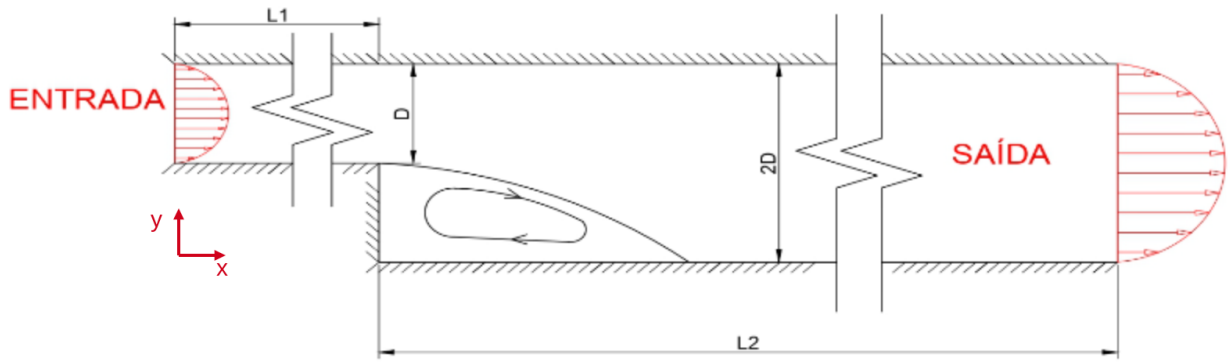


Figura 33: Desenho do escoamento com Degrau

Esse escoamento tem sua importância no fato que ele apresenta uma entrada e uma saída - assim como o escoamento entre placas - e regiões de recirculação - assim como a cavidade (GUERRERO; COTTA, 1996). Por ser um famoso “benchmark”, comumente utiliza-se esse escoamento para verificar a capacidade de um modelo de turbulência descrever o comportamento do fluido (SPALART; ALLMARAS, 1992). Além disso, existem diversos estudos com vários fluidos e mudanças na geometria, por exemplo: convecção forçada com um cilindro rotacionando após a expansão utilizando um ferrofluido (SELMEFENDIGIL; ÖZTOP, 2014), escoamento de sangue (CHOI; BARAKAT, 2005), entre outros.

4.1.1 Convergência de Malha

Para convergir a malha simulou-se com 3 números de Reynolds: 5, 50 e 100 até o tempo de 4 em um domínio de L_2 igual a 4, L_1 igual a zero e D igual a 1. O parâmetro escolhido para verificar a convergência foi novamente a velocidade na direção x no centro do domínio. O tamanho do passo no tempo, a distância entre nós - optou-se por uma razão de entre Δx e Δy igual a 1 - e os resultados estão sumarizados nas Tabelas 9, 10, 11. Segundo essas tabelas, houve convergência, mesmo que para isso fosse necessário diminuir a razão entre o passo no tempo e a distância entre nós.

Tabela 9: Resultados da convergência de malha para Reynolds 5

Δx	Δt	U
0,2	0,1	0,7559
0,1	0,05	0,7530
0,05	0,025	0,7528

Tabela 10: Resultados da convergência de malha para Reynolds 50

Δx	Δt	U
0,1	0,0125	0,9745
0,05	0,00625	0,9819
0,025	0,003125	0,9837

Tabela 11: Resultados da convergência de malha para Reynolds 100

Δx	Δt	U
0,1	0,0125	1,078
0,05	0,00625	1,090
0,025	0,003125	1,092

4.1.2 Convergência de Domínio

Trata-se de um escoamento com uma forte recirculação, que precisa de baixos Reynolds para se formar. Este vórtice afeta todo o desenvolvimento do fluido após a expansão abrupta, por isso é importante definir um tamanho de domínio ideal para que as condições de contorno de saída não interfiram nos resultados, assim como definir um tempo suficiente para que o escoamento entre em regime permanente. Para isso, verificou-se o domínio ideal para um número de Reynolds de 200, calculado com base entrada - D .

O domínio ideal será aquele em que a pressão passa a variar de forma linear e todos os pontos em uma mesma altura apresentam um mesmo valor. Por isso serão apresentados gráficos da variação de pressão e eles servirão com base para a escolha.

Os domínios que foram simulados apresentam a medida L_2 igual a 15, 30, 45 e 60. Os passos no espaço foram os mesmos para todos os domínios: $\Delta x = 0,06$ e $\Delta y = 0,025$; enquanto que $\Delta t = 0,0125$. As simulações foram realizadas até o tempo de 200, tempo este grande o suficiente para garantir o estado permanente. Os resultados do gráfico de pressão são apresentados nas Figuras 34, 35, 36 e 37. Pode-se observar que apenas no domínio de comprimento 60 que o escoamento passou a se desenvolver por completo e apresentando a eventual queda linear da pressão. Nos outros domínios verifica-se a influência das condições de contorno, em que o aumento da pressão não ocorria por completo e o programa zerava a pressão anterior ao crescimento.

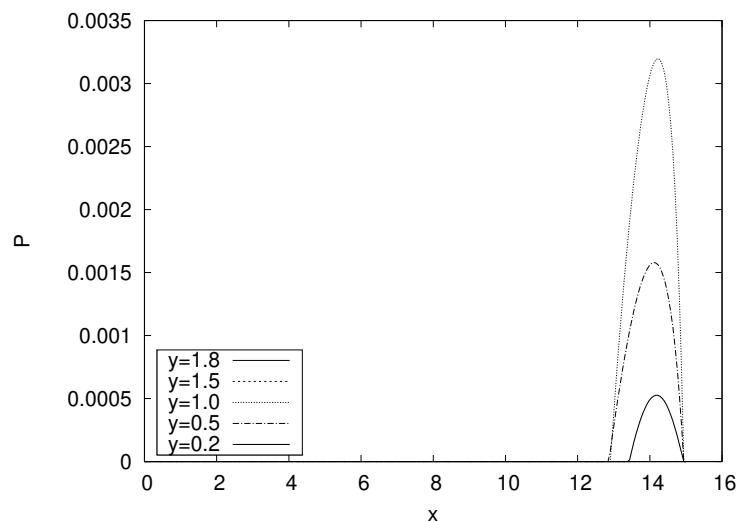


Figura 34: Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 15 e $Re = 200$

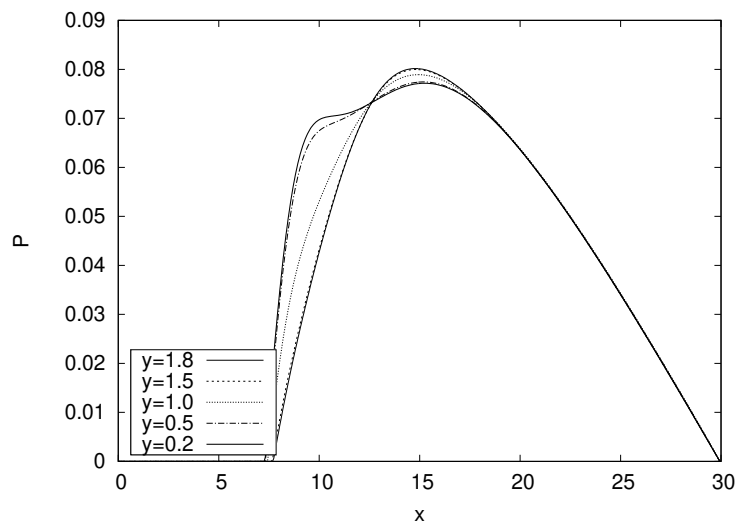


Figura 35: Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 30 e $Re = 200$

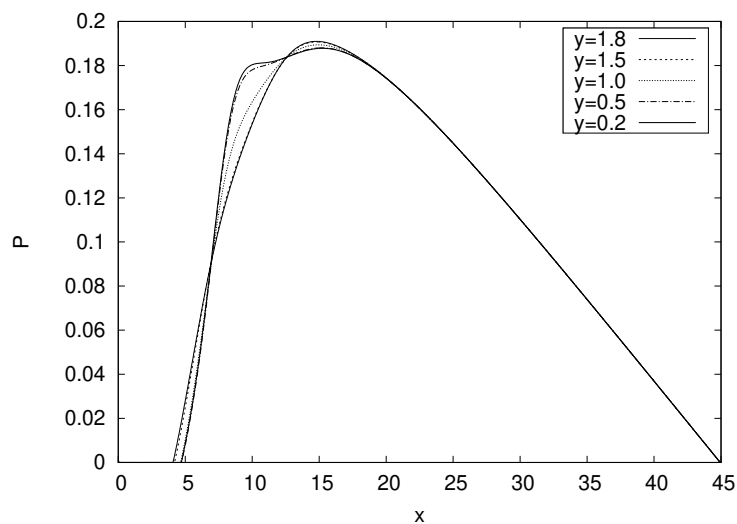


Figura 36: Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 45 e $Re = 200$

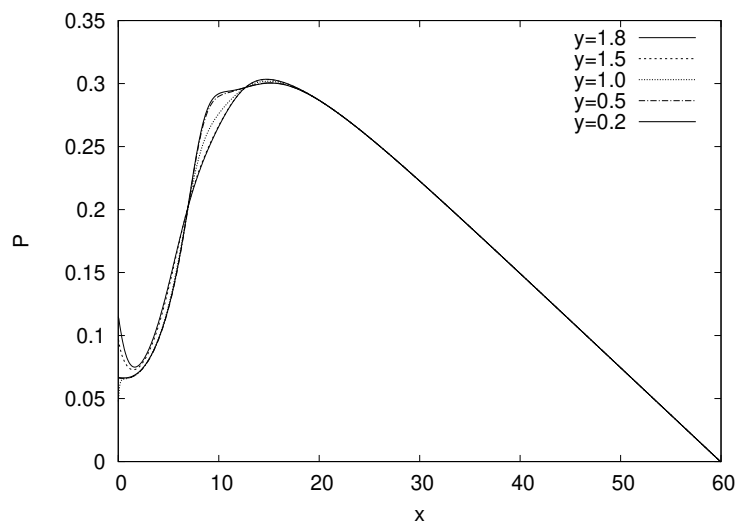


Figura 37: Pressão ao longo de x para um domínio de comprimento 60 e $Re = 200$

O maior domínio a ser utilizado para o degrau será o de comprimento L_2 igual a 60.

Na Figura 38 é apresentado o campo de velocidades para $Re = 200$ no intervalo de x entre 0 e 20. Na Figura 39 também é apresentado o campo de velocidades, porém em um domínio menor, agora com x entre 0 e 10. O escoamento foi capaz de reproduzir as duas zonas de recirculação esperadas para este número de Reynolds calculado com base altura da entrada de fluido. Na Figura 40 é apresentado o campo de velocidades no ponto em que ocorre o recolamento do fluido após a zona de recirculação inferior.

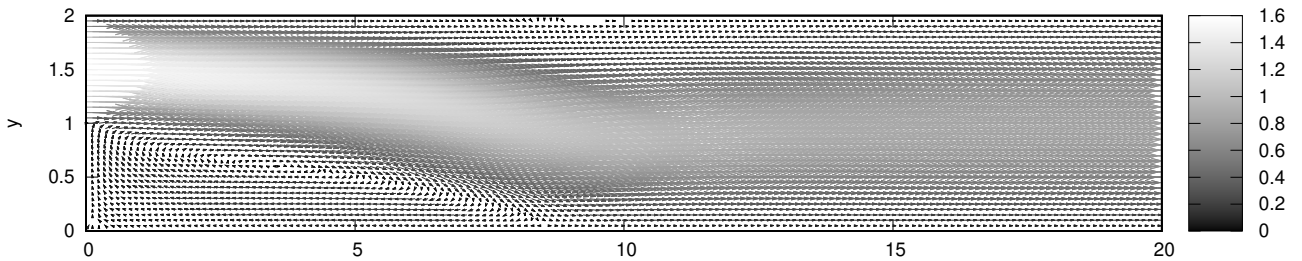


Figura 38: Campo de velocidades para $Re = 200$, $x = [0:20]$. A escala de cores representa o módulo do vetor velocidade

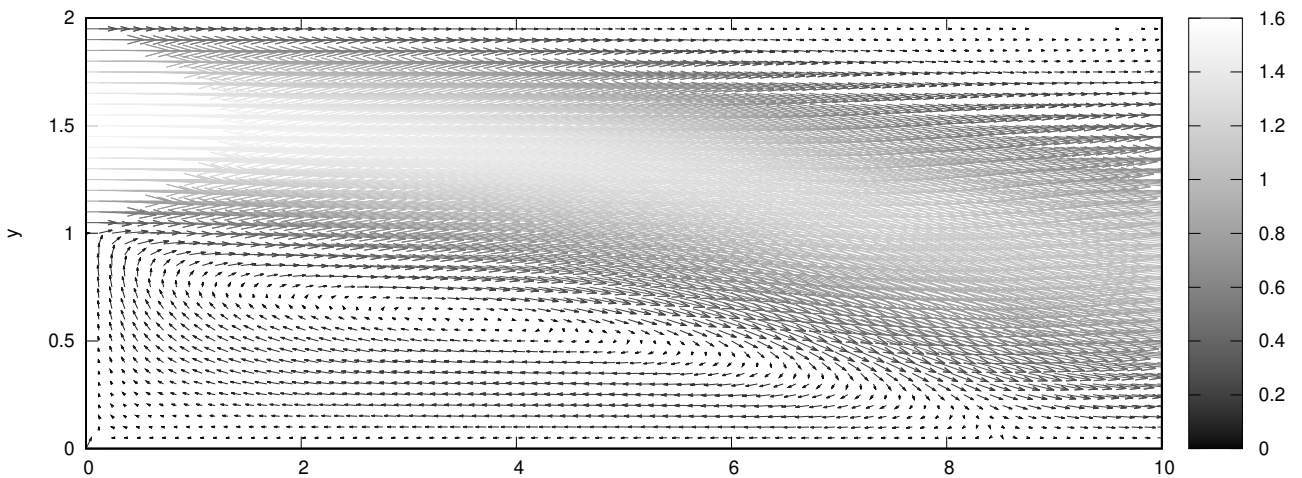


Figura 39: Campo de velocidades para $Re = 200$, $x = [0:10]$. A escala de cores representa o módulo do vetor velocidade

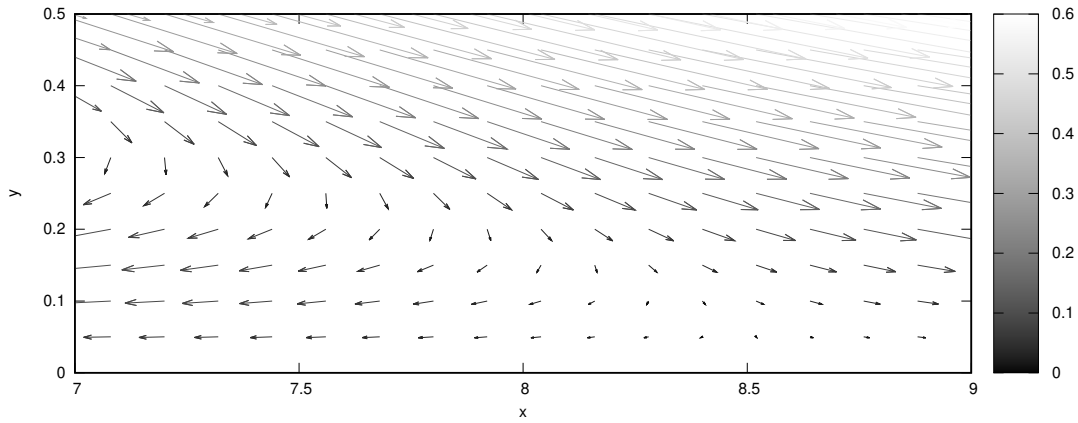


Figura 40: Campo de velocidades para $Re = 200$, centralizado no ponto de recolamento do escoamento na parte inferior do domínio

4.1.3 Recolamento

Optou-se por simular um domínio com $30D$ e Δx de $0,06$ e Δy de $0,05$ para números de Reynolds iguais ou menores que 100 e para $Re = 200$, utilizou-se um domínio de $60D$ com mesmo valor de Δx e Δy de $0,033$. O passo no tempo ficou em metade da menor distância, $0,025$ e $0,0166$. Para atingir o regime permanente, simulou-se sempre até 5 vezes o tamanho do domínio, no caso 150 e 300 .

O ponto de recolamento é caracterizado pelo fato da derivada de u em relação a y ser nula, marcando o ponto de transição de uma região em que há velocidades contrárias a tendência do fluido para uma região em que há apenas velocidades que acompanham o fluxo do fluido. Portanto o software procurava qual o menor valor absoluto da derivada na parede baixa. Na Figura 41 os resultados deste estudo são comparados com os resultados obtidos por Biswas, Breuer e Durst (2004). Para que ocorra essa comparação foi necessário adaptar o número de Reynolds que é utilizado nesse estudo multiplicando-o por 2 , já que os autores utilizaram o diâmetro hidráulico. Como pode ser constatado na Figura 41, conforme aumenta-se o número de Reynolds, maior é o tamanho do vórtice e por consequência mais distante é o ponto de recolamento. Isso ocorre pois o número de Reynolds é uma razão entre as forças convectivas e as forças difusivas, logo quanto maior esse número, menor a tendência do fluido em difundir ocupando todo o canal.

Os resultados deste trabalho se aproximam com os dados obtidos por Biswas, Breuer e Durst (2004) de forma numérica. A única variação expressiva ocorre em $Re = 400$, isso pode ter ocorrido pois, foram necessárias algumas adaptações para a correta comparação entre os resultados, dentre elas: multiplicar o número de Reynolds deste trabalho por 2 ; normalizar o ponto de recolamento de acordo com a altura do degrau.

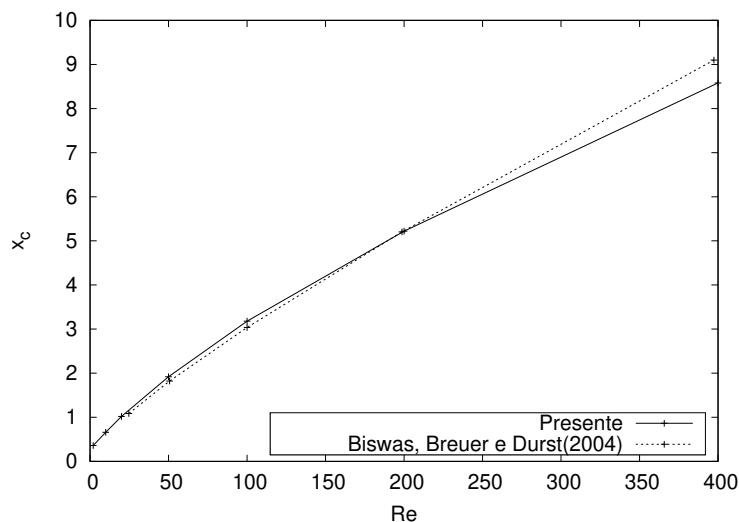


Figura 41: Ponto de recolamento para diversos números de Reynolds

4.2 Junção T

Um tubo em T trata-se de uma tubulação que se divide em outras duas, uma principal na mesma direção da entrada do domínio e um tubo perpendicular ao tubo principal. Este escoamento apresenta a característica do descolamento do fluido no ramal auxiliar, e conforme aumenta-se o número de Reynolds, maior a zona de recirculação, até o ponto que novas zonas são criadas inclusive no ramal principal. Um alto número de Reynolds implica em um domínio das forças convectivas em contraponto com as difusivas, isso implica que o escoamento tem uma tendência maior a se manter no ramal principal.

A junção T simulada neste trabalho está representada pelo esquema da figura 42. Na entrada o escoamento está completamente desenvolvido, com um perfil parabólico, velocidade média igual a 1 e velocidade máxima de 1,5. A pressão na entrada apresenta gradiente nulo. As paredes apresentam velocidade nula e gradiente de pressão normal a parede nulo. Nas duas saídas é feito o mesmo tratamento, gradiente de velocidade na direção da saída nulo e pressão igual a 0.

A junção T pode ter uma infinidade de configurações e de condições de contorno. Em muitos trabalhos, o parâmetro na saída fixo é a vazão, ou seja, a velocidade é imposta e a pressão fica livre para variar. Porém esse tipo de configuração não será avaliada neste trabalho.

