Universidade de Brasília

FACULDADE UnB PLANALTINA

LICENCIATURA EM CIÊNCIAS NATURAIS

Forma Canônica: uma boa alternativa ao ensino das funções quadráticas

AUTORA: VALQUÍRIA SAL MENDES DE MORAIS

ORIENTADOR: ROGÉRIO CÉSAR DOS SANTOS

Planaltina - DF

Junho 2019

Universidade de Brasília

FACULDADE UnB PLANALTINA

LICENCIATURA EM CIÊNCIAS NATURAIS

Forma Canônica: uma boa alternativa ao ensino das funções quadráticas

AUTORA: VALQUÍRIA SAL MENDES DE MORAIS

ORIENTADOR: ROGÉRIO CÉSAR DOS SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Ciências Naturais, da Faculdade UnB Planaltina.

Orientador: Rogério César dos Santos

Planaltina - DF

Junho 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado força, saúde e coragem para superar as dificuldades e concluir essa etapa da minha vida.

A todos os professores do curso que compartilharam seus conhecimentos com dedicação e paciência.

Ao meu orientador professor Rogério César dos Santos pela dedicação, orientação e suporte pelas correções e incentivos que ajudaram nessa conquista tão especial.

A minha família e amigos pelo incentivo para que eu não desistisse no meio do caminho.

Enfim, a todas as pessoas que de alguma forma, direta ou indiretamente, fizeram parte dessa conquista, aos quais sem nomear terão o meu eterno agradecimento.

Obrigada.

Dedico esta conquista a minha mãe, Emília, “*in memorian*”, com todo meu amor e carinho.

RESUMO

Neste trabalho foram analisados alguns livros da educação básica de matemática, a respeito das equações e funções quadráticas. Também foram apresentados tais assuntos sob a ótica da forma canônica das funções polinomiais de 2º grau. Como licencianda tive muitas dificuldades para compreender os conteúdos que envolviam esse assunto, pois na educação básica não tive contato com muitos deles, portanto tive que me esforçar bastante, pedir ajuda a monitores e professores nos horários contrários das aulas. Na pesquisa foi constatado que a forma canônica não é abordada em todos os livros didáticos, entretanto ela pode ser um método eficiente para o ensino de resolução de problemas que envolvem as funções quadráticas sem o uso da fórmula de Bhaskara.

Palavras-chave: Forma canônica; Funções quadráticas; Livro didático.

ABSTRACT

In the present study, we intend to analyze some basic education textbooks of mathematics, regarding quadratic equations and functions. These subjects were also presented from the point of view of the canonical form of the second-degree polynomial functions. Having a major in mathematics, I had many difficulties to understand the contents that involved this subject, because I did not have contact with many of them during basic education, but I had to work hard, asking for help from monitors and teachers in the hours opposite to those of the classes. In the study, it was found that the canonical form is not addressed in all textbooks, and that it can be an efficient method for teaching problem solving involving quadratic functions without the use of the Bhaskara formula.

Keywords: Canonical form; Quadratic functions; Textbook.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Representação esquemática da Torre de Hanói.................................... 12

Figura 2. Exemplo do cartaz.. 25

Figura 3. Coordenadas do vértice de uma parábola.. 26

Figura 4. Gráfico da parábola, concavidade para cima exemplo 20...................... 28

Figura 5. Gráfico da parábola, concavidade para baixo exemplo 21..................... 29

Figura 6: Gráfico da parábola exemplo do exercício 1. 33

Figura 7: Gráfico da parábola exemplo do exercício 2. 34

Figura 8: Gráfico da parábola exemplo do exercício 3. 35

Figura 9: Gráfico da parábola exemplo do exercício 4. 36

Figura 10: Gráfico da parábola exemplo do exercício 5. 38

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO.. 08

2 – REVISÃO TEÓRICA.. 09

2.1 - Potência.. 09

2.2 - Propriedades da potência... 10

2.3 - Produto de potências de mesma base.. 11

2.4 - Divisão de potências de mesma base.. 11

2.5 - Potência da potência.. 11

2.6 - Aprendizado de potência... 12

3 – EQUAÇÕES DO 1º GRAU... 13

4 – FUNÇÃO LINEAR.. 14

5 – EQUAÇÃO DA LINHA RETA.. 16

6 – EQUAÇÃO DO 2º GRAU.. 19

7 – FÓRMULA RESOLUTIVA.. 21

8 - CLASSIFICAÇÕES DAS EQUAÇÕES.. 24

8.1 – Equação completa.. 24

8.1.2 – Equação incompleta... 25

9 - FORMA CANÔNICA.. 27

10 - SOMA E PRODUTO.. 30

11 - CONSIDERAÇÕES FINAIS... 32

12 - REFERÊNCIAS... 33

13 - APÊNDICE... 34

1 - Introdução

A principal motivação para realizar um trabalho de equações do 2º grau surgiu da vivência das dificuldades de colegas e minhas em conseguir entender o assunto na educação básica, essas dificuldades se estenderam até o ensino superior.

O ensino da matemática se tornaria mais interessante se começada pela história, mostrando a evolução até chegar às fórmulas que são consideradas “bicho de sete cabeças” pelos estudantes, mas esse ensino não deve parar na educação básica ele tem que estendido as universidades e cursos técnicos também. Ao chegar aos conteúdos que apresentam essas fórmulas mostrar como elas foram desenvolvidas, pois é pouco encontrada essa demonstração e nem todos os estudantes conhecem. Talvez por esse fato os estudantes ainda encontrem muitas dificuldades nas resoluções dos exercícios.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Destacando que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostrando que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula. Quando se trata da função polinomial do 2º grau as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 73), destacam que

> O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o aspecto do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se assim a memorização de regras.

