PROJETO DE GRADUAÇÃO

A SOLUÇÃO DE BARGANHA DE KALAI-SMORODINSKY APLICADA À NEGOCIAÇÃO DE CONTRATOS BILATERAIS NO MERCADO LIVRE DE ELETRICIDADE

Por,
Matheus de Lima Barbosa

Brasília, dezembro de 2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Produção

PROJETO DE GRADUAÇÃO

A SOLUÇÃO DE BARGANHA DE KALAI-SMORODINSKY APLICADA À NEGOCIAÇÃO DE CONTRATOS BILATERAIS NO MERCADO LIVRE DE ELETRICIDADE

Por,
Matheus de Lima Barbosa

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do título de bacharel em Engenharia de Produção

Banca Examinadora

Prof. Ph.D Reinaldo Crispiniano Garcia, UnB/EPR (Orientador) _____

Prof. Ph.D. João Mello da Silva, UnB/EPR (Convidado 1) _____

Brasília, dezembro de 2017

Aos meus pais Maria Elena e José Humberto e irmãos Gabriel e Caroline.

Agradecimentos

Foram longos cinco anos e meio de bastante lutas, angústias, mas também de crescimento e bons momentos.

Agradeço a Deus por ter provido os meios que me habilitaram a trilhar este caminho.

Agradeço aos meus pais e irmãos que foram minha rocha e que compartilharam de perto os altos e baixos dessa jornada. Sou muito afortunado por ter uma família tão especial.

Sou muito grato ao meu orientador, Professor Reinaldo Garcia, que, desde o primeiro dia de aula, mostrou-se diferente dos demais. Sua dedicação, carisma, enorme conhecimento e, acima de tudo, disposição em ajudar qualquer que fosse o aluno que lhe abordasse serviram-me de inspiração e restauraram meu ânimo num momento tão crucial.

À Marian, minha esposa, que me fez sonhar mais alto e a almejar novos desafios.

E a todos àqueles que fizeram parte da minha vida nesses anos lhes sou grato, pois sei que não cheguei aqui sozinho.

Matheus de Lima Barbosa

RESUMO

Os mercados de eletricidade mundo afora, inclusive o brasileiro, passaram por um processo de desregulação há alguns anos. Tal fato lhes garantiu maior dinamismo, mas também faz com que haja um aumento na volatilidade dos preços da energia negociada.

Como forma de proteção contra a volatilidade dos preços, contratos bilaterais são firmados entre a empresa geradora de eletricidade e a distribuidora para a compra e venda de energia elétrica no mercado futuro. Esses contratos estabelecem que determinados volumes de eletricidade deverão ser entregues em períodos específicos a certo preço, o que reduz a flutuação dos preços e da demanda.

Diversos trabalhos publicados sobre o tema propõem soluções baseadas nos conceitos de Teoria dos Jogos. Em geral, o problema é modelado de modo a buscar o aumento do lucro de um dos lados em detrimento do outro e a solução ótima é alcançada ao se achar um resultado que resida sobre o ponto de equilíbrio de Nash.

Este trabalho propõe a aplicação da Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky (SBKS) como alternativa à Solução de Barganha de Nash (SBN) em negociações que busquem uma solução compromissada que satisfaça aos dois lados, de modo a evidenciar que não somente é possível que haja outras soluções ótimas, como também, que essas possam, eventualmente, vir a fornecer melhores resultados do que os alcançados pelo uso da SBN.

Palavras-chave: Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky; Mercado de Energia; Contratos Bilaterais; Teoria dos Jogos; Otimização.

ABSTRACT

Electricity markets worldwide, including the Brazilian electricity market, have undergone through a deregulation process over the past years. That fact made them more dynamic, but also increased price volatility in the spot market.

As a way of hedging against prices volatility, bilateral contracts are arranged between the electricity generation company and the electricity service company. In those contracts, a determined amount of electricity must be delivered within certain periods and at a given price, which eliminates price and demand fluctuations.

Many research works approach the problem by applying Game Theory. In that sense, the problem is modeled in such way that it will privilege one side's profit over the other's and an optimum solution is achieved when a result is found at Nash equilibrium point.

This work applies the Kalai-Smorodinsky Bargaining Solution (KSBS) as an alternative to Nash Bargaining Solution (NBS) to find a compromise solution. It is also shown that not only it is possible that may exist other optimum solutions, but that those may come to provide better results than those achieved by NBS.

Keywords: Kalai-Smorodinsky Bargaining Solution; Energy Market; Bilateral Contracts; Game Theory; Optimization.

.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12
1.1 JUSTIFICATIVA 13
1.2.1 Problema 14
1.2.2 Objetivo geral 14
1.2.3 Objetivos específicos 14
2. METODOLOGIA 16
2.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA 16
2.2 ETAPAS DE DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA 17
3. REVISÃO DA LITERATURA 19
3.1 O SISTEMA ELÉTRICO 19
3.1.1 Atores 20
3.1.2 Agentes institucionais 21
3.2 O MERCADO LIVRE DE ENERGIA 23
3.2.1 O mercado spot 26
3.2.2 O mercado futuro 26
3.3 PESQUISA OPERACIONAL 27
3.4 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA 28
3.5 TEORIA DOS JOGOS 32
3.5.1 Jogos não-cooperativos 33
3.5.2 Jogos cooperativos (jogos de barganha) 34
3.5.3 Eficiência de pareto 35
3.5.4 Equilíbrio de Nash 35
3.5.5 Solução de barganha de Kalai-Smorodinsky 39
4. ARRANJO DE CONTRATOS BILATERAIS 43
4.1 INTRODUÇÃO 43
4.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS 44
4.3 PROGRAMAÇÃO INDEPENDENTE 45
4.4 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA PARA A PROGRAMAÇÃO DAS ENTREGAS 48
4.5 PROGRAMAÇÃO COMPROMISSADA 49
4.6 EXEMPLO NUMÉRICO 53
4.7 A EXISTÊNCIA DE OUTROS PONTOS DE EQUILÍBRIO 57
5. A SBKS APLICADA AO PROBLEMA 62
5.1 INTRODUÇÃO 62
5.2 MODELAGEM DO PROBLEMA 62
5.3 EXEMPLO NUMÉRICO COM A SBKS 64

5.4 VERIFICAÇÃO DA REPLICABILIDADE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A SBKS 66
5.5 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS COM A SBKS 69
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS 71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 73
APÊNDICES 79
Apêndice 1 – Código utilizado para a programação independente realizada pelo distribuidor - CF 79
Apêndice 2 – Código utilizado para a programação independente realizada pelo produtor - CG 85
Apêndice 3 – Código utilizado para análise dos preços spot 90
Apêndice 4 – Código utilizado para a programação compromissada usando a SBN - Palamarchuk 97
Apêndice 5 – Código utilizado para a programação compromissada usando a SBN – Toledo-Cunha 102
Apêndice 6 – Código utilizado para a programação compromissada usando a SBKS . 107

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema Elétrico 20
Figura 2 – Agentes Institucionais no Mercado de Energia Brasileiro 22
Figura 3 – Funcionamento da Programação Dinâmica 29
Figura 4 - Fluxograma de execução de um problema de programação dinâmica 31
Figura 5 - Ponto de Nash em jogo de barganha 40
Figura 6 - O problema com o axioma IAR 40
Figura 7- Ajustes nas utilidades de acordo com o axioma da Monotocidade 41
Figura 8 - Interpretação geométrica da SBKS 42
Figura 9 - Dinâmica de compra e venda de energia no mercado livre 45
Figura 10 - Área de Negociação 50
Figura 11 - Conjunto de possíveis lucros 51
Figura 12 - Matriz “Sujeito a” 55
Figura 13 - Diferenças entre os valores de contrato e valores das concessões SBKS vs SBN 69

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Empreendimentos geradores de eletricidade 24
Quadro 2 - Mudanças no setor elétrico brasileiro 25
Quadro 3- O dilema do prisioneiro..... 34
Quadro 4 - Batalha dos Sexos..... 37
Quadro 5- *Matching Pennies*..... 37
Quadro 6 - Dados iniciais para a programação independente realizada pela CF 54
Quadro 7- Dados iniciais para a programação independente pela CG 54
Quadro 8 - Resultados da programação independente feita pela CF..... 56
Quadro 9 - Resultados da programação independente feita pela CG 56
Quadro 10- Resultados da programação compromissada das entregas 56
Quadro 11- Outras soluções ótimas para programação independente realizada pela CF 58
Quadro 12 - Outras soluções ótimas para programação independente realizada pela CG..... 59
Quadro 13 - Amostra de soluções ótimas para programação compromissada..... 60
Quadro 14 - Regiões negociáveis das programações independentes..... 61
Quadro 15 - Resultados da programação compromissada das entregas SBKS x SBN 65
Quadro 16 - Simulação para diferentes Volumes do Contrato - Palamarchuk x SBKS..... 67
Quadro 17- Simulação para diferentes Volumes do Contrato - Toledo-Cunha x SBKS..... 68

LISTA DE SÍMBOLOS

Variáveis

x_k^t	Quantidade de eletricidade entregue por meio do contrato bilateral e vendida aos consumidores finais no intervalo t, em MWh.
x_s^t	Quantidade de eletricidade comprada pelo distribuidor no mercado *spot* no intervalo t, em MWh.
x_{ss}^t	Quantidade de eletricidade recebida pelo distribuidor por meio do contrato e vendida no mercado spot no intervalo t, em MWh.
x^t	Quantidade de eletricidade recebida pelo distribuidor pelo contrato no intervalo t, em MWh.
$x^{t,N}$	Quantidade de eletricidade entregue pelo contrato bilateral durante o período a partir do intervalo t até o final do contrato, em MWh.
x_c^t	Quantidade de eletricidade produzida pela companhia geradora e entregue pelo contrato bilateral no intervalo t, em MWh.
x_{gss}^t	Quantidade de eletricidade produzida pelo fornecedor e vendida no mercado *spot* no intervalo t, em MWh.
x_{gs}^t	Quantidade de eletricidade comprada pelo fornecedor no mercado *spot* para ser entregue por meio do contrato no intervalo t, em MWh.
x_g^t	Produção do fornecedor no intervalo t, em MWh.
x_d^t	Quantidade de eletricidade vendida aos consumidores finais no intervalo t, em MWh.
x_{DDi}^t	Quantidade de eletricidade entregue pelo contrato até o início do intervalo t, em MWh.
p_s^t	Nível discreto do preço no mercado spot, em $/MWh.
ε_j^t	Probabilidade esperada pelo o nível discreto do preço no mercado spot.
$R_1,\ R_2$	Receitas geradas pelas partes do contrato pelas suas participações no mercado spot, negociação do contrato bilateral e fornecimento de eletricidade aos consumidores finais, em $.
$S_1,\ S_2$	Lucros gerados pelas partes do contrato pelas suas participações no mercado spot, negociação do contrato bilateral e fornecimento de eletricidade aos consumidores finais, em $.
$\Delta S_1^0\ ,\Delta S_2^0$	Concessões relativas das partes do contrato ao utilizar a *compromise approach*, em $.
J	Preço do contrato de acordo com o custo total acordado para entrega de eletricidade, em $.
φ_I	A diferença entre a receita a ser obtida pela CF e os gastos que a CG terá de acordo com a programação independente das entregas de energia em um contrato Tipo I, ou seja, na programação independente feita pela CF.

φ_{II}	A diferença entre a receita a ser obtida pela CF e os gastos que a CG terá de acordo com a programação independente das entregas de energia em um contrato Tipo II, ou seja, na programação independente feita pela CG.

Variáveis aleatórias

$\tilde{p}_s^t$	Preço de eletricidade previsto para o Mercado spot no intervalo t, em \$/MWh.

Constantes

p_d^t	Preço de eletricidade para os consumidores finais no intervalo t, em \$/MWh.
V	Volume do contrato. Quantidade total de eletricidade recebida pelo distribuidor pelo contrato bilateral durante o período contratual, em MWh.
$x_{min,}^t x_{max}^t$	Limites para a entrega por meio do contrato no intervalo t, em MWh.
$x_{g\,min}^t, x_{g\,max}^t$	Limites para a produção de eletricidade do fornecedor de energia no intervalo t, em MWh.

Funções

$C^t(x_g^t)$	Função do custo de produção do fornecedor de eletricidade no intervalo t, em \$.
$FRF^t(x_{DDi}^t)$	Função da receita futura para o intervalo t que define o valor ótimo de receita dependendo da quantidade de eletricidade entregue por meio do contrato bilateral até o início do intervalo t.

Números

N	Número de intervalos de tempo do período contratual.
n	Número de *estados* para a construção da FRF.
M	Número de níveis discretos para o preço aleatório no mercado spot.

1. INTRODUÇÃO

A eletricidade é uma das principais fontes de energia utilizadas no mundo ficando atrás somente dos combustíveis fósseis (U.S. ENERGY INFORMATION ADMINISTRATION, 2013). A relativa facilidade de transporte e geração, além do baixo custo e baixo índice de perda energética durante conversões são os grandes incentivadores do uso da energia elétrica em grande escala no mundo todo (CCEE, 2017).

Ao final dos anos 80, deu-se início ao processo de desregulação (abertura) do mercado de eletricidade mundo a fora, inclusive no Brasil (GIL-PUGLIESE; OLSINA, 2014). Essa desregulação do setor visa estabelecer um mercado mais seguro, confiável e competitivo, de modo a que se obtenha menores tarifas aos consumidores finais, maior eficiência por parte das companhias geradoras, além de promover a inovação tecnológica no setor. (CHENG; GALIANA; McGILLIS, 1998).

Tal mudança fez com o que o mercado que outrora era centralizado e verticalizado, passasse a ter fontes independentes de geração, transmissão e distribuição (CHENG; GALIANA; McGILLIS, 1998). A nova abordagem, competitiva e descentralizada, é dirigida pelas forças de mercado, em que a oferta e a demanda pela eletricidade, definem valor da tarifa (KRAUSE; BECK; CHERKAOUI; GERMOND; ANDERSON; ERNST, 2006).

No mercado livre, a energia elétrica é negociada como *commodity* assim como o ferro, o petróleo ou o gás natural. Os agentes de mercado (gerador, distribuidor, comercializador, consumidor livre ou especial, importador e exportador) podem negociar energia com qualquer outro agente, independente das restrições físicas de geração e transmissão. Nesse mercado a comercialização de energia é feita de duas formas: a) o mercado do dia seguinte, ou *spot*, que se refere as transações realizadas em um curto período; e b) o mercado futuro, em que as operações são de médio ou longo prazo. A existência desses dois mercados propicia o fornecimento de eletricidade para sociedade e indústria a um preço justo uma vez que reduz perdas por parte das companhias de geração e a interrupção do serviço devido a demanda superior à capacidade contratada, uma vez que as empresas do setor podem possuir em seu portfólio contratos de ambos os tipos reduzindo o risco (JIFENG, 2006).

Os preços negociados no mercado spot são extremamente voláteis devido ao fato de que a energia elétrica não pode ser armazenada (STOFT, 2002). Dessa forma, a produção é sempre igual ao consumo (considerando-se as perdas como parte do consumo) e assim, um aumento na demanda implicará na necessidade de aumento na produção instantâneo ou que essa

seja adquirida de outro gerador. Da mesma forma, um decréscimo no consumo implicará em perdas para produtor, caso não consiga vender sua produção ou em capacidade não aproveitada.

No mercado futuro, como forma de evitar as variações de preço do mercado *spot* contratos bilaterais são firmados entre geradores e fornecedores. Nessa modalidade de contrato, as partes acordam o volume de energia a ser entregue, a vigência do acordo e o preço a ser pago pela energia para os períodos futuros, de modo a gerar maiores receitas e/ou menores riscos para ambos os lados (STOFT, 2002).

Uma das principais tarefas ao se estudar um acordo de compra e venda no mercado de eletricidade é a necessidade de realização de previsões quanto às tendências de preços de energia, pois irão auxiliar ambos os atores a traçar estratégias de oferta e negociação de forma que maximizem o seu lucro (GARCIA et al, 2005), seja no mercado de curto prazo, ou por meio de contratos bilaterais. Impulsionadas pela forte tendência mundial de abertura e desregulamentação do mercado de eletricidade, diversas pesquisas começaram a ser conduzidas com o intuito de desenvolver melhores técnicas de previsão dos preços no mercado livre de energia (ERNI, 2012).

1.1 JUSTIFICATIVA

De acordo com a ata apresentada no International Energy Outlook (2017), o consumo mundial de eletricidade em 2040 será de aproximadamente 34.5 trilhões de quilowatts/hora, número cerca de 57% maior do que o observado em 2015, ano base do estudo, sendo que o aumento na demanda pela eletricidade nos países em desenvolvimento será aproximadamente duas vezes maior nos países desenvolvidos (USEIA, 2017). Essa expectativa de alto crescimento da demanda por energia é também prevista para o Brasil, com uma elevação no consumo superior a 100% entre 2013 e 2050 (EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA, 2014).

A partir da década de 80, diversos trabalhos científicos começaram a ser desenvolvidos com o intuito de aprimorar as técnicas de previsão dos preços no mercado livre de energia (ERNI, 2012; WERON, 2014; URYASEV, 2000; BERTSIMAS et al, 2004; POUSINHO et al., 2013; GARCIA, 2005). Nesses estudos, diferentes métodos são empregados para abordar o problema merecendo destaque para a utilização da Teoria dos Jogos, nos quais se busca a obtenção de uma solução que resida no ponto de Nash na negociação de contratos bilaterais (SONG et al., 2002; WANG et al. 2014; KRAUSE et al. 2006; KHATIB, GALIANA, 2007; COUCHMAN, 2005; BECK et al., 2007, PALAMARCHUK, 2010).

Considerando-se a tendência de crescimento na utilização da energia elétrica em todo o mundo e os benefícios, brevemente apresentados anteriormente, que a maior competitividade

no setor proporciona não somente a geradores e distribuidores, mas à toda a sociedade, a relevância deste trabalho constitui-se na continuidade e aprofundamento dado aos estudos relacionados.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.2.1 Problema

É possível obter uma solução ótima com o uso da SBKS que forneça resultados distintos aos resultados obtidos com a SBN no modelo de programação dinâmica e solução compromissada?

1.2.2 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em apresentar uma abordagem alternativa à solução sugerida por Palamarchuk (2010), que fez uso da programação dinâmica e da Solução de Barganha de Nash – SBN para desenvolver um portfólio de compra e venda de energia no mercado *spot* e contratos bilaterais que maximize o lucro de ambas as partes de forma equivalente.

Para tal, será modelado um problema aplicando-se a Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky – SBKS, como alternativa à SBN, para a obtenção de uma solução compromissada que busque um resultado que não privilegie nenhum dos lados da negociação. O resultado será então contraposto aos valores obtidos pela solução sugerida por Palamarchuk (2010).

1.2.3 Objetivos específicos

Os seguintes objetivos específicos são estabelecidos:

- Constatar a existência de mais de um ponto ótimo para as possíveis soluções de portfólios envolvendo os três tipos de contratos bilaterais: contratos Tipo 1, contratos Tipo 2 e contratos negociação compromissada;
- Comparar a solução obtida com a aplicação da SBKS em contraposição com a obtida pela aplicação da SBN, de modo em que se constate qual resultará em menores concessões relativas iguais nos contratos de negociação compromissada para o mesmo conjunto de dados.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

O Capítulo 1 – Introdução, apresenta a área, o contexto e o objeto desse estudo, justificando sua relevância e definindo os objetivos geral e específicos que serão abordados ao longo do trabalho.

O Capítulo 2 – Metodologia, apresentará a forma com que a pesquisa foi desenvolvida, sua classificação e as etapas em que fora conduzida.

O Capítulo 3 – Revisão Bibliográfica, expõe de maneira breve o funcionamento do mercado de energia, a vertente desse mercado em que ocorrem as negociações de contratos bilaterais e o funcionamento do mercado do dia seguinte. Além disso, o capítulo apresenta as áreas da ciência das quais se aplicam o conhecimento para o desenvolvimento do modelo testado em seguida.

O Capítulo 4 – Arranjo de Contratos Bilaterais, introduz o problema modelado por Palamarchuk, um exemplo numérico para a ilustração do problema e os avanços feitos por outros autores que se basearam no trabalho do autor.

No Capítulo 5 - É feita a aplicação da Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky para a modelagem de um problema que aborde a questão da programação compromissada de contratos bilaterais de maneira alternativa à apresentada por Palamarchuk. Em seguida são apresentados exemplos numéricos e é feita uma análise comparativa entre os resultados obtidos com a Solução de Barganha de Nash contra os resultados obtidos com a aplicação da Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky para a solução do problema.

No Capítulo 6 – Conclusões e Trabalhos Futuros, o estudo é finalizado com um resumo dos achados e é feita uma proposição de continuidade para as pesquisas na área.

2. METODOLOGIA

Fonseca (2002) define metodologia como sendo o estudo da organização, dos caminhos a serem percorridos, para se realizar uma pesquisa ou um estudo, ou para se fazer ciência. Gerhardt e Silveira (2009) esclarecem que a metodologia se interessa pela validade do caminho escolhido para se chegar ao fim proposto pela pesquisa e que, portanto, não deve ser confundida com o conteúdo e nem com os procedimentos (métodos e técnicas).

2.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Gil (2011) define pesquisa científica como um processo racional e sistemático para a busca de respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa se desenvolve por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados. As pesquisas científicas podem ser classificadas quanto aos seus objetivos ou quanto aos procedimentos técnicos nelas empregados (GIL, 2011).

Quanto aos objetivos, as pesquisas científicas podem ser classificadas como exploratórias, descritivas ou explicativas. As pesquisas exploratórias são realizadas para temas pouco conhecidos, com o intuito de proporcionar maior familiaridade com o tema ou a construir hipóteses. Para tanto, faz-se uso de levantamento bibliográfico, ou entrevistas com especialistas (GIL, 2011). As pesquisas descritivas descrevem determinados grupos ou fenômenos por meio de técnicas padronizadas de coletas de dados como questionários e a observação sistemática (GIL, 2011). Finalmente, as pesquisas explicativas buscam identificar os fatores que determinam e contribuem para a ocorrência dos fenômenos. Devido a isso, se aprofundarão na busca do conhecimento da realidade estando, porém, mais sujeitas a riscos de que se cometam erros (GIL, 2011).

Com relação aos procedimentos técnicos utilizados, existem sete tipos de pesquisa: bibliográfica, documental, experimental, levantamento, estudo de campo, estudo de caso e pesquisa-ação (GIL, 2011; THIOLLENT, 1986). A primeira é desenvolvida com base em material já elaborado, principalmente livros e artigos científicos (GIL, 2011). A segunda difere somente na natureza das fontes, estas que ainda não receberam tratamento analítico, ou que possam passar por reelaborações (GIL, 2011). Na terceira, quando se determina um objeto de estudo, selecionam-se as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, define-se as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto (GIL, 2011). Na quarta, faz-se os questionamentos diretamente à população cujo comportamento deseja-se conhecer

(GIL, 2011). Na quinta, procura-se o aprofundamento de uma realidade específica, é basicamente realizada por meio da observação direta das atividades do grupo estudado e de entrevistas com informantes para captar as explicações e interpretações do que ocorrem naquela realidade (GIL, 2011). A sexta consiste no estudo aprofundado de maneira que se obtenha um amplo e detalhado conhecimento. Finalmente, na sétima, um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLLENT, 1986).

Quanto à natureza da pesquisa, ela pode ser básica ou aplicada. A pesquisa básica objetiva gerar conhecimentos novos, úteis para o avanço da Ciência, sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). A pesquisa aplicada objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Alguns autores, ainda, tipificam as pesquisas científicas pela sua forma de abordagem, sendo elas: quantitativa, qualitativa e combinada (quanti-qualitativa). Na primeira, os resultados da pesquisa podem ser quantificados. Recorre-se à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). O pesquisador deve mensurar o que foi pesquisado sem subjetividade, não interferindo nas variáveis de pesquisa (MIGUEL et al, 2012). Já na pesquisa qualitativa, não há preocupação com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). Deve-se esclarecer a perspectiva do indivíduo, contrastando com a pesquisa quantitativa, de modo que o subjetivo é considerado na mensuração (BRYMAN, 1989).

Após a análise das definições apresentadas, inferiu-se que o trabalho aqui discutido possui uma abordagem quantitativa com embasamento bibliográfico, objetivo descritivo e de natureza aplicada.

2.2 ETAPAS DE DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

As etapas seguidas para a elaboração deste trabalho foram pautadas pelos procedimentos propostos por Gerhardt e Silveira (2009). As autoras propõem sete passos para a condução de um trabalho de pesquisa científica.

Dessa forma, foram tomados os seguintes passos para a realização deste trabalho:

i) Definição do problema;

ii) Revisão da literatura relacionada a mercados livres de energia e a estratégias ótimas

de comercialização de energia por meio de contratos bilaterais. Coleta e consolidação as informações relevantes encontradas;

iii) Definição da problemática: Verificar a existência de mais de uma solução ótima para o problema por meio da reformulação solução proposta por Palamarchuk com o uso da SBKS para determinar outro ponto de equilíbrio para o problema;
   a. utilizados por Palamarchuk;

iv) Rodar simulações com diferentes valores tanto para o modelo de Palamarchuk, quanto para o modelo desenvolvido fazendo a coleta dos dados gerados;

v) Comparar os resultados obtidos pela SBKS com os obtidos pelo uso de SBN;

vi) Concluir se a SBKS fornece resultados comparáveis aos fornecidos no artigo de Palamarchuk.

3. REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, uma breve explanação sobre os temas, conceitos e definições relevantes para o desenvolvimento do estudo aqui discutido serão apresentados. A seção 3.1 apresenta um panorama sobre o funcionamento do sistema elétrico, seus atores e agentes institucionais. Na seção 3.2, é feita uma apresentação sobre o mercado livre de energia, seus números e como o ele está configurado no Brasil. No final da seção, é esclarecido como funcionam o mercado *spot* e o mercado futuro. A seção 3.3 apresenta o ramo da Pesquisa Operacional. Na seção 3.4 é apresentado o conceito de programação dinâmica. Nas seções 3.5 o ramo da Teoria dos Jogos é apresentado. Na seção 3.5, introduz-se o modelo de jogos não-cooperativos, de jogos cooperativos, o conceito de Eficiência de Pareto, a Solução de Barganha de Nash e finalmente, a Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky.

