



PROJETO DE GRADUAÇÃO

INVESTIGAÇÃO DO ACOPLAMENTO DE MODOS DE VIBRAÇÃO NÃO-LINEARES

Autor: Danilo Ferreira de Oliveira

Brasília, DF

20 de Novembro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA- UnB

FACULDADE DE TECNOLOGIA - FT

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Danilo Ferreira de Oliveira

Investigação do acoplamento de modos de vibração não-lineares

Relatório submetido ao curso de graduação em Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 26 de Novembro de 2019:

Profa. Dra. Aline Souza de Paula
Orientador

**Profa. Dra. Marcela Rodrigues
Machado**
Convidado 1

Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro
Convidado 2

Brasília, DF
20 de Novembro de 2019

Resumo

Não-linearidades ocorrem comumente em sistemas dinâmicos reais, e eventualmente aproximações lineares não são suficientes para uma análise modal representativa destes sistemas. Muitos avanços têm sido obtidos nas últimas duas a três décadas, com o intuito de garantir formas da indústria compreender e conter comportamentos não-lineares em aplicações reais. O objetivo deste trabalho é revisar conceitos teóricos acerca da análise modal não-linear, tais como modos normais não-lineares, Variedades Invariantes e ressonância interna; são utilizados métodos analíticos e numéricos para análise de um sistema de referência. O Método das Variedades Invariantes é aplicado ao sistema de referência adotado e são obtidas as equações de movimento nas coordenadas mestras e escravas, juntamente das superfícies de Variedades Invariantes. Os modos não-lineares são excitados e comprova-se que um movimento iniciado nas variedades invariantes permanece nelas pelo restante do tempo. São realizadas integrações numéricas de equações de movimento para avaliação e comparação dos resultados das análises modais lineares e não-lineares. Faz-se também uma comparação da resposta temporal obtida por equações do movimento, tanto em coordenadas físicas quanto modais. O método numérico *Shooting Method* é também aplicado para a identificação dos modos não-lineares, e seus resultados são comparados com aqueles do Método de Variedades Invariantes. Conclui-se que, para o sistema estudado, uma aproximação linear para análise modal não é suficiente para uma correta avaliação do sistema. Complementa-se que os resultados obtidos pelo método numérico se mostraram concordantes com os obtidos pelo analítico; e a rotina computacional é adaptável a sistemas dinâmicos de muitos graus de liberdade, enquanto a análise de tais sistemas a partir do método analítico se torna um trabalho árduo e tedioso.

Palavras-chaves: modos normais não-lineares. variedades invariantes. análise modal não-linear. Shooting Method.

Abstract

Nonlinear dynamical systems are the most common occurrences in real situations, and eventually linear approximations are not sufficient for a representative modal analysis of these systems. Many advances have been made in the last two to three decades in order to ensure that the industry can understand and contain non-linear behavior in real-world applications. The goal of this work is to review theoretical concepts over nonlinear modal analysis, such as the normal nonlinear modes, invariant manifolds and internal resonance. Analytical and numerical methods are utilized for the analysis of a reference system. The Invariant Manifolds Method is applied to the reference system and the equations of movement in the master and slave coordinates are obtained, along with the Invariant Manifolds. The nonlinear modes are excited and it is proved that a movement started in the invariant manifolds remains in them for the remainder of time. Numerical integrations of the motion equations are carried out to evaluate and compare the results of both linear and nonlinear modal analyzes. A comparison of the time response obtained by equations of motion, in both physical and modal coordinates, is also made. The Shooting Method, a numerical approach, is also applied for the identification of nonlinear modes, and its results are compared with those of the Invariant Manifolds Method. It is concluded that, for the reference system, a linear approximation of nonlinear systems for modal analysis is not sufficient for a correct evaluation of the system. It is also stated that the results obtained via the numerical method proved to be in agreement with the ones obtained via the analytical method; and that the computational routine is adaptable to dynamic systems of many degrees of freedom, while the analytical method becomes arduous, tedious work for such systems.

Key-words: nonlinear normal modes. invariant manifold. nonlinear modal analysis. Shooting Method.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	2
1.3	METODOLOGIA	2
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	3
2	CONCEITOS TEÓRICOS	4
2.1	MODOS NORMAIS LINEARES E NÃO-LINEARES	4
2.2	VARIEDADES INVARIANTES	5
2.2.1	Definição	5
2.3	CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS	8
2.3.1	Ressonância Interna	8
2.3.2	Dependência Frequência-Energia	8
2.3.3	Bifurcação e Estabilidade de Modos	9
2.4	MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS	9
2.4.1	Método das Variedades Invariantes	10
2.4.2	Variedades Invariantes Multimodais	14
2.4.3	Teoria da Forma Normal	15
2.4.4	Método das Múltiplas Escalas	15
2.4.5	Seção de Poincaré	16
2.4.6	Gráficos de Frequência-Energia	16
2.4.6.1	<i>Shooting Method</i> Para Identificação de Modos	18
3	RESULTADOS	23
3.1	MÉTODO DAS VARIEDADES INVARIANTES	23
3.1.1	Sistema de referência adotado	23
3.1.2	Obtenção das superfícies de Variedades Invariantes	24
3.1.3	Resposta temporal e superfícies de Variedades Invariantes	29
3.1.4	Análise da resposta residual de modos não-excitados	30
3.1.5	Comparação das respostas obtidas por coordenadas físicas e modais	34

3.2	IMPLEMENTAÇÃO DO <i>SHOOTING METHOD</i>	38
4	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Exemplo de superfícies de Variedades Invariantes para sistema linear não-conservativo, de Shaw e Pierre (1993).	6
Figura 2.2 – Exemplo de gráfico <i>FEP</i> para um sistema de dois graus de liberdade (PEETERS et al., 2009).	17
Figura 2.3 – Exemplo de gráfico <i>FEP</i> para um sistema com dois graus de liberdade e valores elevados de energia (PEETERS et al., 2009).	18
Figura 2.4 – Fluxograma do processo iterativo do <i>Shooting Method</i>	22
Figura 3.1 – Modelo de Referência de Shaw e Pierre (1993)	23
Figura 3.2 – Superfícies de Variedades Invariantes resultante de Shaw e Pierre (1993). (a) X_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (b) Y_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (c) X_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear; (d) Y_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear.	27
Figura 3.3 – Reprodução dos resultados de superfícies de Variedades Invariantes. (a) P_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (b) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (c) P_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear; (d) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear.	28
Figura 3.4 – Superfícies de Variedades Invariantes com espaços de fase obtidos pela simulação numérica. (a) Superfície de P_2 e sua trajetória para o primeiro modo não-linear; (b) Superfície de Q_2 e sua trajetória para o primeiro modo não-linear; (c) Superfície de P_2 e sua trajetória para o segundo modo não-linear; (d) Superfície de Q_2 e sua trajetória para o segundo modo não-linear.	29
Figura 3.5 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o primeiro modo linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2	31
Figura 3.6 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o primeiro modo não-linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2	31

Figura 3.7 – Visualização aproximada do movimento residual de u_2 e v_2 no acionamento do primeiro modo, a partir da transformação não-linear de condições iniciais.	32
Figura 3.8 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o segundo modo linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2	33
Figura 3.9 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o segundo modo não-linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2	33
Figura 3.10 – Visualização aproximada do movimento residual de u_1 e v_1 no acionamento do segundo modo, a partir da transformação não-linear de condições iniciais.	34
Figura 3.11 – Resultados de deslocamento e velocidade da massa m_1 por simulação numérica, com condições iniciais $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 2, 0)$. (a) Resultados para x_1 ; (b) Resultados para y_1	36
Figura 3.12 – Resultados de deslocamento e velocidade da massa m_2 por simulação numérica, com condições iniciais $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 2, 0)$. (a) Resultados para x_2 ; (b) Resultados para y_2	37
Figura 3.13 – Modelo de referência no sistema conservativo de Shaw e Pierre (1993).	38
Figura 3.14 – Superfícies de Variedades Invariantes do sistema conservativo. (a) P_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (b) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (c) P_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear; (d) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear.	40
Figura 3.15 – Demonstração da convergência do método para um conjunto no segundo modo. Linha tracejada: soluções periódicas para as iterações de condições iniciais adotadas; Linha contínua: modo identificado após convergência. (a) x_1 vs. t ; (b) y_1 vs. t ; (c) x_2 vs. t ; (d) y_2 vs. t	42
Figura 3.16 – Espaços de fase tridimensionais de x_2 (P_2) em relação a x_1 e y_1 no primeiro modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.	43
Figura 3.17 – Visualização lateral dos espaços de fase de x_2 com relação à sua superfície no primeiro modo.	43
Figura 3.18 – Espaços de fase tridimensionais de y_2 (Q_2) em relação a x_1 e y_1 no primeiro modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.	44
Figura 3.19 – Visualização lateral dos espaços de fase de y_2 com relação à sua superfície no primeiro modo.	44
Figura 3.20 – Espaços de fase tridimensionais de x_2 (P_2) em relação a x_1 e y_1 no segundo modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.	45

Figura 3.21–Visualização lateral dos espaços de fase de x_2 com relação à sua superfície no segundo modo.	46
Figura 3.22–Espaços de fase tridimensionais de y_2 (Q_2) em relação a x_1 e y_1 no segundo modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.	46
Figura 3.23–Visualização lateral dos espaços de fase de y_2 com relação à sua superfície no segundo modo.	47

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Coeficientes de Expansão de Taylor de terceira ordem.	26
Tabela 3.2 – Coeficientes de Expansão de Taylor de terceira ordem para o sistema conservativo.	39
Tabela 3.3 – Conjuntos de dados obtidos pelo <i>Shooting Method</i> para o primeiro modo.	42
Tabela 3.4 – Conjuntos de dados obtidos pelo <i>Shooting Method</i> para o segundo modo.	45

Lista de Abreviaturas e Siglas

<i>NNMs</i>	<i>Nonlinear Normal Modes</i>
<i>MVI</i>	Método das Variedades Invariantes
<i>VI_s</i>	Variedades Invariantes
<i>FEP</i>	<i>Frequency-Energy Plot</i>
<i>ML</i>	Modo Linear
<i>MNL</i>	Modo Não-Linear
<i>PVC</i>	Problema de Valor de Contorno
<i>MATLAB</i> [®]	<i>Matrix Laboratory</i> [®]

Lista de Símbolos

x_i, y_i	Par deslocamento-velocidade em coordenadas físicas
u_i, v_i	Par deslocamento-velocidade em coordenadas mestras/modais
$P_k(u, v)$	Deslocamento em coordenada escravas do k-ésimo grau de liberdade
$Q_k(u, v)$	Velocidade em coordenada escravas do k-ésimo grau de liberdade
a_{ij}	Coefficiente de P_k do i-ésimo termo do j-ésimo modo
b_{ij}	Coefficiente de Q_k do i-ésimo termo do j-ésimo modo
c	Constante de rigidez
k	Constante de amortecimento
g	Constante de não-linearidade
M	Matriz de massa
C	Matriz de amortecimento
K	Matriz de rigidez
x, y	Par deslocamento-velocidade em coordenadas físicas na forma matricial
z	Coordenadas físicas na forma matricial
w	Coordenadas físicas na forma modal
M₀	Matriz de transformação linear
M₂(w)	Matriz de transformação quadrática
M(w)	Matriz de transformação não-linear
f_i	Força normalizada com relação à massa
I	Matriz identidade
k_{NL}	Rigidez não-linear

\mathbf{F}_{nl}	Matriz de funções não-lineares
\mathbf{z}	Vetor de variáveis de deslocamento e velocidade
$\mathbf{g}(\mathbf{z})$	Vetor das equações do movimento
T	Período de oscilação
\mathbf{z}_0	Condições iniciais do sistema dinâmico
\mathbf{z}_{p0}	Condições iniciais da solução periódica do sistema dinâmico
$\mathbf{H}(\mathbf{z}_{p0}, T)$	Função <i>Shooting</i>
ϵ	Tolerância de convergência
$h(\mathbf{z}_{p0})$	Condição de fase
I	Matriz Identidade
$\Delta\mathbf{z}_{p0}$	Incremento de condições iniciais
ΔT	Incremento de período

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

O início das investigações acerca da análise modal não-linear é marcado pelos estudos de Rosenberg (1966), quando foi introduzido o conceito de *Nonlinear Normal Modes* (Modos Normais Não-lineares, ou *NNMs*). Estas investigações tiveram seus esforços estendidos até início da década de 1980, mas foram perdendo força ao decorrer do tempo por este não ser um tema amplamente abordado. Porém, os modos não-lineares têm voltado a ser foco de interesse de pesquisadores da área, principalmente desde as novas definições de modos normais não-lineares formuladas por Shaw e Pierre (1991). Como sistemas lineares são, muitas vezes, aproximações realizadas devido à dificuldade de representação de certas não-linearidades de sistemas, como um amortecimento ou uma não-linearidade geométrica, o estudo se torna importante para a obtenção de métodos eficazes e confiáveis para a avaliação de sistemas reais de comportamento dinâmico.

Sistemas não-lineares são, na verdade, as circunstâncias mais comuns em situações reais, sendo comportamentos lineares a exceção (KERSCHEN et al., 2006). Apesar disto, aproximações lineares são muitas vezes suficientes para a representação de comportamentos dinâmicos. Já para alguns casos, a análise modal linear é inaplicável devido à presença de fortes não-linearidades, e a grande dificuldade em encontrar técnicas específicas para tais ocorrências impossibilita avaliações mais profundas de sistemas. Casos como estes estão constantemente presentes em situações na indústria, que cada vez mais tem requerido formas de mitigar possíveis problemas causados. Algumas aplicações em situações reais que possuem fortes não-linearidades, como citadas por Kerschen et al. (2006), são:

- Não-linearidades geométricas em sistemas com grandes deslocamentos ou deformações de materiais (e.g., pêndulo simples com grandes movimentos angulares);
- Dissipação de energia por amortecimento, que é normalmente um fenômeno não-linear, como efeitos de atrito seco;
- Termos de aceleração convectiva ou de aceleração de Coriolis;
- Condições de contorno que promovem não-linearidades (e.g., superfícies livre de fluidos, forças eletrodinâmicas).

O conceito de modos normais é bem desenvolvido para sistemas oscilatórios lineares devido a características especiais de suas equações diferenciais governantes, como a superposição de respostas modais. As respostas obtidas em uma análise linear de sistemas não-lineares podem ser inexatas – ou até incorretas, se houver presença de ressonâncias internas – devido à impossibilidade de captação das interações entre os modos normais.

Muitos avanços tem sido alcançados nos anos recentes (PAK, 2006; VAKAKIS et al., 2008; KERSCHEN et al., 2009; RENSON; KERSCHEN, 2013), devido à necessidade da indústria em conhecer, evitar ou ao menos definir uma maneira de conter a excitação de modos não-lineares em estruturas, máquinas ou componentes essenciais em suas áreas de trabalho. Este projeto tem o intuito de iniciar uma contribuição para a área da análise modal não-linear.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é identificar os modos não-lineares de um sistema dinâmico a partir de ferramentas analíticas e numéricas. Tem-se ainda como objetivos específicos revisar conceitos teóricos acerca desta importante área de vibrações mecânicas e desenvolver uma rotina computacional para obtenção de modos não-lineares, de forma que esta seja um método numérico facilmente adaptável a diferentes sistemas dinâmicos e variados graus de liberdade.

1.3 METODOLOGIA

Primeiramente, é realizada a revisão dos principais conceitos relacionados à vibração não-linear, das características fundamentais dos modos normais não-lineares e dos principais métodos existentes, sejam eles analíticos ou numéricos, para a análise destes modos.

Em seguida, o Método das Variedades Invariantes (MVI) é aplicado a um sistema de referência escolhido (SHAW; PIERRE, 1993), são obtidas as equações de movimento do sistema na forma de coordenadas mestras e escravas, seguidas da obtenção dos coeficientes de coordenadas escravas e das superfícies de variedades resultantes. Então, há uma comparação dos resultados de superfícies obtidas com a literatura. É então realizada uma análise a partir de simulações numéricas das equações de movimento, e de seus posicionamentos relativos às superfícies de variedades invariantes obtidas.

Posteriormente, é avaliada a integração numérica com condições iniciais de acionamento particular de cada modo, com a utilização de coordenadas físicas obtidas pelas transformações lineares e não-lineares. São obtidas as respostas do modo excitado e o modo não-excitado, que apresenta uma resposta residual. Realiza-se a comparação destes resultados entre si.

A análise seguinte consiste na comparação de integrações numéricas em coordenadas modais (lineares e não-lineares) e físicas, a partir de condições iniciais que excitam os dois modos.

A última etapa é a aplicação de um método numérico, *Shooting Method*, ao sistema dinâmico de referência em sua forma conservativa para a obtenção dos modos normais não-lineares, seguida de comparação dos espaços de fase tridimensionais obtidos com as superfícies de Variedades Invariantes do sistema conservativo.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O primeiro capítulo é a introdução deste trabalho, que aborda a motivação do mesmo, os objetivos a serem alcançados, a metodologia utilizada para a realização deste, além de explicitar a organização de seus capítulos.

O segundo capítulo trata da revisão de conceitos teóricos necessários para a realização do trabalho, visto que o assunto em questão é de menor conhecimento geral na área de vibrações, principalmente em nível de graduação. Serão realizadas revisões acerca dos conceitos de modos normais lineares e não-lineares, das propriedades fundamentais dos *NNMs*, como a ressonância interna e bifurcação de modos; e de alguns métodos analíticos e numéricos, com foco no Método das Variedades Invariantes e nos Gráficos de Frequência-Energia.

O terceiro capítulo deste trabalho é a apresentação de resultados do Método de Variedades Invariantes aplicado a um sistema de referência adotado, de forma a comparar resultados obtidos com os da literatura original, realizar a análise de tais resultados e dar sequência ao estudo com um método numérico, o *Shooting Method*. Este método é aplicado e seus resultados são comparados com resultados obtidos pelo MVI para o mesmo sistema.

O quarto capítulo é a conclusão do trabalho, que dispõe da discussão dos principais resultados obtidos e conclusões alcançadas, juntamente de uma sugestão para trabalhos futuros.

2 CONCEITOS TEÓRICOS

Este capítulo abordará os principais conceitos e propriedades fundamentais dos modos normais não-lineares, além da apresentação de alguns métodos, tanto analíticos quanto numéricos, construídos para a determinação destes modos e avaliação da dinâmica do sistema.

2.1 MODOS NORMAIS LINEARES E NÃO-LINEARES

A análise modal linear é uma técnica essencial para análise do comportamento dinâmico de estruturas e sistemas. Até certo ponto, os modos normais lineares são abordagens precisas para o estudo de tal comportamento, visto que em alguns casos as não-linearidades de movimentos de baixa amplitude não influenciam suficientemente na dinâmica do sistema para que necessitem ser consideradas. Todavia, quando a energia de movimento do sistema é muito intensa, não-linearidades de rigidez, inércia ou amortecimento podem introduzir fenômenos dinâmicos bastante diferentes daqueles previstos pela teoria linear (KERSCHEN et al., 2006). A consideração e abordagem de algumas não-linearidades se tornam inevitáveis, como algumas fortes não-linearidades de atrito seco ou geométricas. Além disso, o princípio de superposição da análise modal linear não é aplicável a estes casos não-lineares. Ou seja, a resposta de um sistema a uma combinação de cargas dinâmicas aplicadas simultaneamente não é igual à soma das respostas individuais de cada carga atuante (KERSCHEN et al., 2006). Visto que a análise modal linear já não satisfaz mais alguns modelos de sistemas dinâmicos, é necessária uma investigação mais profunda a respeito das não-linearidades de sistemas e a criação de um novo conceito: o de modos normais não-lineares.

Os modos normais não-lineares foram primeiramente definidos por Rosenberg (1966), como uma extensão dos modos normais lineares. Rosenberg os definiu como vibrações em uníssono, ou melhor, uma oscilação síncrona do sistema. Isto quer dizer que modos não-lineares ocorrem quando as coordenadas de um sistema alcançam valores máximos simultaneamente, assim como passam por seus pontos de equilíbrio em um mesmo instante, isto para um sistema conservativo e com não-linearidades ímpares (ROSENBERG, 1966). Esta definição de modos normais não-lineares, ou *nonlinear normal modes (NNMs)*, frequentemente é utilizada de forma simplificada, ao assumir que os modos normais possuem

movimentos similares (ou seja, um formato constante) e suas respostas são harmônicas (PESHECK, 2000). Esta definição não pode ser utilizada em sistemas não-conservativos ou sistemas com ressonância interna, visto que nestes sistemas as oscilações não são síncronas.

Uma característica dinâmica típica da resposta não-linear é a dependência entre frequência e energia das oscilações livres. Elas são caracterizadas pelo efeito da amplitude na diminuição ou aumento da frequência de movimento de um oscilador não-linear livre com características *hardening* ou *softening*. Este é um desvio básico da teoria de vibração linear (KERSCHEN et al., 2006).