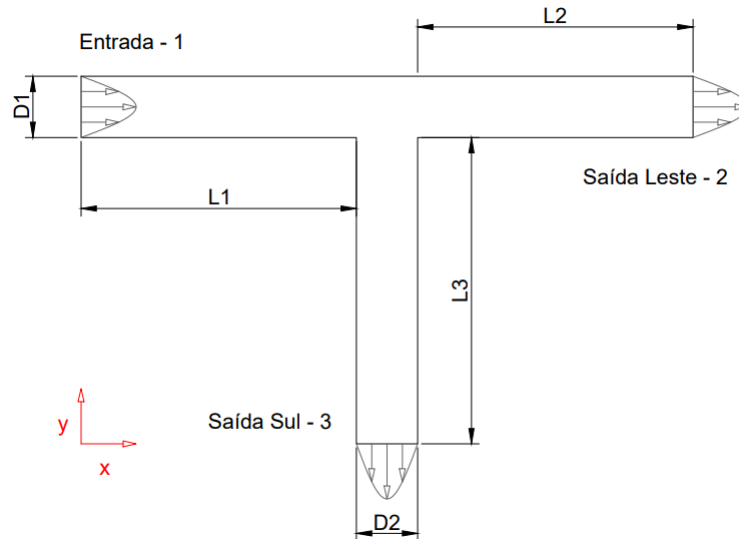


Figura 42: Desenho do escoamento em uma junção T

Trata-se de um escoamento com similaridades com o degrau, seja pela necessidade de um grande domínio para o desenvolvimento do fluido, seja pela expansão e formação de recirculações. A diferença fica por conta das duas saídas ou duas entradas e a presença de pontos de estagnação, onde a velocidade é nula e a pressão atinge o seu valor máximo.

4.2.1 Convergência de malha

Para simular a junção T, alguns cuidados foram tomados. Foi garantido o regime permanente e a soma da quantidade de fluido que entra teve que ser a mesma quantidade de fluido que sai. Essas duas informações serão apresentadas no estudo de convergência de malha.

Durante as diversas simulações percebeu-se que quanto maior o número de Reynolds, menor tinha que ser a razão entre Δt e Δx . Além disso, a região onde o fluido colide com a quina da junção se mostrou como uma região de instabilidade para grandes passos no tempo, mesmo a condição de CFL sendo respeitada.

O domínio para todo o trabalho, exceto quando explicitado de forma diferente, foi definido como sendo sempre o mesmo, com as dimensões apresentadas na Tabela 12. Optou-se por essas dimensões baseado nos resultados obtidos para o degrau quanto ao comprimento necessário para o fluido desenvolver após uma expansão abrupta. Os comprimentos dos braços de saída são iguais para que não haja influência direta do comprimento na queda de pressão. Se um braço é menor que o outro e a pressão na saída é nula, o braço de menor comprimento terá uma queda de pressão mais abrupta. Entende-se que o domínio apresentado tem dimensões grandes, logo não será possível simular altos números de Reynolds sem comprometer a rapidez do computador em solucionar os problemas, entretanto, essa escolha foi feita para que haja segurança e garantia nos resultados obtidos.

Tabela 12: Dimensões do domínio da junção T

Dimensão	Comprimento
L1	4
L2	15
L3	15
D1	1
D2	1

O número de Reynolds foi calculado com base na velocidade média de entrada e com a distância entre placas na entrada, dimensão D1. O CFL é calculado com a maior velocidade na entrada do escoamento, 1,5.

Para simular os efeitos das paredes internas da junção T utilizou-se a seguinte abordagem. Implementa-se no código que os cálculos serão conduzidos apenas dentro da região em que há escoamento. Utilizando como exemplo a Figura 43, nela a região pontilhada é ignorada pelo software, qualquer nó que esteja nessa região não será calculado para todas as funções - velocidade, pressão, temperatura, magnetização e campo magnético. Onde se encontra a parede são aplicadas as condições de contorno correspondente a uma parede - velocidade nula, gradiente de pressão normal a parede nulo. Essa abordagem faz com que grande parte dos nós não sejam utilizadas, uma malha com 401 x 321 nós apresenta, aproximadamente, 128000 pontos para cada variável, porém serão utilizados efetivamente 14000 pontos. Como grande parte dos nós não é utilizada, quase 90%, o software simula de forma rápida.

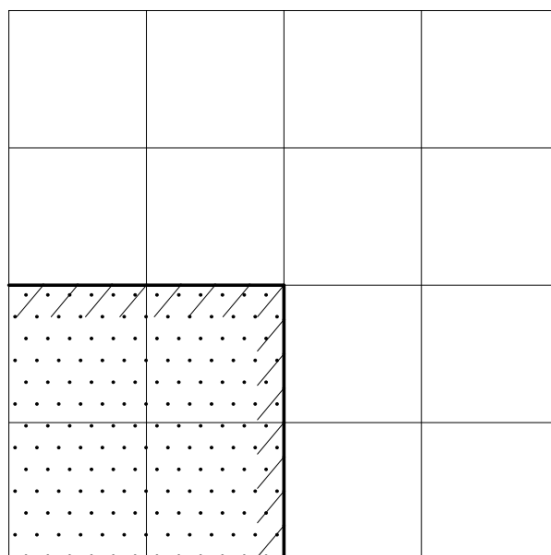


Figura 43: Desenho do tratamento das paredes do domínio

Para a convergência de malha, foi simulado o escoamento transiente, $t = 10$, na junção T com o fluido newtoniano para 2 números de Reynolds, 20 e 100; as malhas utilizadas são de 101×81 , 201×161 , 401×321 para $Re = 20$ e malhas de 201×161 , 401×321 , 801×641 para $Re = 100$; CFL's são de 0,3, 0,15, 0,075. Todas as malhas tem

razão entre as distâncias entre nós no eixo x e no eixo y iguais a 1. Essas informações estão sumarizadas na Tabela 13. O parâmetro para avaliar a convergência é a vazão na saída 3 ou saída sul.

Tabela 13: Dados das simulações de convergência de malha

Re	N_x	N_y	T	CFL
20	101	81	10	0,3; 0,15; 0,075
20	201	161	10	0,3; 0,15; 0,075
20	401	321	10	0,3; 0,15; 0,075
100	201	161	10	0,3; 0,15; 0,075
100	401	321	10	0,3; 0,15; 0,075
100	801	641	10	0,3; 0,15; 0,075

Nas Tabelas de 14 a 19 são apresentados os resultados para a convergência de malha. Para um Reynolds de 20, a vazão convergiu bem no espaço, tanto para um CFL de 0,3 como para um de 0,075. Porém cabe ressaltar a disparidade entre os dados de vazão para cada passo no tempo, do maior para o menor avanço no tempo, ocorreu uma variação de até 25,6%, esse valor é maior para $Re = 100$.

Para $Re = 100$, novamente houve convergência no espaço, porém, como dito acima, há uma grande diferença nos resultados para cada passo no tempo. Um avanço no tempo mais grosseiro, de apenas um quinto da distância entre nós, apresentou resultados incompatíveis para o estágio do escoamento transiente - e para a própria quantidade de fluido dentro da junção T, Tabela 20. Ao ponto que, realizando o mesmo procedimento de comparação entre as malhas mais refinadas e o passo de tempo mais grosseiro e o mais fino, houve uma variação de 134%. Apesar disso, o programa convergiu.

Tabela 14: Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 20$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,3$

N_x	N_y	Q_3
101	81	0,3789
201	161	0,3824
401	321	0,3820

Tabela 15: Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 20$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,15$

N_x	N_y	Q_3
101	81	0,4253
201	161	0,4558
401	321	0,4618

Tabela 16: Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 20$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,075$

N_x	N_y	Q_3
101	81	0,4378
201	161	0,4737
401	321	0,4798

Tabela 17: Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 100$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,3$

N_x	N_y	Q_3
201	161	0,6381
401	321	0,5578
801	641	0,5582

Tabela 18: Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 100$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,15$

N_x	N_y	Q_3
201	161	0,2080
401	321	0,1980
801	641	0,2004

Tabela 19: Dados da convergência de malha: transiente, $Re = 100$ e fluido Newtoniano, $CFL = 0,075$

N_x	N_y	Q_3
201	161	0,2620
401	321	0,2499
801	641	0,2382

Tabela 20: Vazões para a simulação transiente, $Re = 100$, $CFL = 0,3$

N_x	N_y	Q_1	Q_2	Q_3
801	641	0,9989	0,6206	0,5582

Devido aos resultados apresentados, a malha escolhida é de 401×321 com $CFL = 0,15$.

4.2.2 Validação

Para avaliar o programa na configuração T, comparou-se os resultados com os dados obtidos por Hayes, Nandakumar e Nasr-El-Din (1989). Entretanto, estes autores utilizaram um domínio, com dimensões diferentes e calculando o número de Reynolds com

base na velocidade no centro da parábola na entrada. As dimensões utilizadas no domínio são apresentadas na Tabela 21.

Tabela 21: Dimensões do domínio da junção T

Dimensão	Comprimento
L1	2
L2	3
L3	3
D1	1
D2	1

Realizando as devidas alterações e utilizando uma malha de 120×80 - com esses nós, mantém-se o valor de Δx e Δy determinados na convergência de malha - e um passo no tempo de 0,005, até o $t = 100$. Obteve-se os resultados apresentados na Figura 44. Os dados obtidos no software desenvolvido para este estudo são similares aos apresentados por Hayes, Nandakumar e Nasr-El-Din (1989) que obteve esses dados de forma numérica a partir da variação da solução da função de corrente por meio do método dos elementos finitos. Há variações ínfimas entre o artigo em questão e este trabalho.

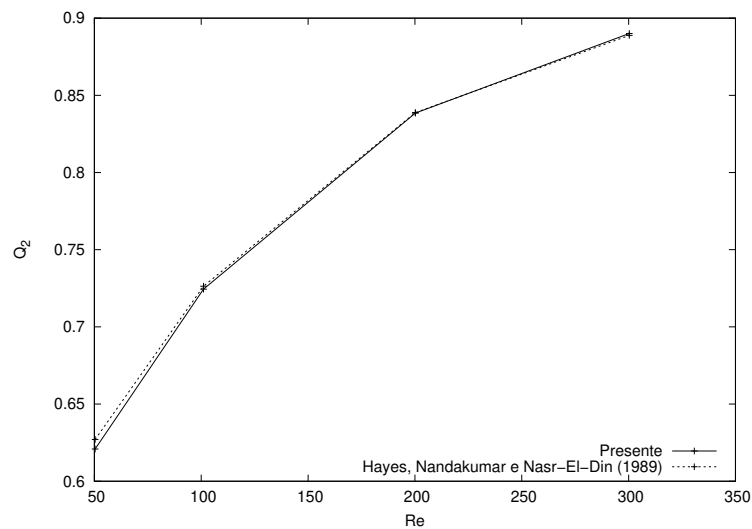


Figura 44: Variação da vazão na saída 2, leste, de acordo com o número de Reynolds

Validado o software, passa-se agora à análise do escoamento em uma junção T.

4.2.3 Escoamento permanente

Para garantir que o escoamento está em regime permanente, foram avaliados 4 tempos finais, 50, 100, 150 e 200 para 3 números de Reynolds, 20, 50 e 100. Novamente, o método para a avaliação foi a vazão de saída no braço inferior.

Os resultados apresentados nas Tabelas 22, 23 a 24 mostram que em $t = 100$ pode-se considerar que o escoamento encontra-se no regime permanente. Não houve variações

significativas do tempo 100 para o tempo 150. A única variação foi da ordem da quarta casa decimal, apenas 0,0001. Para os outros números de Reynolds, menores que 100, não há mudança do tempo 100 para o tempo 150. Além de que no menor número adimensional simulado, $Re = 20$, a variação de vazão do tempo de 50 e do tempo 100 foi mínima.

Tabela 22: Dados de vazão em diferentes tempos para $Re = 20$

T	Q_2	Q_3
50	0,5173	0,4768
100	0,5172	0,4768
150	0,5173	0,4768
200	0,5173	0,4768

Tabela 23: Dados de vazão em diferentes tempos para $Re = 50$

T	Q_2	Q_3
50	0,5484	0,4473
100	0,5475	0,4465
150	0,5475	0,4465
200	0,5475	0,4465

Tabela 24: Dados de vazão em diferentes tempos para $Re = 100$

T	Q_2	Q_3
50	0,4073	0,6017
100	0,3994	0,5945
150	0,3994	0,5946
200	0,3994	0,5946

O tempo final de simulação escolhido é o de 100. Em uma simulação com malha de 401×321 , com CFL de 0,15 e tempo final de 100, o computador utilizado para as simulações demorou aproximadamente 2 horas para concluir todos os cálculos. Com a malha definida e o tempo definido em 100, passa-se agora para a análise do escoamento.

4.2.4 Sem campo magnético

4.2.4.1 Escoamento permanente

Neste primeiro momento não será aplicado o campo magnético, logo o número magnético, Mn , é nulo e o fluido se comporta como um fluido Newtoniano. Também não será simulado a troca de calor, visto que esta é utilizado no ferrofluido para que haja efeito do campo magnético quando o tempo de Néel domina o tempo de relaxamento (ROSENSWEIG, 2013). São simulados escoamentos com o número de Reynolds variando de 10 a 200. Avaliou-se, novamente, as vazões de saída, assim como o comportamento da pressão e da velocidade ao longo do tubo em T para os números de Reynolds igual a 10,

50 e 100. Os resultados obtidos nessa sessão servirão como base de comparação para o ferrofluido.

Na Figuras 45 e 46 são apresentados o campo de velocidade para o escoamento do fluido na junção T com $Re = 10$, a escala de cores utilizada representa o módulo do vetor velocidade. O escoamento segue a partir da entrada até divisão sem nenhuma divergência com relação a um escoamento entre placas. A partir da divisão, a escala de cores escurece em ambos os braços, indicando uma queda na velocidade. Não há formação de vórtices nas paredes dos dois braços. O baixo número de Reynolds facilita a divisão do escoamento e previne o descolamento do fluido no braço secundário, local onde é mais comum esse fenômeno. Esses resultados são mais visíveis nas Figuras 47, 48, 49 e 50. Nesses gráficos são apresentados o comportamento da componente de velocidade na direção x e da pressão, em diferentes alturas ao longo do eixo principal e o comportamento de velocidade na direção y e da pressão ao longo do eixo secundário. A velocidade, em ambos os braços, não apresenta valores de sinal oposto à tendência do fluido ou derivada nula na parede, o que caracterizaria o descolamento. A partir dos gráficos de pressão, observa-se que não ocorrem grandes picos de pressão no choque com a parede e no início da junção.

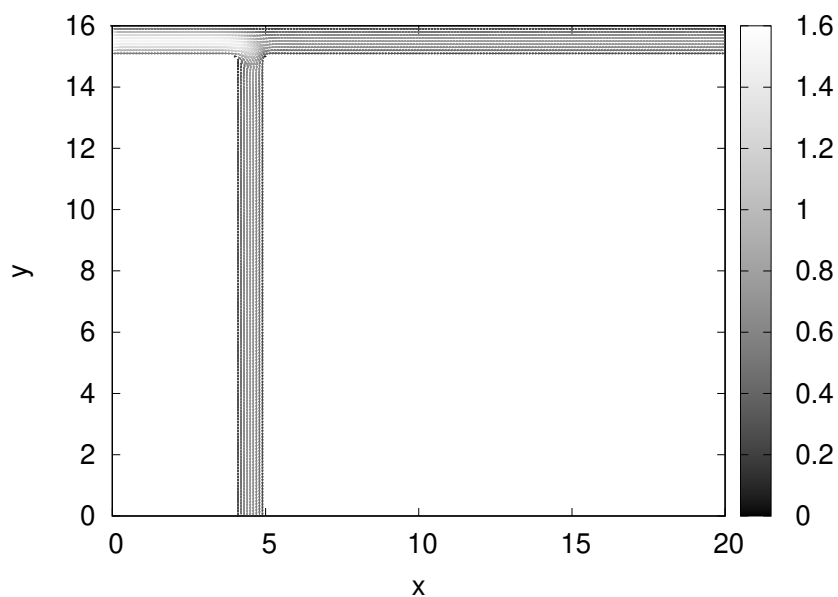


Figura 45: Campo de velocidade para $Re = 10$, escala de cores representa o módulo da velocidade

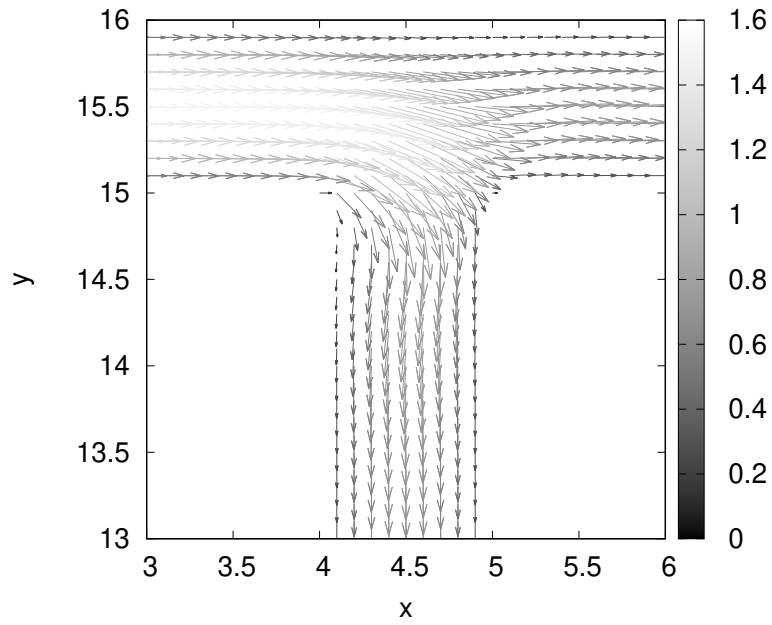


Figura 46: Campo de velocidade para $Re = 10$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

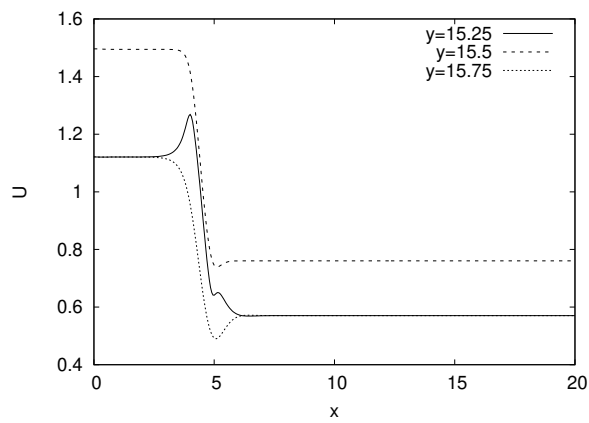


Figura 47: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$

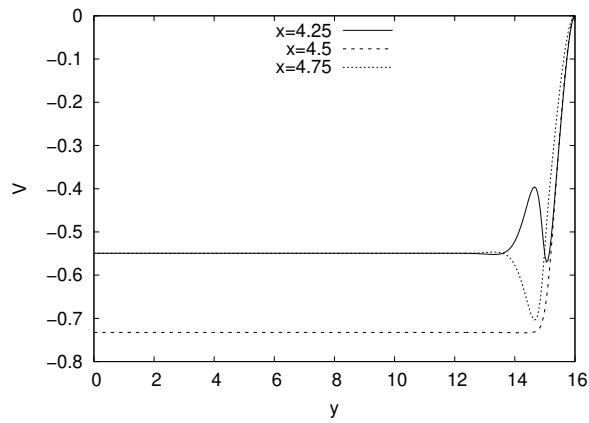


Figura 48: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$

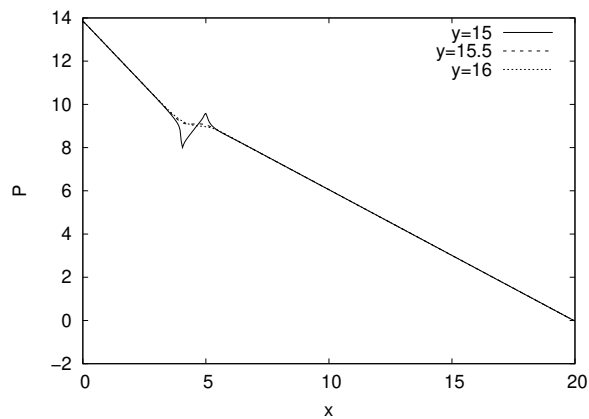


Figura 49: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$

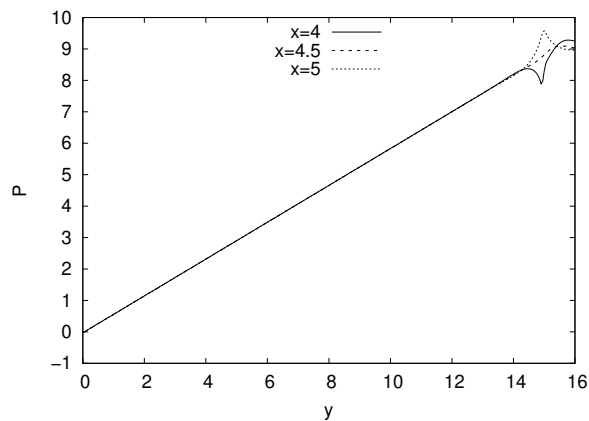


Figura 50: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$

Nas Figuras 51 e 52 são apresentados os perfis de velocidade no eixo secundário e no eixo primário para $Re = 10$, respectivamente, ao longo dos braços da junção T. Observa-se a clara redução da parábola após a divisão do escoamento. Também constata-se que em pouco espaço, existem pequenas variações até o escoamento voltar a ser desenvolvido. Ressalta-se que não houve formação de zonas de recirculação.