Com efeito, para complementar as orientações metodológicas para melhorar os estudos e aprendizagens em Matemática, D’Ambrósio (1999, p. 97) acredita que

> […] um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas. Particularmente, a civilização

> ocidental tem como espinha dorsal a Matemática. Mas não só na civilização ocidental. Em todas as civilizações há alguma forma de matemática. As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. (D'AMBRÓSIO, 1999, p. 97).

O objetivo desse trabalho é apresentar conteúdos relacionados à Equação e Função do 2º grau mostrando suas aplicações e sua abordagem por meio da forma canônica do polinômio do segundo grau, para que possa servir de material complementar ao professor da educação básica.

Foram escolhidos cinco livros: EJA 9º ano, Matemática e Realidade 7ª série do ensino fundamental, Matemática: volume único e Matemática: Contextos e Aplicações do ensino médio, além dos livros Fundamentos de Cálculo da coleção PROFMAT e Introdução ao Cálculo. Nos livros da educação básica, analisados os conteúdos relacionados a funções e equações do 2º grau são abordados praticamente da mesma forma não havendo muita diferença de um autor para outro. Já os livros que são usados na educação superior abordam o assunto de forma mais complexa.

2 - Revisões Teóricas

Neste capítulo serão descritos os temas relacionados com potência, pois servirão aos estudos da função quadrática. Por tanto, o primeiro tema será Potenciação.

2.1 - Potência

É a representação abreviada do modo de multiplicar fatores iguais (Iezzi, 2005).

Exemplo 1

$$a^3 = a.a.a$$
$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$2 = base$$
$$3 = expoente$$
$$8 = potência$$

A potência pode ser usada para representar um quadrado perfeito, por exemplo, $2^2 = 4;\ 6^2 = 36\ e\ 10^2 = 100$. Também podemos usar a potência como exemplo para criar um tabuleiro de xadrez, para isso multiplica-se o número de linhas que é (8) ao número de colunas que também é (8), ficando $8 \cdot 8 = 64$ ou representando através da potência $8^2 = 64$.

Devemos nos atentar para a diferença entre somar e multiplicar um número, pois $2 + 2 + 2 + 2$ é diferente de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, na soma de $2 + 2 + 2 + 2$ o resultado é 8, já na multiplicação $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ o resultado é 16. A multiplicação de fatores iguais pode ser representada pela potência.

2.2 - Propriedades da potência

Se elevarmos um número natural ao expoente 1, ele será igual a ele mesmo por que toda potência de base 1 é igual a 1. (Iezzi, 2005).

Exemplo 2

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Toda potência de base 10 é igual ao numeral formado pelo algarismo 1 seguido de tantos zeros, quantas forem às unidades do expoente. (Iezzi, 2005).

Exemplo 3

$$10^2 = 100$$

Ex.10^2 = 10.10 = 100

10^6 = 10.10.10.10.10.10 = 1000000

O expoente negativo significa que ocorre a troca de lugar entre o numerador e o denominador. (Iezzi, 2005).

Exemplo 4

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$6^{-2} = \frac{1}{6^2}$$

Se tivermos uma potência negativa no denominador, este se transforma em numerador ao trocar o sinal da potência (IEZZI, 2005).

Exemplo 5

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\left(\frac{5}{3^{-3}}\right) = 5 \cdot 3^3$$
$$= 5 \cdot 27$$
$$= 135$$

$$\frac{2}{7^{-4}} = 2 \cdot\ 7^4$$
$$= 2 \cdot 2401$$
$$= 4802$$

2.3 - Produtos de potência de mesma base

Para multiplicar potências de mesma base, devemos conservar a base e somar os expoentes (IEZZI, 2005).

Exemplo 6

$$a^m\ \cdot a^n =\ a^{m+n}$$

$$4^3 \cdot\ 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =\ 4^{3+3} =\ 4^6$$

2.4 - Divisões de potências de mesma base

Para dividirmos potências de mesma base, não – nula, devemos conservar a base e subtrair os expoentes (IEZZI, 2005).

Exemplo 7

$$a^m \div a^n =\ a^{m-n}$$

$$5^9 \div\ 5^7 =\ 5^{9-7} =\ 5^2$$

2.5 - Potência da potência

Para elevarmos uma potência a um novo expoente, devemos conservar a base e multiplicar os expoentes (IEZZI, 2005).

Exemplo 8

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(5^4)^3 = 5^{4} \cdot 5^{4} \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}, \text{ ou}$$

$$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$$

2.6 - Aprendizado de potências

Uma alternativa para o ensino de potência de forma lúdica seria com jogo Torre de Hanói que ajuda os estudantes a desenvolver o pensamento estratégico e raciocínio lógico. As expressões numéricas tornam-se mais concretas, já que para descobrir o número mínimo de movimentos necessários para a resolução do jogo pode ser utilizada a seguinte expressão:

$$\boxed{T(n) = 2^{n-1}}$$

onde T é o número de movimentos e *n* o número de discos.

Torre de Hanói é um jogo estratégico capaz de contribuir no desenvolvimento da memória, do planejamento e solução de problemas através de técnicas e estratégias. Que tem como objetivo passar todos os discos para o último pino com a ajuda do pino central, onde nunca um disco maior fique sobre o menor. O desafio inicial consiste em conseguir passar todos os discos. Logo, o desafio é utilizar a menor quantidade de movimentos necessários para tal fim. Como já foi dito, o número mínimo de movimentos está dado pela equação acima, que é uma equação de potenciação.

