



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**ANÁLISE COMPARATIVA DOS CRITÉRIOS
MULTIAXIAIS DE FINDLEY E SUSMEL &
LAZZARIN**

Pedro Braga Plá

Brasília, Junho de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

ANÁLISE COMPARATIVA DOS CRITÉRIOS MULTIAXIAIS DE FINDLEY E SUSMEL & LAZZARIN

PEDRO BRAGA PLÁ

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

BANCA EXAMINADORA:

**Prof. José Alexandre Araújo (ENM - UnB)
(Orientador)**

**Prof. Luis Augusto Veloso (ENM - UnB)
(Examinador Interno)**

**Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira (ENM - UnB)
(Examinador Interno)**

BRASÍLIA/DF, JUNHO DE 2018.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações Iniciais e Motivação	1
1.2 Objetivos	1
2 CONCEITOS BÁSICOS	3
2.1 Tensor de Tensões de Cauchy	3
2.2 Carregamentos Uniaxiais	3
2.3 Carregamentos Multiaxiais	4
3 FUNDAMENTOS DE FADIGA	7
3.1 Mecanismos de Falha para Fadiga	7
3.2 Abordagem Tensão-Vida	7
3.2.1 Curva S-N	7
3.2.2 Efeito de Tensão Média	9
4 FADIGA MULTIAXIAL	10
4.1 Introdução	10
4.2 Determinação da Amplitude de Tensão Cisalhante	10
4.2.1 Método de Socie	10
4.2.2 Método da Maior Corda	11
4.2.3 Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC)	12
4.2.4 Método do Envoltório Retângular Máximo (MRC)	12
4.3 Modelos de Plano Crítico	13
4.3.1 Modelo de Findley	14
4.3.2 Modelo de Susmel e Lazzarin	15
4.4 Validação de um Modelo de Fadiga	15
5 IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO MULTIAXIAL	17
5.1 Modelando as Tensões	18
5.2 Determinando a Máxima Amplitude de Tensão Cisalhante	18
5.3 Determinando o Plano Crítico	18
5.4 Resultados de Teste	18
5.4.1 Caso 1 - Carregamento Axial	18
5.4.2 Caso 2 - Torção Pura	19
6 RESULTADOS DOS MÉTODOS DE FINDLEY E MWCM	21
6.1 Dados Experimentais	21
6.2 Resultados dos Métodos de Findley e MWCM	22
7 CONCLUSÃO	27
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	28

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Partição das variáveis para carregamento axial
Tabela 5.2	Resultados para carregamento axial
Tabela 5.3	Partição das variáveis para torção pura
Tabela 5.4	Resultados para torção pura
Tabela 6.1	Dados experimentais referentes ao aço duro
Tabela 6.2	Resultados para Susmel & Lazzarin com MCC
Tabela 6.3	Resultados para Susmel & Lazzarin com MRC
Tabela 6.4	Resultados para Findley com MCC
Tabela 6.5	Resultados para Findley com mRC
Tabela 6.6	Erros compilados

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Tetraedro de Cauchy com o tensor de tensões e seus componentes

Figura 3.1: Exemplo de curva S-N

Figura 3.2: Curvas de tensão média

Figura 4.1: Representação do método da corda

Figura 4.2: Representação do MCC

Figura 4.3: Representação do MRC

Figura 6.1: Erros dos dois modelos com MCC e MRC

Figura 6.2: Erros dos dois modelos com MCC

Figura 6.3: Erros dos dois modelos com MRC

NOMENCLATURA

R: razão de carregamento
A: razão de amplitude
 σ : tensor de tensões
t: vetor de tensões
n: vetor unitário normal ao plano material
 \hat{e}_a, \hat{e}_b : vetores unitários do plano normal
 f_{-1} : limite de resistência a fadiga para flexão alternada
 t_{-1} : limite de resistência a fadiga à torção alternada
 $\sigma_{m\acute{a}x} \sigma_{m\acute{i}n}$: tensão máxima e mínima
 $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \dots, \sigma_{zz}$: componentes de tensão
 τ_a : amplitude de tensão cisalhante
 N_f : número de ciclos até falha por fadiga
b: expoente de resistência à fadiga
 σ'_f : coeficiente de resistência à fadiga
 $\sigma_{n,m\acute{a}x}$: tensão normal máxima
 τ_A, τ_B : componente da tensão cisalhante na direção A e B
 σ_m : tensão média

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

A norma ASTM E1823 define falha por fadiga como sendo:

“Um processo de mudança estrutural permanente, progressivo e localizado que ocorre em materiais submetidos a condições que produzem tensões ou deformações flutuantes em algum ponto, ou vários pontos, e que pode culminar em trincas ou fratura completa após um número suficiente de flutuações”

A fadiga é sempre um processo de interesse quando tratamos de sistemas mecânicos com partes móveis ou quando temos uma estrutura sujeita a esforços de característica cíclica. O fenômeno da fadiga vem sendo estudado desde o século XIX e, apesar de problemas como a fadiga uniaxial de vários tipos de materiais já possuírem modelos capazes de acuradamente prever seu comportamento sob cargas cíclicas, existem outras áreas do campo do estudo da fadiga que ainda possuem vários problemas sem soluções suficientemente abrangentes ou precisas.

Um dos desafios relacionados a fadiga é a avaliação de casos envolvendo esforços multiaxiais, enquanto a falha de materiais sobre cargas cíclicas uniaxiais pode ser adequadamente prevista pelo uso da curva S-N do material de interesse, ao se estudar um material sob cargas cíclicas multiaxiais é preciso aplicar outros critérios, tais como o Método de Sines ou análise por Plano Crítico.

1.3 OBJETIVOS

O trabalho visa se aprofundar no estudo de modelos de fadiga multiaxial, comparando dois critérios: o critério de Findley e o critério de Susmel & Lazzarin (também conhecido como de curva modificada de Wöhler). Diferentes critérios produzem diferentes resultados, por utilizarem diferentes entradas ou as mesmas entradas com pesos diferentes.