3.1 O SISTEMA ELÉTRICO

O setor elétrico brasileiro começou a ser desenvolvido em meados do século XIX com o aumento da industrialização e expansão das cidades sobre territórios outrora inexplorados (ARAUJO, 2002). De acordo com Araújo (2002), é possível identificar três períodos marcantes em sua história:

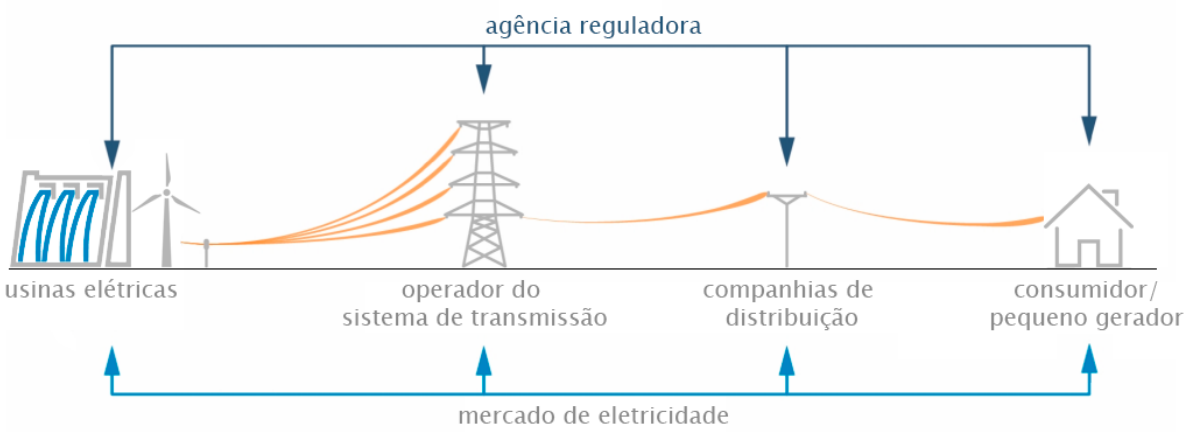
(i) **Nascimento**, período no qual o sistema era fragmentado, com fraca regulamentação e não conseguia atender à demanda nacional;

(ii) **Estatização**, quando houveram grandes investimentos em infraestrutura elétrica; e

(iii) **Privatização**, iniciada na década de 80, em que, devido à crise econômica mundial, houve a transferência das responsabilidades do sistema elétrico para o setor privado, ficando o governo com o papel de regulador.

O sistema elétrico consiste na infraestrutura física para a geração, transporte e uso da eletricidade e pelo mercado de eletricidade, conforme exemplificado na Figura 1.

Figura 1 – Sistema Elétrico



Fonte: Adaptado de Erbach (2016)

A rede elétrica de qualquer país, que em termos grosseiros refere-se à parte física, é constituída dos geradores e dos sistemas de transmissão de energia elétrica, estes são subdivididos em sistemas de transmissão de longa distância e sistemas de distribuição para consumidores residenciais e industriais.

Já mercado elétrico refere-se ao ambiente de negócios em que são tratadas as negociações de compra e venda de energia. Esse mercado possui duas propriedades técnicas que acabam por diferenciar o mercado dos demais mercados de *comodities*:

1) Fornecimento e demanda devem ser sempre balanceados, caso contrário, no caso de excesso de demanda, falhas irão ocorrer devido sobrecarga do sistema. Além disso, a eletricidade gerada não pode ser armazenada em larga escala, o que foi gerado, mas não foi aproveitado é perdido (JOSKOW, 2011);
2) O fluxo de eletricidade na rede não pode ser controlado. A eletricidade irá sempre fluir pelo caminho de menor resistência, portanto, dado que o sistema nacional é interligado, consumidores recebem eletricidade de diversas fontes (JOSKOW, 2011).

3.1.1 Atores

O mercado de eletricidade é constituído dos seguintes atores:

- **Companhias geradoras de energia elétrica:** são responsáveis por gerar e manter as usinas de geração de energia elétrica. Existem diversas formas de geração, sendo as mais comuns: hidroelétrica, termoelétrica, eólica, nuclear, biomassa, marítima e solar. O gerador pode vender energia para o mercado ou diretamente para as

distribuidoras e consumidores por meio de contratos bilaterais. Os Agentes de geração podem ser: concessionários de serviço público de geração, produtores independentes de energia Elétrica, ou autoprodutores.

- **Companhias de transmissão de longa distância**: são responsáveis por construir, manter e operar as redes de transmissão de energia elétrica de uma certa região;
- **Companhias de distribuição**: Os agentes da categoria distribuição são as empresas concessionárias distribuidoras de energia elétrica, que realizam o atendimento da demanda de energia aos consumidores com tarifas e condições de fornecimento reguladas pela Aneel (CCEE, 2017). Não controlam nenhum ativo de geração, transmissão ou distribuição, atuando como intermediários no processo de geração/fornecimento fazendo a interface com o consumidor final e o mercado de energia.
- **Consumidores finais**: podem ser de alta demanda, como indústrias, ou baixa demanda, como escritórios e residências.

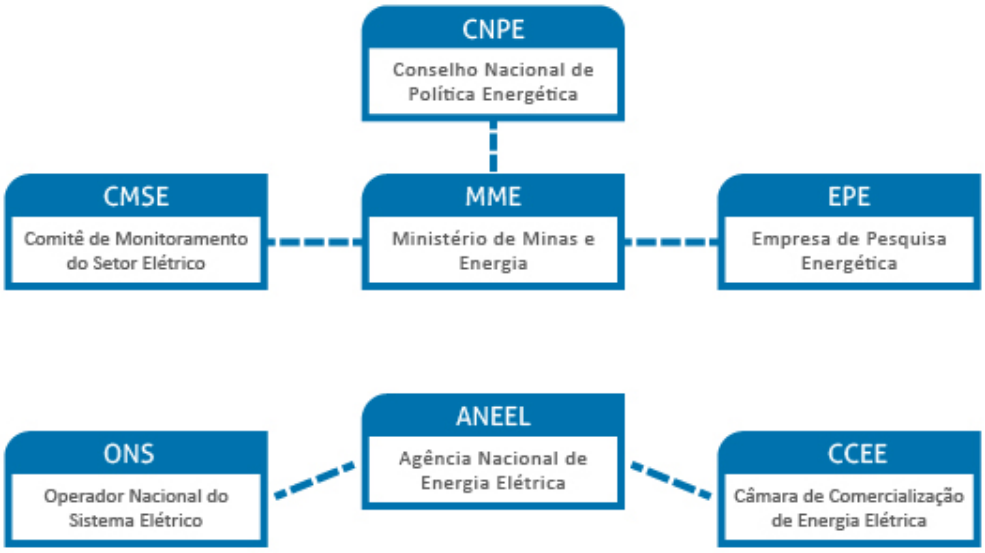
3.1.2 Agentes institucionais

Operam sobre o mercado os seguintes agentes institucionais:

- **Operador de mercado**: É a entidade responsável pela gestão econômica do mercado de energia como um todo, bem como pelo equilíbrio entre as propostas submetidas pelos participantes. O operador também administra as regras do mercado e determina os preços e as quantidades da energia a serem negociadas no mercado.
- **Operador de sistema independente**: É o responsável por manter a segurança do sistema de energia pertencente ao mercado de eletricidade, estabelecendo regras apropriadas para controlar o mercado e os serviços auxiliares. É chamado independente pois, em um ambiente competitivo, deve operar de modo a não favorecer ou penalizar um participante em detrimento de outro.
- **Companhias de transmissão de energia**: Possuem recursos de transmissão, como linhas, cabos, transformadores e aparelhos de compensação reativa. São responsáveis por transmitir energia das geradoras para as distribuidoras, que irão entregar a energia aos consumidores finais.
- **Regulador de mercado**: É o órgão governamental responsável por garantir a justa e eficiente operação do mercado de eletricidade. Determina e fiscaliza o cumprimento das regras do mercado de energia e investiga causas suspeitas de abuso de poder de mercado. A Figura 2 apresenta a estrutura do setor de energia no Brasil

e as principais atribuições de cada órgão.

Figura 2 – Agentes Institucionais no Mercado de Energia Brasileiro



Fonte: CCEE (2017)

No Brasil, as atribuições de cada agente são as seguintes (CCEE; 2017):

- **Conselho Nacional de Política Energética - CNPE**: Homologação da política energética, em articulação com as demais políticas públicas.
- **Ministério de Minas e Energia – MME**: Formulação e implementação de políticas para o setor energético, de acordo com as diretrizes do CNPE.
- **Comitê de Monitoramento do Setor Elétrico – CMSE**: Monitoramento das condições de atendimento e recomendação de ações preventivas para garantir a segurança do suprimento.
- **Empresa de Pesquisa Energética – EPE**: Execução de estudos para definição da Matriz Energética e planejamento da expansão do setor elétrico (geração transmissão)
- **Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL**: Regulação e fiscalização do setor elétrico, zelando pela qualidade dos serviços prestados, universalização do atendimento e pelo estabelecimento de tarifas para consumidores finais, preservando a viabilidade econômica e financeira dos Agentes.
- **Operador Nacional do Sistema – ONS**: Coordenação e controle da operação da geração e da transmissão no sistema elétrico interligado.
- **Câmara de Comercialização de Energia Elétrica – CCEE**: Administração de

contratos, liquidação do mercado de curto prazo e leilões de energia.

3.2 O MERCADO LIVRE DE ENERGIA

O processo de desregulação do setor elétrico teve início na década de 80 (STOFT, 2002). Diante da ineficiência do monopólio exercido por Estados em todo o mundo, buscou-se uma forma de gestão que propiciasse a concorrência entre empresas, que, para conseguirem vencer a concorrência, investissem em tecnologias mais eficientes e produtivas, de modo a fazer com que os custos para os consumidores finais fossem reduzidos (GIL-PUGLIESE, OLSINA, 2014).

A desregulação do setor elétrico, deu origem ao que se chama de Mercado Livre de Energia - MLE (GIL-PUGLIESE, OLSINA, 2014). No modelo de MLE, consumidores e fornecedores são livres para negociar a compra de energia, estabelecendo volume, preço e prazos de suprimento. (KARTHIKEYAN; RAGLEND; KOTHARI, 2013). No Brasil, somente consumidores que possuam uma demanda superior a 500kW podem escolher seus fornecedores, ainda que com um leque menor de opções quando comparados aos consumidores com demandas superiores a 3000kW (ABRACEEL, 2017).

Ao negociar no MLE, as empresas buscam, principalmente, exercer o poder de escolha para obter custos mais baixos, flexibilidade e previsibilidade. Nele, o consumidor pode livremente escolher a fonte desejada da energia a ser recebida e seus parceiros comerciais. O ambiente livre também se apresenta como mais competitivo devido à maior presença de concorrência, reduzindo preços e promovendo aumento da eficiência (JOSKOW, 2011). Além disso, ambas as partes possuem a liberdade para negociar e definir as condições do contrato. A negociação pode envolver, por exemplo, preços ou quantidades diferentes conforme a época do ano. Por fim, os contratos realizados por meio do mercado livre permitem que o consumidor consiga prever os custos da energia elétrica uma vez que os preços são acordados para um período futuro, mitigando o risco associado a mudanças repentinas nas tarifas de energia (ABRACEEL, 2016).

O Mercado Livre de Energia é um ambiente já conhecido em países da União Europeia, em regiões da Ásia e América Latina, e em países como os Estados Unidos e Austrália. (WORLD BANK, 2013). Neste último, por exemplo, o mercado livre da costa leste é totalmente acessível, inclusive para consumidores residenciais. Na União Europeia e nos Estados Unidos, respectivamente, 90% e 60% do mercado é livre (ABRACEEL, 2014).

No Brasil, existem 4.645 empreendimentos geradores de eletricidade em operação. Esses são responsáveis não só por produzir energia e injetá-la no sistema de transporte, mas

também pela manutenção desses centros (ANEEL, 2016). A principal fonte de energia no país ainda são as usinas hidrelétricas que são responsáveis por mais da metade da geração nacional, seguidas das termelétricas com 27% (ANEEL, 2016), essas muito combatidas devido ao seu alto grau poluente e menor eficiência (GIL-PUGLIESE, OLSINA, 2014).

Quadro 1 - Empreendimentos geradores de eletricidade

Tipos de geradores	Quantidade	Potência instalada (kW)	% do total
Usina Hidrelétrica de Energia – UHE	219	91.499.178	60,94%
Usina Termelétrica de Energia – UTE	2947	41.099.709	27,38%
Central Geradora Eolielétrica – EOL	413	10.123.942	6,74%
Pequena Central Hidrelétrica – PCH	441	4.918.967	3,28%
Usina Termonuclear – UTN	2	1.990.000	1,33%
Central Geradora Hidrelétrica – CGH	581	480.933	0,32%
Central Geradora Solar Fotovoltaica – UFV	42	23.008	0,02%
Total	**4645**	**150.135.737**	**100%**

Fonte: ANEEL (2016)

No país, a transmissão da energia elétrica de longa distância é feita por 104 agentes e a distribuição com 116 distribuidoras (CCEE, 2017). A comercialização no mercado livre é feita por 191 agentes comercializadores (CCEE, 2017).

O modelo de mercado elétrico em vigência no Brasil, estabelece que as relações comerciais ocorram de duas formas distintas: no Ambiente de Contratação Regulada - ACR e no Ambiente de Contratação Livre – ACL (CCEE, 2017). No caso do ACR, o comércio de energia é formalizado por meio de contratos celebrados entre geradores e os distribuidores, que participam dos leilões de compra e venda de energia. Os contratos do ACR têm regulação específica e não negociável (preço, vigência, submercado de registro do contrato). No ACL os agentes de mercado têm liberdade para negociar e estabelecer em contratos os volumes, valores e vigência da energia a ser entregue de um a outro, seja por negociação no mercado *spot*, ou por contratos bilaterais de longo prazo. Todos os contratos firmados tanto no ambiente livre, como no regulado, devem ser registrados na Câmara de Comercialização de Energia Elétrica – CCEE, que gerencia as atividades de comercialização de energia no SIN - Sistema Interligado Nacional (CCEE, 2017).

Esse modelo que está em vigor desde 2004, é fruto do aprimoramento da legislação sobre o assunto que passou a sofrer mudanças em 1995 em que se introduziu o Modelo de Livre Mercado - MLM. Como destaques da legislação atual, podem-se citar: a previsão do financiamento através de recursos públicos e privados; a divisão das empresas participantes por

ramo de atividade; a convivência entre empresas estatais e privadas; a competição na geração e comercialização; a existência do mercado livre e regulado; a contratação de 100% do mercado mais a reserva. O Quadro 1, abaixo, indica as principais mudanças ocorridas no mercado de energia brasileiro ao longo dos anos.

Quadro 2 - Mudanças no setor elétrico brasileiro

Modelo Antigo (até 1995)	Modelo de Livre Mercado (1995 a 2003)	Novo Modelo (2004)
Financiamento através de recursos públicos	Financiamento através de recursos públicos e privados	Financiamento através de recursos públicos e privados
Empresas verticalizadas	Empresas divididas por atividade: geração, transmissão, distribuição e comercialização	Empresas divididas por atividade: geração, transmissão, distribuição, comercialização, importação e exportação.
Empresas predominantemente Estatais	Abertura e ênfase na privatização das Empresas	Convivência entre Empresas Estatais e Privadas
Monopólios - Competição inexistente	Competição na geração e comercialização	Competição na geração e comercialização
Consumidores Cativos	Consumidores Livres e Cativos	Consumidores Livres e Cativos
Tarifas reguladas em todos os segmentos	Preços livremente negociados na geração e comercialização	No ambiente livre: Preços livremente negociados na geração e comercialização. No ambiente regulado: leilão e licitação pela menor tarifa
Mercado Regulado	Mercado Livre	Convivência entre Mercados Livre e Regulado
Planejamento Determinativo - Grupo Coordenador do Planejamento dos Sistemas Elétricos (GCPS)	Planejamento Indicativo pelo Conselho Nacional de Política Energética (CNPE)	Planejamento pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE)
Contratação: 100% do Mercado	Contratação : 85% do mercado (até agosto/2003) e 95% mercado (até dez./2004)	Contratação: 100% do mercado + reserva
Sobras/déficits do balanço energético rateados entre compradores	Sobras/déficits do balanço energético liquidados no MAE	Sobras/déficits do balanço energético liquidados na CCEE. Mecanismo de Compensação de Sobras e Déficits (MCSD) para as Distribuidoras

Fonte: CCEE (2017)

Os agentes do mercado de energia, assim como em qualquer outra empresa, têm como objetivo maximizar seus lucros e ao mesmo tempo proteger-se dos riscos do mercado. O planejamento de como alocar seus recursos e contratos pode ser considerado como um problema de escolha de investimentos (DE LLANO-PAZ et al, 2017).

Uma das abordagens para a mitigação de riscos é o gerenciamento de portfólio de contratos. Nela, busca-se obter-se a diversificação dos acordos firmados, considera-se que cada contrato está sujeito a diferentes restrições e que os recursos para geração da energia podem ser definidos em termos de custo ou retorno financeiro e risco associado. (DE LLANO-PAZ et al, 2017). O risco e o retorno de um determinado investimento estão, usualmente, inversamente

relacionados. A teoria de otimização de portfólios é adequada para auxiliar a alocação de diferentes ativos (JIFENG, 2006). Dessa forma, os agentes do mercado de energia, usualmente atuam tanto no mercado *spot*, quanto no mercado futuro.

3.2.1 O mercado *spot*

O mercado *spot*, também conhecido como mercado de curto prazo, refere-se às negociações que vigorarão em tempo real (mercado intradiário), no dia seguinte, ou na mesma semana. Seu principal papel é o de garantir o balanceamento da carga e também o de possibilitar que os agentes de mercado consigam cumprir com suas obrigações contratuais (STOFT, 2002).

No mercado intradiário negociam-se acordos com entrega prevista para o mesmo dia da negociação. Sua natureza imediata proporciona que os produtores otimizem sua geração de curto prazo, revendendo energia excessiva ou comprando energia necessária quando a demanda atinge um valor superior ao que o gerador sozinho consegue entregar (STOFT, 2002). No mercado do dia seguinte, com fica subentendido pelo nome, os acordos entram em vigor no dia seguinte ao período da negociação (STOFT, 2002).

Há diversos requisitos técnicos para o balanço do sistema em tempo real. Assim, os mercados *spot* podem ser vistos, como uma bolsa de energia, fazendo alusão às bolsas de valores espalhadas pelo mundo. Esses mercados são centralizados e gerenciados pelas entidades responsáveis pela operação do sistema físico, para assegurar confiabilidade e segurança (GIL-PUGLIESE; OLSINA, 2014).

O preço da energia no mercado *spot* é recalculado pelo operador de mercado a todo o momento. Os ajustes no valor são baseados nas diferenças entre o que foi gerado e o que está sendo consumido dentro dos volumes previstos nos contratos de longo prazo. Além disso, considera-se as ofertas de valor e volumes desejados, submetidas pelas geradoras e distribuidoras, considerando as condições do sistema no momento da entrega. Em geral, preços no mercado *spot* são altamente voláteis. Isso se dá devido a diversos fatores, sendo que a impossibilidade de armazenamento de energia em larga escala se configura como um dos principais, obrigando o constante balanceamento entre consumo e geração (ERNI, 2012).

3.2.2 O mercado futuro

As negociações no horizonte de entregas futuras de médio ou longo prazo (semanas, meses ou anos), também conhecidos como derivativos, são realizadas no mercado futuro. Nesse mercado, predomina-se o uso de acordos baseados em contratos bilaterais entre fornecedores e consumidores (CCEE, 2017).

Os acordos realizados nesse mercado proporcionam maior segurança para ambos os lados pois asseguram-lhes um compromisso, de um lado com o outro, de que entregas que amontarão a um volume total pré-determinado serão feitas durante um período especificado (CCEE, 2017). Com isso, contratos bilaterais proporcionam uma maior estabilidade no fornecimento e demanda de energia elétrica contribuindo para a gestão de riscos no portfólio das empresas envolvidas, além de protegê-las da grande volatilidade dos preços causados pela especulação no mercado *spot.* O lado negativo das negociações no mercado futuro com relação aos preços é o fato de que nele a energia é, em geral, negociada a um valor médio, mais "suavizado" do que no mercado *spot*, o que reduz a possibilidade de maiores lucros hora para um lado, hora para o outro (STOFT, 2002).

Os contratos bilaterais referem-se aos contratos assinados entre consumidores e distribuidores de energia antes do período em que a energia será repassada. Assim, os preços e condições são determinados com antecedência. Contratos bilaterais são tidos como de baixo risco, pois assume-se que os custos de produção são determinísticos. No Brasil, mais de 70% dos contratos no mercado livre apresentam vigência superior a 4 anos (CCEE, 2017).

Apesar da maior segurança proporcionada pelos acordos bilaterais, ao negociar esse tipo de contrato, os participantes também correm riscos, sendo os principais: o risco de *default* - não pagamento, ou o risco de não entrega. O primeiro pode ocorrer devido a um momento de instabilidade da economia ou administrativo da empresa. O segundo devido à insuficiência na geração de energia ou devido a falhas no sistema de transmissão e distribuição de energia (LIU, 2004).

3.3 PESQUISA OPERACIONAL

O termo "Pesquisa Operacional" teve origem em 1936, quando cientistas da Royal Air Force foram reunidos para analisar (pesquisar) um modo de operar o recém inventado radar (CORREA, 2010). Porém, não foi até a Segunda Guerra Mundial, que os exércitos americanos e britânicos viram nos conhecimentos da área uma forma de otimizar suas táticas e estratégias militares, que o ramo da Pesquisa Operacional ganhou visibilidade e grande importância (CORREA, 2010). Após a guerra, o conceito de analisar as operações de negócios foi saudado com entusiasmo pela indústria, ávida por processos eficientes e eficazes tão necessários para sua estruturação nos anos de escassos recursos que seguiram (CORREA, 2010). Dentro desse contexto o uso das ferramentas quantitativas dos diversos ramos da Pesquisa Operacional passou a ser tido como suporte essencial à tomada de decisões.

De acordo com Hillier e Lierberman (2010) a aplicação da Pesquisa Operacional para

solução de um problema se dá em seis passos. O processo se inicia por cuidadosamente observar e modelar o problema, incluindo todos os dados relevantes. Em seguida, constrói-se um modelo científico (tipicamente matemático) que tente abstrair a essência do problema real e assume-se que o modelo é uma representação suficientemente precisa das principais características do problema original, bem como que as soluções a serem obtidas a partir do modelo são também válidas para o problema real. Prossegue-se com o uso de apoio computacional para obter soluções do problema modelado e, em posse das soluções do modelo, testam-se as hipóteses levantadas – fazendo-se correções, caso necessário. Então, aplica-se esse modelo continuamente em busca de aperfeiçoá-lo e finalmente, implementa-se o modelo e busca-se a melhor solução, solução ótima, para o problema.

O conceito chave por trás da Pesquisa Operacional é a construção de modelos ou formulação de programação matemática. Em outras palavras, procura-se abstrair um problema da vida real em um modelo matemático composto de uma função objetivo que deve ser otimizada respeitando-se um conjunto de restrições. A área engloba uma vasta gama de técnicas e métodos para resolução de problemas, como, por exemplo: simulação de sistemas, otimização matemática, teoria das filas, processos de decisão de Markov, métodos econômicos, análises de dados e Teoria dos Jogos (WILLIANS, 1999).

A modelagem de problemas de otimização que trata sobre modelos baseados no mercado de energia, tem sido alvo de estudo por diversos pesquisadores. Um estudo bibliométrico sobre o assunto na base de dados "Web of Science", realizado no dia 06 de novembro de 2017, usando-se a *string* de pesquisa "**electricity market* OR power market***", com filtro de busca "**Operations Research Management Science**" e restringindo a data das publicações aos anos de **1980 a 2017** gerou **1.79**2 resultados. A grande quantidade de publicações científicas sobre o assunto demonstra a importância do uso da Pesquisa Operacional para a melhoria e evolução do mercado de eletricidade.

3.4 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

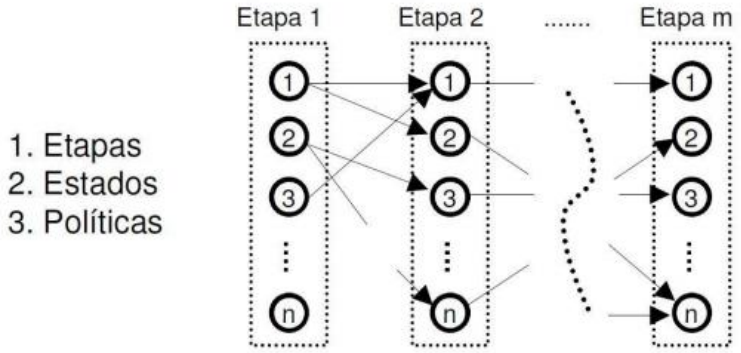
Ao modelar determinados problemas do mundo real, é conveniente que se considere um sistema que possa assumir um número de estados possíveis e que destes evolua de um para o outro. Um estado desse sistema pode ser definido em termos de uma ou mais variáveis, sejam elas discretas – aquelas que possuem um número contável de valores entre quaisquer dois valores; ou contínuas – aquelas que podem assumir um número infinito de valores entre dois valores quaisquer.

Além disso, o sistema em questão pode ser que apresente um estado inicial

conhecido, que esteja sujeito a leis de controle também conhecidas. Nesse caso, o estado da etapa seguinte pode ser determinado pelos estados e decisões da etapa atual, diz-se então se tratar de um problema determinístico. Porém, pode ser que as leis de controle sejam atribuídas ao acaso, ou a fatores desconhecidos. Nesse segundo caso, existe uma distribuição de probabilidade associada para a determinação do estado da próxima etapa e, portanto, é classificado como um problema estocástico/probabilístico (MAYERLE; 2015).

A Programação dinâmica é uma técnica matemática útil para a elaboração de uma sequência de decisões inter-relacionadas, de modo a determinar a combinação de decisões ótimas (HILLIER e LIEBERMAN, 2013). Em contraste com a Programação Linear, outro ramo da Pesquisa Operacional, não existe uma formulação matemática para os problemas de Programação Dinâmica, sendo essa uma abordagem genérica para a resolução de problemas e as equações utilizadas devem ser desenvolvidas de acordo com cada situação apresentada (HILLIER e LIEBERMAN, 2013). Para isso, essa abordagem transforma um problema complexo em uma sequência de problemas menores e mais simples de serem tratados.

Figura 3 – Funcionamento da Programação Dinâmica



Fonte: Adaptado de TONELLI (2006)

O objetivo da otimização é o de encontrar uma política ótima que otimize (maximize ou minimize) a função objetivo ao percorrer suas *m* etapas.

À cada estágio/iteração do problema é possível definir o estado da solução. Um estado é o ponto alcançado como consequência da decisão/evento ocorrida no estágio anterior. Para um dado estado do sistema, a política ótima para os restantes estados é independente da política de decisão adotada nos estados anteriores (BELLMAN; 1959).