2.2 VARIEDADES INVARIANTES

2.2.1 Definição

Shaw e Pierre (1991) introduzem uma forma de abordagem modal baseada na propriedade de invariância dos modos subespaciais, de forma a permitir a representação da dinâmica do sistema como um conjunto de equações oscilatórias lineares desacopladas. Essa representação é provada pelos autores como equivalente à representação modal linear comumente utilizada, onde obtém-se a solução complexa do problema de autovalores de primeira ordem. Porém, uma característica interessante dessa abordagem é o fato dos autovetores serem obtidos anteriormente aos autovalores.

Considerando um movimento livre de um sistema com N graus de liberdade tem-se a Eq.(2.1), linearizada em torno do equilíbrio na origem.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{M} representa a matriz de massa, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, \mathbf{K} a matriz de rigidez, \mathbf{x} representa o vetor-deslocamento e os pontos sobrescritos representam derivações temporais. As matrizes possuem dimensão $N \times N$, enquanto os vetores são da forma $N \times 1$. As equações de movimento podem também ser representadas na forma da Eq.(2.2).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ e $\mathbf{B} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$. No método formulado por Shaw e Pierre, as variedades invariantes para um modo normal são parametrizadas por um único par de coordenadas escolhido, denominado par mestre, que possibilita a descrição do movimento de todos graus de liberdade de um sistema a partir da posição e velocidade de um único grau de liberdade (PESHECK, 2000). Isto permite a formação de uma superfície de variedades invariantes para as coordenadas escravas, dependendo apenas do par de variáveis de estado

das coordenadas mestras. No caso do sistema linear, essa dependência funcional é também linear, como apresentado nas Eqs.(2.3) com o par mestre x_1 e y_1 :

$$x_i(t) = a_1(i)x_1(t) + a_2(i)y_1(t), \quad y_i = b_1(i)x_1(t) + b_2(i)y_1(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

Na Equação (2.3) fica claro que os coeficientes do par mestre são $a_1(i = 1) = 1$, $a_2(i = 1) = 0$, $b_1(i = 1) = 0$ e $b_2(i = 1) = 1$. Qualquer movimento que faça parte deste subespaço linear invariante e satisfaça a equação do movimento é definido como um modo normal linear. Este subespaço possibilita verificar diferenças de fase entre componentes e que, no caso linear, é representado por uma superfície plana. A Fig.(2.1) apresenta um exemplo de superfícies de Variedades Invariantes para um sistema linear.

Substituindo as Eqs.(2.3) e suas derivadas nas equações de movimento (2.2), a dependência temporal do problema é eliminada, por este motivo o problema pode ser resolvido sem a clássica resolução de autovalores e autovetores. Esta eliminação da variável temporal será mais detalhada à frente no trabalho, para o caso não-linear.

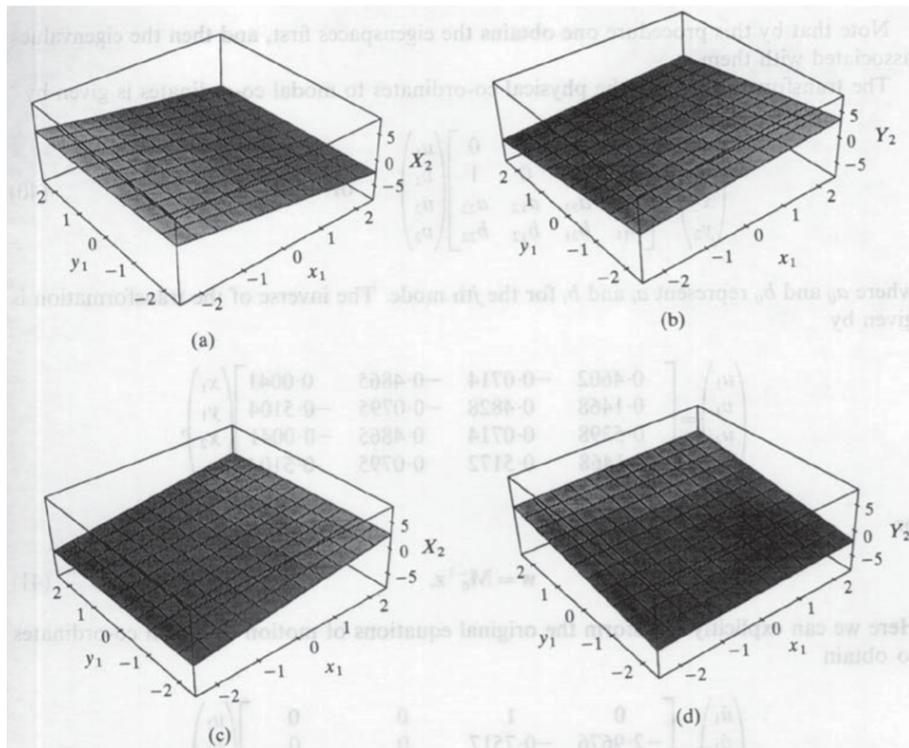


Figura 2.1 – Exemplo de superfícies de Variedades Invariantes para sistema linear não-conservativo, de Shaw e Pierre (1993).

Para a recuperação da dinâmica do sistema no espaço físico, uma transformação completa entre coordenadas modais e físicas é proposta, na forma

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}_0 \mathbf{w} \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{z} = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N]^T$ representa as coordenadas físicas do sistema e $\mathbf{w} = [u, v]^T$ as coordenadas modais. A matriz \mathbf{M}_0 é dada pelos coeficientes do sistema linear da Eq.(2.3). Para esta transformação de coordenadas, o par mestre adotado anteriormente (x_1 e y_1) será agora igual ao par de coordenadas modais apresentado (u e v , respectivamente). A Eq.(2.5) é obtida ao abrir a matriz mostrada na Eq.(2.4), considerando um sistema de dois graus de liberdade.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Em seguida, as equações de movimento do sistema são escritas em forma de matriz e com a transformação de coordenadas físicas para modais, como descrito na Eq.(2.6).

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & -2\xi_k\omega_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

Aqui ω_k e ξ_k representam a frequência natural e o coeficiente de amortecimento do k -ésimo modo normal do sistema, respectivamente, e u_k e v_k representam o deslocamento e velocidade modais. A forma desta equação é referida como forma de oscilador. A normalização dos autovetores, decorrente da determinação de u_k e v_k como a contribuição do k -ésimo modo para o par deslocamento-velocidade de algum dos graus de liberdade, se manifesta de forma não usual, onde os autovalores dependem dos autovetores. Isto é uma consequência natural da formulação utilizada, que especifica os autovetores de forma única.

Uma importante propriedade do movimento modal é que, se o movimento de uma única coordenada específica é conhecido, então o movimento de todas as outras coordenadas é especificado pelo autovetor daquele modo específico. Devido à independência dos autovetores, uma condição inicial que esteja alinhada com um único modo seguirá com um movimento de modo único, no qual todos os outros modos seguirão com amplitude zero e permanecerão não acionados pelo resto do tempo. Esta é a própria definição da invariância dos sub-espacos modais.

Shaw e Pierre (1991) estendem a definição de variedades invariantes para os casos não-lineares e criam uma nova definição para os *NNMs*, afirmando que os modos normais não-lineares são representados como "*um movimento que se encontra em variedades invariantes bidimensionais, no espaço de fase de um sistema*". Assim, estas variedades são um subconjunto do espaço de fase no qual o sistema se comporta como um de dimensão menor, realizando assim uma espécie de redução modal. Esta formulação, que será apresentada na Subseção 2.4.1, possibilita a formulação de equações diferenciais parciais nas quais a geometria das variedades independe da conservação de energia ou simetria do sistema,

assim como aqui apresentado para os modos lineares. Isto possibilita a análise de sistemas não-lineares variados, incluindo sistemas não-conservativos ou não-linearidades assimétricas. Se aplicarmos restrições como conservação de energia ou movimento harmônico, elas reduzem as variedades invariantes de uma superfície para uma linha curva dentro do espaço de fase (PESHECK, 2000), redução a qual é consistente com a definição de Rosenberg (1966) para modos normais não-lineares.

2.3 CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS

2.3.1 Ressonância Interna

Embora modos normais não-lineares sejam individualmente invariantes, estes podem interagir entre si durante um movimento geral do sistema, fenômeno tipicamente chamado de ressonância interna. Isto significa que nem sempre é possível uma análise não-linear puramente pela superposição dos modos normais. A ressonância interna consiste na interação e acoplamento entre modos normais não-lineares, que ocorre quando um modo não-excitado apresenta resposta de alta amplitude devido à troca de energia com o modo excitado, formando uma resposta acoplada. Este fenômeno acontece quando um modo normal excitado perde sua estabilidade, resultando num acoplamento modal (PAK, 2006). Foi determinado que termos cúbicos são os mais ressonantes internamente em equações de sistemas não-lineares, podendo alcançar uma amplificação de resposta do modo não-excitado de até 3:1 em relação ao modo excitado.

2.3.2 Dependência Frequência-Energia

Uma característica típica dos modos normais não-lineares é a dependência entre a frequência e a energia das oscilações do sistema, o que permite concluir que suas curvas modais e frequências dependem da energia total do sistema (KERSCHEN et al., 2009). Diferentemente da teoria linear de vibrações, essa dependência impede a separação de espaço e tempo nas equações do movimento, dificultando o cálculo analítico das *NNMs*. Além disso, o movimento dos modos não-lineares a baixas energias se assemelha àquele do modo normal linear subjacente do sistema. Porém, devido a esta dependência, os *NNMs* em altas energias podem se tornar internamente ressonantes pela trocas de energia entre os modos. Esta transferência energética pode ser explicada pelo fato de que todas trocas não-lineares envolvem até certo ponto um tipo de ressonância não-linear entre a fonte de energia e o sorvedouro (VAKAKIS et al., 2008).

2.3.3 Bifurcação e Estabilidade de Modos

Em casos de alta energia do sistema, os *NNMs* podem exceder o número de graus de liberdade de um oscilador discreto, e isso ocorre devido a bifurcações de modos geradas por instabilidades modais (KERSCHEN et al., 2006). Ou seja, os sistemas não-lineares podem ter um número de modos maior do que o número de graus de liberdade, e isto pode ocorrer inclusive com sistemas de poucos graus de liberdade. Ressonâncias internas são geralmente responsáveis pelo surgimento de bifurcações.

2.4 MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS

Métodos analíticos permitem um conhecimento profundo da dinâmica de sistemas e a realização de estudos parametrizados pela construção simbólica de *NNMs*, além de realçar a dependência frequência-energia dos modos não-lineares (KERSCHEN et al., 2009). Métodos numéricos para a obtenção de modos não-lineares não são tão desenvolvidos quanto os analíticos até então. Mesmo os métodos analíticos possuem muitas restrições como a inacurácia de resultados em sistemas com altas amplitudes e a dificuldade de identificação de ressonâncias internas. Em relação à abordagem analítica, existem alguns métodos que merecem ser citados: o Método de Múltiplas Escalas (MAZZILLI; SOARES; NETO, 2004; LI; JI; HANSEN, 2006), a Teoria da Forma Normal (TOUZÉ, 2003) e as Variedades Invariantes Multimodais (BOIVIN; PIERRE; SHAW, 1994; BOIVIN; PIERRE; SHAW, 1995). Numericamente, um dos métodos mais utilizados para a análise modal é o estudo das seções de Poincaré (MONTH; RAND, 1980; PAK, 2006), porém, outro método bastante utilizado é o de gráficos de frequência-energia, ou *FEPs* (*Frequency-Energy Plots*) (KERSCHEN et al., 2009; PEETERS et al., 2009).

Nesta seção serão estudados de maneira aprofundada o Método das Variedades Invariantes, dado que grande parcela deste trabalho se desenvolve a partir de seu conceito e sua aplicação; e os gráficos de Frequência-Energia. Do ponto de vista numérico este trabalho focará nos *FEPs* pois, apesar das Seções de Poincaré serem excelentes ferramentas de avaliação da estabilidade dos modos, os gráficos também permitem esta avaliação e, ademais, têm sido aplicados a sistemas contínuos em conjunto com o Método das Variedades Invariantes e o método de Elementos Finitos (RENSON; KERSCHEN, 2013; RENSON, 2014; RENSON; KERSCHEN; COCHELIN, 2016), além de outras aplicações (LEE et al., 2005; KERSCHEN et al., 2005; KURT et al., 2014). Serão aqui brevemente apresentados também: o Método das Variedades Invariantes Multimodais, a Teoria da Forma Normal, o Método das Múltiplas Escalas e as Seções de Poincaré.

2.4.1 Método das Variedades Invariantes

O MVI será o primeiro método empregado para a obtenção dos modos não-lineares neste trabalho, entretanto, ele é um método analítico extenuante e complicado quando o sistema estudado possui muitos graus de liberdade. Para um sistema de N graus de liberdade e ordem cúbica, é necessário resolver um sistema de $18(N - 1)$ equações para a determinação dos coeficientes das coordenadas escravas, e consequente obtenção das superfícies resultantes. Por este motivo, o sistema de referência adotado para a implementação do método possui dois graus de liberdade.

As equações de movimento do sistema são dadas na forma da Eq.(2.7), e mostram a redução da dinâmica de N graus de liberdade para N osciladores desacoplados. Para dadas condições iniciais, os N problemas de segunda ordem podem ser resolvidos para a dinâmica modal e o movimento generalizado obtido pela superposição de movimentos oscilatórios desacoplados.

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

Na Equação (2.7), as variáveis x representam as coordenadas de deslocamento generalizadas e as variáveis y representam suas velocidades generalizadas correspondentes. O vetor f representa as forças/momentos atuando no sistema, normalizados com relação à massa/inércia. Pontos sobrescritos representam derivações temporais. Para dois graus de liberdade, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{y}_1 &= f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ \dot{x}_2 &= y_2, & \dot{y}_2 &= f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

As coordenadas mestras são as variáveis de estado do primeiro grau de liberdade x_1 e y_1 , sendo as demais denominadas coordenadas escravas. Assim, tem-se as Eqs.(2.9) para coordenadas mestras e escravas:

$$\begin{aligned} x_1 &= u, & y_1 &= v \\ x_2 &= P_2(u, v), & y_2 &= Q_2(u, v) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Independente do número de graus de liberdade, $P_1(u, v) = u$ e $Q_1(u, v) = v$. Realiza-se a derivação das Eq.(2.9), com o intuito de iniciar a eliminação da variável temporal. Isto resulta nas Eq.(2.10):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v, & \dot{y}_1 &= \dot{v} \\ \dot{x}_i &= \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} \dot{v}, & \dot{y}_i &= \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} \dot{v} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde sabe-se que $\dot{v} = f_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$. A partir das equações diferenciais parciais (2.10) das coordenadas escravas x_2 e y_2 .

$$\begin{aligned} Q_i(u, v) &= \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} f_1(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) \\ f_i(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) &= \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} f_1(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} Q_2(u, v) &= \frac{\partial P_2(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial P_2(u, v)}{\partial v} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial Q_2(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial Q_2(u, v)}{\partial v} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Porém, esta formulação pode ser tão complicada quanto as equações diferenciais originais, mas estas permitem uma solução aproximada na forma de série de potência.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \quad \dot{v} = f_1(u, P_2(u, v), v, Q_2(u, v)) \\ \dot{P}_2(u, v) &= Q_2(u, v), \quad \dot{Q}_2(u, v) = f_2(u, P_2(u, v), v, Q_2(u, v)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Com as Equações (2.8) e (2.9), é possível obter as equações de movimento das coordenadas físicas de f_1 e f_2 em função de u , v , P_2 e Q_2 . Como P_2 e Q_2 dependem apenas de u e v , é correto dizer que $f_1 = f_1(u, v)$ e $f_2 = f_2(u, v)$.

De forma localizada, as coordenadas escravas são também representadas por aproximação pela série de Taylor, de forma que sua aproximação por expansão assintótica é dada pela Eq.(2.14). Como nosso interesse se dá apenas até a terceira ordem, são utilizados os nove primeiros termos de cada expansão de Taylor.

$$\begin{aligned} P_2(u, v) &= a_1 u + a_2 v + a_3 u^2 + a_4 uv + a_5 v^2 + a_6 u^3 + a_7 u^2 v + a_8 uv^2 + a_9 v^3 + \dots \\ Q_2(u, v) &= b_1 u + b_2 v + b_3 u^2 + b_4 uv + b_5 v^2 + b_6 u^3 + b_7 u^2 v + b_8 uv^2 + b_9 v^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Então, pode-se dispor as equações na forma de expansão de Taylor em forma de matrizes e com a transformação das coordenadas físicas para coordenadas modais não-lineares, como demonstrado na Eq.(2.15).

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}(\mathbf{w})\mathbf{w} = [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{w})]\mathbf{w} + \dots \quad (2.15)$$

De forma análoga à transformação de coordenadas no caso linear apresentado pela Eq.(2.4), \mathbf{w} é o vetor de coordenadas modais, \mathbf{z} o de coordenadas físicas e \mathbf{M}_0 a matriz transformadora linear. Porém, neste caso há a existência das matrizes transformadoras

$\mathbf{M}_1(\mathbf{w})$ e $\mathbf{M}_2(\mathbf{w})$, que contém os coeficientes dos termos quadráticos e cúbicos, respectivamente, e dependem de \mathbf{w} . Abrindo a matriz, a Eq.(2.15) é apresentada da forma da Eq.(2.16):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_3u + a_4v & a_5v \\ b_3u + b_4v & b_5v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_6u^2 + a_8v^2 & a_7u^2 + a_9v^2 \\ b_6u^2 + b_8v^2 & b_7u^2 + b_9v^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Como nos exemplos utilizados não há termos quadráticos, utiliza-se a simplificação da Eq.(2.17).

$$\mathbf{z} = [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_2(\mathbf{w})]\mathbf{w} \quad (2.17)$$

Em seguida, realiza-se a derivação das equações de coordenadas escravas em suas formas de aproximação assintótica, de maneira que

$$\begin{aligned} \dot{P}_2(u, v) = Q_2(u, v) &= a_1\dot{u} + a_2\dot{v} + 2a_3u\dot{u} + a_4u\dot{v} + a_4\dot{u}v + 2a_5v\dot{v} + 3a_6u^2\dot{u} + \\ & 2a_7u\dot{u}v + a_7u^2\dot{v} + a_8\dot{u}v^2 + 2a_8uv\dot{v} + 3a_9v^2\dot{v} + \dots \\ \dot{Q}_2(u, v) = f_2(u, v) &= b_1\dot{u} + b_2\dot{v} + 2b_3u\dot{u} + b_4u\dot{v} + b_4\dot{u}v + 2b_5v\dot{v} + 3b_6u^2\dot{u} + \\ & 2b_7u\dot{u}v + b_7u^2\dot{v} + b_8\dot{u}v^2 + 2b_8uv\dot{v} + 3b_9v^2\dot{v} + \dots \end{aligned} \quad (2.18)$$

e realiza-se a substituição das variáveis \dot{u} e \dot{v} por v e f_1 , respectivamente, na Eq.(2.18), obtendo-se a Eq.(2.19).

$$\begin{aligned} Q_2(u, v) &= a_1v + a_2f_1 + 2a_3uv + a_4uf_1 + a_4v^2 + 2a_5vf_1 + 3a_6u^2v + \\ & 2a_7uv^2 + a_7u^2f_1 + a_8v^3 + 2a_8uvf_1 + 3a_9v^2f_1 + \dots \\ f_2(u, v) &= b_1v + b_2f_1 + 2b_3uv + b_4uf_1 + b_4v^2 + 2b_5vf_1 + 3b_6u^2v + \\ & 2b_7uv^2 + b_7u^2f_1 + b_8v^3 + 2b_8uvf_1 + 3b_9v^2f_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

A definição da expansão assintótica de Q_2 , apresentada nas Eqs.(2.14), e as equações de movimento f_1 e f_2 em função de u e v , dispostas nas Eqs.(2.13), são substituídas nas Eqs.(2.19). Estas então são expandidas até sua ordem cúbica, e os coeficientes multiplicadores de u , v , u^2 , uv , v^2 , u^3 , u^2v , uv^2 e v^3 são dispostos em conjunto, de forma a fornecer o sistema de equações utilizado para a determinação dos coeficientes a_j e b_j .

Após a determinação dos coeficientes, tanto para o primeiro modo de vibração quanto para o segundo, é possível apresentar as equações de transformação modal para

físicas como nas Eqs.(2.20) e (2.21). Para o primeiro modo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{1_1} & a_{2_1} \\ b_{1_1} & b_{2_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{6_1}u_1^2 + a_{8_1}v_1^2 & a_{7_1}u_1^2 + a_{9_1}v_1^2 \\ b_{6_1}u_1^2 + b_{8_1}v_1^2 & b_{7_1}u_1^2 + b_{9_1}v_1^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Para o segundo modo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{1_2} & a_{2_2} \\ b_{1_2} & b_{2_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{6_2}u_2^2 + a_{8_2}v_2^2 & a_{7_2}u_2^2 + a_{9_2}v_2^2 \\ b_{6_2}u_2^2 + b_{8_2}v_2^2 & b_{7_2}u_2^2 + b_{9_2}v_2^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

A partir destas equações é possível representar a geometria das variedades invariantes na forma de gráficos tridimensionais, como já demonstrado para o caso linear da Fig.(2.1), com um gráfico para cada coordenada escrava em todos modos de vibração.