Ao comparar os dois métodos, avaliando os mesmos dados experimentais, espera-se observar e avaliar as diferenças dos resultados obtidos por cada um, podendo-se traçar conclusões sobre a melhor forma de aplicá-los para diferentes características de carregamento e diferentes materiais.

2 DESCRIÇÃO DE ESTADOS DE TENSÃO

2.1 TENSOR DE TENSÕES DE CAUCHY

O tensor de tensões de Cauchy é uma ferramenta frequentemente utilizada na representação das tensões em um corpo. O tensor de Cauchy em sua forma matricial é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Na matriz $\boldsymbol{\sigma}$, os termos da diagonal representam as tensões normais nos três eixos e os demais termos representam as tensões cisalhantes no dado ponto material. A matriz $\boldsymbol{\sigma}$ é uma matriz simétrica, dado que, por equilíbrio, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$. Desta forma, o tensor de Cauchy sempre pode ser representado por apenas seis variáveis.

Quando se trabalha com fadiga, observa-se carregamentos variantes ao longo do tempo, com o tensor de Cauchy é possível representar esse histórico de tensões representando cada um dos seus elementos como uma função temporal, assim o tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) & \sigma_{xz}(t) \\ \sigma_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{yz}(t) \\ \sigma_{zx}(t) & \sigma_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

2.2 CARREGAMENTOS UNIAXIAIS:

Problemas envolvendo fadiga uniaxial são importantes não somente em aplicações de engenharia onde se observa uma forte predominância do carregamento em uma direção, onde é possível simplificar o problema modelando o sistema como estando sobre carregamento uniaxial. Mas também devido ao fato de que várias das constantes físicas de materiais são obtidas por ensaios de fadiga uniaxial.

Estados uniaxiais de tensão podem ser descritos de forma simples utilizando o tensor de tensões de Cauchy. O estado de tensões de um ponto material em um corpo sob tração/compressão cíclica pode ser representado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Esta tensão pode ser, por exemplo, uma tração variando harmonicamente. Assim $\sigma_{xx}(t)$ pode ser representado como

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_{xxm\u00e9dio} + \sigma_{xxa} \text{sen}(\omega t) \quad (2.4)$$

Onde $\sigma_{xxm\u00e9dio}$ e σ_{xxa} s\u00e3o respectivamente o valor m\u00e9dio e a amplitude da tens\u00e3o aplicada. Para este tipo de tens\u00e3o peri\u00f3dica podemos definir as tens\u00f5es m\u00e1xima e m\u00ednima $\sigma_{m\u00e1x}$ e $\sigma_{m\u00edn}$ que s\u00e3o definidas por

$$\sigma_{m\u00e1x} = \sigma_{xxm\u00e9dio} + \sigma_{xxa} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{m\u00edn} = \sigma_{xxm\u00e9dio} - \sigma_{xxa} \quad (2.6)$$

Dados estes valores podemos determinar alguns par\u00e2metros secund\u00e1rios para descrever o carregamento uniaxial, como a raz\u00e3o de carregamento R, a tens\u00e3o m\u00e9dia σ_m e a raz\u00e3o de amplitude A:

$$R = \frac{\sigma_{m\u00edn}}{\sigma_{m\u00e1x}} \quad (2.7)$$

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad (2.8)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\u00e1x} + \sigma_{m\u00edn}}{2} \quad (2.9)$$

2.3 CARREGAMENTO MULTIAXIAIS

Para aplica\u00e7\u00f5es reais de engenharia, o que se observa na maior parte dos casos s\u00e3o tens\u00f5es sendo aplicadas em m\u00faltiplos eixos, por exemplo:

- Um eixo que transmite torque está em estado de carregamento biaxial
- Um vaso de pressão de parede fina sujeito à variação cíclica de pressão está em estado de tensão biaxial
- Um virabrequim em operação apresenta tanto torção quanto flexão
- Em peças contendo pequenas indentações, próximo delas é observado um estado de tensão multiaxial, mesmo que a peça esteja sujeita a um carregamento puramente uniaxial.

Quando se trabalha com carregamentos estáticos pode ser suficiente obter uma tensão equivalente por meio do círculo de Mohr para a descrição das tensões multiaxiais. Quando se aborda, porém, problemas de fadiga envolvendo esses tipos de carregamento é necessário descrever as tensões de forma mais complexa.

Dado um tensor de tensões σ variando de forma periódica, temos:

$$\sigma(t) = \sigma(t+P) \quad \forall t \quad (2.10)$$

Onde P é o período.

Pode-se então verificar as componentes deste tensor nos planos materiais do ponto de referência. cada plano é definido por um par de ângulos (Θ, Φ) onde

$$0 \leq \Phi \leq \pi \quad ;$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Definidos estes planos materiais, é possível ver como o tensor é observado σ em cada plano material traçado, para tal utilizaremos um vetor tensão t (t) calculado por meio da identidade:

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} \quad (2.11)$$

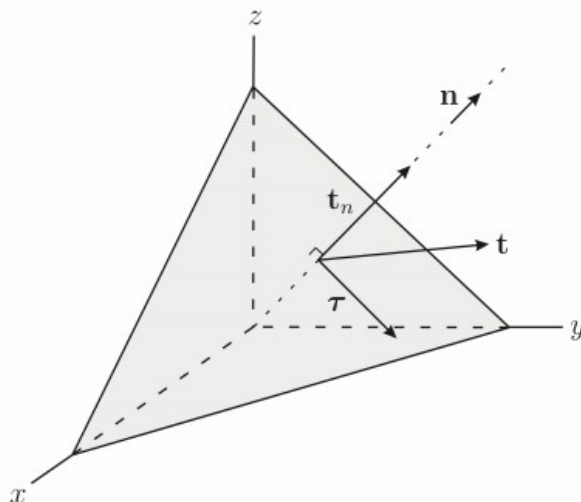


Figura 2.1: Tetraedro de Cauchy com o tensor de tensões e seus componentes

Onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário perpendicular ao plano material. Para cada plano material definido por um par de ângulos Φ e Θ há uma base dada pelos vetores unitários \mathbf{n} , \mathbf{e}_A , \mathbf{e}_B :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \text{sen } \Phi \cos \theta \\ \text{sen } \Phi \text{ sen } \theta \\ \cos \Phi \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta \\ \cos \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} -\cos \Phi \cos \theta \\ -\cos \Phi \text{ sen } \theta \\ \text{sen } \Phi \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Assim podemos dividir as componentes do tensor de tensões \mathbf{t} como sendo:

$$\tau_A = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_A \quad (2.13)$$

$$\tau_B = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{e}_B \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n} \quad (2.15)$$