Exemplo 9

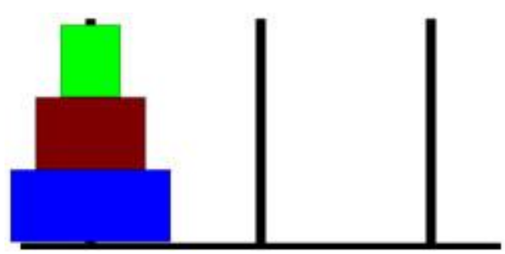

Figura 1. Representação esquemática das Torres de Hanói

Por exemplo:

$$T\ (1)\ =\ 1$$

$$2^1\ -\ 1$$

$$2 - 1$$

$$T\ (1)\ =\ 1\, movimento$$

$$T\ (2)\ =\ 3$$

$$2^2\ -\ 1$$

$$4 - 1$$

$$T\ (2)\ =\ 3\, movimentos$$

Assim, quando têm três discos o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema seria 7.

3 - Equações do 1º Grau

Neste capítulo, falaremos de equações do primeiro grau, pois servirá de apoio para o estudo das equações do segundo grau.

Uma equação com uma incógnita x é denominada equação do 1º grau, se puder ser reduzida através de operações elementares à forma $a \cdot x = b$, em que a e b são números reais e $a \neq 0$. (IEZZI, 2005).

$$a \cdot x + b = 0$$

Para resolver uma equação do 1º grau é importante lembrar que se trata de uma igualdade, portanto a quantidade que estiver de um lado terá que estar do outro lado também.

Exemplo 10.

$$x + 8 = 2$$

Acrescenta – se uma subtração de (8) em cada um dos lados. Como +8 é oposto de -8, logo a equação seria:

$$x + 8 - 8 = 2 - 8$$

$$x + 0 = -6$$

$$x = -6$$

4 - Função linear e Função Afim

Chama-se função afim a função dada pela equação

$$y = mx + n$$

onde $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ são constantes. No caso em que $n = 0$ essa equação se reduz a $\boldsymbol{y = mx}$ e define a chamada função linear. A função do primeiro grau é sempre formada por dois termos. (Ávila, 1997).

Quando conhecemos os valores distintos de uma função do 1º grau, podemos usar o método da substituição, que consiste em isolar uma incógnita e calcular seus coeficientes a e b.

Por exemplo:

Sabendo que f (–1) = 3, e f (2) = 2, podem determinar a função do 1° grau seguindo alguns passos.

Exemplo 11.

$$y = ax + b$$

$$3 = a \cdot (-1) + b$$

$$2 = a \cdot 2 + b$$

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

Escolhe uma equação para isolar uma incógnita:

$$-a + b = 3$$

$$b = 3 + a$$

Substituindo o valor encontrado na primeira equação encontraremos o valor de $\boldsymbol{b}$

$$2a + b = 2$$

$$2a + (3 + a) = 2$$

$$3a = 2 - 3$$

$$3a = -1$$

$$a = \frac{-1}{3}$$

Substituindo o valor da incógnita $\boldsymbol{a}$ na segunda equação encontraremos o valor para $\boldsymbol{b}.$

Exemplo 12.

$$+$$

$$b = 3 - \frac{1}{3}$$

$$x$$

$$b = 9 + \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$b = \frac{8}{3}$$

Logo

$$f(x) = ax + b$$

é igual

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

E para determinarmos à função do 1º grau que passa pelos pontos A (1,5) e B (-3, -7), usamos o método da adição para subtrair uma das incógnitas da equação pela soma dos termos idênticos.

Exemplo 13.

$$y = ax + b$$

$$a \cdot 1 + b = 5 \quad (\cdot\, 3)$$

$$-3a + b = -7$$

$$3a + 3b = 15 \quad \rightarrow \quad a + 2 = 5$$

$$-3a + b = -7 \quad \rightarrow \quad a = 5 - 2$$

$$4b = 8 \qquad a = 3$$

$$b = \frac{8}{4}$$

$$b = 2$$

5 - Equações da linha reta

Podemos conectar álgebra e geometria escolhendo um sistema de coordenadas permitindo que se estabeleça uma relação estreita entre figuras geométricas e equações envolvendo as coordenadas dos pontos. O estudante precisa compreender, por exemplo, que a reta da geometria analítica não é um objeto matemático diferente do gráfico de uma função de 1º grau, quando ela não é vertical. (Ávila, 1997)

Considerando o caso mais geral da equação dada por:

$$y = mx + n \ \rightarrow equação\ reduzida\ da\ reta$$

$$m = coeficiente\ angular\ da\ reta, indica\ onde\ a\ reta\ corta\ o\ eixo\ x$$

$$n = coeficiente\ linear\ da\ reta, ponto\ onde\ a\ reta\ corta\ o\ eixo\ y$$

Exemplo 14.

Abordaremos a representação de uma equação reduzida da reta, demonstrando três possíveis situações. Construindo uma reta de acordo com os pontos P (2, 7) e Q (-1, -5) pertencentes à reta.

1ª maneira:

Calcular o coeficiente angular (m) através da fórmula

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$m = \frac{(-5 - 7)}{(-1 - 2)}$$

$$m = \frac{-12}{-3}$$

$$m = 4$$

De acordo com o ponto P (2,7) temos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y - 7 = 4 \cdot (x - 2)$$

$$y - 7 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 8 + 7$$

$$y = 4x - 1$$

Exemplo 15.

2ª maneira:

Resolver o sistema de equação formado pelos pontos P e Q

Considerando que ela passa por P (2, 7) e Q (–1, –5), temos:

Nesse caso, os valores dos coeficientes angular (a) e linear (b) serão calculados por um sistema de equações.

