

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Aeroespacial

Estudo da Distribuição de Temperatura em Motores Foguete a Propulsão Híbrida

Autor: Ana Paula Castro de Paula Nunes
Orientador: PhD Artem Andrianov

Brasília, DF
04 de julho de 2017



Ana Paula Castro de Paula Nunes

Estudo da Distribuição de Temperatura em Motores Foguete a Propulsão Híbrida

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial, da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: PhD Artem Andrianov

Coorientador: Dr Vinicius de Carvalho Rispoli

Brasília, DF

04 de julho de 2017

Ana Paula Castro de Paula Nunes

Estudo da Distribuição de Temperatura em Motores Foguete a Propulsão Híbrida/ Ana Paula Castro de Paula Nunes. – Brasília, DF, 04 de julho de 2017-88 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: PhD Artem Andrianov

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 04 de julho de 2017.

1. Foguete Híbrido. 2. Distribuição Temperatura. I. PhD Artem Andrianov. II. Dr Vinicius de Carvalho Rispoli. III. Universidade de Brasília. IV. Faculdade UnB Gama. V. Estudo da Distribuição de Temperatura em Motores Foguete a Propulsão Híbrida

CDU 02:141:005.6

Ana Paula Castro de Paula Nunes

Estudo da Distribuição de Temperatura em Motores Foguete a Propulsão Híbrida

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial, da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 04 de julho de 2017:

PhD Artem Andrianov

Orientador

PhD Sergio Henrique da Silva

Carneiro

Convidado 1

PhD Manuel Nascimento Dias

Barcelos Júnior

Convidado 2

Brasília, DF
04 de julho de 2017

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Evandra e meu pai Haroldo (*in memorium*), pela vida que gerou oportunidades de vivenciar inúmeras experiências que me conduziram aonde hoje estou. Agradeço às minhas irmãs e família pela paciência e carinho em momentos em que precisei estar ausente e abdicar do lazer para estudar.

Agradeço ao meu orientador, Prof. PhD. Artem Andrianov pela paciência, conselhos e sugestões que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço ao Prof. Dr. Vinicius Rispoli pelo pronto empenho a orientar meu trabalho e dedicação em auxiliar no entendimento da matemática aplicada.

Meus agradecimentos aos amigos que de alguma forma auxiliaram na minha formação, em especial ao meu parceiro de graduação Paulo Gabriel, pelas tardes e noites gastas revisando e melhorando nossos trabalhos para que se tornassem ainda melhores.

A todos os professores e servidores da Universidade de Brasília que estiveram comigo nessa caminhada e de alguma forma contribuíram para minha formação como profissional e ao desenvolvimento deste trabalho, meu muito obrigada.

*“Só é digno da liberdade,
como da vida,
aquele que se empenha
em conquistá-la.”
(Johann Goethe)*

Resumo

O presente estudo foi motivado pela necessidade de aumentar o tempo de queima do motor híbrido de teste de baixo empuxo. Este motor inicialmente tinha sido projetado para operar com um par de propulsores de alta taxa de regressão (parafina e óxido nitroso) por 12 segundos. A substituição de parafina por um grão de polietileno com a mesma geometria aumenta o tempo de operação do motor até 40-50 segundos. Para este tempo de funcionamento, é necessário a aplicação de proteção térmica na câmara de combustão deste motor. O objetivo principal do estudo foi avaliar a eficiência do isolante térmico pela determinação da distribuição de temperatura em suas superfícies nas condições dadas de operação do motor com aumento do tempo de queima. Os dados experimentais de temperatura, apresentados em um gráfico temperatura-tempo, foram utilizados para determinar os fluxos de calor na superfície interna da parede do isolante, através de um método inverso de transferência de calor com auxílio do método de elementos finitos (software comercial Ansys Workbench). Os valores do fluxo de calor foram então validados através da solução analítica de um problema de equação de calor no domínio cilíndrico. A solução foi obtida usando uma abordagem de transformação integral, onde o kernel de transformação foi baseado na solução de um problema de valor limite Sturm-Liouville associado. Em seguida, os valores validados do fluxo de calor foram utilizados para prever a temperatura na superfície externa do escudo térmico interno para que seja possível aumentar o tempo de operação do motor de teste. A metodologia dada possibilitou a avaliação das temperaturas nas superfícies externa e interna do isolante térmico cilíndrico e pode ser utilizada para realizar uma avaliação preliminar da espessura correta do isolante, evitando o superaquecimento do invólucro estrutural do motor.

Palavras-chaves: Escudo Térmico. Motor Foguete. Propulsão Híbrida. Bancada de Testes. Condução de Calor. Simulação ANSYS. EDP. Equação do Calor. Transformadas Integrais. Elementos Finitos. Método Inverso.

Abstract

The present study was motivated by the need to increase the burning time of the hybrid low-test test engine. This engine had initially been designed to operate with a pair of high-regression (paraffin and nitrous oxide) propellants for 12 seconds. The replacement of paraffin by a polyethylene grain with the same geometry increases the engine's operating time to 40-50 seconds. For this operating time, it is necessary to apply thermal protection in the combustion chamber of this motor. The main objective of the study was to evaluate the efficiency of the thermal insulation by determining the temperature distribution on its surfaces under the given conditions of operation of the engine with increased burning time. Experimental temperature data, presented in a temperature-time graph, were used to determine the heat fluxes on the inner surface of the thermal insulator, using an inverse method of heat transfer with support from the finite element method (commercial software Ansys Workbench). The heat flux values were then validated through the analytical solution of a heat equation problem in the cylindrical domain. The solution was obtained using an integral transformation approach, where the transformation kernel was based on the solution of an associated Sturm-Liouville threshold value problem. Then, the validated heat flux values were used to predict the temperature on the outer surface of the inner insulator so that it is possible to increase the operating time of the test engine. The methodology allowed the evaluation of temperatures on the external and internal surfaces of the cylindrical thermal insulator and can be used to carry out a preliminary evaluation of the correct thickness of the insulator, avoiding overheating of the structure of the engine.

Key-words: Heat Shield. Rocket Motor. Hybrid Propulsion. Experimental tests. Heat Conduction. Heat Equation. ANSYS. Simulation. Integral Transform. Inverse Method.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração da Plataforma SARA Orbital. Fonte: (AEB, 2009) . . .	24
Figura 2 – Fluxo de Calor num tubo cilíndrico	28
Figura 3 – Evolução do Fluxo de Calor no Motor-Foguete à Propelente Sólido. Fonte: (KIMURA, 1987)	29
Figura 4 – Processos de transferência de calor na câmara de combustão do motor foguete	30
Figura 5 – Coordenadas Cilíndricas	33
Figura 6 – Condução de calor radial devido ao fluxo de calor da combustão	34
Figura 7 – Malha de Elementos Finitos Fonte: (SOUZA, 2003)	48
Figura 8 – Tipos de Elementos Finitos Fonte: (SOUZA, 2003)	48
Figura 9 – Graus de liberdade a)de um ponto; b)de um corpo rígido Fonte: (SOUZA, 2003)	49
Figura 10 – Configuração da Bancada do motor de teste SARA Fonte: (ANDRIANOV et al., 2015)	52
Figura 11 – Arranjo das unidades de medição. Fonte (ANDRIANOV et al., 2015)	54
Figura 12 – Procedimento para estimativa do fluxo de calor através do método inverso	56
Figura 13 – Posição dos Termopares e Escudo Térmico.	57
Figura 14 – Distribuição de Temperaturas na Parede Externa do Escudo	57
Figura 15 – Distribuição de pressão na câmara de combustão	58
Figura 16 – Aplicação da simetria na geometria do escudo	59
Figura 17 – Aplicação da malha na geometria com simetria.	59
Figura 18 – Aplicação do fluxo de calor na geometria com simetria.	59
Figura 19 – Método de geração da malha, SOLID87 Fonte:	60
Figura 20 – Método de geração dos elementos finitos, SURFF152. Fonte:	61
Figura 21 – Curva Experimental e Resultado da Simulação para o Termopar 1	63
Figura 22 – Curva Experimental e Resultado da Simulação para o Termopar 2	64
Figura 23 – Curva Experimental e Resultado da Simulação para o Termopar 3	64

Figura 24 – Distribuição de Temperaturas na Parede Externa. Termopar 1: Fluxo de 0.176 W/mm^2	65
Figura 25 – Distribuição de Temperaturas na Parede Interna. Termopar 1: Fluxo de 0.176 W/mm^2	66
Figura 26 – Temperaturas na Parede Externa do escudo térmico. Fluxo de 0.176 W/mm^2 e Funcionamento de 45 segundos.	67
Figura 27 – Temperaturas na Parede Interna do escudo térmico. Fluxo de 0.176 W/mm^2 e Funcionamento de 45 segundos.	67
Figura 28 – Erro Solução Analítica e Experimental. Tempo de Queima 45 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2	68
Figura 29 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 15 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2	69
Figura 30 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 20 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2	69
Figura 31 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 25 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2	70
Figura 32 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 30 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2	70
Figura 33 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 35 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2	71
Figura 34 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 40 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2	71

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros de Circulação dos Propelentes. Fonte: (ANDRIANOV et al., 2015)	52
Tabela 2 – Propósitos de Medição. Fonte: (ANDRIANOV et al., 2015)	53
Tabela 3 – Propriedades do material Celeron e Aço 304 L. Fonte: (INCONPLAST, 2017) e (MATWEB, 1996)	54
Tabela 4 – Raios Referentes à Posição dos Termopares	60

Lista de abreviaturas e siglas

ITI	Isolante Térmico Interno
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
MEF	Método dos Elementos Finitos

Lista de símbolos

ρ	Massa Específica do material
C_p	Capacidade Térmica do material
k	Condutividade Térmica do material
α	Difusidade Térmica do material
Λ, τ_m	Autovalores
\dot{Q}	Fluxo de Calor [W/mm^2]
r	Variável espacial no domínio polar
t	Variável temporal
a	Raio interno do escudo térmico
b	Raio externo do escudo térmico
T	Temperatura em função do tempo e espaço
\mathcal{H}_m	Transformada de Henkel-Webber
f_0	Temperatura Inicial
$R_{m,n}$	Autofunções
$J_{0,1}, Y_{0,1}$	Funções de Bessel
Δ_{og}	Operador Diferencial

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Objetivos	25
1.1.1	Objetivos Específicos	25
2	ASPECTOS TEÓRICOS	27
2.1	Transferência de Calor	27
2.1.1	Condutividade Térmica	30
2.1.2	Equação do Calor Para Regime Transiente	32
2.2	Solução Analítica da Equação de Calor	34
2.2.1	Tipos de Autovalores	36
2.2.2	Autovalores, Autofunções e Ortogonalidade	37
2.2.3	Transformada Discreta	39
2.2.4	Transformando a Equação do Calor	41
2.2.5	Fluxo de Calor Dado por uma Função Degrau	44
2.3	Método dos Elementos Finitos	47
3	METODOLOGIA	51
3.1	Bancada de Testes Experimentais	51
3.2	Análise Numérica: Método Inverso da Transferência de Calor	55
3.2.1	Procedimentos para Cálculo do Fluxo de Calor	56
3.2.1.1	Hipóteses Utilizadas na Solução Numérica	61
4	RESULTADOS	63
4.1	Estimativas dos Fluxos de Calor	63
4.2	Distribuição de Temperatura pela Solução Analítica	65
4.2.1	Previsão Para Longo Período de Operação do Motor	66
5	CONCLUSÃO	73
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	74

REFERÊNCIAS	77
-----------------------	----

APÊNDICES	81
-----------	----

APÊNDICE A – PROPRIEDADES DAS TRANSFORMA- DAS	83
--	----

A.1	Ortogonalidade das Autofunções	83
-----	--	----

A.2	Relações e Integrais Envolvendo Funções de Bessel	84
-----	---	----

1 Introdução

Um motor foguete a propelente híbrido é um sistema que utiliza combustível na forma sólida e líquida (ou gasosa) para produzir impulso. A mistura dos propelentes na fase sólida e líquida/gasosa com o oxidante gera um produto explosivo que após a ignição é queimado, produzindo gases de exaustão que geram impulso através da variação da massa (PETERSEN et al., 2012).

Segundo Sutton e Biblarz (2010), o calor liberado do processo de combustão transforma os propelentes (combustíveis reagentes) em produtos de gases quentes, que são termodinamicamente expandidos numa tubeira para produzir empuxo. O processo de combustão dentro do motor consiste em uma série de diferentes reações químicas que ocorrem quase simultaneamente e geram produtos intermediários e subsequentes produtos finais.

Durante o funcionamento do motor foguete, o aquecimento e o fluxo de partículas geradas pelo produto de combustão pode causar danos à estrutura do motor. Com as altas temperaturas e pressões decorrentes da queima dos propelentes, a estrutura pode sofrer erosão e perfuração pelo movimento turbulento das partículas, o que pode ocasionar o derretimento ou degradação da estrutura do motor, levando à falha do motor foguete. Então, é necessário que haja um escudo que proteja térmica e fisicamente o corpo material isolante (AHMED, 2009).

Os isolantes térmicos internos (ITI – Internal thermal insulators), ou escudos térmicos, são vastamente utilizados em motores foguete a propulsão sólida e híbrida. Nos motores foguetes, o ITI é uma camada de material que não queima facilmente, agindo como uma barreira ao calor, colocada entre o revestimento do motor e o propelente sólido, (SUTTON; BIBLARZ, 2010). A principal função do isolante é prevenir o revestimento do motor de alcançar temperaturas que possam danificar sua integridade estrutural. A estrutura dos motores foguetes é geralmente feita de um material rígido e durável, como aço ou compósitos reforçados com fibras, e os ITIs devem ser feitos de materiais com alta resistência térmica, mecânica e também devem possuir baixo peso específico, (AHMED, 2009).

O ITI, ou escudo térmico, é fabricado com materiais capazes de suportar gases da queima dos propelentes que atingem altíssimas temperaturas (cerca de 3000° C) e pressão, podendo exceder 10.35 MPa. Entre o ITI e o corpo do motor também pode haver uma camada que mantém os dois materiais unidos. Esta camada deve ter as mesmas características do ITI para manter a segurança e integridade de toda a estrutura do motor. (AHMED, 2009)

Para a fabricação adequada do isolante térmico interno do motor foguete, é necessário que se conheça e consiga prever o comportamento do material dado certos fluxos de calor. Este trabalho apresentará formas de antecipar o desempenho dos isolantes térmicos internos através da comparação da distribuição de temperatura no escudo térmico obtida através de métodos experimentais com o teste de fogo no motor foguete SARA, métodos numéricos utilizando o *software* comercial de elementos finitos ANSYS e com a solução analítica obtida através do método de transformadas integrais.