A transformação inversa de coordenadas é também necessária nesta análise para a transformação de volta às coordenadas modais após realizada a solução numérica. Para isso, é necessário acoplar as matrizes \mathbf{M}_0 e $\mathbf{M}_2(\mathbf{w})$ específicas para cada modo, de forma a obter matrizes quadradas. A partir da junção das matrizes das Eqs.(2.20) e (2.21) obtém-se as matrizes transformadoras quadradas necessárias.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_{1_1} & a_{2_1} & a_{1_2} & a_{2_2} \\ b_{1_1} & b_{2_1} & b_{1_2} & b_{2_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{6_1}u_1^2 + a_{8_1}v_1^2 & a_{7_1}u_1^2 + a_{9_1}v_1^2 & a_{6_2}u_2^2 + a_{8_2}v_2^2 & a_{7_2}u_2^2 + a_{9_2}v_2^2 \\ b_{6_1}u_1^2 + b_{8_1}v_1^2 & b_{7_1}u_1^2 + b_{9_1}v_1^2 & b_{6_2}u_2^2 + b_{8_2}v_2^2 & b_{7_2}u_2^2 + b_{9_2}v_2^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Este formato facilita a percepção do método de superposição dos modos, visto que $x_1 = u_1 + u_2$ e $y_1 = v_1 + v_2$. Com esta matriz, uma aproximação da transformação inversa pode ser realizada como demonstrado na Eq.(2.23), de forma a facilitar os cálculos.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_2(\mathbf{w})]^{-1} \mathbf{z} + \dots \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{M}_2(\mathbf{w})]^{-1} \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{z} + \dots \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{M}_2(\mathbf{w})] \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{z} + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde \mathbf{I} representa a matriz identidade de ordem 4. O lado direito da equação depende de \mathbf{w} e \mathbf{z} , mas para que a transformação inversa seja possível é necessário que este lado dependa apenas das coordenadas físicas. Como $\mathbf{M}_2(\mathbf{w})$ é quadrático em \mathbf{w} e são consideradas pequenas oscilações, a ordem dominante dos termos dentro da matriz $\mathbf{M}_2(\mathbf{w})$ pode ser aproximada por $\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z}$ (a inversa do caso linear), e assim a dependência de \mathbf{w} é bem representada apenas pelos termos de ordem dominante. Esta aproximação causa um pequeno erro na inversão das matrizes de transformação, então quanto menores forem os valores das coordenadas físicas, menor o erro. Assim, a transformação inversa final é dada pela Eq.(2.24).

$$\mathbf{w} = [\mathbf{I} - \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_2(\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z})]\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z} \quad (2.24)$$

Em resumo, o método das variedades invariantes é realizado pelos seguintes tópicos na seguinte ordem:

1. Definição das coordenadas mestras u e v ;
2. Expressão das coordenadas escravas em função das funções de restrição P_i e Q_i , para $i = 1, 2, \dots, N$;
3. Eliminação da dependência temporal, com aproximações locais para P_i e Q_i se necessário;
4. Substituição das aproximações nas EDPs que governam as VIs;
5. Resolução do sistema de equações algébricas resultantes para os coeficientes das coordenadas escravas;
6. Substituição das coordenadas escravas nas equações de movimento via expansões polinomiais;
7. Obtenção das equações de oscilador modal de cada modo do sistema.

2.4.2 Variedades Invariantes Multimodais

O método demonstrado na subseção anterior não pode ser aplicado a sistemas com ressonâncias interna, devido à perda da propriedade da invariância dos modos. Um novo conceito de Variedades Invariantes foi então estipulado por Boivin, Pierre e Shaw (1994) para um melhor estudo analítico dos modos normais não-lineares destes sistemas. O Método das Variedades Invariantes Multimodais é importante para avaliar a dinâmica de um movimento modal arbitrário, ou seja, que não se inicia em uma das superfícies de Variedades Invariantes. Assim, os modos não-lineares podem interagir entre si e causar um fenômeno de contaminação (BOIVIN; PIERRE; SHAW, 1994). A ideia das Variedades Invariantes Multimodais é remover essa contaminação entre modos até certa ordem. Em um

sistema que se utiliza de M modos para o cálculo das variedades invariantes, as superfícies invariantes tem dimensão $2M$, de forma que a interação (ressonância interna) entre esses M modos é contabilizada e a interação com os modos não-modelados seja removida. Na prática, as Variedades Invariantes Multimodais captam as ressonâncias internas sem mesmo saber que elas existem (BOIVIN; PIERRE; SHAW, 1995), e ressonâncias internas entre modos modelados e não-modelados são sinalizados pela presença de singularidades nas expansões de série de Taylor das superfícies, sendo elas causadas pela presença de termos acoplados não-removíveis entre os modos ressonantes, o que entra em contradição com o próprio conceito de VIs Multimodais. A solução nesse caso seria a inclusão deste modo não-modelado anteriormente, mas em alguns casos, uma ressonância interna com outro modo pode não ser captada.

Este método é normalmente aplicado a sistemas de múltiplos modos, de maneira que o sistema estudado possua alguns graus de liberdade modelados entre os vários existentes. Jiang, Pierre e Shaw (2005) constroem os modos normais não-lineares de um sistema de 3 graus de liberdade com ressonância interna pelas Variedades Invariantes Multimodais.

2.4.3 Teoria da Forma Normal

A Teoria da Forma Normal (*Normal Form Theory*) aplicada a modos normais não-lineares se utiliza do conceito de Variedades Invariantes e introduz uma transformação não-linear das coordenadas para simplificar o máximo possível as equações de movimento de um sistema (KERSCHEN et al., 2014), além de ter como base os Teoremas de Poincaré e de Poincaré-Dulac (TOUZÉ, 2003). Apesar de conseguir abordar a ressonância interna em sistemas com não-linearidades quadráticas e cúbicas, este método analítico é limitado a sistemas de poucos graus de liberdade.

2.4.4 Método das Múltiplas Escalas

O Método das Múltiplas Escalas é um método analítico de perturbação pelo qual são computadas soluções aproximadas de *NNMs*, que garante que os *NNMs* são assintóticos de forma a convergir para os modos normais lineares à medida que as não-linearidades vão desaparecendo (LI; JI; HANSEN, 2006). Este método foi primeiramente utilizado por Nayfeh e Nayfeh (1994) para a obtenção de modos não-lineares em sistemas contínuos. Já por Li, Ji e Hansen (2006), o estudo dos *NNMs* permite que eles sejam classificados como acoplados e desacoplados, e o fato de alguns modos serem acoplados é uma indicação de que há ressonância interna entre tais modos. Tais ressonâncias podem ser de ordem 1:1, 2:1 e 3:1, em sistemas conservativos com não-linearidades quadráticas e cúbicas. A bifurcação de modos pode também ser estudada a partir deste método, que é limitado a sistemas com poucos graus de liberdade (MAZZILLI; SOARES; NETO, 2004).

2.4.5 Seção de Poincaré

A instabilidade dos modos normais não-lineares pode ocorrer a partir do aumento da amplitude de algum deles, e suas estabilidades podem ser testadas por meio da análise das seções de Poincaré, construídas com metodologia numérica. Estas são definidas por um subespaço bidimensional de um fluxo no espaço de fase do problema (GAVASSONI, 2012), e são obtidas para avaliação de todas as variáveis de estado em um determinado instante do movimento do sistema. Pela seção, é possível verificar a troca de energia entre modos, causada pela ressonância interna, e a formação de modos acoplados estavelmente.

2.4.6 Gráficos de Frequência-Energia

A definição de modos não-lineares de Rosenberg (1966), como uma extensão dos modos normais não-lineares e oscilação síncrona do sistema, é mais aplicável a sistemas conservativos, porém muitas vezes a indústria recorre aos sistemas dinâmicos em suas formas conservativas pela complexidade da física de amortecimento reais. Adicionalmente, a dinâmica de sistemas amortecidos pode ser interpretada como baseada na estrutura topológica dos NNMs do sistema conservativo subjacente (PEETERS et al., 2009), se considerarmos que um subamortecimento é puramente parasitário e não pode gerar uma nova dinâmica do sistema, apenas perturbar a resposta Hamiltoniana subjacente (VAKAKIS et al., 2008). Vale mencionar que na presença de ressonâncias internas o sistema não é síncrono, porém continua periódico (KERSCHEN et al., 2009). Pela característica de dependência entre frequência e energia, os *NNMs* conservativos podem ser representados por pontos em gráficos *FEPs*. A energia do sistema é a soma das energias potenciais e cinéticas, enquanto a frequência é o inverso do período mínimo de oscilação do movimento periódico. Os gráficos são concebidos a partir de metodologia numérica.

Como já discutido na subseção 2.3.2, para baixos valores de energia o movimento do sistema não-linear se assemelha ao linear, mas para energias elevadas é possível encontrar respostas periódicas simétricas e assimétricas com presença de ressonância interna, sendo as assimétricas encontradas quando há bifurcação de modos. Além disto, o movimento de um *NNM* no espaço pode ter a forma de uma curva aberta ou fechada, sendo a última forma representante de uma diferença de fase entre os osciladores. O número de *NNMs* pode ser maior que o de graus de liberdade devido às bifurcações de modo presentes, e modos bifurcados são essencialmente não-lineares (KERSCHEN et al., 2009).

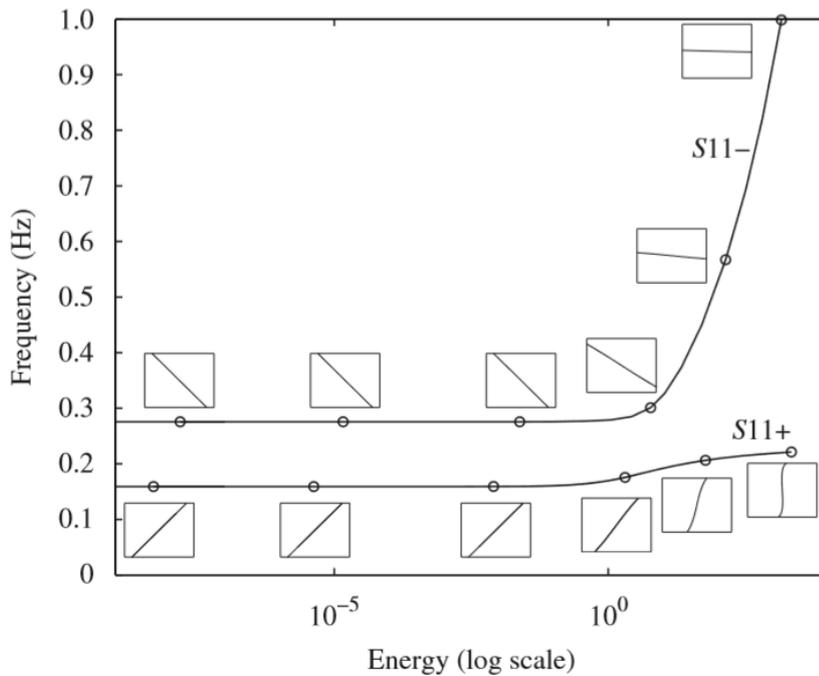


Figura 2.2 – Exemplo de gráfico *FEP* para um sistema de dois graus de liberdade (PEETERS et al., 2009).

A Figura (2.2) é a representação das duas curvas de suporte principal (ou *backbones*) dos *NNMs* síncronos a baixas energias, que são as extensões não-lineares do movimento dos modos lineares. A curva *S11+* representa o modo em fase e *S11-* o modo fora de fase. Os índices numéricos denotam que as duas massas vibram com a mesma frequência dominante. Já a Fig.(2.3) apresenta o gráfico da curva do modo em fase a altas energias, com o surgimento de soluções periódicas simétricas (representadas por *Snm*) e, devido à bifurcação de modos, soluções assimétricas (representadas por *Unm*). Aqui os índices *n* e *m* de cada ramo (ou *branch*) apontam uma ressonância interna de razão $n : m$ entre os modos em fase e fora de fase.

Tsakirtzis et al. (2007) permite o estudo de sistemas não-conservativos pela superimposição de transformadas de Wavelets em *FEPs* dos sistemas Hamiltonianos subjacentes, enquanto Renson e Kerschen (2013) aplicam *FEPs* a definição de Variedades Invariantes juntamente do método de Elementos Finitos.

Os valores de energia (soma de cinética e potencial) e frequência necessários para a construção dos gráficos são calculados a partir de conjuntos de condições iniciais para um movimento modal não-linear e seu período de oscilação, depois da resolução de Problemas de Valores de Contorno (PVCs). Pode também ser utilizado um método de continuação numérica, a partir de um conjunto de valores da solução de um PVC. Para a construção dos gráficos de frequência-energia, Peeters et al. (2009) utilizam uma combinação de um método de PVC (*Shooting Method*) e um método de continuação (*Pseudo-arclength Continuation*). Neste trabalho, será utilizado apenas o *Shooting Method* para resolução do Problema de Valores de Contorno e obtenção de alguns conjuntos que caracterizam os

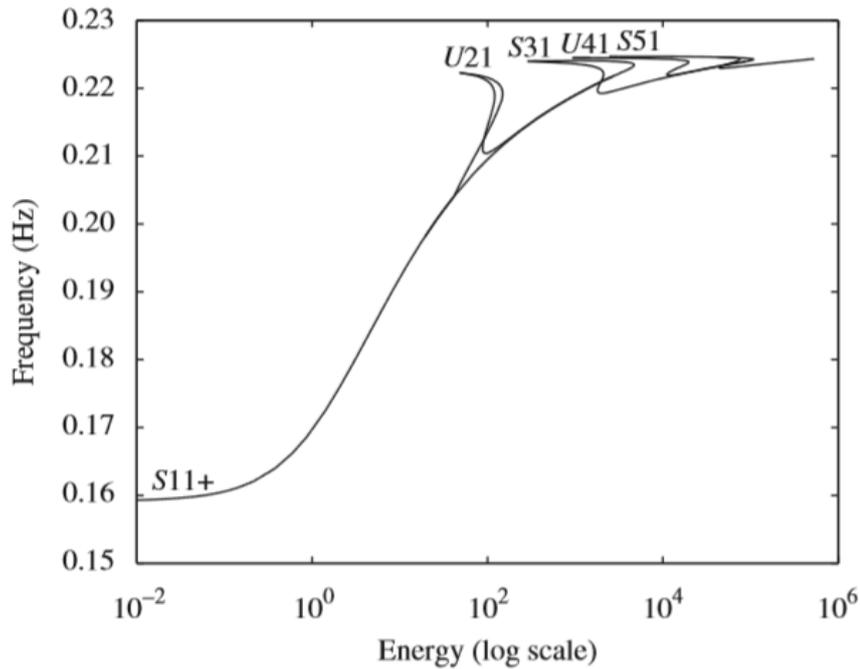


Figura 2.3 – Exemplo de gráfico *FEP* para um sistema com dois graus de liberdade e valores elevados de energia (PEETERS et al., 2009).

modos não-lineares. Os gráficos de espaço de fase tridimensionais obtidos por este método numérico serão comparados com as superfícies de Variedades Invariantes, obtidas de forma analítica.

2.4.6.1 *Shooting Method* Para Identificação de Modos

Considerando um sistema conservativo e discreto de n graus de liberdade, tem-se as equações do movimento representadas na Eq.(2.25).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (2.25)$$

onde \mathbf{M} representa a matriz de massa, \mathbf{K} a matriz de rigidez e \mathbf{F}_{nl} a matriz de funções não-lineares das equações do movimento.

Para a aplicação do método, inicialmente as equações de movimento do sistema são apresentadas em sua forma de espaço de estado, representada por

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) \quad (2.26)$$

onde \mathbf{z} é o vetor de dimensão $2n$ das variáveis de deslocamento \mathbf{x} e velocidade \mathbf{y} , $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^* \ \mathbf{y}^*]^*$, em que $*$ sobrescrito significa a transposição da matriz. Já o vetor $\mathbf{g}(\mathbf{z})$, que representa as

equações do movimento, é dado por

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

e assume-se que a matriz \mathbf{M} é inversível.

Uma solução periódica do sistema com condições iniciais $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = [\mathbf{x}_0^* \ \mathbf{y}_0^*]^*$ é dada por $\mathbf{z}_p(t, \mathbf{z}_{p0})$, de forma que $\mathbf{z}_p(t, \mathbf{z}_{p0}) = \mathbf{z}_p(t + T, \mathbf{z}_{p0})$. A Equação (2.28) é a função *Shooting* e representa a diferença entre os valores de condições iniciais das variáveis de deslocamento e velocidade e seus valores depois de um tempo T decorrido. Este é um Problema de Valor de Contorno de dois pontos a ser resolvido, com o intuito de encontrar uma das inúmeras soluções periódicas do sistema.

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}_{p0}, T) \equiv \mathbf{z}_p(T, \mathbf{z}_{p0}) - \mathbf{z}_{p0} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Os valores de \mathbf{H} são utilizados como parâmetros de convergência do Problema de Contorno, e caso não atinjam a convergência desejada, inicia-se um esquema de iteração para determinar os próximos valores de \mathbf{z}_{p0} e T . A convergência é dada pela Eq.(2.29), onde ϵ é o valor de tolerância.

$$\frac{\|\mathbf{H}(\mathbf{z}_{p0}, T)\|}{\|\mathbf{z}_{p0}\|} = \frac{\|\mathbf{z}_p(T, \mathbf{z}_{p0}) - \mathbf{z}_{p0}\|}{\|\mathbf{z}_{p0}\|} < \epsilon \quad (2.29)$$

Um esquema de convergência por Newton-Raphson é então montado. Expandindo a função não-linear de \mathbf{H} , é possível encontrar as correções a serem utilizadas nas iterações.

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}_{p0} + \Delta\mathbf{z}_{p0}, T + \Delta T) = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

Escrevendo na forma de série de Taylor, a Eq.(2.31) é obtida

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}_{p0}, T) + \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}_{p0}} \right|_{(\mathbf{z}_{p0}, T)} \Delta\mathbf{z}_{p0} + \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \right|_{(\mathbf{z}_{p0}, T)} \Delta T + T.M.O. = 0 \quad (2.31)$$

onde os termos de maior ordem (T.M.O.) são ignorados e a derivada de H com relação a \mathbf{z}_{p0} da equação é uma matriz jacobiana $2n \times 2n$, enquanto a derivada com relação a T é um vetor $2n \times 1$. Reorganizando os termos, é possível criar um conjunto de equações para a aplicação do método de Newton-Raphson, como apresentado na Eq.(2.32). Aqui, o valor (k) sobrescrito é o número da iteração em que se encontra o método de convergência.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}_{p0}} \right|_{(\mathbf{z}_{p0}^{(k)}, T^{(k)})} \Delta\mathbf{z}_{p0}^{(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \right|_{(\mathbf{z}_{p0}^{(k)}, T^{(k)})} \Delta T^{(k)} = -\mathbf{H}(\mathbf{z}_{p0}^{(k)}, T^{(k)}) \quad (2.32)$$

A Equação (2.32) representa um sistema de $2n$ equações com $2n + 1$ variáveis, que necessita de uma equação suplementar. É imposta então uma condição de fase, de maneira

a eliminar uma das variáveis. Isso é realizado pela determinação de uma velocidade inicial nula, o que influencia apenas na fase de início da solução periódica. As condições do sistema são então dadas por

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_{p0}, T) \equiv \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{z}_{p0}, T) = 0 \\ h(\mathbf{z}_{p0}) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

onde $h(\mathbf{z}_{p0})$ é a condição de fase. Esta condição será a fixação da velocidade do primeiro grau de liberdade como nula. A partir desta consideração, é possível afirmar que a variação Δy_{10} também será igual a zero, podendo anular os termos referentes à sua multiplicação na matriz Jacobiana da Eq.(2.32), transformando assim o sistema em um com $2n$ equações para $2n$ variáveis.

Para a resolução do sistema de equações, é necessário determinar os valores das derivadas parciais e da função *Shooting*. Os valores de \mathbf{H} podem ser definidos pela integração numérica das equações do movimento com condições iniciais \mathbf{z}_{p0} e período T , seguido do cálculo da diferença entre os valores da integração para $t = T$ e as condições iniciais. Estes valores já foram calculados para determinar se a convergência foi alcançada no final da última iteração.