3 FUNDAMENTOS DE FADIGA

3.1 MECANISMOS DE FALHA PARA FADIGA

A fadiga é um processo onde o material falha quando sujeito a cargas cíclicas, a falha por fadiga se dá por meio do surgimento e propagação de trincas e pode ocorrer sob tensões significativamente menores do que o limite de escoamento do material, isto ocorre devido a processos de dano acumulado.

A falha por fadiga ocorre em três estágios: no primeiro estágio ocorre a iniciação de uma ou mais microntrincas que surgem devido à deformação plástica cíclica seguida de uma propagação cristalográfica, este processo tipicamente ocorre de 10 a 20% da vida sob fadiga do componente sob tensões cíclicas (Lecture 26) a trinca neste ponto é microscópica, tendo uma extensão entre dois e cinco grãos; o segundo estágio é a propagação da trinca, neste estágio a trinca cresce perpendicularmente à tensão; O último estágio da falha é onde ocorre a ruptura do material, durante o ciclo de tensão final, o material não consegue suportar as cargas atuantes e ocorre uma fratura abrupta da peça.

3.2 ABORDAGEM TENSÃO-VIDA

3.2.1 CURVA S-N

Na abordagem tensão-vida, a curva S-N relaciona a magnitude da tensão aplicada com o número de ciclos que o material suporta até a falha (N), N tipicamente é representado utilizando uma escala logarítmica. Curvas S-N são obtidas a partir de ensaios de fadiga com esforços senoidais sobre um corpo de prova fabricado com o material de interesse.

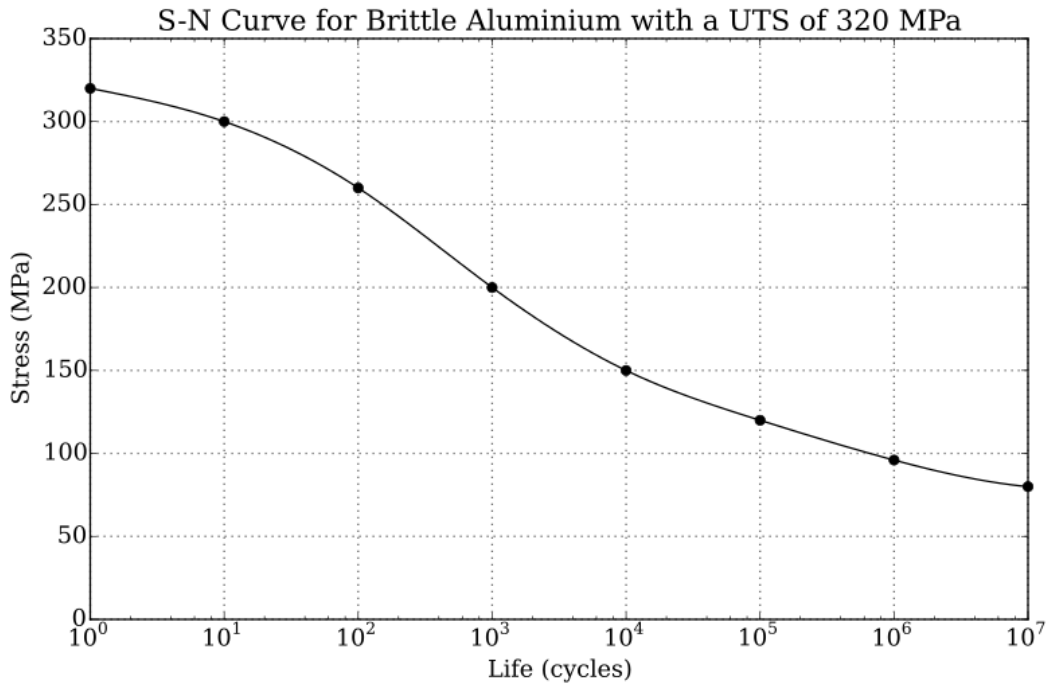


Figura 3.1: Exemplo de curva S-N

Podemos observar no gráfico S-N de exemplo o comportamento típico de um material sob fadiga. Vemos que o número de ciclos de carga que o material é submetido até sua falha cresce conforme a amplitude da tensão diminui. Na parte mais à direita do gráfico, temos o limite de resistência a fadiga S_e do material, a partir desta tensão o material não irá sofrer falha por fadiga mesmo para um número de ciclos indeterminadamente grande, este limite é tipicamente observado na tensão equivalente a 10^6 ou 10^7 ciclos.

A forma da curva S-N pode ser aproximada utilizando a equação de Basquin:

$$\sigma_a = \sigma'_f (2 N_f)^b \quad (3.1)$$

onde N_f é o número ciclos até a falha do material, b é o expoente de resistência a fadiga, σ_a é a amplitude de tensão e σ'_f é o coeficiente de resistência à fadiga.

Esta equação é aplicável para casos de carregamentos uniaxiais de alto ciclo, onde $R = -1$.