O fluido que escorre na direção da saída sul precisou de mais comprimento para voltar a estar desenvolvido, diferentemente do fluido que segue para a saída leste. Um dos fatores é que, apesar de ser uma divisão menos brusca, a perturbação no fluido que segue para baixo é de maior intensidade.

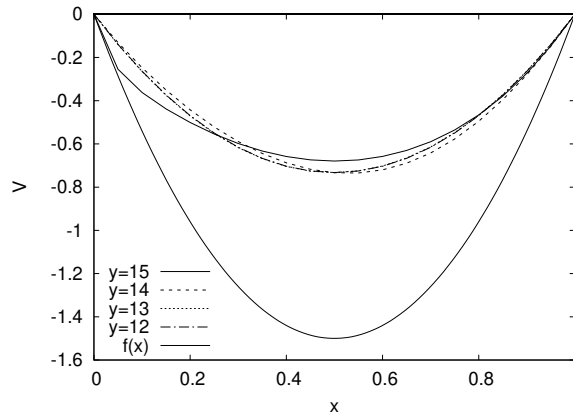


Figura 51: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $f(x)$ corresponde ao perfil de velocidade completamente desenvolvido para uma vazão unitária e velocidade máxima de 1,5; $Re = 10$

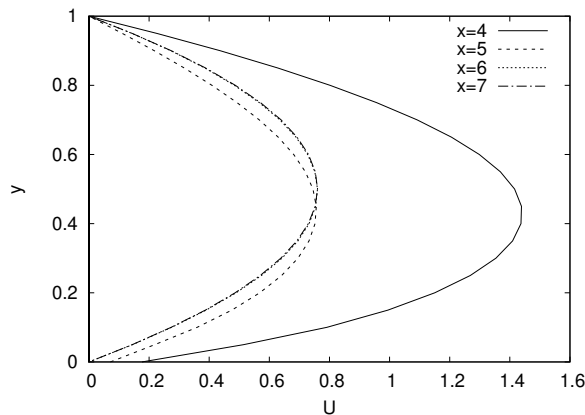


Figura 52: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 10$

Nas Figuras 53 e 54, é apresentado campo de velocidades, primeiramente para o domínio completo e no segundo gráfico para o domínio aproximado na região de divisão. Para esse número de Reynolds, já ocorre a formação de zonas de recirculação na parede do eixo secundário. Esse vórtice inicia-se exatamente na quina do domínio e estende-se até aproximadamente $y = 14$. Com a formação do vórtice, parte da região dificulta a passagem do fluido para o braço inferior, isso ocasiona um aumento na intensidade dos vetor velocidade nessa região.

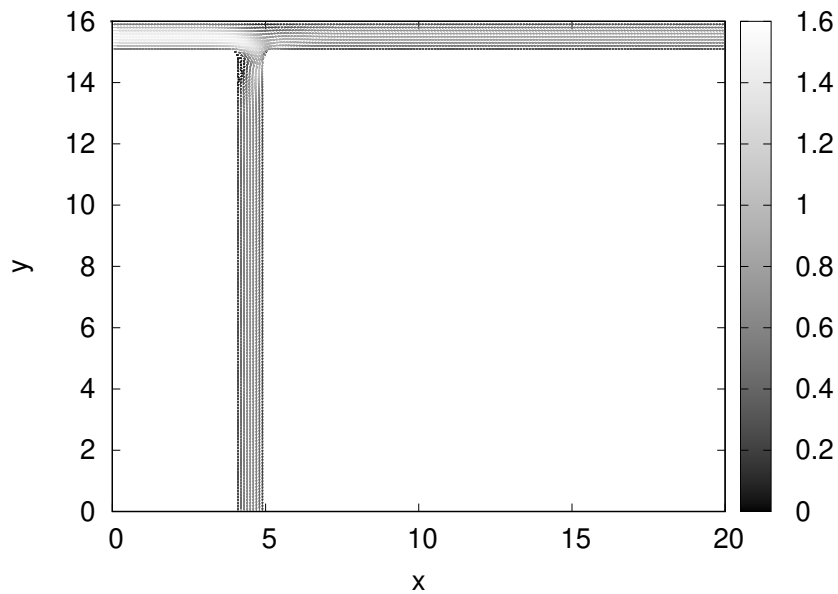


Figura 53: Campo de velocidade para $Re = 50$, escala de cores representa o módulo da velocidade

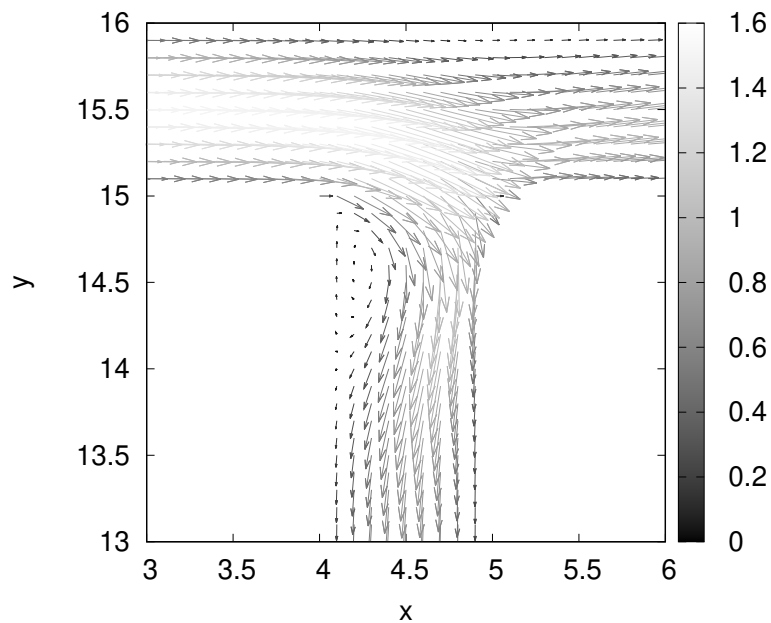


Figura 54: Campo de velocidade para $Re = 50$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

Nas Figuras 55 e 56 são apresentados o comportamento da velocidade na direção x para o eixo principal e na direção y para o eixo secundário, respectivamente. Para ambas as velocidades, o impacto da divisão foi maior aumentando o comprimento de desenvolvimento. Além disso, as velocidades do braço principal foram maiores se comparado com o escoamento de $Re = 10$, ocorre uma divisão não igualitária do fluido entre os braços.

Passando para os gráficos de pressão no braço principal e no braço secundário, Figuras 57 e 58, é visível o alto pico de pressão formado pelo choque do fluido com a parede

do tubo e o vale de pressão devido ao descolamento do fluido. Em aproximadamente um comprimento de 1, o escoamento passa por dois pontos críticos de mínimo e máximo local.

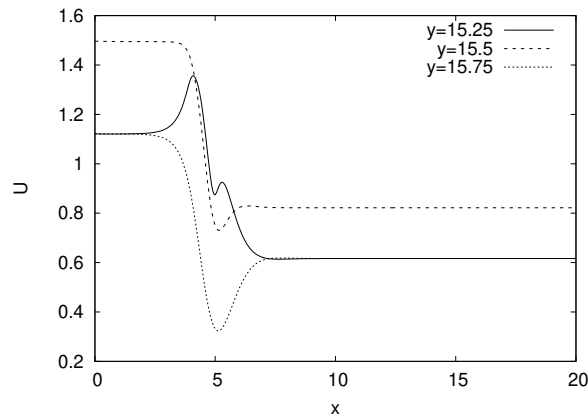


Figura 55: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$

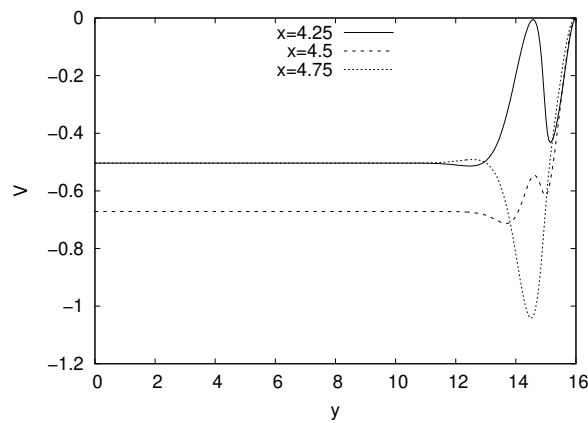


Figura 56: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$

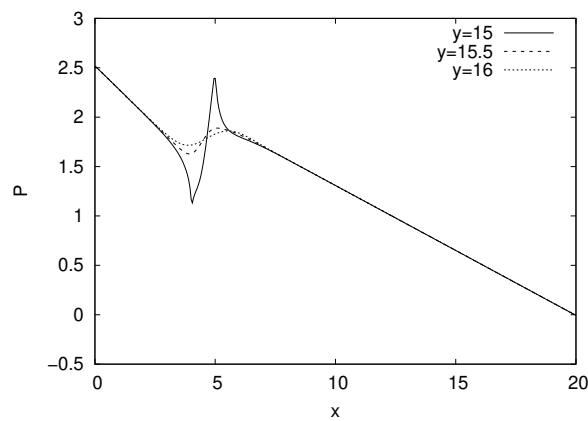


Figura 57: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$

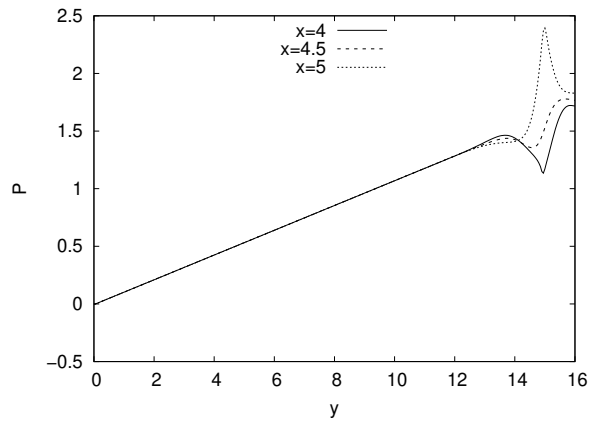


Figura 58: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$

Os perfis de velocidade para cada braço estão nas Figuras 60, braço principal, e 59, braço secundário. Como apresentado nos outros gráficos, não há indício do descolamento do fluido no braço principal, porém a parábola deixa de ficar centralizada e tende para baixo até o escoamento se desenvolver. Já no braço secundário, em que ocorre o descolamento, o perfil de velocidades fica mais próximo da parede direita até o completo desenvolvimento. No perfil referente a altura $y = 14$ nota-se a derivada nula indicando a proximidade com o fim da zona de recirculação.

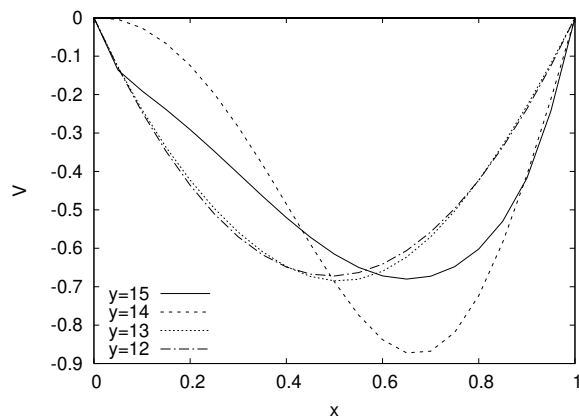


Figura 59: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 50$

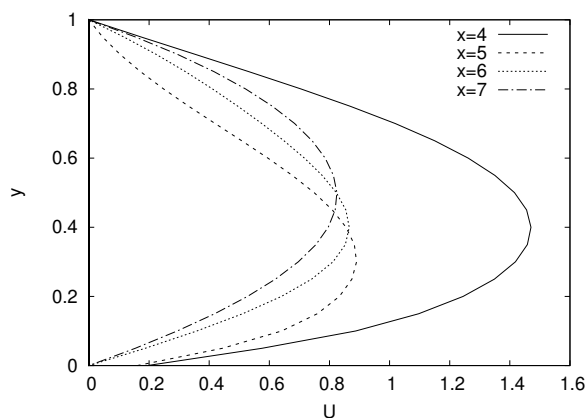


Figura 60: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 50$

Por último, são apresentados os resultados para $Re = 100$. Os efeitos apresentados para $Re = 50$ se intensificam: a zona de recirculação aumenta, o pico e o vale de pressão são mais acentuados, a variação da velocidade é mais intensa, aumentando consideravelmente o comprimento de desenvolvimento. Porém um efeito novo é a presença de evidências de que, em maiores números de Reynolds, ocorre o descolamento do fluido no braço principal.

Nas Figuras 61 e 62 é apresentado o campo de velocidades para $Re = 100$ em todo o domínio e na região de divisão do escoamento. O vórtice que se forma na parede esquerda do braço inferior é mais intenso se comparado ao escoamento com $Re = 50$, atingido a altura $y = 13.5$. A região em que é permitido passagem do fluido diminui com esse aumento, esse fato é de extrema importância para o comportamento do escoamento quando for aplicado o campo magnético.

É possível observar uma diminuição da intensidade do vetor velocidade na parede superior do domínio logo após a divisão. Porém não há descolamento do fluido.

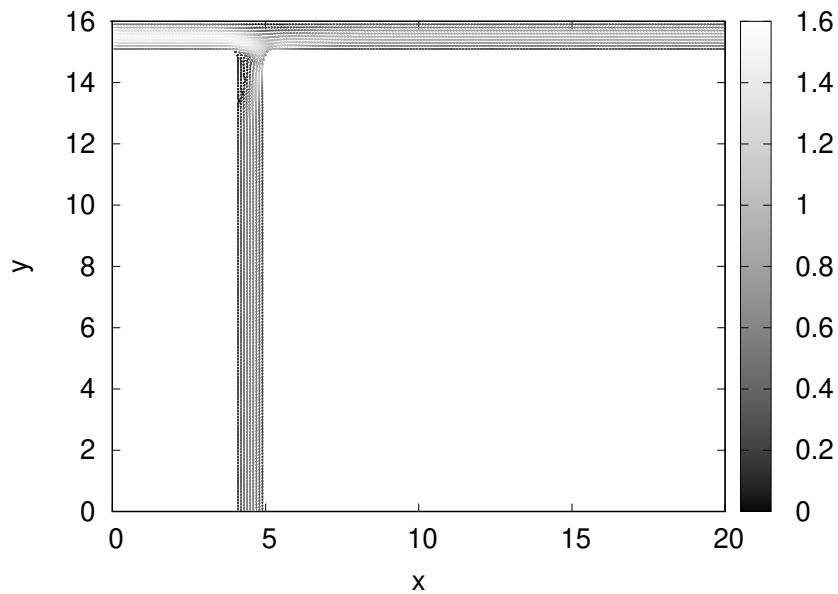


Figura 61: Campo de velocidade para $Re = 100$, escala de cores representa o módulo da velocidade

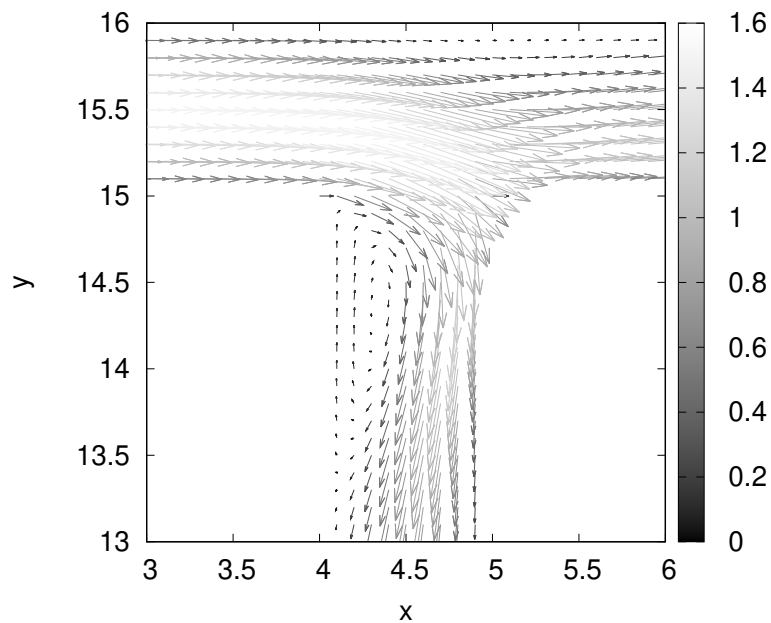


Figura 62: Campo de velocidade para $Re = 100$, focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

As velocidades no braço principal se estabilizam em um valor maior se comparado aos outros números de Reynolds, Figura 63. Isso corrobora com o fato que o fluido não se divide por igual com o aumento do número de Reynolds, porém as variações de velocidade são mais intensas próximo às paredes, tanto para o fluido que segue na direção de origem, quanto para o fluido que muda de direção, Figura 64.

Acompanhando todos os outros parâmetros, a pressão também apresenta variações mais intensas, nas Figuras 65 e 66 é apresentado a pressão em cada um dos braços. Os

picos e vales são os mais intensos dos escoamentos apresentados e em seguida o fluido se desenvolve e a pressão volta a decair de forma linear.

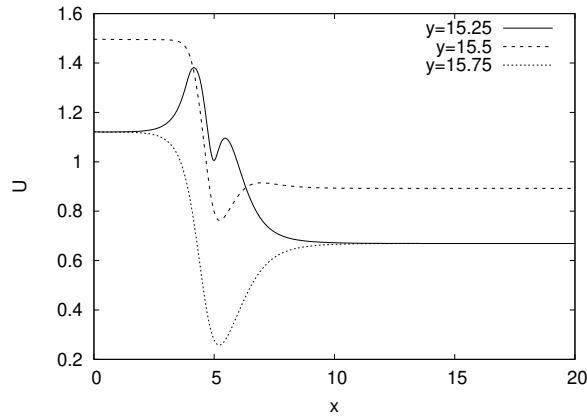


Figura 63: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$

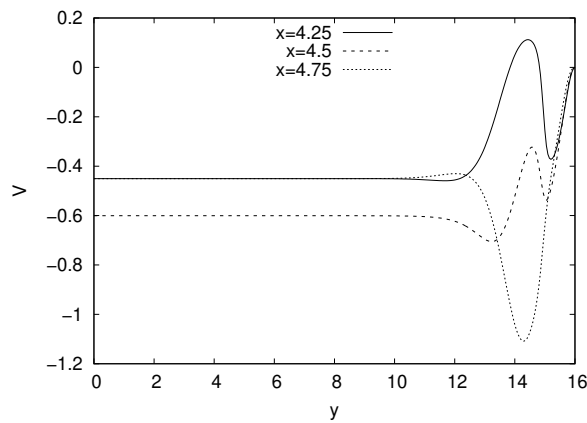


Figura 64: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$

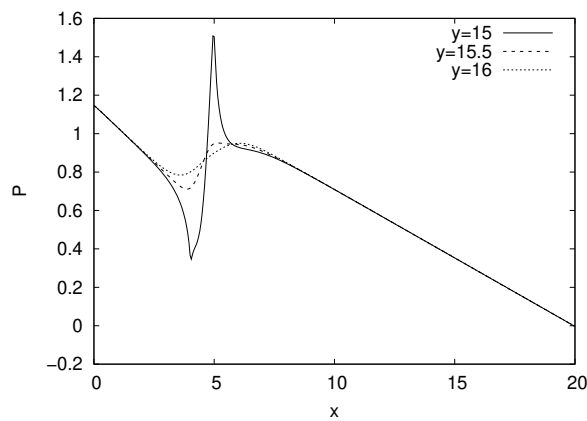


Figura 65: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$

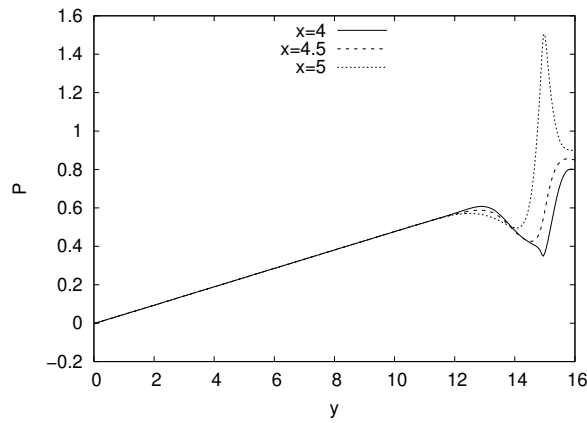


Figura 66: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$

Os últimos elementos a serem apresentados deste escoamento são os perfis de velocidade no braço principal e no braço secundário, Figuras 67 e 68. Seguindo a tendência de efeitos do aumento do número de Reynolds, os perfis de velocidade se aproximam da parede inferior no braço principal após a divisão, assim como os perfis do braço secundário que se aproximam da parede direita. Como a zona de recirculação aumentou, é possível observar que o perfil na altura $y = 14$ está dentro dessa zona devido aos valores na direção oposta à tendência do fluido. Os perfis do braço principal tem mais dificuldade para se desenvolverem como evidenciado nos outros gráficos. Destaca-se que o perfil referente a $x = 5$ apresenta uma derivada próxima a zero, indicando a possibilidade do descolamento em números maiores de Reynolds.