De acordo com Hillier e Lieberman (2013), são características dos problemas de programação dinâmica:

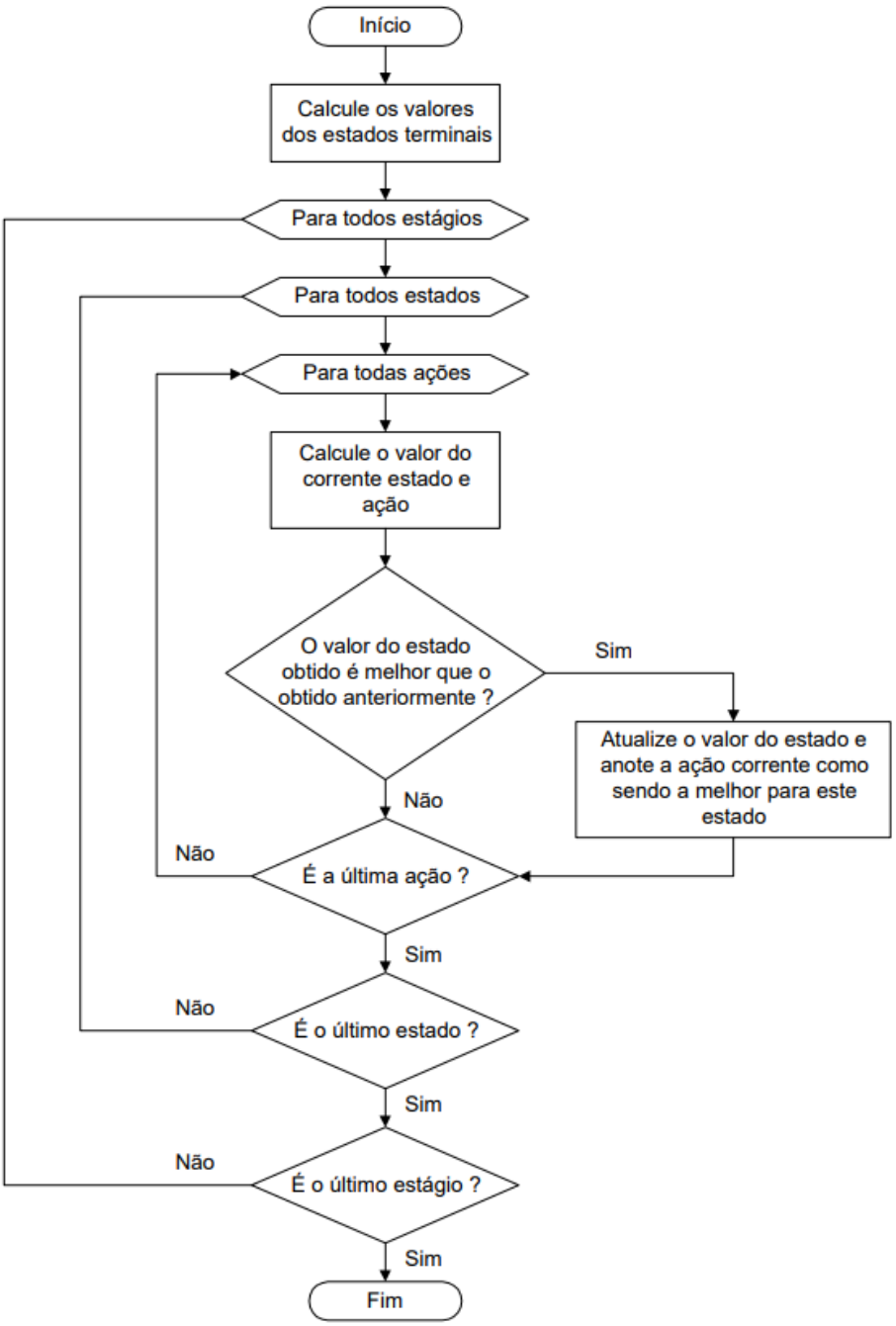
1) O problema pode ser dividido em etapas, nos quais uma decisão sobre a

política a ser adotada é necessária a cada etapa;

2) Cada etapa possui um número de estados associados ao seu início. Em geral, os estados são as diversas condições possíveis nas quais o sistema pode se encontrar naquele estágio do problema;
3) O efeito da decisão sobre a política a ser adotada em cada etapa é o de transformar o estado atual em um estado associado ao início do estágio seguinte;
4) O procedimento de resolução desenhado visa encontrar a solução ótima para o problema como um todo, estendendo a fórmula de decisão sobre a solução ótima em cada estágio para cada um dos estados possíveis;
5) Dado o estado atual, uma solução ótima para as próximas etapas é independente das decisões adotadas nas etapas anteriores;
6) O procedimento para chegar à solução ótima final geralmente é iniciado encontrando a solução ótima da última etapa, que prescreve a solução ótima para cada um dos estados
7) Há uma relação recursiva que identifica a solução ótima da etapa m, dada a solução ótima da etapa $n + 1$;
8) Ao usar a relação recursiva, o procedimento se inicia pela última etapa e se move de trás para frente até encontrar a solução ótima da primeira etapa.

O procedimento para a solução de um problema de programação dinâmica se resume então a: estruturar a solução ótima para a última etapa; procurar uma solução recursiva para que se encontre o valor ótimo do resultado; calcular o valor ótimo do de maneira ascendente, construir a solução. Tal procedimento é exemplificado pelo fluxograma da Figura 4.

Figura 4 - Fluxograma de execução de um problema de programação dinâmica



Fonte: Mayerle (2005)

Portanto, a Programação Dinâmica consiste em estruturar um problema de otimização em múltiplos estágios que são resolvidos, um de cada vez, sequencialmente. Dessa forma, a solução de um estágio serve como insumo para a resolução do próximo estágio.

3.5 TEORIA DOS JOGOS

A Teoria dos Jogos trata-se de uma teoria matemática que aborda a solução de problemas em um ambiente competitivo, isto é, conflitos em que o resultado final depende de como os adversários tomam suas decisões e assumindo-se duas premissas básicas: os jogadores são racionais e os jogadores focam apenas em maximizar o seu ganho (HILLIER e LIEBERMAN, 2013). Esse ramo da matemática tem suas raízes na modelagem de problemas econômicos ou políticos. Hoje, porém tem sido aplicada a estratégias militares, jogos de mesa, campanhas publicitárias, conflitos diplomáticos, na teoria da evolução em sistemas biológicos e outros (HILLIER, LIEBERMAN, 2013).

Suas origens datam do final do século XIX com a publicação dos estudos de Waras e logo em seguida no começo do XX com os trabalhos de Borel e Zermelo, ambos matemáticos e de Cournot e Edgeworth, economistas. Grandes progressos foram obtidos na década de 1940, quando John von Neumann (matemático) e Oskar Morgenstern (economista) buscavam uma forma de estudar o comportamento humano no momento de tomada de decisões. Mas, foi nas décadas de 1950 e 1960 que a área ganhou grande impulso com a publicação dos estudos desenvolvidos por Nash (conceito de equilíbrio para jogos não cooperativos e solução para negociações em monopólios bilaterais), Aumann e Shapley (TONELLI; 2006).

Apesar da ideia geral de que o objetivo da modelagem de um problema com a aplicação da Teoria dos Jogos é o de apontar um vencedor ou a melhor estratégia, Tonelli (2006), afirma que é mais assertivo afirmar que a Teoria dos Jogos se preocupa em dar uma classificação das situações de jogo e encontrar situações especiais.

Na Teoria dos Jogos, os tomadores de decisão são conhecidos como jogadores. Tipicamente, estuda-se jogos de dois jogadores (FEGURSON; 2006), mas um número finito de jogadores pode também ser considerado. Os jogares, jogador I e jogador II, têm uma decisão a tomar, essas podem ser escolhidas dentro de um universo na maioria das vezes finito e conhecido. A pontuação de cada jogador depende somente de sua própria escolha e da escolha feita pelo outro jogador (MYERSON; 1991).

No caso em que as ações de cada jogador são independentes, tem-se um jogo não-cooperativo. Nos jogos cooperativos admite-se que os jogadores ajustem entre eles uma escolha de estratégia. Os jogos cooperativos têm ainda uma forma extensiva e uma forma estratégica (ou normal). Na forma extensiva há uma evolução dinâmica do jogo em que a cada instante um jogador faz sua jogada (TONELLI; 2006).

Assim como na programação dinâmica, a Teoria dos Jogos lida com jogos que possuam escolhas determinísticas e, neste caso, tem-se um jogo de estratégia pura; e com jogos que possuam escolhas probabilísticas, tais jogos são conhecidos como jogos de estratégia mista.

Uma questão central em Teoria dos Jogos é o estudo de estratégias ditas ótimas. Uma característica básica presente em muitas dessas situações se refere ao fato de que o resultado final depende primariamente da combinação das estratégias selecionadas pelos adversários (HILLIER e LIEBERMAN, 2013). Neste contexto, a Teoria dos Jogos é a teoria matemática que endereça, de modo formal e abstrato, os principais fatores de situações de competitividade como os mencionados, focando particularmente no processo de tomada de decisão dos adversários.

3.5.1 Jogos não-cooperativos

De forma simples, um jogo não-cooperativo entre dois jogadores pode ser definido por:

Sejam S_I, S_{II}, A_I, A_{II} em que:

1) S_I é um conjunto não-vazio das possíveis jogadas (escolhas) que o jogador I pode fazer;
2) S_{II} é um conjunto não-vazio das possíveis jogadas (escolhas) que o jogador II pode fazer;
3) A_I e A_{II} são as funções pontuação (funções reais) definidas em $S_I \times S_{II}$.

Essa forma de descrever um jogo é conhecida como "Forma Estratégica" e pode ser interpretada como: ao mesmo tempo, e sem que tenha nenhuma informação sobre a jogada do seu oponente, o jogador I escolhe $s_I \in S_I$ e o jogador II escolhe $s_{II} \in S_{II}$, o resultado para qual o jogador I vence é $A_I(s_I, s_{II})$ e o jogador II vence quando $A_{II}(s_I, s_{II})$ (FEGURSON; 2006).

Um exemplo clássico usado para ilustrar a um jogo não-cooperativo em Teoria dos Jogos é o "Dilema dos prisioneiros", formalizado pelo matemático Albert W. Tucker na década de 50 (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994). O problema apresenta a situação de dois criminosos, chamados Al e Bob, que foram capturados pela polícia. O astuto delegado aborda individualmente Al e depois Bob fazendo-lhes a seguinte proposta: Cada um pode escolher negar, confessar o crime, ou preferir o silêncio, com as seguintes condições:

(1) Caso nenhum deles confesse, ambos ficarão presos por 1 ano.
(2) Caso os dois confessem, os dois ficarão presos por 5 anos.
(3) Caso um confesse e o outro negue, o que confessou será liberado e o que negou será condenado a 10 anos na cadeia.

Os possíveis resultados são representados no quadro abaixo:

Quadro 3- O dilema do prisioneiro

		Bob	
		Confessar	Negar
Al	Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	Negar	(-10,0)	(-1,-1)

Fonte: OSBORNE; RUBINSTEIN (1994)

No caso de haver consulta entre os jogadores talvez eles escolhessem a estratégia (Negar, Negar), uma solução que não fosse tão prejudicial a ambos ao mesmo tempo, mas como o jogo é não-cooperativo, eles não podem ter certeza da estratégia a ser adotada pelo outra já que há um prêmio por acusar o outro.

3.5.2 Jogos cooperativos (jogos de barganha)

Jogos cooperativos com dois jogadores são conhecidos como jogos de barganha. Uma barganha se dá quando os jogadores tentam chegar a um acordo, em que um faz uma oferta e o outro faz uma contraoferta sucessivamente até que se obtenha um acordo ou que ambos os lados desistam da negociação (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994). A cooperação se dá em um ambiente conflito de interesses sobre como essa cooperação deve ser realizada, pois cada lado busca uma forma de maximizar seus ganhos em detrimento dos ganhos do outro jogador (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

De maneira geral, um jogo de barganha pode ser definido como:

Dois jogadores, J_I e J_{II}, dispõem de seu conjunto finito de estratégias Σ_I e Σ_{II} respectivamente e a forma normal do jogo com a função de pagamento $\Pi = \Sigma_I \times \Sigma_{II} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é conhecida. Na forma cooperativa os jogadores decidem por uma distribuição de probabilidades "σ" no conjunto $\Sigma_I \times \Sigma_{II}$. O pagamento esperado para os jogadores é: $\Pi(\sigma) = \sum_{ij}(\Pi_I(i,j), \Pi_{II}(i,j))$. O conjunto Π_{coop} de todos os pagamentos esperados possíveis é a envoltória convexa dos pares $\{(\Pi_I(i,j), \Pi_{II}(i,j)) | \ i \in \Sigma_I, \ j \in \Sigma_{II}\}$.

Em geral, um jogo cooperativo com dois jogadores é caracterizado por um conjunto convexo do plano. Neste caso não há cooperação para a distribuição dos lucros, só há cooperação na escolha de estratégias. Este tipo de jogo é conhecido como, um jogo de NTU - *non-transferable utilities* (TONELLI; 2006).

Problemas de barganha, em geral, podem ser aplicados nos contextos de: análise das interações econômicas como negociação de salários; acordos entre empresas que ofertem o

mesmo serviço, ou produto; no estabelecimento de preços de *commodities*; na tentativa de que se evite baixas na produção por possíveis paralisações decorrentes de uma negociação sem acordo e; até mesmo avaliar se países poderão chegar a um consenso ou se irão entrar em guerra em um determinado contexto (MUTHOO, 1999).

3.5.3 Eficiência de pareto

Uma combinação de estratégias é dita ótimo de Pareto se: não se puder passar para uma outra de modo que nenhum jogador fique prejudicado e pelo menos um fique beneficiado. Trata-se de um conceito que analisa a eficiência social, relevante para o grupo de jogadores como um coletivo, enquanto que o equilíbrio de Nash é um conceito que analisa a eficiência individual, relevante para cada um dos jogadores como agente individual (FRIEDMAN; 1990).

O objetivo de um jogo cooperativo é determinar um ponto da região de pagamento que satisfaça (ou que seja justo para) os dois jogadores. A primeira coisa a fazer então é eliminar os pontos que são ruins para os dois jogadores - pontos de desacordo (TONELLI; 2006).

Matematicamente:

Um ponto $(u_{1,}v_1) \in \Pi_{coop}$ domina outro ponto $(u_{0,}v_0) \in \Pi_{coop}$ se $u_1 > u_0$ e $v_1 \geq v_0$ ou caso $v_1 > v_0$ e $u_1 \geq u_0$. Um ponto $(u, v) \in \Pi_{coop}$ que não é dominado por nenhum outro ponto de Π_{coop} é chamado ponto ótimo de Pareto.

No Dilema dos Prisioneiros analisado, vimos que a solução (equilíbrio) não é eficiente sob o ponto de vista de Pareto, porque no resultado indicado como ideal os jogadores optam por (Confessar, Confessar), mas se optassem por (Não confessar, Não confessar) conseguiriam um resultado melhor. Este aparente paradoxo é explicado pela compreensão de que a opção (Não confessar, Não confessar) é a indicada sob o ponto de vista social (coletivo de jogadores), enquanto que a opção (Confessar, Confessar) é a indicada sob o ponto de vista individual. Este jogo ilustra que, de fato, existe uma contradição entre a procura do bem individual e a procura do bem coletivo (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

3.5.4 Equilíbrio de Nash

De uma forma simples, o ponto de equilíbrio de Nash pode ser definido como um estado estável de um sistema envolvendo a interação de diferentes jogadores no qual nenhum jogador consegue obter ganhos a partir de uma mudança unilateral de estratégia caso a estratégia dos demais jogadores permaneça inalterada (NASH, 1950). Ou seja, ao atingir o Equilíbrio de

Nash, um jogador não consegue aumentar o seu *payoff*, independentemente da nova ação, caso um segundo jogador mantenha a sua estratégia, e vice-versa.

Matematicamente:

Considera-se um jogo com n jogadores $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e uma função de pagamento $\Pi: \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com o conjunto das estratégias Σ_i. Um ponto $\sigma = (u_1, \ldots, u_n) \in \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ chamado de perfil de estratégias do jogo.

O objetivo da Teoria dos Jogos é encontrar o "melhor" perfil de estratégia do jogo e o valor do pagamento gerado por esse perfil. Mas, melhor em que sentido? O conceito de equilíbrio de Nash, sugere que se encontre um perfil de estratégias com que se conseguiria convencer cada jogador separadamente de que não é bom ele mudar de estratégia.

Para tal, considera-se um perfil qualquer $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Para cada jogador p_i define-se qual seria a melhor estratégia deste jogador em presença deste perfil. Isto dará o conjunto de melhor resposta.

Matematicamente:

$$M_i(u) = \{v_i \in \Sigma_i \mid \Pi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) = \max_{v \in \Sigma_i} \Pi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \ldots, u_n)\}$$

Uma vez definido o conjunto de melhor resposta ao perfil u para cada jogador. Pode-se definir o conjunto das melhores respostas:

$$M(u) = M_1(u) \times \ldots M_n(u) \subset \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$$

O ponto de equilíbrio de um jogo pode ser então interpretado da seguinte forma: Suponha que temos um perfil u tal que $u \in M(u)$. Do ponto de vista do jogador p_i isto também significa que a estratégia $u_i \in M_i(u) \subset \Sigma_i$, ou seja, u_i é a melhor resposta do jogador para o perfil u. Assim se ele muda de estratégia e os demais jogadores permanecem com a estratégia u_j, ele não pode melhorar o valor de sua função de pagamento Π_i. Assim para um perfil de equilíbrio, se um jogador mudar sozinho de estratégia ele corre o risco de rebaixar o seu ganho individual Π_i . Pode existir um perfil em que todos os jogadores ganham mais que num perfil de equilíbrio, mas aí cada jogador precisaria do auxílio dos outros (TONELLI, 2006).

O Dilema dos Prisioneiros pode ser usado para ilustrar o conceito do Equilíbrio de Nash. O perfil (confessar, confessar) é o perfil de equilíbrio do jogo. Uma vez neste ponto, o "pagamento" do prisioneiro 1 é 5 anos de cadeia. Caso ele mude de estratégia e o segundo prisioneiro mantenha a dele, o novo perfil seria (não confessar, confessar), o primeiro prisioneiro pegaria 10 anos de cadeia, o que é pior. A mesma coisa vale para o segundo prisioneiro.

Observa-se que o perfil (não confessar, não confessar) concederia um pagamento

melhor para os dois do que o perfil de equilíbrio. Mas neste caso, cada jogador pode melhorar ainda mais seu pagamento caso ele desvie da estratégia do perfil e o outro permaneça com a mesma decisão (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

Alguns problemas podem apresentar diversos pontos de equilíbrio de Nash, como, por exemplo, o problema conhecido como "A Batalha dos Sexos". Neste problema, um casal de namorados concordou em sair à noite, mas ambos não lembram se haviam concordado em ir a uma ópera ou a um jogo de futebol. O problema é que, o homem prefere ir ao jogo de futebol, enquanto a mulher prefere ir à ópera. Ambos preferem ir ao mesmo evento do que ir sozinhos ao lugar de preferência. Se por algum motivo eles não conseguem se comunicar um com o outro, para onde devem ir? A matriz de pagamentos seria a seguinte:

Quadro 4 - Batalha dos Sexos

	Opera	Futebol
Opera	(2, 1)	(0, 0)
Futebol	(0,0)	(1,2)

Fonte: OSBORNE; RUBINSTEIN (1994)

Este jogo apresenta dois Equilíbrios de Nash de estratégia pura, os casos em que ambos decidem ir ao jogo de futebol, ou em que ambos decidem ir à ópera (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994).

Nem todos os jogos, porém, apresentam um Equilíbrio de Nash (GIBBONS, 1992). No jogo "*Matching Pennies"*, cada um dos jogadores (Par e Ímpar) deve lançar, secretamente, uma moeda e verificar se ela aterrissou em cara ou em coroa. Após terem jogado as moedas, ambos devem simultaneamente contar o resultado. Caso as moedas aterrissem no mesmo lado (cara, cara) ou (coroa, coroa), então o jogador Par ganha as duas moedas, ou seja, ganha a do jogador Ímpar (+1 para Par, -1 para Ímpar). Se as moedas aterrissaram em lados diferentes (uma em cara e a outra em coroa) Ímpar deve ficar com as duas moedas, recebendo a moeda de Par (-1 para Par, +1 para Ímpar), gerando a matriz de *payoffs* abaixo:

Quadro 5- *Matching Pennies*

	Cara	Coroa
Cara	(+1, -1)	(-1, +1)
Coroa	(-1, +1)	(+1, -1)

Fonte: GIBBONS (1992)

Como se pode observar, este jogo não apresenta nenhum ponto de equilíbrio; ou seja, os jogadores podem mudar suas estratégias para obter ganhos sem depender da mudança de estratégia do outro (GIBBONS, 1992).

Para a Solução de Barganha de Nash - SBN, considera-se uma função $f: B \rightarrow U$ em que *X* corresponde à série de possíveis acordos e *D* representa um resultado de não acordo.

Matematicamente, tem-se então (OZDAGLAR, 2010):

$$S = \{(x_1, x_2) | \; x_1 + \; x_2 = 1, \; x_1, x_1 \; \geq 0\},$$

Cada jogador *i* tem suas preferências representadas por uma função de utilidade u_i sobre função $S \cup \{D\}$. O conjunto dos pontos da região de pagamento cooperativo que são ótimos de Pareto e dominam os pares de valores maxmin(v_1, v_2) dos jogadores 1 e 2 respectivamente. A série *U* de possíveis resultados é definida como:

$$U = \{(v_1, v_2) \mid u_1(x) = v_1, \; u_2(x) = v_2 \, , \forall x \; \in X \}$$

Dessa forma, um problema de barganha é um par (U, d) em que $U \subset R^2$ e $d \in \; U$. U é uma série convexa (Se dois resultados do jogo elevem aos pontos x e y em D, então todas as variações desses resultados deve elevar-se a todas combinações convexas de x e y) e compacta em que existe algum $v \in U$ tal que $v > d$. Assume-se que exista ao menos um ponto $x_i \in S \mid x_i > \; v_i$ ou seja, a barganha deve ser beneficial a ambos os jogadores. A série de todos os possíveis problemas de barganha é denotado por B. Uma possível solução é a solução de barganha de Nash que otimiza $(v_1 \; - d_1)(v_2 \; - d_2)$ sujeito a $(v_1, v_2) \in U$ e $(v_1, v_2) \geq (d_1, d_2)$.

Nash (1950b) provou que a solução proposta é única, quando respeitados os seguintes axiomas:

a) **Invariância para transformações afins (invariância para representações de utilidade equivalentes):** Se a função utilidade de um ou mais jogadores é transformada por uma função linear, então o acordo também deverá ser transformado pela mesma função linear;

b) **Simetria**: O nome dos jogadores não deve influenciar o resultado. Se o jogador 1 e o jogador 2 trocarem sua função utilidade, então o acordo também deve ser trocado respectivamente;

c) **Independência de Alternativas Irrelevantes - IAR**: Se o conjunto de possíveis acordos aumentar (novas possibilidades de acordo serem acrescentadas), mas a solução da barganha tomar um acordo que está contido no conjunto anterior (antes de serem acrescidas as novas opções), então o acordo atingindo (solução) deverá ser o mesmo que do atingido com primeiro o conjunto de soluções possíveis (antes da adição das novas alternativas).

d) **Otimalidade de Pareto**: Para qualquer problema de barganha o acordo obtido f(U, d) deve ser Pareto-Eficiente.

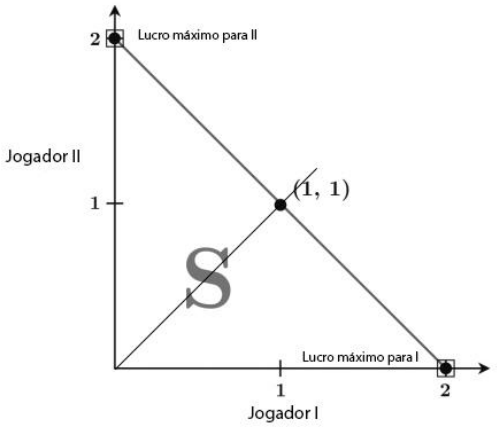
3.5.5 Solução de barganha de Kalai-Smorodinsky

Alguns anos após Nash ter publicado sua solução para jogos de barganha, Raiffa e Luce em seu livro: "Games and Decisions" fizeram crítica sobre a teoria proposta por Nash. A crítica focou-se especialmente no axioma "Independência de Alternativas Relevantes" – IAR. O problema com o uso desse axioma é a distorção que ocorre quando os jogadores atribuem utilidades diferentes ao acordo que está sendo negociado (ANBARCI; BOYD III, 2008). No mesmo livro, os autores propuseram uma solução alternativa que essencialmente descrevia um processo discreto de barganha, porém esse não foi caracterizado axiomaticamente.

Bartlett (2016), ilustra o problema com o axioma IAR da seguinte maneira:

Num primeiro caso, suponha que ambos os jogadores atribuam a mesma utilidade ao acordo. Geometricamente, a solução de Nash diz que o ponto em que a reta de 45º saindo da origem intercepta na reta (0,2)-(2,0)- função lucro - é o valor que cada lado deverá receber. Como nesse caso as utilidades são as mesmas, a reta (0,0)-(1,1) interceptará a reta (0,2)(2,0)exatamente em seu ponto médio, como pode-se ver na Figura 5, a seguir:

Figura 5 - Ponto de Nash em jogo de barganha

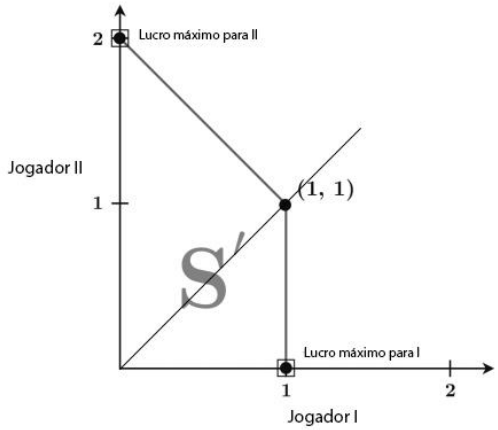


Fonte: – BARTLETT (2016)

A reta (0,2)-(2,0), de inclinação -1 conterá todas as possíveis soluções em que $x_1 + x_2 = S$. Se a função de utilidade for linear, tem-se: $U_2 = ax_2$ e $U_1 = bx_1$, assim a reta (0,2)-(2,0) será $\frac{1}{b}U_1 + \frac{1}{a}U_2 = S$. O ponto que intercepta o eixo vertical será a^*S e o que intercepta o eixo horizontal será $b^*.S$ e a inclinação é dada por $-b/a$. A reta de 45º representa $U_1 = U_2$ e as soluções são: $U_1 = U_2 = \frac{ab*100}{a+b}$, $x_1 = \frac{b*100}{a+b}$ e $x_2 = \frac{a*100}{a+b}$

Suponha agora que o jogador I, por saber que não receberia jamais (2,_), retire da negociação essa opção. Dessa forma, geometricamente, a reta da solução seria representada da seguinte forma:

Figura 6 - O problema com o axioma IAR



Fonte: – BARTLETT (2016)

Com isso, o jogador I teria sido contemplado com o valor que lhe concederia lucro

máximo (MARIOTTI, 1999).

Em 1975, vinte e cinco anos após a publicação de Nash, Ehud Kalai e Meir Smorodinsky, pesquisadores israelenses, após contestarem o mesmo axioma, caracterizaram uma nova solução em que, assim como a discussão apresentada por Raiffa, enfatizou os pagamentos ideais – *ideal payoffs* - das partes, *i.e.* o maior pagamento individual possível para cada jogador (ANBARCI; BOYD, 2008).

A solução apresentada por Kalai e Smorodinsky – KS, difere fundamentalmente da proposta por Nash ao afirmar que o conjunto de possíveis acordos (alternativas) deve exercer efeito sobre o acordo atingido. Para tanto, a SBKS, remove o axioma IAR e o substitui pelo axioma da **Monotonicidade** (ANBARCI; BOYD III, 2008).