O motor foguete SARA faz parte da plataforma do Satélite de Reentrada Atmosférica (SARA), em desenvolvimento pela Instituto de Aeronáutica e Espaço IAE-Brasil, e é uma cápsula de reentrada que opera a uma baixa órbita circular (300 km). Após o seu lançamento, a cápsula ficará por 10 dias no ambiente de microgravidade que possibilitará a realização de missões científicas e tecnológicas. Após a fase orbital, a cápsula terá que reentrar a atmosfera da Terra. Para isso, o uso de um desacelerador propulsivo (*Propulsive Decelerator - PD*) deverá proporcionar uma desaceleração suficiente para que a cápsula saia de órbita e reentre a atmosfera até o ponto inicial da trajetória. (AEB, 2009)



Figura 1 – Ilustração da Plataforma SARA Orbital. Fonte: (AEB, 2009)

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é o estudo da eficiência do escudo térmico através do conhecimento da distribuição de temperatura no motor foguete a propelente híbrido SARA. O resultado do estudo ajudará a desenvolver os isolantes térmicos internos adequados para que o motor foguete possa operar durante grandes períodos de tempo.

Este estudo se dará através de revisão bibliográfica, testes experimentais, simulações computacionais e solução analítica. Para alcançar o objetivo geral, foi essencial a execução dos seguintes objetivos específicos:

1.1.1 Objetivos Específicos

1. Revisar sobre as formas de transferência de calor em foguetes, análise numérica dos elementos finitos e apresentação da solução analítica para a equação de calor.
2. Processar ensaios experimentais para obtenção do perfil de temperatura na parte externa do isolante térmico.
3. Obter uma estimativa dos fluxos de calor através do método inverso apresentado.
4. Obter a solução analítica do problema da equação de calor aplicada à geometria cilíndrica dada as condições de iniciais e de contorno do problema real.

2 ASPECTOS TEÓRICOS

Para o desenvolvimento deste trabalho é necessário o esclarecimento de certos tópicos para melhor entendimento do problema a ser tratado. Neste capítulo serão abordados os seguintes assuntos: modos de transferência de calor e condutividade térmica, método dos elementos finitos e procedimentos para obtenção da solução analítica da equação de calor.

2.1 Transferência de Calor

Transferência de Calor é a troca de energia devido a uma diferença de temperatura para que se atinja o equilíbrio térmico. O calor é um fenômeno transitório, que cessa quando não existe mais uma diferença de temperatura. A troca se dá por meio de transferência de energia das partículas mais energéticas (maior temperatura) para as menos energéticas (INCROPERA; DEWITT, 1996).

Os processos de transferência de calor são quantificados em termos de equações de taxa, que calculam a quantidade de energia sendo transferida por unidade de tempo. Na condução térmica, a equação de taxa é conhecida como Lei de Fourier, que para um problema unidimensional (transferência de calor se dá apenas em uma direção) é a seguinte: 2.1.

$$\dot{Q} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1)$$

O fluxo de calor \dot{q} , ou fluxo térmico em W/m^2 , é a taxa de transferência de calor na direção x por unidade de área perpendicular à direção da transferência e é proporcional ao gradiente de temperatura, como mostra a figura 2.

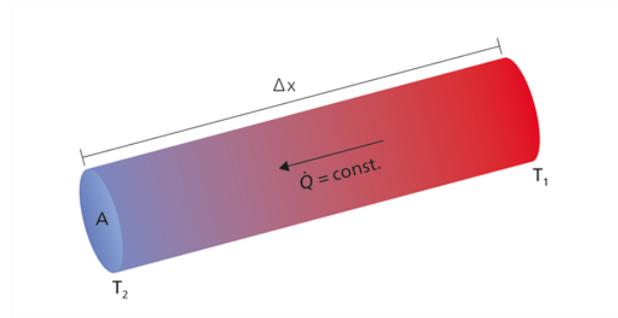


Figura 2 – Fluxo de Calor num tubo cilíndrico

Segundo o autor [Incropera e DeWitt \(1996\)](#), existem três mecanismos para a transferência de calor:

- **Condução:** Quando a transferência de energia ocorre em um meio estacionário, que pode ser um sólido ou um fluido, em virtude de um gradiente de temperatura.
- **Convecção:** Quando a transferência de energia ocorre entre uma superfície e um fluido em movimento (geralmente ar) em virtude da diferença de temperatura entre eles.
- **Radiação:** Quando, na ausência de um meio interveniente, existe uma troca líquida de energia (emitida na forma de ondas eletromagnéticas) entre duas superfícies a diferentes temperaturas.

Nos motores foguetes, o fluxo de calor é provocado pelos gases quentes provenientes da combustão que escoam da câmara até a tubeira. Dentre os modos de transferência de calor, a condução é a mais representativa para o problema. Segunda a autora [Kimura \(1987\)](#), a energia trocada por radiação dentro da câmara alcança no máximo um terço da transferência de energia total e é desprezível.

A mesma autora apresenta um esquemático da evolução do fluxo de calor esperado em um motor foguete a propelente sólido, apresentado na figura 3. Neste gráfico, uma unidade de $Btu/s.in^2$ corresponde a aproximadamente $1,6 \cdot 10^6$

W/m^2 . O esperado é que o fluxo de calor aumente de acordo com a distância axial, chegando ao seu valor máximo na garganta (seção crítica).

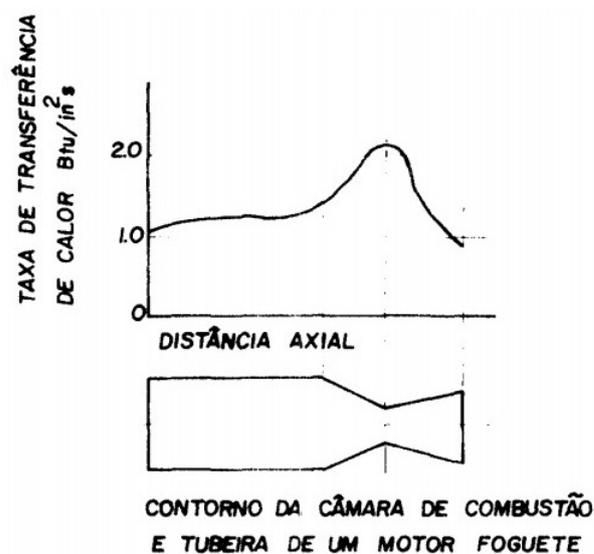


Figura 3 – Evolução do Fluxo de Calor no Motor-Foguete à Propelente Sólido.
Fonte: (KIMURA, 1987)

A figura 4 esboça os processos de transferência de calor em cada parte do motor estudado. Dentro da câmara de combustão, a queima dos combustíveis gera produtos em forma gasosa que promovem um grande fluxo de calor radial do centro da câmara para as paredes do isolante térmico. Quando este fluxo alcança o escudo, o processo de transferência de energia se dá por meio da condução, a qual depende da condutibilidade do material pelo qual se dá a passagem do calor. Este mesmo processo se dá do escudo térmico até o envelope do motor. A parede externa da estrutura está em contato com o ar do ambiente em que se realiza os testes experimentais. Desta parede externa para o ar em volta, o calor é transferido através da convecção e radiação.

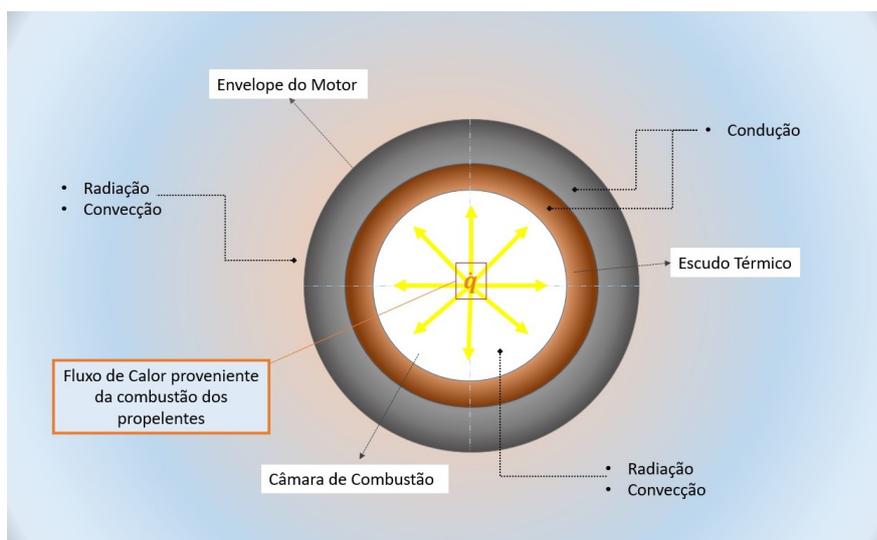


Figura 4 – Processos de transferência de calor na câmara de combustão do motor foguete

Como o objetivo deste trabalho é entender a distribuição de temperaturas através do escudo térmico do motor foguete, a fim de se melhor entender o comportamento dos materiais escolhidos e possibilitar o *design* apropriado do isolante interno, apenas o processo da condução será avaliado, considerando o intervalo compreendido entre as paredes interna e externa do escudo térmico.

2.1.1 Condutividade Térmica

Condução térmica é o processo de transferência de calor através de um meio material onde a energia térmica se propaga de partícula para partícula do meio com maior de temperatura para um de menor temperatura através da transferência de energia cinética destas partículas causada pelo recebimento de calor do material, (BöCKH; WETZEL, 2011).

As ligações na estrutura atômica e molecular dos materiais são o fator determinante de sua condutividade térmica. Metais são excelentes condutores de calor por possuírem elétrons mais externos com ligações mais fracas, o que os torna livres para transportar energia por meio de colisões a níveis moleculares. Em oposição, materiais como lã, madeira, vidro, papel, isopor e materiais no estado

gasoso são maus condutores de calor (isolantes térmicos), pelo fato que os elétrons mais externos dos átomos que formam estes materiais estão firmemente ligados, comparados aos materiais metálicos. Segundo o autor [Incropera e DeWitt \(1996\)](#), a condutividade térmica de um sólido pode ser mais do que quatro ordens de grandeza superior à de um gás, e essa tendência se deve à diferença de espaçamento intermolecular nos dois estados ([CALLISTER, 2016](#)).

A condutividade térmica é a propriedade física que mensura o quanto um corpo consegue conduzir calor. Quanto maior a capacidade de um material de conduzir calor, maior é a sua condutividade térmica. Contrariamente, os isolantes térmicos são materiais de baixa condutividade térmica. Geralmente estes materiais são combinados com outros tipos de materiais também isolantes térmicos a fim de obter uma condutividade térmica do sistema ainda menor. Nos isolantes tradicionais, os materiais contêm fibras, pós ou flocos dispersos em sua composição, e o sistema é caracterizado por uma condutividade térmica efetiva, que depende das condutividades individuais de cada material e natureza da fração volumétrica dos materiais utilizados, ([INCROPERA; DEWITT, 1996](#)).

A condutividade térmica associada à condução de calor unidimensional (eixo x) é definida pelo autor [Incropera e DeWitt \(1996\)](#) como

$$\kappa = \frac{-\dot{q}}{\partial T / \partial x} \quad (2.2)$$

Da equação 2.2, tem-se que para um dado gradiente de temperatura, o fluxo térmico por condução aumenta com o aumento da condutividade térmica.

Para análises de transferência de calor a difusividade térmica α é uma importante propriedade e pode ser definida como a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica (relação entre a quantidade de calor fornecida a um corpo e a variação de temperatura observada nele) do material, apresentada na equação 2.3, e possui como unidade m^2/s ([INCROPERA; DEWITT, 1996](#)).

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p} \quad (2.3)$$

Em que:

κ é a condutividade térmica do material;
 ρ é a densidade do material;
 C_p é a capacidade térmica do material.

A difusividade térmica mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la. Materiais com alta difusividade térmica apresentarão rápidas mudanças nas condições impostas, enquanto que materiais com baixa difusividade térmica responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir o equilíbrio (INCROPERA; DEWITT, 1996).

O conhecimento dos valores das propriedades térmicas dos materiais utilizados é imprescindível para projetos de engenharia e de transferência de calor, pois a seleção errônea de materiais pode levar a defeitos em equipamentos e falhas catastróficas em grandes projetos. Para os isolantes térmicos, a difusividade térmica dos materiais que o compõe deve ser a menor possível, dificultando a troca de calor e deste modo protegendo a estrutura do motor.

2.1.2 Equação do Calor Para Regime Transiente

A equação que rege a troca de calor de um corpo para uma vizinhança é chamada de equação de calor, e sua solução fornece a distribuição de temperaturas em função do tempo (INCROPERA; DEWITT, 1996).

Para as configurações do problema abordado, o motor foguete pode ser simplificado como sendo um corpo cilíndrico, para qual as coordenadas cilíndricas seguem o esquema da Figura 5. A equação do calor para este caso, em regime transiente (dependente do tempo) então é dada por:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{z} \quad (2.4)$$

Em que α representa a difusividade térmica do material, discutida anteriormente e \dot{q} representa a taxa de geração de calor do sólido. As coordenadas r, Φ e z dizem respeito às direções radiais, circunferenciais e axiais, respectivamente.

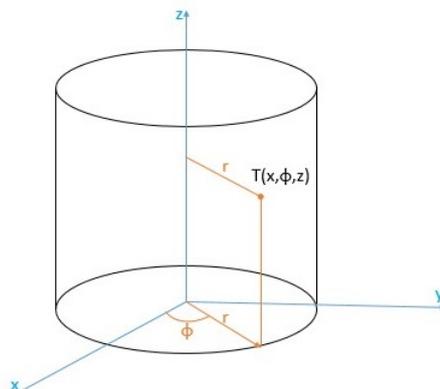


Figura 5 – Coordenadas Cilíndricas

A equação 2.4 postula que em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume unitário somado à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica acumulada dentro deste volume.