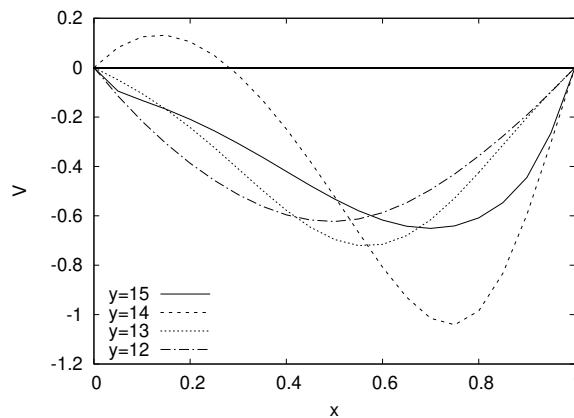


Figura 67: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 100$

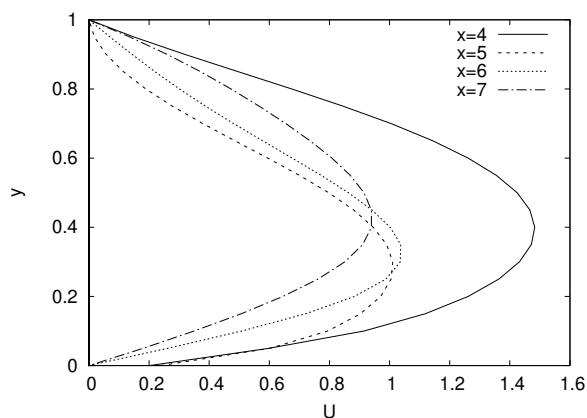


Figura 68: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 100$

Apresentado a análise qualitativa dos escoamentos, passa-se a análise da vazão nas saídas.

4.2.4.2 Vazão

Os resultados obtidos na simulação são apresentados na Figura 69, foi simulado números de Reynolds de 20 a 200 até o tempo de 100.

Nos números de Reynolds mais baixos, o fluido apresenta maior facilidade para se difundir para todo o domínio, como acontece no degrau, ao ponto que em $Re = 20$ as vazões apresentarem uma diferença menor que 0,05. Conforme aumenta-se o número de Reynolds, maior é a vazão no braço principal e menor a vazão no braço secundário, como era esperado com base nos resultados na seção 4.2.4.1. A diferença entre as vazões chega a atingir 0,36 para $Re = 200$. O aumento do número de Reynolds dificulta a difusão do fluido para o braço auxiliar, visto que a inércia do fluido passa a dominar o escoamento, logo este se mantém no eixo principal.

A divisão igualitária da vazão é possível se for imposto no software como uma condição de contorno. Isso implicaria em fixar a velocidade e o gradiente de pressão nas saídas, porém esta não é uma condição que será analisada neste trabalho, como discutido anteriormente.

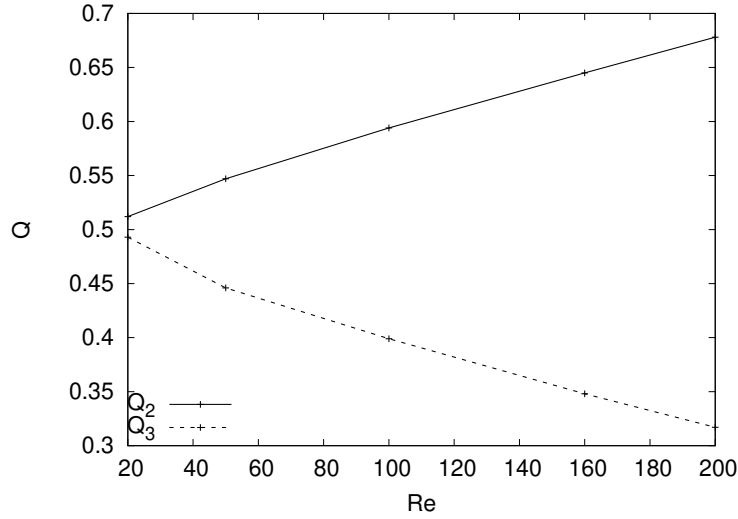


Figura 69: Variação da vazão, Q , de acordo com o aumento do número de Reynolds para a o braço principal, Q_2 , e o braço secundário, Q_3

4.2.5 Com campo magnético

Para avaliar o efeito da força magnética sobre o fluido foram aplicados 2 campos magnético ao escoamento na junção T: um voltado para baixo, contribuindo para a vazão Q_3 e o outro voltado para cima, contribuindo para a vazão Q_2 , os campos são dados pelas seguintes funções

$$\mathbf{H}_1 = - \left(1 + \frac{y}{l_y} \right) \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (4.1)$$

e

$$\mathbf{H}_2 = \frac{y}{l_y} \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (4.2)$$

respectivamente. Os campos (4.1) e (4.2) são aplicados por todo o domínio, estes campos foram escolhidos devido à simplicidade em determinar o gradiente do mesmo, ao fato de ele ser igual ao longo de todo o eixo x e à presença de apenas uma componente de força. Este campo é uma aproximação utilizada para registrar os efeitos e as possibilidades que existem com o ferrofluido.

Para que a força magnética tenha efeito sobre o fluido, é necessário introduzir algum tipo de troca de calor. Sem essa transferência de calor e dentro de um domínio fechado, a força magnética acaba por não influenciar o escoamento, de forma similar ao que acontece com a gravidade (ROSENSWEIG, 2013). Para o trabalho em questão, a troca de calor acontece entre o fluido que entra quente a temperatura T_q e as paredes do domínio que estão frias a temperatura T_f . Esses parâmetros serão definidos mais adiante.

Na Figura 70 é apresentado a divisão das regiões do domínio. As linhas vermelhas correspondem as paredes da entrada; as azuis, as paredes da saída sul; as laranjas, as paredes da saída leste.

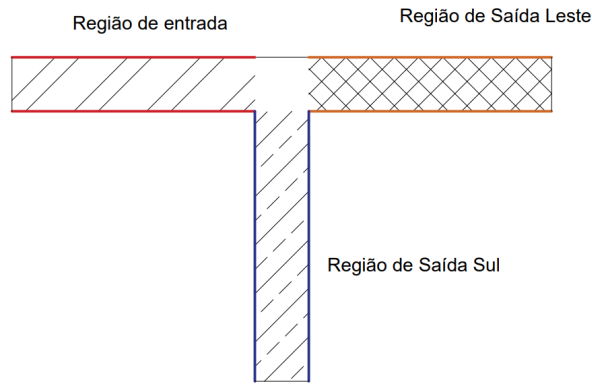


Figura 70: Desenho da Junção em T apresentando as regiões do domínio e as paredes correspondentes. Vermelho para as paredes da entrada, laranja para a saída leste e azul para a saída sul

Existe uma implicação, o fato da variável α_m ser composta de uma razão com a temperatura no denominador. Não é possível utilizar diretamente a adimensionalização da temperatura baseada na diferença da mesma, pois ocorreria uma divisão por zero. Por isso, as temperaturas da simulação foram especificadas para que elas sejam inseridas no α_m . Portanto o α_m é trabalhado da seguinte forma, neste estudo,

$$\alpha_m = \frac{\alpha_0 H'}{1 + \frac{\theta \Delta T}{T_f}}. \quad (4.3)$$

H' é a intensidade do campo na forma adimensional, ΔT a diferença de temperatura entre a temperatura quente, T_q e a temperatura fria, T_f a temperatura fria. O parâmetro α_0 é uma constante auxiliar referente ao valor de α_m pode atingir, ela recebe todas as outras variáveis que não são mostradas na equação (4.3), logo

$$\alpha_0 = \frac{\pi \mu_0 M_d H_0 d_m^3}{6 k_b T_f}. \quad (4.4)$$

Portanto, para a simulação do ferrofluido neste trabalho são necessários definir as seguintes condições

- Número de Reynolds - Re
- Número Magnético - Mn
- Campo magnético - \mathbf{H}
- Valor base para a parâmetro α - α_0
- Número de Prandtl - Pr
- Temperatura fria - T_f
- A diferença de temperatura - $\Delta T = T_q - T_f$

4.2.5.1 Escoamento permanente

Para uma análise qualitativa do escoamento, foram simulados os casos apresentados na Tabela 25. O número magnético varia pois a sua adimensionalização está de acordo com a velocidade ao quadrado, de forma similar a pressão adimensional, isso não significa que o campo aplicado para um maior número de Reynolds seja de menor intensidade. Além disso, os valores utilizados para os campos se diferenciam, pois conforme aumenta-se o número de Reynolds, é necessário um campo mais intenso para que o fluido se mova em maior quantidade para o braço inferior.

Tabela 25: Tipos de escoamento e os parâmetros da simulação

Caso	Re	Mn	Campo
1	10	100	\mathbf{H}_1
2	10	100	\mathbf{H}_2
3	50	25	\mathbf{H}_1
4	50	20	\mathbf{H}_2
5	100	14	\mathbf{H}_1
6	100	10	\mathbf{H}_2

Os outros parâmetros são fixos e presentes na Tabela 26, novamente, a troca de calor ocorre entre o fluido que entra quente e as paredes do domínio que estão frias. Optou-se por esses valores por serem dados próximos a realidade (ROSENSWEIG, 2013).

Tabela 26: Valores dos parâmetros para a simulação

Parâmetro	Valor
α_0	1
Pr	1
T_f	300
ΔT	100

As simulações conduzidas apresentam a mesma malha da seção anterior 400×320 . Novamente o CFL é de 0,15, calculado com base na velocidade máxima de entrada, portanto $\Delta t = \Delta x/10$. O tempo final de simulação é de 200 e o campo só é ativado a partir do tempo 100, optou-se por essa abordagem para que o fluido esteja em regime permanente quando as forças magnéticas passarem a atuar nele.

Nas Figuras 71 e 72 são apresentados o campo de velocidade para escoamento do Caso 1. A coloração dos vetores de velocidade mostra que grande parte do fluido se move para a direção inferior, pois as velocidades no trecho principal são próximas a zero. Analisando o campo de velocidades aproximado, Figura 72, verifica-se uma tendência do escoamento, próximo a parede e após a divisão, à seguir na direção oposta e tentar se infiltrar no braço inferior. O ponto de estagnação devido ao impacto do fluido contra a quina da divisão, deslocou-se ligeiramente para a direita. Como no caso sem campo, não houve o descolamento do fluido na parede esquerda do braço inferior.

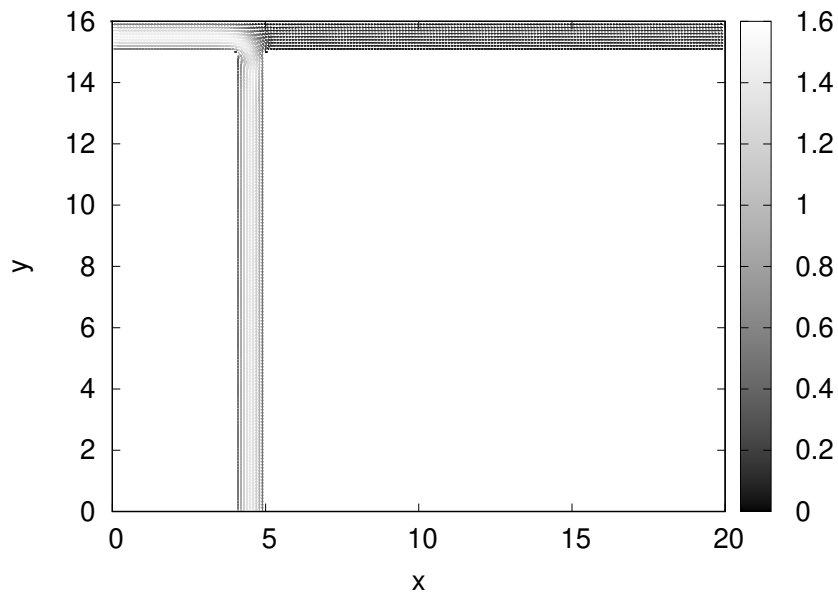


Figura 71: Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1 , escala de cores representa o módulo da velocidade

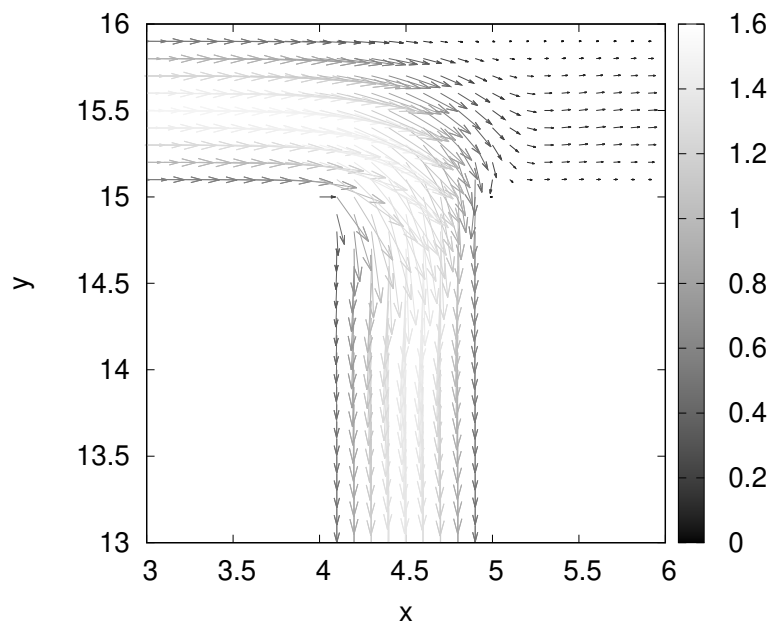


Figura 72: Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

Nas Figuras 73 e 74 são apresentados o comportamento da velocidade no eixo principal e no eixo secundário. Fica mais evidente como grande parte do escoamento foi redirecionado para o eixo secundário, ao ponto que a velocidade no centro do braço primário é menor que 0,2, enquanto que no braço secundário é de quase 1,4. Para ambos os caminhos, o fluido não precisou de um grande trecho do domínio para retornar ao estado de escoamento desenvolvido

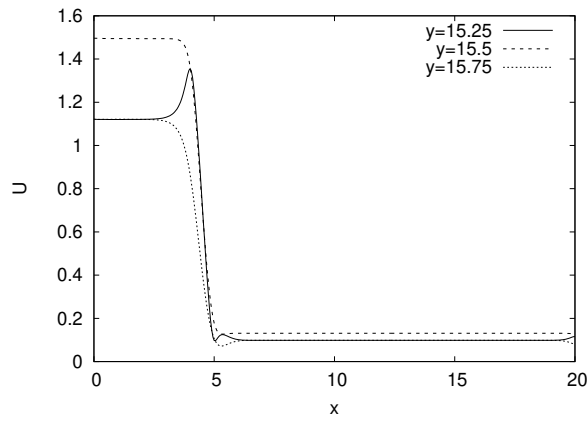


Figura 73: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1

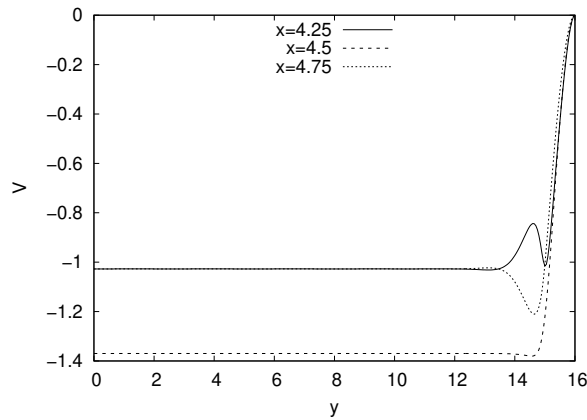


Figura 74: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1

O comportamento da pressão no eixo principal e no eixo secundário são apresentados nas Figuras 75 e 76, respectivamente. Os picos de pressão foram mais acentuados se comparados ao caso sem campo. O efeito que se destaca é o comportamento parabólico da pressão no braço inferior, diferentemente da queda linear que ocorre para um fluido Newtoniano. Entretanto, a pressão e a força magnética se balanceiam de tal forma que mantém o perfil parabólico do escoamento desenvolvido, como pode ser constatado na Figura 77, que mostra o perfil de velocidade em diferentes alturas. Na Figura 78 é apresentado o perfil de velocidade no eixo principal, como grande parte do fluido se dirigiu para a região inferior, ocorre uma drástica queda nos valores absolutos do perfil. Além disso, fica mais evidente que houve um descolamento na parede inferior do braço, pois parte do perfil apresenta valores de velocidade negativos, contrários a tendência do escoamento.

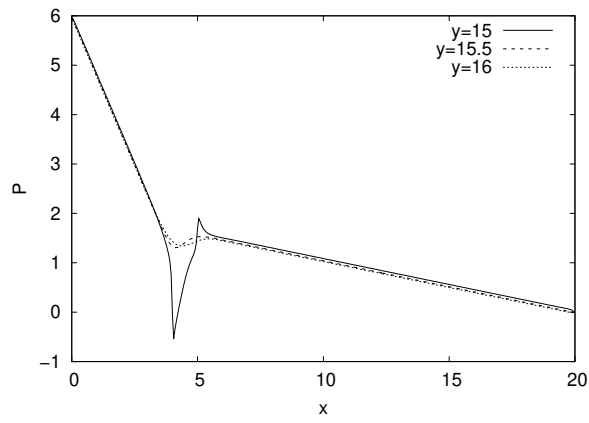


Figura 75: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1

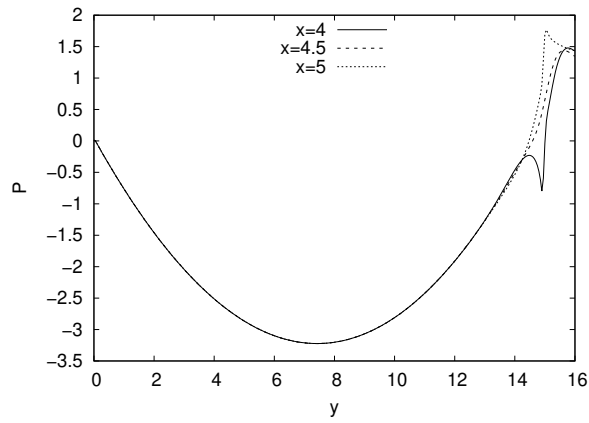


Figura 76: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1

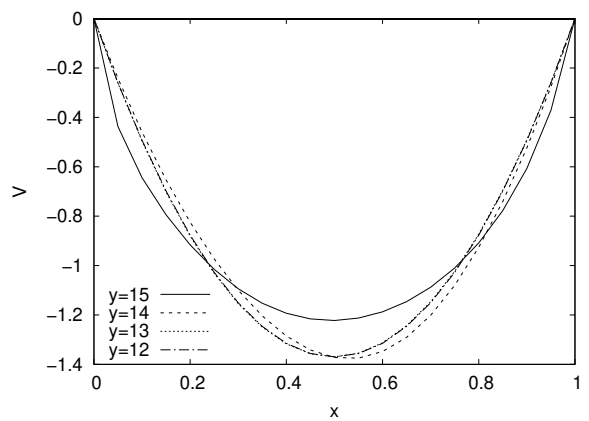


Figura 77: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1

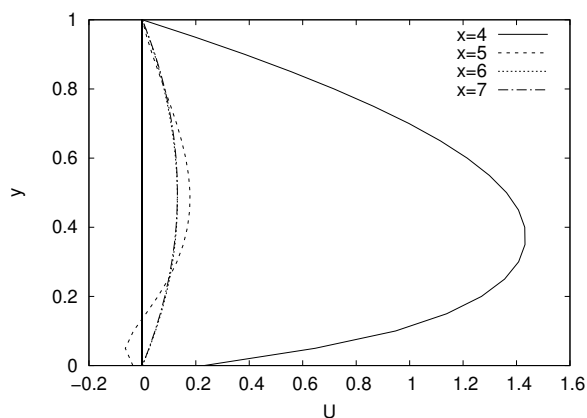


Figura 78: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_1

O campo de velocidades do caso 2 são mostrados nas Figuras 79 e 80. Neste escoamento como o campo causa uma força para a direção superior, a velocidade é maior no braço principal. Durante a passagem pela divisão, pouquíssimo fluido se dirige para o braço inferior, causando uma pequena oscilação na região próxima a parede do escoamento. Um efeito novo é a formação de uma zona de recirculação eixo secundário, ela é pequena e não se inicia na quina da divisão, porém está presente.