O axioma da monotonicidade implica em que para cada nível de utilidade de que o jogador 1 exija, o nível máximo da utilidade possível que o jogador 2 possa simultaneamente atingir é aumentado. Em outras palavras, um jogador que tenha melhores opções deve obter um acordo um pouco superior (KALAI; SMORODINSKY, 1975).

A definição matemática de monotonicidade é a seguinte:

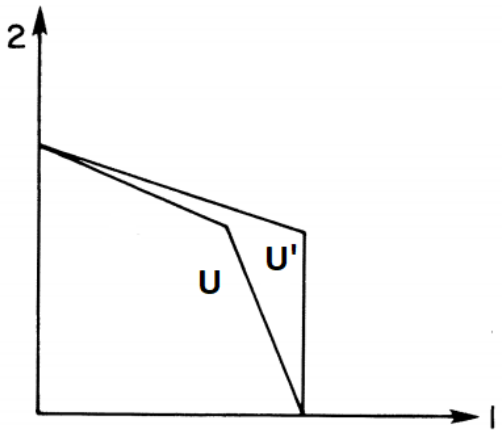
Sejam:

$M_i(U)$ - o melhor valor que o jogador i pode obter em um acordo viável;

d – ponto de discordância;

$M_i(U,v)$ – o melhor valor que o jogador i pode obter em um acordo viável em que a utilidade obtida pelo outro jogador é v, (se o outro jogador jamais poderá obter a utilidade v, então $M_i(U, v)$ é definida como $M_i(U)$;

Figura 7- Ajustes nas utilidades de acordo com o axioma da Monotocidade



Fonte: KALAI; SMORODINSKY (1975)

O requisito de monotonicidade diz que, se **(U,d)** e **(U',d)** são dois problemas de barganha de modo que: $\mathrm{M}_1(\mathrm{U}) = \mathrm{M}_1(\mathrm{U'})$ e $\forall\, \mathrm{v}, \mathrm{M}_2(\mathrm{U},\mathrm{v}) \leq \mathrm{M}_2(U', v)$, então a solução f deve satisfazer: $f_2(U, d) \leq f_2(U', d)$.

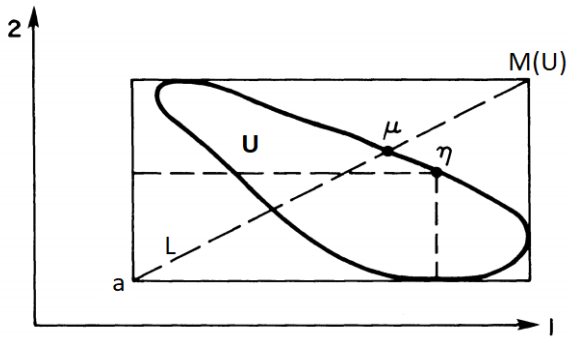
Ou seja, a SBKS é o ponto máximo que mantém as proporções dos ganhos e, portanto, é um ponto μ na fronteira de eficiência de Pareto de U de modo que:

$$\frac{\mu_1 - d_1}{\mu_2 - d_2} = \frac{M_1(U) - d_1}{M_2(U) - d_2}$$

A SBKS pode ser calculada geometricamente da seguinte forma:

Seja b(U) o ponto das melhores utilidades $(M_1(U), M_2(U))$, traça-se uma linha L de d (ponto de discordância) até b (ponto das melhores utilidades). Assumindo-se a não-trivialidade, a linha L tem inclinação positiva. Pela convexidade de F, intersecção de L com o conjunto F é um intervalo. Então a SBKS é o canto superior direito deste intervalo (KALAI; SMORODINSKY, 1975).

Figura 8 - Interpretação geométrica da SBKS



Fonte: KALAI; SMORODINSKY (1975)

Nesta seção foi brevemente apresentada uma coletânea dos temas relacionados ao problema de otimização que será introduzido no próximo capítulo. No próximo capítulo será discutido o modelo arranjo de contratos bilaterais e o método apresentado por Palamarchuk para a solução do problema.

4. ARRANJO DE CONTRATOS BILATERAIS

4.1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos tem sido amplamente utilizada para a modelagem de problemas relacionados à comercialização de energia mediante contratos bilaterais e mercado *spot*. Alguns autores modelam o problema como um jogo não-cooperativo de informação incompleta – em que a estratégia da outra parte é desconhecida (LI e SHAHIDENHPOUR, 2009; (WANG e SHAHIDEHPOUR, 2009; TANG et al., 2017). Enquanto outros trabalhos abordam o problema na forma de um jogo não-cooperativo de informação completa – em que a estratégia do outro jogador é plenamente conhecida (LIU et al., 2007; OLIVEIRA et al., 2013). A maioria desses estudos, porém, tendem a focar na estratégia ótima de apenas uma das partes da negociação (PINTO et al., 2015).

Com respeito ao tema de otimização de contratos bilaterais, Bjorgan et al (2000) propôs um modelo em que, mantendo-se fixo o volume contratado as entregas agendadas podem ser alteradas, de modo que haja a possibilidade então de que a CG ou a CF negociem no mercado *spot* ao invés de usarem sua cota do contrato diante de uma grande elevação ou baixa dos preços no mercado *spot*, o que, como discutido anteriormente, poderia vir a causar grande prejuízo para um dos lados. Já Baldick, Kolos e Tompaidis (2006), descreveram um modelo em que, uma vez provando-se não mais interessante à CF, o contrato poderia ser cancelado e uma forma de compensação sobre o volume não entregue. Há ainda diversos estudos que levam em conta o gerenciamento de risco em portfólios fazendo uso de técnicas como *Conditional Value-at-Risk* para a determinação do preço ótimo do contrato (ARIAS; CARDONA; HAROLD, 2010).

No modelo proposto por Palamarchuk (2010), o alvo desse estudo, o autor considerou um modelo de jogo cooperativo, em que busca-se obter o equilíbrio entre o lucro obtido por ambas as partes, por meio da determinação do valor do contrato e de concessões relativas iguais sobre o lucro máximo que seria obtido quando considerada a estratégia de cada um dos lados.

Para o desenvolvimento deste trabalho, o problema apresentado no estudo conduzido por Palamarchuk (2010) foi implementado em Matlab e o algoritmo foi então executado com os mesmos dados de entrada do artigo. O cenário, o modelo de Palamarchuk e o exemplo numérico desenvolvido em seu trabalho são apresentados a seguir.

4.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste estudo, a negociação de contratos no mercado livre de energia será realizada dois agentes, a companhia de geração de eletricidade, daqui em diante tratada como CG – que produz a energia, independentemente do método utilizado e a companhia de fornecimento de eletricidade, daqui em diante tratada como CF – que fornece a eletricidade aos consumidores finais, seja de grande ou pequeno porte.

No mercado livre de energia, CG e CF de energia são livres para negociar entre si contratos bilaterais – *bilateral contracts,* BCs, de fornecimento de energia. Além de negociar contratos no mercado futuro, geradoras e distribuidoras podem também comprar e vender no mercado *spot.* Ambos os lados têm como objetivo maior a maximização de seus lucros seja mediante o aumento da receita ou redução nos custos. Isso, porém as colocam em situação conflitante. Preços elevados no mercado *spot* favorecem a CG, reduzindo a atratividade dos BC. A situação inversa é favorável à CF, pois pode adquirir energia mais barata sem a necessidade de negociar um BC (PALAMARCHUK, 2006).

O preço pago pela energia elétrica segue um comportamento estocástico, *i.e.* baseado em probabilidades que nem sempre são conhecidas. A alta volatilidade (grande variação) do preço está diretamente relacionada à volatilidade da demanda. Esta, por sua vez pode ser influenciada por fatores climáticos, econômicos, políticos e sociais.

Uma vez que o sistema elétrico não contempla uma solução para o armazenamento do excedente da energia produzida, os agentes do mercado de energia são obrigados a fazer o balanceamento da carga, comprando e vendendo cotas no mercado *spot* quando há um aumento na demanda que não pode ser suprido com a cota disponível no momento e vendendo o excesso de capacidade quando não há demanda suficiente para o aproveitamento dessa capacidade, respectivamente.

Assume-se que a rede elétrica é capaz de transmitir os volumes pré-determinados nas datas agendadas e não leva em consideração os custos de transmissão elétrica, serviços auxiliares no mercado e restrições que limitam o volume de energia que pode ser comprado ou vendido no mercado *spot*.

Cada agente deve realizar a programação das entregas feitas pela CG à CF a serem realizadas em, respeitando-se um volume acordado J durante o período de vigência do contrato de modo a considerar seus interesses de modo a minimizar ou maximizar o valor do contrato.

A solução para o problema sugerido leva em consideração os valores obtidos nas programações feitas pela CG e CF quando realizam o agendamento das entregas de forma

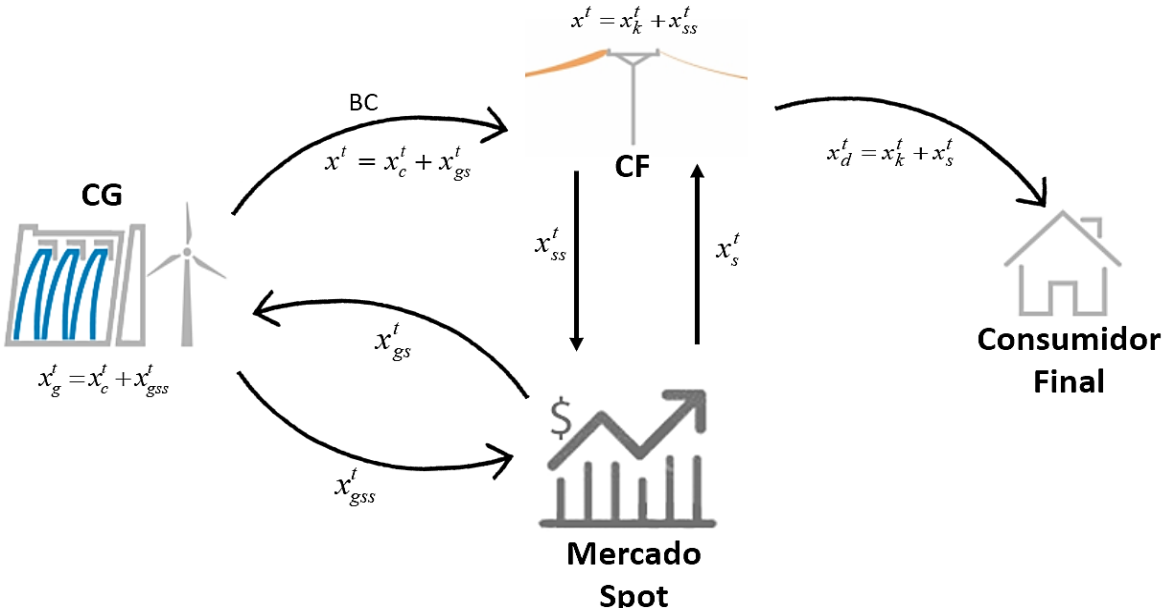
independente de modo que se encontre o ponto que fornecerá maior lucro a ambas quando submetidas a concessões relativas iguais sobre o valor inicial.

4.3 PROGRAMAÇÃO INDEPENDENTE

Programação no contexto tratado neste estudo, refere-se à definição de um volume de eletricidade que deverá ser entregue pela CG à CF em cada intervalo de tempo t durante o período de vigência do contrato. Esse agendamento deve ocorrer no momento do fechamento do contrato. O modelo sugerido por Palamarchuk (2010) considera contratos negociados no médio prazo, podendo variar de algumas semanas a um ano. Para a determinação dos valores das entregas, ambos os lados da negociação fazem projeções sobre os valores que a energia poderá ser vendida no mercado *spot*.

São considerados dois tipos de contrato: a) **Contrato Tipo I** – em que o comprador (a CF – que faz o fornecimento da energia aos consumidores finais) determina a programação das entregas a serem feitas em cada intervalo de tempo *t*. A CG deverá, então, garantir as entregas de energia de acordo com a solicitação da CF. b) **Contrato Tipo II** - a CG será responsável por determinar a quantidade de energia elétrica a ser vendida de acordo com o contrato a cada intervalo *t.* Nesse caso, o comprador deverá aceitar o volume a ser entregue de acordo com a estratégia preconizada pela CG. Concomitantemente aos valores negociados via contrato bilateral, tanto a CG, quanto a CF negociam a compra e venda de energia no mercado *spot*. A dinâmica desse mercado é ilustrada pela figura abaixo.

Figura 9 - Dinâmica de compra e venda de energia no mercado livre



Fonte: Adaptado pelo autor, de Palamarchuk (2012)

Considera-se a programação de um Contrato Tipo I, em que a CF irá determinar as entregas a serem feitas durante o período de vigência do BC. O período de vigência está dividido em N intervalos t igualmente distribuídos. As previsões de preços no mercado spot à cada intervalo t são variáveis de natureza aleatória (não se pode prever seu valor antecipadamente). Quando a programação é feita pela CF, seu objetivo é maximizar seu lucro esperado S_1, matematicamente, isso pode ser definido como:

$$\max_{x_k^t, x_s^t, x_{ss}^t} S_1 = E\left\{\sum_{t=1}^{N}[p_d^t(x_k^t + x_s^t) - p_s^{\sim t} x_s^{\sim t} + p_s^{\sim t} x_{ss}^t] - J\right\} \qquad (1)$$

Na Equação 1, E simboliza o valor esperado das operações contidas dentro das chaves. Uma vez que J, o valor total do contrato, é uma constante, a maximização do lucro pode ser reescrita como a maximização do valor esperado da receita com as vendas R_1, como segue:

$$\max_{x_k^t, x_s^t, x_{ss}^t} R_1 = E\left\{\sum_{t=1}^{N}[p_d^t(x_k^t + x_s^t) - p_s^{\sim t} x_s^{\sim t} + p_s^{\sim t} x_{ss}^t]\right\} \qquad (2)$$

Sujeito às seguintes restrições:

(a) O volume total de eletricidade do contrato:

$$\sum_{t=1}^{N} (x_k^t + x_{ss}^t) = V \qquad (3)$$

(b) O fornecimento total para os consumidores finais:

$$(x_k^t + x_s^t) = x_d^t, \qquad t = 1, \ldots, N \qquad (4)$$

(c) O volume de energia entregue em cada um dos intervalos de tempo:

$$x_{min}^t \leq (x_k^t + x_{ss}^t) \leq x_{max}^t, \qquad t = 1, \ldots, N \qquad (5)$$

(d) A não-negatividade das variáveis:

$$x_k^t \geq 0, x_s^t \geq 0\ , x_{ss}^t \geq 0, \qquad t = 1, \ldots, N \qquad (6)$$

Obtida a resposta para o problema (2)-(6), a CF deverá determinar a programação das entregas $x^t, t = 1, \ldots, N$ para o período de vigência do contrato e informará sua decisão à CG. A CG, de acordo com as regras para o Contrato do Tipo I, deverá concordar com a programação realizada pela CF.

Supondo-se que a CG saiba o custo de produção $C^t(x_g^t)$ para cada intervalo *t* em função da geração de energia x_g^t. Dessa forma, a função $C^t(x_g^t)$ é obtida de acordo com a alocação de unidades ótima, de modo a obter menores custos.

O objetivo da CG também é o de maximizar seu lucro S_2 por meio da participação no mercado *spot* e firmando BCs. Matematicamente, esse objetivo é definido como:

$$\max_{x_c^t, x_{gs}^t, x_{gss}^t} S_2 = E\left[\sum_{t=1}^{N} (\tilde{p_s^t} x_{gss}^t - \tilde{p_s^t} x_{gs}^t - C^t(x_c^t + x_{gss}^t)) + J\right] \qquad (7)$$

De maneira similar à Equação 1, a equação acima pode ser reescrita na forma:

$$\max_{x_c^t, x_{gs}^t, x_{gss}^t} R_2 = E\left[\sum_{t=1}^{N} (\tilde{p_s^t} x_{gss}^t - \tilde{p_s^t} x_{gs}^t - C^t(x_c^t + x_{gss}^t))\right] \qquad (8)$$

Sujeito a:

(a) A energia gerada em cada um dos intervalos:

$$x_{gmin}^t \leq \left(x_c^t + x_{gss}^t\right) \leq\ x_{gmax}^t, \qquad t = 1, \ldots, N \qquad (9)$$

(b) O volume das entregas em cada um dos intervalos de tempo:

$$\left(x_c^t +\ x_{gs}^t\right) = x^t, \qquad t = 1, \ldots, N \qquad (10)$$

(c) A não-negatividade das variáveis:

$$x_c^t \geq 0,\ x_{gs}^t \geq 0, x_{gss}^t \geq 0, \qquad t = 1, \ldots, N \qquad (11)$$

4.4 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA PARA A PROGRAMAÇÃO DAS ENTREGAS

Devido à grande complexidade dos dois problemas apresentados, deve-se utilizar uma técnica de programação dinâmica estocástica. Essa técnica simplificará a solução de cada problema dividindo-o em subproblemas menores. A estratégia é otimizar os N subproblemas caracterizados por cada intervalo *t*, para depois, recursivamente, obter a solução ótima do problema como um todo.

Para tanto, é construída a Função de Receita Futura – FRF. Esta, trata o preço do mercado *spot* como sendo independente em cada um dos intervalos *t*. Para isso, aplica-se o princípio da otimalidade (BELLMAN e DREYFUS, 1962) para a reescrita da função objetivo. Assim, a Equação (2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\max_{x_k^t, x_s^t, x_{ss}^t} E[R(p_s^{\sim t}, x^t) + FRF^t(x^{t+1,N})], \qquad t = 1, \ldots, N \qquad (12)$$

Nessa equação, $R(p_s^{\sim t}, x^t)$ é a receita obtida pela CF no intervalo *t*, $x^{t+1,N}$é o volume de energia entregue sob BC durante os intervalos $t+1, \ldots, t_N$ e $FRF^t(x^{t+1,N})$ é a receita futura recebida do final do intervalo *t* até a data final de vigência do contrato.

Para aplicação da FRF, faz-se necessário definir um conjunto de quantidades de energia elétrica $x_{DD_i}^t,\ i = 1, \ldots, n$) que presumidamente tenham sido entregues até *t*. Os $x_{DD_i}^t$ são os estados do contrato e devem ser distribuídos arbitrariamente dentro do intervalo da diferença entre o total que foi entregue até o momento e o volume total do contrato, preferencialmente em intervalos iguais.

A Equação (12) sujeita as restrições (3), (4), (5) e (6) é resolvida para cada um dos $x_{DD_i}^i$ e então o valor ótimo de $FRF_i^t(x^{t+1,N})$ é obtido. A $FRF^t(x_{DD}^t)$ pode ser construída no intervalo de tempo *t* utilizando como pontos de funções os resultados de $FRF_i^t(x^{t+1,N}),\ i = 1, \ldots, n$. Da mesma forma, a *FRF* pode ser construída para o problema do Contrato Tipo 2.

Para a determinação dos preços aleatórios da energia no mercado *spot* p_{sj}^t para cada intervalo *t* momento, usou-se uma função randômica que sorteará um valor para p_{sj}^t de acordo com uma probabilidade ε_j^t. Os preços e suas probabilidades são usados no cálculo dos valores esperados das funções (2), (8) e (12).

A programação dinâmica das entregas sob BC é feita então com um algoritmo de duas etapas, regressiva e progressiva. Na etapa regressiva, as FRFs são construídas. Na etapa

progressiva, as FRFs obtidas na etapa anterior são usadas para obter-se os volumes a serem entregues sob contrato e os volumes a serem comprados e vendidos no mercado *spot.*

As formulações acima apresentadas são as chamadas "programações independentes" e representam o modelo para determinação da solução ótima que maximiza o lucro de cada uma das partes e independem da capacidade da outra de atender à programação proposta. Dessa forma, são observados dois possíveis cenários.

A programação para Contratos do Tipo I e similarmente para os Contratos do Tipo II, privilegiam uma das partes, de modo a maximizar seu lucro em detrimento das preferências da outra parte. Uma forma de equilibrar essa negociação é determinar uma programação de entrega de energia e um preço de contrato que traga benefícios econômicos relativos iguais para as partes. As entregas podem ser, desse modo, definidas em conjunto pelas partes ou por um terceiro envolvido, neutro, para coordenar os interesses do produtor e distribuidor (PALAMARCHUK, 2010).

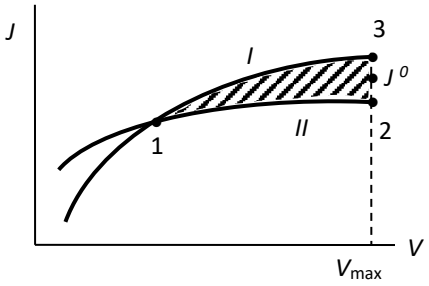
4.5 PROGRAMAÇÃO COMPROMISSADA

A negociação compromissada trata-se de um jogo cooperativo em que a geradora e a fornecedora possuem pesos iguais na negociação. O problema é estruturado de forma que ambas as partes concordem em fazer concessões relativas iguais e mínimas em relação ao lucro máximo que poderia ser obtido com a sua programação independente.

Para que CF tenha lucro, sua receita com o fornecimento de energia tem que apresentar um valor maior que o preço *J* do BC. A receita máxima da CF será denotada por R_1^*. Já, no caso da CG, seus gastos devem ser menores que o valor *J* do contrato para que ela obtenha lucro. A CG obtém lucro, reduzindo seus custos de produção, o valor de gasto mínimo será denotado por R_2^*.

De modo geral, contratos bilaterais buscam um acordo cujo valor do contrato e energia a ser transferida façam com que o arranjo seja lucrativo para o produtor e distribuidor. Na Figura 10, as curvas $J(V)_i$ representam o lucro máximo de cada parte. Sendo $J(V)_I$ a curva que representa a receita máxima a ser obtida pela CF e a curva $J(V)_{II}$ a curva que representa o custo mínimo para a CG. A parte hachurada, entre as duas curvas, representa a área de negociação, região em que ambas as partes obteriam lucro com a negociação.

Figura 10 - Área de Negociação



Fonte: Palamarchuk (2012).

Dessa forma, a equação que determina o lucro máximo por ambas as partes é representada por:

$$S_1^* = S_2^* = R_1^* - |R_2^*| \tag{13}$$
$$= E\left\{\sum_{t=1}^{N}[p_d^t(x_k^{t*} + x_s^{t*}) - p_s^{\sim t}x_s^{t*} + p_s^{\sim t}x_{ss}^{t*}]\right\} - \left|E\left\{\sum_{t=1}^{N}\left[p_s^{\sim t}x_{gss}^{t*} - p_s^{\sim t}x_{gs}^{t*} - C^t\left(x_c^{t*}x_{gss}^{t*}\right)\right]\right\}\right|$$

$x_s^{t0},\ x_{ss}^{t0}, x_k^{t0}, x_{gs}^{t0}, x_{gss}^{t0}, x_c^{t0}, \quad t = 1,\ldots,N$ são as quantidades de energia a serem entregues e acordadas mediante o acordo compromissado.

A receita da CF é dada por:

$$R_1^0 = E\left\{\sum_{t=1}^{N}[p_d^t(x_k^{t0} + x_s^{t0}) - p_s^{\sim t}x_s^{t0} + p_s^{\sim t}x_{ss}^{t0}]\right\} \tag{14}$$

A receita da CG é dada por:

$$R_2^0 = E\left\{\sum_{t=1}^{N}\left[p_s^{\sim t}x_{gss}^{t0} - p_s^{\sim t}x_{gs}^{t0} - C^t\left(x_c^{t0}x_{gss}^{t0}\right)\right]\right\} \tag{15}$$

A concessão relativa ΔS_1^0 a ser feita pela CF é dada por:

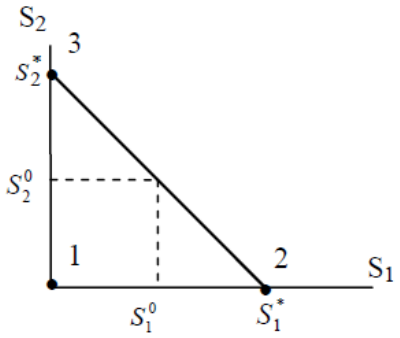
$$\Delta S_1^0 = \frac{1}{S_1^*}[S_1^* - (R_1^0 - J^0)] \tag{16}$$

A concessão relativa ΔS_2^0 a ser feita pela CG é dada por:

$$\Delta S_2^0 = \frac{1}{S_2^*}[S_2^* - (J^0 - |R_2^0|)] \tag{17}$$

A linha traçada entre os pontos 2-3 corresponde ao conjunto de possíveis lucros máximos. Variando o valor do contrato J por essa linha, tem-se os lucros na fronteira de Pareto para o volume máximo de eletricidade acordada no contrato. O conjunto dos possíveis lucros Pareto-ótimos está representado na figura abaixo.

Figura 11 - Conjunto de possíveis lucros



Fonte: Palamarchuk (2007).