É possível simplificar a equação 2.4 considerando algumas características do problema. Avaliando apenas a variação da temperatura na direção radial e desconsiderando o termo de geração de calor no sólido, a seguinte forma da equação de calor é obtida através da equação 2.5 :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

Esta equação diferencial não possui solução trivial e será o objeto de estudo para a solução analítica a fim de obter a função da temperatura no sólido considerado. É esta equação também que rege o método de elementos finitos aplicado à condução do calor.

2.2 Solução Analítica da Equação de Calor

Soluções analíticas para a equação de calor 2.4 descrita anteriormente são um dos tópicos comumente abordados nos livros de transferência de calor. Seu resultado depende das condições iniciais e de contorno, da geometria considerada e dos mecanismos de transferência de calor considerados.

Neste trabalho, propõe-se a solução da equação de calor aplicada à geometrias cilíndricas e sem geração de calor, representada pela equação 2.5. Neste caso, a condução de calor se dá apenas radialmente, conforme ilustrado na Figura 6.

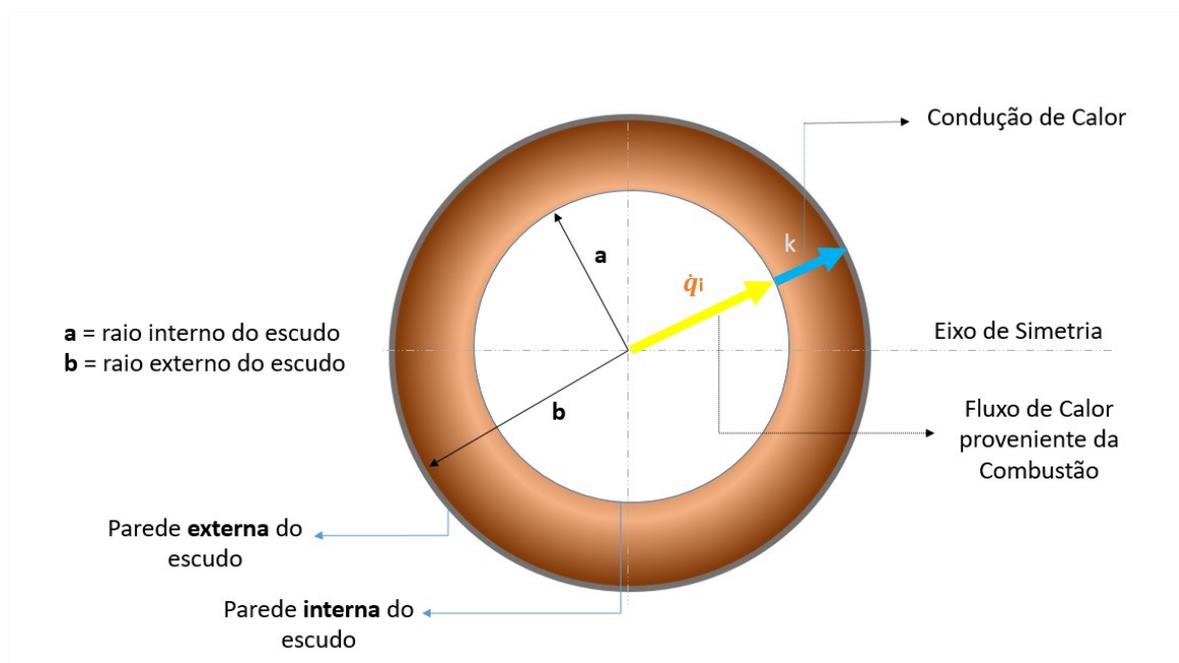


Figura 6 – Condução de calor radial devido ao fluxo de calor da combustão

Para isso, é necessário recorrer a métodos de resolução de equações diferenciais parciais, conforme descrito a seguir. Resumidamente, tem-se o seguinte

problema de valor inicial e de fronteira a ser resolvido neste trabalho

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), & (r, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}_{>0} \\ T(r, 0) = f_0(r), & a \leq r \leq b \\ \frac{\partial T}{\partial r}(a, t) = q_a, & t \geq 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r}(b, t) = q_b, & t \geq 0 \end{cases} . \quad (2.6)$$

Aqui a condição inicial é dada pela temperatura constante $T(r, 0) = 30^\circ\text{C}$ e as condições de fronteira são dadas por $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_a = q_a$ e $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_b = q_b$, em que q_a e q_b são os fluxos de calor nas paredes interna e externa do cilindro obtidos através do método numérico descrito na seção anterior.

Usualmente, este tipo de problema de valor inicial e fronteira é resolvido usando o método da separação de variáveis, isto é, admite-se que a solução da equação diferencial tem a forma $T(r, t) = G(t) \cdot R(r)$. No entanto, a simples utilização deste método não irá ser bem sucedida quando pelo menos uma das condições de fronteira q_a e q_b for diferente de zero. Para observar esse fato, substituindo o candidato a solução na equação diferencial, tem-se

$$\dot{G}(t)R(r) = \frac{\alpha}{r} (rR'(r))' G(t), \quad (2.7)$$

em que $\dot{G}(t)$ e $R'(r)$ representam as derivadas das funções $G(t)$ e $R(r)$, respectivamente. Reescrevendo a equação, obtem-se

$$\frac{\dot{G}(t)}{\alpha G(t)} = \frac{1}{rR(r)} (rR'(r))' = \lambda, \quad (2.8)$$

em que λ é uma constante. Assim, pode-se encontrar cada uma das funções $G(t)$ e $R(r)$ resolvendo o seguinte par de equações diferenciais

$$\dot{G}(t) = \alpha \lambda G(t) \quad (2.9)$$

$$(rR'(r))' = \lambda r R(r). \quad (2.10)$$

A equação 2.9 é uma EDO de primeira ordem enquanto a equação 2.10 é conhecida como Equação de Bessel de ordem zero e tem como solução

$$R_\lambda(r) = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r), \quad (2.11)$$

em que c_1, c_2 são constantes e J_0, Y_0 são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem zero. O número λ representa o conjunto de autovalores das funções apresentadas acima e as funções $R_\lambda(r)$ são as autofunções associadas a esses autovalores.

Considerando que pelo menos uma das condições de fronteira q_a ou q_b seja não nula, então a equação 2.11 irá levar ao seguinte sistema de equações

$$-\lambda c_1 J_1(\tau a) - \lambda c_2 Y_1(\tau a) = q_a \quad (2.12)$$

$$-\lambda c_1 J_1(\tau b) - \lambda c_2 Y_1(\tau b) = q_b, \quad (2.13)$$

que permite encontrar as constantes c_1 e c_2 para cada autovalor λ . Apesar de aparentemente tratável, considerar que q_a e q_b são não nulos não retrata o problema real. Desta forma, a solução do problema dado pela equação 2.6 será baseada em um problema equivalente que utiliza condições de contorno nulas. Este método de construção da solução se baseia na definição de uma transformada integral discreta e será descrito nas seções a seguir.

2.2.1 Tipos de Autovalores

Considere o problema

$$[rR'(r)]' = \lambda rR(r) \quad (2.14)$$

sujeito as condições de fronteira $R'(a) = R'(b) = 0$, com $0 < a < b$. O primeiro passo para obter a solução geral do problema é entender o caráter dos seus autovalores. Desta forma, multiplicando a equação diferencial por $R(r)$ e integrando, tem-se

$$\int_a^b R(r) [rR'(r)]' dr = \lambda \int_a^b rR(r)^2 dr. \quad (2.15)$$

Integrando por partes o lado esquerdo da equação resulta em

$$[rR(r)R'(r)]_a^b - \int_a^b rR'(r)^2 dr = \lambda \int_a^b rR(r)^2 dr. \quad (2.16)$$

Como as condições de fronteira são $R'(a) = R'(b) = 0$, tem-se que $[rR(r)R'(r)]_a^b = 0$. Portanto,

$$\lambda = -\frac{\int_a^b rR'(r)^2 dr}{\int_a^b rR(r)^2 dr} \leq 0 \quad (2.17)$$

e conclui-se que os autovalores devem ser não-positivos para esse tipo de problema.

2.2.2 Autovalores, Autofunções e Ortogonalidade

Sabendo que os autovalores são não-positivos, será analisado inicialmente como são calculados os autovalores negativos $\lambda < 0$, que serão escritos a partir de agora como $\lambda = -\tau^2$. Neste caso, a equação diferencial pode ser escrita como

$$[rR'(r)]' = -\tau^2 rR(r). \quad (2.18)$$

Conforme observado anteriormente, essa é uma equação de Bessel de ordem zero que possui solução geral dada por

$$R(r) = c_1 J_0(\tau r) + c_2 Y_0(\tau r), \quad (2.19)$$

em que $J_0(\tau r)$ e $Y_0(\tau r)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem zero. Para determinar os autovalores τ deste problema utiliza-se as condições de fronteira $R'(a) = R'(b) = 0$ que resulta no seguinte sistema

$$c_1 J_1(\tau a) + c_2 Y_1(\tau a) = 0 \quad (2.20)$$

$$c_1 J_1(\tau b) + c_2 Y_1(\tau b) = 0, \quad (2.21)$$

de acordo com [Handbook... \(1965\)](#), as derivadas das funções de Bessel de ordem zero satisfazem $[J_0(\tau r)]' = -\tau J_1(\tau r)$ e $[Y_0(\tau r)]' = -\tau Y_1(\tau r)$, e essas são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie de ordem 1. Da segunda equação, fazendo

$$c_1 = -\frac{c_2 Y_1(\tau b)}{J_1(\tau b)}, \quad (2.22)$$

tem-se que os autovalores são calculados através da relação

$$J_1(\tau a)Y_1(\tau b) - J_1(\tau b)Y_1(\tau a) = 0. \quad (2.23)$$

É conhecido na literatura, como em [Al-Gwaiz \(2008\)](#), que as soluções dessa equação formam uma sequência crescente e discreta $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$ e associadas a esses autovalores tem-se também uma sequência de autofunções dadas por

$$R_m(r) = J_0(\tau_m r)Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b)Y_0(\tau_m r), \quad m \geq 1. \quad (2.24)$$

Por outro lado, é sabido que o problema admite o autovalor nulo, isto é $\lambda = 0$, neste caso a equação diferencial do problema se reduz a

$$[rR'_0(r)]' = 0. \quad (2.25)$$

Portanto, integrando os dois lados tem-se

$$rR_0'(r) = d_1 \quad (2.26)$$

e, finalmente,

$$R_0(r) = d_1 \ln r + d_2. \quad (2.27)$$

Para que essa função satisfaça as condições de contorno dadas é necessário que $d_1 = 0$. Desta forma, a autofunção associada ao autovalor nulo é dada por $R_0(r) = 1$ que também é solução da equação diferencial e satisfaz as condições de contorno.

O conjunto de autofunções encontrados possuem a característica de serem ortogonais duas a duas, considerando algum tipo de produto interno definido. Neste caso, defini-se o produto interno entre duas funções $p(r)$ e $q(r)$, para coordenadas polares, como sendo o número

$$(p, q) = \int_a^b rp(r)q(r)dr. \quad (2.28)$$

De forma análoga a definição de ortonormalidade encontrada nos textos de álgebra linear, as funções $p(r)$ e $q(r)$ serão ortogonais se $(p, q) = 0$. Desta forma, observa-se de imediato que a autofunção $R_0(r) = 1$, associada ao autovalor $\tau_0 = 0$, é ortogonal a todas as demais $R_m(r)$, pois

$$\begin{aligned} \int_a^b rR_0(r)R_m(r)dr &= \int_a^b rR_m(r)dr & (2.29) \\ &= \int_a^b r (J_0(\tau_m r)Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b)Y_0(\tau_m r)) dr \\ &= \left[\frac{r}{\tau_m} (J_1(\tau_m r)Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m r)) \right]_a^b \\ &= 0, \end{aligned}$$

considerando que $\int rJ_0(\tau_m r)dr = \frac{r}{\tau_m}J_1(\tau_m r) + C$ e $\int rY_0(\tau_m r)dr = \frac{r}{\tau_m}Y_1(\tau_m r) + C$. É possível mostrar, de acordo com [Handbook... \(1965\)](#) usando as integrais acima que para autovalores distintos, isto é, $m \neq n > 1$, as autofunções $R_m(r)$ e $R_n(r)$ são duas a duas ortogonais (as relações foram apresentadas no apêndice [A](#)), isto é,

$$\begin{aligned} (R_m, R_n) &= \int_a^b rR_m(r)R_n(r)dr & (2.30) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Neste caso, a condição inicial $T(r, 0) = f_0(r)$ pode ser expandida através da série de funções ortogonais

$$f_0(r) = c_0 R_0(r) + c_1 R_1(r) + \cdots + c_n R_n(r) + \cdots . \quad (2.31)$$

Aqui observa-se que a função $f_0(r)$ deve satisfazer critérios mínimos de continuidade para que essa expansão possa ser realizada. (AL-GWAIZ, 2008) Como as funções são duas a duas ortogonais, pode-se encontrar os coeficientes da expansão que são dados por

$$(R_0, f_0) = c_0 (R_0, R_0) \quad (2.32)$$

e

$$(R_m, f_0) = c_m (R_m, R_m), \quad m > 0. \quad (2.33)$$

No primeiro caso,

$$c_0 = \frac{(R_0, f_0)}{(R_0, R_0)} = \frac{\int_a^b r f_0(r) \cdot 1 \cdot dr}{\int_a^b r \cdot (1)^2 dr} = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r f_0(r) dr \quad (2.34)$$

e nos demais, $m \geq 1$,

$$c_m = \frac{(R_m, f_0)}{(R_m, R_m)}. \quad (2.35)$$

Portanto, a expansão da condição inicial é dada na forma

$$f_0(r) = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r f_0(r) dr + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(R_m, f_0)}{(R_m, R_m)} R_m(r), \quad (2.36)$$

essa expansão será fundamental para a obtenção da solução final.

2.2.3 Transformada Discreta

O uso de transformadas integrais em equações diferenciais parciais é bastante útil pois transforma o problema inicial em outro mais simples de ser abordado, geralmente chamado de problema transformado ou auxiliar. Após a resolução do problema transformado, é possível retornar ao problema inicial através da transformada inversa. Em outras palavras, as transformadas integrais possuem a capacidade de simplificar as derivadas existentes. Como o problema abordado está definido em coordenadas cilíndricas e possui autovalores dependentes das funções

de Bessel, a aplicação da transformada de Hankel-Webber é conveniente. A metodologia do uso de transformadas integrais também é conhecida como método operacional.