$P\ (2, 7)$

$$7 = m \cdot 2 + n$$

$$7 = 2m + n$$

$$\boldsymbol{2m + n = 7}$$

$Q\ (-1, -5)$

$$-5 = m \cdot (-1) + n$$

$$-5 = -m + n$$

$$-\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=-\mathbf{5}$$

Exemplo 16.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2m+n=7 \\ -m+n=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m+n=7 \\ 5=m+n \end{cases}$$

Da segunda equação, vemos que

$$n = 5 - m$$

Usando essa informação na primeira equação:

2m - n = 7

2m - (5 - m) = 7

2m - 5 + m = 7

3m = 7 + 5

3m = 12

m = 4

Como

5 = m + n

5 = 4 + n

5 - 4 = n

1 = n

n = 1

Portanto, a equação reduzida da reta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{n}$ que passa pelos pontos$P(2,7)$ e $Q(-1,-5)$, corresponde à expressão $\boldsymbol{y} = \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$.

6 - Equações do 2º grau

São aquelas que podem ser escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$. (Aoki, 2013).

Os parâmetros da equação do 2º grau são:

Para resolvermos uma equação do 2º grau precisamos encontrar as raízes da equação que são os valores substituídos nas incógnitas para tornar a sentença verdadeira. Essas soluções das equações são chamadas de raízes da equação. São apresentadas separadamente por $\mathbf{x_1} e\ \mathbf{x_2}$. (Dante, 2005).

Exemplo 18

Primeiro devemos identificar os coeficientes

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$a = 2$$

$$b = 5$$

$$c = -3$$

Depois calcular o delta (Δ)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 25 + 24$$

$$\Delta = 49$$

Usando a fórmula de Bhaskara, substitua o delta na equação.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{2}{4}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2} \;\; ou\ 0{,}5}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 7}{4}$$

$$x_2 = -\frac{12}{4}$$

$$x_2 = \mathbf{-3}$$

Logo, as raízes da equação

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

São

$$(x_1 = 0{,}5)\ e\ (x_2 = -3)$$

7 - Fórmula resolutiva de uma equação do 2°grau

Vamos considerar a equação do 2°grau completa $ax^2 + bx + c = 0$, de coeficientes reais a, b e c, com $a \neq 0$ (Dante, 2005).

Primeiramente, vamos subtrair c de ambos os membros da equação.

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$$

$$ax^2 + bx = -c$$

Depois, multiplicamos os dois membros por $4a$.

$$(ax^2 + bx).4a = -c.4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Adicionamos b^2 a ambos os membros.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$\boldsymbol{4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac}$$

Agora vamos considerar somente o primeiro termo dessa igualdade:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

Se desenvolvermos esse termo podemos escrevê-lo de outra forma, verificando assim que a seguinte igualdade é verdadeira chegando assim a um produto notável:

$$(2ax+b)^2=(2ax+b).(2ax+b)$$
$$=4a^2x^2+2abx+2abx+b^2$$
$$=4a^2x^2+4abx+b^2$$

Sendo assim podemos escrever:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$
$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Resultando assim na fórmula de Bhaskara.

Onde temos

$$\boldsymbol{b^2-4ac},$$

chamado de discriminante é apresentado pela letra grega maiúscula delta (Δ), que determina o total de soluções da equação do 2º grau no conjunto dos números reais.

Então:

$$Se\ \Delta>0\ a\ equação\ admite\ duas\ soluções\ no\ conjunto\ dos\ números\ reais.$$
$$Se\ \Delta=0\ a\ equação\ admite\ uma\ única\ solução.$$
$$Se\ \Delta<0, ou\ seja, \Delta\ for\ negativo, a\ equação\ não\ admite\ solução.$$

Resolvendo a equação:

Exemplo 17

$$x^2-3x-10=0$$

Primeiro devemos identificar os coeficientes

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = -10$$

Depois calcular o delta (Δ)

$$b^2 - 4ac$$

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$

$$9 + 40$$

$$\Delta = 49$$

Usando a fórmula de Bháskara, substitua o delta na equação

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{3 + 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{10}{2}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$$

$$x_2 = \frac{3 - 7}{2}$$

$$x_2 = -2$$

Logo, as raízes da equação

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

São:

$$(x_1 \ = 5) \ e \ (x_2 = -2)$$

$$a \to coeficiente\ principal$$

$$b \to coeficiente\ secundário$$

$$c \to termo\ independent$$

8 - Classificações das equações do segundo grau

8.1 Equação Completa

São equações que apresentam os três coeficientes diferentes de zero (AOKI, 2013).

A seguinte expressão é considerada uma equação completa, pois contém todos os coeficientes diferentes de zero. Uma equação do 2° grau está na forma reduzida quando está escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Como exemplo:

$$20x^2 + 100x + 10 = 0$$

8.1.1 Equação Incompleta

São aquelas que apresentam os coeficientes $\boldsymbol{b}\ ou\ \boldsymbol{c}\ = 0$. (AOKI, 2013).

A forma incompleta é mais simples de resolver, por não ser necessário o uso da forma de Bhaskara. Quando temos $b = 0\ e\ c \neq 0$ resolve como no exemplo abaixo. Agora se $c = 0\ e\ b \neq 0$, já temos $x = 0$ como uma solução e a outra é obtida colocando x em evidência e resolvendo a equação do primeiro grau.