Um efeito que não era esperado e indesejado ocorre ao final do braço principal, trata-se da variação da velocidade no braço principal, Figura 81. Isso ocorre devido à condição de contorno de pressão nula. Pois, trata-se de uma condição prevista para toda a saída, Figura 83, e como cada altura apresenta um nível de pressão, é necessário um igualamento para que seja satisfeita a condição de contorno. Por a pressão está diretamente ligada à velocidade, ocorre a variação, também, na velocidade.

Este efeito não apresenta significado físico e é completamente numérico. Ele surge apenas na aplicação do campo \mathbf{H}_2 e se intensifica com o aumento do número Magnético, ocorrendo nos outros números de Reynolds como será apresentado.

Assim como no caso 1, a queda de pressão no braço inferior teve um comportamento não linear, aproximando-se da parábola, Figura 84. Porém a velocidade se manteve inalterada desde o momento que o escoamento se desenvolveu, Figura 82.

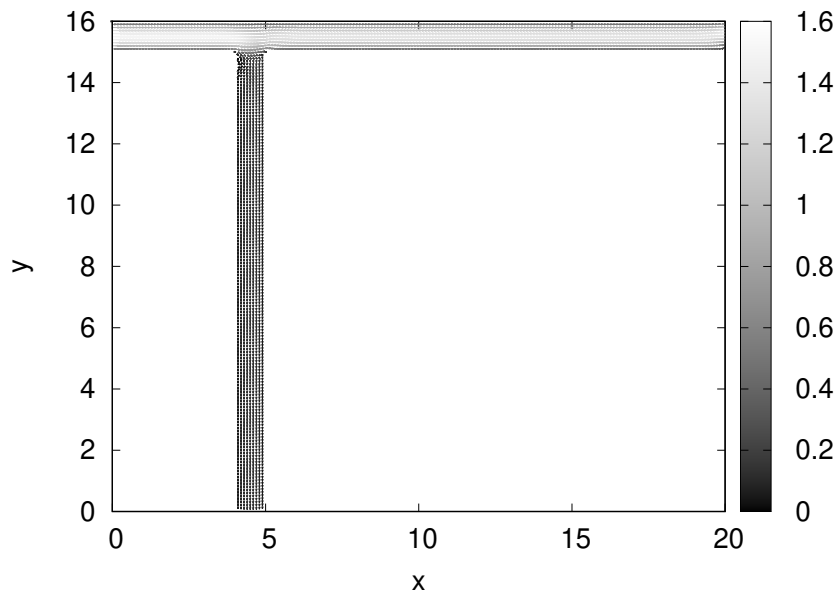


Figura 79: Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2 , escala de cores representa o módulo da velocidade

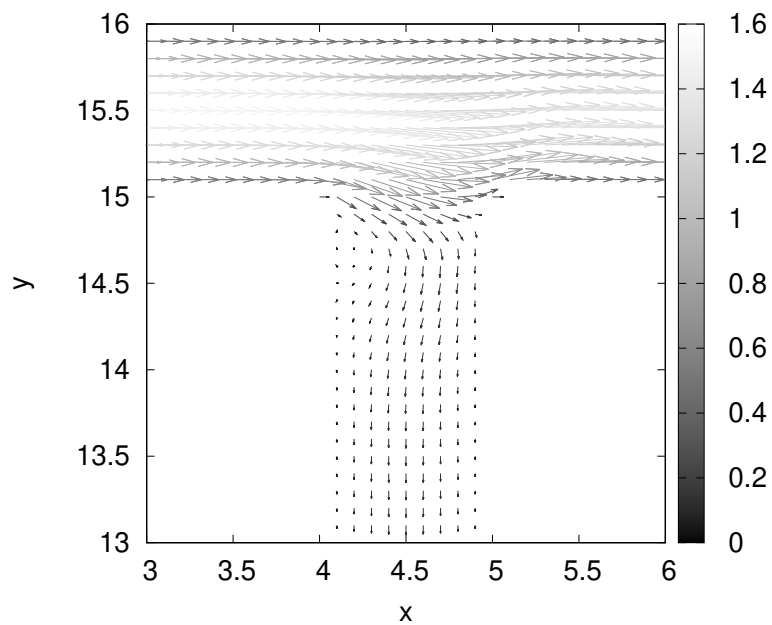


Figura 80: Campo de velocidade para $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

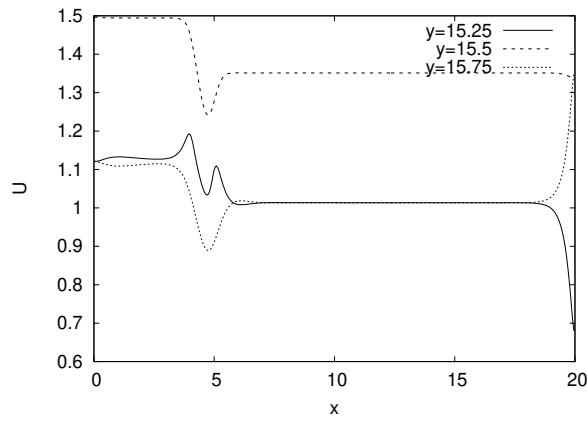


Figura 81: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2

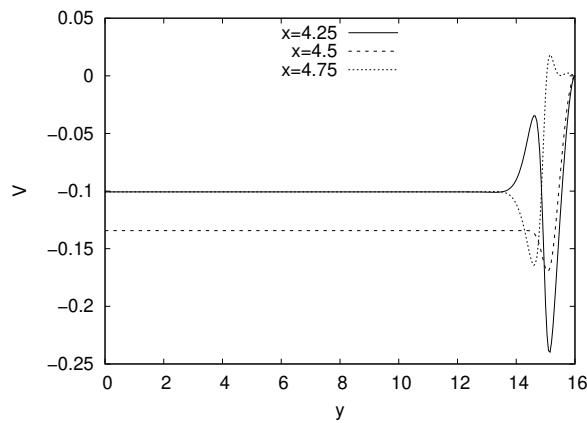


Figura 82: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2

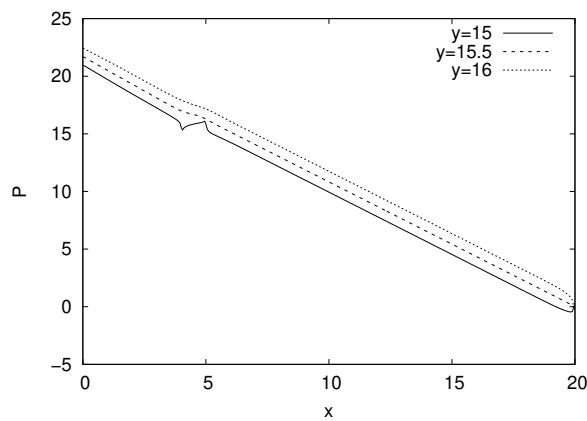


Figura 83: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2

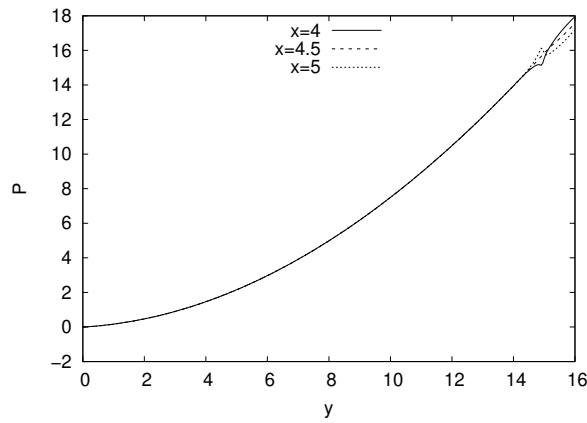


Figura 84: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2

O perfil de velocidade no braço inferior mostra um descolamento na início da parede direita do braço inferior, Figura 85. Há uma troca no local de descolamento do fluido, algo que já fora mostrado na Figura 80, em que após um ímpeto em expandir, a força magnética passa a ser maior e a acelerar o fluido para a região superior. O perfil de velocidade no braço principal mostra como a perda de fluido para a região inferior foi mínima, com os perfis estando bem próximo do que eram antes da divisão, Figura 86.

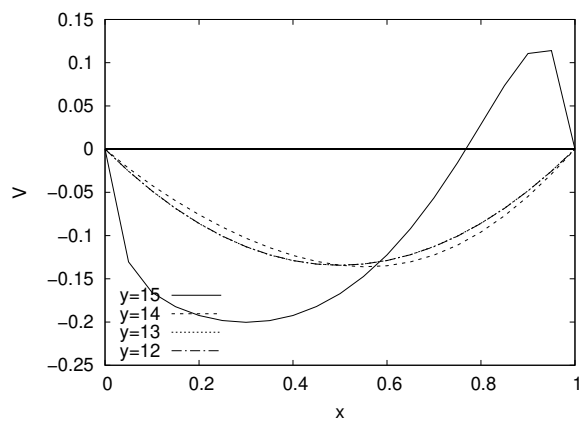


Figura 85: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2

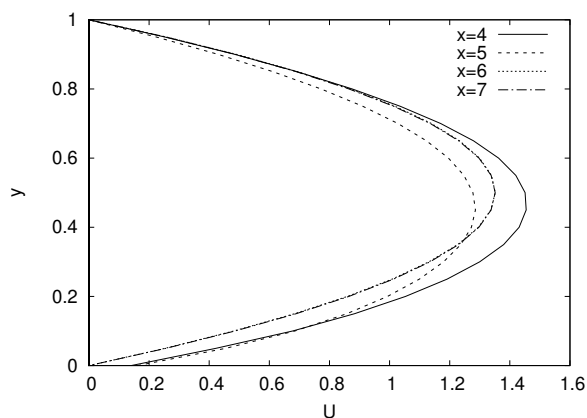


Figura 86: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 10$, $Mn = 100$, \mathbf{H}_2

Na Figura 87 é apresentado o campo de velocidades para o caso 3. Novamente, foi possível modificar o caminho do fluido para a direção inferior do braço, porém ocorre um novo fato, o aumento da velocidade geral, a escala colorida mostra o aumento da velocidade, com o limite das cor branca atingindo 1,8. Observando o campo focalizado na divisão, Figura 88, nota-se que o fluido tem dificuldade para preencher a região da parede esquerda e mesmo assim, quase todo o escoamento está sendo forçado para baixo. Devido a essa redução de área utilizável, a velocidade tem que aumentar para satisfazer a continuidade. Ocorre um descolamento na parede superior do braço principal, ele está associado a baixa quantidade de fluido que seguiu por este braço e a pouca quantidade que conseguiu passar pela divisão estar próxima a parede inferior.

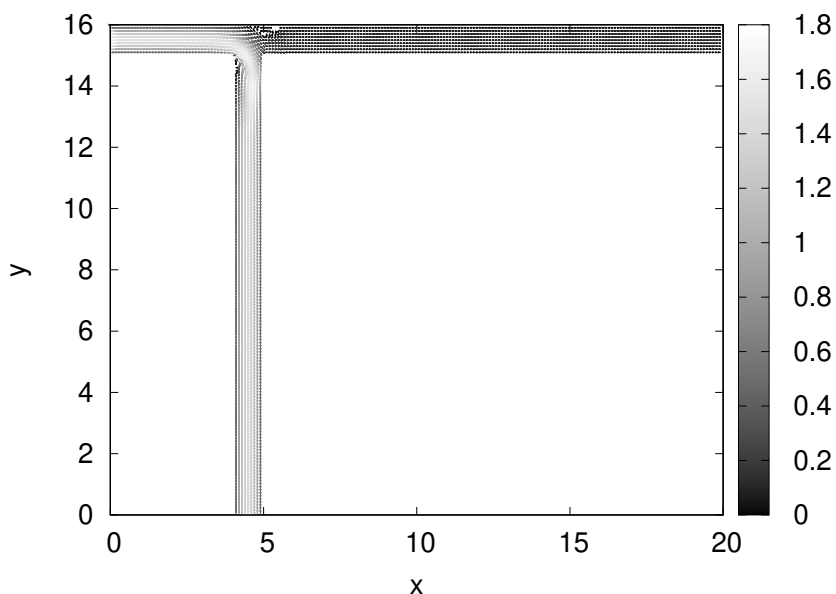


Figura 87: Campo de velocidade para $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1 , escala de cores representa o módulo da velocidade

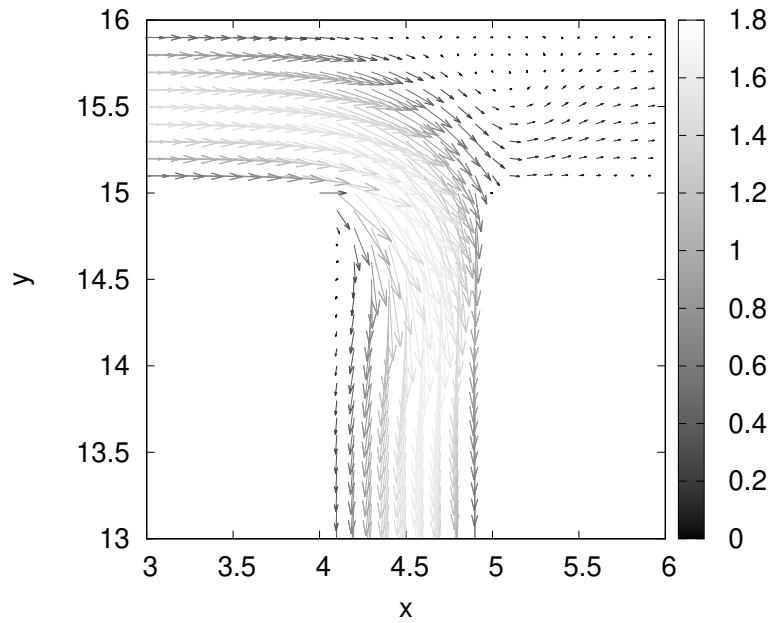


Figura 88: Campo de velocidade para $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

O comportamento da velocidade mostra como grande parte do fluido segue para o eixo perpendicular ao principal, Figura 90. A velocidade no eixo principal chega a quase zero, Figura 89, enquanto que no eixo secundário, a velocidade no centro atinge valores de 1,4, quase o máximo da velocidade da entrada, que é de 1,5. Ocorre as usuais variações na região da divisão.

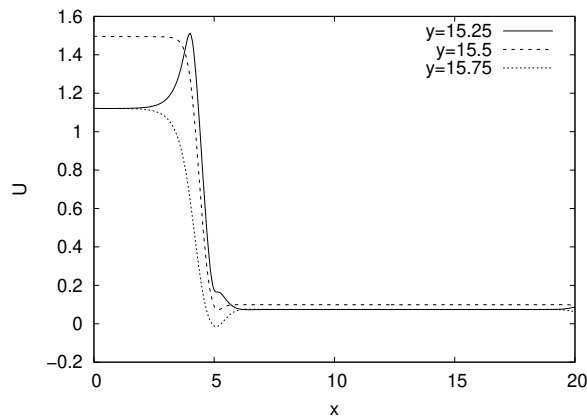


Figura 89: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1

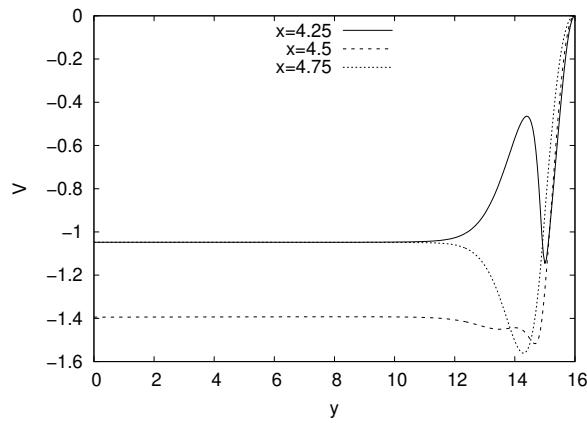


Figura 90: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1

Já a pressão apresenta os comportamentos apresentados nas Figuras 91 e 92 para o eixo principal e o eixo secundário, respectivamente. A pressão novamente sofre uma queda abrupta devido ao descolamento do fluido, o que é visível avaliando os dois gráficos. Entretanto, como a quantidade de fluido presente no eixo principal passa a ser ínfima, o choque com a parede gera um pico muito pequeno se comparado aos outros casos. Além de que a queda de pressão ocorre de forma vagarosa ao longo da direção x . Enquanto que no eixo secundário, novamente, aparece o comportamento parabólico da pressão, atingindo um mínimo local na região entre 8 e 10. A pressão só se une em um mesmo nível a partir da altura $y = 12$, indicando o desenvolvimento do escoamento

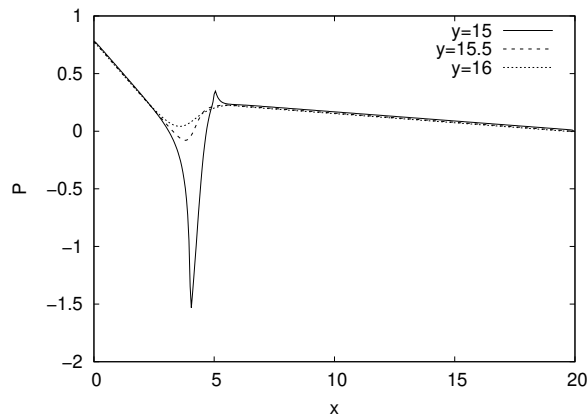


Figura 91: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1

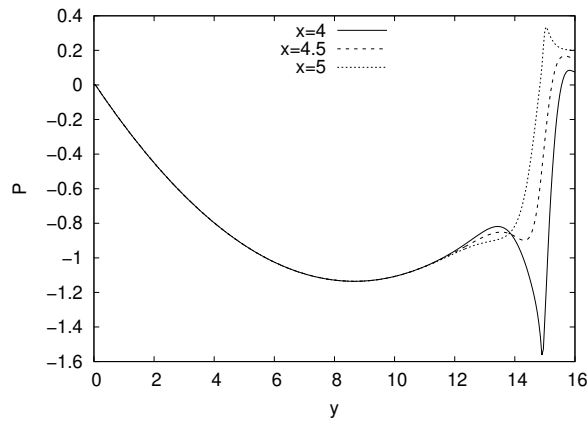


Figura 92: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1

No braço inferior, os perfis de velocidade mostram que a velocidade máxima atingida foi de aproximadamente 1,6, Figura 93, como mostrado no campo de velocidades. O escoamento precisou de uma maior distância para se desenvolver, apesar de a zona de recirculação ter sido muito menor comparado ao caso do fluido Newtoniano. Observa-se que diferentemente dos outros casos e do fluido Newtoniano, o perfil na altura 13 se difere consideravelmente em relação ao perfil na altura 12.

Para os perfil o braço principal, há uma grande diferença entre o perfil $x = 4$ e o perfil $x = 5$ devido à alta quantidade de fluido que foi para a braço de baixo, Figura 94. Constata-se o descolamento na região superior, pois parte das velocidade tiveram valores negativos. Além disso, o perfil em $x = 4$ foi extremamente deformado: perdendo o caráter parabólico e atingindo sua maior intensidade próximo a parede de baixo do braço principal.

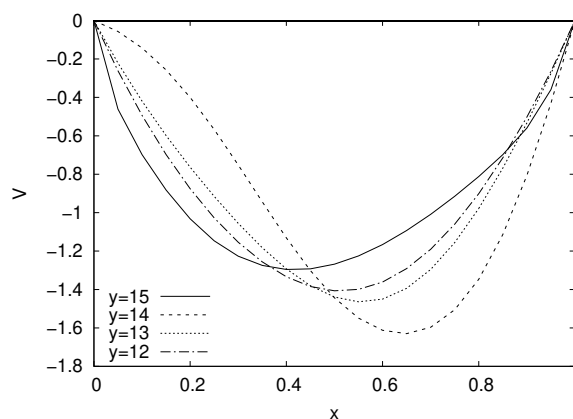


Figura 93: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1

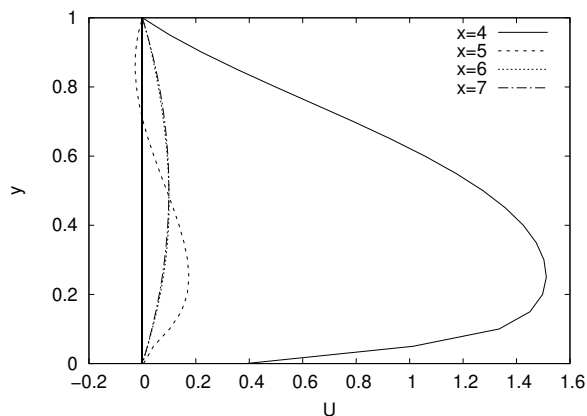


Figura 94: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 50$, $Mn = 25$, \mathbf{H}_1

Como mostrado na Tabela 25, o caso 4 é referente ao número de Reynolds de 50 e ao campo \mathbf{H}_2 . Para um escoamento com a inércia mais predominante, o número magnético não precisa ser igual ao do caso 3, pois, o fluido já apresenta uma maior tendência de se mover para baixo. Os campos de velocidade são mostrados nas Figuras 95 e 96. Como as forças de inércia são maiores, não ocorre uma decida do fluido como ocorreu para $Re = 10$, o impacto da divisão é de uma intensidade muito menor. Não ocorrem zonas de recirculação na região superior, porém o usual vórtice do braço secundário, continua presente ocupando uma região muito maior.