Define-se a transformada discreta de Hankel-Webber por

$$\mathcal{H}_m(f) = \int_a^b r f(r) R_m(r) dr, \quad (2.37)$$

em que $R_m(r)$ é denominada o núcleo da função e \mathcal{H}_m é a função imagem associada à função objeto $f(r)$. O núcleo $R_m(r)$ é definido por

$$R_m(r) = J_0(\tau_m r) Y_1(\tau_m b) - Y_0(\tau_m r) J_1(\tau_m b), \quad m > 0, \quad (2.38)$$

e o autovalor τ_m é calculado através da relação

$$J_1(\tau_m a) Y_1(\tau_m b) - Y_1(\tau_m a) J_1(\tau_m b) = 0, \quad m > 0, \quad (2.39)$$

para o caso $m = 0$, temos que $R_0(r) = 1$ e $\tau_0 = 0$. Por definição essa transformada é linear, isto é, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes, tem-se $\mathcal{H}_m(\alpha f(r) + \beta g(r)) = \alpha \mathcal{H}_m(f) + \beta \mathcal{H}_m(g)$. Com o objetivo de aplicar essa transformada na equação diferencial é necessário saber como ela se comporta no operador diferencial $\Delta_o g = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right)$. Perceba que a definição da transformada discreta nada mais é que o produto escalar entre R_m e g , isto é $\mathcal{H}_m(g) = (R_m, g)$. Desta forma, a transformada inversa é dada pela expansão

$$g(r) = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r g(r) dr + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_m(g)}{(R_m, R_m)} R_m(r). \quad (2.40)$$

No operador diferencial, para $m > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m(\Delta_o g) &= \int_a^b r (\Delta_o g) R_m(r) dr & (2.41) \\
&= \int_a^b r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) R_m(r) dr \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) R_m(r) dr \\
&= \left[r \frac{\partial g}{\partial r} R_m \right]_a^b - \int_a^b r \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial R_m}{\partial r} dr \\
&= \left[r \frac{\partial g}{\partial r} R_m \right]_a^b - \left[r g \frac{\partial R_m}{\partial r} \right]_a^b + \int_a^b g(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R_m}{\partial r} \right) dr \\
&= \left[r \frac{\partial g}{\partial r} R_m \right]_a^b + \int_a^b g(r) \left(-\tau_m^2 r R_m(r) \right) dr \\
&= -\tau_m^2 \mathcal{H}_m(g) + \left[r \frac{\partial g}{\partial r} R_m \right]_a^b,
\end{aligned}$$

pois $R'_m(a) = R'_m(b) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R_m}{\partial r} \right) = -\tau_m^2 r R_m$. Portanto,

$$\mathcal{H}_m(\Delta_o g) = -\tau_m^2 \mathcal{H}_m(g) + \left[r \frac{\partial g}{\partial r} R_m \right]_a^b, \quad m > 0. \quad (2.42)$$

No caso do autovalor nulo, é imediato mostrar que para $\tau_0 = 0$, a transformada se comporta no operador diferencial da forma

$$\mathcal{H}_0(\Delta_o g) = b \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_b - a \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_a. \quad (2.43)$$

2.2.4 Transformando a Equação do Calor

Aplicando a transformada definida na seção anterior na equação

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2.44)$$

tem-se

$$\frac{1}{\alpha} \tilde{T}_t(\tau_m, t) = -\tau_m^2 \tilde{T}(\tau_m, t) + \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b, \quad m \geq 0, \quad (2.45)$$

considerando $\mathcal{H}_m(T(r, t)) = \tilde{T}(\tau_m, t)$ como a função $T(r, t)$ após a aplicação da transformada. Reescrevendo a equação fica na forma

$$\tilde{T}_t(\tau_m, t) + \alpha\tau_m^2\tilde{T}(\tau_m, t) = \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b. \quad (2.46)$$

Para $m > 0$, temos que a equação acima é uma EDO de primeira ordem na variável t , desta forma multiplicando-a pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\alpha\tau_m^2 t}$, tem-se que

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{T}(\tau_m, t) e^{\alpha\tau_m^2 t} \right) = \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b e^{\alpha\tau_m^2 t}. \quad (2.47)$$

Considerando que as condições de contorno $T_r(b, t)$ e $T_r(a, t)$ são constantes e integrando a equação acima tem-se que

$$\tilde{T}(\tau_m, t) e^{\alpha\tau_m^2 t} = \frac{1}{\tau_m^2} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b e^{\alpha\tau_m^2 t} + \tilde{h}(\tau_m), \quad (2.48)$$

em que $\tilde{h}(\tau_m)$ é uma constante de integração. Portanto,

$$\tilde{T}(\tau_m, t) = \frac{1}{\tau_m^2} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b + \tilde{h}(\tau_m) e^{-\alpha\tau_m^2 t}, \quad m > 0. \quad (2.49)$$

Agora, por outro lado, para o autovalor nulo, isto é $m = 0$, a equação se reduz a

$$\tilde{T}_t(\tau_0, t) = \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_a^b \quad (2.50)$$

e conseqüentemente, sua solução é dada por

$$\tilde{T}(\tau_0, t) = \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_a^b t + \tilde{g}(\tau_m), \quad (2.51)$$

em que $\tilde{g}(\tau_m)$ é uma constante de integração. Finalmente, tem-se que a solução é dada por

$$\begin{aligned}
T(r, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{T}(\tau_m, t) \frac{R_m(r)}{(R_m, R_m)} \\
&= \left\{ \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_a^b t + \tilde{g}(\tau_m) \right\} \frac{R_0(r)}{(R_0, R_0)} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tau_m^2} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b + \tilde{h}(\tau_m) e^{-\alpha \tau_m^2 t} \right\} \frac{R_m(r)}{(R_m, R_m)} \\
&= \frac{2}{b^2 - a^2} \left\{ \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_a^b t + \tilde{g}(\tau_m) \right\} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\tau_m^2} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b + \tilde{h}(\tau_m) e^{-\alpha \tau_m^2 t} \right\} \frac{R_m(r)}{(R_m, R_m)}. \quad (2.52)
\end{aligned}$$

No instante inicial, $t = 0$, a expansão da temperatura inicial $f_0(r)$ é dada por

$$f_0(r) = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r f_0(r) dr + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(R_m, f_0)}{(R_m, R_m)} R_m(r). \quad (2.53)$$

Comparando a série da equação 2.53 com a série obtida anteriormente para a distribuição de temperatura, equação 2.52, pode-se determinar quem são as constantes $\tilde{g}(\tau_m)$ e $\tilde{h}(\tau_m)$, que são dadas por

$$\tilde{g}(\tau_m) = \int_a^b r f_0(r) dr \quad (2.54)$$

$$\tilde{h}(\tau_m) = (R_m, f_0) - \frac{1}{\tau_m} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b. \quad (2.55)$$

Finalmente, podemos escrever a solução final que é dada por

$$\begin{aligned}
T(r, t) &= \frac{2}{b^2 - a^2} \left\{ \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_a^b t + \int_a^b r f_0(r) dr \right\} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_m^2} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b (1 - e^{-\alpha \tau_m^2 t}) \frac{R_m(r)}{(R_m, R_m)} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} (R_m, f_0) e^{-\alpha \tau_m^2 t} \frac{R_m(r)}{(R_m, R_m)}. \quad (2.56)
\end{aligned}$$

Se $f_0(r) = f_0$ é uma função constante, então $(R_m, f_0) = 0$. Pois, $R_0(r) = 1$ é ortogonal a todas as R_m 's, isto é, $(R_m, 1) = 0$ para todo $m > 1$. Além disso, como apresentado no Anexo A, é possível mostrar que

$$(R_m, R_m) = \frac{2}{\pi^2 \tau_m^2} \left[1 - \frac{J_1^2(\tau_m b)}{J_1^2(\tau_m a)} \right] \quad (2.57)$$

e

$$\left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b = \frac{2}{\pi \tau_m} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \frac{J_1(\tau_m b)}{J_1(\tau_m a)} - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \right]. \quad (2.58)$$

Portanto, a solução final pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} T(r, t) &= f_0 + \frac{2\alpha t}{b^2 - a^2} \left[b \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \right] \\ &+ \pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a J_1(\tau_m b) - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b J_1(\tau_m a) \right] J_1(\tau_m a) (1 - e^{-\alpha \tau_m^2 t}) R_m(r)}{\tau_m [J_1^2(\tau_m a) - J_1^2(\tau_m b)]} R_m(r) \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.2.5 Fluxo de Calor Dado por uma Função Degrau

Considerando a equação diferencial dada na seção anterior

$$\tilde{T}_t(\tau_m, t) + \alpha \tau_m^2 \tilde{T}(\tau_m, t) = \alpha \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b, \quad m \geq 0, \quad (2.60)$$

tem-se neste caso caso que o fluxo de calor na fronteira interna é dado por

$$\frac{\partial T}{\partial r}(a, t) = q [u(t - t_0) - u(t - t_1)], \quad (2.61)$$

em que q é constante, $u(t)$ é a função degrau unitário, $t_0 < t_1$ e que idealmente o fluxo de calor na fronteira externa é dado por

$$\frac{\partial T}{\partial r}(b, t) = 0. \quad (2.62)$$

Dessa forma, para o autovalor nulo $m = 0$, aplicando a transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, tem-se que

$$s\hat{T}(\tau_0, s) = \tilde{T}(\tau_0, 0) - \alpha a q \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s} \right], \quad (2.63)$$

em que $\mathcal{L}\{\tilde{T}(\tau_m, t)\} = \hat{T}(\tau_m, s)$. Reescrevendo, tem-se

$$\hat{T}(\tau_0, s) = \frac{\tilde{T}(\tau_0, 0)}{s} - \alpha a q \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s^2} \right]. \quad (2.64)$$

Lembrando que a transformada de Laplace para as funções $p(t) = 1$, $q(t) = t$ e $g(t) = u(t - a)f(t - a)$ são dadas por

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad (2.65)$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad (2.66)$$

$$\mathcal{L}\{u(t - a)f(t - a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}, \quad (2.67)$$

tem-se que

$$\hat{T}(\tau_0, s) = \tilde{T}(\tau_0, 0)\mathcal{L}\{1\} - \alpha a q \mathcal{L}\{u(t - t_0)(t - t_0) - u(t - t_1)(t - t_1)\}. \quad (2.68)$$

Portanto, para o autovalor $m = 0$, a solução é dada por

$$\tilde{T}(\tau_0, t) = \int_a^b r f_0(r) dr - \alpha a q [u(t - t_0)(t - t_0) - u(t - t_1)(t - t_1)]. \quad (2.69)$$

Por outro lado, para $m > 0$, aplicando a transformada de Laplace tem-se que

$$s\hat{T}(\tau_m, s) + \alpha\tau_m^2\hat{T}(\tau_m, s) = \tilde{T}(\tau_0, 0) - \alpha a q \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s} \right] R_m(a), \quad (2.70)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \hat{T}(\tau_m, s) &= \frac{\tilde{T}(\tau_m, 0)}{s + \alpha\tau_m^2} - \alpha a q \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s(s + \alpha\tau_m^2)} \right] R_m(a) \\ &= \frac{\tilde{T}(\tau_m, 0)}{s + \alpha\tau_m^2} - \frac{aq}{\tau_m^2} \left\{ \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s} \right] - \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s + \alpha\tau_m^2} \right] \right\} R_m(a) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Lembrando que a transformada de Laplace para a função exponencial é dada por

$$\mathcal{L}\{e^{pt}\} = \frac{1}{s - p},$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{T}(\tau_m, s) &= \frac{\tilde{T}(\tau_m, 0)}{s + \alpha\tau_m^2} - \frac{aq}{\tau_m^2} \left\{ \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s} \right] - \left[\frac{e^{-st_0} - e^{-st_1}}{s + \alpha\tau_m^2} \right] \right\} \\ &= \tilde{T}(\tau_m, 0)\mathcal{L}\{e^{-\alpha\tau_m^2 t}\} - \frac{aq}{\tau_m^2} R_m(a)\mathcal{L}\{u(t - t_0) - u(t - t_1)\} \\ &+ \frac{aq}{\tau_m^2} R_m(a)\mathcal{L}\{u(t - t_0)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_0)} - u(t - t_1)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_1)}\} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Portanto, a solução é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\tau_m, t) &= \tilde{T}(\tau_m, 0)e^{-\alpha\tau_m^2 t} - \frac{aq}{\tau_m^2} [u(t-t_0) - u(t-t_1)] R_m(a) \\ &+ \frac{aq}{\tau_m^2} [u(t-t_0)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_0)} - u(t-t_1)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_1)}] R_m(a). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Finalmente, considerando que $f_0(r) = f_0$ é constante, então a temperatura em função do tempo é dada por

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \frac{2}{b^2 - a^2} \left\{ \int_a^b r f_0(r) dr - \alpha a q [u(t-t_0)(t-t_0) - u(t-t_1)(t-t_1)] \right\} \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{aq}{\tau_m^2} [u(t-t_0) - u(t-t_1)] \frac{R_m(a)R_m(r)}{(R_m, R_m)} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{aq}{\tau_m^2} [u(t-t_0)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_0)} - u(t-t_1)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_1)}] \frac{R_m(a)R_m(r)}{(R_m, R_m)} \\ &= f_0 - \frac{2\alpha a q}{b^2 - a^2} [u(t-t_0)(t-t_0) - u(t-t_1)(t-t_1)] \\ &+ q\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[u(t-t_0) - u(t-t_1)] J_1(\tau_m a) J_1(\tau_m b) R_m(r)}{\tau_m [J_1^2(\tau_m a) - J_1^2(\tau_m b)]} \\ &- q\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[u(t-t_0)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_0)} - u(t-t_1)e^{-\alpha\tau_m^2(t-t_1)}] J_1(\tau_m a) J_1(\tau_m b) R_m(r)}{\tau_m [J_1^2(\tau_m a) - J_1^2(\tau_m b)]} \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.3 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é um método numérico utilizado para resolver certos problemas nas áreas de interesse de engenharia e matemática física, como os de análise estrutural, escoamento de fluidos e transferência de calor. Estes problemas envolvem geometrias, carregamentos e propriedades de materiais complexas. As soluções analíticas para estas questões são aquelas que resultam numa expressão matemática que contém os valores das variáveis desconhecidas em qualquer localização do corpo, e logo são válidas para um número infinito de localizações neste corpo. Estas soluções geralmente requerem a solução de equações diferenciais parciais ou ordinárias, que para geometrias complexas e problemas não lineares, não são usualmente obtidas analiticamente. Para estes problemas complexos, é necessário procurar outros métodos numéricos para obter soluções aceitáveis, como o método dos elementos finitos, que resulta num sistema de equações algébricas simultâneas e contém os valores aproximados das variáveis desejadas apresentadas como um número de pontos discretos dentro do contínuo (LOGAN, 2012).