O Ponto de Nash no conjunto Pareto-ótimo garante a ambas as partes o maior lucro possível quando suas concessões relativas são iguais. Sejam S_1^0 e S_2^0 os lucros da CF e CG no ponto de Nash. A condição para que se obtenha o ponto de Nash é obter o valor que maximize o produto $S_1^0 \times S_2^0$, esse valor é o valor de contrato J^0.

$$J^0 = \frac{1}{2}(R_1^* + |R_2^*|) \tag{13}$$

Portanto, o ponto de Nash é o ponto médio entre as receitas da CF e CG, conforme indicado na Figura 10. Sendo $S_1^0 = S_1^*/2$ e $S_2^0 = S_2^*/2$ as equações das concessões relativas são reescritas como:

$$\Delta S_1^0 = \frac{1}{S_1^*}\left[S_1^* - R_1^0 + \frac{1}{2}(R_1^* + |R_2^*|)\right] \tag{19}$$

e

$$\Delta S_2^0 = \frac{1}{S_2^*}\left[S_2^* + |R_2^0| - \frac{1}{2}(R_1^* + |R_2^*|)\right] \tag{20}$$

Para que se obtenha uma programação das entregas sob BC para os intervalos *t* com concessão mínima sob o lucro máximo que poderia ser obtido por cada parte via programação independente e que garante ainda que as concessões serão justas (iguais em termos relativos), deve se resolver o problema abaixo:

$$\min_{k,x_k^{t0},x_s^{t0},x_{ss}^{t0},x_c^{t0},x_{gs}^{t0},x_{gss}^{t0},} \quad k \tag{21}$$

Sujeito às seguintes restrições:

a) A igualdade das concessões relativas:

$$\frac{\left(S_1^* - E\{\sum_{t=1}^{N}[p_d^t(x_k^t + x_s^t) - p_s^{\sim t}x_s^t + p_s^{\sim t}x_{ss}^t]\} + \frac{1}{2}(R_1^* + |R_2^*|)\right)}{S_1^*} = k \tag{22}$$

e

$$\frac{\left(S_2^* + \left|E\left\{\sum_{t=1}^{N}\left[p_s^{\sim t}x_{gss}^t - p_s^{\sim t}x_{gs}^t - C^t\left(x_c^t x_{gss}^t\right)\right]\right\}\right| - \frac{1}{2}(R_1^* + |R_2^*|)\right)}{S_2^*} = k \tag{23}$$

b) A consideração de pontos apenas da região de negociação:

$$E\left\{\sum_{t=1}^{N}[p_d^t(x_k^t + x_s^t) - p_s^{\sim t}x_s^t + p_s^{\sim t}x_{ss}^t]\right\} \geq \left|E\left\{\sum_{t=1}^{N}\left[p_s^{\sim t}x_{gss}^t - p_s^{\sim t}x_{gs}^t - C^t\left(x_c^t x_{gss}^t\right)\right]\right\}\right| \tag{24}$$

c) O volume total de energia estabelecida no contrato:

$$\sum_{t=1}^{N} (x_k^t + x_{ss}^t) = V \tag{25}$$

d) O fornecimento de energia elétrica para consumidores finais:

$$x_k^t + x_s^t = x_d^t \,, \;\; t = 1,..., N \tag{26}$$

e) A geração de energia em cada um dos intervalos de tempo:

$$x_{g\,min}^t \leq x_c^t + x_{gss}^t \leq x_{g\,max}^t \,, \quad t = 1,..., N \tag{27}$$

f) A quantidade de energia entregue sob contrato em cada um dos intervalos:

$$x_k^t + x_{ss}^t = x_c^t + x_{gs}^t \,, \quad t = 1,..., N \tag{28}$$

$$x_{min}^t \leq x_k^t + x_{ss}^t \leq x_{max}^t \,, \quad t = 1,..., N \tag{29}$$

g) A não-negatividade das demais variáveis:

$$k \geq 0, x_k^t \geq 0, x_s^t \geq 0, x_{ss}^t \geq 0, x_c^t \geq 0 \; x_{gs}^t \geq 0, x_{gss}^t \geq 0, \; t = 1, \ldots, N \tag{26}$$

4.6 EXEMPLO NUMÉRICO

O Quadro 6 e o Quadro 7 apresentam os valores, aleatoriamente atribuídos, das previsões dos preços da energia no mercado *spot*, assim como suas probabilidades. Para esse exemplo, considerou-se 3 intervalos, os estágios do problema da programação dinâmica. O volume total a ser entregue é de $V = 145\ MWh$. Para a construção da *FRF*, foram determinados para o intervalo t_3 os seguintes estados do contrato: $x_{DD1}^3 = 90$, $x_{DD2}^3 = 125$ e $x_{DD3}^3 = 138$. Já para o intervalo t_2, definiu-se as seguintes quantidades: $x_{DD1}^2 = 60$, $x_{DD2}^2 = 90$ e $x_{DD3}^2 = 100$.

Quadro 6 - Dados iniciais para a programação independente realizada pela CF

Intervalos	**t_1**			**t_2**			**t_3**		
Previsão de preços no mercado *spot* feita pela CF									
Cenários do preço do mercado *spot*, p_{sj}^t , \$/MWh	10,0	10,4	10,8	11,0	11,2	11,8	11,0	11,4	11,8
Probabilidades esperadas, ε_j^t	0.1	0.8	0.1	0.3	0.5	0.2	0.2	0.4	0.4
Preço para consumidores finais, \$ / MWh	16			16			16		
Restrições para o problema de otimização									
Consumo de energia dos consumidores finais em MWh	x_d^1			x_d^2			x_d^3		
	9,8			11,4			14,5		
Limites para entregar de energia mediante contrato, em MWh	x_{min}^1	x_{max}^1		x_{min}^2	x_{max}^2		x_{min}^3	x_{max}^3	
	8	60		5	68		6	62	

Fonte: Palamarchuk, 2010.

Quadro 7- Dados iniciais para a programação independente pela CG

Intervalos	**t_1**			**t_2**			**t_3**		
Previsão de preços do mercado *spot* feita pela CG									
Cenários do preço do mercado *spot*, p_{sj}^t , \$/MWh	10,8	11,2	11,6	11,0	11,6	12,0	11,0	11,8	12,4
Probabilidades esperadas, ε_j^t	0,2	0,6	0,2	0,25	0,5	0,25	0,1	0,6	0,3
Função de custo de produção, $C^t(x_g^t)$, \$	$8{,}4 + 1{,}4x_g^1 + 0{,}4(x_g^1)^2$			$10{,}4 + 1{,}52x_g^2 + 0{,}44(x_g^2)^2$			$11{,}2 + 1{,}4x_g^3 + 0{,}32(x_g^3)^2$		
Restrições para a otimização									
Limites de produção de energia, em MWh	x_{gmin}^1	x_{gmax}^1		x_{gmin}^2	x_{gmax}^2		x_{gmin}^3	x_{gmax}^3	
	14	50		15	60		16	65	
Limites de entregas de energia por meio do contrato, MWh	15			68			62		

Fonte: Palamarchuk, 2010.

A matriz do problema é exibida na Figura 12 a seguir.

Figura 12 - Matriz "Sujeito a"

	x_k^1	x_k^2	x_k^3	x_s^1	x_s^2	x_s^3	x_{ss}^1	x_{ss}^2	x_{ss}^3	x_c^1	x_c^2	x_c^3	x_{gss}^1	x_{gss}^2	x_{gss}^3	x_{gs}^1	x_{gs}^2	x_{gs}^3		
Limites de geração de eletricidade, MWh	$x_{g\max}^1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	$\leq$	50
	$x_{g\max}^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	$\leq$	60
	$x_{g\max}^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	$\leq$	65
	$x_{g\min}^1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	0	0	$\leq$	−14
	$x_{g\min}^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	0	$\leq$	−15
	$x_{g\min}^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	0	0	$\leq$	−16
Limites das entregas de eletricidade sob BC, MWh	$x_{\max}^1$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	60
	$x_{\max}^2$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	68
	$x_{\max}^3$	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	62
	$x_{\min}^1$	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	−8
	$x_{\min}^2$	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	−5
	$x_{\min}^3$	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	−6
Restrição de não-negatividade das variáveis $x_c^t, x_{gs}^t, x_{gss}^t, x_k^t, x_s^t, x_{ss}^t$		−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	$\leq$	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	$\leq$	0
O volume total do contrato $\sum_{t=1}^{N}(x_k^t + x_{ss}^t) = V$		1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	= 145
As vendas aos consumidores-finais $x_k^t + x_s^t = x_d^t$		1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	9.8
		0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	11.4
		0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	14.5
Entregas em dado intervalo t $x_k^t + x_{ss}^t = x_c^t + x_{gs}^t$,		1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	= 0
		0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	0	−1	0	= 0
		0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0	0	0	0	−1	=	0
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	

Fonte: o autor

Como resultado, a programação independente das entregas a serem feitas para um contrato com 3 intervalos de duração feita pela CF (Contrato Tipo I) é mostrada no Quadro 8. Com a programação independente a CF obteria uma receita $\boldsymbol{R_1^*}$ **= $1807,90.**

Quadro 8 - Resultados da programação independente feita pela **CF**

Intervalos	Contrato Tipo 1			
	x_k^t	x_s^t	x_{ss}^t	Entrega sob BC
t_1	9,8	0	5,2	15
t_2	11,4	0	56,6	68
t_3	14,5	0	47,5	62

Fonte: Palamarchuk, 2010.

A programação independente das entregas feitas pela CG (Contrato Tipo 2) é mostrada no Quadro 9, abaixo. Com a programação independente a CG obteria uma receita $|\boldsymbol{R_2^*}|$ **= $1493,32.**

Quadro 9 - Resultados da programação independente feita pela **CG**

Intervalos	Contrato Tipo 2			
	x_c^t	x_{gs}^t	x_{gss}^t	Geração de Eletricidade
t_1	14	46	0	14
t_2	0	68	15	15
t_3	0	17	16,4	16,4

Fonte: Palamarchuk, 2010.

Se ambas as partes do contrato decidirem aceitar o acordo, que trará lucro para ambos os lados, o valor máximo do lucro que poderá ser obtido pela CF e CG será $S_1^* - S_2^* = \$1807{,}9 - \$1493{,}32 = \$314{,}58$. O valor do contrato J^0 no caso da programação compromissada no ponto de Nash será igual a $1650,61. Os resultados para programação compromissada usando o algoritmo apresentado estão resumidos no Quadro 10.

Quadro 10- Resultados da programação compromissada das entregas

Intervalos	Valores das variáveis para a CF				Valores das variáveis para a CG			
	x_k^t	x_s^t	x_{ss}^t	Entregas sob BC $x_k^t + x_{ss}^t$	x_c^t	x_{gs}^t	x_{gss}^t	Geração $x_c^t + x_{gss}^t$
t_1	9,8	0	22,9	32,7	9,5	23,2	4,5	14
t_2	11,9	0	56,6	68	15	53	0	15
t_3	14,5	0	29,8	44,3	5,12	39,18	11,25	16,37

Fonte: Palamarchuk, 2010.

Uma vez considerado um contrato compromissado, a CF obtém uma receita $\boldsymbol{R_1^0}$ = **$1788,88** e os gastos de produção da CG são iguais a $\boldsymbol{R_2^0}$ **= $1512,40**. A partir da comparação entre os valores contidos nos Quadros 8, 9 e 10 percebe-se que as partes do contrato ajustam sua estratégia de participação no mercado *spot*. Ambos os lados têm seu lucro reduzido em

56,08% (valor da concessão), com isso ambas obtêm um lucro de $138.18.

4.7 A EXISTÊNCIA DE OUTROS PONTOS DE EQUILÍBRIO

A literatura relacionada à estratégia ótima de comercialização de energia mediante o mercado *spot* e contratos bilaterais que considerem a existência, ou não, de múltiplas soluções ótimas (soluções diferentes da obtida no ponto de equilíbrio de Nash) é escassa.

Toledo (2017) e Cunha (2017), por meio de simulações com diferentes dados de entrada para o exemplo apresentado por Palamarchuk foram bem-sucedidos em demonstrar a existência de outras soluções ótimas para o problema. Para tal, o valor do contato J^0, foi considerado como variável ao invés de ser dado pela Equação (18). O valor do contrato, foi introduzido de acordo com as seguintes inequações:

$$J^0 \geq |\, E[\, \sum_{t=1}^{N} (\, \tilde{p}_s^t x_{gss}^t - \tilde{p}_s^t x_{gs}^t - C^t(\, x_c^t + x_{gss}^t\,))] \,| \tag{27}$$

$$J^0 \leq E\{\, \sum_{t=1}^{N} [\, p_d^t(\, x_k^t + x_s^t\,) - \tilde{p}_s^t x_s^t + \tilde{p}_s^t x_{ss}^t\,]\,\} \tag{28}$$

O Quadro 11 e o Quadro 12 apresentam resultados obtidos por Toledo (2017) de soluções ótimas obtidas para a programação independente realizada pelo distribuidor (CF) para contratos Tipo I e pelo produtor (CG) para contratos do Tipo II, respectivamente, ao se utilizar o modelo dinâmico. As diferentes soluções foram obtidas alterando-se o valor de x_c^t e x_k^t, (respeitando-se as restrições do problema).

Quadro 11- Outras soluções ótimas para programação independente realizada pela **CF**

	Programação do distribuidor			Atendimento do produtor		
Intervalo	x_k^t	x_s^t	x_{ss}^t	x_c^t	x_{gs}^t	x_{gss}^t
Solução 1						
t_1	4,3544	5,4456	10,6456	10,4234	4,5766	3,5766
t_2	2,4354	8,9646	65,5646	3,4322	64,5678	11,5678
t_3	1,4354	13,0646	60,5646	5,1123	56,8877	11,2977
Solução 2						
t_1	7,6308	2,1692	7,3692	8,4235	6,5765	5,5765
t_2	2,3043	9,0957	65,6957	6,3125	61,6875	8,6875
t_3	7,4455	7,0545	54,5545	2,5461	59,4539	13,8639
Solução 3						
t_1	4,1832	5,6168	10,8168	10,4354	4,5646	3,5646
t_2	6,3254	5,0746	61,6746	2,9010	65,099	12,099
t_3	2,5341	11,9659	59,4659	15,4653	46,5347	0,9447
Solução 4						
t_1	4,1374	5,6626	10,8626	6,7008	8,2992	7,2992
t_2	10,54	0,86	57,46	7,4033	60,5967	7,5967
t_3	7,6692	6,8308	54,3308	8,0707	53,9293	8,3393
Solução 5						
t_1	2,7719	7,0281	12,2281	10,9983	4,0017	3,0017
t_2	4,8702	6,5298	63,1298	2,6354	65,3646	12,3646
t_3	12,3371	2,1629	49,6629	7,325	54,675	9,085
Solução 6						
t_1	5,9328	3,8672	9,0672	3,4928	11,5072	10,5072
t_2	1,4354	9,9646	66,5646	5,6693	62,3307	9,3307
t_3	9,8474	4,6526	52,1526	11,4354	50,5646	4,9746

Fonte: Toledo (2017)

Quadro 12 - Outras soluções ótimas para programação independente realizada pela **CG**

	Atendimento do distribuidor			Programação do produtor		
Intervalo	x_k^t	x_s^t	x_{ss}^t	x_c^t	x_{gs}^t	x_{gss}^t
Solução 1						
t_1	5,5323	4,2677	54,4677	13,1253	46,8747	0,8747
t_2	5,1525	6,2475	62,8475	3,5562	64,4438	11,4438
t_3	1,5654	12,9346	15,4346	6,2364	10,7636	10,1636
Solução 2						
t_1	4,5223	5,2777	55,4777	1,5346	58,4654	12,4654
t_2	7,2534	4,1466	60,7466	10,1054	57,8946	4,8946
t_3	9,1243	5,3757	7,8757	6,4326	10,5674	9,9674
Solução 3						
t_1	9,4235	0,3765	50,5765	7,2344	52,7656	6,7656
t_2	1,545	9,855	66,455	1,4464	66,5536	13,5536
t_3	11,2345	3,2655	5,7655	9,2141	7,7859	7,1859
Solução 4						
t_1	3,6452	6,1548	56,3548	11,3423	48,6577	2,6577
t_2	6,1675	5,2325	61,8325	4,6452	63,3548	10,3548
t_3	2,9128	11,5872	14,0872	2,4365	14,5635	13,9635
Solução 5						
t_1	7,4235	2,3765	52,5765	9,4235	50,5765	4,5765
t_2	8,14453	3,25547	59,85547	3,5352	64,4648	11,4648
t_3	8,3566	6,1434	8,6434	1,5479	15,4521	14,8521
Solução 6						
t_1	2,4543	7,3457	57,5457	3,3742	56,6258	10,6258
t_2	5,2321	6,1679	62,7679	13,5245	54,4755	1,4755
t_3	1,5436	12,9564	15,4564	14,2325	2,7675	2,1675

Fonte: Toledo (2017)

Ainda de acordo com Toledo (2017), as soluções ótimas da programação independente realizada pelo produtor minimizam seus custos para |$1.493,32| enquanto a receita máxima possível de ser obtida pelo distribuidor para atender a programação realizada corresponde a $1.759,40. No caso da programação realizada pelo distribuidor, a sua receita máxima é de $ 1.807,90, enquanto a do produtor é conferido uma receita de -$1.524,80.

O Quadro 13, abaixo ilustra a existência de diferentes soluções ótimas para a programação compromissada.

Quadro 13 - Amostra de soluções ótimas para programação compromissada

	Programação do distribuidor			Programação do produtor		
Intervalo	x_k^t	x_s^t	x_{ss}^t	x_c^t	x_{gs}^t	x_{gss}^t
Solução 1						
t_1	0	9,8	15	9,4494	5,5506	4,5506
t_2	0,2532	11,1468	67,7468	1,0985	66,9015	13,9015
t_3	5,5377	8,9623	56,4623	16,3773	45,6227	0,0290
Solução 2						
t_1	7,7987	2,0013	7,2013	10,9835	4,0165	3,0165
t_2	5,2263	6,1737	62,7737	14,3338	53,6662	0,6662
t_3	12,6252	1,8748	49,3748	15,4694	46,5306	0,9370
Solução 3						
t_1	9,7892	0,0108	5,2108	13,8917	1,1083	0,1083
t_2	0,0266	11,3734	67,9734	0,1252	67,8748	14,8748
t_3	13,5401	0,9599	48,4599	16,4063	45,5937	0
Solução 4						
t_1	2,3779	7,4221	12,6221	3,5757	11,4243	10,4243
t_2	0,0756	11,3244	67,9244	11,0327	56,9673	3,9673
t_3	14,0017	0,4983	47,9983	0,7651	61,2349	15,6411
Solução 5						
t_1	0	9,8	15	14	1	0
t_2	0	11,4	68	0	68	15
t_3	13,4498	1,0502	48,5502	16,4063	45,5937	0
Solução 6						
t_1	9,8	0	5,2	13,7611	1,2389	0,2389
t_2	4,3863	7,0137	63,6137	0,0043	67,9957	14,9957
t_3	13,8225	0,6775	48,1775	16,4063	45,5937	0

Fonte: Toledo (2017).

Todas as soluções ótimas minimizam as concessões relativas para **55,01**%, ao invés de 56,08% como apresentado na solução dada por Palamarchuk. para ambas as partes. As soluções obtidas maximizam o seu lucro para $ 141.54, superior aos $138.18 obtidos por Palamarchuk.

Toledo (2017) e Cunha (2017) constataram ainda, que o valor do contrato J^0 que, de fato, minimiza as concessões e maximiza os lucros corresponde, na verdade, ao seguinte cálculo:

$$J^0 = \frac{\left(R_1^{Programação\ do\ distribuidor} + \left|R_2^{Programação\ do\ distribuidor}\right|\right)}{2}$$

$$= \frac{(1.807{,}9 + |-1.524.8|)}{2}$$

$$= 1.666{,}36$$

Em que $R_1^{Programação\ do\ distribuidor}$ representa a receita obtida pelo distribuidor em sua programação independente realizada, e $R_2^{Programação\ do\ distribuidor}$ representa a receita obtida pelo produtor decorrente da programação independente realizada pelo distribuidor. Isto foi obtido, provavelmente, devido ao fato da programação independente realizada pelo distribuidor apresentar a maior região negociável, conforme apresenta o Quadro 14.

Quadro 14 - Regiões negociáveis das programações independentes

	ESC	GC	Região negociável
Contrato Tipo 1	$1.807,9	-$1.524,8	$283,1
Contrato Tipo 2	$1.759,4	- $1.493,3	$266,1
Negociação compromissada	$1.788,8	-$1.512,4	$276,4

Fonte: Cunha (2017).

5. A SBKS APLICADA AO PROBLEMA

5.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo será apresentada a modelagem do problema apresentado por Palamarchuk segundo a teoria da SBKS. Em um primeiro momento, o problema foi modelado matematicamente. O modelo matemático foi então implementado em Matlab e prosseguiu-se com a simulação para diferentes valores do volume total do contrato (V). Para tanto, os algoritmos que fornecem as programações para contratos do Tipo 1 e Tipo 2 foram executados para os diferentes valores de V e os dados obtidos alimentados nos algoritmos que implementam as soluções de Palamarchuk, Toledo e Paulo e no algoritmo que implementa a SBKS para posterior análise e comparação dos dados obtidos com cada um.

5.2 MODELAGEM DO PROBLEMA

Para aplicação da Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky ao problema de programação compromissada sugerida por Palamarchuk (2010) a função objetivo e algumas restrições tiveram que ser alteradas.Sejam:

$\boldsymbol{\varphi_I}$ A diferença entre a receita a ser obtida pela CF e os gastos que a CG terá de acordo com a programação independente das entregas de energia em um contrato Tipo I, ou seja, na programação independente feita pela CF.

$\boldsymbol{\varphi_{II}}$ A diferença entre a receita a ser obtida pela CF e os gastos que a CG terá de acordo com a programação independente das entregas de energia em um contrato Tipo II, ou seja, na programação independente feita pela CG.

Em termos gerais, φ_i é definido como:

$$\varphi_I = R_1^* - |R_2| \tag{29}$$

$$\varphi_{II} = R_1 - |R_2^*| \tag{30}$$

Matematicamente, a SBKS é o ponto φ na fronteira de Pareto dos possíveis acordos de forma que:

$$\frac{\varphi_I}{\varphi_{II}} = \frac{S_1^*}{S_2^*} \tag{31}$$

No qual, após normalizar o ponto de desentendimento para (0,0), S_1^* é o lucro máximo que a CF poderia obter na programação independente de um Contrato Tipo I e S_1^* é o lucro máximo que a CG poderia obter na programação independente de um Contrato Tipo II.

Portanto a função objetivo do problema, agora deverá ser interpretada de forma diferente à do problema anterior. O objetivo agora não é mais o de minimizar a concessão sobre o lucro máximo hipotético, mas sim o de maximizar a receita de ambas as partes conjuntamente. Ou seja:

$$\max_{x_k^{t0}, x_s^{t0}, x_{ss}^{t0}, x_c^{t0}, x_{gs}^{t0}, x_{gss}^{t0},} \quad (R_1^* + R_2^*) \tag{32}$$

Ou:

$$\max_{x_k^{t0}, x_s^{t0}, x_{ss}^{t0}, x_c^{t0}, x_{gs}^{t0}, x_{gss}^{t0},} \quad \left(E\left\{ \sum_{t=1}^{N} \left[p_d^t \left(x_k^{t*} + x_s^{t*} \right) - p_s^{\sim t} x_s^{t*} + p_s^{\sim t} x_{ss}^{t*} \right] \right\} + E\left\{ \sum_{t=1}^{N} \left[p_s^{\sim t} x_{gss}^{t*} - p_s^{\sim t} x_{gs}^{t*} - C^t \left(x_c^{t*} x_{gss}^{t*} \right) \right] \right\} \right) \tag{33}$$

Sujeito às seguintes restrições:

a) A consideração de pontos apenas da região de negociação:

$$E\left\{ \sum_{t=1}^{N} [p_d^t (x_k^t + x_s^t) - p_s^{\sim t} x_s^t + p_s^{\sim t} x_{ss}^t] \right\} \geq \left| E\left\{ \sum_{t=1}^{N} \left[p_s^{\sim t} x_{gss}^t - p_s^{\sim t} x_{gs}^t - C^t \left(x_c^t x_{gss}^t \right) \right] \right\} \right|$$

b) O volume total de energia estabelecida no contrato:

$$\sum_{t=1}^{N} (x_k^t + x_{ss}^t) = V$$

c) O fornecimento de energia elétrica para consumidores finais:

$$x_k^t + x_s^t = x_d^t \,, \quad t = 1, \ldots, N$$

d) A geração de energia em cada um dos intervalos de tempo:

$$x^t_{g\,min} \le x^t_c + x^t_{gss} \le x^t_{g\,max}, \quad t = 1,\ldots, N$$

e) A quantidade de energia entregue sob contrato em cada um dos intervalos:

$$x^t_k + x^t_{ss} = x^t_c + x^t_{gs}, \quad t = 1,\ldots, N$$

$$x^t_{min} \le x^t_k + x^t_{ss} \le x^t_{max}, \quad t = 1,\ldots, N$$

f) Os limites superior e inferior do valor do contrato J:

$$J^0 \ge |\, E[\, \sum_{t=1}^{N} (\, \tilde{p}^t_s x^t_{gss} - \tilde{p}^t_s x^t_{gs} - C^t(\, x^t_c + x^t_{gss}\,))] \,|$$

$$J^0 \le E\{\, \sum_{t=1}^{N} [\, p^t_d(\, x^t_k + x^t_s\,) - \tilde{p}^t_s x^t_s + \tilde{p}^t_s x^t_{ss}\,]\,\}$$

g) A não-negatividade das demais variáveis:

$$k \ge 0, x^t_k \ge 0, x^t_s \ge 0, x^t_{ss} \ge 0, x^t_c \ge 0\; x^t_{gs} \ge 0, x^t_{gss} \ge 0,\; t = 1, \ldots, N$$

h) A intersecção com a fronteira de Pareto:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{S^*_1}{S^*_2}$$

5.3 EXEMPLO NUMÉRICO COM A SBKS

Após a formulação matemática do problema, foi feita a sua implementação em um algoritmo em MATLAB, software da MathWorks. O código utilizado para implementar o problema referente ao contrato de Tipo I, o código para resolução do problema referente ao contrato de Tipo II, o código para solução do problema referente à negociação compromissada via SBN e o código usado para implementar a SBKS encontram-se na seção de Apêndices.

Com o intuito de validar a correção da implementação da solução, o exemplo numérico apresentado por Palamarchuk foi replicado. Como dados iniciais para o algoritmo, foram usados os dados contidos no Quadro 8 e Quadro 9, os resultados obtidos para a programação compromissada são exibidos no Quadro 15.

Quadro 15 - Resultados da programação compromissada das entregas SBKS x SBN

PROGRAMAÇÃO COMPROMISSADA - SBKS								
Intervalos	**Valores das variáveis para a CF**				**Valores das variáveis para a CG**			
	x_k^t	x_s^t	x_{ss}^t	Entregas sob BC $x_k^t + x_{ss}^t$	x_c^t	x_{gs}^t	x_{gss}^t	Geração $x_c^t + x_{gss}^t$
t_1	8,23	1,57	6,77	15,00	10,54	4,46	3,46	14
t_2	2,54	8,86	65,46	68,00	13,57	54,43	1,43	15
t_3	8,97	5,53	53,03	62,00	4,33	57,67	12,08	16,41
PROGRAMAÇÃO COMPROMISSADA - SBN								
Intervalos	**Valores das variáveis para a CF**				**Valores das variáveis para a CG**			
	x_k^t	x_s^t	x_{ss}^t	Entregas sob BC $x_k^t + x_{ss}^t$	x_c^t	x_{gs}^t	x_{gss}^t	Geração $x_c^t + x_{gss}^t$
t_1	9,8	0	22,9	32,7	9,5	23,2	4,5	14
t_2	11,9	0	56,6	68	15	53	0	15
t_3	14,5	0	29,8	44,3	5,12	39,18	11,25	16,37

Fonte: O autor.

Quanto à CG, como pode-se observar, o algoritmo da SBKS manteve praticamente iguais as entregas da CG sob BC à CF ($x_c^t + x_{gss}^t$). Houve um aumento considerável nas compras de energia no mercado *spot* (x_{gs}^t) e as vendas de energia excedentes ao mercado *spot* para serem entregues via BC à CF x_{gss}^t mantiveram-se na média em um número próximo.

Já, quanto à CF, houve um grande aumento nas compras feitas no mercado *spot* x_s^t. Além disso, houve aumento considerável nas vendas de energia recebida por BC para o mercado *spot.*

O valor do contrato J foi de **$1666,36**, valor maior que o da solução encontrada por Palamarchuk ($1650,61), porém é o mesmo que o da solução encontrada por Toledo e por Cunha $1666,36, o que pode vir a reforçar a ideia apresentada pelos autores de que a equação que define o J como variável do problema deve levar em conta as receitas previstas pelas programações independentes obtidas pela CF e CG.

A concessão que cada lado deverá fazer em relação ao lucro máximo que poderia ser obtido considerando-se a área de negociação, $314,58, é de **55,01%**, ou seja, cada parte receberia $ 141,52, valor também igual ao encontrado por Toledo (2017) e por Cunha (2017).