3.2.2 Efeito de Tensão Média

Uma variável que afeta a vida sob fadiga de um material é a tensão média do carregamento aplicado. O que se observa é que para tensões médias positivas o número de ciclos até a falha N_f é menor e para tensões médias negativas, N_f é maior:

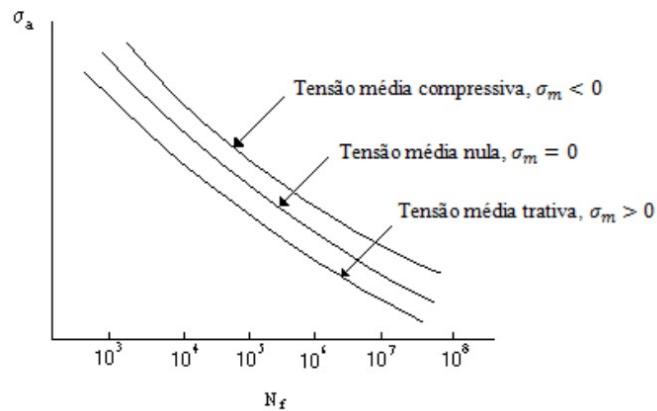


Figura 3.2: Curvas de tensão média

Este efeito de tensão média se dá devido à atuação das tensões sobre as trincas presentes no material, os carregamentos de tensão média trativa tendem a abrir e favorecer a propagação das microtrincas que estão sendo solicitadas pelo carregamento.

A equação de Basquin pode ser adaptada para levar em conta o efeito de tensão média:

$$\sigma_a = (\sigma'_f - \sigma_m) (2 N_f)^b \quad (3.2)$$

4 FADIGA MULTIAXIAL

4.1 INTRODUÇÃO

As metodologias existentes de avaliação de fadiga multiaxial podem ser divididas em algumas famílias de modelos, estas são:

- Modelos empíricos
- Modelos baseados nos termos invariantes do tensor de tensões
- Modelos baseados em tensões médias e deformações em volume material
- Modelos baseados em energia acumulada
- Modelos baseados em plano crítico

Os modelos mais utilizados atualmente são os modelos baseados na metodologia de plano crítico. Esta será a família de modelos que será estudada neste trabalho.

4.2 DETERMINAÇÃO DA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE

A amplitude de tensão cisalhante τ_{ac} é uma das variáveis de maior importância para um projeto que envolva falha por fadiga. Existem vários métodos para determinar τ_{ac} , com diferentes graus de precisão e custo computacional.

4.2.1 Método de Socie:

O método de Socie é um dos métodos mais simples para determinar a amplitude τ_{ac} , ele trabalha com a tensão na componente A e da componente B do plano material de forma separada, obtendo um valor da amplitude de tensão para cada componente e selecionando a maior como a amplitude de tensão cisalhante.

$$\tau_a = \max\{\tau_{Aa}, \tau_{Ba}\} \quad (4.1)$$

$$\tau_{Aa} = \frac{1}{2}(\max_t \tau_A(t) - \min_t \tau_A(t)) \quad (4.2)$$

$$\tau_{Ba} = \frac{1}{2}(\max_t \tau_B(t) - \min_t \tau_B(t)) \quad (4.3)$$

4.2.2 Método da Maior Corda

Proposto por Fuchs & Stephens (1980), o método da maior corda define τ_A como sendo a metade do comprimento da maior corda que pode ser traçada entre dois pontos da trajetória descrita pela tensão cisalhante e pode ser determinada pela identidade:

$$\tau_A = \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2} (|\tau(t_1) - \tau(t_2)|) \quad (4.4)$$

Onde t_1 e t_2 são dois instantes de tempo distintos.

O método é de fácil implementação porém possui limitações devido ao número de iterações necessárias, que cresce proporcionalmente ao quadrado do número de partições do tempo adotadas:

$$n_{cordas} = \frac{1}{2}(n^2 - n) \quad (4.5)$$

Além disso, o método não é aplicável para casos que envolvem carregamentos não-proporcionais.

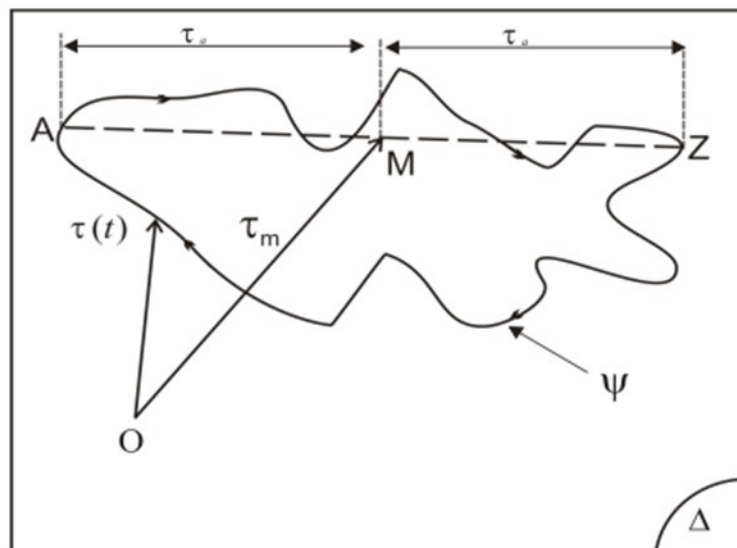


Figura 4.1: Representação do método da corda

4.2.3 Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC):

O método da menor circunferência circunscrita define a amplitude da tensão cisalhante como o raio da menor circunferência circunscrita à trajetória traçada por $\tau(t)$ em um plano material, sua formulação é dada pelo seguinte problema de máximo e mínimo:

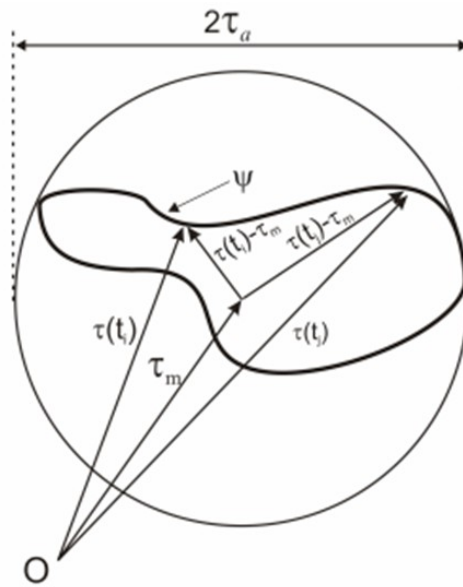


Figura 4.2 Representação do MCC

$$\tau_A = \frac{1}{2} \min_{\tau_m} (\max_t |\tau(t) - \tau_m|) \quad (4.6)$$

4.2.4 Método do Envoltório Retangular Máximo (MRC):

Desenvolvido pelo professor José Alexandre Araújo, o também chamado método da caixa é um método simples e rápido para a determinação da amplitude de tensão cisalhante. Podemos observar seu princípio na figura abaixo:

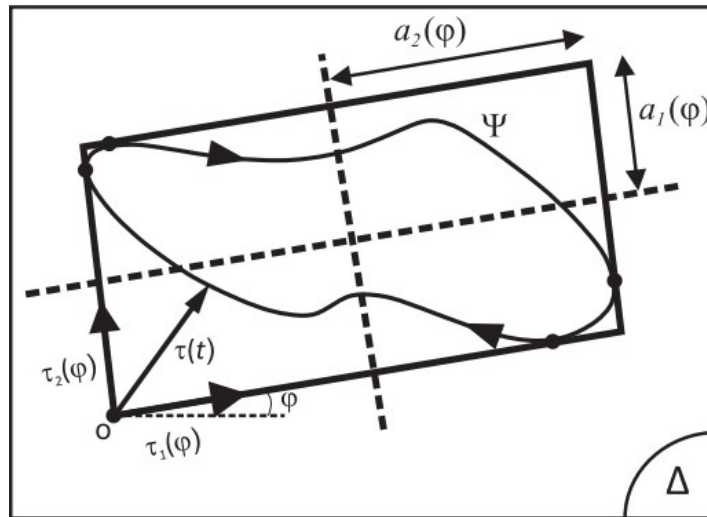


Figura 4.3: Representação do método da caixa

observamos o método sendo aplicado, com as linhas tracejadas representando diversos retângulos que envolvem o histórico de tensões e com o quadrilátero de linha sólida sendo o maior possível, o envoltório retangular máximo. A partir desta figura obtida, podemos calcular a amplitude de tensão cisalhante como sendo:

$$\tau_d = \text{máx} \sqrt{a_1^2(\varphi) + a_2^2(\varphi)} \quad (4.7)$$

4.3 MODELOS DE PLANO CRÍTICO

Os modelos baseados em metodologias de plano crítico são os modelos mais utilizados na atualidade. A metodologia de plano crítico é um método tensão-vida de alto ciclo, baseado na descrição de tensões como observadas em planos materiais descrita na seção 2.3. Ela visa determinar o plano de falha por meio de algum modelo avaliando as tensões presentes em cada plano material. E determinar a vida sob fadiga do material avaliando as tensões presentes neste plano utilizando constantes físicas próprias do material estudado.

4.3.1 Modelo de Findley

O modelo de Findley difere do de Socie no uso da tensão normal máxima $\sigma_{n,max}$ para a determinação do plano crítico, neste modelo o plano crítico é determinado pela identidade:

$$\max_{\theta, \Phi} (\tau_a + k \sigma_{n,max}) \quad (4.8)$$

Determinado o plano, temos a vida dada por

$$\max_{\theta, \Phi} (\tau_a + k \sigma_{n,max}) = f(N_f) \quad (4.9)$$

e para vida infinita:

$$\max_{\theta, \Phi} (\tau_a + k \sigma_{n,max}) \leq \lambda \quad (4.10)$$

onde

$$k = \frac{2 - \frac{f_{-1}}{t_{-1}}}{2 \sqrt{\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1}} \quad (4.11)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{f_{-1}^2}{4 \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1 \right)}} \quad (4.12)$$

O modelo de Findley foi utilizado por Marquis e Karjalainen-Roikonen (2002) para a avaliação de corpos de prova de ferro fundido nodular sob fadiga uniaxial e multiaxial, o modelo foi aplicado com bons resultados para o material estudado, tanto para fadiga uniaxial quanto biaxial.

4.3.2 Modelo de Susmel & Lazzarin

O modelo proposto por Susmel & Lazzarin (2004), também conhecido como método de curva modificada de Wöhler, se baseia na avaliação da amplitude de tensão cisalhante τ_a nos diferentes planos materiais definidos por um par de ângulos (Φ , Θ).

O critério propõe uma razão de tensão ρ definida por:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} \quad (4.13)$$

Para evitar a falha temos que o carregamento deve obedecer a relação:

$$\max_{\theta, \Phi} \left(\tau_a + k \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} \right) \leq \lambda \quad (4.14)$$

Onde os parâmetros materiais k e λ são dados por:

$$k = t_{-1} - \frac{f_{-1}}{2} \quad (4.15)$$

$$\lambda = t_{-1} \quad (4.16)$$

4.4 VALIDAÇÃO DE UM MODELO DE FADIGA

Podemos representar os critérios de plano crítico pela identidade:

$$X + \alpha Y = \beta \quad (4.17)$$

onde os parâmetros X e Y vem das cargas aplicadas e os parâmetros α e β são constantes que dependem das propriedades do material. A precisão das previsões de um dado método podem ser avaliadas pelo índice de erro para fadiga i dado por:

$$i = \frac{X}{\beta - \alpha Y} - 1 \quad (4.18)$$

para $i = 0$, temos que a estimativa é exata, para $i < 0$ a previsão é considerada não conservadora e para $i > 0$ a previsão é conservadora.