A discretização é o processo de modelagem de um corpo complexo através de sua divisão em um sistema equivalente composto de pequenos corpos ou unidades, denominados de elementos finitos, conectados em dois ou mais elementos (pontos nodais ou nós) e/ou por linhas de contorno ou superfícies. No método dos elementos finitos (MEF), ao invés de resolver o problema geral para o corpo todo, são formuladas equações para cada elemento finito e depois é feita a combinação desses resultados para obter a solução para o corpo inteiro. De modo geral, a solução para problemas como o de transferência de calor geralmente se resume a encontrar as variáveis desconhecidas, como temperatura ou fluxos térmicos, em cada nó.

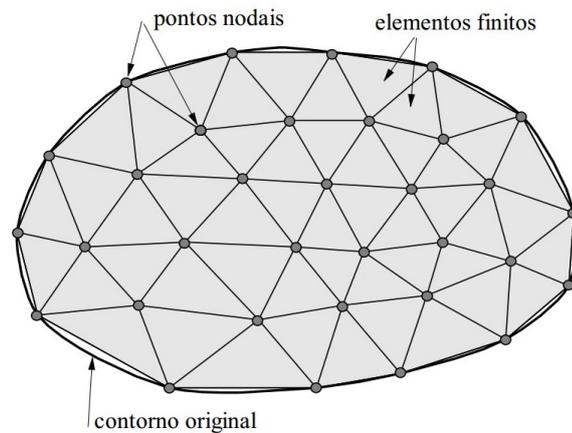


Figura 7 – Malha de Elementos Finitos Fonte: (SOUZA, 2003)

Os tipos de elementos finitos dependem do tipo de problema considerado. Diversas geometrias de elementos, como ilustradas na figura 8, podem ser escolhidas de acordo com a dimensão do problema.

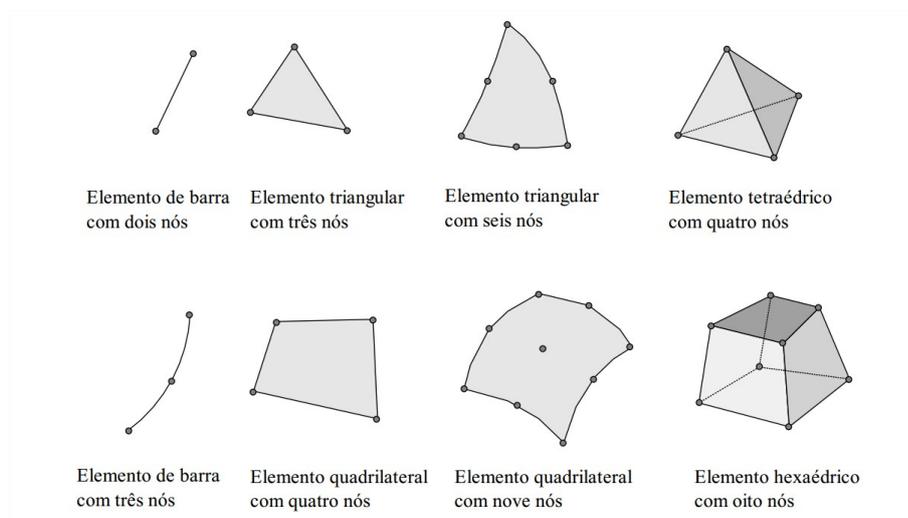


Figura 8 – Tipos de Elementos Finitos Fonte: (SOUZA, 2003)

Além dos nós e dos elementos finitos, o grau de liberdade é outro conceito importante na análise do método dos elementos finitos. Os graus de liberdade

representam os possíveis movimentos que um corpo, ou um ponto, podem apresentar. Um ponto, por exemplo, pode apresentar três graus de liberdade de translação em relação à sua origem. Um corpo rígido pode apresentar, de modo genérico, seis graus de liberdade: três de rotação e três de translação, como apresentado na figura 9.

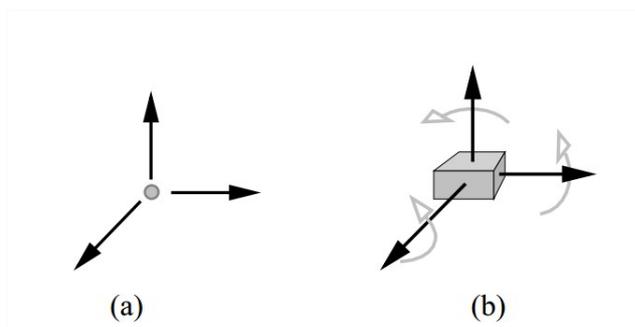


Figura 9 – Graus de liberdade a) de um ponto; b) de um corpo rígido Fonte: (SOUZA, 2003)

Nos problemas de análise mecânica e dinâmica, os graus de liberdade dos elementos correspondem aos possíveis movimentos que estes podem apresentar devido à aplicação de cargas. Por um outro lado, em problemas de condução de calor utiliza-se o termo “grau de liberdade” para fazer referência à incógnita principal do problema analisado, no caso, o valor do campo de temperatura nos nós da malha.

O autor Remo explica mais detalhadamente em Souza (2003) como a equação do calor é solucionada através do método dos elementos finitos.

3 METODOLOGIA

Para se obter a distribuição de temperaturas no escudo térmico, faz-se necessário conhecer o perfil de temperatura ao longo do tempo, o fluxo de calor aplicado ao sistema e as equações que regem a condução de calor para a geometria considerada.

O perfil de temperaturas foi obtido através de testes experimentais utilizando o motor de teste da plataforma SARA orbital. O problema do fluxo de calor foi resolvido numericamente através do método inverso utilizando a curva de temperaturas obtida experimentalmente como ferramenta de validação. Finalmente, a solução analítica para a equação de calor foi obtida através de uma abordagem de transformadas integrais. Os métodos para resolução de cada problema citados acima serão abordados detalhadamente nas próximas seções.

3.1 Bancada de Testes Experimentais

Os testes experimentais foram realizados utilizando o motor de foguete híbrido SARA projetado pelo grupo de propulsão híbrida da UnB. Todas as configurações do teste são explicadas mais detalhadamente no artigo ([ANDRIANOV et al., 2015](#)).

Inicialmente este projeto determinou as características básicas do motor de foguete híbrido, considerando uma desaceleração impulsiva de 12,5kN.s. Foi calculado um empuxo médio de 1,0 kN, funcionando entre 12 e 20 segundos. Com base nesse tempo de operação e na experiência do grupo de pesquisa, foi determinado a escolha da parafina como combustível sólido e do óxido nitroso como oxidante.

As características de performance citadas acima foram atingidas utilizando os dados da tabela 1 contendo os parâmetros de circulação do propelente. Estes dados foram obtidos através de simulações da balística interna do motor..

Tabela 1 – Parâmetros de Circulação dos Propelentes. Fonte: (ANDRIANOV et al., 2015)

Parâmetros	Massa [kg]			Fluxo Mássico [kg/s]		
Componente	C_nH_{2n+2}	N_2O	Total	C_nH_{2n+2}	N_2O	Total
Valor	0.700	4.540	5.240	0.058	0.380	0.437

A configuração da bancada de teste incluindo o arranjo do sistema de medição é apresentada na figura 10, as principais funções de cada sensor e sondas são descritos na tabela E. O sistema é composto por cinco subsistemas conectados por fios e por tubulações, dentre elas, câmara de combustão, controle do fluxo de oxidante, sistema de alimentação do oxidante, aquisição de dados do sistema e o sistema de extinção de incêndio. O último é responsável pelo desligamento do motor depois da propulsão, através da limpeza e resfriamento com o gás inerte depois do fechamento da válvula de oxidante.

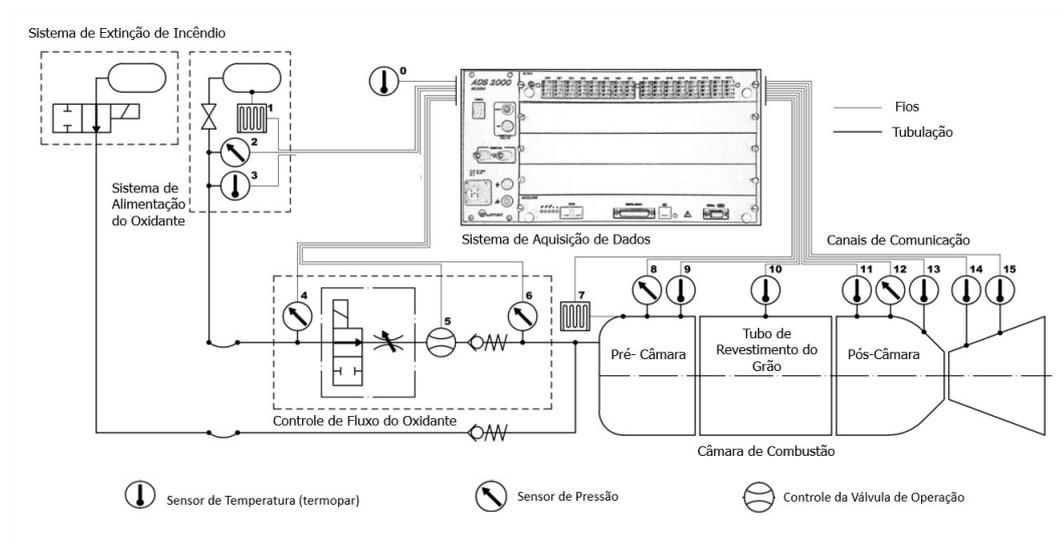


Figura 10 – Configuração da Bancada do motor de teste SARA Fonte: (ANDRIANOV et al., 2015)

Na figura 10 estão presentes 2 termopares na pós-câmara de combustão,

mais especificamente na parte convergente da tubeira, 2 na garganta e 4 na tubeira. Os dados de temperatura analisados neste trabalho serão provenientes dos sensores 11 e 13, os quais providenciarão a distribuição de temperatura na parede externa do isolante térmico interno. Estes dados serão utilizados como parâmetro de validação do método numérico para obtenção do fluxo de calor e também para comparação dos resultados da solução analítica obtida.

Tabela 2 – Propósitos de Medição. Fonte: (ANDRIANOV et al., 2015)

Sensor/Sonda	Numeração	Parâmetros Medidos
Termopar tipo K	0	Temperatura Ambiente
	3	Temperatura do Oxidante
	9	Temperatura na Pré-Câmara de Combustão
	10	Temperatura no Grão
Termopar tipo N	11	Temperatura no Isolante Térmico
	13-15	Temperatura na Parte Convergente da Tubeira
Transdutor de Pressão	12	Pressão na Pós-Câmara de Combustão
Sensor de Pressão Piezoelétrico	8	Pressão na Pré-Câmara de Combustão

O objetivo do teste experimental do motor foguete foi de verificar a sua aplicabilidade para futuras aplicações em pesquisa, de modo a prever se o motor de testes é capaz de suportar condições levemente superiores às pretendidas para operação sem sofrer danos permanentes.

A temperatura nos pontos mais quentes do motor foguete foi medida com termopares do tipo N. A configuração dos termopares está ilustrada na Figura 11.

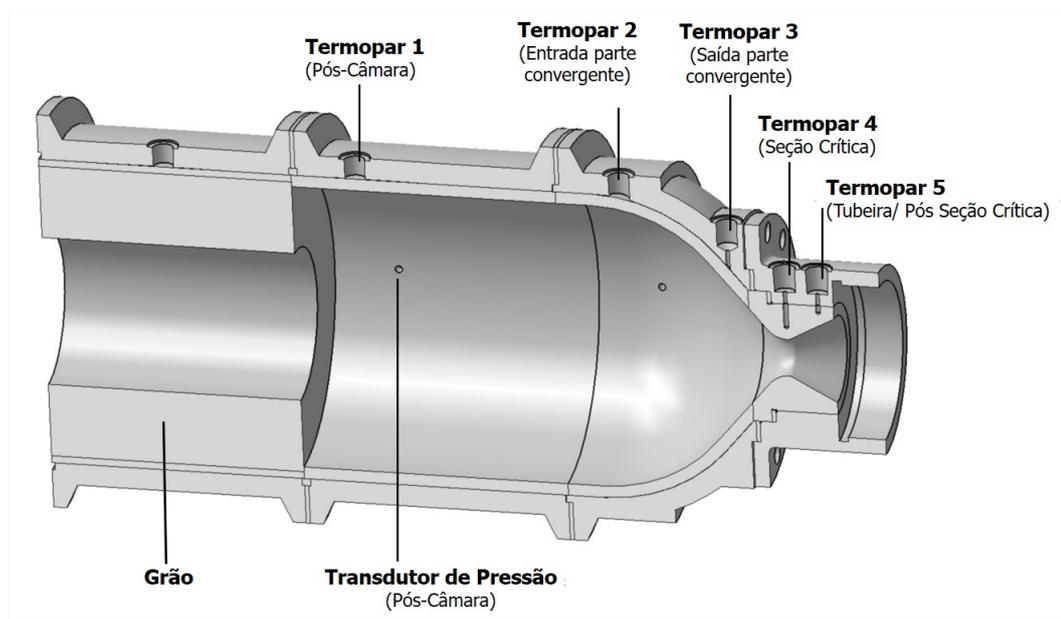


Figura 11 – Arranjo das unidades de medição. Fonte (ANDRIANOV et al., 2015)

Para o motor-foguete SARA o escudo de isolamento térmico reveste a câmara de combustão até o início da tubeira como ilustrado na figura 11. Neste trabalho, os testes experimentais foram realizados utilizando o compósito fenólico reforçado com tecido de algodão, conhecido como celeron, como material para o escudo térmico, cujas propriedades estão especificadas na Tabela 3. Já o envelope do motor é composto de liga de aço 304 L.