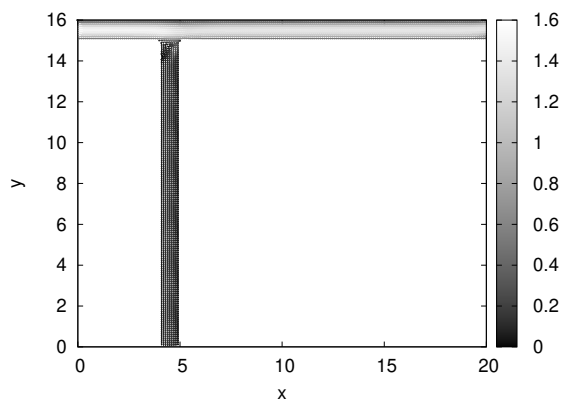


Figura 95: Campo de velocidade para $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2 , escala de cores representa o módulo da velocidade

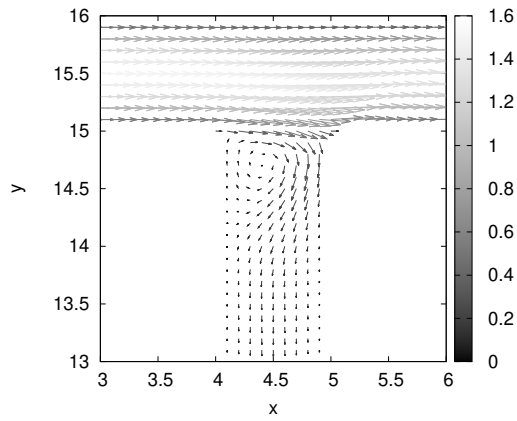


Figura 96: Campo de velocidade para $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

A velocidade ao longo do braço principal e braço secundário mostram como o fluido se manteve em grande parte na região superior, Figuras 97 e 98. As variações de velocidade são mais intensas na divisão, os dois grandes picos na Figura 98 correspondem a zona de recirculação, após esse vórtice, o fluido se desenvolve em pouco espaço, enquanto que no braço superior é necessário uma distância maior, próximo a 10. Novamente, surge o efeito da variação da velocidade ao final do braço principal, ressalta-se que esse fenômeno é puramente numérico e foi avaliado no caso 2.

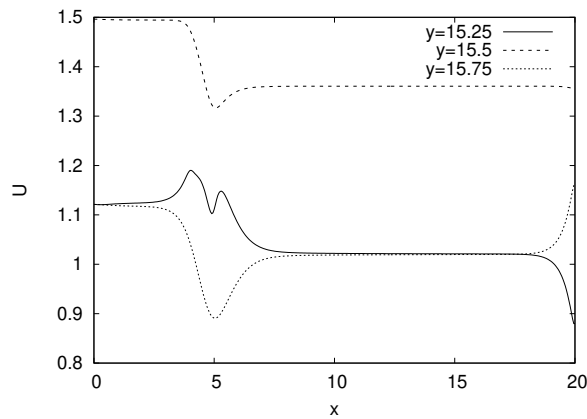


Figura 97: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2

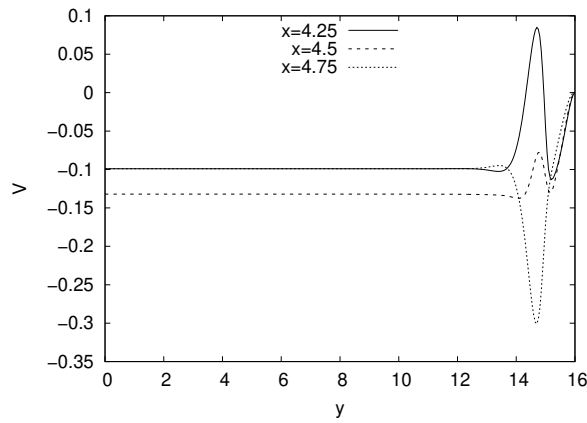


Figura 98: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2

As variações de pressão são pequenas, tanto para o efeito do descolamento como para o choque com a parede, Figuras 99 e 100. O pico de pressão devido ao choque é tão pequeno ao ponto de não superior a pressão na parede superior. Essa diferença de nível de pressão ao longo do braço principal é devido ao campo estar transversal ao escoamento nesse eixo. A pressão no braço inferior volta a ter um comportamento parabólico.

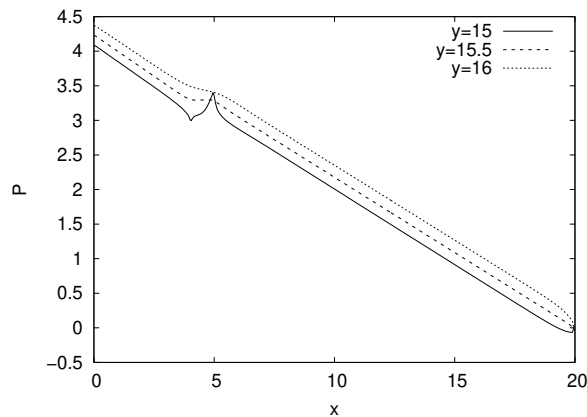


Figura 99: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2

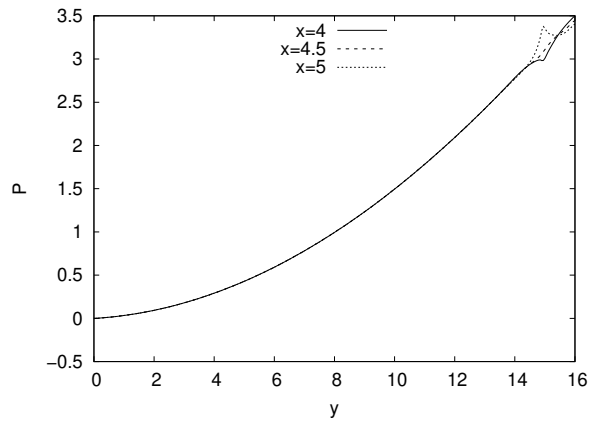


Figura 100: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2

Como último item de análise desse caso, são apresentados os perfis de velocidade para o braço inferior e o braço superior, Figuras 101 e 102. Analisando essas Figuras é mais visível como o escoamento apresentou mais dificuldade para desenvolver no braço superior, pequenas variações ocorrem nos diferentes locais de x , não havendo assim uma sobreposição de perfis. O que ocorre nos perfis do braço inferior, que como mostrado na análise da pressão, se desenvolve de forma mais rápida apesar do vórtice.

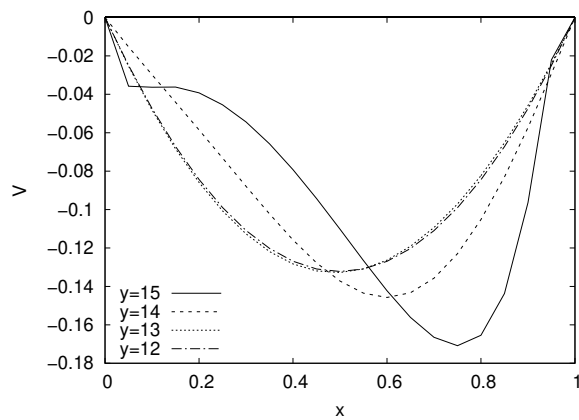


Figura 101: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2

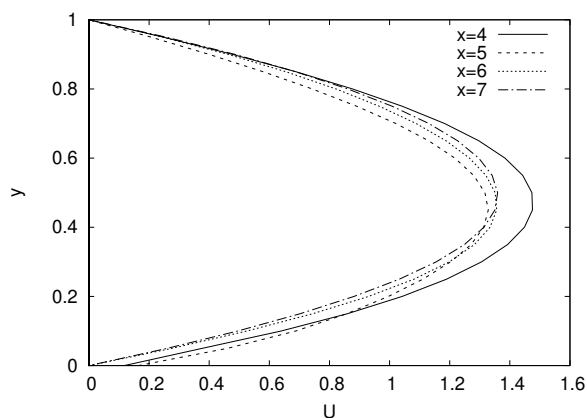


Figura 102: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 50$, $Mn = 20$, \mathbf{H}_2

Os últimos casos a serem avaliados - 5 e 6 - correspondem ao caso de maior número de Reynolds - $Re = 100$.

Nas Figuras 103 e 104 são apresentados os campos de velocidade para o caso 5. A partir da escala de cores, nota-se dois acontecimentos: que grande parte do fluido moveu-se para baixo e que o efeito do aumento de velocidade presenciado para $Re = 50$ foi mais intenso, ultrapassando a velocidade de 1,8. A região de descolamento foi mais intensa que todos os outros escoamentos, com o recolamento próximo a região de 13,5. O que era esperado, tendo em vista que trata-se de um escoamento com uma inércia mais dominante, o que dificulta que o fluido realize a curva para atingir a parte inferior do domínio.

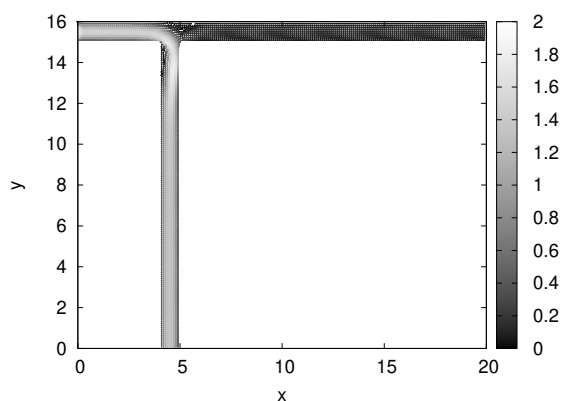


Figura 103: Campo de velocidade para $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1 , escala de cores representa o módulo da velocidade

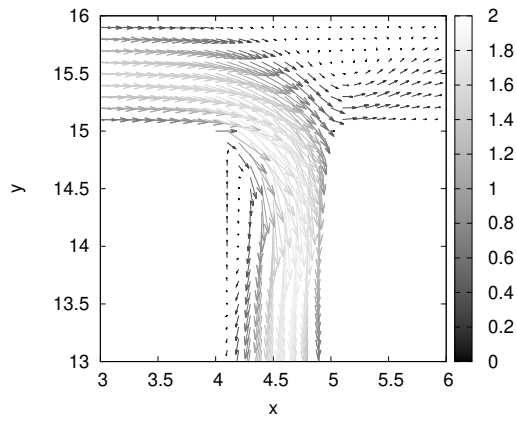


Figura 104: Campo de velocidade para $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

Observando o comportamento da velocidade nas Figuras 105 e 106 ratifica tendência do fluido em seguir pelo braço inferior. As variações de velocidade foram mais contundentes se comparado aos outros casos, causando a necessidade de um maior comprimento para o desenvolvimento do fluido em ambas as direções. Além disso a componente de velocidade y em $x = 4,25$ não supera a velocidade nula e se mantém sempre negativa, o que não ocorreu em $Re = 50$. Isso indica que o vórtice está achatado contra a parede.

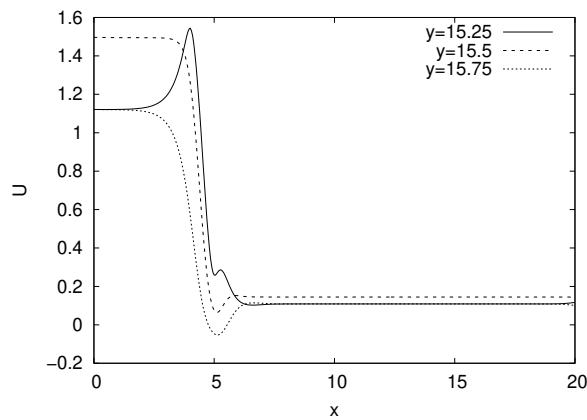


Figura 105: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1

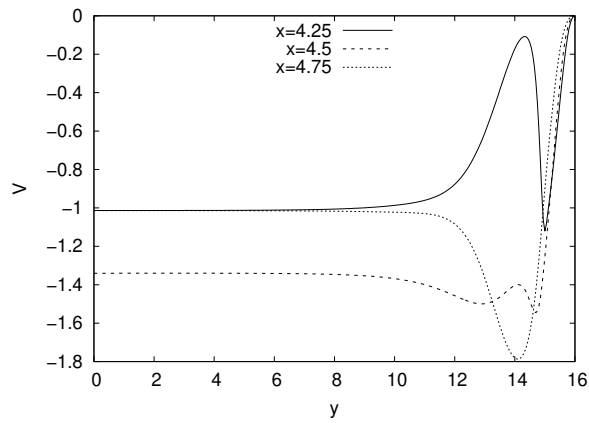


Figura 106: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1

A queda de pressão logo no início da divisão é mais acentuada que em relação aos outros casos, em compensação o choque com a parede não se aproxima em intensidade. No eixo principal a pressão decai de forma linear enquanto que no eixo secundário novamente ocorre o comportamento parabólico.

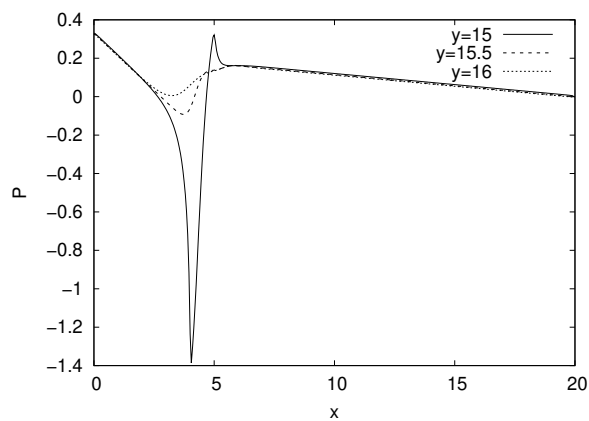


Figura 107: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1

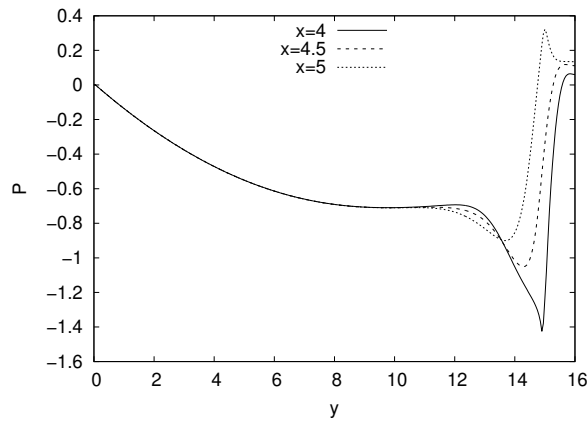


Figura 108: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1

Os efeitos que ocorram para $Re = 50$ se intensificaram para $Re = 100$: no braço inferior, a velocidade do fluido para baixo é muito mais intensa e próxima da região da parede direita, Figura 109; perfil de velocidades antes da divisão está muito mais próximo da parede inferior, perdendo todo o caráter de parábola, Figura 110; em ambas as direções, o fluido precisou de um maior comprimento para se desenvolver por completo.

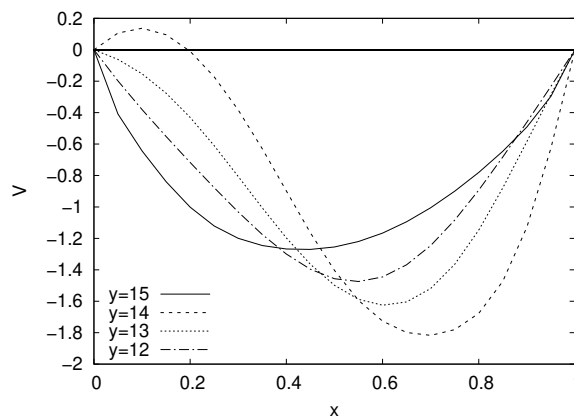


Figura 109: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1

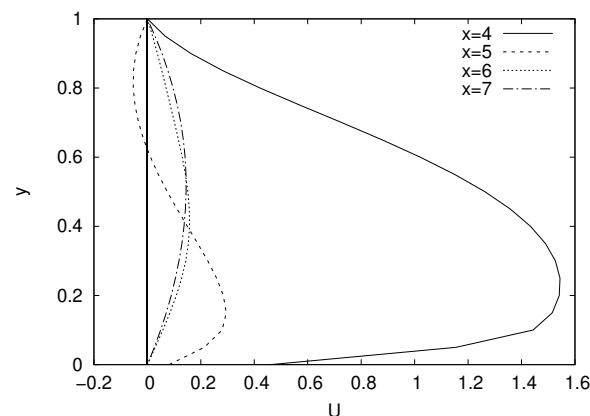


Figura 110: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 100$, $Mn = 14$, \mathbf{H}_1

Nas Figuras 111 e 112 são apresentados os campos de velocidade para o caso 6. O fluido se manteve no eixo principal, a divisão teve pouco impacto no fluido que segue para a saída 2. Não houve um aumento da velocidade máxima, visto que não existem vórtices atrapalhando o escoamento na região superior. Pode-se dizer que o escoamento no braço secundário, na região próxima à junção T, se assemelha ao de uma cavidade, visto que o escoamento na região inferior aparenta ser formado por uma placa deslizante.