Para os nossos modelos de interesse, temos que a fórmula de erro é dada por:

$$i_{Findley} = \frac{\tau_{ac} + k \sigma_{nmaxc} - \lambda}{\lambda} \quad (4.19)$$

$$i_{Susmel} = \frac{\tau_{ac} + k \frac{\sigma_{nmaxc}}{\tau_{ac}} - \lambda}{\lambda} \quad (4.20)$$

5 IMPLEMENTAÇÃO DE UM MODELO MULTIAXIAL

5.1 MODELANDO AS TENSÕES:

O projeto toma como ponto inicial o tensor de tensões variável no tempo. Obter tal modelagem dos carregamentos pode ser complexo e é o tema de muito estudo. Para a implementação do código é utilizado o tensor de tensões como input do problema.

Inicialmente, foi utilizado um tensor de tensões variando harmonicamente com o tempo descrito da seguinte forma:

$$\sigma = \sigma_{\text{médio}} + \text{sen}(\omega t) \sigma_{\text{variante}} \quad (5.1)$$

Os planos materiais são definidos por um par de ângulos:

$$0 < \Theta < 2\pi \quad (5.2)$$

$$0 < \Phi < \pi \quad (5.3)$$

O número de planos analisados pelo programa é definido pelo número de partições deste intervalo de Θ , Φ ; com o número total de planos analisados sendo igual ao produto do número de partições de cada ângulo:

$$\text{Número de planos} = \text{Número de partições de } \Theta \times \text{Número de partições de } \Phi \quad (5.4)$$

Este número de planos é de importância pois afeta a precisão da avaliação, com um número maior de planos dando resultados mais precisos, a custo de um aumento no tempo de processamento do programa.

Para cada plano é definido um conjunto de vetores unitários \hat{e}_a , \hat{e}_b e n . Definido estes vetores unitários para cada plano, obtemos as componentes da tensão para cada uma dessas coordenadas por meio das equações descritas anteriormente.

Estas componentes são calculadas para cada partição do tempo, para cada plano. Um dos desafios da implementação desta metodologia foi o armazenamento deste conjunto de dados de forma que possa ser processado nas próximas etapas do programa.

5.2 DETERMINANDO A MÁXIMA AMPLITUDE DE TENSÃO CISALHANTE:

Com o conjunto de tensões para cada plano ao longo do tempo, podemos obter a amplitude de tensão cisalhante de cada plano. O conceito de amplitude de tensão cisalhante τ_A é essencial para fadiga e existem vários métodos para determinar τ_{ac} tal como o método da caixa, da elipse e da caixa. Para o cálculo da amplitude de tensão foi utilizado o MRC. Obtemos assim um valor de τ_{ac} para cada plano definido.

5.3 DETERMINANDO O PLANO CRÍTICO

Determinadas as amplitudes de tensão τ_{ac} de cada plano, é possível agora determinar o plano crítico para o carregamento estudado, para isto é preciso determinar um modelo a ser utilizado, existem vários modelos para a determinação do plano crítico tal como o modelo de Socie, o modelo de Findley, Curva Modificada de Wohler e Smith Watson e Topper. Para esta etapa do projeto, foi selecionado o modelo de Findley, discutido anteriormente.

5.4 RESULTADOS DE TESTE

O programa foi então testado para tipos de carregamento simples, com resultados conhecidos:

5.4.1 Caso 1 – Carregamento Axial

Para o primeiro teste, foi utilizado um caso de ensaio axial com a uma carga variando harmonicamente com tensão média $\sigma_{xx} = 70\text{MPa}$ e parte harmônica $\sigma_{xx} = 2 \text{ sen}(t) \text{ Mpa}$. O número de partições adotado é igualmente espaçado entre o intervalo ou de zero a π ou de zero a 2π para θ e ϕ :

Tabela 5.1: Partição das variáveis

Número de partições do tempo	20
Número de partições de Θ	50
Número de partições de Φ	25
Número de planos analisados	1250

Tabela 5.2: Resultados para carregamento axial

	Θ	Φ
Resultado teórico	0	45°
Resultado do programa	0	46.15°

Para este caso, o resultado do programa apresentou uma discrepância de 2,5% do valor previsto pelo modelo teórico, o que é condizente com a partição utilizada.

5.4.2 Caso 2 – Torção Pura

Para o segundo teste, foi utilizado o caso de torção pura como tensor de tensões médio com $\sigma_{XY} = \sigma_{YX} = 50$ MPa e parte harmônica com $\sigma_{XY} = \sigma_{YX} = \text{sen}(t)$ MPa:

Tabela 5.3: Partições das variáveis

Número de partições do tempo	20
Número de partições de Θ	50
Número de partições de Φ	25
Número de planos analisados	1250

Tabela 5.4: Resultados para torção pura

	Θ	Φ
Resultado teórico	0	90°
Resultado do programa	0	92.30°

Novamente, foi obtido um resultado próximo do modelo teórico, com um erro de 2,5%.

6 RESULTADOS DOS MÉTODOS DE FINDLEY E MWCM

6.1 DADOS EXPERIMENTAIS

Foram resultados dos métodos de Findley e MWCW sobre os mesmos carregamentos e os resultados previstos serão contrastados com os dados práticos observados. Os dados observados foram os seguintes, referentes ao aço duro de limite de resistência a fadiga para flexão alternada $f_{-1}= 319,9$ MPa e limite de resistência à torção alternada $t_{-1}=196,2$ MPa:

Tabela 6.1: Dados experimentais referentes ao aço duro, base de dados de Liu [12]

Número do teste	σ_{xa}	τ_{xya}	Ângulo de fase β_{xy}
1	138,1	167,1	0
2	140,4	169,9	30
3	145,7	176,3	60
4	150,2	181,7	90
5	245,3	122,6	0
6	249,7	124,8	30
7	252,4	126,2	60
8	258,0	129,0	90
9	299,1	62,8	0
10	304,5	63,9	90

6.2 RESULTADOS DOS MODELOS

Foi então utilizado o modelo computacional para obter a amplitude de tensão tanto pelo método da caixa (MRC) quanto pelo método da menor circunferência circunscrita (MCC). Para a análise dos modelos foram utilizados um passo de 1° , totalizando 90 partições de Φ e 180 partições de Θ , sendo assim analisados 16200 planos.