As derivadas de \mathbf{H} com relação a T são representadas pelo vetor da Eq.(2.34),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T}(\mathbf{z}_0, T) &= \left. \frac{\partial \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)}{\partial t} \right|_{t=T} \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{z}(T, \mathbf{z}_0)) \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde os valores são simplesmente o vetor $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ no instante de tempo T . Já para a derivada do vetor \mathbf{H} em relação a \mathbf{z}_0 no instante $t = T$, encontra-se a Eq.(2.35),

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}_0}(\mathbf{z}_0, T) = \left. \frac{\partial \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} \right|_{t=T} - \mathbf{I} \quad (2.35)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $2n \times 2n$. Para então determinar as derivadas parciais de $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ com relação a \mathbf{z}_0 em $t = T$, as equações do movimento são derivadas com relação a \mathbf{z}_0 e obtém-se as Eqs.(2.36).

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_0} [\dot{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}_0)] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_0} [\mathbf{g}(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0))] \quad (2.36)$$

As equações acima são manipuladas de maneira a serem apresentadas na forma da Eq.(2.37), e para definir a jacobiana da derivada de \mathbf{z} com relação a \mathbf{z}_0 no tempo $t = T$, são realizadas as integrações numéricas dos $2n$ sistemas obtidos com $2n$ variáveis cada.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} \right] = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)} \left[\frac{\partial \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} \right] \quad (2.37)$$

Como $\mathbf{z}(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0$, as condições iniciais da Eq.(2.37) são dadas pela Eq.(2.38).

$$\frac{\partial \mathbf{z}(0, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} = \mathbf{I} \quad (2.38)$$

A matriz jacobiana $2n \times 2n$ a ser construída no tempo $t = T$ pela integração temporal da Eq.(2.37), para um sistema de dois graus de liberdade, tem a forma da Eq.(2.39).

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)}{\partial \mathbf{z}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_{20}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{20}} & \frac{\partial y_1}{\partial x_{20}} & \frac{\partial y_2}{\partial x_{20}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_{10}} & \frac{\partial x_2}{\partial y_{10}} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{10}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{10}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_{20}} & \frac{\partial x_2}{\partial y_{20}} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{20}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{20}} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Com os valores de incremento $\Delta \mathbf{z}_{p0}$ e ΔT obtidos pela resolução do sistema linear $\mathbf{F}(\mathbf{z}_0, T)$, é possível calcular os valores de condições iniciais e período da próxima iteração, dados pela Eq.(2.40), e calcular se o vetor \mathbf{H} permite a convergência para a tolerância definida.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{p0}^{(k+1)} &= \mathbf{z}_{p0}^{(k)} + \Delta \mathbf{z}_{p0}^{(k)} \\ T^{(k+1)} &= T^{(k)} + \Delta T^{(k)} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Caso a convergência não seja atingida, uma nova iteração é iniciada para a resolução do novo sistema de equações e determinação dos novos incrementos, com os valores de condições iniciais e período recém obtidos. O processo iterativo do *Shooting Method* é representado pelo fluxograma da Fig.(2.4).

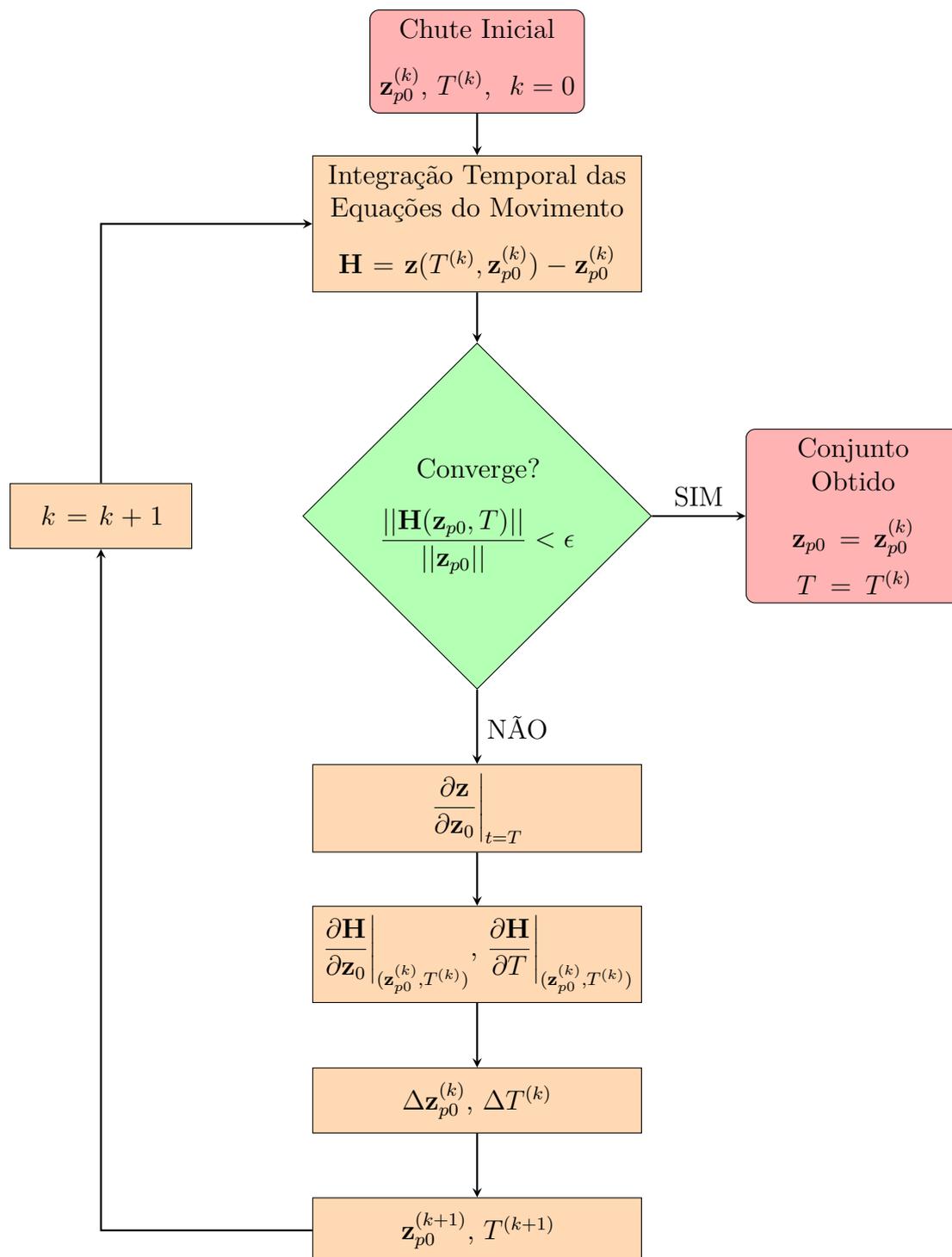


Figura 2.4 – Fluxograma do processo iterativo do *Shooting Method*.

3 RESULTADOS

3.1 MÉTODO DAS VARIEDADES INVARIANTES

3.1.1 Sistema de referência adotado

O modelo tomado como referência para esta análise foi retirado de Shaw e Pierre (1993) e apresenta duas massas em série conforme apresentado na Fig.(3.1). A massa à esquerda é definida como m_1 e tem o deslocamento de seu centro de massa na direção das molas representado por x_1 , enquanto a massa localizada à direita é definida por m_2 e seu deslocamento é representado por x_2 . Neste sistema dinâmico existe uma rigidez não-linear entre a parede esquerda e m_1 , enquanto entre m_2 e a parede direita e entre as duas massas existem rigidezes e amortecimentos lineares.

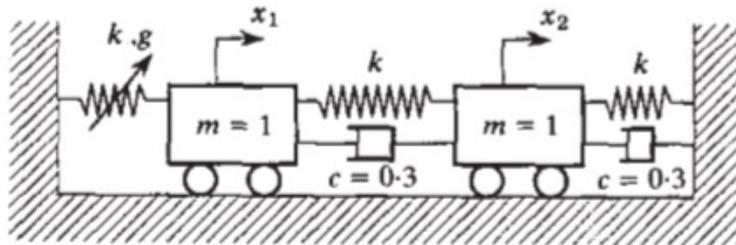


Figura 3.1 – Modelo de Referência de Shaw e Pierre (1993)

A rigidez não-linear, representada na Fig.(3.1) por suas constantes (k, g) e por uma mola cortada transversalmente por uma seta, será aqui chamada de k_{NL} . Esta rigidez consiste na soma entre a rigidez linear e uma função quadrática dependente de x_1 , provocando assim uma não-linearidade cúbica no sistema conforme apresentada na Eq.(3.1).

$$k_{NL} = k + gx_1^2 \quad (3.1)$$

O valor de rigidez k é assumido como unitário, enquanto o coeficiente de não-linearidade g é igual a 0,5. O amortecimento c é definido na Fig.(3.1) como $c = 0,3$. Realiza-se uma normalização das equações em função das massas, no entanto, por serem iguais

a 1 kg estas não aparecem em suas respectivas equações de movimento. As formulações resultantes estão dispostas na Eq.(3.2).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, & \dot{y}_1 = f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = -gx_1^3 - 2kx_1 + kx_2 - c(y_1 - y_2) \\ \dot{x}_2 = y_2, & \dot{y}_2 = f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = kx_1 - 2kx_2 + cy_1 - 2cy_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde y_1 e y_2 correspondem às velocidades das massas m_1 e m_2 , respectivamente.

3.1.2 Obtenção das superfícies de Variedades Invariantes

No caso estudado, as coordenadas x_1 e y_1 são tomadas como as coordenadas mestras u e v . Reordenando os termos e escrevendo as equações de movimento da Eq.(3.2) em termos das coordenadas mestras e escravas, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{u} = v, & \dot{v} = f_1 = kP_2 + cQ_2 - gu^3 - 2ku - cv \\ \dot{P}_2 = Q_2, & \dot{Q}_2 = f_2 = -2kP_2 - 2cQ_2 + ku + cv \end{cases} \quad (3.3)$$

As forças normalizadas com relação à massa f_1 e f_2 das Eqs.(3.3) dependem de P_2 e Q_2 , as quais são utilizadas em suas formas de expansão de Taylor, apresentadas pela Eq.(2.14). As forças são então representadas pela Eq.(3.4):

$$\begin{aligned} f_1 &= k(a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3 + \dots) \\ &\quad + c(b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 + b_6u^3 + b_7u^2v + b_8uv^2 + b_9v^3 + \dots) \\ &\quad - gu^3 - 2ku - cv, \\ f_2 &= -2k(a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3 + \dots) \\ &\quad - 2c(b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 + b_6u^3 + b_7u^2v + b_8uv^2 + b_9v^3 + \dots) \\ &\quad + ku + cv \end{aligned} \quad (3.4)$$

Estas equações são importantes para a substituição dos valores de f_1 e f_2 no sistema de equações apresentado na Eq. (2.19), o qual foi obtido na apresentação do Método de Variedades Invariantes e é utilizado para a eliminação da variável temporal. As equações são lembradas abaixo na Eq.(3.5):

$$\begin{aligned} Q_2(u, v) &= a_1v + a_2f_1 + 2a_3uv + a_4uf_1 + a_4v^2 + 2a_5vf_1 + 3a_6u^2v + \\ &\quad 2a_7uv^2 + a_7u^2f_1 + a_8v^3 + 2a_8uvf_1 + 3a_9v^2f_1 + \dots \\ f_2(u, v) &= b_1v + b_2f_1 + 2b_3uv + b_4uf_1 + b_4v^2 + 2b_5vf_1 + 3b_6u^2v + \\ &\quad 2b_7uv^2 + b_7u^2f_1 + b_8v^3 + 2b_8uvf_1 + 3b_9v^2f_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

As Equações (3.4) são substituídas na Eq.(3.5), juntamente com a definição assintótica de Q_2 . As multiplicações por f_1 são efetuadas de forma a expandir o sistema de equações até ordem cúbica. Pelo fato de um lado da equação ser equivalente ao outro, os coeficientes de u , v , u^2 , uv , v^2 , u^3 , u^2v , uv^2 e v^3 de ambos os lados das equações são aglomerados e igualados a zero, de forma a prover o sistema de equações para a determinação dos mesmos. No artigo de Shaw e Pierre (1993), os coeficientes são apresentados no exemplo sem as equações utilizadas para encontrá-los. O sistema de equações disposto na Eq.(3.6) foi encontrado de forma analítica.

$$\begin{aligned}
&\text{termos} && -2a_2k + a_1a_2k + a_2b_1c - b_1 = 0, \\
&\text{de } u: && -2b_2k + b_2a_1k + b_2b_1c - k + 2a_1k + 2b_1c = 0, \\
&\text{termos} && a_1 + a_2^2k - a_2c + a_2b_2c - b_2 = 0, \\
&\text{de } v: && b_1 + b_2a_2k - b_2c + b_2^2c + 2a_2k - c + 2b_2c = 0, \\
&\text{termos} && a_2a_3k + a_2b_3c - 2a_4k + a_1a_4k + a_4b_1c - b_3 = 0, \\
&\text{de } u^2: && b_2a_3k + b_2b_3c - 2b_4k + a_1b_4k + b_1b_4c + 2a_3k + 2b_3c = 0, \\
&\text{termos} && a_2a_4k + a_2b_4c + 2a_3 + a_4a_2k - a_4c + a_4b_2c - 4a_5k + 2a_1a_5k \\
&\text{de } uv: && -b_4 + 2a_5b_1c = 0, \\
&&& b_2a_4k + b_2b_4c + 2b_3 + b_4a_2k - b_4c + b_4b_2c - 4b_5k + 2b_5a_1k \\
&&& + 2b_5b_1c + 2a_4k + 2b_4c = 0, \\
&\text{termos} && a_2a_5k + a_2b_5c + a_4 + 2a_5a_2k - 2a_5c + 2a_5b_2c - b_5 = 0, \\
&\text{de } v^2: && b_2a_5k + b_2b_5c + b_4 + 2b_5a_2k - 2b_5c + 2b_5b_2c + 2a_5k + 2b_5c = 0, \\
&\text{termos} && a_2a_6k + a_2b_6c + a_3a_4k + b_3a_4c - 2a_7k + a_1a_7k + b_1a_7c - a_2g - b_6 = 0, \\
&\text{de } u^3: && b_2a_6k + b_2b_6c + b_4a_3k + b_4b_3c - 2b_7k + b_7a_1k + b_7b_1c - b_2g \\
&&& + 2a_6k + 2b_6c = 0, \\
&\text{termos} && a_2a_7k + a_2b_7c + a_4^2k + a_4b_4c + 2a_5a_3k + 2a_5b_3c + 3a_6 + a_7a_2k \\
&\text{de } u^2v: && -a_7c + a_7b_2c - 4a_8k + 2a_8a_1k + 2a_8b_1c - b_7 = 0, \\
&&& b_2a_7k + b_2b_7c + b_4a_4k + b_4^2c + 2b_5a_3k + 2b_5b_3c + 3b_6 + b_7a_2k - b_7c \\
&&& + b_7b_2c - 4b_8k + 2b_8a_1k + 2b_8b_1c + 2a_7k + 2b_7c = 0, \\
&\text{termos} && a_2a_8k + a_2b_8c + a_4a_5k + a_4b_5c + 2a_5a_4k + 2a_5b_4c + 2a_7 + 2a_8a_2k \\
&\text{de } uv^2: && -2a_8c + 2a_8b_2c - 6a_9k + 3a_9a_1k + 3a_9b_1c - b_8 = 0, \\
&&& b_2a_8k + b_2b_8c + b_4a_5k + b_4b_5c + 2b_5a_4k + 2b_5b_4c + 2b_7 + 2b_8a_2k - 2b_8c \\
&&& + 2b_8b_2c - 6b_9k + 3b_9a_1k + 3b_9b_1c + 2a_8k + 2b_8c = 0, \\
&\text{termos} && a_2a_9k + a_2b_9c + 2a_5^2k + 2a_5b_5c + a_8 + 3a_9a_2k - 3a_9c + 3a_9b_2c - b_9 = 0, \\
&\text{de } v^3: && b_2a_9k + b_2b_9c + 2b_5a_5k + 2b_5^2c + b_8 + 3b_9a_2k - 3b_9c + 3b_9b_2c \\
&&& + 2a_9k + 2b_9c = 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

As equações de movimento não possuem termos quadráticos, o que indica que os coeficientes de u^2 , uv e v^2 são nulos. Sendo assim, os coeficientes a_3 , a_4 , a_5 , b_3 , b_4 e b_5 são

substituídos por zero nas Eqs.(3.6).

Com o auxílio do programa *Mathematica*[®] na resolução de sistemas de equações não-lineares, foram encontrados primeiramente os coeficientes a_1 , a_2 , b_1 e b_2 do sistema, pois estes dependem apenas da análise modal linear e podem ser encontrados separadamente dos coeficientes de termos cúbicos. Foram obtidos quatro conjuntos de valores para estes coeficientes, porém dois destes são complexos e serão ignorados em nossa análise. Após encontrados os coeficientes dos termos lineares para os dois modos, estes valores são aplicados no sistema de equações (3.6) correspondentes aos termos cúbicos u^3 , u^2v , uv^2 e v^3 , e são encontrados seus respectivos coeficientes.

Tabela 3.1 – Coeficientes de Expansão de Taylor de terceira ordem.

Coeficiente	Primeiro Modo	Segundo Modo
a_1	-1,1056	0,9471
a_2	-0,1550	-0,1386
a_3	0	0
a_4	0	0
a_5	0	0
a_6	0,0327	0,1554
a_7	-0,0492	-0,0074
a_8	-0,0110	0,2191
a_9	-0,0187	-0,0627
b_1	0,4599	0,1401
b_2	-0,9891	0,9676
b_3	0	0
b_4	0	0
b_5	0	0
b_6	0,2088	0,0531
b_7	0,1991	0,0244
b_8	0,0821	0,0768
b_9	0,0324	0,2455

A partir dos coeficientes encontrados e expostos na Tab.(3.1), substituem-se seus valores na matriz de transformação de coordenadas apresentada anteriormente na Eq.(2.22), conforme retratado na Eq.(3.7). As equações estão dispostas na forma de matriz $\mathbf{z} = [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_2(\mathbf{w})]\mathbf{w}$. Por uma simples análise da matriz, espera-se que para acionar apenas o primeiro modo não-linear do sistema deve-se substituir u_1 e/ou v_1 por um valor diferente de zero, enquanto os valores de coordenadas modais restantes são mantidos nulos.

Com as equações resultantes apresentadas na matriz, é possível plotar os gráficos das superfícies de Variedades Invariantes para cada coordenada escrava via código de programação *MATLAB*[®]. Para a reprodução das superfícies, foram determinadas malhas de x_1 e y_1 com intervalo de valores entre -2 e 2 para ambas coordenadas, e com valores de incremento iguais a 1/3. Os resultados da literatura, apresentados na Fig.(3.2), são utilizados como referência para a comparação dos resultados obtidos e apresentados na Fig.(3.3), os quais são então avaliados como coerentes. Note que as coordenadas escravas

no artigo de Shaw e Pierre (1993) são representadas por X_2 e Y_2 , enquanto na reprodução de resultados elas são, respectivamente, P_2 e Q_2 .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1,1056 & -0,1550 & 0,9471 & -0,1386 \\ 0,4599 & -0,9891 & 0,1401 & 0,9676 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0327u_1^2 & -0,0492u_1^2 & 0,1554u_2^2 & -0,0074u_2^2 \\ -0,0110v_1^2 & -0,0187v_1^2 & +0,2191v_2^2 & -0,0627v_2^2 \\ 0,2088u_1^2 & 0,1991u_1^2 & 0,0531u_2^2 & 0,0244u_2^2 \\ +0,0821v_1^2 & +0,0324v_1^2 & +0,0768v_2^2 & +0,2455v_2^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

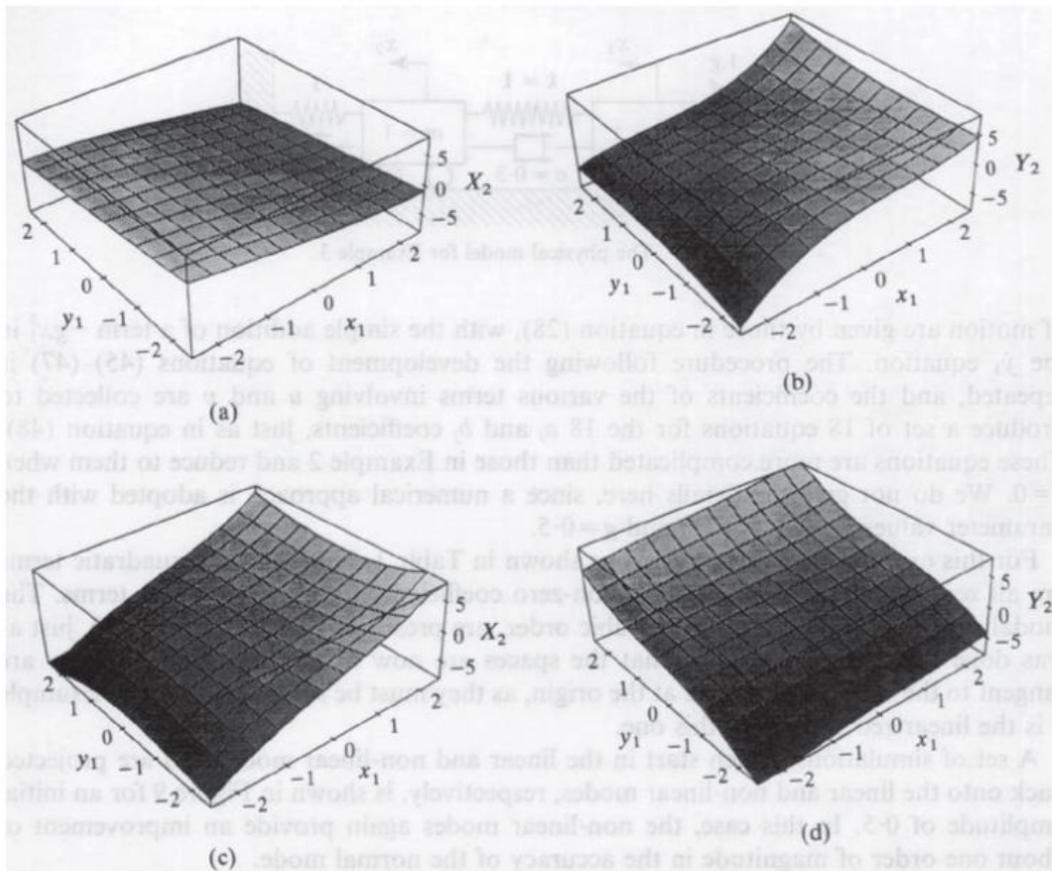


Figura 3.2 – Superfícies de Variedades Invariantes resultante de Shaw e Pierre (1993). (a) X_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (b) Y_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (c) X_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear; (d) Y_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear.