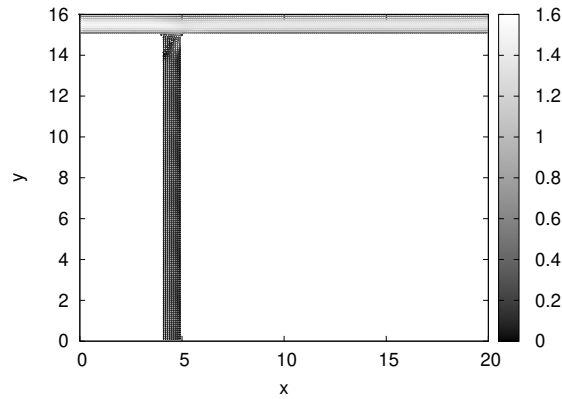


Figura 111: Campo de velocidade para $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2 , escala de cores representa o módulo da velocidade

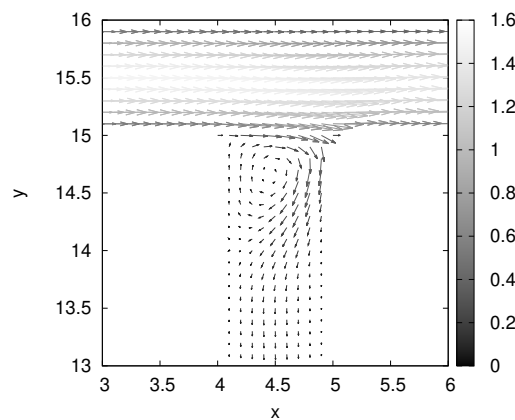


Figura 112: Campo de velocidade para $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2 , focalizado na divisão do escoamento, escala de cores representa o módulo da velocidade

Nas Figuras 113 e 114 são apresentados os comportamentos das componentes de velocidade na direção x no braço principal e na direção y no braço secundário, respectivamente. O impacto da junção T é mais visível quando se analisa a velocidade, porém não atinge a mesma magnitude se comparado aos outros casos. Novamente, o grande parte do fluido se manteve em direção a saída leste. Outro fato influenciado pela inércia é que o comprimento de desenvolvimento aumentou se comparado ao $Re = 50$, o que é a tendência quando se aumenta o número de Reynolds

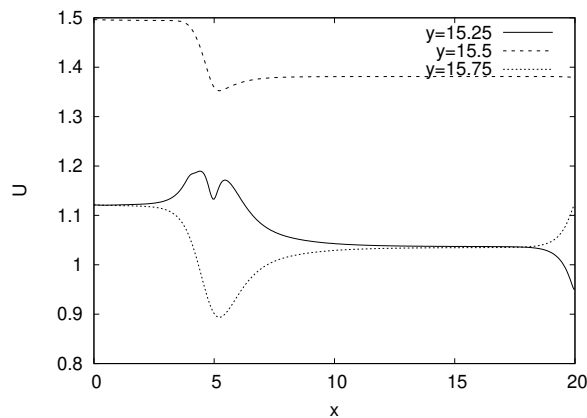


Figura 113: Comportamento da componente de velocidade x no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2

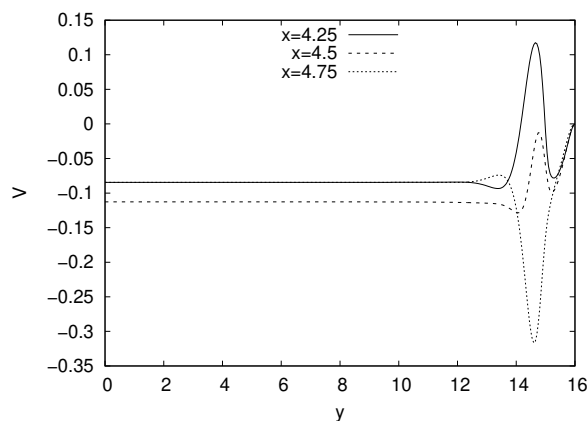


Figura 114: Comportamento da componente de velocidade y no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2

A pressão variou de forma similar ao caso 4, Figuras 115 e 116. A diferença é que o choque gerou uma pressão no ponto de estagnação maior que a pressão na parede superior, efeito direto do aumento do número de Reynolds. A pressão no braço inferior manteve a tendência e se comportou de forma parabólica, decaindo até o final do domínio

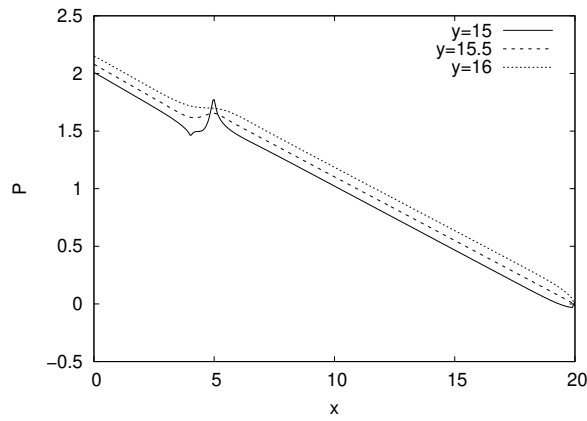


Figura 115: Comportamento da pressão no eixo principal em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2

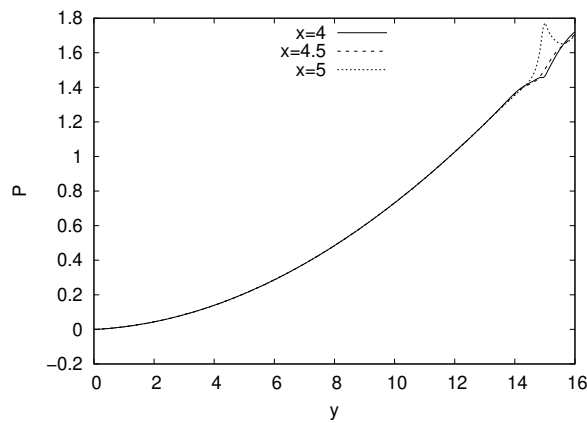


Figura 116: Comportamento da pressão no eixo secundário em diferentes alturas; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2

Os perfis de velocidade corroboram com a ideia de que o fluido teve dificuldade para se desenvolver e que o fluido se manteve, em grande parte, no braço principal.

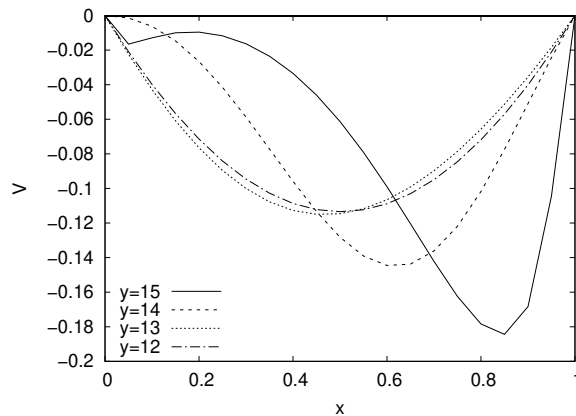


Figura 117: Perfis de velocidade ao longo do eixo secundário; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2

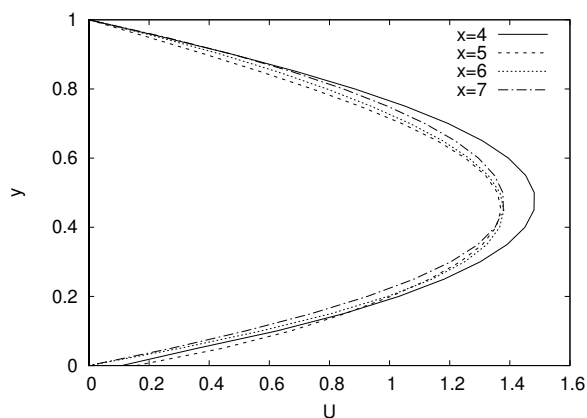


Figura 118: Perfis de velocidade ao longo do eixo principal; $Re = 100$, $Mn = 10$, \mathbf{H}_2

4.2.5.2 Vazão

Para analisar a vazão, foram realizadas simulações com Reynolds 10, 50 e 100 com número magnético variando de 0 até o apresentado na seção 4.2.5.1 para cada campo e cada número de Reynolds. As malhas utilizadas são as mesmas da seção anterior 4.2.5.1 - 400×300 - com um passo no tempo de $\Delta t = 0,005$ até atingir o regime permanente em $t = 200$, com o campo sendo inicializado no tempo $t = 100$.

Na Figura 119 são apresentados os resultados para o escoamento com $Re = 10$ e campo \mathbf{H}_1 . Conforme aumenta-se o número magnético, maior a quantidade de fluido que sai pela saída Q_3 - saída sul. Por consequência diminui-se a quantidade de fluido que sai pela saída leste Q_2

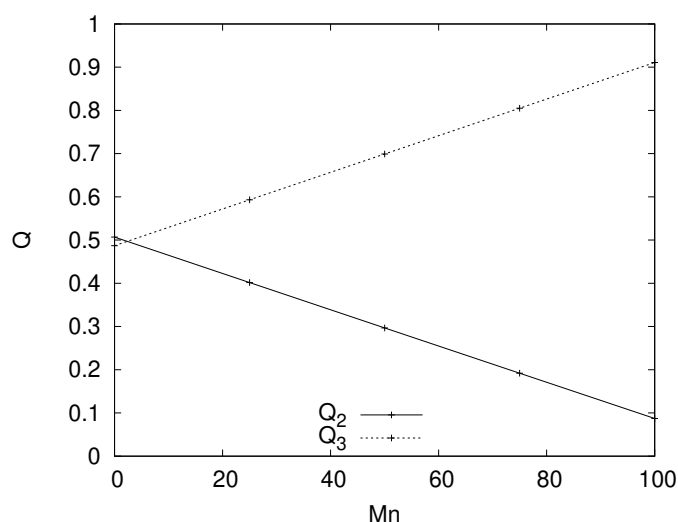


Figura 119: Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_1 e $Re = 10$

Já para o campo \mathbf{H}_2 , conforme aumenta-se o campo, maior a quantidade de fluido que se mantém no eixo principal. Nesse caso não existe um momento em que as vazões se igualam, pois a vazão por cima já é maior sem a presença do campo.

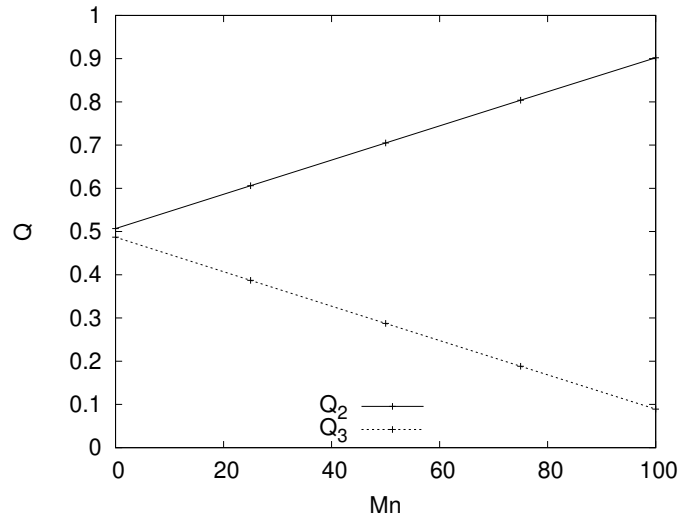


Figura 120: Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_2 e $Re = 10$

Como $Re = 50$ a inércia é mais intensa e o número Magnético está adimensionalizado com base em uma velocidade ao quadrado, é necessário diminuir os valores do número magnético. Desta forma, só é analisado de 0 a no máximo 25 para \mathbf{H}_1 ou 20 para \mathbf{H}_2 . O fluido segue a tendência do campo conforme ele aumenta desta forma a vazão pela saída 3 aumenta para o campo \mathbf{H}_1 , enquanto que a vazão aumenta pela saída 2 para o campo \mathbf{H}_2 , da mesma forma que $Re = 10$, Figura 121 para $Re = 50$ e campo \mathbf{H}_1 e Figura 122 para $Re = 100$ e campo \mathbf{H}_2 .

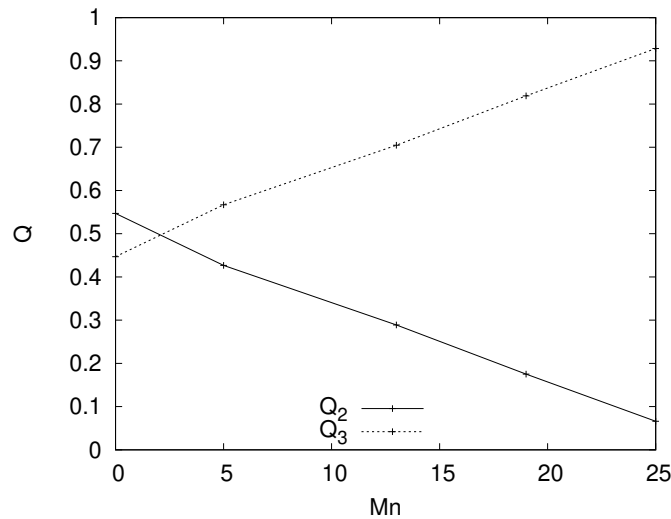


Figura 121: Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_1 e $Re = 50$

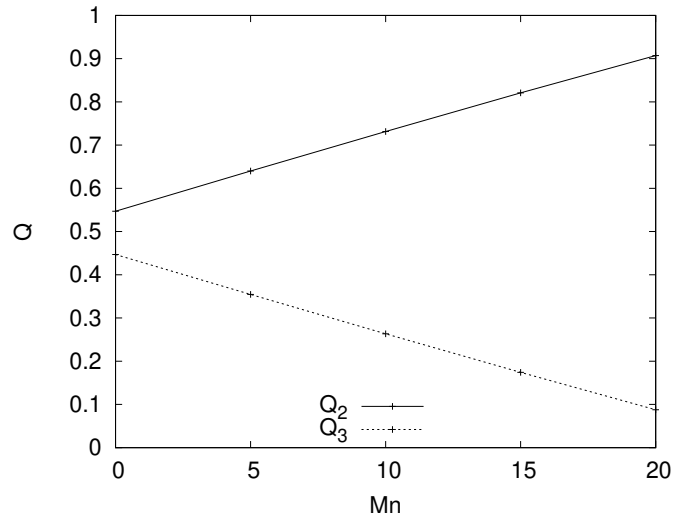


Figura 122: Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_2 e $Re = 50$

Como aconteceu com os outros números de Reynolds, para $Re = 100$ não é diferente. O aumento do número magnético aumenta força devido ao campo e por consequência o fluido é mais afetado. Quando o campo é \mathbf{H}_1 , o fluido sai em maior quantidade pelo braço inferior, Figura 123 e quando o campo é \mathbf{H}_2 , pelo braço superior, Figura 124

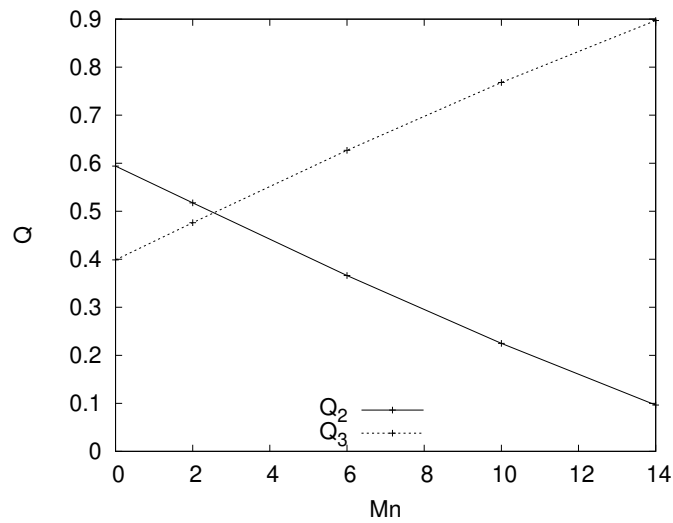


Figura 123: Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_1 e $Re = 100$

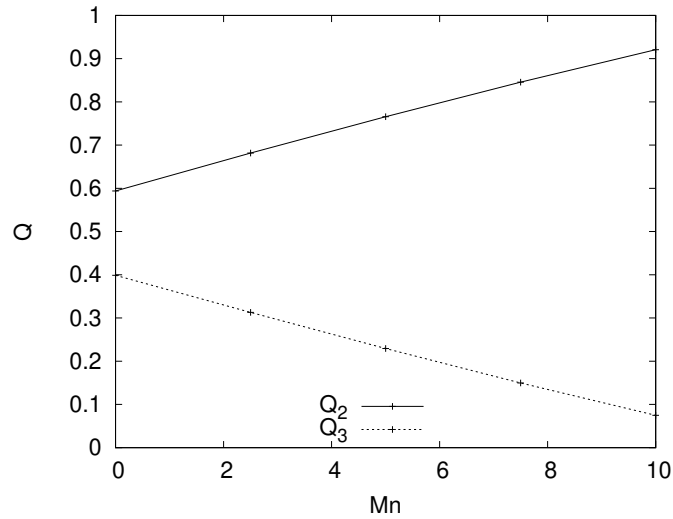


Figura 124: Variação da vazão de acordo com o número magnético para o campo \mathbf{H}_2 e $Re = 100$

Em todos os casos, a vazão teve um comportamento linear de acordo com o número Magnético, mesmo aumentando o número de Reynolds, o que impacta na pressão e na velocidade como apresentado na seção 4.2.5.1. Apesar da necessidade de mudar o número magnético, o ponto de vazão igual, $Q_2 = Q_3$ para o campo \mathbf{H}_1 se manteve na mesma região, Figura 125. Aproximando para a região entre 0 e 3, Figura 126, nota-se que o pontos de interseção entre Q_2 e Q_3 ocorrem entre 2 e 3.

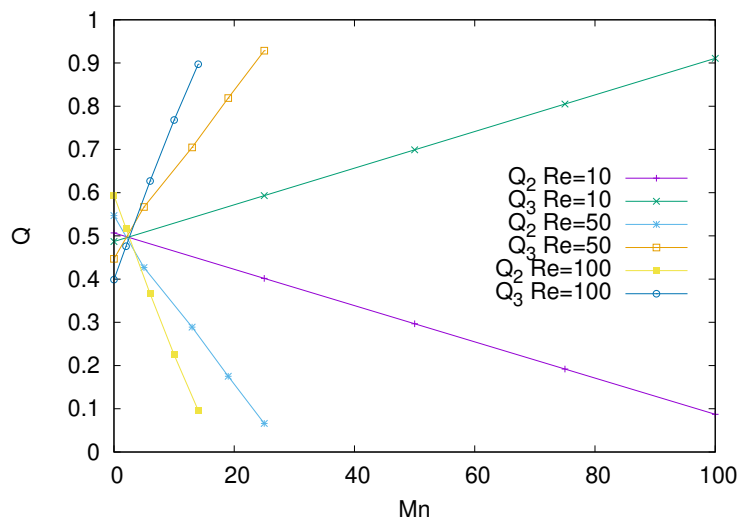


Figura 125: Vazões para $Re = 10$, $Re = 50$ e $Re = 100$ de acordo com o número magnético

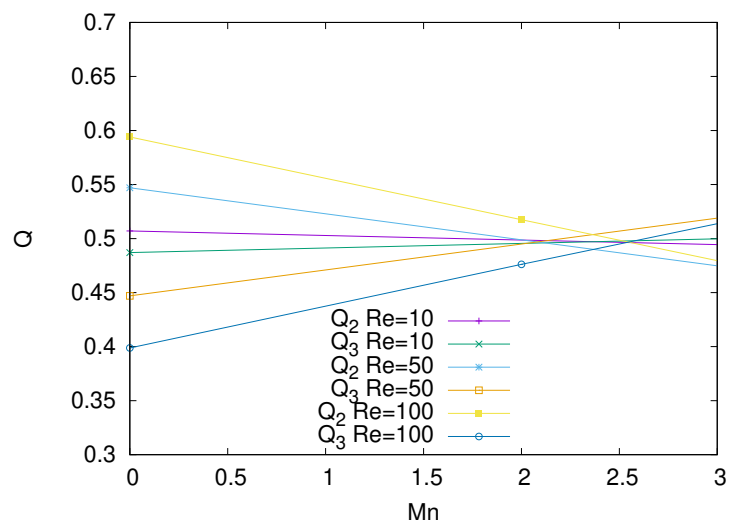


Figura 126: Vazões para $Re = 10$, $Re = 50$ e $Re = 100$ de acordo com o número magnético, $x = [0,3]$

5 Considerações Finais

5.1 Conclusão

Nas seções anteriores foram apresentadas a fundamentação teórica necessária para equacionar o comportamento de um ferrofluido, a metodologia numérica para simular o escoamento de fluidos Newtonianos e ferrofluidos, e para desenvolver o software utilizado neste trabalho. Os resultados obtidos com o programa desenvolvido. E por último foram apresentados os resultados para o problema proposto na introdução: como controlar o escoamento em uma junção T.

Em cada tipo de escoamento a física do mesmo foi representada. Na cavidade os perfis de velocidade foram similares aos do autor Ghia, Ghia e Shin (1982). No escoamento entre placas o fluido se desenvolveu e deixou de variar ao longo da direção axial. No degrau o ponto de recolamento cresceu conforme aumentava-se o número de Reynolds e os valores do ponto de recolamento estavam próximos dos obtidos por Biswas, Breuer e Durst (2004).

As simulações na junção T mostraram a ocorrência da formação de uma zona de recirculação no braço auxiliar, o que era esperado devido ao descolamento do escoamento causado pela inércia do fluido. O escoamento dividiu-se de forma desigual, tendo uma tendência a se manter no eixo principal conforme aumentou-se o número de Reynolds. Ocorreu o ponto de estagnação na quina da junção T, ponto este que é configurado pelo aumento da pressão e da velocidade convergindo para 0.

O ferrofluido foi influenciado pela presença do campo magnético ao ponto de impedir o escoamento para determinado braço. As estruturas usuais de um escoamento em uma junção T - recirculação - foram obtidas quando o ferrofluido foi afetado pelo campo, entretanto, elas sofreram modificações, as zonas de recirculação se tornaram mais achatadas ou moveram-se.

Um contratempo que ocorreu foi a variação da pressão e da velocidade na saída 2, saída do braço principal, quando aplicado o campo \mathbf{H}_2 que contribuía para a saída do fluido nessa saída. Existem algumas possibilidades para que este efeito não ocorra e devem ser abordadas em trabalhos futuros:

- Desligar o campo magnético ao final do domínio: este efeito adverso é fruto da inte-

ração campo magnético e condição de contorno, logo não havendo campo magnético, não ocorre a perturbação;

- Mudar as condições de contornos, visto que, a condição de contorno de pressão nula e gradiente de velocidade pode não ser a mais indicada para a saída do escoamento;
- Alterar o campo: o campo produzido por um fio varia sua intensidade na direção x e y , estando longe das saídas.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Tendo em vista os resultados obtidos propõe-se como trabalhos futuros:

- Simular o escoamento em 3 dimensões: o aumento do número de Reynolds implica na tridimensionalidade do escoamento, que pode ser explorado;
- Implementar um ferrofluido assimétrico: em um ferrofluido assimétrico, o tensor de tensões é assimétrico, ocasionando no surgimento de mais um termo de força na equação de Navier-Stokes Modificada;
- Variar a espessura dos braços: um braço inferior de menor espessura pode dificultar a divisão do escoamento, um efeito que pode ser avaliado;
- Implementar um campo de um ímã ou de um fio: tratam-se de campos reais com componentes de força em ambas as direções, x e y , que varia ao longo de todo o domínio, é um caso que pode resolver o problema da saída do fluido.