Tabela 6.2: Resultados para Susmel & Lazzarin com MCC

Número do teste	τ_{ac} (MPa)	$\sigma_{n,máx,c}$ (MPa)	Φ	Θ	i%
1	180,76	70,50	90	72	-0,7
2	180,79	90,54	90	175	1,5
3	180,52	129,57	90	176	5,2
4	181,74	150,2	90	0	7,8
5	173,35	125,71	90	164	1,6
6	170,44	146,16	90	163	2,6
7	154,58	185,74	90	164	1,1
8	129,01	258	90	0	2,8
9	162,16	151,78	90	153	-0,1
10	152,29	165,65	90	142	3,4

Tabela 6.3: Resultados para Susmel & Lazzarin com MRC

Número do teste	τ_{ac} (MPa)	$\sigma_{n,máx,c}$ (MPa)	Φ	Θ	i%
1	180,76	70,50	90	169	-0,7
2	180,79	90,54	90	170	1,5
3	180,52	129,57	90	174	5,2
4	181,74	150,2	90	0	7,8
5	173,35	125,71	90	158	1,6
6	170,44	146,16	90	158	2,6
7	159,80	159,61	58	169	0,1
8	161,29	160,24	52	0	0,5
9	162,17	151,56	90	56	-0,1
10	158,98	157,57	133	0	-0,1

Tabela 6.4: Resultados para Findley com MCC

Número do teste	τ_{ac} (MPa)	$\sigma_{n,máx,c}$ (MPa)	Φ	Θ	i%
1	175,8	111,4	90	72	2,8
2	178,0	114,7	90	175	4,3
3	179,8	134,3	90	176	7,6
4	181,7	150,2	90	0	10,4
5	169,0	161,7	90	164	5,3
6	167,6	171,5	90	163	5,7
7	151,9	208,0	90	164	2,1
8	129,0	258,0	90	0	-3,6
9	157,9	186,7	90	153	2,6
10	148,5	198,9	90	142	-0,7

Tabela 6.5: Resultados para Findley com MRC

Número do teste	τ_{ac} (MPa)	$\sigma_{n,máx,c}$ (MPa)	Φ	Θ	i%
1	175,8	111,4	90	72	2,8
2	178,0	114,7	90	175	4,3
3	179,8	134,3	90	176	7,6
4	181,7	150,2	90	0	10,4
5	169,0	161,7	90	164	5,3
6	167,6	171,5	90	163	5,7
7	155,9	194,6	70	168	2,5
8	157,2	197,44	61	0	3,5
9	157,9	186,7	90	153	2,6
10	155,0	194,2	53	0	2,0

Tabela 6.6: Erros compilados

Número do teste	i% Susmel MCC	i% Susmel MRC	i% Findley MCC	i% Findley MRC
1	-0,7	-0,7	2,8	2,8
2	1,5	1,5	4,3	4,3
3	5,2	5,2	7,6	7,6
4	7,8	7,8	10,4	10,4
5	1,6	1,6	5,3	5,3
6	2,6	2,6	5,7	5,7
7	1,1	0,1	2,2	2,5
8	2,8	0,5	-3,6	3,5
9	-0,1	-0,1	2,6	2,6
10	3,4	-0,1	-0,7	2,0