Tabela 3 – Propriedades do material Celeron e Aço 304 L. Fonte: (INCONPLAST, 2017) e (MATWEB, 1996)

Material	Peso Específico kg/m^3	Condutividade Térmica $W/(mC)$	Calor Específico $J/(kgC)$	Temperatura de Serviço C
Celeron	1350	0.35	1464.4	125
Aço 304 L	8000	14.2	500	925

Os resultados das medições foram captados por um *software* e então representados graficamente.

3.2 Análise Numérica: Método Inverso da Transferência de Calor

Problemas de transferência de calor aplicados a situações reais envolvem inúmeras variáveis que dificultam a análise e fácil obtenção de resultados. Para avaliar a distribuição de temperatura no motor foguete é preciso conhecer quais fontes de calor estão sendo aplicados, e como a geometria do motor influencia nesta distribuição.

A energia térmica proveniente da reação química dos propelentes na câmara de combustão do motor-foguete depende dos mecanismos de reação do processo, do tempo de funcionamento do motor, das condições do ambiente em que o motor se encontra, entre outras. Para o cálculo desta energia é necessário conhecer também as propriedades químicas e físicas dos propelentes, composição química, centesimal e condições de contorno. O conhecimento destes dados é uma tarefa difícil e que demanda tempo e recursos. Este capítulo tem como objetivo estimar o fluxo de calor da câmara de combustão para o isolante térmico interno do motor-foguete SARA utilizando métodos numéricos de aproximação.

Autores como [Stolz Jr. \(1960\)](#), [Burggraf \(1964\)](#), [Beck \(1970\)](#), [Williams e Curry \(1977\)](#), [Howard \(1968\)](#) e [Mehta \(1981\)](#) realizaram também em seus trabalhos aproximações nas áreas de transferência de calor para cálculo de estimativa do fluxo de calor, através diversos métodos que eram adequados a cada tipo de problema. Neste trabalho, utilizou-se o método inverso como feito por [Mehta \(1981\)](#) e [Beck \(1970\)](#) e de tentativa e erro para obtenção do fluxo de calor no escudo isolante do motor-foguete SARA.

3.2.1 Procedimentos para Cálculo do Fluxo de Calor

A resolução do problema foi baseada no método inverso descrito pelas autoras Beck (1970) e Mehta (1981). Este método fornecerá uma solução aproximada para os valores do fluxo de calor existentes nas paredes do escudo.

Conhecendo a distribuição de temperaturas na parte externa do escudo térmico, é possível obter os valores aproximados dos fluxos de calor com o auxílio do *software* ANSYS. O procedimento para obtenção destes fluxos pode ser descrito de maneira simplificada através do fluxograma apresentado na figura 12, que representa as etapas do método inverso.

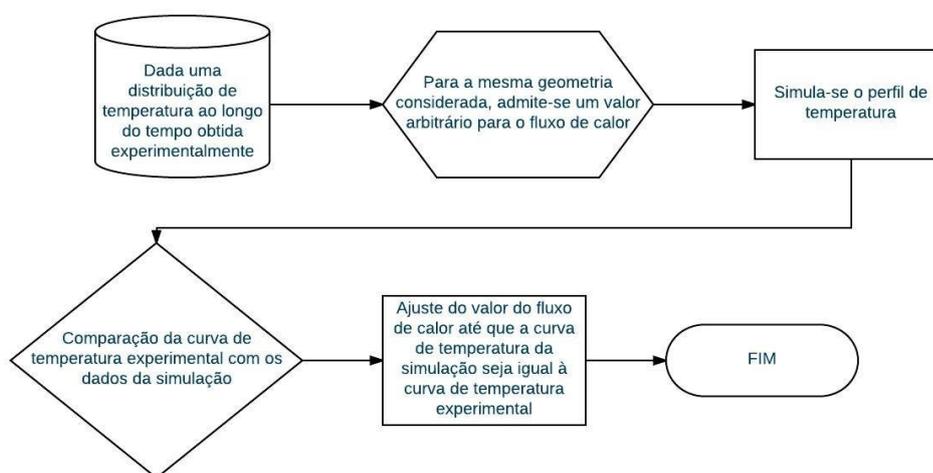


Figura 12 – Procedimento para estimativa do fluxo de calor através do método inverso

Com os testes experimentais com o motor-foguete, tem-se o gráfico de distribuição de temperaturas na parede externa do escudo térmico feito de Celeron, cujas propriedades estão descritas na tabela 3. Os dados recebidos são referentes a cinco termopares posicionados na parede externa do escudo térmico interno do motor de acordo com a figura 13. O tempo de queima para os experimentos foi cerca de 10 segundos e a distribuição de temperatura e pressão obtidas estão representadas nos gráficos descritos nas figuras 14 e 15. O gráfico da pressão foi utilizado para definir corretamente o tempo de início e fim da queima dos propelentes.

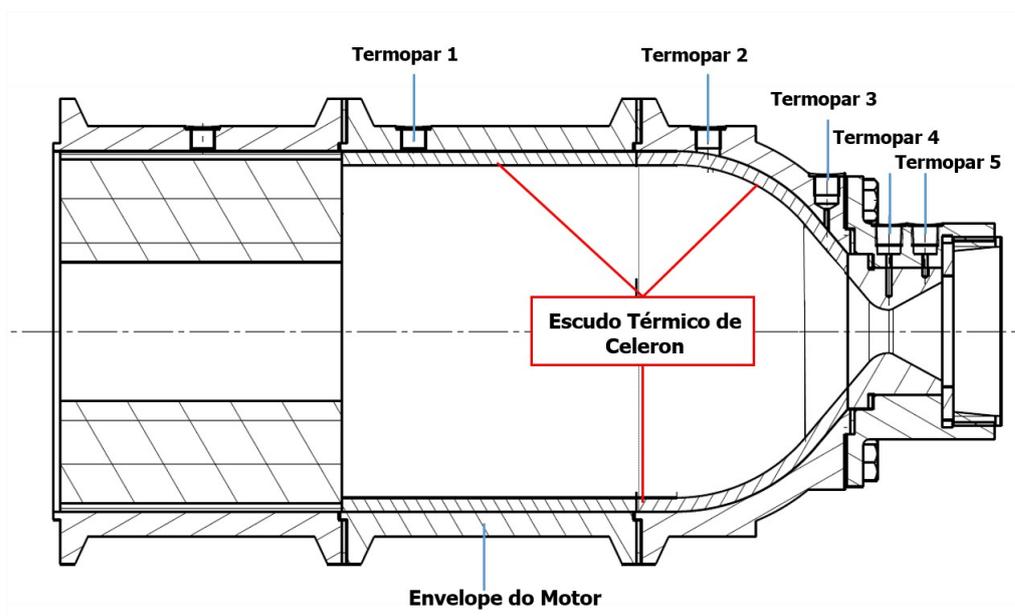


Figura 13 – Posição dos Termopares e Escudo Térmico.

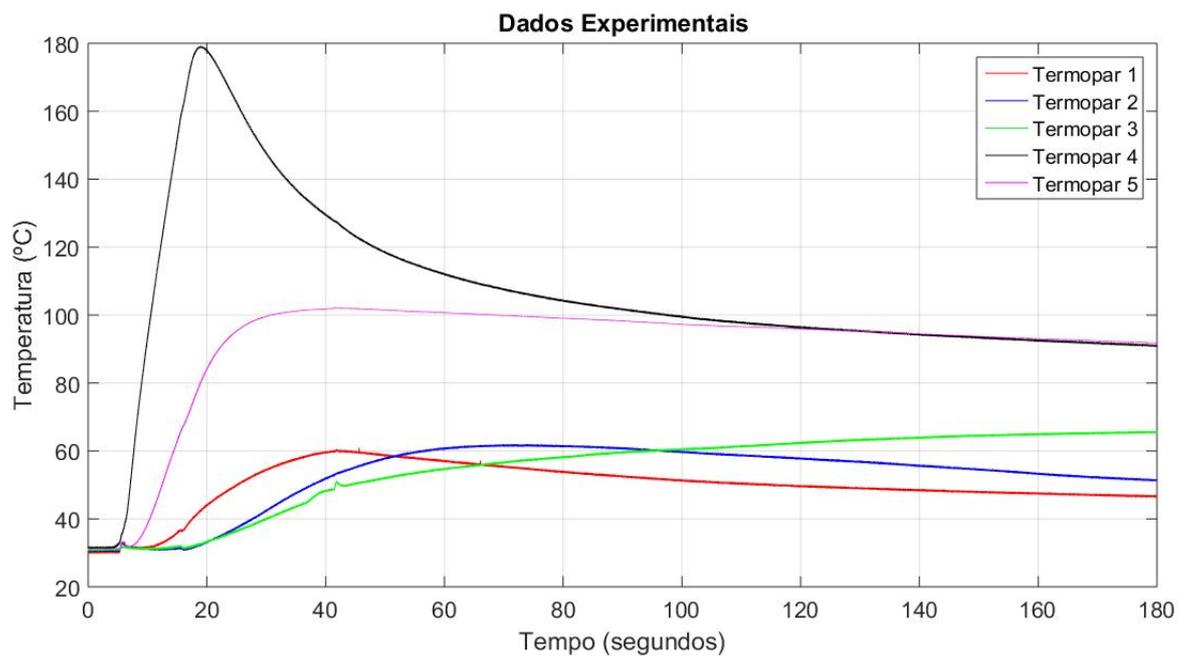


Figura 14 – Distribuição de Temperaturas na Parede Externa do Escudo

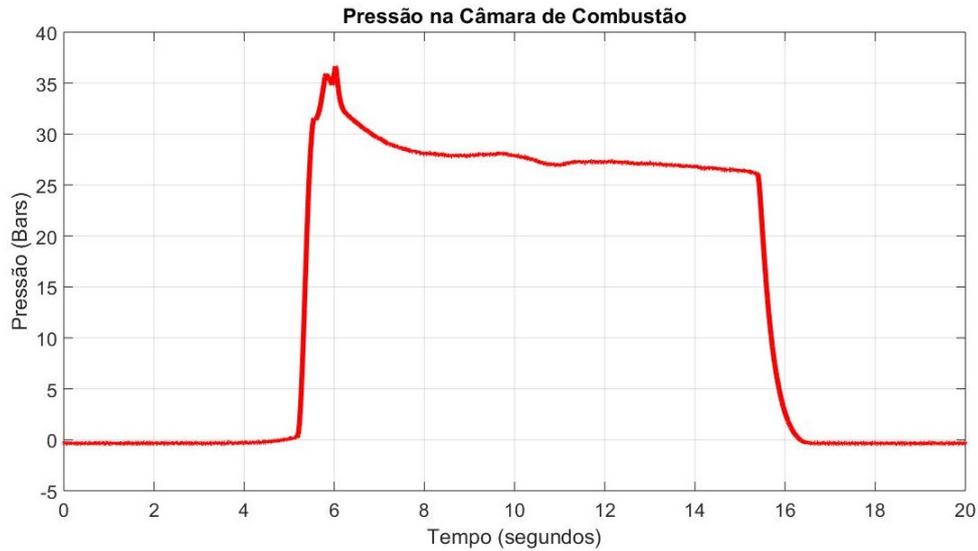


Figura 15 – Distribuição de pressão na câmara de combustão

Neste trabalho são analisadas apenas as temperaturas obtidas pelos termopares 1, 2 e 3 que correspondem à parte cilíndrica e convergente da pós-câmara de combustão, como representado na figura 13.

Utilizando o *workbench Transient Thermal* do *software* ANSYS, a geometria do escudo a ser analisada foi projetada e as condições iniciais e de contorno do problema foram adicionadas ao programa, que se resume apenas à temperatura inicial do isolante aos fluxos arbitrários a serem aplicados.

A temperatura inicial do sistema é de 30°C e as características do material aplicadas à geometria são as listadas na tabela 3.

Como a geometria possui simetria nos planos x-z e y-z e o fluxo de calor se dá por unidade de área e somente na direção radial, foi possível particionar o escudo em uma geometria cilíndrica equivalente ao raio da onde está localizado os termopares 1, 2 e 3, como mostra a figura 16, que manterá as propriedades do corpo inteiro. Deste modo o computador chegará ao resultado de força mais rápida.

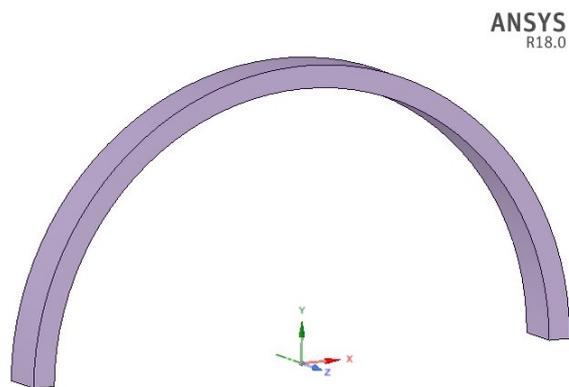


Figura 16 – Aplicação da simetria na geometria do escudo

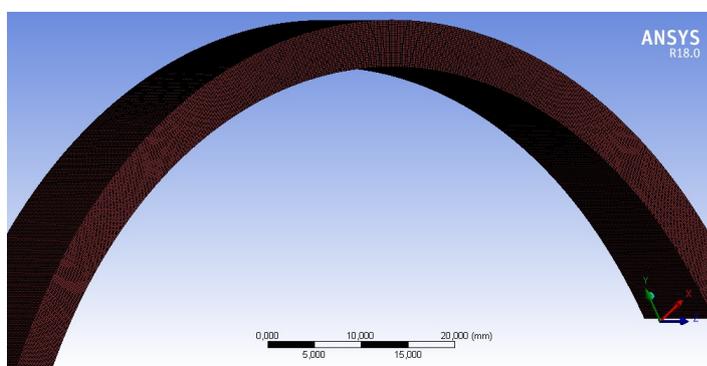


Figura 17 – Aplicação da malha na geometria com simetria.