5.4 VERIFICAÇÃO DA REPLICABILIDADE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A SBKS

Para a verificação da consistência do algoritmo que implementa a SBKS foram refeitas as programações independentes para ambos os tipos de contrato variando-se o volume total do contrato (o montante total de energia a ser entregue durante o período de vigência do contrato). Foram feitas 9 simulações, quatro com valores inferiores ao volume original V de 145 MWh e quatro com valores superiores ao V original.

Mantiveram-se constantes os limites de entrega sob BC para cada período, pois esses totalizam 190, limite superior que o maior valor considerado). Os valores das entregas aos consumidores finais também foram mantidos. Isso por um lado pode significar na diminuição da aderência do modelo à realidade, mas tem o intuito de simplificar a comparação entre os modelos.

Não foram feitas simulações com outros valores, porque os volumes de contrato entrariam em contradição com os valores de entregues até dado intervalo *t* assumidos na execução das FRF.

O Quadro 16 sumariza os resultados obtidos pela SBKS e pela SBN de acordo com a implementação de Palamarchuk. O Quadro 17 sumariza os resultados obtidos pela SBKS e pela SBN de acordo com a implementação de Toledo e Cunha.

Quadro 16 - Simulação para diferentes Volumes do Contrato - Palamarchuk x SBKS

Volume do Contrato	**V = 130**		**V = 135**		**V = 140**	
Lucro Máximo CF - Prog Ind. Tipo I	1654		1701,3		1755,9	
Receita GC - Prog In. Tipo I	1354		1411,8		1468,8	
Receita CF - Prog In. Tipo II	1587,6		1644,2		1714,8	
Lucro Máximo CG - Prog Ind. Tipo II	1316,2		1374,3		1451,3	
Região de Negociação	337,80		327,00		304,60	
	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH
Valor do Contrato (J)	1497,24	1485,10	1555,69	1537,80	1612,36	1603,60
CF - Lucro Prog Compromissada	146,02	143,43	144,97	141,15	143,54	141,67
CG- Lucro Prog Compromissada	146,02	143,43	144,97	141,15	143,54	141,67
Concessão CF	56,77%	57,54%	55,67%	56,83%	52,88%	53,49%
Concessão CG	56,77%	57,54%	55,67%	56,83%	52,88%	53,49%

Volume do Contrato	**V = 145**		**V = 150**		**V = 155**	
Lucro Máximo CF - Prog Ind. Tipo I	1807,9		1859,9		1911,9	
Receita GC - Prog In. Tipo I	1524,8		1580,8		1636,8	
Receita CF - Prog In. Tipo II	1759,4		1817		1874,6	
Lucro Máximo CG - Prog Ind. Tipo II	1493,3		1552,8		1612,3	
Região de Negociação	314,60		307,10		299,60	
	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH
Valor do Contrato (J)	1666,36	1650,60	1720,36	1706,35	1774,35	1762,10
CF - Lucro Prog Compromissada	141,54	138,18	139,54	136,55	137,54	134,92
CG- Lucro Prog Compromissada	141,54	138,18	139,54	136,55	137,54	134,92
Concessão CF	55,01%	56,08%	54,56%	55,54%	54,09%	54,97%
Concessão CG	55,01%	56,08%	54,56%	55,54%	54,09%	54,97%

Volume do Contrato	**V = 160**		**V = 165**		**V = 170**	
Lucro Máximo CF - Prog Ind. Tipo I	1963,9		1988,9		2046,3	
Receita GC - Prog In. Tipo I	1692,8		1731,3		1790,8	
Receita CF - Prog In. Tipo II	1940		1996,3		2052,6	
Lucro Máximo CG - Prog Ind. Tipo II	1682,3		1740,1		1797,8	
Região de Negociação	281,60		248,80		248,50	
	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH
Valor do Contrato (J)	1828,36	1823,10	1882,36	1864,50	1936,6	1922,05
CF - Lucro Prog Compromissada	135,34	134,42	133,54	129,73	131,54	128,49
CG- Lucro Prog Compromissada	135,34	134,42	133,54	129,73	131,54	128,49
Concessão CF	51,94%	52,27%	46,33%	47,86%	47,07%	48,29%
Concessão CG	51,94%	52,27%	46,33%	47,86%	47,07%	48,29%

Fonte: O autor.

Quadro 17- Simulação para diferentes Volumes do Contrato - Toledo-Cunha x SBKS

Volume do Contrato	**V = 130**		**V = 135**		**V = 140**	
Lucro Máximo CF - Prog Ind. Tipo I	1654		1701,3		1755,9	
Receita GC - Prog In. Tipo I	1354		1411,8		1468,8	
Receita CF - Prog In. Tipo II	1587,6		1644,2		1714,8	
Lucro Máximo CG - Prog Ind. Tipo II	1316,2		1374,3		1451,3	
Região de Negociação	337,80		327,00		304,60	
	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH
Valor do Contrato (J)	1497,24	1504,00	1555,69	1556,55	1612,36	1612,35
CF - Lucro Prog Compromissada	146,02	141,02	144,97	144,77	143,54	143,54
CG- Lucro Prog Compromissada	146,02	141,02	144,97	144,77	143,54	143,54
Concessão CF	56,77%	58,25%	55,67%	55,73%	52,88%	52,88%
Concessão CG	56,77%	58,25%	55,67%	55,73%	52,88%	52,88%

Volume do Contrato	**V = 145**		**V = 150**		**V = 155**	
Lucro Máximo CF - Prog Ind. Tipo I	1807,9		1859,9		1911,9	
Receita GC - Prog In. Tipo I	1524,8		1580,8		1636,8	
Receita CF - Prog In. Tipo II	1759,4		1817		1874,6	
Lucro Máximo CG - Prog Ind. Tipo II	1493,3		1552,8		1612,3	
Região de Negociação	314,60		307,10		299,60	
	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH
Valor do Contrato (J)	1666,36	1666,35	1720,36	1720,35	1774,35	1774,35
CF - Lucro Prog Compromissada	141,54	141,54	139,54	139,54	137,54	137,54
CG- Lucro Prog Compromissada	141,54	141,54	139,54	139,54	137,54	137,54
Concessão CF	55,01%	55,01%	54,56%	54,56%	54,09%	54,09%
Concessão CG	55,01%	55,01%	54,56%	54,56%	54,09%	54,09%

Volume do Contrato	**V = 160**		**V = 165**		**V = 170**	
Lucro Máximo CF - Prog Ind. Tipo I	1963,9		1988,9		2046,3	
Receita GC - Prog In. Tipo I	1692,8		1731,3		1790,8	
Receita CF - Prog In. Tipo II	1940		1996,3		2052,6	
Lucro Máximo CG - Prog Ind. Tipo II	1682,3		1740,1		1797,8	
Região de Negociação	281,60		248,80		248,50	
	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH	KALAI SMORODINSKY	NASH
Valor do Contrato (J)	1828,36	1828,35	1882,36	1860,10	1936,6	1918,55
CF - Lucro Prog Compromissada	135,54	135,54	133,54	128,80	131,54	127,75
CG- Lucro Prog Compromissada	135,54	135,54	133,54	128,80	131,54	127,75
Concessão CF	51,87%	51,87%	46,33%	48,23%	47,07%	48,59%
Concessão CG	51,87%	51,87%	46,33%	48,23%	47,07%	48,59%

Fonte: O autor.

Quando comparada à solução proposta por Palamarchuk, em todos os casos simulados, a SBKS forneceu resultados que sugeriram menores para ambas as partes. O que pode ser interpretado como uma solução preferível para ambos os envolvidos.

Já, quando comparado à solução proposta por Toledo-Cunha (2017), o que imediatamente chama a atenção é o fato de que em cinco das simulações, i.e., para V= {140, 145, 145, 150, 155, 160}, o resultado obtido foi exatamente o mesmo (salvo negligenciáveis diferenças que podem ser atribuídas ao arredondamento dos valores). Para as quatro simulações restantes, i.e., para V= {130, 135, 165, 170}, a SBKS sugeriu resultados que seriam mais benéficos às partes do acordo dos que os sugeridos pela SBN.

5.5 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS OBTIDOS COM A SBKS

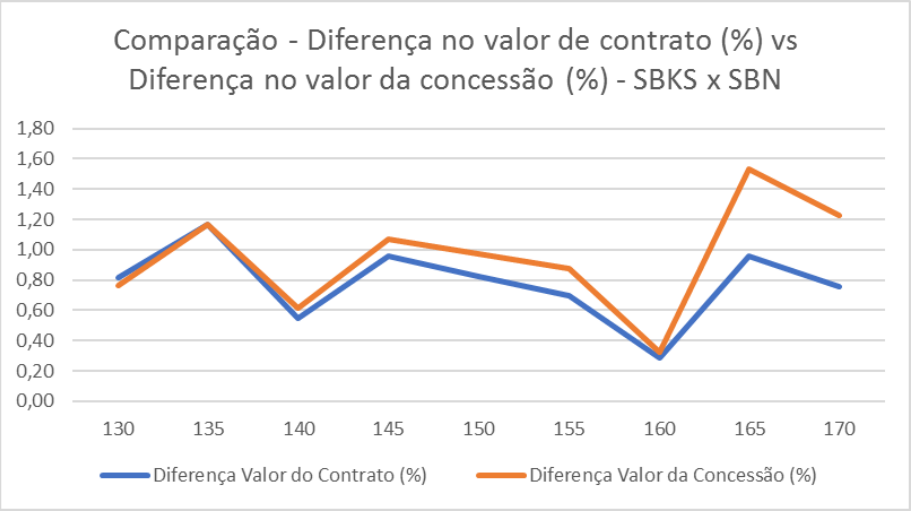
O modelo que implementa a SBKS mostrou-se bastante comparável ao modelo que implementa a SBN. Especialmente quando considerada a alteração feita por Toledo-Cunha o modelo forneceu diversas soluções iguais. Esse fato pode ser encarado como forma de validar a implementação das soluções.

Talvez mais interessante seja o fato de que ambos os modelos forneceram resultados muitos próximos, mas a função objetivo de um pretende a maximização do resultado, enquanto outra tem como gol a minimização do resultado.

A diferença observada nos valores de contrato periféricos, i.e., para V= {130, 135, 165, 170}, possivelmente possa ser atribuída ao distanciamento dos dados de entrada de uma situação plausível, lembrando-se que apesar de refeitas as programações independentes dos contratos Tipo I e Tipo II, apenas o valor de J foi alterado - ainda que verificado se o valor ainda atendia às restrições do problema.

Quanto ao valor do contrato (J), em todos os casos, as programações obtidas por meio da SBKS apresentaram valores superiores aos obtidos por meio da SBN. Este fato sugere que valores maiores de contrato proporcionam concessões menores. Afim de que fosse verificado a existência de alguma influência no valor do contrato obtido para um dado volume total de contrato e a concessão a ser feita pelas partes, foi feito um estudo de correlação entre os valores das diferenças entre os valores de contrato (SBKS – SBN) e sobre a diferença entre as concessões a serem feitas (SBN – SBKS). A figura abaixo ilustra essa comparação.

Figura 13 - Diferenças entre os valores de contrato e valores das concessões SBKS vs SBN



Fonte: O autor.

Por meio da análise do gráfico é possível verificar que o valor do contrato possui alguma influência sobre a concessão a ser feita. Com o intuito de certificar que essa conclusão é coerente, foi aplicado o Coeficiente de Correlação de Pearson **ρ** que mede o grau de correlação entre duas variáveis. O valor obtido foi de **0,81**, o que confirma a hipótese de que o valor de contrato e as concessões estão fortemente positivamente relacionadas.

Ao comparar o exemplo numérico fornecido por Palamarchuk e o resultado obtido pela solução aqui apresentada, a diferença foi de apenas $56{,}08 - 55{,}01 = \mathbf{1{,}07}\%$, porém o que não pode ser desconsiderado nesse caso é o montante do lucro que as empresas do setor obtêm a cada ano.

Para ilustrar o fato e de maneira completamente hipotética, sem compromisso em apresentar um dado plausível, de acordo com a Demonstração da Conta de Resultados publicada pela Eletrobras (2016), no ano de 2016 a usina hidrelétrica de Itaipu, empresa binacional (Brasil e Paraguai) obteve um lucro líquido de US$ 1.114.409.000,00 (um bilhão cento e quatorze milhões quatrocentos e nove mil dólares). Suponha que este lucro tivesse sido obtido com o modelo proposto por Palamarchuk. Caso, os gestores de Itapu tivessem optado por seguir as programações provenientes do algoritmo da SBKS, eles teriam tido um lucro líquido de aproximadamente US$1.141.559.000,00 (um bilhão cento e quarenta e um milhões quinhentos e cinquenta e nove mil dólares), um aumento no lucro da empresa de **US$ 27.150.000,00** (vinte e sete milhões cento e cinquenta mil dólares), valor longe de poder ser desprezado.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Os resultados apresentados neste trabalho servem para aprofundar a discussão relativa à definição de uma estratégia ótima para a criação de um portfólio de contratos no Mercado Livre de Energia por meio de compra e venda de energia no mercado spot e contratos bilaterais.

O modelo proposto por Palamarchuk (2010), inicialmente restrito a apenas uma solução foi expandido por Cunha (2017) e Toledo (2017) que foram capazes de demonstrar empiricamente a possibilidade de mais de uma solução, podendo essas, inclusive, fornecerem resultados melhores do que aquele obtido pela solução original de Palamarchuk e isso respeitando-se todas as restrições e dados anteriores.

No modelo aqui proposto, pôde-se perceber que ambas as partes do contrato respondem de maneira diferente a um dado preço da energia no mercado *spot*. Isso se dá pelo fato de que altos preços no mercado *spot* são favoráveis ao produtor de energia, enquanto a situação é oposta em um cenário de baixos preços no mercado.

A implementação da Solução de Barganha de Kalai-Smorodinsky apresentada neste trabalho serve para expandir ainda mais a percepção da existência de mais de uma solução ótima para o problema original. Os resultados obtidos, respeitando-se todas as premissas e restrições do modelo proposto por Palamarchuk serviram para responder o questionamento apresentado na primeira parte da pesquisa, *i.e.*, sim, é possível obter resultados diferentes que os obtidos por Palamarchuk.

Ressalta-se o fato de que para todos os casos testados a SBKS forneceu resultados melhores dos que os obtidos com a solução do problema proposta por Palamarchuk. Este fato pode ser interpretado de forma que, para esse caso, a solução aqui descrita é superior.

Ainda que ligeiramente diferentes um do outro, a proximidade dos valores obtidas com ambos os modelos, serve para validá-los. Não houve nenhuma diferença expressiva entre os valores obtidos nas simulações feitas com diferentes valores para o volume do contrato. Porém, em se tratando de um mercado bilionário, uma diferença de apenas 1% geraria uma expressiva diferença na receita dos atores envolvidos na negociação.

Finalmente, os resultados aqui apresentados podem ser tidos como motivadores para a modelagem do problema com a implementação de outras soluções de barganha para que, num

momento posterior, seja possível elaborar um modelo que considere os resultados obtidos por diferentes estratégias para, então, definir-se a estratégia ótima que seja mutuamente superior às partes do contrato. Uma segunda sugestão seria desenvolver um algoritmo que forneça todas as diferentes soluções ótimas para cada um dos modelos implementados. Finalmente, um estudo sobre como verificar a existência, ou não, de uma região convexa formada pelas soluções ótimas obtidas pelas diferentes soluções de barganhas consideradas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANBARCI, N.; BOYD III, J. H. ***Nash Demand Game and the Kalai-Smorodinsky Solution***. *Games and Economic Behavior*, v. 71, 2008, pp. 14-22.

ARIAS, D. J. R., CARDONA, F. D. B., HAROLD, S. I. ***Contract price of a bilateral contract using risk assessment: With application to Colombian wholesale electricity market***. Procv. 2010 IEEE ANDERSCON, Bogota, Colômbia, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE COMERCIALIZADORES DE ENERGIA (ABRACEEL). **Mercado Livre de Energia Elétrica: Um guia básico para consumidores potencialmente livres e especiais. 2016**. Disponível em <http://www.abraceel.com.br/archives/files/Abraceel_Cartilha_MercadoLivre_V9.pdf>

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE COMERCIALIZADORES DE ENERGIA (ABRACEEL). **Energia Livre: como a liberdade de escolha no setor elétrico pode ajudar o Brasil**. São Paulo, 2014. Disponível em <http://www.abraceel.com.br/archives/files/Livro_Energia_Livre.pdf>

AUMANN, R. J.; MASCHLER, M. ***The Bargaining Set for Cooperative Games***. *Annals of Mathematical Studies*, v. 52, 1964, pp. 443-476.

BALDICK, R., KOLOS, S., TOMPAIDIS, S. ***Interruptible electricity contracts from an electricity retailer's point of view: valuation and optimal interruption***, *Operations Research*, 2006, p. 627–642.

BARTLETT, P. ***Nash Bargaining – Multiplayer TU cooperative games***, *Statistics 155 class notes*, 2016

BELLMAN, R. E.; DREYFUS, S. E. ***Applied Dynamic Programming***. The RAND Corporation, 1962.

BJORGAN, R. SONG, H., LIU, C., DAHLGREN, R. ***Pricing flexible electricity contracts***. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 2, 2000, p. 477-482.

CÂMARA DE COMERCIALIZAÇÃ DE ENERGIA ELÉTRICA. **Construindo um mercado inteligente de energia elétrica no Brasil**, 2012.

CÂMARA DE COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA. **Panorama e perspectivas da comercialização de energia elétrica**. VIII Conferência do Setor Elétrico/Saneamento – Santander. Mar. 2017. Disponível em <

https://pt.slideshare.net/CCEEOficial/panorama-e-perspectivas-da-comercializao-de-energia-eltrica>

CÂMARA DE COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA. **Preço de Liquidação de Diferenças**. Disponível em < http://www.ccee.org.br/ccee/documentos/ccee_059061>

CUNHA, V. A. D. **Programação dinâmica aplicada à negociação de contratos bilaterais no mercado de eletricidade**. Universidade de Brasília, Brasília, Julho, 2017.

EL KHATIB, S., GALIANA, F. D. ***Negotiating bilateral contracts in electricity markets***. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, n. 2, 2007, p. 553-562.

EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. **Demanda de Energia 2050**. Série: Estudos da demanda de Energia, Nota Técnica DEA 13/14. Rio de Janeiro, ago. 2014. Disponível em < http://www.epe.gov.br/Estudos/Documents/DEA%2013-14%20Demanda%20de%20Energia%202050.pdf>

ENERGY NETWORKS ASSOCIATION. ***Electricity Prices and Network Costs***. Abr. 2014. Disponível em < http://www.energynetworks.com.au/sites/default/files/electricity-prices-and-network-costs_2.pdf>

ERBARCH, G, ***Understanding Electricity Markets in the EU***, In: *Annual European Parliament Reseach Briefing*, 2016.

ERNI, D. ***Day-Ahead Electricity Spot Prices – Fundamental Modelling and the Role of Expected Wind Electricity Infeed at the European Energy Exchange***. *University of St. Gallen*: St. Gallen, 2012

EUROPEAN ENVIRONMENT AGENCY. ***Electric vehicles and the energy sector – impacts on Europe's future emissions***. 2016. Disponível em <https://www.eea.europa.eu/themes/transport/electric-vehicles/electric-vehicles-and-energy>

GARCIA, C. B., LEMKE, C. E. LUTHI, H. J. ***Simplicial Approximation of an Equilibrium Point of Noncooperative N-Person Games***. *Mathematical Programming*, vol. 4, pp. 227–260, 1973.

GARCIA, R. C.; CONTRERAS, J. VAN AKKEREN, M.; GARCIA, J. B. C. ***A GARCH forecasting model to predict day-ahead electricity prices***. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 2, 2005, 867-874 p.

GEDRA, T. W., VARAIYA, P. ***Markets and pricing for interruptible electric power***, IEEE

Transactions on Power Systems, 1993, p. 122–128.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora

da UFRGS, 2009

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

HILLIER, F. S; LIEBERMAN, G. J. ***Introduction to Operations Research***. 9th ed. New York: McGraw-Hill, 2013.

ITAIPU BINACIONAL. **Demonstrações contábeis intermediárias de 20016 e relatório de revisão dos auditors independentes**. 2016, Disponível em <http://eletrobras.com/pt/ri/DemonstracoesEmpresasGT/ITAIPU%20%20Setembro%202016.pdf>

INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. ***Lessons from Liberalised Electricity Markets***. Paris, 2005. Disponível em <https://www.iea.org/publications/freepublications/publication/LessonsNet.pdf>

INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. ***World Energy Outlook 2016***. Disponível em <https://www.iea.org/publications/freepublications/publication/WorldEnergyOutlook2016ExecExecutiveSummaryEng.pdf>

JOSKOW, P. L. ***Lessons Learned From Electricity Market Liberalization. The Energy Journal***, 2008. Disponível em <https://stuff.mit.edu/afs/athena.mit.edu/dept/cron/Backup/project/urban-sustainability/Old%20files%20from%20summer%202009/Ingrid/Urban%20Sustainability%20Initiative.Data/Joskow-Lessons_Learned_fr---ket_Liberalization.pdf>

KALAI, E.; SMORODINSKY, M. ***Other Solutions to Nash's Bargaining Problem***. Econometrica, v. 43, 1975, p. 513-518.

KARTHIKEYAN, S. P.; RAGLEND, I. J.; KOTHARI, D. P. ***A review on market power in deregulated electricity market***. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 48, 2013, 139-147 p.

LEMKE, C. E., HOWSON, J. T. ***Equilibrium Points of Bimatrix Games***. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 12: 413–423, 1964.

LEWIS, C. ***Linear Programming: Theory and Applications***. Whitman College, 2008. Disponível em < https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/lewis.pdf>

LI, T.; SHAHIDEHPOUR, M. ***Strategic bidding of transmission-constrained GENCOs with incomplete information***. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 1, 2005, p. 437–447.

LIU, Z.; REN, Y.;WANG, E.; TANG, H. ***Swarm simulation on high low matching auction mechanism based on secondary trade of bilateral contract***. *Automation of Electric Power Systems*, v. 31, 2007, p. 26–29.

LUCE, R. D.; RAIFFA, H. ***Games and Decisions: introduction and critical survey***. John Wiley & Sons, 1957.

MAYERLE, S. F. **Programação Dinâmica**. Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, Florianópolis, 2015.

MORSE, P. M.; KIMBALL, G. E. ***Methods of Operations Research***. *The Technology Press of Massachussets Institute of Technology*, 1951.

MUTHOO, A. ***Bargaining Theory with applications***. *Cambridge University Press*. Nova York, 1999.

NASH, J. F. ***Equilibrium Points in N-Person Games***. Princeton University, 1950a.

NASH, J. F. ***Non-Cooperative Games***. *Annals of Mathematics*, pp. 286-295, 1951.

NASH, J. F. ***The Bargaining Problem***. Econometrica, p. 155-162, 1950b.

NASH, J. F. ***Two-person Cooperative Games***. Econometrica. P. 128-140, 1953.

OLIVEIRA, F.; RUIZ, C.; CONEJO, A. ***Contract design and supply chain coordination in the electricity industry***. *European Journal of Operations Research*, v. 227, n. 3, 2013, p. 527–537.

OSBORNE, M. J; RUBINSTEIN, A. ***A Course in Game Theory***. The MIT Press, Cambridge, Massachussets, London, England. 1994.

OZDAGLAR, A. ***Game Theory with Engineering Applications Lecture 14: Nash Bargaining Solution***. *Massachussets Institute of Technology*, 2010. Disponível em < https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-254-game-theory-with-engineering-applications-spring-2010/lecture-notes/MIT6_254S10_lec14.pdf>

PALAMARCHUK, S. I**.** ***Bilateral contracts for electricity delivery: scheduling and arrangement***. Proceedings 2007 IEEE Lausanne Power Tech, Lausanne, p. 843-848, 2007.

PALAMARCHUK, S. I. ***Compromise Scheduling of the Bilateral Contracts in the Electricity Market Environment***. In: SOROKIN, A,; REBENNACK, S.; PARDALOS, P. M.; ILIADIS,

N. A.; PEREIRA, M. V. F. *Handbook of Networks in Power Systems* I. 1. Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. Cap. 9, p. 241-279.

PALAMARCHUK, S. I. ***Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling***. *IET Generation, Transmission & Distribution*, v. 4, n. 2, 2010, p. 211-220.

PALAMARCHUK, S. I. ***Forward contracts for electricity and their correlation with spot markets***. Proceedings 2003 IEEE Bologna Power Tech Conference, Bologna, 2003.

PELEG, B. ***Existence theorem for the bargaining set***. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 69, n. 1, 1963, 109-110 p.

PEREIRA, M., CAMPODONICO N., KELMAN R. ***Long-term hydro scheduling based on stochastic models***. *Proceedings International Conference Electrical Power Systems Operations and Management* – EPSOM'98, vol. 1, p. 1-22. 1998.

PINTO, T.; VALE, Z.; PRAÇA, I.; PIRES, E. J. S.; LOPES, F. ***Decision Support for Energy Contracts Negotiation with Game Theory and Adaptive Learning***. *Energies*, v. 8, n. 9, 2015.

RAJGOPAL, J. ***Principles and Applications of Operations Research***. *In: Maynard's Industrial Engineering Handbook*, 5 ed. pp. 11.27-11.44, 2001.

RENEWABLE ENERGY WORLD. ***The Future of Electricity Markets***. 2013. Disponível em <http://www.renewableenergyworld.com/articles/2013/02/the-future-of-electricity-markets.html>

RUBINSTEIN, A. ***Perfect Equilibrium in a Bargaining Model***. Econometrica, v. 50, 1982, p. 97-109.

SOLEYMANI, S. ***Bidding strategy of generation companies using PSO combined with SA method in the pay as bid markets***. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, v. 33, n. 7, 2011, p. 1272–1278.

SOYTAS, U.; SARI, R. ***Energy consumption and GDP: causality relationship in G-7 countries and emerging markets.*** *Energy Economics*, v.3, n.1, p. 33-37, 2003.

STERN, D. ***Economic Growth and Energy***. *Encyclopedia of Energy*, v. 2. Nova York: Elsevier, 2004.

STOFT, S. ***Power System Economics*** – *Designing Markets for Electricity*. IEEE Press and Wiley-Interscience, New York, 2002.

TAN, Z.; ZHANG, J.; WANG, J.; XU, J. ***Day-ahead electricity price forecasting using wavelet***

transform combined with ARIMA and GARCH models. *Applied Energy*, v. 87, n. 11, 2010. 3606-3610 p.

TANG, Y.; LING, J.; WU, C.; CHEN, N.; LIU, X.; GAO, B. ***Game-Theoretic Optimization of Bilateral Contract Transaction for Generation Companies and Large Consumers with Incomplete Information***. *Entropy*, v. 19, n. 272, 2017.

THE INSTITUTE FOR OPERATIONS RESEARCH AND THE MANAGEMENT SCIENCES. **What is Operations Research?** Disponível em <https://www.informs.org/About-INFORMS/What-is-Operations-Research>

TOLEDO, F. S. **OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA E TEORIA DOS JOGOS APLICADAS À PROGRAMAÇÃO DA COMERCIALIZAÇÃO DE ENERGIA MEDIANTE CONTRATOS BILATERAIS E O MERCADO SPOT.** Universidade de Brasília, Brasília, Julho, 2017.