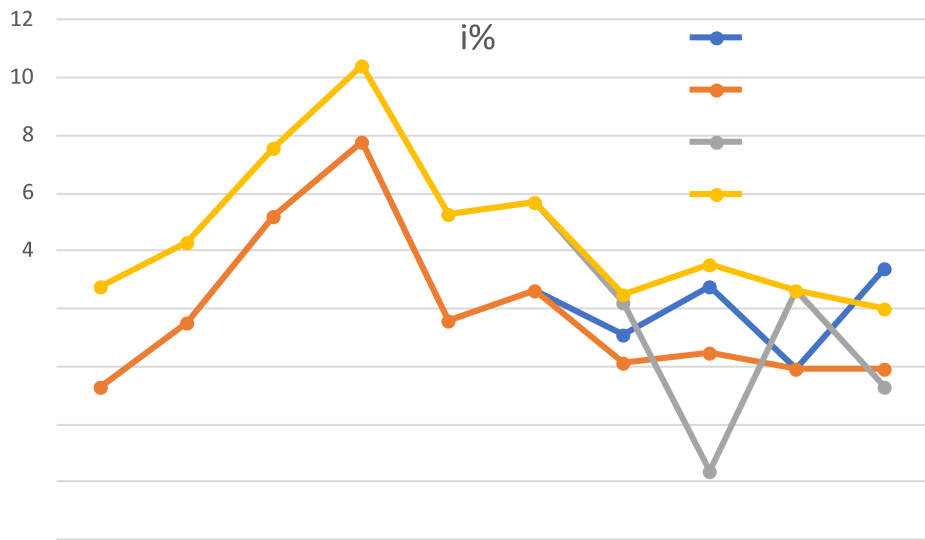


Figura 6.1: Erros dos dois modelos com MCC e MRC

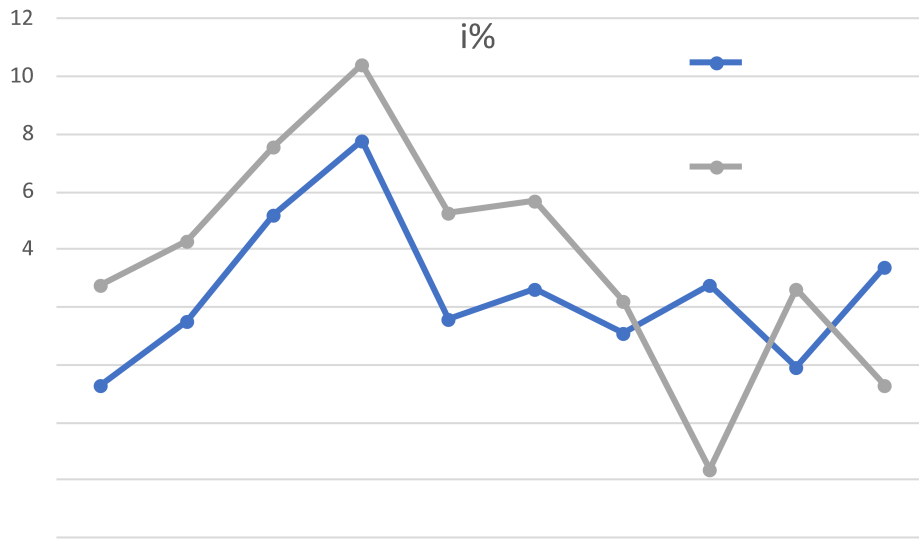


Figura 6.2: Erros dos dois modelos com MCC

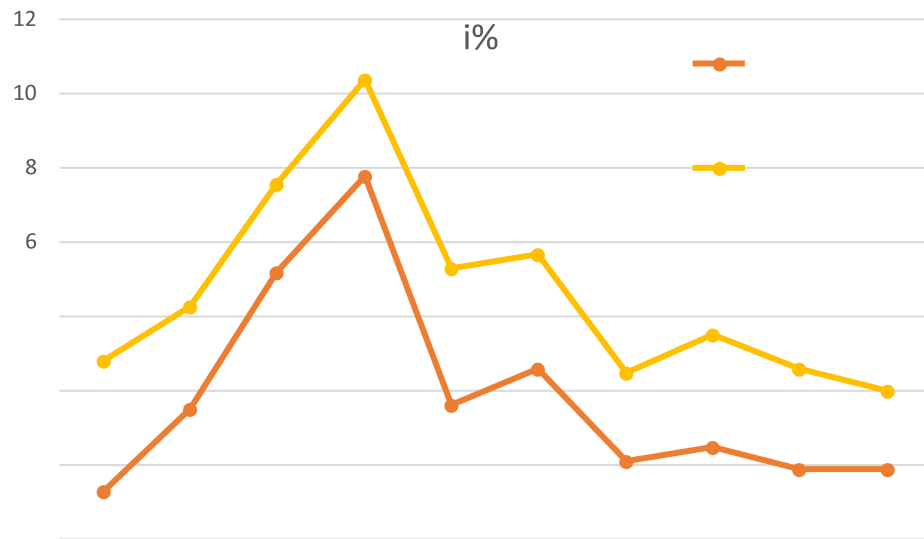


Figura 6.3: Erros dos dois modelos com MRC

7 CONCLUSÃO

Foram implementados os dois modelos com êxito, aplicando-os usando tanto o método MCC quanto MRC. Os dados obtidos foram satisfatórios para ambos os métodos, porém com o modelo baseado em curva modificada de Wöhler proposto por Susmel & Lazzarin obtendo dados mais precisos.

Foram verificadas também características dos métodos de cálculo da amplitude de tensão cisalhante por meio dos métodos de MCC e MRC, observando-se suas diferenças tanto nos resultados obtidos quanto em sua dificuldade de implementação e tempo de processamento, com o MRC, ou método da caixa, produzindo valores de amplitude consistentemente mais altos e requerendo um menor tempo cálculo (cerca de 15% comparado com o MCC)

Por fim, foi verificada a implementação e uso de modelos de plano crítico para a avaliação de tensões ciclicamente variantes, e como podemos não somente validar os modelos por meio da avaliação do erro percentual $i\%$ em relação a dados experimentais, mas também comparar diferentes modelos por meio deste parâmetro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. A. Araújo, A. P. Dantas, F. C. Castro, E. N. Mamiya, J. L. A. Ferreira, On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue, *International Journal of Fatigue* 33 (8) (2011) 1092-1100
- [2] Dantas, A. P., Proposta Alternativa Para Cálculo da Amplitude da Tensão Cisalhante e Uso de Algoritmos Genéticos Para Determinação do Plano Crítico em Fadiga Multiaxial, ENM, 2009
- [3] R. G. Budynas, J. K. Nisbett. Elementos de Máquinas de Shigley. AMGH Editora Ltda, 2011.
- [4] Susmel L., and Lazzarin P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment, Blackwell Science Ltd. *Fatigue FractEngng Mater Struct.* 2002
- [5] Fatemi, A and Shamsei, N. An overview and some approximation models for life estimation. University of Toledo, 2010
- [6] Souza, E. Análise do efeito da tensão média sobre a resistência à fadiga do aço ASTM A743 CA6NM. Universidade de Brasília, 2011
- [7] Susmel, L. Multiaxial Notch Fatigue – from nominal to local stress/strain quantities. Woodhead Publishing in Materials, 2009
- [8] Wang, Y. Yao, W. Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2003
- [9] Pinheiro, P. Análise crítica de modelos de fadiga de plano crítico e proposta de uma nova medida de amplitude da tensão cisalhante. Universidade de Brasília, 2012
- [10] Morrow, J. *Fatigue Design Handbook.* 1968
- [11] Cui, W. A state-of-the-art review on fatigue life prediction methods for metal structures. School of Naval Architecture and ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, 2002

[12] Liu, K. Beitrag zur Verbesserung der Dauerfestigkeitsberechnung bei mehrachsiger Beanspruchung. Diss, TU Clausthal. 1991

[13] Findley, W.N. Modified Theories of Fatigue Failure under Combined Stress. Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis. Vol 14, No 1. 1956

[14] Carpinteri, A. Freitas, M. Spagnoli, A. Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture.ESIS Publication 31, 2003