Para esclarecer a utilização da equação do 2º grau é apresentado o seguindo exemplo:

Um grupo de alunos estava fazendo um trabalho sobre esse tema e resolveu confeccionar um cartaz. O cartaz tem a forma de um retângulo com 1800 cm^2 de área. Sabendo que um dos lados tem o dobro do tamanho do outro, como podemos calcular a medida de cada um dos lados do cartaz? Como o cartaz tem a forma de um retângulo, devemos calcular o produto entre as medidas de seus lados para determinar sua área.

Assim, a área do cartaz é dada por:

Exemplo 19

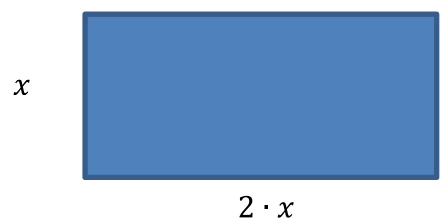

Figura 2. Exemplo do cartaz

$$x \cdot 2x = 1800$$

$$2x^2 = 1800$$

$$2x^2 - 1800 = 0$$

Muitos problemas podem ser resolvidos por meio de uma equação do 2° grau incompleta. No problema a seguir relacionando à área do cartaz feito pelos estudantes, eles teriam que encontrar o valor de x que satisfaça a equação

$$2x^2 - 1800 = 0$$

$$2x^2 = 1800$$

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{1800}{2}$$

$$x^2 = 900$$

$$x = \pm\sqrt{900}$$

$$x = \pm 30$$

Logo, x = 30, pois $(30)^2 = 900$ ou $x = -30$, pois $(-30)^2 = 900$.

A equação $2x^2 - 1800 = 0$ tem duas soluções, x = 30 e $x = -30$,mas o problema apresentado tem uma única solução: x = 30, pois se trata de um cartaz e não tem lado negativo. Então, os lados do cartaz medem 30 cm e 60 cm, pois se substituirmos o $\boldsymbol{x}$ na equação ficaria assim:

$$2x^2 - 1800 = 0$$

$$2 \cdot (30)^2 - 1800 = 0$$

$$2 \cdot 900 - 1800 = 0$$

$$1800 - 1800 = 0$$

ou

$$2 \cdot (-30)^2 - 1800 = 0$$

$$2 \cdot 900 - 1800 = 0$$

$$1800 - 1800 = 0$$

9 - Forma Canônica

Para entender o que é forma canônica, devemos entender primeiro o que é função quadrática.

Uma função quadrática é toda função $f: R \to R,$ defendida por $y = f(x) = ax^2 + bx + c,$ com a, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ reais e $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}.$ O gráfico de uma função quadrática é uma parábola e toda parábola tem um vértice que é importante para o estudo da parábola (Dante, 2005). Sendo assim a forma canônica facilita o cálculo dos pontos de máximo e mínimo e o vértice da função quadrática.

A forma canônica pode ser descrita da seguinte forma: $f(x) = a(x-h)^2 + k,$ onde (h, k) representam os pontos de coordenadas do vértice da parábola.

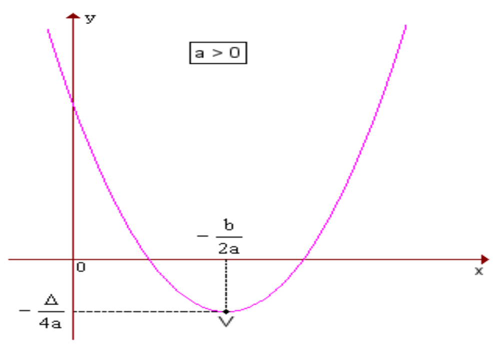

Figura 3. Coordenadas do vértice de uma parábola, (Ávila, 1997)

$V(x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, \ -\frac{\Delta}{4a}),$ onde $h = -\frac{b}{2a}$ e k $= -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$ Sendo assim a forma canônica é mais para a prática de determinação das coordenadas do vértice.

A forma canônica facilita a análise de máximo e de mínimo e zero da função quadrática.

Usando a fórmula geral para encontrarmos a forma canônica.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Ainda podemos usar o método de completar quadrado para chegar na forma canônica.

Exemplo 20:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$

$$f(X) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = 1\left[\left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1^2}\right]$$

$$f(x) = 1\left[\left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \frac{-12}{4}\right]$$

$$f(x) = (x + 1)^2 + 3\,,$$

usando a fatoração podemos comprovar que essa é a forma canônica da função.

$$(x + 1) \cdot (x + 1) + 3 = x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$$

$$(x^2 + x + x + 1) + 3$$

$$(x^2 + 2x + 1) + 3$$

$(x+1)^2+3$, no gráfico da função indica que muda uma unidade para a esquerda e três para a vertical em relação à função $y = x^2$.

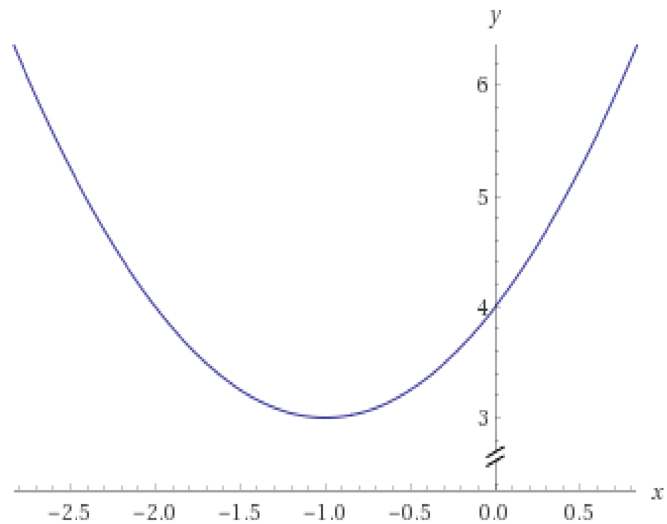

Figura 4. Gráfico da parábola, exemplo 20

Vejamos outra função:

Exemplo 21:

$$g(x) = -5x^2 + 20x - 8$$

$$-5\left[x^2 - 4x + \frac{8}{5}\right]$$

$$-5\left[(x^2 - 4x + 4) - 4 + \frac{8}{5}\right]$$

$$-5\left[(x^2 - 4x + 4) + \frac{-4}{1} + \frac{8}{5}\right]$$

$$-5\left[(x-2)^2 + \frac{-20+8}{5}\right]$$

$$-5\left[(x-2)^2 - \frac{12}{5}\right],$$

nos diz que vai duas unidades para a direita e doze unidades para a vertical e como o coeficiente ***a*** é negativo sendo sua concavidade para baixo, e, quando a é diferente de 1, a parábola sofre uma modificação em sua abertura.

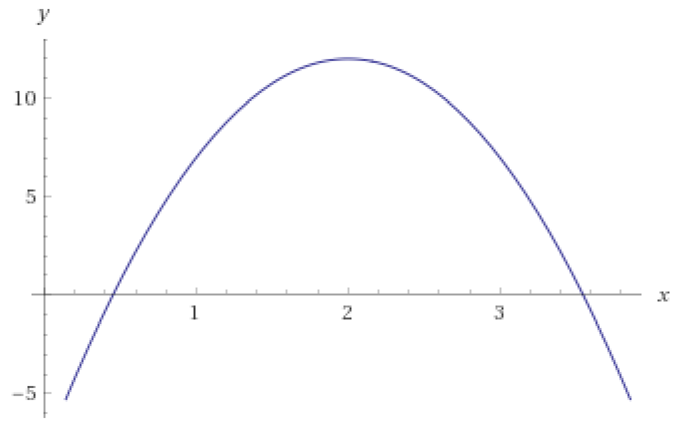

Figura 5. Gráfico da parábola, exemplo 21

Soma e Produto

Será aplicado sempre que o $\boldsymbol{x^2}$ da função for igual a 1 ($a = 1$). Essa é uma forma de resolver a função sem o uso da fórmula de Bhaskara para encontrar suas raízes. A soma será o coeficiente $\boldsymbol{b}$ com sinal trocado e o produto será o coeficiente $\boldsymbol{c}$. Quando a é diferente de 1, a soma será $\left(-\frac{b}{a}\right)$ e o produto $\left(\frac{c}{a}\right)$.

Exemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Nesta função temos que encontrar os dois números que satisfaça tanto o produto, quanto a soma.

Para resolver vamos começar com o coeficiente c.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\downarrow$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 + 3 = 5$$

Os números que satisfazem o produto e a soma são {2,3}

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\downarrow$$

$$-2 + 3 = 1$$

$$-2 \cdot 3 = -6$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Análise dos livros didáticos serviu para perceber que existem vários conteúdos de matemática que não são abordados em sala de aula, por conta de vários fatores. E esses conteúdos podem ser um caminho alternativo para facilitar o entendimento na hora da resolução dos problemas matemáticos.

Como por exemplo, a forma canônica que pode ajudar tanto o estudante quanto o professor no ensino e aprendizado das resoluções de problemas de funções quadráticas sem o uso da formula de Bhaskara.

Apesar de algumas dificuldades gostei muito de fazer essa pesquisa, eu sempre quis fazer meu TCC com um tema matemático e quando chegou a hora veio de imediato a lembrança do ensino básico em que tanto os meus colegas, quanto eu tínhamos muitas dificuldades para entender e resolver alguns conteúdos de matemática, e durante a pesquisa percebi que não tinha visto alguns conteúdos que me ajudariam a entender e aprender como resolver com mais facilidade as minhas dúvidas.

Referências

AOKI, Virginia. *EJA Moderna. 9° ano Ensino Fundamental*. 1ª Ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

ÁVILA, Geraldo. *Introdução ao cálculo*. Brasília: Editora, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. 73p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. "A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática." *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP* (1999): 97-115.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contextos e Aplicações: ensino médio* / Luiz Roberto Dante. 3ª Ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Volume Único* / Luiz Roberto Dante. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson. *Matemática e realidade: 7ª série* / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado. 5ª Ed. São Paulo: Atual, 2005.

NETO, Antônio Caminha Muniz. *Fundamentos de Cálculo.* 1ª Ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

Apêndice

Neste apêndice, mostramos algumas aplicações do que foi trabalhado neste TCC.

Exercícios:

1) Encontre o vértice da parábola na forma canônica:

$$y = 5x^2 - 20x + 15$$

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow -\frac{(-20)}{2 \cdot 5} = \frac{20}{10} = 2$$

$$y = 5 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 15$$

$$y = 5 \cdot 4 - 40 + 15$$

$$y = 20 - 40 + 15$$

$$y = 35 - 40$$

$$y = -5$$

$$y = 5(x^2 - 4x) + 15$$

$$y = 5(x^2 - 4x + 4) + 15 - 20$$

$$y = 5(x - 2)^2 - 5$$

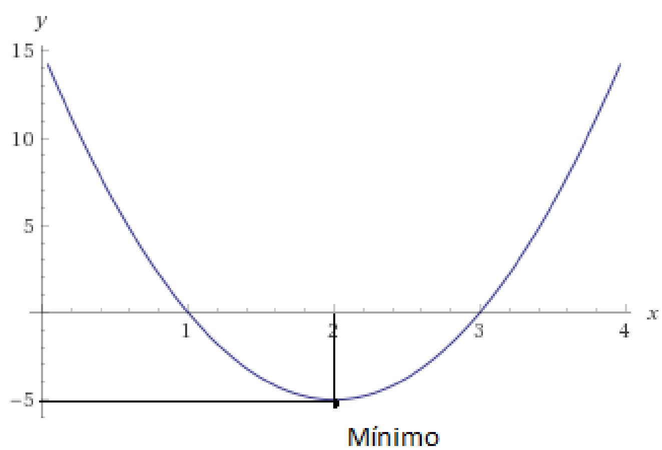

Figura 6: Gráfico da parábola exemplo do exercício 1.