A inversa da matriz de coeficientes dos termos lineares \mathbf{M}_0 é obtida para que mais adiante seja possível realizar a transformação inversa de coordenadas, seja na forma linear

ou não-linear. Ela é representada pela Eq.(3.8):

$$\mathbf{M}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4602 & -0,0714 & -0,4865 & 0,0041 \\ 0,1468 & 0,4828 & -0,0795 & -0,5104 \\ 0,5398 & 0,0714 & 0,4865 & -0,0041 \\ -0,1468 & 0,5172 & 0,0795 & 0,5104 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Esta matriz multiplica o vetor de coordenadas físicas \mathbf{z} na transformação não-linear inversa $\mathbf{w} = [\mathbf{I} - \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_2(\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z})]\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z}$. Isto significa que, dentro da matriz \mathbf{M}_2 , os valores de u_1 , v_1 , u_2 e v_2 são representados pelas componentes do vetor resultante desta multiplicação.

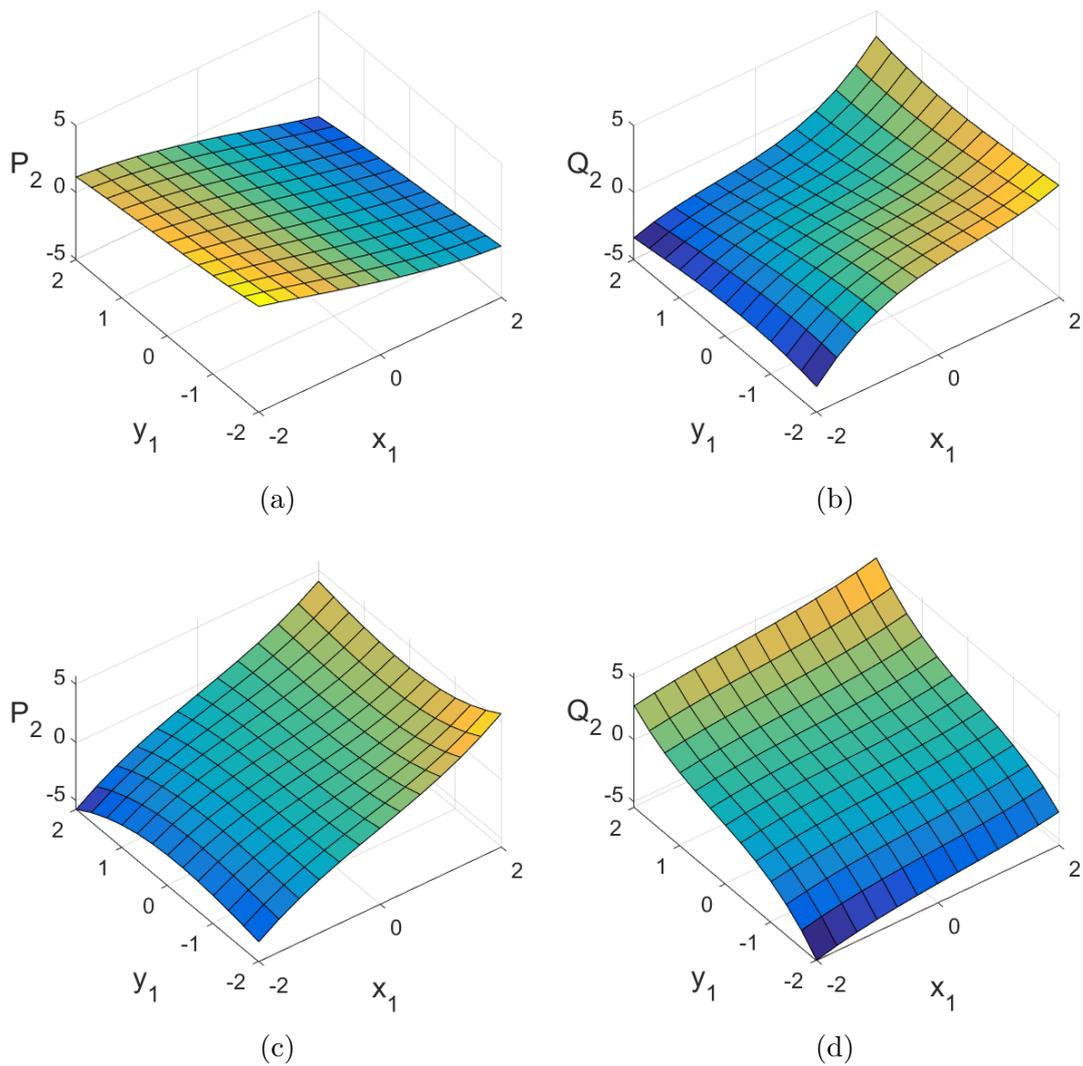


Figura 3.3 – Reprodução dos resultados de superfícies de Variedades Invariantes. (a) P_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (b) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (c) P_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear; (d) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear.

Todas as análises seguintes são realizadas pela aplicação de códigos de programação construídos no *MATLAB*[®].

3.1.3 Resposta temporal e superfícies de Variedades Invariantes

O objetivo desta análise é, com a resposta de cada modo de vibração obtida a partir da integração numérica das equações do movimento originais, comparar o posicionamento dos espaços de fase tridimensionais de cada coordenada escrava com as suas superfícies de Variedades Invariantes. Para isso, foram selecionados dois conjuntos de condições iniciais nas coordenadas modais não-lineares, de forma a excitar cada modo de vibração separadamente. Estas coordenadas são transformadas nas suas coordenadas físicas correspondentes, para então ser possível a integração numérica das equações do movimento em um intervalo de 20 segundos.

As condições iniciais adotadas foram $(u_{1_0}, v_{1_0}, u_{2_0}, v_{2_0}) = (1, 0, 0, 0)$ para acionar o primeiro modo e $(u_{1_0}, v_{1_0}, u_{2_0}, v_{2_0}) = (0, 0, 1, 0)$ para acionar o segundo. As condições iniciais correspondentes nas coordenadas físicas são $(x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}) = (1, 0, -1, 0,729, 0, 6687)$ e $(x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}) = (1, 0, 1, 1026, 0, 1931)$, respectivamente.

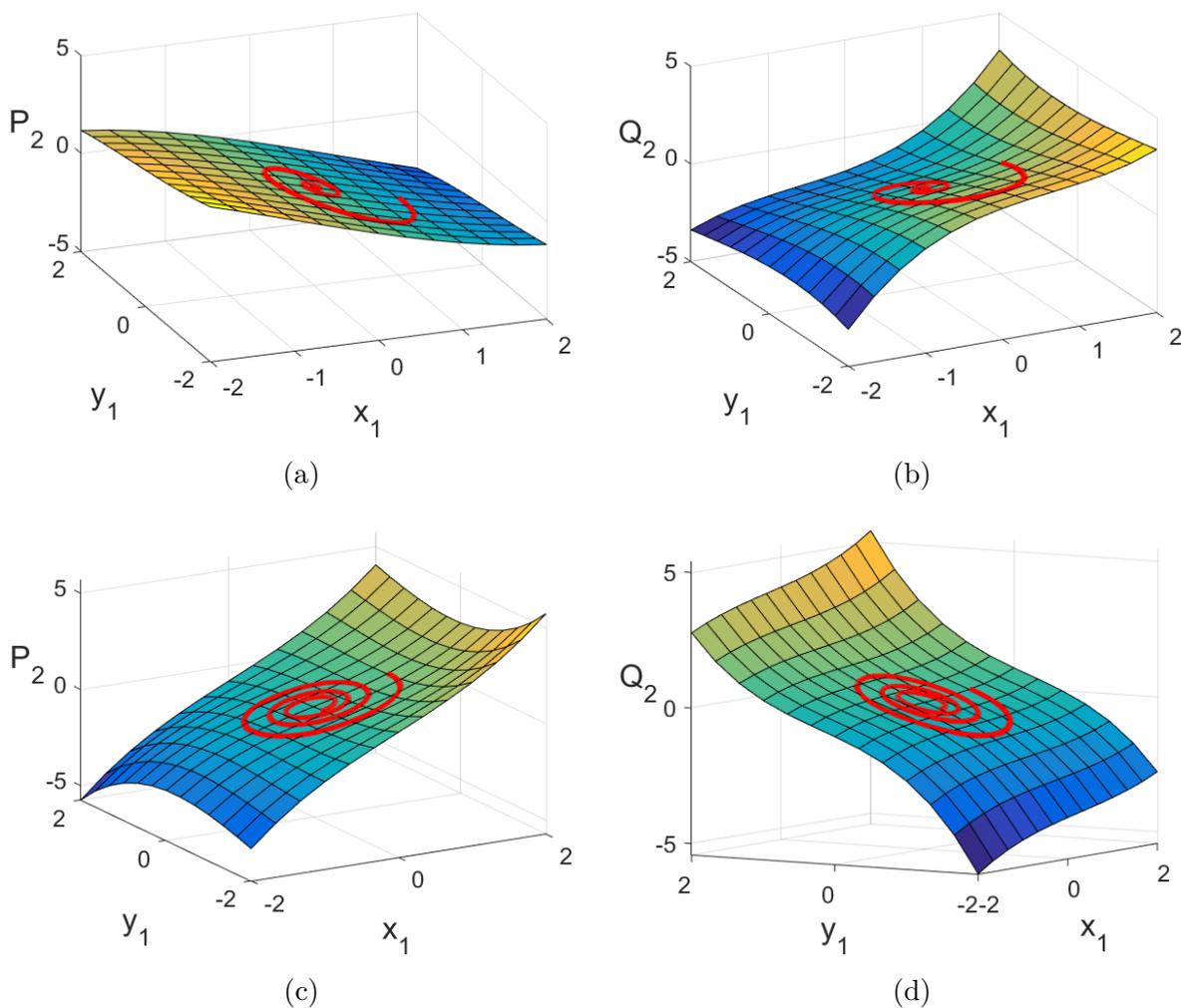


Figura 3.4 – Superfícies de Variedades Invariantes com espaços de fase obtidos pela simulação numérica. (a) Superfície de P_2 e sua trajetória para o primeiro modo não-linear; (b) Superfície de Q_2 e sua trajetória para o primeiro modo não-linear; (c) Superfície de P_2 e sua trajetória para o segundo modo não-linear; (d) Superfície de Q_2 e sua trajetória para o segundo modo não-linear.

Os resultados do espaço de fase físico, obtidos pela integração numérica das equações do movimento e representados pelas curvas vermelhas, foram plotados juntamente dos gráficos de superfície de Variedades Invariantes correspondentes (Fig.(3.4)). Os ângulos da visualização de cada superfície foram levemente alterados para uma melhor visão do posicionamento dos resultados de integração numérica em cima das curvas.

Os resultados aqui expostos estão de acordo com a afirmação de que um movimento de característica não-linear iniciado na superfície de variedades invariantes se manterá nestas variedades pelo restante do tempo.

3.1.4 Análise da resposta residual de modos não-excitados

A próxima etapa é uma reprodução de resultados de Shaw e Pierre (1993), e ela é iniciada da mesma forma que a análise anterior: são realizadas integrações numéricas das equações de movimento originais. Porém, a análise aqui é feita com respeito às respostas residuais de modos não-excitados, obtidas a partir da análise modal linear e da não-linear. O objetivo desta análise é mostrar que, quando utilizadas coordenadas iniciais relativas ao modo linear em um modo não-linear, acontece uma resposta residual de grandeza maior do que a esperada.

Através da transformação de coordenadas da forma linear, obtém-se um conjunto de condições iniciais nas coordenadas físicas para integração das equações do movimento e seguinte obtenção das respostas: de excitação, referente ao modo acionado; e residual, referente ao modo não-excitado. Os dados de trajetória obtidos são então transformados, pela forma linear, de volta para as coordenadas modais. Enfim, os gráficos são plotados.

Em seguida, é realizada a transformação – agora na forma não-linear – das mesmas coordenadas modais, para integração e seguinte obtenção das respostas temporais. Após a aquisição de dados completa, os resultados são transformados de volta para as coordenadas modais e finalmente é feita a comparação entre as respostas temporais dos dois conjuntos. Vale ressaltar que os conjuntos de condições iniciais obtidos nas coordenadas físicas são diferentes entre si.

O intervalo de integração das simulações numéricas é novamente de 20 segundos. A demonstração e análise serão feitas inicialmente para o primeiro modo de vibração, e depois para o segundo.

Foram escolhidos valores de amplitude iguais a 0,5 com o intuito de diminuir o erro causado pela aproximação da matriz inversa não-linear, visto que, quanto menor o deslocamento inicial escolhido, menor é a amplitude dos termos não-lineares (como já abordado na Subseção 2.4.1). Foi determinado que a excitação do primeiro modo seria realizada por mudança na amplitude de u_1 , enquanto as outras coordenadas eram mantidas nulas. Pela transformação de coordenadas considerando apenas termos lineares, os valores obtidos de coordenadas físicas correspondentes foi $(x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}) = (0, 5, 0, -0, 5528, 0, 2299)$.

Para a transformação de coordenadas não-linear, ou seja, que considera os termos da matriz $\mathbf{M}_2(\mathbf{w})$, os valores obtidos para as coordenadas físicas iniciais correspondentes foram $(x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}) = (0, 5, 0, -0, 5487, 0, 2561)$.

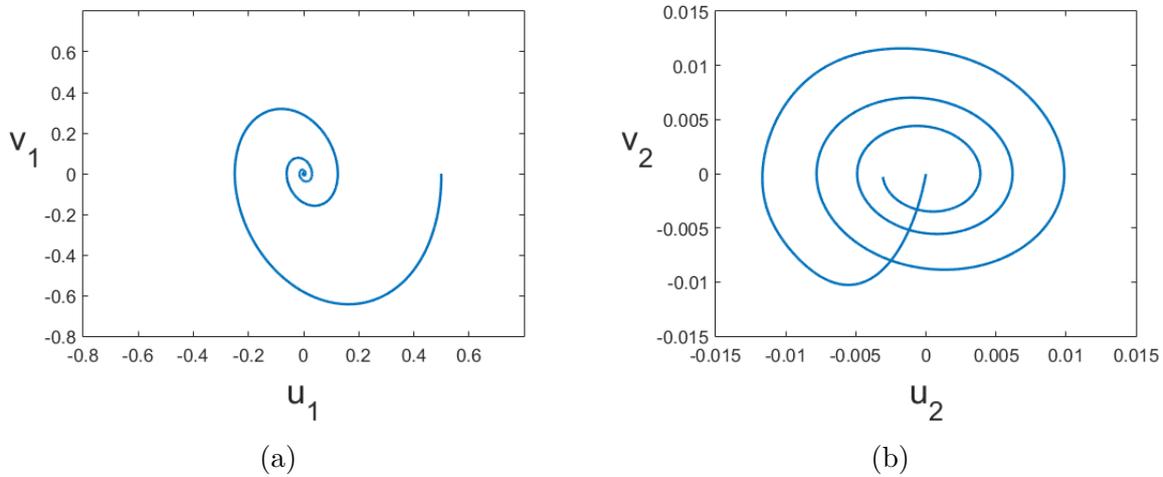


Figura 3.5 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o primeiro modo linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2 .

Os resultados da simulação numérica com as condições iniciais calculadas para o primeiro modo linear estão dispostos na Fig.(3.5). O movimento residual das coordenadas do segundo modo obtido é da ordem de 10^{-2} , enquanto os movimentos das coordenadas de primeiro modo estão uma ordem de grandeza acima.

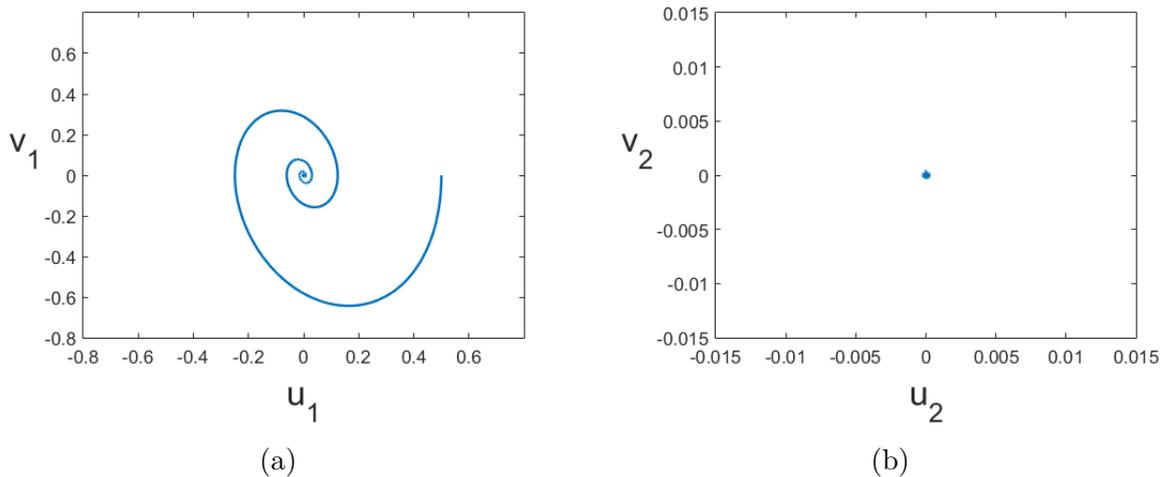


Figura 3.6 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o primeiro modo não-linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2 .

Os gráficos da Figura (3.6), que representam a trajetória das coordenadas modais a partir de condições iniciais calculadas para o primeiro modo não-linear, são mantidos na mesma escala que os da aquisição de dados anterior (Fig.(3.5)) para comparação dos resultados obtidos. Em ambos casos, observa-se que as trajetórias do modo excitado

são muito similares – se não idênticas. Contudo, o movimento residual do segundo par deslocamento-velocidade obtido a partir da transformação não-linear é de ordem de grandeza muito menor.

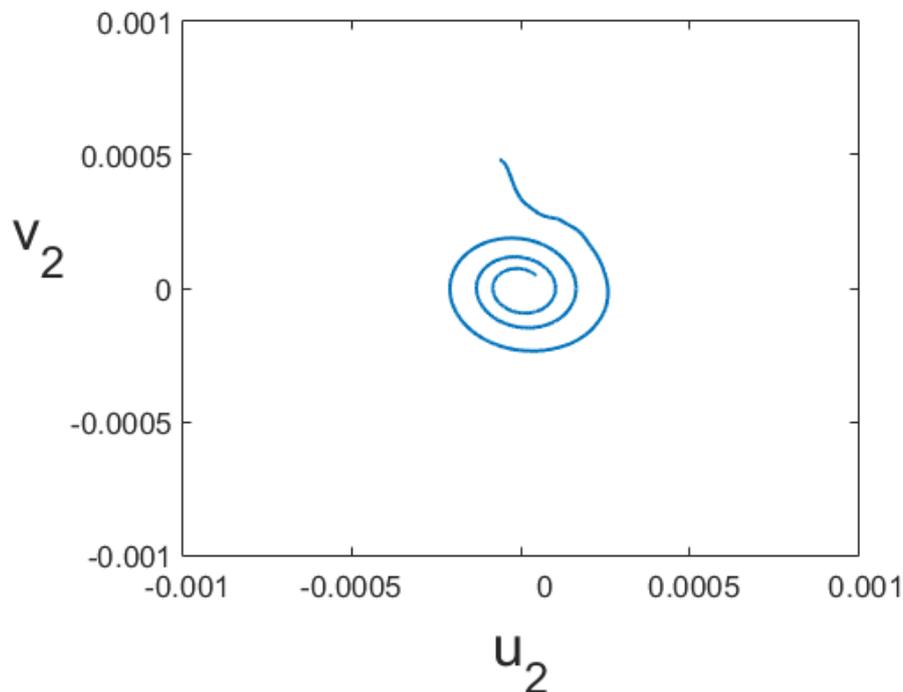


Figura 3.7 – Visualização aproximada do movimento residual de u_2 e v_2 no acionamento do primeiro modo, a partir da transformação não-linear de condições iniciais.