TONELLI, P. A. **Jogos Cooperativos**, Matemática Aplicada – Notas de Aula, Universidade de São Paulo, 2015**.** Maio, 2017. Disponível em < https://www.ime.usp.br/~tonelli/downloads.html/jogoscooperativos.pdf>

UNITED STATES ENERGY INFORMATION ADMINISTRATION. ***International Energy Outlook 2017***. Maio, 2017. Disponível em <https://www.eia.gov/outlooks/ieo/pdf/0484(2017).pdf>

WANG, J.; SHAHIDEHPOUR, M.; LI, Z.; BOTTERUD, A. ***Strategic generation capacity expansion planning with incomplete information***. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 24, n. 2, 2009, p. 1002–1010.

WEI, W.; LIU, F.; MEI, S. ***Energy Pricing and Dispatch for Smart Grid Retailers Under Demand Response and Market Price Uncertainty***. In: *IEEE Transactions on Smart Grid*, v. 6, n. 3, 2015, p. 1364–1374.

WERON, R. ***Electricity price forecasting: A review of the state-of-the-art with a look into the future***. *International Journal of Forecasting*, v. 30, n. 3, 2014, p. 1030-1081,

WORLD ENERY COUNCIL. ***World Energy Issues Monitor 2017***. Disponível em < https://www.worldenergy.org/wp-content/uploads/2017/04/1.-World-Energy-Issues-Monitor-2017-Full-Report.pdf>

XIA, W.; LU, L.; LIU, P. ***Economic game theory research on bilateral electricity pricing in direct power purchase***. *Modern Electric Power*, v. 32, 2015, p. 71–75.

APÊNDICES

Os códigos apresentados a seguir foram os utilizados no software MATLAB para a obtenção dos resultados expostos e discutidos nos Capítulos 4 e 5.

Apêndice 1 – Código utilizado para a programação independente realizada pelo distribuidor - CF

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type I
rng(5)
clc;
clear all;

% Number of time intervals in the contract period
N = 3;

% Number of the contract states set for the FRF construction
n = 3;

% Number of discrete levels set for random spot market price presentation
m = 3;

% Total amount of electricity received by ESC (Electricity Sypply Company)
% under BC (Bilateral Contract) during contract period, MWh
V = 145;

%% ESC Optimization

% Amounts of electricity delivered under the BC by the beginning of
% interval t, $/MWh (Contract states)
xtDD = [0 0 0; 60 90 100; 90 125 140];

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsj = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];
% expected probabilities
csitj = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];
% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% Constraints for optimisation problem
% electricity comsumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];
% limits on eletricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];


[xESC, zmaxESC, FRFcoef] = contractTypeIESC(N, n, m, V, xtDD, ptsj, csitj,
ptd, xtd, xtminmax)

%% GC Optimization
% Spot price forecasts made by GC
```

```
% spot price scenarios, $/MWh
ptsgj = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
% expected probabilities
csitj = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];

% production cost functions ([constant xg xg^2]), $
ct = [8.4 1.4 0.4; 10.4 1.52 0.44; 11.2 1.4 0.32];

% Constraints for optimisation problem
% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];
deliveries_xESC = xESC(:,1)+xESC(:,3)

[xGC, zmaxGC] = contractTypeIGC(N, m, ptsgj, csitj, ct, xtgminmax,
deliveries_xESC)

sum_xGC = sum(xGC(:,[1 3]),2)
```

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type I - ESC side

function [solution, zmax, FRFcoef] = contractTypeIESC(N, n, m, V, xtDD,
ptsj, csitj, ptd, xtd, xtminmax)
x_ESC = [9.8 0 5.2; 11.4 0 56.6; 14.5 0 47.5]; %janiele
rng(5)
R = rand()*xtd; %janiele

%% Backward Procedure - First Iteraction
opts = optimset('Display','off');
FRFpoints = zeros(N,n);
FRFcoef = zeros(N-1,2); % linear approximation

% x = [xtk xts xtss].

% Objective function f.
% f(1) = xtk
% f(2) = xts
% f(3) = xtss
temp = 0;
for i=1:m
    temp = temp + ptsj(N,i)*csitj(N,i)
end

f = [ptd(N) (ptd(N)-temp) temp];
f = -f;
% Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
% constraint (5) - (6)
A = [1 0 1; -1 0 -1; -1 0 0; 0 -1 0; 0 0 -1];
b = [xtminmax(N,2) -xtminmax(N,1) 0 0 0]';

% Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
% constraints (4) and (14)
Aeq = [1 1 0; 1 0 1];

for i=1:n
    beq = [xtd(N) (V - xtDD(N,i))]';
    x = linprog(f,A,b,Aeq,beq) %,[],[],[], opts);
    FRFpoints(N,i) = -f*x
```

```
end

% Calculate the linear approximation of the FRF using least square
f = fittype('poly1');
fit1 = fit(xtDD(N,:)',FRFpoints(N,:)',f)
FRFcoef(N-1,1) = fit1.p2
FRFcoef(N-1,2) = fit1.p1

%% Backward Procedure - Next Iteractions

% x = [xtk xts xtss xt+1,N].

for j=N-1:-1:1
    % Objective function f.
    % f(1) = xtk
    % f(2) = xts
    % f(3) = xtss
    % f(4) = xt+1,N
    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(j,i)*csitj(j,i);
    end

    f = [ptd(j) (ptd(j)-temp) temp -FRFcoef(j,2)];
    f = -f;

    % Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
    % constraint (5), (6) and (17)
    A = [ 1 0 1 0; -1  0 -1  0; ... % (5)
          0 0 0 1;  0  0  0 -1; ... % (17)
         -1 0 0 0;  0 -1  0  0; 0 0 -1 0]; % (6)
    b = [xtminmax(j,2) -xtminmax(j,1) ... % (5)
         sum(xtminmax(j+1:N,2)) -sum(xtminmax(j+1:N,1)) ... % (17)
          0 0 0]'; % (6)

    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
    % constraints (4) and (16)
    Aeq = [1 1 0 0; 1 0 1 1];

    for i=1:n
        beq = [xtd(j) (V - xtDD(j,i))]';
        x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)%,[],[],[], opts);
        FRFpoints(j,i) = -f*x + FRFcoef(j,1) + FRFcoef(j,2)*V
    end

    if j>=2
        % Calculate the linear approximation of the FRF using least square
        f = fittype('poly1');
        fit1 = fit(xtDD(j,:)',FRFpoints(j,:)',f);
        FRFcoef(j-1,1) = fit1.p2;
        FRFcoef(j-1,2) = fit1.p1;
    end
end

%FRFcoef = [1783.076 -11.48;1730.14 -11.48]; %janiele

%% Forward Procedure

solution = zeros(N,4);
```

```
zmax = 0;

for j=1:N-1
    % Objective function f.
    % f(1) = xtk
    % f(2) = xts
    % f(3) = xtss
    % f(4) = xt,N
    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(j,i)*csitj(j,i);
    end

    f = [ptd(j) (ptd(j)-temp) temp -FRFcoef(j,2)];
    f = -f;

    % Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
    % constraint (5), (20) and (6)
    A = [1 0 1 0; -1  0 -1  0; ... % (5)
         0 0 0 1;  0  0  0 -1; ... % (20)
        -1 0 0 0;  0 -1  0  0; 0 0 -1 0]; %(6)
    b = [xtminmax(j,2) -xtminmax(j,1) ... % (5)
         sum(xtminmax(j+1:N,2)) -sum(xtminmax(j+1:N,1)) ... % (20)
         0 0 0]'; % (6)

    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
    % constraints (4) and (19)
    Aeq = [1 1 0 0; 1 0 1 1];

    if j == 1
        beq = [xtd(j) V]';
    else
        beq = [xtd(j) (V - sum(solution(1:j-1,1)) - sum(solution(1:j-
1,3)))]';
    end

    x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)%,[],[],[], opts);

%     x(1:3,:) = [R(j); xtd(j)- R(j); sum(x([1 3],:))-R(j)];  %changed by
Janiele

    solution(j,:) = x'
    zmax = zmax -f*x + f(4)*x(4);
end
temp
teste = ptsj.*csitj
sum(teste,2)
% Objective function f.
% f(1) = xtk
% f(2) = xts
% f(3) = xtss
temp = 0;
for i=1:m
    temp = temp + ptsj(N,i)*csitj(N,i)
end

f = [ptd(N) (ptd(N)-temp) temp];
f = -f;
```

```
% Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
% constraint (5) and (6)
A = [1 0 1; -1  0 -1; ... % (5)
    -1 0 0;  0 -1  0; 0 0 -1]; %(6)
b = [xtminmax(N,2) -xtminmax(N,1) ... % (5)
     0 0 0]'; % (6)

% Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
% constraints (4) and (19)
Aeq = [1 1 0 ; 1 0 1];
beq = [xtd(N) (V - sum(solution(1:N-1,1)) - sum(solution(1:N-1,3)))]';

x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)%,[],[],[], opts);
% x(1:3,:) = [R(N); xtd(N)- R(N); sum(x([1 3],:))-R(N)]; %janiele

solution(N,:) = [x' 0]
% solution(N,1:3) = x_ESC(N,:) %janiele
% x = solution(3,1:3)' %janiele

zmax = zmax -f*x
```

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type I - GC side

function [solution, zmax] = contractTypeIGC(N, m, ptsj, csitj, ct,
xtgminmax, deliveries_xESC)
opts = optimset('Display','off');
solution = zeros(N,3);
zmax = 0;
x_GC = [9.5 5.5 4.5; 15.0 53 0; 16.41 45.59 0];
rng(5)

for l=1:N
    % x = [xtc xtgs xtgss]'.

    % Objective function z(x) = (1/2)*x'*H*x + f'*x.
    % H represents the quadractic expression and f the linear
    H = 2*[-ct(l,3) 0 -ct(l,3); 0 0 0 ; -ct(l,3) 0 -ct(l,3)];
    H = -H;

    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(l,i)*csitj(l,i);
    end

    f = [-ct(l,2) -temp (temp-ct(l,2))];
    f = -f;

    % Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
    % constraint (9) and (11)
    A = [1 0 1; -1 0 -1; -1 0 0; 0 -1 0; 0 0 -1];
    b = [xtgminmax(l,2) -xtgminmax(l,1) 0 0 0]';

    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
    % constraints (10)
    Aeq = [1 1 0];
    beq = deliveries_xESC(l);
```

```
    % opts = optimset('Algorithm','Interior-point-convex','Display','off');
    % x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],opts);
        x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq)%,[],[],[], opts);

     %S2 = sum(x([1 3],:));
     %R2 = rand()*S2;
      %x = [R2; sum_xESC(l) - R2; S2 - R2];
     %x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq);
     solution(l,:) = x'

     zmax = zmax - ((1/2)*x'*H*x + f*x) - ct(l,1);

end
```

Apêndice 2 – Código utilizado para a programação independente realizada pelo produtor - CG

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type II

clc;
clear all;

% Number of time intervals in the contract period
N = 3;

% Number of the contract states set for the FRF construction
n = 3;

% Number of discrete levels set for random spot market price presentation
m = 3;

% Total amount of electricity received by ESC (Electricity Supply Company)
% under BC (Bilateral Contract) during contract period, MWh
V = 145;

% Amounds of electricity delivered under the BC by the beginning of
interval
%t, $/MWh (Contract states)
xtDD = [0 0 0; 60 90 100; 90 125 138];

% Spot price forecasts made by GC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsj = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
% expected probabilities
csitj = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];
% production cost functions ([constant xg xg^2]), $
ct = [8.4 1.4 0.4; 10.4 1.52 0.44; 11.2 1.4 0.32];

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% Constraints for optimization problem
% electricity consumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];

% Constraints for optimization problem
% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

% limits on electricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];

[xGC, zmaxGC, FRFcoef] = contractTypeIIGC(N, n, m, V, xtDD, ptsj, csitj,
ct, xtgminmax, xtminmax)

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsj = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.9];
% expected probabilities
csitj = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];
```

```
[xESC, zmaxESC] = contractTypeIIESC(N, m, ptsj, csitj, ptd, xtd, xtminmax,
xGC(:,1)+xGC(:,2))
```

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type II - GC side

function [solution, zmax, FRFcoef] = contractTypeIIGC(N, n, m, V, xtDD,
ptsj, csitj, ct, xtgminmax, xtminmax)

%% Backward Procedure - First Iteraction

FRFpoints = zeros(N,n);
FRFcoef = zeros(N-1,2); % linear approximation

% x = [xtc xtgs xtgss]'.

% Objective function z(x) = (1/2)*x'*H*x + f'*x.
% H represents the quadractic expression and f the linear
H = 2*[-ct(N,3) 0 -ct(N,3); 0 0 0 ; -ct(N,3) 0 -ct(N,3)];
H = -H;

temp = 0;
for i=1:m
    temp = temp + ptsj(N,i)*csitj(N,i);
end

f = [-ct(N,2) -temp (temp-ct(N,2))];
f = -f;

% Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
% constraint (9), (25) and (11)
A = [ 1 0 1; -1  0 -1; ... % (9)
      1 1 0; -1 -1  0; ... % (25)
     -1 0 0;  0 -1  0; 0 0 -1]; % (11)
b = [xtgminmax(N,2) -xtgminmax(N,1) ... % (9)
     xtminmax(N,2) -xtminmax(N,1) ... % (25)
      0 0 0]'; % (11)

% Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
% constraints (24)
Aeq = [1 1 0];

opts = optimset('Algorithm','Interior-point-convex','Display','off');

for i=1:n
    beq = V - xtDD(N,i); % (24)

    x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],opts);

    FRFpoints(N,i) = - ((1/2)*x'*H*x + f*x) - ct(N,1);
end

% Calculate the linear approximation of the FRF using least square
f = fittype('poly1');
fit1 = fit(xtDD(N,:)',FRFpoints(N,:)',f);
FRFcoef(N-1,1) = fit1.p2;
FRFcoef(N-1,2) = fit1.p1;
```

```
%% Backward Procedure - Next Iteractions

% x = [xtc xtgs xtgss xt+1,N].

opts = optimset('Algorithm','Interior-point-convex','Display','off');

for j=N-1:-1:1

    % Objective function z(x) = (1/2)*x'*H*x + f'*x.
    % H represents the quadractic expression and f the linear
    H = 2*[-ct(j,3) 0 -ct(j,3) 0; 0 0 0 0; -ct(j,3) 0 -ct(j,3) 0; 0 0 0 0];
    H = -H;

    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(j,i)*csitj(j,i);
    end

    f = [-ct(j,2) -temp (temp-ct(j,2)) -FRFcoef(j,2)];
    f = -f;

    % Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
    % constraint (9), (25), (17) and (11)
    A = [ 1 0 1 0; -1  0 -1  0; ... % (9)
          1 1 0 0; -1 -1  0  0; ... % (25)
          0 0 0 1;  0  0  0 -1; ... % (17)
         -1 0 0 0;  0 -1  0  0; 0 0 -1 0]; % (11)
    b = [xtgminmax(j,2) -xtgminmax(j,1) ... % (9)
         xtminmax(j,2) -xtminmax(j,1) ... % (25)
         sum(xtminmax(j+1:N,2)) -sum(xtminmax(j+1:N,1)) ... % (17)
          0 0 0]'; % (11)

    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
    % constraints (16 adapted)
    Aeq = [1 1 0 1];

    for i=1:n
        beq = V - xtDD(j,i); % (16 adapted)

        x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],opts);

        FRFpoints(j,i) = - ((1/2)*x'*H*x + f*x) - ct(j,1) + FRFcoef(j,1) +
FRFcoef(j,2)*V;
    end

    if j>=2
        % Calculate the linear approximation of the FRF using least square
        f = fittype('poly1');
        fit1 = fit(xtDD(j,:)',FRFpoints(j,:)',f);
        FRFcoef(j-1,1) = fit1.p2;
        FRFcoef(j-1,2) = fit1.p1;
    end
end

%% Forward Procedure

solution = zeros(N,4);
```

```
zmax = 0;

opts = optimset('Algorithm','Interior-point-convex','Display','off');

for j=1:N-1

    % Objective function z(x) = (1/2)*x'*H*x + f'*x.
    % H represents the quadractic expression and f the linear
    H = 2*[-ct(j,3) 0 -ct(j,3) 0; 0 0 0 0; -ct(j,3) 0 -ct(j,3) 0; 0 0 0 0];
    H = -H;

    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(j,i)*csitj(j,i);
    end

    f = [-ct(j,2) -temp (temp-ct(j,2)) -FRFcoef(j,2)];
    f = -f;

    % Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
    % constraint (9), (25), (17) and (11)
    A = [ 1 0 1 0; -1  0 -1  0; ... % (9)
          1 1 0 0; -1 -1  0  0; ... % (25)
          0 0 0 1;  0  0  0 -1; ... % (17)
         -1 0 0 0;  0 -1  0  0; 0 0 -1 0]; % (11)
    b = [xtgminmax(j,2) -xtgminmax(j,1) ... % (9)
         xtminmax(j,2) -xtminmax(j,1) ... % (25)
         sum(xtminmax(j+1:N,2)) -sum(xtminmax(j+1:N,1)) ... % (17)
          0 0 0]'; % (11)

    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
    % constraints (16 adapted)
    Aeq = [1 1 0 1];

    if j == 1
        beq = V;
    else
        beq = V - sum(solution(1:j-1,1)) - sum(solution(1:j-1,2));
    end

    x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],opts);
    solution(j,:) = x';
    %zmax = zmax -f*x + f(4)*x(4);
    zmax = zmax - ((1/2)*x'*H*x + f*x) - ct(j,1) + f(4)*x(4);
end

% Objective function z(x) = (1/2)*x'*H*x + f'*x.
% H represents the quadractic expression and f the linear
H = 2*[-ct(N,3) 0 -ct(N,3); 0 0 0; -ct(N,3) 0 -ct(N,3)];
H = -H;

temp = 0;
for i=1:m
    temp = temp + ptsj(N,i)*csitj(N,i);
end

f = [-ct(N,2) -temp (temp-ct(N,2))];
f = -f;
```

```
% Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
% constraint (9), (25) and (11)
A = [ 1 0 1; -1  0 -1; ... % (9)
      1 1 0; -1 -1  0; ... % (25)
     -1 0 0;  0 -1  0; 0 0 -1]; % (11)
b = [xtgminmax(N,2) -xtgminmax(N,1) ... % (9)
     xtminmax(N,2) -xtminmax(N,1) ... % (25)
      0 0 0]'; % (11)

% Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
% constraints (24)
Aeq = [1 1 0];
beq = V - sum(solution(1:N-1,1)) - sum(solution(1:N-1,2));

x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],opts);
solution(N,:) = [x' 0];

zmax = zmax - ((1/2)*x'*H*x + f*x) - ct(N,1);
```

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type II - ESC side

function [solution, zmax] = contractTypeIIESC(N, m, ptsj, csitj, ptd, xtd,
xtminmax, xt)

%% Forward Procedure
 solution = zeros(N,3);
zmax = 0;

for j=1:N
    % Objective function f.
    % f(1) = xtk
    % f(2) = xts
    % f(3) = xtss
    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(j,i)*csitj(j,i);
    end

    f = [ptd(j) (ptd(j)-temp) temp];
    f = -f;

    % Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
    % constraint (5) and (6)
    A = [1 0 1; -1  0 -1; ... % (5)
        -1 0 0;  0 -1  0; 0 0 -1]; %(6)
    b = [xtminmax(j,2) -xtminmax(j,1) ... % (5)
         0 0 0]'; % (6)

    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
    % constraints (4) and (10 adapted)
    Aeq = [1 1 0; 1 0 1];
    beq = [xtd(j) xt(j)]';

    x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
    solution(j,:) = x'
    zmax = zmax -f*x
end
```

Apêndice 3 – Código utilizado para análise dos preços *spot*

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type I_forecast

clc;
clear all;

% Number of time intervals in the contract period
N = 3;

% Number of the contract states set for the FRF construction
n = 3;

% Number of discrete levels set for random spot market price presentation
m = 11;

% Total amount of electricity receives by ESC (Electricity Supply Company)
% under BC (Bilateral Contract) during contract period, MWh
V = 145;

% Amounts of electricity delivered under the BC by the beggining of
% interval t, $/MWh (Contract states)
xtDD = [0 0 0; 60 90 100; 90 125 138]; % page 215

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh

%preÁos para t1
a = 14;
b = 20;
r = (b-a).*rand(1,m) + a;

%preÁos para t2
c = 14;
d = 20;
k = (d-c).*rand(1,m) + c;

%preÁos para t3
e = 14;
f = 20;
p = (f-e).*rand(1,m) + e;

forecast = [r; k; p];
ptsj = sort(forecast,2);

% expected probabilities
csitj = [0.02 0.04 0.08 0.1 0.14 0.24 0.14 0.10 0.08 0.04 0.02;
         0.01 0.02 0.04 0.06 0.15 0.44 0.15 0.06 0.04 0.02 0.01;
         0.01 0.03 0.06 0.09 0.10 0.40 0.12 0.10 0.05 0.03 0.01];
% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% Constraints for optimization problem
% electricity consumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];
% limits on electricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];
```

```
% production cost functions ([constant xg xg^2]), $
ct = [8.4 1.4 0.4; 10.4 1.52 0.44; 11.2 1.4 0.32];

% Constraits for optimization problem
% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

options = optimoptions('linprog','Algorithm','simplex','Display','iter');


[xESC, zmaxESC, FRFcoef, FRFpoints] = contractTypeIESC_forecast(N, n, m, V,
xtDD, ptsj, csitj, ptd, xtd, xtminmax, options)

t = FRFpoints;
% Spot price forecasts made by GC
% spot price scenarios, $/MWh
%preÁos para t1
a = 14;
b = 20;
r = (b-a).*rand(1,m) + a;

%preÁos para t2
c = 14;
d = 20;
k = (d-c).*rand(1,m) + c;

%preÁos para t3
e = 14;
f = 20;
p = (f-e).*rand(1,m) + e;

forecast = [r; k; p];
ptsj = sort(forecast,2);
csitj = [0.01 0.02 0.04 0.06 0.12 0.50 0.12 0.06 0.04 0.02 0.01;
         0.02 0.03 0.05 0.07 0.10 0.46 0.10 0.07 0.05 0.03 0.02;
         0.02 0.04 0.05 0.07 0.09 0.52 0.08 0.06 0.04 0.02 0.01];

[xGC, zmaxGC] = contractTypeIGC(N, m, ptsj, csitj, ct, xtgminmax,
xESC(:,1)+xESC(:,3), options)
```

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type I - ESC side
function [solution, zmax, FRFcoef, FRFpoints] =
contractTypeIESC_forecast(N, n, m, V, xtDD, ptsj, csitj, ptd, xtd,
xtminmax, options)
% Number of time intervals in the contract period
N = 3;

% Number of contract states set for the FRF construction
n = 3;

% Number of discrete levels set for rancom spot market price presentation
m = 11;
% Total amount of electricity received by ESC (Electricity Supply Company)
% under BC (Bilateral Contract) during contract period, MWh
```

```
V = 145;

%Amounts of electricity delivered under the BC by the beginning of
% interval t, $/MWh (Contract states)
xtDD = [0 0 0; 60 90 100; 90 125 138];

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh

%preÁos para t1
a = 14;
b = 20;
r = (b-a).*rand(1,m) + a;

%preÁos para t2
c = 14;
d = 20;
k = (d-c).*rand(1,m) + c;

%preÁos para t3
e = 14;
f = 20;
p = (f-e).*rand(1,m) + e;

forecast = [r; k; p];
ptsj = sort(forecast,2);

% expected probabilities
csitj = [0.02 0.04 0.08 0.1 0.14 0.24 0.14 0.10 0.08 0.04 0.02;
         0.01 0.02 0.04 0.06 0.15 0.44 0.15 0.06 0.04 0.02 0.01;
         0.01 0.03 0.06 0.09 0.10 0.40 0.12 0.10 0.05 0.03 0.01];

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% Constraits for optimization problem
% electricity consumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];
% limits on electricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];

% production cost functions ([contant xg xg^2]), $
ct = [8.4 1.4 0.4; 10.4 1.52 0.44; 11.2 1.4 0.32];

% Constraits for optmization problem
% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

%
mean_spot = sum(ptsj.*csitj,2)

%% Backward Procedure - First Iteration
% Contraints for optimization problem
% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];
FRFpoints = zeros (N, n);
FRFcoef = zeros(N-1, 2); %linear approximation

% x = [xtk xts xtss]
% Objective function f
```

```
% f(1) = xtk
% f(2) = xts
% f(3) = xtss

N
temp = mean_spot(N);
% for i=1:m
%     temp = temp + ptsj (N, i)*csitj(N,i);
% end
temp;
f = [ptd(N) (ptd(N) - temp) temp];
f = -f;

% Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
% contraint (5) - (6)
A = [1 0 1; -1 0 -1; -1 0 0; 0 -1 0; 0 0 -1];
b = [xtminmax(N,2) -xtminmax(N,1) 0 0 0]';

% Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
% constraints (4) and (14)
Aeq = [1 1 0; 1 0 1];

for i=1:n
    beq = [xtd(N) (V - xtDD(N,i))]';

    x = linprog(f,A,b,Aeq,beq);
    FRFpoints(N,i) = -f*x;
end

% Calculate the linear approximation of the FRF using least square
f = fittype('poly1');
fit1 = fit(xtDD(N,:)', FRFpoints(N, :)', f);
FRFcoef(N-1, 1) = fit1.p2;
FRFcoef(N-1, 2) = fit1.p1;

%% Backward Procedure - Next Iterations
% x = [xtk xts xtss xt+1, N]

for j=N-1:-1:1
    %Objective function f
    %f(1) = xtk
    %f(2) = xts
    %f(3) = xtss
    %f(4) = xt+1,N
    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(j,i)*csitj(j,i);
    end

    f = [ptd(j) (ptd(j) - temp) temp -FRFcoef(j,2)];
    f = -f;

    % Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
    % constraint (5), (6) and (17)

    A = [ 1 0 1 0; -1 0 -1 0; ...%  (5)
        0 0 0 1;  0 0 0 -1; ... % (17)
        -1 0 0 0; 0 -1 0 0; 0 0 -1 0]; % (6)
    b = [xtminmax(j,2) -xtminmax(j,1) ... % (5)
        sum(xtminmax(j+1:N,2)) -sum(xtminmax(j+1:N,1)) ... % (17)
```

```
        0 0 0]'; % (6)

    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
    % constraints (4) and (16)
    Aeq = [1 1 0 0; 1 0 1 1];

    for i=1:n
        beq = [xtd(j) (V-xtDD(j,i))]';
        x = linprog(f,A,b,Aeq,beq);
        FRFpoints(j,i) = -f*x + FRFcoef(j,1) + FRFcoef(j,2)*V;
    end

    if j>=2
        % Calculate the linear approximation of the FRF using least square
        f = fittype('poly1');
        fit1 = fit(xtDD(j,:)',FRFpoints(j,:)', f);
        FRFcoef(j-1,1) = fit1.p2;
        FRFcoef(j-1,2) = fit1.p1;
    end
end

%% Foward Procedure

solution = zeros(N,4);
zmax = 0;

for j=1:N-1
    % Objective function f
    % f(1) = xtk
    % f(2) xts
    % f(3) = xtss
    % f(4) = xt,N
   temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(j,i)*csitj(j,i);
    end

    f=[ptd(j) (ptd(j)-temp) temp -FRFcoef(j,2)];
    f = -f;

    % Inequality constraint MAtrix A (A*x<=b)
    % constraint (5), (20 and (6)
    A = [1 0 1 0; -1  0 -1  0; ... % (5)
        0 0 0 1;  0  0  0 -1; ... % (20)
        -1 0 0 0;  0 -1  0  0; 0 0 -1 0]; %(6)

    b = [xtminmax(j,2) -xtminmax(j,1) ... %(5)
        sum(xtminmax(j+1:N,2)) -sum(xtminmax(j+1:N,1)) ... % (20)
        0 0 0]'; % (6)
    % Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x = beq)
    % constraints (4) and (19)
    Aeq = [1 1 0 0; 1 0 1 1];

    if j==1
        beq = [xtd(j) V]';
    else
        beq = [xtd(j) (V - sum(solution(1:j-1,1)) - sum(solution(1:j-
1,3)))]';
    end
```

```
    x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
    solution(j,:) = x';
    zmax = zmax -f*x + f(4)*x(4)
end

% Objective function f
% f(1) = xtk
% f(2) = xts
% f(3) = xtss
temp = 0;
for i=1:m
    temp = temp + ptsj(N,i)*csitj(N,i);
end
temp
f = [ptd(N) (ptd(N) - temp) temp];
f= -f;

% Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
% constraint (5) and (6)
A = [1 0 1; -1 0 -1; ... % (5)
    -1 0 0; 0 -1 0; 0 0 -1]; % (6)
b = [xtminmax(N,2) -xtminmax(N,1) ... % (5)
    0 0 0]'; % (6)

% Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
% constraints (4) and (19)
Aeq = [1 1 0; 1 0 1];
beq = [xtd(N) (V-sum(solution(1:N-1,1)) - sum(solution(1:N-1,3)))]';
  x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
solution(N,:) = [x' 0]


       zmax = zmax -f*x
```

```
% Dynamic programming approach to the bilateral contract scheduling
% Contract Type I - GC side

function [solution, zmax] = contractTypeIGC(N, m, ptsj, csitj, ct,
xtgminmax, deliveries_xESC)
opts = optimset('Display','off');
solution = zeros(N,3);
zmax = 0;
x_GC = [9.5 5.5 4.5; 15.0 53 0; 16.41 45.59 0];
rng(5)

for l=1:N
    % x = [xtc xtgs xtgss]'.

    % Objective function z(x) = (1/2)*x'*H*x + f'*x.
    % H represents the quadractic expression and f the linear
    H = 2*[-ct(l,3) 0 -ct(l,3); 0 0 0 ; -ct(l,3) 0 -ct(l,3)];
    H = -H;

    temp = 0;
    for i=1:m
        temp = temp + ptsj(l,i)*csitj(l,i);
    end

    f = [-ct(l,2) -temp (temp-ct(l,2))];
```

```
f = -f;

% Inequality Constraint Matrix A (A*x<=b)
% constraint (9) and (11)
A = [1 0 1; -1 0 -1; -1 0 0; 0 -1 0; 0 0 -1];
b = [xtgminmax(l,2) -xtgminmax(l,1) 0 0 0]';

% Equality Constraints Matrix Aeq (Aeq*x=beq)
% constraints (10)
Aeq = [1 1 0];
beq = deliveries_xESC(l);

% opts = optimset('Algorithm','Interior-point-convex','Display','off');
% x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,[],[],[],opts);
    x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq)%,[],[],[], opts);

%S2 = sum(x([1 3],:));
%R2 = rand()*S2;
 %x = [R2; sum_xESC(l) - R2; S2 - R2];
%x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq);
solution(l,:) = x'

zmax = zmax - ((1/2)*x'*H*x + f*x) - ct(l,1);


    end
```