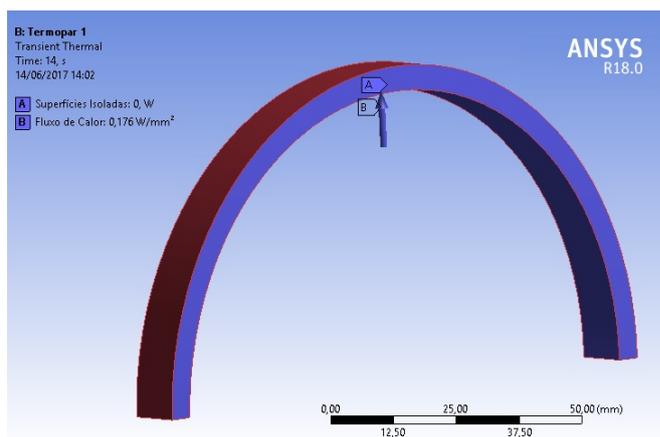


Figura 18 – Aplicação do fluxo de calor na geometria com simetria.

Os raios correspondentes a cada posição dos termopares, como indicado na figura 11 estão especificados na tabela 4 abaixo.

Tabela 4 – Raios Referentes à Posição dos Termopares

Raio [mm]	Interno	Externo
Termopar 1	60	65
Termopar 2	58,91	63,91
Termopar 3	38,57	43,57

Para esta geometria, foi possível aplicar uma malha bastante refinada, apresentada na figura 17 onde cada elemento possui 0.2 mm de tamanho, gerando assim 5152496 nós e 1231250 elementos.

O modelo de geração da malha se baseia no método dos elementos finitos *SOLID87*, que é aplicável a geometrias 3-D irregulares e materiais homogêneos, como o do isolante utilizado. O elemento possui um grau de liberdade de temperatura a cada nó. Este método é apropriado pois pode ser aplicado à análises em problemas de calor transiente, o que é o caso deste trabalho. A configuração dos nós está ilustrada na figura 19. Para o caso de materiais compósitos, é possível utilizar o elemento *SOLID278* ou *SOLID279*, que se aplica a modelagem de materiais com camadas.

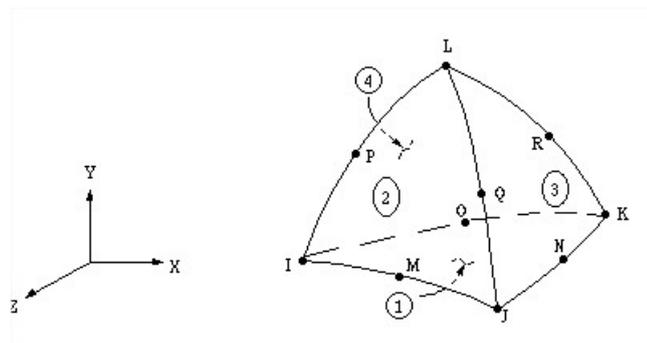


Figura 19 – Método de geração da malha, SOLID87 Fonte:

A superfície interna do sólido foi selecionada como local de aplicação do

fluxo de calor, pois a direção do fluxo proveniente a combustão dos propelentes se dá da parede interna do escudo para a externa. Nas parede laterais do sólido, como ilustrado na figura 18 foram aplicadas a condição de isolamento térmico (fluxo de calor nulo), deste modo, a transferência de calor se dará apenas na direção radial.

O fluxo de calor foi adicionado à geometria de acordo com o método de elementos finitos *SURFF152*, em que se aplica cargas de superfície (convecção, fluxo de calor ou radiação) através de elementos de efeito de superfície (*Surface-effect elements*), no qual o elemento é definido por 4 a 10 nós e pelas propriedades do material. Os nós deste elemento devem compartilhar os nós de base (da malha) do elemento sólido, como ilustrado na figura 20.

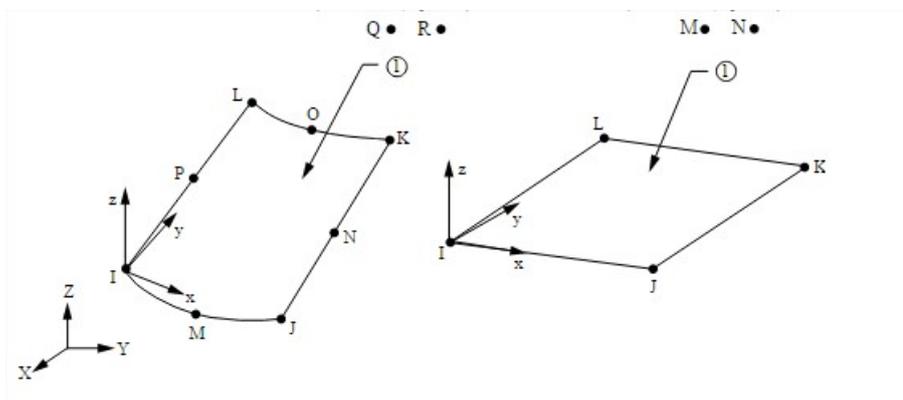


Figura 20 – Método de geração dos elementos finitos, SURFF152. Fonte:

3.2.1.1 Hipóteses Utilizadas na Solução Numérica

Para que o método inverso seja válido nesta aplicação, é necessário esclarecer hipóteses que validam a solução.

1. A transferência de calor é unidimensional na direção radial;
2. Não é considerada a perda de calor por convecção dos gases ou radiação durante o tempo de queima : o fluxo de calor se dá apenas por condução;
3. As propriedades do material do escudo térmico são independentes da temperatura.

4. Se as temperaturas obtidas na simulação obedecerem ao mesmo comportamento da variação de temperatura obtida experimentalmente durante o período de tempo de queima, então o fluxo de calor escolhido deve se aproximar do fluxo térmico do problema real.
5. A curva de temperatura deve ser analisada até $t = 18$ segundos (Figura 14), uma vez que a queima dos propelentes se dá de $t = 5$ segundos até $t = 15$ segundos e após isso, o sistema tende a voltar ao equilíbrio através de outros mecanismos de transferência de calor.
6. O fluxo de calor existirá enquanto houver pressão na câmara de combustão e se comportará do mesmo modo que o gráfico de pressão. (Figura 15)
7. Em $t = 5$ segundos do gráfico dos dados do teste experimental, figura 14, há um aumento brusco de temperatura causado pela ignição que não será levado em consideração para o cálculo de fluxo de calor. (Figura 14)

4 RESULTADOS

Os resultados obtidos neste estudo estão divididos em seções para melhor compreensão:

1. Estimativa dos fluxos de calor provenientes da queima dos propelentes do motor de teste SARA, obtidos através do método inverso apresentado.
2. Solução analítica para a equação do calor. Comparação com o resultado das simulações computacionais.
3. Estimativa da distribuição da temperatura no motor de teste para um tempo de queima prolongado (45 segundos).

4.1 Estimativas dos Fluxos de Calor

Os fluxos de calor obtidos através do método inverso para o tempo de queima dos propelentes de 10 segundos mais adequados (que mais se aproximaram da curva experimental) foram de 0.176 W/mm^2 para a posição do termopar 1, de 0.03 W/mm^2 para o termopar 2 e 0.015 W/mm^2 para o termopar 3, como apresentado nas figuras 21, 22 e 23.

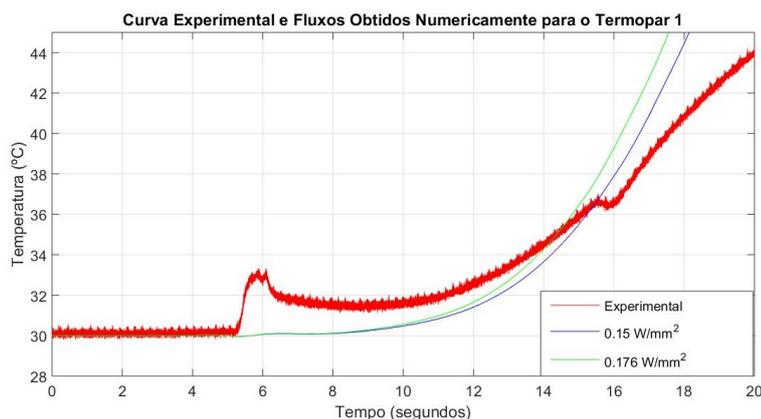


Figura 21 – Curva Experimental e Resultado da Simulação para o Termopar 1

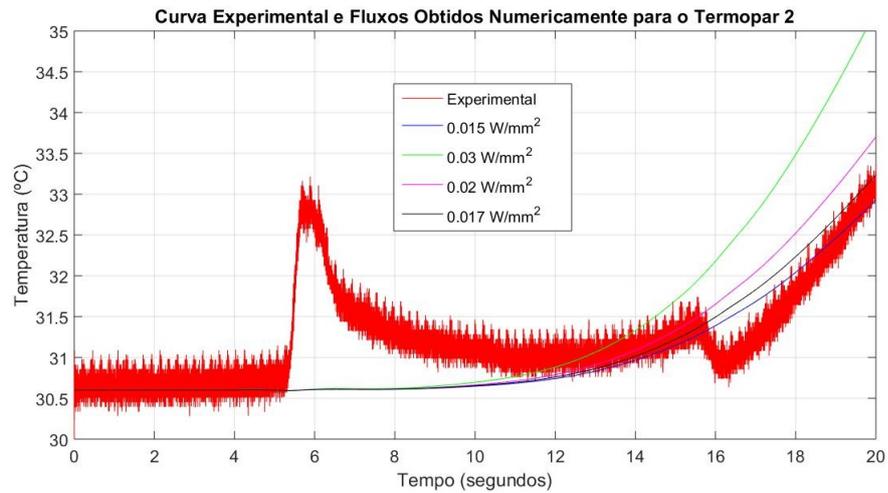


Figura 22 – Curva Experimental e Resultado da Simulação para o Termopar 2

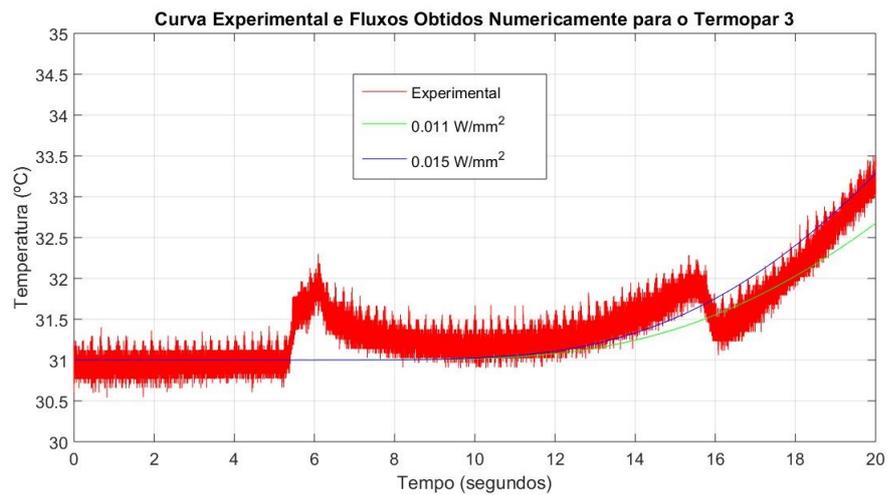


Figura 23 – Curva Experimental e Resultado da Simulação para o Termopar 3

4.2 Distribuição de Temperatura pela Solução Analítica

A solução analítica da equação do calor, representada pela equação 2.5, proposta fornece o conhecimento da temperatura no sólido cilíndrico a qualquer instante de tempo e a qualquer ponto da geometria.

Uma rotina no *software* comercial MATLAB foi criada a partir das equações obtidas da solução apresentada na seção 2.2 para que se possa ter uma representação gráfica dos resultados.

Foi necessária a aplicação de um degrau nos termos onde aparecem os fluxos de calor na solução analítica para melhor aproximação do modelo analítico com o real, como explicado na seção 2.2.5.

O resultado da solução analítica, apresentada nas figuras 24 e 25, permitiu também conhecer as temperaturas na parede interna do escudo térmico. Tal conhecimento é muito importante para os projetos com motores e não é viável de se obter experimentalmente.

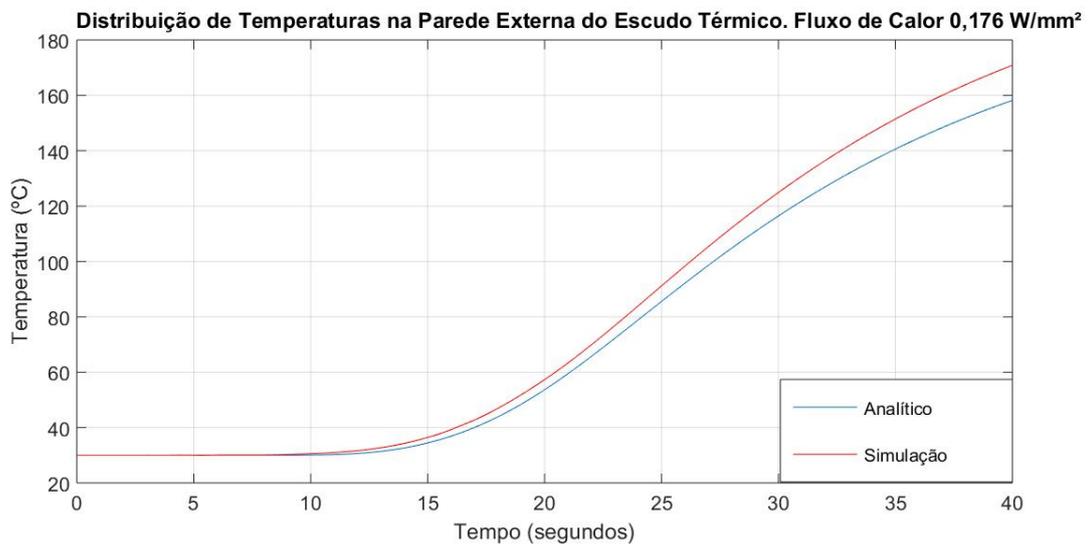


Figura 24 – Distribuição de Temperaturas na Parede Externa. Termopar 1: Fluxo de 0.176 W/mm²

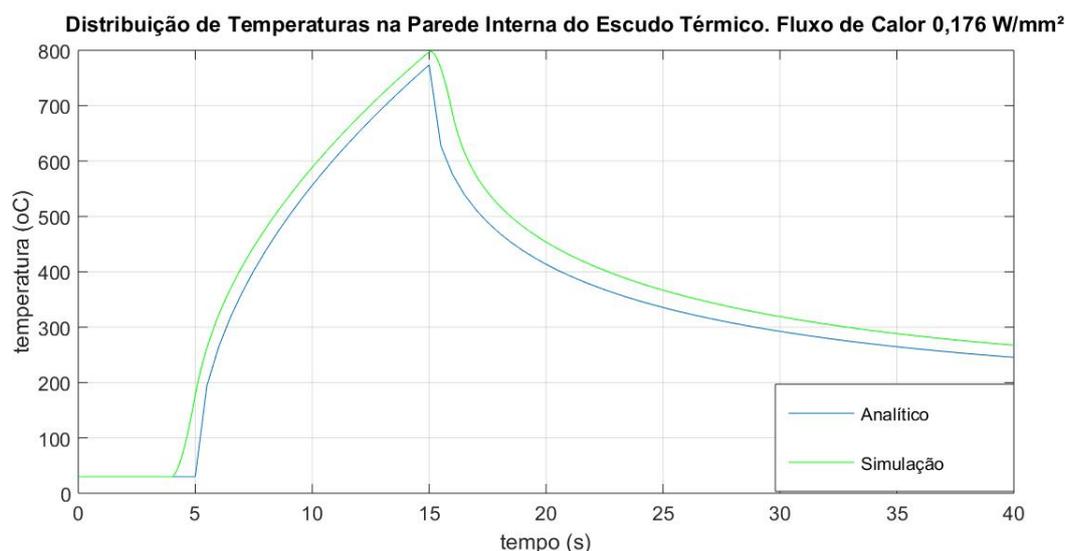


Figura 25 – Distribuição de Temperaturas na Parede Interna. Termopar 1: Fluxo de 0.176 W/mm^2

As figuras 24 e 25 mostram as temperaturas obtidas com solução analítica, em comparação com os dados da simulação, nas paredes interna e externa do escudo térmico de Celeron após um tempo de queima de 10 segundos. O fluxo aplicado foi de 0.176 W/mm^2 , valor obtido para o fluxo de calor do termopar 1, onde o raio interno mede 60 mm e o raio externo 65 mm. É possível ver nesta figura que na parede interna do escudo térmico, as temperaturas alcançam valores próximos de 800°C com apenas 10 segundos de operação do motor, uma das condições que causa degradação do escudo térmico.