Como a inversão realizada é uma aproximação do que seria a matriz inversa real, existe um pequeno erro nos valores obtidos. As condições iniciais deste movimento haviam sido determinadas como nulas, mas a transformação realizada para o retorno às coordenadas modais causa um erro nos dados colhidos pela integração numérica via *MATLAB*[®]. Porém, este erro é evidente apenas nos valores próximos das condições iniciais, e tais valores não destoam da ordem de grandeza da resposta residual em geral (Fig.(3.6b)). Uma visualização aproximada desta curva é demonstrada na Fig.(3.7) e facilita a identificação do movimento como um de formato similar ao movimento residual linear, porém com ordem de grandeza menor.

O mesmo procedimento foi realizado para a tentativa de excitação pura do segundo modo, com a utilização de coordenadas iniciais obtidas para modos lineares e não-lineares, e amplitude do deslocamento u_2 equivalente a 0,5. O restante das coordenadas modais é mantido igual a zero. As coordenadas físicas iniciais calculadas para o modo linear foram $(x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}) = (0, 5, 0, 0, 4736, 0, 0701)$, enquanto para o modo normal não-linear foram $(x_{1_0}, y_{1_0}, x_{2_0}, y_{2_0}) = (0, 5, 0, 0, 4930, 0, 0767)$.

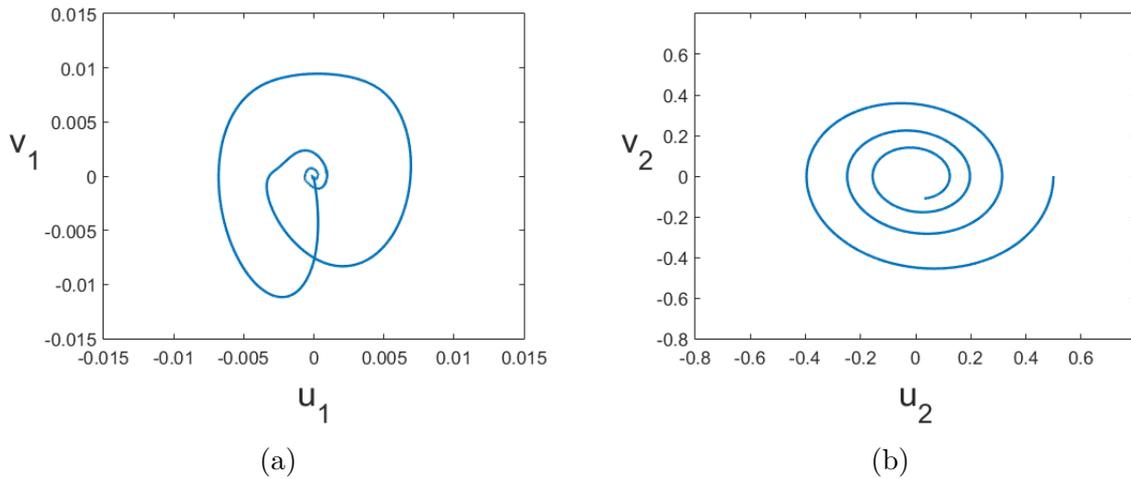


Figura 3.8 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o segundo modo linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2 .

Mais uma vez, a resposta residual a partir de coordenadas modais lineares tem uma ordem de grandeza de 10^{-2} (Fig.(3.8)), enquanto o movimento da coordenada modal excitada é de uma ordem de grandeza acima.

Em seguida, é realizada a integração numérica referente à excitação do segundo modo a partir do último conjunto de condições iniciais. O gráfico das respostas modais desta etapa são mais uma vez mantidos na mesma escala das respostas da etapa anterior, para simples comparação das ordens de grandeza.

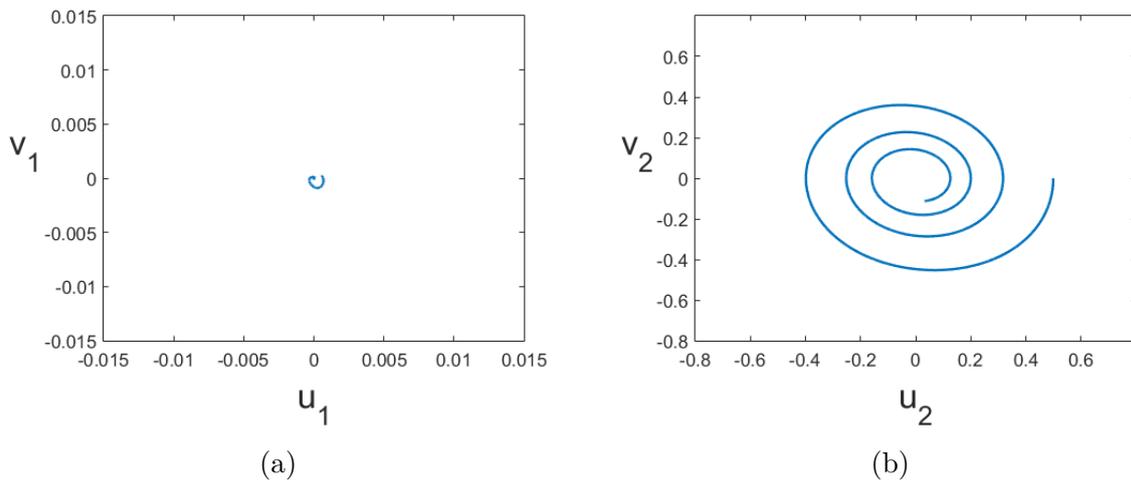


Figura 3.9 – Trajetória das coordenadas modais a partir de uma condição inicial calculada para o segundo modo não-linear. (a) Coordenadas modais u_1 e v_1 ; (b) Coordenadas modais u_2 e v_2 .

Visivelmente, a resposta residual da integração numérica a partir das coordenadas modais não-lineares (Fig.(3.9a)) é novamente muito inferior em ordem se comparada à trajetória residual da integração numérica anterior, enquanto os modos excitados possuem

trajetórias praticamente idênticas. A inversão neste caso também causa erro devido à aproximação da matriz, mas este erro é outra vez muito pequeno.

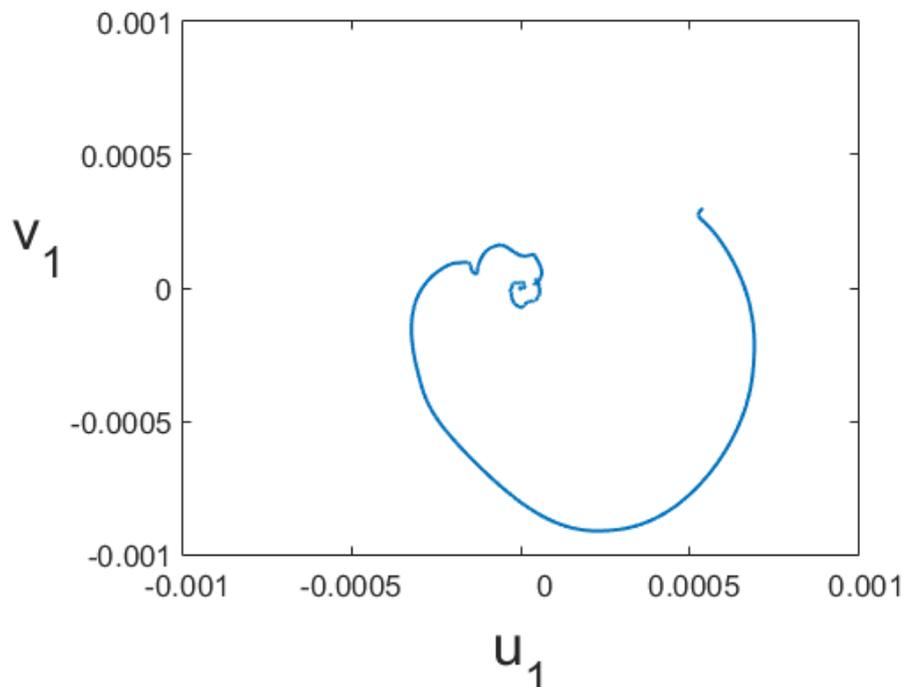


Figura 3.10 – Visualização aproximada do movimento residual de u_1 e v_1 no acionamento do segundo modo, a partir da transformação não-linear de condições iniciais.

A vista aproximada da resposta residual de u_1 e v_1 (Fig.(3.10)) permite mais uma vez a análise do formato da curva residual, que se mostra similar à forma da coordenada modal linear projetada no espaço de fase modal linear.

É coerente concluir que a utilização da análise modal linear se mostra ineficaz para este caso não-linear, pois ocorre certa amplificação do par de coordenadas do modo não-excitado quando utilizadas condições iniciais referentes a modos lineares. Como já mostrado, a resposta residual não-linear possui ordem de grandeza muito menor do que a ordem da resposta residual linear.

3.1.5 Comparação das respostas obtidas por coordenadas físicas e modais

Nesta Seção, a resposta do corpo de massa m_1 é obtida a partir de três maneiras diferentes, sendo elas as integrações numéricas:

- das equações do movimento nas coordenadas físicas;
- das equações do movimento nas coordenadas modais lineares;
- das equações do movimento nas coordenadas modais não-lineares.

Esta análise também é conduzida por Shaw e Pierre (1993), e visa comparar a resposta temporal das coordenadas físicas a partir das equações originais (dadas certas condições iniciais) com a resposta das simulações nas coordenadas modais (utilizadas as condições iniciais correspondentes). A equação de movimento da massa m_1 é escolhida para as transformações modais por ser a que possui o termo cúbico de rigidez.

A primeira etapa desta análise é a integração numérica das equações de movimento do sistema nas coordenadas físicas, com as condições iniciais adotadas. A segunda maneira consiste em utilizar as equações P_2 e Q_2 até seus termos lineares e substituí-las no lugar de x_2 e y_2 na primeira equação do movimento apresentada pela Eq.(3.3). Esta nova maneira de representação é apresentada pela Eq.(3.9).

$$\dot{v} = k(a_1u + a_2v) + c(b_1u + b_2v) - gu^3 - 2ku - cv \quad (3.9)$$

Aqui a variável v é substituída pela sua forma de derivada temporal da coordenada de posição (\dot{u}), para uma apresentação melhor das equações de movimento modais a serem integradas numericamente. Isto é feito primeiro para os coeficientes do primeiro modo e depois para os do segundo, enquanto as variáveis x_1 e y_1 são substituídas por seus u e v respectivos. Além disto, devem ser determinadas as condições iniciais correspondentes na coordenada modal para realização da integração numérica neste espaço de fase. Depois de obtidos os resultados, eles são transformados de volta para as coordenadas físicas e comparados à substituição direta. As equações obtidas para os dois modos são:

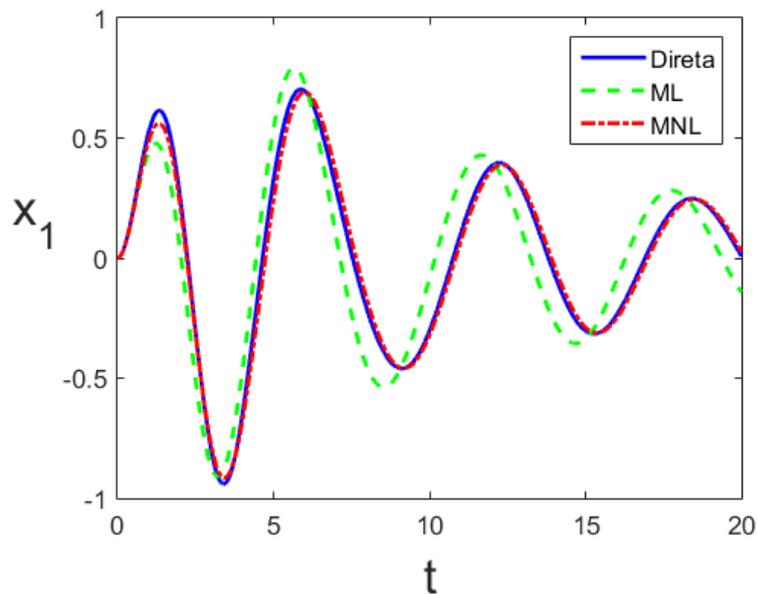
$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 0,752\dot{u}_1 + 2,968u_1 + 0,5u_1^3 &= 0 \\ \ddot{u}_2 + 0,148\dot{u}_2 + 1,011u_2 + 0,5u_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

A terceira e última parte da análise realizada nesta Seção é dada pela substituição das equações assintóticas P_2 e Q_2 até seus termos cúbicos na equação do movimento, representada pela primeira equação do sistema de Eqs.(3.4). Nela, $f_1 = \dot{v}$. Os coeficientes das coordenadas escravas e as variáveis x_1 e y_1 são substituídas da mesma maneira que na simulação modal linear, e as condições iniciais modais são obtidas pela transformação não-linear das coordenadas físicas escolhidas. Assim que obtidos os resultados da simulação numérica, os dados de deslocamento e velocidade modais são transformados de volta para as coordenadas físicas e comparados com os outros dois conjuntos de dados. As equações para os modos não-lineares resultantes são:

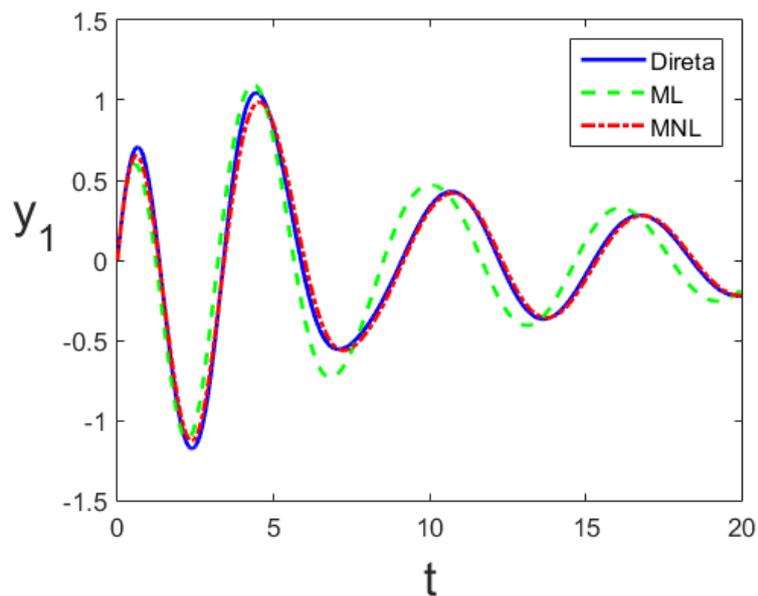
$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 0,752\dot{u}_1 + 2,968u_1 + 0,405u_1^3 - 0,011u_1^2\dot{u}_1 - 0,014u_1\dot{u}_1^2 + 0,009\dot{u}_1^3 &= 0 \\ \ddot{u}_2 + 0,148\dot{u}_2 + 1,011u_2 + 0,329u_2^3 + 0,0002u_2^2\dot{u}_2 - 0,242u_2\dot{u}_2^2 - 0,011\dot{u}_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

As condições iniciais foram escolhidas de maneira que os dois modos de vibração fossem excitados. Os valores iniciais nas coordenadas físicas foram $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}) =$

$(0, 0, 2, 0)$. Pela transformação linear de coordenadas, as condições iniciais obtidas foram $(u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}) = (-0,973, -0,159, 0,973, 0,159)$, enquanto pela transformação não-linear foram obtidos valores de $(u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}) = (-0,912, -0,235, 0,912, 0,235)$.



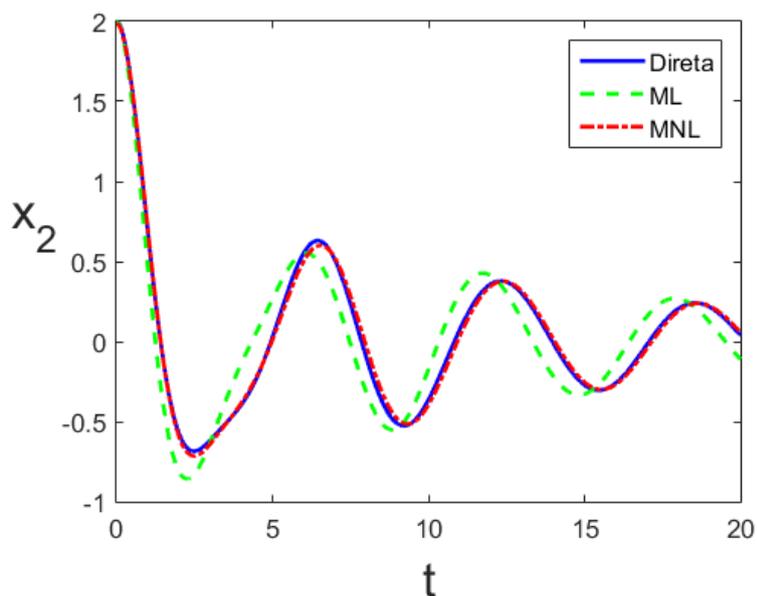
(a)



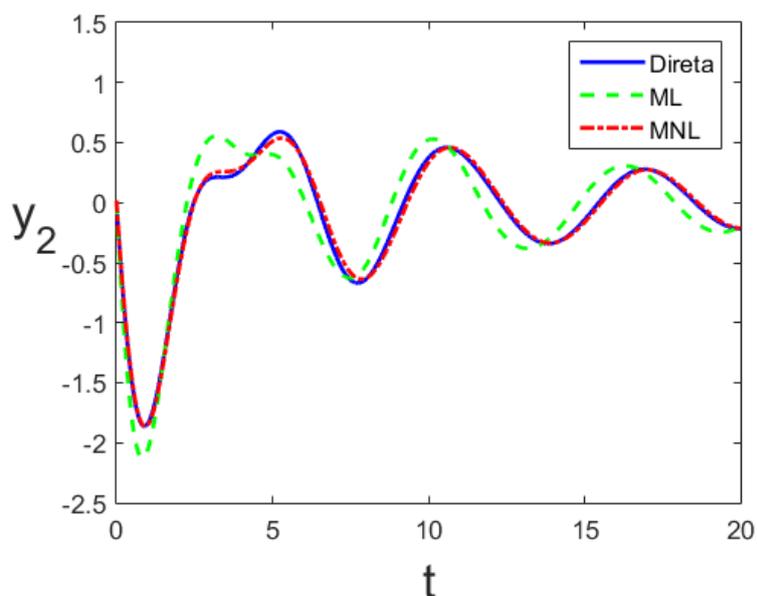
(b)

Figura 3.11 – Resultados de deslocamento e velocidade da massa m_1 por simulação numérica, com condições iniciais $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 2, 0)$. (a) Resultados para x_1 ; (b) Resultados para y_1 .

As três análises realizadas são apresentadas para cada coordenada física nas Figs.(3.11) e (3.12). A linha contínua azul representa a simulação direta das equações de movimento originais nas coordenadas físicas; a linha tracejada verde representa a simulação do movimento nos subespaços modais lineares; e a linha da forma traço-ponto vermelha representa a simulação do movimento nos subespaços modais não-lineares.



(a)



(b)

Figura 3.12 – Resultados de deslocamento e velocidade da massa m_2 por simulação numérica, com condições iniciais $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 2, 0)$. (a) Resultados para x_2 ; (b) Resultados para y_2 .

Pelos quatro gráficos obtidos, fica claro que a aproximação modal não-linear produz valores muito mais coerentes com os da simulação direta do movimento deste sistema não-linear. O termos de ordem cúbica das equações modais são de extrema importância para esta análise, e comprovam que a análise modal linear de um sistema não-linear pode ser ineficaz.