Apêndice 4 – Código utilizado para a programação compromissada usando a SBN - Palamarchuk

```
% under BC (Bilateral Contract) during contract period, MWh
V = 145;

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% electricity consumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];

% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

% limits on electricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];


A = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0;... %(34) maxgeneration
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0;... %(34) mingeneration
     1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
     0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(36) maxdelivery
     -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
     0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(36) mindelivery
     -eye(19)]; %(37)

 b = [xtgminmax(1,2);...
      xtgminmax(2,2);...
      xtgminmax(3,2);...
      -xtgminmax(1,1);...
      -xtgminmax(2,1);...
      -xtgminmax(3,1);...
      xtminmax(1,2);...
      xtminmax(2,2);...
      xtminmax(3,2);...
      -xtminmax(1,1);...
      -xtminmax(2,1);...
      -xtminmax(3,1);...
      zeros(19,1)];


  Aeq = [1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(32)
         1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
         0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
         0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(33)
         1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;...
         0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0;...
         0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0]; %(35)


  beq = [V;
```

```
         xtd(1);
         xtd(2);
         xtd(3);
         0;
         0;
         0];


      lb = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
      ub = [V V V V V V V V V V V V V V V V V V 2000];


      x0 = [rand(1,19)]; % Changes in this value will change the final
solution, that will still be feasible.


      [x, Fval, maxfval, exitFlag, Output] =
fminimax(@multiobjectivenewcontractvalue,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@nonlconmulti
objectivenewcontractvalue,[])
      %fim do fminimax

      % Spot price forecasts made by ESC
      % spot price scenarios, $/MWh
      ptsjESC = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];
      % expected probabilities
      csitjESC = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];

      mean_spotESC = sum(ptsjESC.*csitjESC,2);

      % Spot price forecasts made by GC
      % spot price scenarios, $/MWh
      ptsjGC = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
      csitjGC = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];
      mean_spotGC = sum(ptsjGC.*csitjGC,2);

      expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
     +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9)...
%t3

      expectedrevenueGC = -(mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16)
- (8.4 +1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
     +mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
     +mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2)))

      % Revenue and profit obtained by ESC with independent scheduling
      rESC = 1807.9;
      sESC = 314.58;

      % Revenue and profit obtained by GC with independent scheduling
      rGC = 1493.32;
      sGC = 314.58;


      J = (1807.9 + 1493.32)/2;
```

```
      concessionESC = (sESC - expectedrevenueESC + J)/sESC;
      concessionGC = (sGC + expectedrevenueGC - J)/sGC;

      profitESC = -(- expectedrevenueESC + J);
      profitGC = - (+ expectedrevenueGC - J);


      solutionESC = [x(1) x(4) x(7); x(2) x(5) x(8); x(3) x(6) x(9)]
      solutionGC = [x(10) x(16) x(13); x(11) x(17) x(14); x(12) x(18)
x(15)]
```

```
function p = multiobjectivenewcontractvalue(x)


% Revenue and profit obtained by ESC with independent scheduling
rESC = 1807.9;
sESC = 314.58;

% Revenue and profit obtained by GC with independent scheduling
rGC = 1493.32;
sGC = 314.58;

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjESC = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];
% expected probabilities
csitjESC = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];

mean_spotESC = sum(ptsjESC.*csitjESC,2);

% Spot price forecasts made by GC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjGC = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
csitjGC = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];
mean_spotGC = sum(ptsjGC.*csitjGC,2);

% Contract price in the compromise approach
J = (rGC+rESC)/2;

expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
    +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9);...
%t3

expectedrevenueGC = -(mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16) -
(8.4 +1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
    + mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
    + mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2)));


p(1) = (sESC - expectedrevenueESC + x(19))/sESC; % concession of ESC
```

```
p(2) = (sGC + expectedrevenueGC - x(19))/sGC; % concession of GC

%p(1) = -(expectedrevenueESC - x(19)); % profit of ESC

%p(2) = -(- expectedrevenueGC + x(19)); % profit of GC

      concessionESC = (sESC - expectedrevenueESC + x(19))/sESC;
      concessionGC = (sGC + expectedrevenueGC - x(19))/sGC;

end
```

```
function [c, ceq] = nonlconmultiobjectivenewcontractvalue(x)

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjESC = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];
% expected probabilities
csitjESC = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];

mean_spotESC = sum(ptsjESC.*csitjESC,2);

% Spot price forecasts made by GC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjGC = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
csitjGC = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];
mean_spotGC = sum(ptsjGC.*csitjGC,2);

% electricity consumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];

% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

% limits on electricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
    +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9);...
%t3

expectedrevenueGC = -(mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16) -
(8.4 +1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
    + mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
    + mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2)));


% Revenue and profit obtained by ESC with independent scheduling
rESC = 1807.9;
sESC = 314.58;
```

```
% Revenue and profit obtained by GC with independent scheduling
rGC = 1493.32;
sGC = 314.58;



c(1) = -expectedrevenueESC + expectedrevenueGC; %constraint (31)
%c(2) = ((sESC - expectedrevenueESC + x(19))/sESC) - 1; % k1 must be less
than 1
%c(3) = ((sGC + expectedrevenueGC - x(19))/sGC) - 1; % k2 must be less than
1



ceq = [];


end
```

Apêndice 5 – Código utilizado para a programação compromissada usando a SBN – Toledo-Cunha

```
% under BC (Bilateral Contract) during contract period, MWh
V = 145;

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% electricity consumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];

% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

% limits on electricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];


A = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0;... %(34) maxgeneration
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0;... %(34) mingeneration
     1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
     0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(36) maxdelivery
     -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
     0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(36) mindelivery
     -eye(19)]; %(37)

 b = [xtgminmax(1,2);...
      xtgminmax(2,2);...
      xtgminmax(3,2);...
      -xtgminmax(1,1);...
      -xtgminmax(2,1);...
      -xtgminmax(3,1);...
      xtminmax(1,2);...
      xtminmax(2,2);...
      xtminmax(3,2);...
      -xtminmax(1,1);...
      -xtminmax(2,1);...
      -xtminmax(3,1);...
      zeros(19,1)];


  Aeq = [1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(32)
         1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
         0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
         0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(33)
         1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;...
         0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0;...
         0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0]; %(35)


  beq = [V;
```

```
         xtd(1);
         xtd(2);
         xtd(3);
         0;
         0;
         0];


      lb = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
      ub = [V V V V V V V V V V V V V V V V V V 2000];


      x0 = [rand(1,19)]; % Changes in this value will change the final
solution, that will still be feasible.


      [x, Fval, maxfval, exitFlag, Output] =
fminimax(@multiobjectivenewcontractvalue,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@nonlconmulti
objectivenewcontractvalue,[])
      %fim do fminimax

      % Spot price forecasts made by ESC
      % spot price scenarios, $/MWh
      ptsjESC = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];
      % expected probabilities
      csitjESC = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];

      mean_spotESC = sum(ptsjESC.*csitjESC,2);

      % Spot price forecasts made by GC
      % spot price scenarios, $/MWh
      ptsjGC = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
      csitjGC = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];
      mean_spotGC = sum(ptsjGC.*csitjGC,2);

      expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
     +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9)...
%t3

      expectedrevenueGC = -(mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16)
- (8.4 +1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
     +mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
     +mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2)))

      % Revenue and profit obtained by ESC with independent scheduling
      rESC = 1807.9;
      sESC = 314.58;

      % Revenue and profit obtained by GC with independent scheduling
      rGC = 1493.32;
      sGC = 314.58;

J = (1807.9+ 1524.80)/2;

      concessionESC = (sESC - expectedrevenueESC + J)/sESC;
```

```
      concessionGC = (sGC + expectedrevenueGC - J)/sGC;

      profitESC = -(- expectedrevenueESC + J);
      profitGC = - (+ expectedrevenueGC - J);

      solutionESC = [x(1) x(4) x(7); x(2) x(5) x(8); x(3) x(6) x(9)]
      solutionGC = [x(10) x(16) x(13); x(11) x(17) x(14); x(12) x(18)
x(15)]
```

```
function p = multiobjectivenewcontractvalue(x)


% Revenue and profit obtained by ESC with independent scheduling
rESC = 1807.9;
sESC = 314.58;

% Revenue and profit obtained by GC with independent scheduling
rGC = 1493.32;
sGC = 314.58;

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjESC = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];
% expected probabilities
csitjESC = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];

mean_spotESC = sum(ptsjESC.*csitjESC,2);

% Spot price forecasts made by GC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjGC = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
csitjGC = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];
mean_spotGC = sum(ptsjGC.*csitjGC,2);

% Contract price in the compromise approach
J = x(19);

expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
    +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9);...
%t3

expectedrevenueGC = -(mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16) -
(8.4 +1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
    + mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
    + mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2)));


p(1) = (sESC - expectedrevenueESC + x(19))/sESC; % concession of ESC

p(2) = (sGC + expectedrevenueGC - x(19))/sGC; % concession of GC
```

```
%p(1) = -(expectedrevenueESC - x(19)); % profit of ESC

%p(2) = -(- expectedrevenueGC + x(19)); % profit of GC

      concessionESC = (sESC - expectedrevenueESC + x(19))/sESC;
      concessionGC = (sGC + expectedrevenueGC - x(19))/sGC;

end
```

```
function [c, ceq] = nonlconmultiobjectivenewcontractvalue(x)

% Spot price forecasts made by ESC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjESC = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];
% expected probabilities
csitjESC = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];

mean_spotESC = sum(ptsjESC.*csitjESC,2);

% Spot price forecasts made by GC
% spot price scenarios, $/MWh
ptsjGC = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];
csitjGC = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];
mean_spotGC = sum(ptsjGC.*csitjGC,2);

% electricity consumption by end consumers, MWh
xtd = [9.8; 11.4; 14.5];

% electricity generation limits, MWh
xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

% limits on electricity deliveries under BC, MWh
xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];

% electricity price for end consumers, $/MWh
ptd = [16; 16; 16];

expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
    +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9);...
%t3

expectedrevenueGC = -(mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16) -
(8.4 +1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
    + mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
    + mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2)));


% Revenue and profit obtained by ESC with independent scheduling
rESC = 1807.9;
sESC = 314.58;

% Revenue and profit obtained by GC with independent scheduling
```

```
rGC = 1493.32;
sGC = 314.58;



c(1) = -expectedrevenueESC + expectedrevenueGC; %constraint (31)
%c(2) = ((sESC - expectedrevenueESC + x(19))/sESC) - 1; % k1 must be less
than 1
%c(3) = ((sGC + expectedrevenueGC - x(19))/sGC) - 1; % k2 must be less than
1



ceq = [];


end
```

Apêndice 6 – Código utilizado para a programação compromissada usando a SBKS

```
%--------------_-----------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------%
% This algorithm is based on the paper "Dynamic programming approach to the
bilateral contract scheduling" by S. Palamarchuk in Feb 2009  %
%                                                                          %
%   Last edited by Matheus Barbosa in 09/03/2017
%
%--------------------------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------%
clc;
clear all;

% GC - Generation Company
% Electricity Supply Company

%-----------------------------------------------

%Global Variables Declaration

global ptd;
global mean_spotESC;
global mean_spotGC;
global expectedrevenueESC;
global expectedrevenueGC;

%-----------------------------------------------

% amount of eletricity delivered under BC (V)

V = 170;
maxProfitESC = 255.5; % According to independent scheduling made by ESC
maxProfitGC = 254.8; % According to independent scheduling made by GC




%-----------------------------------------------


% electricity price for end consumers, $/MWh (ptd) % [see table 1, page 6]
ptd = [16; 16; 16];

%-----------------------------------------------

% Spot price forecasts made by ESC

% spot price scenarios, $/MWh (ptsjESC)  % [see table 1, page 6]
%          |      t1      |       t2      |        t3     |
ptsjESC = [10.0 10.4 10.8; 11.0 11.2 11.8; 11.0 11.4 11.8];


% expected probabilities (csitjES)  % [see table 1, page 6]
%           |    t1     |      t2      |     t3     |
```

```
csitjESC = [0.1 0.8 0.1; 0.3 0.5 0.2; 0.2 0.4 0.4];


mean_spotESC = sum(ptsjESC.*csitjESC,2);
% this will do the element-wise multiplication and then return a column
% matrix with the sum of each line
%i.e.:     t1 = (10.0*0.1 + 10.4*0.8 + 10.8*0.1) = 10.4


% Spot price forecasts made by GC, $/MWh (ptsjGC)  % [see table 4, page 7]

%          |      t1      |       t2      |        t3     |
 ptsjGC = [10.8 11.2 11.6; 11.0 11.6 12.0; 11.0 11.8 12.4];


% expected probabilities (csitjGC)   % [see table 4, page 7]

%          |    t1     |      t2      |     t3     |
 csitjGC = [0.2 0.6 0.2; 0.25 0.5 0.25; 0.1 0.6 0.3];

% this will do the element-wise multiplication and then return a column
matrix with the sum of each line
%i.e.:     t1 = (10.8*0.2 + 11.2*0.6 + 11.6*0.2) = 11.2

%Vector that represents the expected spot price acording to the
probabilities
mean_spotGC = sum(ptsjGC.*csitjGC,2);


%-----------------------------------------------

% electricity consumption by end consumers, MWh (xtd)  % [see table 1, page
6]
%      | 9.8|
%  xtd=|11.4|
%      |14.5|

xtd = [9.8; 11.4; 14.5];

%-----------------------------------------------


% electricity generation limits, MWh (xtgminmax)   % [see table 4, page 7]
%              min max
%              |14 50| t1
%    xtgminmax=|15 60| t2
%              |16 65| t3
%

xtgminmax = [14 50; 15 60; 16 65];

%-----------------------------------------------


% limits on electricity deliveries under BC, MWh (xtminmax)   % [see table
1, page 6]
%            min max
```

```
%             | 8 60| t1
%   xtminmax=| 5 68| t2
%             | 6 62| t3
%

xtminmax = [8 60; 5 68; 6 62];

%-----------------------------------------------


%iniital guess - original solution (x0)

x0 = [9.8 11.4 14.5 0 0 0 22.9 56.6 29.8 9.5 15 5.12 4.5 0 11.25 23.2 53
39.18 1493.5];
%x0 = [rand(1,19)];

%-----------------------------------------------

%This Matrix contains the LINEAR INEQUALITIES
%The last 18 lines of matrix A is an Identity Matrix automatically
generated by the function eye()

%                          matrix A =

%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  1  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  1  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  1  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0 -1  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0 -1  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0 -1  0  0  0|
%  |1  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  1  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  1  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |-1 0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0 -1  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0 -1  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |-1 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0|
%  |0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1|

A = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0;...   %(equation 34 - see paper
- pg 8) maxgeneration
```

```
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0;...
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0;... %(equation 34 - see paper
- pg 8) mingeneration
     1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
     0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...   %(equation 36 - see paper
- pg 8) maxdelivery
     -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
     0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
     0 0 -1 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;... %(equation 36 - see paper
- pg 8) mindelivery
     -eye(19)]; %(equation 37 - see paper - pg 8) non-negativity of
variables


%-------------------------------------------------



%b is a column matrix its last 18 lines are zeros automatically generated
by function zeros()

%  matrix b =

%   |  50  |
%   |  60  |
%   |  65  |
%   | -14  |
%   | -15  |
%   | -16  |
%   |  60  |
%   |  68  |
%   |  62  |
%   |  -8  |
%   |  -5  |
%   |  -6  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |
%   |   0  |

 b = [xtgminmax(1,2);...
      xtgminmax(2,2);...
      xtgminmax(3,2);...
      -xtgminmax(1,1);...
```

```
       -xtgminmax(2,1);...
       -xtgminmax(3,1);...
       xtminmax(1,2);...
       xtminmax(2,2);...
       xtminmax(3,2);...
       -xtminmax(1,1);...
       -xtminmax(2,1);...
       -xtminmax(3,1);...
       zeros(19,1)];


%-----------------------------------------------


%    Matrix Aeq: LINEAR EQUALITIES

  Aeq =[ 1 1 1 0 0 0 1 1 1  0  0   0  0 0 0  0  0  0  0    ;... %(TOTAL
CONTRACT VOLUME - equation 32 - see paper)
         1 0 0 1 0 0 0 0 0  0  0   0  0 0 0  0  0  0  0    ;... %(SALES TO
END CONSUMERS t1 - equation 33 - see paper)
         0 1 0 0 1 0 0 0 0  0  0   0  0 0 0  0  0  0  0    ;... %(SALES TO
END CONSUMERS t2 - equation 33 - see paper)
         0 0 1 0 0 1 0 0 0  0  0   0  0 0 0  0  0  0  0    ;... %(SALES TO
END CONSUMERS t2 - equation 33 - see paper)
         1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1  0   0  0 0 0 -1  0  0  0    ;... %(AMOUNT OF
DELIVERIES UNDER CONTRACT AT t1 - equation 35 - see paper)
         0 1 0 0 0 0 0 1 0  0 -1   0  0 0 0  0 -1  0  0    ;... %(AMOUNT OF
DELIVERIES UNDER CONTRACT AT t2 - equation 35 - see paper)
         0 0 1 0 0 0 0 0 1  0  0  -1  0 0 0  0  0 -1  0]   ;    %(AMOUNT OF
DELIVERIES UNDER CONTRACT AT t3 - equation 35 - see paper)


%-----------------------------------------------


%  matrix beq =

%  | 145  |
%  |  9.8 |
%  | 11.4 |
%  | 14.5 |
%  |   0  |
%  |   0  |
%  |   0  |

beq = [V;
       xtd(1);
       xtd(2);
       xtd(3);
        0;
        0;
        0];



%-----------------------------------------------
% V = 145
```

```
% Upper Bound

  lb = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

% Lower Bound

  ub = [V V V V V V V V V V V V V V V V V V V 3500]; %contract value
shouldn't be higher than max expected renue

%-----------------------------------------------


%changes the default max evaluations and max iterations of function fmincon
% fmincon - Nonlinear programming solver (find minimum of constrained
nonlinear multivariable function)
% see
https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html?searchHighlight=fminco
n&s_tid=doc_srchtitle

 fprintf('\n***Solving for Max k*** \n \tCalculating, please wait...');
 x = fmincon(@compromiseobjective,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@nonlconpaper);

 solutionESC = [x(1) x(4) x(7); x(2) x(5) x(8); x(3) x(6) x(9)];
 solutionGC = [x(10) x(16) x(13); x(11) x(17) x(14); x(12) x(18) x(15)];



% by using a (slightly) different initial point x0 (i.e [9 11 14 0 0 0 22
56 29 9 15 5 4 0 11 23 53 39])
% to minimize our problem, we still find the same value for k = 0.5608.
% However, by doing this, we get to another optimal solution, what suggests
% that the compromise scheduling (and not only the independent scheduling)
% also presents multiple optimal solutions.


%-----------------------------------------------

% Concession Percentage (regarding max profit)
J= x(19); % Contract value


concessionESC = (maxProfitESC - (expectedrevenueESC - J))/maxProfitESC;

concessionGC  = (maxProfitGC -( expectedrevenueGC + J))/maxProfitGC;

fprintf('Results:\n\nContract value(J) = %.2f\n', J)
fprintf('Expected Revenue obtained by ESC = %.2f\n', expectedrevenueESC)
fprintf('Expected Revenue obtained by GC = %.2f\n', expectedrevenueGC)
fprintf('Concession made by ESC %.2f%%\n', concessionESC*100)
fprintf('Concession made by ESC %.2f%%\n', concessionGC*100)

fprintf('profit obtained by ESC %.2f\n', (expectedrevenueESC-J))
fprintf('profit obtained by GC %.2f\n', (expectedrevenueGC+J))
```

```
%-------------_-----------------------------------------------------------
-------------------------------------------------------------%
```

```
% This algorithm is based on the paper "Dynamic programming approach to the
bilateral contract scheduling" by S. Palamarchuk in Feb 2009  %
%                                                                       %
%   Last edited by Matheus Barbosa in 09/03/2017
%
%-------------------------------------------------------------------------
-----------------------------------------------------------------%

% GC - Generation Company
% Electricity Supply Company

%-----------------------------------------------
%**************F U N C T I O N *****************
%-----------------------------------------------

%Function Objective - Min k

function k = compromiseobjective(x)


%Global Variables Declaration

global ptd;
global mean_spotESC;
global mean_spotGC;
global expectedrevenueESC;
global expectedrevenueGC;


%-----------------------------------------------


% Expected Revenue Obtained by the ESC

expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
    +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9);...
%t3

%---------------------------------

% Expected Revenue Obtained by the GC

expectedrevenueGC = mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16) - (8.4
+1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
    + mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
    + mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2));

%---------------------------------

J=x(19);

%Kalai Smorodinsky
```

```
k = -( (expectedrevenueESC-J)+ (expectedrevenueGC+J)); %maximize the sum of
profits obtained by ESC and GC

%the minus sign implies that's a Maximization problem

end
```

```
%--------------_-------------------------------------------------------------
----------------------------------------------------------------%
% This algorithm is based on the paper "Dynamic programming approach to the
bilateral contract scheduling" by S. Palamarchuk in Feb 2009  %
%                                                                          %
%   Last edited by Matheus Barbosa in 09/03/2017
%
%--------------------------------------------------------------------------
----------------------------------------------------------------%

% GC - Generation Company
% Electricity Supply Company

%-----------------------------------------------
%**************F U N C T I O N S ***************
%-----------------------------------------------

%Nonlinear constraints

function [c, ceq] = nonlconpaper(x)


%Global Variables Declaration

global ptd;
global mean_spotESC;
global mean_spotGC;
global expectedrevenueESC;
global expectedrevenueGC;

%-----------------------------------------------


% Expected Revenue Obtained by the ESC

expectedrevenueESC = ptd(1)*(x(1)+x(4))-
mean_spotESC(1,1)*x(4)+mean_spotESC(1,1)*x(7)... %t1
     +ptd(2)*(x(2)+x(5))-mean_spotESC(2,1)*x(5)+mean_spotESC(2,1)*x(8)....
%t2
    +ptd(3)*(x(3)+x(6))-mean_spotESC(3,1)*x(6)+mean_spotESC(3,1)*x(9);...
%t3

%---------------------------------

% Expected Revenue Obtained by the GC

expectedrevenueGC = (mean_spotGC(1,1)*x(13) - mean_spotGC(1,1)*x(16) - (8.4
+1.4*(x(10)+x(13))+0.4*((x(10)+x(13))^2)) ... %t1
    + mean_spotGC(2,1)*x(14) - mean_spotGC(2,1)*x(17) - (10.4
+1.52*(x(11)+x(14))+0.44*((x(11)+x(14))^2)) ... %t2
```

```
    + mean_spotGC(3,1)*x(15) - mean_spotGC(3,1)*x(18) - (11.2 +
1.4*(x(12)+x(15))+0.32*((x(12)+x(15))^2)));

%---------------------------------

c = -expectedrevenueESC + expectedrevenueGC; %inequality constraint (see
equation 31, page 8)

%-----------------------------------------------
%******K A L A I - S M O R O D I N S K Y********
%-----------------------------------------------

ceq = ((expectedrevenueESC - x(19))/(expectedrevenueGC + x(19))) -
(283.1/266.1);  %equality constraint for KS


end
```