Nesse caso a expressão vai atingir um valor mínimo, quando este termo $5(x-2)^2 = 0$ ou quando $x = 2$. Portanto o vértice está nos pontos $V(2, -5)$.

2) Determine o valor máximo ou mínimo das funções.

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 12$$

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow \frac{-8}{2(-2)} \rightarrow \frac{-8}{-4} = 2$$

$$f(2) = -2 \cdot (2)^2 + 8 \cdot (2) + 12$$

$$= -2 \cdot 4 + 16 + 12$$

$$= -8 + 28$$

$$= 20 \qquad Máximo \qquad a < 0$$

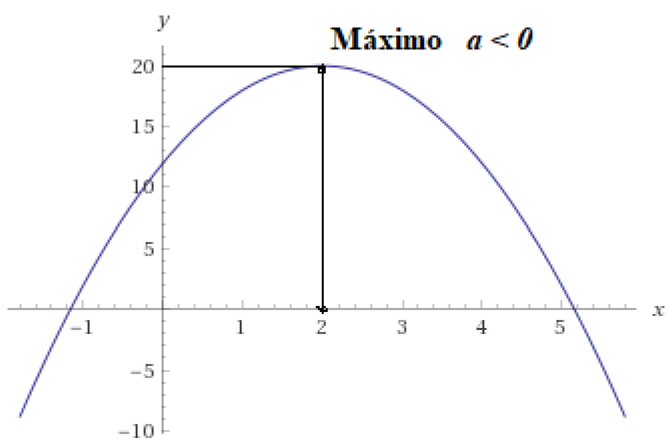

Figura 7:Gráfico da parábola exemplo do exercício 2.

Também é possível resolver essa função pelo método de completar quadrado:

$$f(x) = -2(x^2 - 4x - 6)$$

$$= -2(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 - 6)$$

$$= -2[(x-2)^2 - 4 - 6]$$

$$= -2[(x-2)^2 - 10]$$

$$= -2(x-2)^2 + 20$$

3) $f(x) = x^{2-}5x$

$$f(x) = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} \ \ valor\ mínimo.$$

A expressão vai atingir o valor mínimo, quando o termo$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$ ou $x = \frac{5}{2}$.

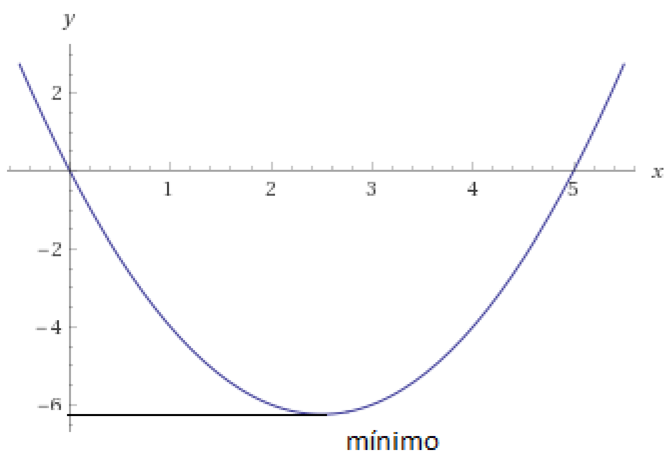

Figura 8:Gráfico da parábola exemplo do exercício 3

4) Encontrando os vértices da função:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = -5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{1}}{2 \cdot a}$$

$$x' = \frac{-(-5) + 1}{2 \cdot 3} \rightarrow \frac{5 + 1}{6} \rightarrow \frac{6}{6} \rightarrow 1$$

$$x" = \frac{-(-5) - 1}{2 \cdot 3} \rightarrow \frac{5 - 1}{6} \rightarrow \frac{4}{6} \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$m = -\frac{b}{2a} \rightarrow -\frac{(-5)}{2 \cdot 3} \rightarrow \frac{5}{6}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a} \rightarrow -\frac{1}{4 \cdot 3} \rightarrow -\frac{1}{12}$$

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{6}\right) + 2 = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}\ forma\ canônica$$

Analisando essa forma canônica, podemos concluir que o valor de $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é $-\frac{1}{2}$. Isso ocorre quando $x = \frac{5}{6}$.

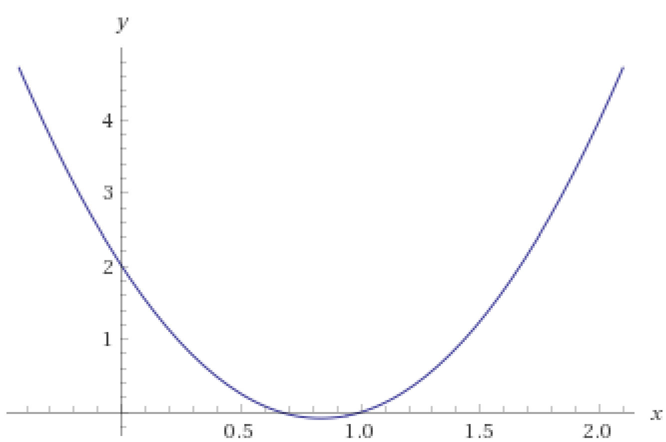

Figura 9: Gráfico da parábola exemplo do exercício 4

5) Resolvendo problemas usando a forma canônica:

Um objeto é lançado de uma plataforma. Sua altura (em metros), x segundos após o lançamento é descrita por:

$$h(x) = -5(x-4)^2 + 180$$

a) Calcule a altura da plataforma

$$h(0) = -5(0-4)^2 + 180$$

$$h(0) = -5(-4)^2 + 180$$

$$h(0) = -5 \cdot 16 + 180$$

$$h(0) = -80 + 180$$

$$h(0) = 100m$$

b) Quanto tempo após o lançamento atinge altura máxima?

$$h(4) = -5(4-4)^2 - 180$$
$$h(4) = -5 \cdot 0^2 + 180$$
$$h(4) = 0 + 180$$
$$h(4) = 180\text{m}$$

Após 4 segundos o objeto atinge a altura máxima de 180m

c) Quanto tempo depois do lançamento o objeto chega ao chão?

$$h(x) = 0$$

$$-5(x-4)^2 + 180 = 0$$

$$-5(x-4)^2 = -180$$

$$\frac{-5(x-4)^2}{-5} = \frac{-180}{-5}$$

$$(x-4)^2 = 36$$

$$x - 4 = 6 \quad ou \quad x - 4 = -6$$

$$x = 10 \quad ou \quad x = -2$$

Por se tratar de tempo, então descartamos o valor negativo e usamos o $x = 10$, indicando que após 10 segundos do lançamento o objeto toca o chão.

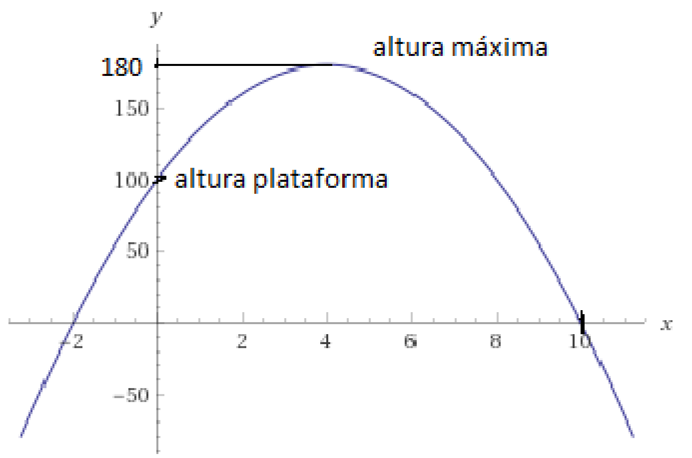

Figura 10: Gráfico da parábola exemplo do exercício 5

6) Determine o valor da incógnita em cada uma das equações:

a) $5x - 6 = 2x + 3$

$$5x - 2x = 3 + 6$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

b) $\frac{2x+3}{5} = 3$

$$\frac{2x + 3}{5} = \frac{15}{5}$$

$$2x + 3 = 15$$

$$2x = 15 - 3$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

c) $7(x + 2) = 2x - 6$

$$7x + 14 = 2x - 6$$

$$7x - 2x = -6 - 14$$

$$5x = -20$$

$$x = \frac{-20}{5}$$

$$x = -4$$

7) Sistema de equação método da substituição e adição

Em sua rua, André observou que havia 20 veículos estacionados, dentre motos e carros. Ao abaixar-se, ele conseguiu visualizar 54 rodas. Qual é a quantidade de motos e de carros estacionados na rua de André?

Primeiro vamos identificar os veículos com incógnitas para diferenciar: $\boldsymbol{m}$ para motos e $\boldsymbol{c}$ para carros.

Logo,

$$m + c = 20$$

Sabemos que cada moto tem duas rodas e cada carro tem 4 rodas, então podemos montar outra equação $2 \cdot m + 4 \cdot c = 54$. Colocando em um sistema de equações, teremos:

$$\begin{cases} m + c = 20 \\ 2 \cdot m + 4 \cdot c = 54 \end{cases}$$

Vamos usar o método da substituição, para isso isolaremos $\boldsymbol{m}$da primeira equação, substituindo-a na segunda:

$$m + c = 20$$
$$m = 20 - c$$
$$2 \cdot m + 4 \cdot c = 54$$
$$2 \cdot (20 - c) + 4 \cdot c = 54$$
$$40 - 2 \cdot c + 4 \cdot c = 54$$
$$-2 \cdot c + 4 \cdot c = 54 - 40$$

$$2 \cdot c = 14$$
$$c = \frac{14}{2}$$
$$c = 7$$

Agora que temos o valor de $\boldsymbol{c}$ podemossubstituir em$\boldsymbol{m = 20 - c}$**,**

$$m = 20 - c$$
$$m = 20 - 7$$
$$m = 13$$

Portanto há treze motos e sete carros estacionados na rua de André.

8) A soma de dois números é 37. A diferença entre eles é 9. Quais são esses números?

Podemos representar os números com as incógnitas **x** e **y.** Então teremos

$$x + y = 37 \; e \; x - y = 9$$

$$\begin{cases} x + y = 37 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Utilizaremos o método da adição, somando as duas equações:

$$\begin{array}{c} x + y = 37 \\ \underline{x - y = 9} \\ 2x = 46 \end{array}$$

$$x = 46/2$$

$$x = 23$$

Substituindo esse valor em alguma das equações, teremos:

$$x + y = 37$$

$$y = 37 - x$$

$$y = 37 - 23$$

$$y = 14$$

Portanto, os números procurados são $23 \; e \; 14$.