3.2 IMPLEMENTAÇÃO DO *SHOOTING METHOD*

O método das Variedades Invariantes, apesar de se provar excelente para o nosso sistema de referência, se torna inviável para sistemas com muitos graus de liberdade por ser muito trabalhoso. Métodos analíticos geralmente possuem esta dificuldade, sendo preferível a utilização de métodos numéricos mais adaptáveis para diferentes sistemas e graus de liberdade. A aplicação do *Shooting Method* tem como objetivo comparar os resultados de soluções periódicas obtidas com as superfícies de Variedades Invariantes encontradas pelo método analítico, com o intuito de mais uma vez comprovar a definição de Variedades Invariantes e a importância da análise modal não-linear; e permitir a aplicação de um método mais prático.

Pelo fato deste método ser aplicado a sistemas conservativos, utilizaremos o exemplo de Shaw e Pierre (1993) com a exclusão dos termos dissipativos, resultando no sistema discreto da Fig.(3.13). Nesta seção, primeiramente, são obtidas as superfícies dos dois modos não-lineares do sistema pelo método analítico de Variedades Invariantes, seguido da aplicação do método numérico com seis conjuntos de chutes de condições iniciais e período para obtenção de modos não-lineares, e uma posterior comparação dos espaços de fase tridimensionais com as superfícies.

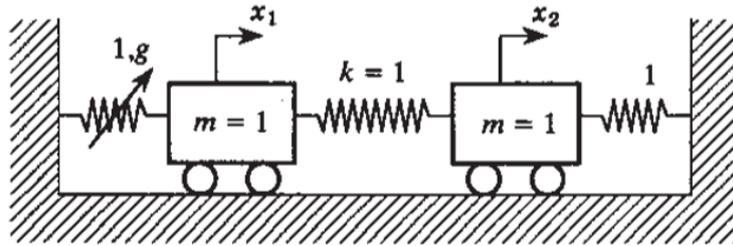


Figura 3.13 – Modelo de referência no sistema conservativo de Shaw e Pierre (1993).

As Equações do movimento do sistema conservativo são representadas na Eq.(3.12).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, & \dot{y}_1 = f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = -gx_1^3 - 2kx_1 + kx_2 \\ \dot{x}_2 = y_2, & \dot{y}_2 = f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = kx_1 - 2kx_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Em termos de coordenadas mestras e escravas, as equações do movimento para este sistema são dadas pela Eq.(3.13).

$$\begin{cases} \dot{u} = v, & \dot{v} = f_1 = -gu^3 - 2ku + kP_2 \\ \dot{P}_2 = Q_2, & \dot{Q}_2 = f_2 = ku - 2kP_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

Os coeficientes necessários para a construção das superfícies foram retirados de Shaw e Pierre (1993) e foram obtidos da maneira explicada na subseção 2.4.1 e realizada

na subseção 3.1.2, quando o método foi aplicado para o sistema não-conservativo. No artigo de referência os valores dos coeficientes para este sistema conservativo são dados em termos de g e k , que já foram previamente determinados como $g = 0,5$ e $k = 1$. Os coeficientes são apresentados na Tab.(3.2).

Tabela 3.2 – Coeficientes de Expansão de Taylor de terceira ordem para o sistema conservativo.

Coeficiente	Primeiro Modo	Segundo Modo
a_1	1	-1
a_2	0	0
a_3	0	0
a_4	0	0
a_5	0	0
a_6	0,1667	0,1923
a_7	0	0
a_8	0,2500	0,0577
a_9	0	0
b_1	0	0
b_2	1	-1
b_3	0	0
b_4	0	0
b_5	0	0
b_6	0	0
b_7	0	0,2308
b_8	0	0
b_9	0,2500	0,0577

As superfícies são obtidas pela criação de uma malha com intervalos de valores x_1 e y_1 entre 2 e -2, valores de incremento iguais a 0,1, e a aplicação destes valores nas equações de coordenadas escravas (Eq.(2.14) até ordem cúbica) para o primeiro e segundo modos. Elas estão representadas na Fig.(3.14).

Para dar início à aplicação do *Shooting Method*, as variáveis e equações são separadas na forma de espaço de estado, de forma que

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_2 - 2x_1 - 0,5x_1^3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

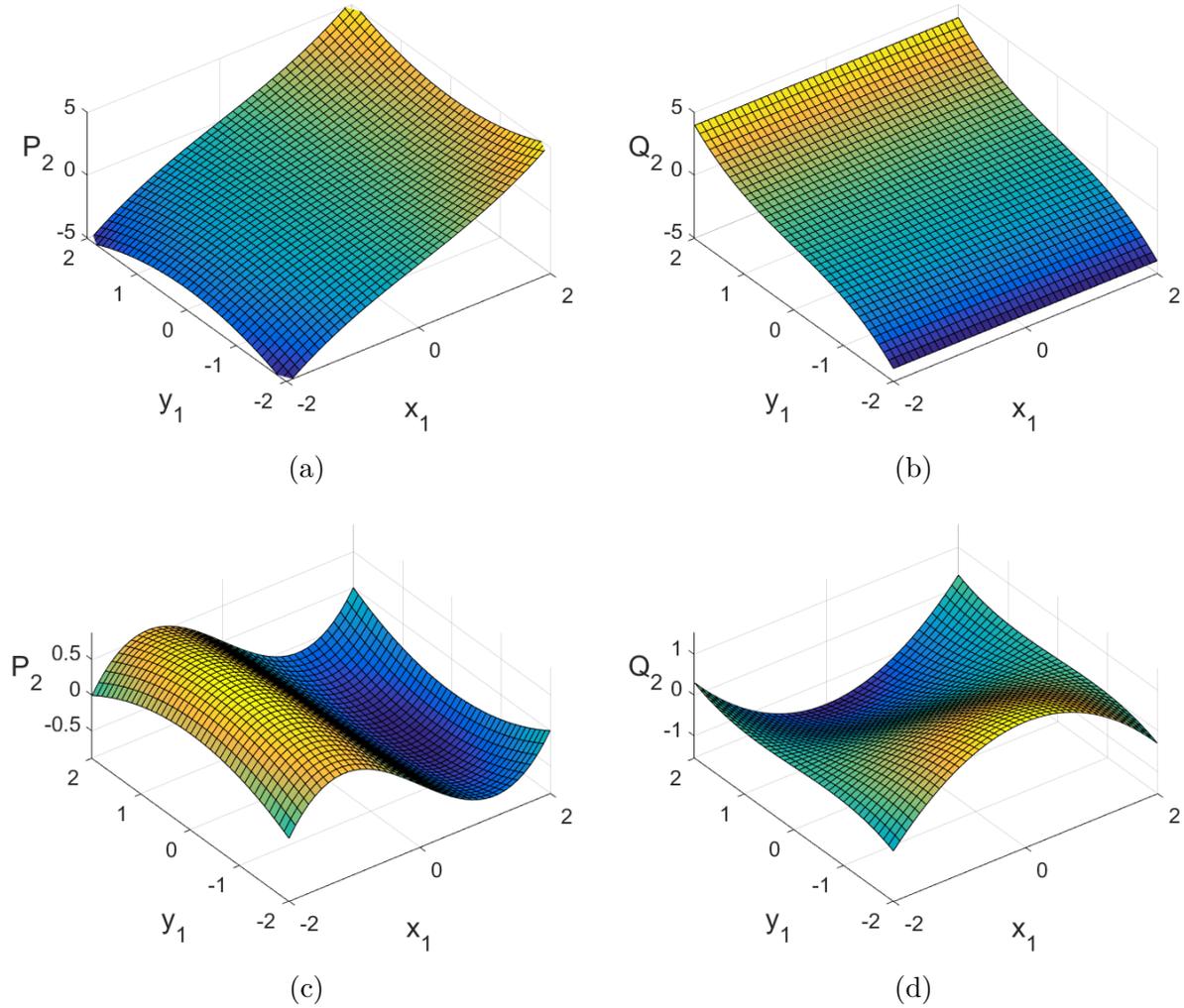


Figura 3.14 – Superfícies de Variedades Invariantes do sistema conservativo. (a) P_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (b) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o primeiro modo não-linear; (c) P_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear; (d) Q_2 vs. (x_1, y_1) para o segundo modo não-linear.

de forma que $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z})$. As derivadas do vetor \mathbf{H} em relação a T , que são o próprio vetor $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ no instante $t = T$, são dadas pela Eq.(3.16) e obtidas pela integração das equações do movimento do sistema via *MATLAB*[®], por utilização da função *ode45*.

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T}(\mathbf{z}_0, T) = \begin{bmatrix} y_1(T, \mathbf{z}_0) \\ y_2(T, \mathbf{z}_0) \\ x_2(T, \mathbf{z}_0) - 2x_1(T, \mathbf{z}_0) - 0,5x_1^3(T, \mathbf{z}_0) \\ x_1(T, \mathbf{z}_0) - 2x_2(T, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Para a resolução da integração numérica da derivada de \mathbf{z} em relação a \mathbf{z}_0 , é preciso determinar a matriz 4 x 4 da derivada de $\mathbf{g}(\mathbf{z})$, conforme apresentada na Eq.(3.17). Nesta matriz, o termo x_1 muda para cada instante de tempo de acordo com o estado do sistema. De forma a simplificar o cálculo, o mesmo passo de integração deve ser utilizado na solução das equações do movimento, para determinação de \mathbf{H} ; e da Eq.(2.37), para as derivadas

de \mathbf{z} em relação a \mathbf{z}_0 .

$$\left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 - 1,5x_1^2 \Big|_{\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Com a determinação das matrizes das Eqs.(3.14) a (3.17), o *Shooting Method* pode então ser empregado para uma série de conjuntos de condições iniciais e período. Deve-se então definir uma forma de chute dos valores que facilite a convergência do método.

Em um sistema de dois graus de liberdade, o sistema linear subjacente dos *NNMs* possui dois modos lineares. Considerando os autovalores e autovetores do sistema linear (Eq.(3.12) ignorando o termo cúbico de rigidez), o chute inicial é encontrado. Sabe-se que a frequência (raiz do autovalor) do primeiro modo linear é $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$, e do segundo modo é $\omega_2 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$. Com esses valores é possível encontrar os períodos do movimento do sistema linear, que são $T_1 = 6,29 \text{ s}$ e $T_2 = 3,623 \text{ s}$ para o primeiro e segundo modos, respectivamente. Além disso, os autovetores do primeiro modo são $Z^{(1)} = [1 \quad 1]^*$, enquanto do segundo são $Z^{(2)} = [1 \quad -1]^*$. Os primeiros valores de chute de cada conjunto são então definidos com o auxílio dos períodos e autovetores determinados.

A Figura (3.15) apresenta uma demonstração da aplicação do método para um chute de condições iniciais e período no segundo modo de vibração, em que as linhas tracejadas apresentam soluções periódicas obtidas durante o processo de convergência e as linhas sólidas apresentam a solução final obtida. O valor de tolerância utilizado para a convergência do método para este conjunto e os demais foi $\epsilon = 0,01$, e aqui o chute inicial foi $x_1 = 0,4$, $x_2 = -0,8$, $y_2 = 0$ e $T = 3,7 \text{ s}$. O chute escolhido não tem uma razão entre deslocamentos próxima de $1 : -1$ para deixar mais evidente o processo iterativo. Após 51 iterações, a tolerância de convergência foi atingida e os valores encontrados foram $x_1 = 0,7268$, $x_2 = -0,6573$, $y_2 = 0,0010$ e $T = 3,5680 \text{ s}$. Este é um dos conjuntos obtidos para a comparação com as superfícies de Variedades Invariantes do segundo modo. Nota-se que a cada iteração os valores iniciais de x_1 , x_2 e y_2 variam juntamente do período da oscilação, enquanto o valor inicial de y_1 é sempre zero, como estipulado pela condição de fase $h(\mathbf{z}_{p0})$.

A Tabela (3.3) apresenta o conjunto de dados obtidos para o primeiro modo de vibração do sistema de dois graus de liberdade estudado, obtidos pelo *Shooting Method*. Os cinco conjuntos de dados obtidos após o primeiro, que foi baseado no primeiro modo linear, são obtidos a partir de chutes com períodos menores e maiores valores principalmente de deslocamento. É perceptível que a relação entre os deslocamentos do primeiro e do segundo graus de liberdade vai mudando, enquanto para o modo linear ela permaneceria 1:1 ao longo de todos conjuntos. A última coluna da tabela representa a variação percentual dos valores de razão entre os deslocamentos.

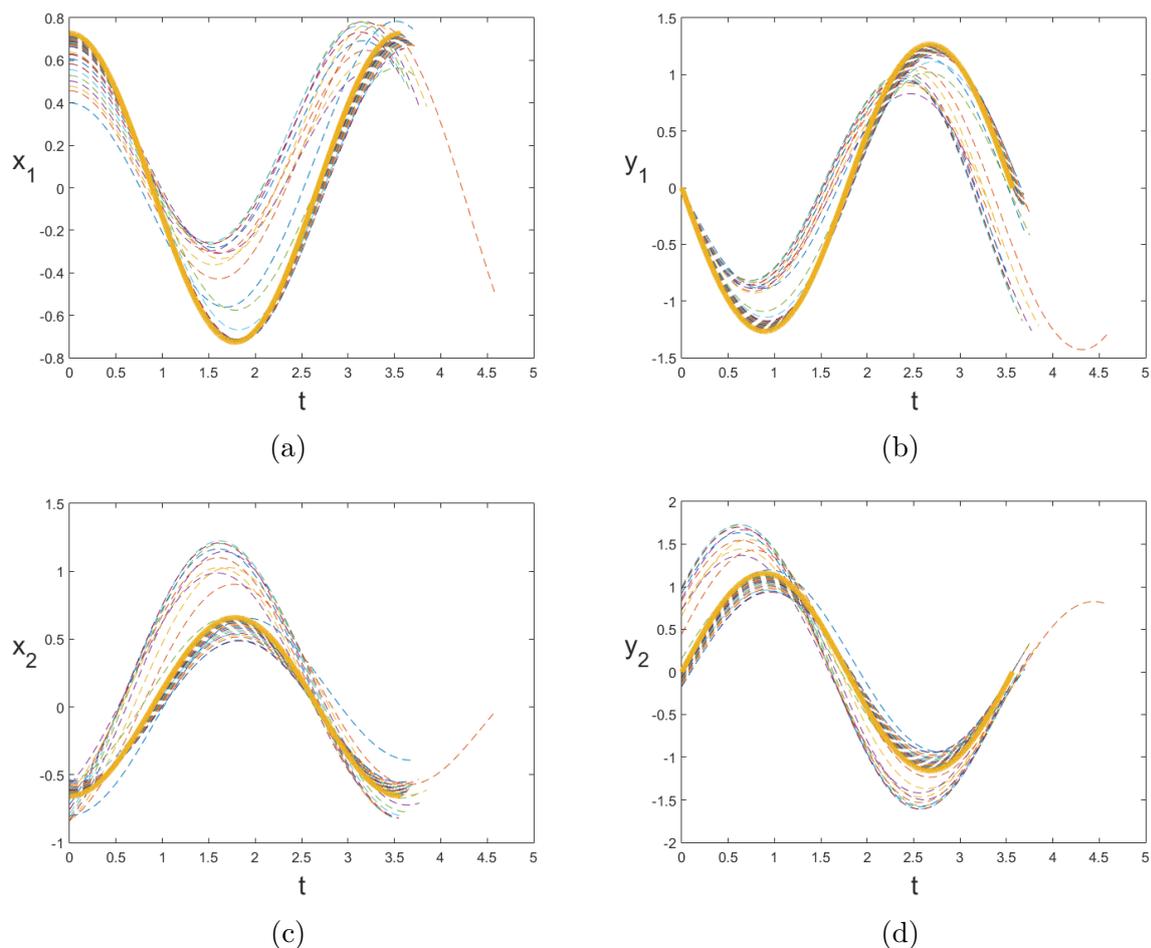


Figura 3.15 – Demonstração da convergência do método para um conjunto no segundo modo. Linha tracejada: soluções periódicas para as iterações de condições iniciais adotadas; Linha contínua: modo identificado após convergência. (a) x_1 vs. t ; (b) y_1 vs. t ; (c) x_2 vs. t ; (d) y_2 vs. t .

Tabela 3.3 – Conjuntos de dados obtidos pelo *Shooting Method* para o primeiro modo.

Primeiro Modo					
Conjunto	x_{10}	x_{20}	y_{20}	T (s)	Varição 1 : 1 (%)
1	0,1250	0,1250	0,0006	6,2743	-
2	0,6813	0,7360	0,0003	6,0397	8,03
3	0,9499	1,1000	0,0073	5,8517	15,80
4	1,1207	1,3784	0,0018	5,7200	22,99
5	1,2724	1,6618	-0,0047	5,6152	30,60
6	1,4946	2,1510	-0,0146	5,4560	43,92

Os seis conjuntos de valores obtidos de condições iniciais e de período, juntamente do valor de velocidade inicial do primeiro grau de liberdade y_{10} nulo, permitem a integração numérica das equações do movimento, e a representação de seus espaços de fase tridimensionais com as superfícies de Variedades Invariantes correspondentes ao primeiro modo do sistema conservativo. Os espaços de fase obtidos correspondentes ao deslocamento e velocidade do segundo grau de liberdade estão representadas pelas curvas vermelhas nas Figs.(3.16) e (3.18), respectivamente.

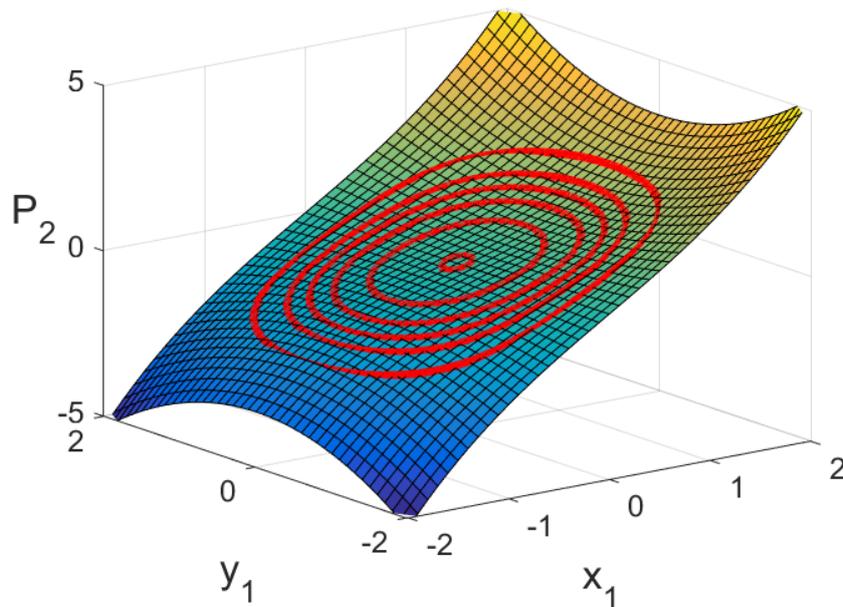


Figura 3.16 – Espaços de fase tridimensionais de x_2 (P_2) em relação a x_1 e y_1 no primeiro modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.

Para uma melhor visualização do posicionamento das trajetórias em relação à superfície do deslocamento do segundo grau de liberdade, a Fig.(3.17) apresenta uma vista lateral do conjunto, na forma de um gráfico de P_2 em função de x_1 .

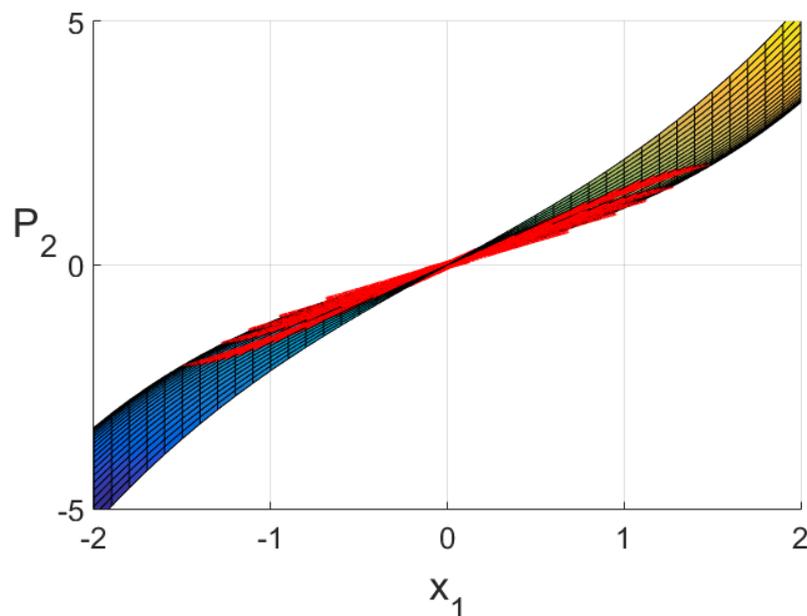


Figura 3.17 – Visualização lateral dos espaços de fase de x_2 com relação à sua superfície no primeiro modo.