Referências

- ABBOTT, D.; KLINE, S. Experimental investigation of subsonic turbulent flow over single and double backward facing steps. *Journal of Basic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 84, n. 3, p. 317–325, 1962.
- ABDELMIGID, T. A. et al. Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria Engineering Journal*, Elsevier, v. 56, n. 1, p. 123–135, 2017.
- ABDULWAHID, M. A.; INJETI, N. K.; DAKHIL, A. P. S. F. CFD simulations and flow analysis through a T-junction pipe. 2012.
- AMINFAR, H.; MOHAMMADPOURFARD, M.; ZONOUZI, S. A. Numerical study of the ferrofluid flow and heat transfer through a rectangular duct in the presence of a non-uniform transverse magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 327, p. 31–42, 2013.
- ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- AZZOPARDI, B. t.; WHALLEY, P. The effect of flow patterns on two-phase flow in a T-junction. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 8, n. 5, p. 491–507, 1982.
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000.
- BEJAN, A.; KRAUS, A. D. *Heat transfer handbook*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. v. 1.
- BHUTTA, M. M. A. et al. CFD applications in various heat exchangers design: A review. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 32, p. 1–12, 2012.
- BISWAS, G.; BREUER, M.; DURST, F. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 126, n. 3, p. 362–374, 2004.
- BOLES, M.; ÇENGEL, Y. *Termodinâmica. 7ª edição*. [S.l.]: AMGH Editora, 2013.
- BROWN, D. L.; CORTEZ, R.; MINION, M. L. Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 168, n. 2, p. 464–499, 2001.

- BURGGRAF, O. R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 24, n. 1, p. 113–151, 1966.
- BYUN, H. S.; RHEE, K. CFD modeling of blood flow following coil embolization of aneurysms. *Medical Engineering & Physics*, Elsevier, v. 26, n. 9, p. 755–761, 2004.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos-3*. [S.l.]: AMGH Editora, 2015.
- CENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. *Tranferência de Calor e Massa*. [S.l.]: AMGH Editora, 2009.
- CHANDRASEKHARAIHAH, D.; DEBNATH, L. *Continuum mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 2014.
- CHOI, H. W.; BARAKAT, A. I. Numerical study of the impact of non-Newtonian blood behavior on flow over a two-dimensional backward facing step. *Biorheology*, IOS Press, v. 42, n. 6, p. 493–509, 2005.
- CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 2, n. 1, p. 12–26, 1967.
- CUNHA, M. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2000.
- DURST, F. et al. The development lengths of laminar pipe and channel flows. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 127, n. 6, p. 1154–1160, 2005.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational methods for fluid dynamics*. [S.l.]: Springer, 2002. v. 3.
- GANGULY, R. et al. Analyzing ferrofluid transport for magnetic drug targeting. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 289, p. 331–334, 2005.
- GARSTECKI, P. et al. Formation of droplets and bubbles in a microfluidic T-junction—scaling and mechanism of break-up. *Lab on a Chip*, Royal Society of Chemistry, v. 6, n. 3, p. 437–446, 2006.
- GERDROODBARY, M. B. et al. The influence of non-uniform magnetic field on heat transfer intensification of ferrofluid inside a T-junction. *Chemical Engineering and Processing-Process Intensification*, Elsevier, v. 123, p. 58–66, 2018.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982.
- GOLDSTINE, H. H. *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 2.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.l.]: Prentice Hall New Jersey, 1962.
- GUERRERO, J. P.; COTTA, R. Benchmark integral transform results for flow over a backward-facing step. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 25, n. 5, p. 527–540, 1996.
- HAYES, R.; NANDAKUMAR, K.; NASR-EL-DIN, H. Steady laminar flow in a 90 degree planar branch. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 17, n. 4, p. 537–553, 1989.

- HIERGEIST, R. et al. Application of magnetite ferrofluids for hyperthermia. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 201, n. 1-3, p. 420–422, 1999.
- HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- HORNBECK, R. W. Laminar flow in the entrance region of a pipe. *Applied Scientific Research, Section A*, Springer, v. 13, n. 1, p. 224–232, 1964.
- KAWAGUTI, M. Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 16, n. 11, p. 2307–2315, 1961.
- LAJVARDI, M. et al. Experimental investigation for enhanced ferrofluid heat transfer under magnetic field effect. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 322, n. 21, p. 3508–3513, 2010.
- MATOS, H.; OLIVEIRA, P. Steady and unsteady non-Newtonian inelastic flows in a planar T-junction. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Elsevier, v. 39, p. 102–126, 2013.
- MATOS, H.; OLIVEIRA, P. Steady flows of constant-viscosity viscoelastic fluids in a planar T-junction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 213, p. 15–26, 2014.
- MCCOMAS, S.; ECKERT, E. R. G. Laminar pressure drop associated with the continuum entrance region and for slip flow in a circular tube. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 32, n. 4, p. 765–770, 1965.
- MILNE-THOMSON, L. M. *Theoretical hydrodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1996.
- MOHANTY, A.; ASTHANA, S. Laminar flow in the entrance region of a smooth pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 90, n. 3, p. 433–447, 1979.
- MOIN, P.; MAHESH, K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 30, n. 1, p. 539–578, 1998.
- MOURA, C. A. d.; KUBRUSLY, C. S. *The Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) Condition: 80 Years After Its Discovery*. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2012.
- NAKAMURA, A. et al. A review of evaluation methods developed for numerical simulation of the temperature fluctuation contributing to thermal fatigue of a T-junction pipe. *E-Journal of Advanced Maintenance*, v. 6, n. 4, p. 118–130, 2015.
- POPPELWELL, J. Technological applications of ferrofluids. *Physics in technology*, IOP Publishing, v. 15, n. 3, p. 150, 1984.
- RAJ, K.; MOSKOWITZ, B.; CASCIARI, R. Advances in ferrofluid technology. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 149, n. 1-2, p. 174–180, 1995.
- ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. [S.l.]: SIAM, 2003. v. 82.

- SAIEED, A. et al. A review of T-junction geometrical effect on two-phase separation. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, v. 11, n. 24, p. 14233–14238, 2016.
- SELIMEFENDIGIL, F.; ÖZTOP, H. F. Effect of a rotating cylinder in forced convection of ferrofluid over a backward facing step. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 71, p. 142–148, 2014.
- SHANKAR, P.; DESHPANDE, M. Fluid mechanics in the driven cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 32, n. 1, p. 93–136, 2000.
- SHEWCHUK, J. R. et al. *An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain*. [S.l.]: Carnegie-Mellon University. Department of Computer Science, 1994.
- SPALART, P.; ALLMARAS, S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In: *30th aerospace sciences meeting and exhibit*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 439.
- TAN, S. H.; NGUYEN, N.-T. Generation and manipulation of monodispersed ferrofluid emulsions: The effect of a uniform magnetic field in flow-focusing and T-junction configurations. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 3, p. 036317, 2011.
- THOMAS, G. B. et al. *Cálculo. 2 v.* [S.l.]: São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. [S.l.]: Pearson Education, 2007.
- WANG, C. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 23, n. 1, p. 159–177, 1991.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos Fluidos-6a Edição*. [S.l.: s.n.], 2010.
- YUAN, F.-D.; YOU, S.-J. CFD simulation and optimization of the ventilation for subway side-platform. *Tunnelling and Underground Space Technology*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 474–482, 2007.

A Equações discretizadas

São apresentadas as equações discretizadas para a velocidade na direção x e y e para a pressão, assim como as eventuais correções

- Fluido Newtoniano

– Método implícito e upwind para apenas um dos lados:

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^* - u_{ij}^n}{\Delta t} + u_{ij}^n \cdot \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{\Delta x} + v_{ij}^n \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{\Delta y} \\ = \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i+1j}^* - 2u_{ij}^* + u_{i-1j}^*}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}^* - 2u_{ij}^* + u_{ij-1}^*}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{ij}^* - v_{ij}^n}{\Delta t} + u_{ij}^n \cdot \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{\Delta x} + v_{ij}^n \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{\Delta y} \\ = \frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i+1j}^* - 2v_{ij}^* + v_{i-1j}^*}{\Delta x^2} + \frac{v_{ij+1}^* - 2v_{ij}^* + v_{ij-1}^*}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\frac{u_{ij}^* - u_{i-1j}^*}{\Delta x \Delta t} + \frac{v_{ij}^* - v_{ij-1}^*}{\Delta y \Delta t} = \frac{P_{i+1j}^{n+1} - 2P_{ij}^{n+1} + P_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{P_{ij+1}^{n+1} - 2P_{ij}^{n+1} + P_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (A.3)$$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^* - \Delta t \frac{P_{i+1j}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{\Delta x} \quad (A.4)$$

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^* - \Delta t \frac{P_{ij+1}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{\Delta y} \quad (A.5)$$

– Método do Crank-nicolson

$$\begin{aligned} \frac{u_{ij}^* - u_{ij}^n}{\Delta t} + u_{ij}^n \frac{u_{i+1j}^n - u_{i-1j}^n}{2\Delta x} + v_{ij}^n \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij-1}^n}{2\Delta y} \\ = \frac{1}{2Re} \left(\frac{u_{i+1j}^* - 2u_{ij}^* + u_{i-1j}^*}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}^* - 2u_{ij}^* + u_{ij-1}^*}{\Delta y^2} \right) \\ + \frac{1}{2Re} \left(\frac{u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right) \\ - \frac{P_{i+1j}^{n-1/2} - P_{ij}^{n-1/2}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{ij}^* - v_{ij}^n}{\Delta t} + u_{ij}^n \frac{v_{i+1j}^n - v_{i-1j}^n}{2\Delta x} + v_{ij}^n \frac{v_{ij+1}^n - v_{ij-1}^n}{2\Delta y} \\
&= \frac{1}{2Re} \left(\frac{v_{i+1j}^* - 2v_{ij}^* + v_{i-1j}^*}{\Delta x^2} + \frac{v_{ij+1}^* - 2v_{ij}^* + v_{ij-1}^*}{\Delta y^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2Re} \left(\frac{v_{i+1j}^n - 2v_{ij}^n + v_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{ij+1}^n - 2v_{ij}^n + v_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right) \\
&\quad - \frac{P_{ij+1}^{n-1/2} - P_{ij}^{n-1/2}}{\Delta y} \quad (A.7)
\end{aligned}$$

$$\frac{u_{ij}^* - u_{i-1j}^*}{\Delta x \Delta t} + \frac{v_{ij}^* - v_{ij-1}^*}{\Delta y \Delta t} = \frac{\phi_{i+1j}^{n+1} - 2\phi_{ij}^{n+1} + \phi_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{ij+1}^{n+1} - 2\phi_{ij}^{n+1} + \phi_{ij-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (A.8)$$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^* - \Delta t \frac{\phi_{i+1j}^{n+1} - \phi_{ij}^{n+1}}{\Delta x} \quad (A.9)$$

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^* - \Delta t \frac{\phi_{ij+1}^{n+1} - \phi_{ij}^{n+1}}{\Delta y} \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{n+1/2} &= P_{ij}^{n-1/2} + \phi_{ij}^{n+1} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2Re\Delta x^2} (\phi_{i+1j}^{n+1} - 2\phi_{ij}^{n+1} + \phi_{i-1j}^{n+1}) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2Re\Delta y^2} (\phi_{ij+1}^{n+1} - 2\phi_{ij}^{n+1} + \phi_{ij-1}^{n+1}) \quad (A.11)
\end{aligned}$$

- Ferrofluido

– Método de Crank-Nicolson

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{ij}^* - u_{ij}^n}{\Delta t} + u_{ij}^n \frac{u_{i+1j}^n - u_{i-1j}^n}{2\Delta x} + v_{ij}^n \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij-1}^n}{2\Delta y} \\
&= \frac{1}{2Re} \left(\frac{u_{i+1j}^* - 2u_{ij}^* + u_{i-1j}^*}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}^* - 2u_{ij}^* + u_{ij-1}^*}{\Delta y^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2Re} \left(\frac{u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right) \\
&\quad - \frac{P_{i+1j}^{n-1/2} - P_{ij}^{n-1/2}}{\Delta x} \\
&\quad + Mn \left(\frac{M_{x,i+1j}^{n+1/2} + M_{x,ij}^{n+1/2}}{2} \right) \left(\frac{H_{x,i+1j} + H_{x,ij}}{\Delta x} \right) \\
&\quad + Mn \left(\frac{M_{y,ij+1}^{n+1/2} + M_{y,ij}^{n+1/2}}{2} \right) \left(\frac{H_{x,ij+1} + H_{x,ij}}{\Delta y} \right) \quad (A.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{ij}^* - v_{ij}^n}{\Delta t} + u_{ij}^n \frac{v_{i+1j}^n - v_{i-1j}^n}{2\Delta x} + v_{ij}^n \frac{v_{ij+1}^n - v_{ij-1}^n}{2\Delta y} \\
&= \frac{1}{2Re} \left(\frac{v_{i+1j}^* - 2v_{ij}^* + v_{i-1j}^*}{\Delta x^2} + \frac{v_{ij+1}^* - 2v_{ij}^* + v_{ij-1}^*}{\Delta y^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2Re} \left(\frac{v_{i+1j}^n - 2v_{ij}^n + v_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{ij+1}^n - 2v_{ij}^n + v_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right) \\
&\quad - \frac{P_{ij+1}^{n-1/2} - P_{ij}^{n-1/2}}{\Delta y} \\
&+ Mn \left(\frac{M_{x,i+1j}^{n+1/2} + M_{x,ij}^{n+1/2}}{2} \right) \left(\frac{H_{y,i+1j} + H_{y,ij}}{\Delta x} \right) \\
&\quad + Mn \left(\frac{M_{y,ij+1}^{n+1/2} + M_{y,ij}^{n+1/2}}{2} \right) \left(\frac{H_{y,ij+1} + H_{y,ij}}{\Delta y} \right) \quad (A.13)
\end{aligned}$$

B Algoritmo do Gradiente Conjugado Pré-condicionado pela matriz simétrica do SOR

Para desenvolver e trabalhar o método do gradiente conjugado pré-condicionado é necessário tratar 3 elementos: o método do gradiente, o método do gradiente conjugado e o pré-condicionamento.

B.1 Método do gradiente

O método do gradiente é utilizado para resolver sistemas lineares da forma (3.30) em que a matriz \mathbf{A} é uma matriz positiva definida. Esse tipo de matriz apresenta a seguinte propriedade para qualquer vetor \mathbf{w} diferente de 0,

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} > 0. \quad (\text{B.1})$$

Para descrever o método com mais detalhes, é necessário introduzir a forma quadrática, a função quadrática de um vetor é dada como

$$f(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{b}^T \mathbf{w} + c, \quad (\text{B.2})$$

em que c é uma constante escalar. Se \mathbf{A} é uma matriz positiva definida, então $f(\mathbf{w})$ é mínimo com a solução de $\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b}$ (SHEWCHUK et al., 1994). Por \mathbf{A} ser positiva definida, a forma da função quadrática $f(\mathbf{w})$ é um parabolóide (SHEWCHUK et al., 1994), parabolóides apresentam um mínimo global.

O gradiente de uma função aponta na direção de maior crescimento da função (THOMAS et al., 2009), para o caso em questão, o gradiente é dado como

$$f'(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial w_1} f(\mathbf{w}) \\ \frac{\partial}{\partial w_2} f(\mathbf{w}) \\ \frac{\partial}{\partial w_3} f(\mathbf{w}) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial w_n} f(\mathbf{w}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

na base de uma parabolóida, o gradiente é nulo. Portanto, pode-se minimizar a função $f(\mathbf{w})$ igualando $f'(\mathbf{w})$ igual a zero.

Se \mathbf{A} é simétrico, então (SHEWCHUK et al., 1994)

$$f'(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{b} \quad (\text{B.4})$$

Logo, para obter a direção de maior decréscimo para a estimativa \mathbf{w}_j

$$-f'(\mathbf{w}_j) = -\mathbf{A}\mathbf{w}_j + \mathbf{b} \quad (\text{B.5})$$

Para estimar os valores \mathbf{w} utiliza-se o método do *steepest descent*. O método do *steepest descent* consiste em arbitrar um valor e selecionar o próximo com base em uma direção e em uma magnitude, para o caso em questão

$$\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j + \alpha \mathbf{r}_j, \quad (\text{B.6})$$

Em que α é a magnitude e \mathbf{r}_j é a direção de procura, que neste caso também é o resíduo da iteração j . O resíduo é dado como

$$\mathbf{r}_j = -\mathbf{A}\mathbf{w}_j + \mathbf{b}, \quad (\text{B.7})$$

ou seja,

$$\mathbf{r}_j = -f'(\mathbf{w}_j), \quad (\text{B.8})$$

O que mostra que minimizar $f'(\mathbf{w}_j)$ é o mesmo que minimizar o resíduo do sistema linear. A melhor forma de escolher o valor de α é (SHEWCHUK et al., 1994)

$$\alpha_j = \frac{\mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_j^T \mathbf{A} \mathbf{r}_j}. \quad (\text{B.9})$$

Porém, conforme as iterações avançam, as direções se repetem atrasando a convergência. É neste ponto em que entra o gradiente conjugado.

B.2 Método do gradiente conjugado

Diferentemente do método do gradiente, o método do gradiente conjugado impede que as direções sejam repetidas, a cada nova escolha, ela não é igual à uma escolha anterior. O passo na direção de procura é sempre do tamanho correto (CUNHA, 2000).

A direção de procura é definida pelos vetores $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$. O α é calculado como

$$\alpha_j = \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{r}_j}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{r}_j} \quad (\text{B.10})$$

Já para determinar as direções de procura, utiliza-se

$$\mathbf{d}_{j+1} = \mathbf{r}_{j+1} + \beta_j \mathbf{d}_j, \quad (\text{B.11})$$

com

$$\beta = \frac{\mathbf{r}_{j+1}^T \mathbf{r}_{j+1}}{\mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_j} \quad (\text{B.12})$$

B.3 Pré-condicionamento

Pré-condicionar uma matriz é uma forma de transformar a matriz \mathbf{A} de tal forma que a matriz resultante seja mais simples de inverter. Desta forma se a matriz pré-condicionante for \mathbf{M} e ela for simétrica, o sistema linear é transformado como

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{B.13})$$

Uma das formas de pré-condicionar é por meio da matriz simétrica do SOR (SAAD, 2003)

$$\mathbf{M}_{SSOR} = \frac{1}{\omega(2-\omega)}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \quad (\text{B.14})$$

em que ω é o fator amplificador ideal e \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F} são matrizes associadas aos coeficientes da diagonal, da matriz triangular inferior e da matriz triangular superior.

Pré condicionador pode representar um avanço na rapidez do método, um atraso ou gerar nenhuma alteração significativo. Isso depende de qual matriz \mathbf{M} é selecionada com pré-condicionante.

B.4 Gradiente conjugado pré-condicionado pela matriz simétrica do SOR

É apresentado o algoritmo do gradiente conjugado pré-condicionado. Nos passos abaixo, \mathbf{r} é o resíduo da iteração, \mathbf{M} é a matriz pré-condicionadora, \mathbf{z} é o resíduo pós multiplicado pela matriz condicionadora, α seria a direção que a estimativa segue, e β , o erro, (SAAD, 2003) Calcula-se

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{w}_0, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{M}_{SSOR}^{-1}\mathbf{r}_0 \quad (\text{B.16})$$

e

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{z}_0. \quad (\text{B.17})$$

Com j representando cada iteração, calcula-se até a convergência dos resíduos \mathbf{r}_j

$$\alpha_j = \frac{\mathbf{r}_j^T \mathbf{z}_j}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j} \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j + \alpha_j \mathbf{d}_j \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A} \mathbf{d}_j \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{M}_{SSOR}^{-1} \mathbf{r}_{j+1} \quad (\text{B.21})$$

$$\beta_j = \frac{\mathbf{r}_{j+1}^T \mathbf{z}_{j+1}}{\mathbf{r}_j^T \mathbf{z}_j} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{d}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} + \beta_j \mathbf{d}_j \quad (\text{B.23})$$

C Algoritmo de solução das equações de Navier-Stokes, de Navier-Stokes modificada e de energia

C.1 Fluido Newtoniano

1. Resolve-se as equações para \mathbf{u}^*
2. Com o valor de \mathbf{u}^* , calcula-se ϕ^{n+1} :
3. Aplica-se a correção ao vetor \mathbf{u}^{n+1} :
4. Corrige-se a pressão para $P^{n+1/2}$
5. Aplica-se o o campo de velocidade a equação da energia

C.2 Ferrofluido

1. Cálculo do α_m
2. Calculo da magnetização
3. Resolve-se a equação para \mathbf{u}^* para as direções x e y :
4. Com o valor de \mathbf{u}^* , calcula-se ϕ^{n+1} :
5. Aplica-se a correção ao vetor \mathbf{u}^{n+1} :
6. Corrige-se a pressão para $P^{n+1/2}$
7. Aplica-se o o campo de velocidade a equação da energia