Observa-se que as trajetórias de x_2 acompanham bem a curvatura da superfície. As possíveis diferenças entre os conjuntos podem estar sendo proporcionadas pelas aproxima-

ções assintóticas feitas no método das Variedades Invariantes e pela tolerância utilizada no método numérico para a determinação das condições iniciais e período.

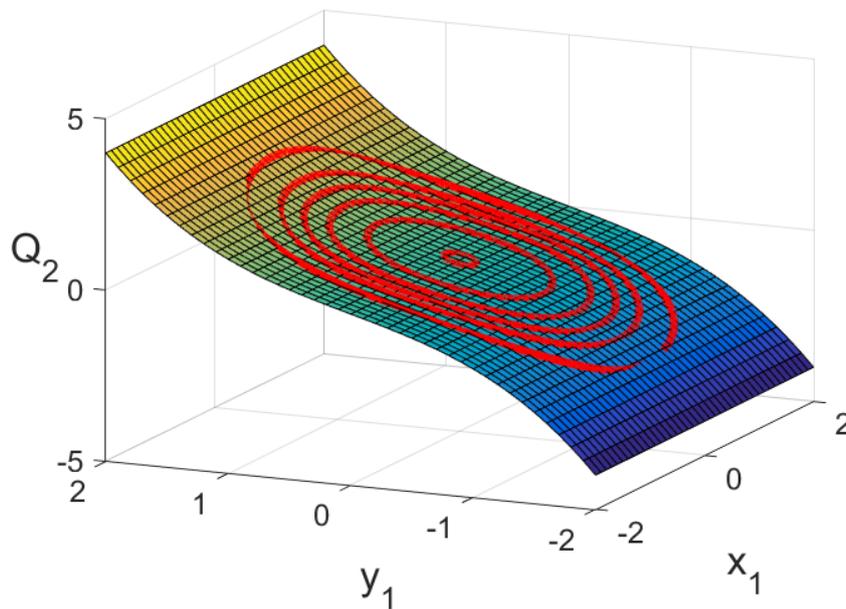


Figura 3.18 – Espaços de fase tridimensionais de y_2 (Q_2) em relação a x_1 e y_1 no primeiro modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.

A Figura (3.19) apresenta a vista lateral da superfície de y_2 , também com o intuito de proporcionar uma melhor visualização das trajetórias com relação à superfície.

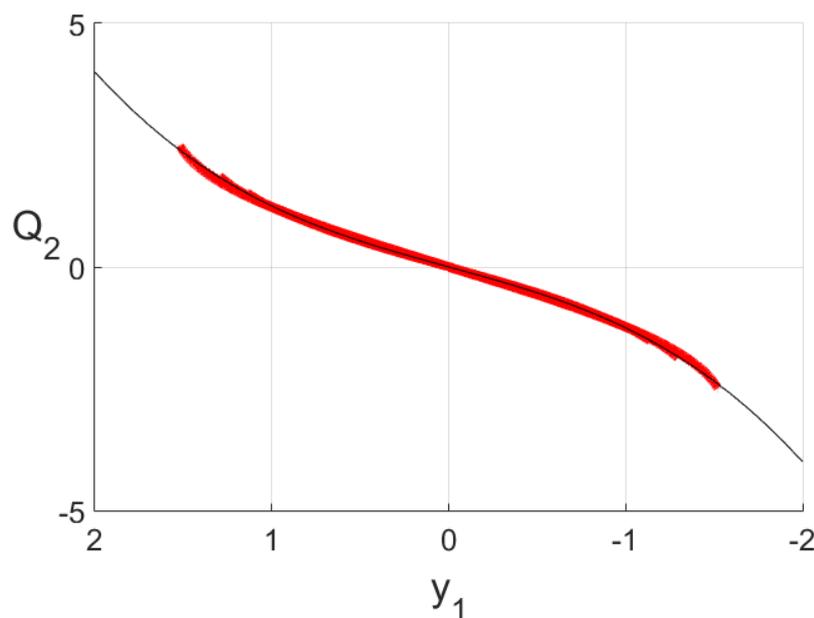


Figura 3.19 – Visualização lateral dos espaços de fase de y_2 com relação à sua superfície no primeiro modo.

A Tabela (3.4) apresenta o conjunto de dados obtidos pelo *Shooting Method* para o

segundo modo de vibração do sistema estudado e a variação percentual da razão entre os deslocamentos. As curvas vermelhas apresentadas nas Figs.(3.20) e (3.22) representam os espaços de fase de x_2 e y_2 , respectivamente.

Tabela 3.4 – Conjuntos de dados obtidos pelo *Shooting Method* para o segundo modo.

Segundo Modo					
Conjunto	x_{10}	x_{20}	y_{20}	T (s)	Varição 1 : -1 (%)
1	0,2125	-0,2125	0	3,6230	-
2	0,5016	-0,4784	0,0029	3,5994	4,85
3	0,7268	-0,6573	0,0010	3,5680	10,57
4	0,8009	-0,7079	-0,0018	3,5539	13,14
5	0,9469	-0,7972	-0,0017	3,5218	18,78
6	1,0353	-0,8439	-0,0023	3,4993	22,68

Neste modo a razão entre deslocamentos vai novamente se distanciando da razão do modo linear, que neste caso é de 1 : -1, à medida que a energia do sistema aumenta.

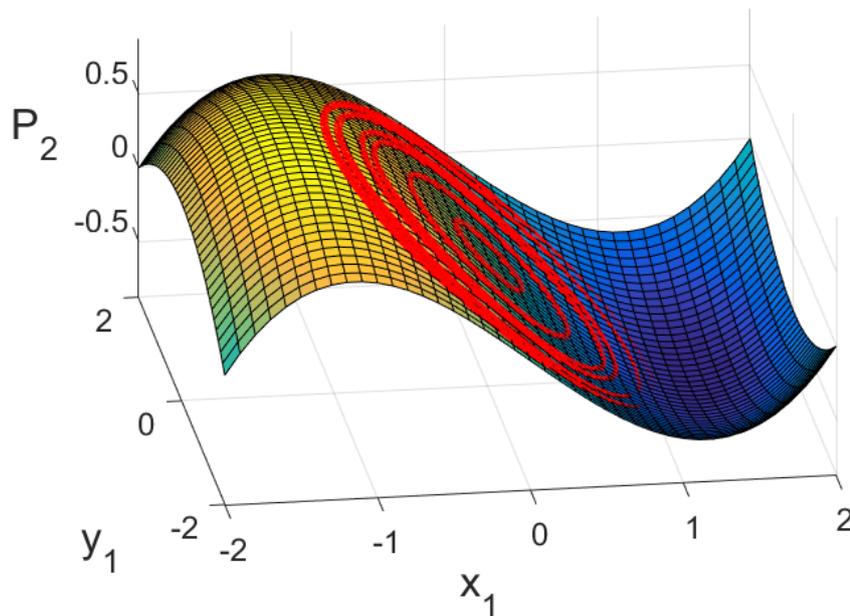


Figura 3.20 – Espaços de fase tridimensionais de x_2 (P_2) em relação a x_1 e y_1 no segundo modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.

Foram produzidas vistas laterais dos gráficos comparativos também para o segundo modo, para melhor visualização do posicionamento das curvas em relação às superfícies. As formas diferentes de visualização das superfícies de x_2 e y_2 estão dispostas nas Figs.(3.21) e (3.23), respectivamente.

Para o segundo modo, os resultados obtidos do espaço de fase tridimensional para os conjuntos x_1, y_1, x_2 , e x_1, y_1, y_2 pelo método numérico também são coerentes com suas respectivas superfícies. A proximidade das soluções de ambos métodos entre si é

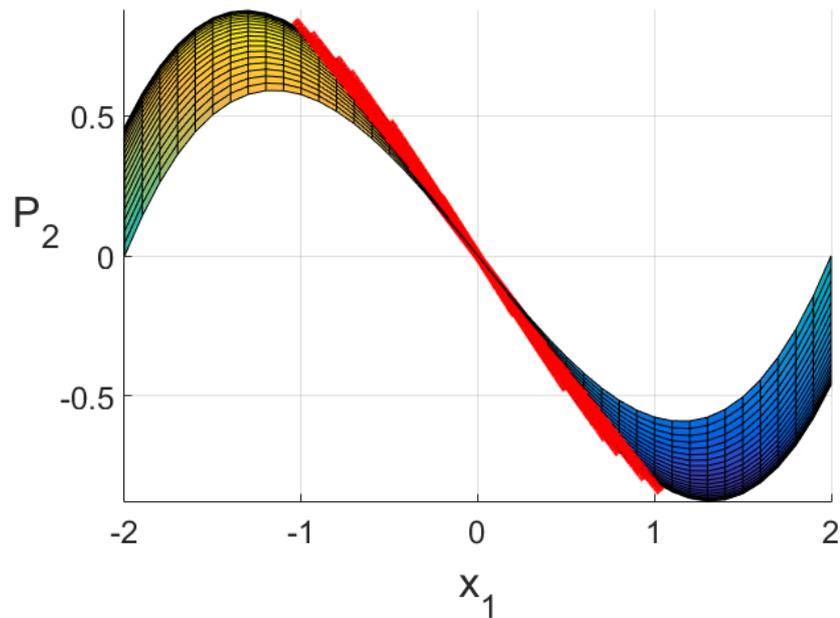


Figura 3.21 – Visualização lateral dos espaços de fase de x_2 com relação à sua superfície no segundo modo.

extremamente satisfatória, garantindo a possibilidade de utilização dos dois na avaliação de modos não-lineares. Como já destacado na comparação de soluções do primeiro modo, as possíveis diferenças entre as soluções deste modo podem estar acontecendo devido às aproximações assintóticas realizadas no método das Variedades Invariantes e à tolerância aplicada no método numérico.

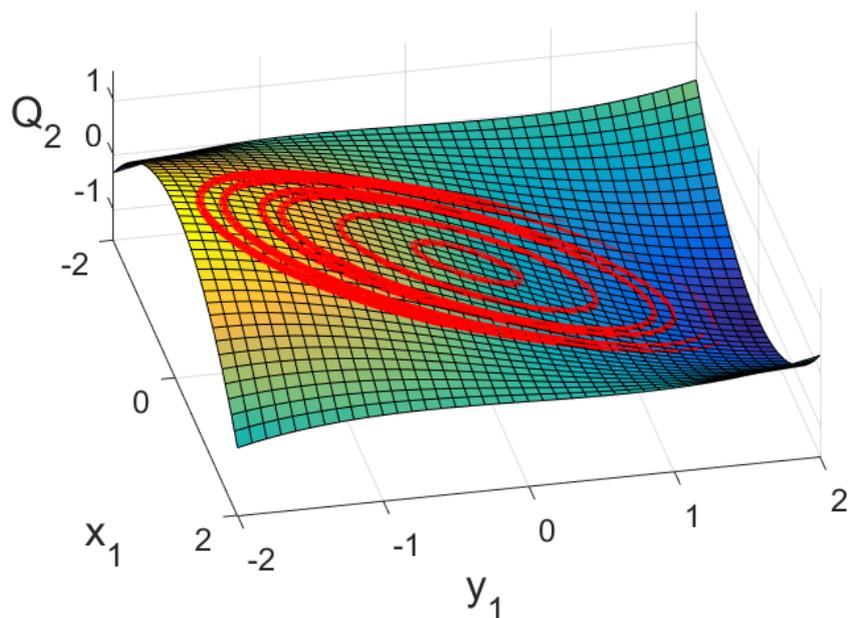


Figura 3.22 – Espaços de fase tridimensionais de y_2 (Q_2) em relação a x_1 e y_1 no segundo modo para o sistema conservativo, comparados com sua superfície de Variedades Invariantes correspondente.

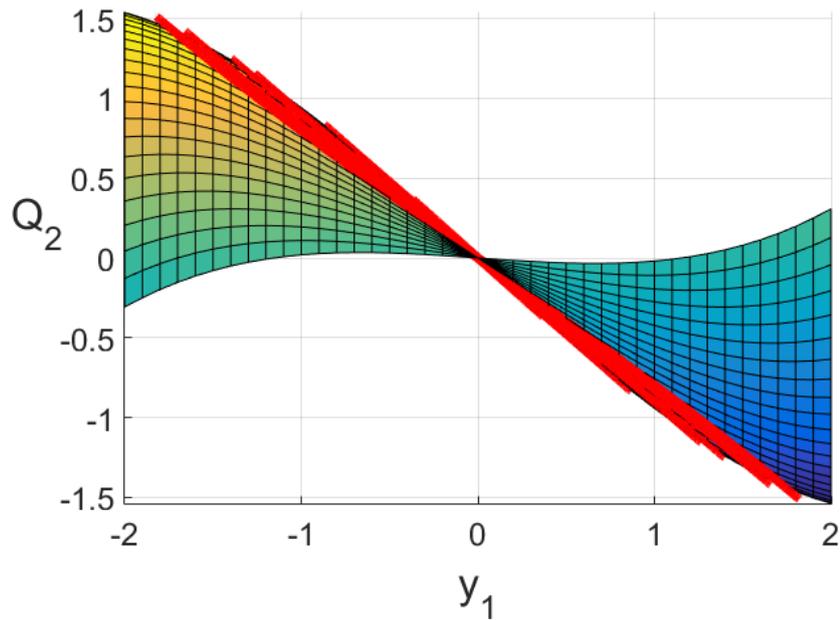


Figura 3.23 – Visualização lateral dos espaços de fase de y_2 com relação à sua superfície no segundo modo.

A rotina computacional montada para a obtenção de modos não-lineares se mostrou capaz e deve ser aplicável a outros sistemas dinâmicos, de diferentes graus de liberdade. A partir da identificação dos modos pelo *Shooting Method*, pode-se aplicar um método de continuação para a obtenção de um número muito maior de conjuntos e o cálculo de valores de frequência e energia do sistema para construção do gráfico *FEP*, que permitirá avaliar diversos cenários de ressonância interna em sistemas de alta energia.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi implementado com sucesso o Método das Variedades Invariantes para obtenção dos modos de vibração não-lineares. Os resultados obtidos foram compatíveis com os da literatura de referência (SHAW; PIERRE, 1993), tanto no que diz respeito à obtenção das superfícies de Variedades Invariantes, quanto às respostas temporais, sejam elas pela integração das equações do movimento nas coordenadas físicas ou modais.

Os resultados aqui apresentados permitem concluir que o estudo da análise modal não-linear é muito importante para a representação de sistemas dinâmicos reais. A definição de Variedades Invariantes e a aplicação do método foram determinantes para comprovar a ineficácia da análise modal linear no sistema não-linear de referência, assim como foram essenciais para assegurar que aproximações lineares de condições iniciais impostas a um sistema podem, de maneira intensa e inesperada, excitar outros modos não-lineares.

A aplicação de um método numérico como o *Shooting Method* para a determinação de soluções periódicas permitiu também a obtenção dos modos normais não-lineares, e assim observou-se a concordância entre os dois métodos utilizados e verificou-se novamente a veracidade e exatidão da definição de Variedades Invariantes e de seu método analítico. Vale ressaltar que o método analítico é muito trabalhoso e, por conseguinte, inviável para sistemas com muito graus de liberdade. Contudo, o numérico é aplicável a diferentes sistemas dinâmicos e graus de liberdade, necessitando apenas da alteração do valor de graus de liberdade n e das funções a serem integradas via *ode45* no código de programação *MATLAB*[®].

Uma sugestão para trabalhos futuros é a implementação do método de continuação numérica após a aplicação do *Shooting Method*, de forma a obter inúmeros conjuntos de condições iniciais e período e transformá-los em pontos num gráfico de frequência-energia, para subseqüente avaliação de ressonâncias internas a altas energias.

Referências

- BOIVIN, N. et al. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, v. 2, n. 182, p. 336–341, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15.
- BOIVIN, N. et al. Non-linear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds. In: *Proceedings of the AIAA Dynamics Specialists Conference*. Hilton Head, SC: [s.n.], 1994. (AIAA-94-1672), p. 45–58. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.
- GAVASSONI, E. *Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore*. 2012. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Citado na página 16.
- GENDELMAN, O. V. Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 37, n. 2, p. 115–128, 2004. Nenhuma citação no texto.
- JIANG, D. *Nonlinear modal analysis based on invariant manifolds-Application to rotating blade systems*. 2004. Tese (Doutorado). Nenhuma citação no texto.
- JIANG, D. et al. The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 729–746, 2005. Citado na página 15.
- KERSCHEN, G. et al. Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, SIAM, v. 66, n. 2, p. 648–679, 2005. Citado na página 9.
- KERSCHEN, G. et al. Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical systems and Signal Processing*, v. 23, p. 170–194, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 2, 8, 9 e 16.
- KERSCHEN, G. et al. *Modal analysis of nonlinear mechanical systems*. [S.l.]: Springer, 2014. v. 555. Citado na página 15.
- KERSCHEN, G. et al. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical systems and Signal Processing*, v. 20, p. 505–592, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 1, 4, 5 e 9.
- KING, M.; VAKAKIS, A. F. An energy-based approach to computing resonant nonlinear normal modes. 1996. Nenhuma citação no texto.
- KURT, M. et al. Effect of 1: 3 resonance on the steady-state dynamics of a forced strongly nonlinear oscillator with a linear light attachment. *Archive of Applied Mechanics*, Springer, v. 84, n. 8, p. 1189–1203, 2014. Citado na página 9.

- LEE, Y. S. et al. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 204, n. 1-2, p. 41–69, 2005. Citado na página 9.
- LI, X. et al. Non-linear normal modes and their bifurcation of a two dof system with quadratic and cubic non-linearity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 41, n. 9, p. 1028–1038, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15.
- MAZZILLI, C. E. et al. Non-linear normal modes of a simply supported beam: continuous system and finite-element models. *Computers & structures*, Elsevier, v. 82, n. 31-32, p. 2683–2691, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15.
- MIKHLIN, Y.; MYTROKHIN, S. Nonlinear vibration modes of the double tracked road vehicle. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, v. 46, p. 581–596, 2008. Nenhuma citação no texto.
- MONTH, L. A.; RAND, R. H. An application of the poincaré map to the stability of nonlinear normal modes. 1980. Citado na página 9.
- NAYFEH, A. et al. On nonlinear normal modes of systems with internal resonance. *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF VIBRATION AND ACOUSTICS*, American Society of Mechanical Engineers, v. 118, p. 340–345, 1996. Nenhuma citação no texto.
- NAYFEH, A.; NAYFEH, S. On nonlinear modes of continuous systems. 1994. Citado na página 15.
- PAK, C. H. On the coupling of non-linear normal modes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 41, p. 716–725, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 2, 8 e 9.
- PEETERS, M. et al. Nonlinear normal modes, part ii: Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical systems and signal processing*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 195–216, 2009. Citado 5 vezes nas páginas iii, 9, 16, 17 e 18.
- PESHECK, E. *Reduced order modeling of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and invariant manifolds*. 2000. Tese (Doutorado) — University of Michigan. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 8.
- RENSON, L. *Nonlinear modal analysis of conservative and nonconservative aerospace structures*. 2014. Tese (Doutorado) — Ph. D. thesis, Université de Liège, Liège. Citado na página 9.
- RENSON, L.; KERSCHEN, G. Nonlinear normal modes of nonconservative systems. In: *Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 1*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 189–202. Citado 3 vezes nas páginas 2, 9 e 17.
- RENSON, L. et al. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 364, p. 177–206, 2016. Citado na página 9.
- ROSENBERG, R. M. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, v. 9, p. 155–242, 1966. Citado 4 vezes nas páginas 1, 4, 8 e 16.
- SHAW, S. W.; PIERRE, C. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, v. 150, n. 1, p. 170–173, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 1, 5 e 7.

SHAW, S. W.; PIERRE, C. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 164, n. 1, p. 85–124, 1993. Citado 11 vezes nas páginas iii, iv, 2, 6, 23, 25, 27, 30, 35, 38 e 48.

TOUZÉ, C. A normal form approach for nonlinear normal modes. 2003. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15.

TOUZÉ, C.; THOMAS, O. Determination of non-linear normal modes for conservative systems. In: *Proceedings of the 9th. International Congress on Sound and Vibration*. Orlando, FL: [s.n.], Julho 2002. Nenhuma citação no texto.

TSAKIRTZIS, S. et al. Complex dynamics and targeted energy transfer in linear oscillators coupled to multi-degree-of-freedom essentially nonlinear attachments. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 48, n. 3, p. 285–318, 2007. Citado na página 17.

VAKAKIS, A. F.; GENDELMAN, O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part ii—resonance capture. *J. Appl. Mech.*, v. 68, n. 1, p. 42–48, 2000. Nenhuma citação no texto.

VAKAKIS, A. F. et al. *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 156. Citado 3 vezes nas páginas 2, 8 e 16.

VAKAKIS, A. F.; RAND, R. Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system—i. low energies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 861–874, 1992a. Nenhuma citação no texto.

VAKAKIS, A. F.; RAND, R. Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system—ii. high energies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 875–888, 1992b. Nenhuma citação no texto.