4.2.1 Previsão Para Longo Período de Operação do Motor

A fim de prever o comportamento do escudo térmico de celeron e envelope do motor para o tempo de operação proposto, foi feita uma análise utilizando os métodos numéricos e analíticos apresentados, considerando o tempo de queima de 45 segundos (intervalo de $t = 5$ até $t = 50$ segundos) e o fluxo obtido para o termopar 1 (0.176 W/mm^2).

As figuras 26 e 27 mostram o resultado esperado pelas soluções analítica

e numérica da distribuição de temperatura no escudo térmico de Celeron para o período de queima de 45 segundos. É possível ver nestas imagens que a temperatura na parede interna pode alcançar até 1600°C e na externa até 800°C , o que ultrapassa a temperatura de serviço do material, podendo levar à falha estrutural do motor.

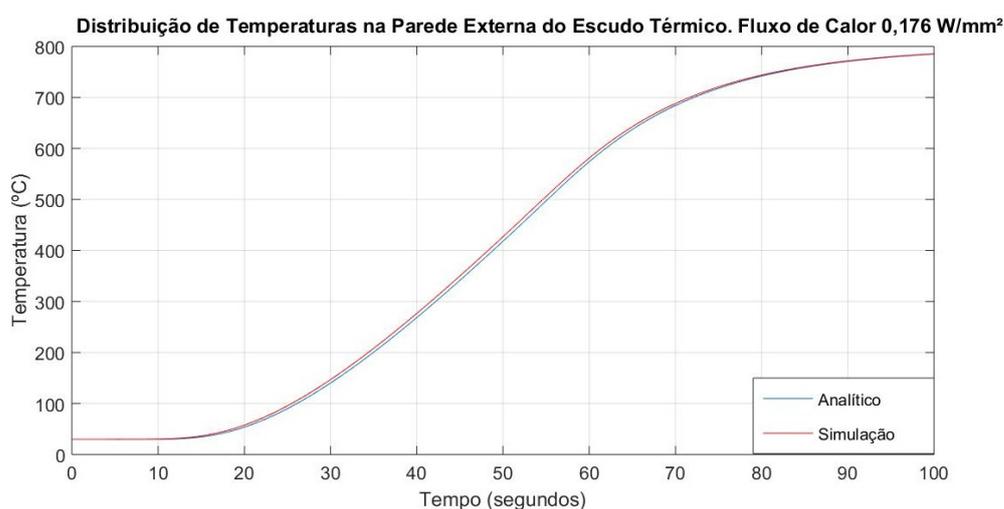


Figura 26 – Temperaturas na Parede Externa do escudo térmico. Fluxo de $0,176\text{ W/mm}^2$ e Funcionamento de 45 segundos.

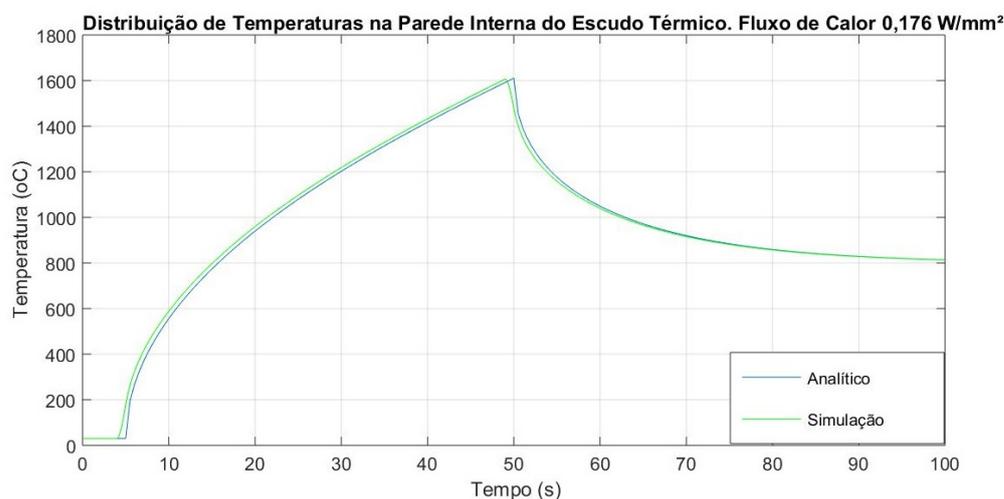


Figura 27 – Temperaturas na Parede Interna do escudo térmico. Fluxo de $0,176\text{ W/mm}^2$ e Funcionamento de 45 segundos.

Para avaliar a discrepância existente entre os valores obtidos numérica e analiticamente nas figuras 25 e 24, a fórmula para erro em discrepância ($erro = \frac{abs(numrico - analtico)}{analtico}$) foi aplicada aos valores recebidos desta análise. Os erros estão apresentados na figura 28.

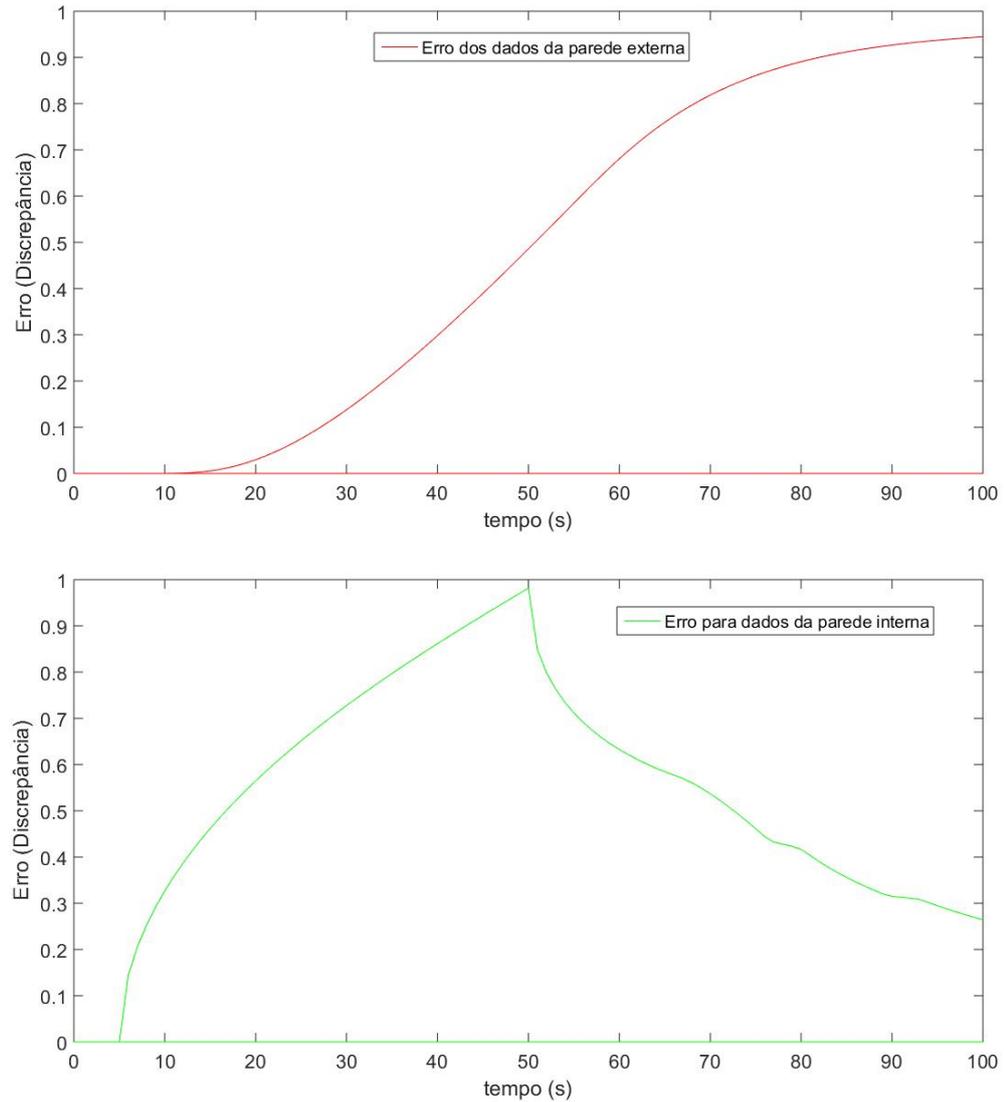


Figura 28 – Erro Solução Analítica e Experimental. Tempo de Queima 45 segundos. Fluxo de $0.176 W/mm^2$

As figuras 29, 30, 31, 32, 33 e 34 a seguir mostram as temperaturas no escudo térmico de celeron para tempos de queima variados, dado o fluxo de calor na parede interna também de 0.176 W/mm^2 , segundo a solução analítica.

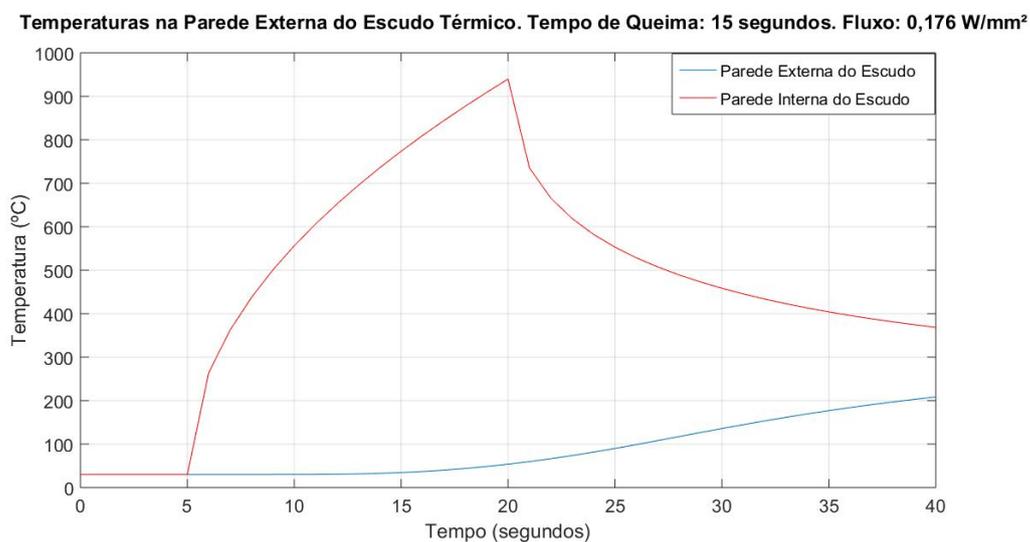


Figura 29 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 15 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2

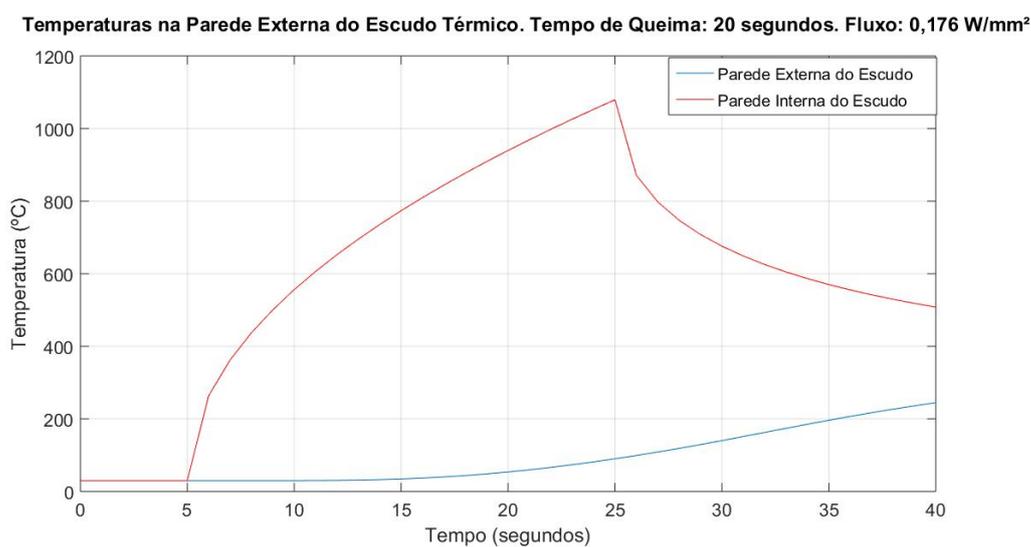


Figura 30 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 20 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm^2

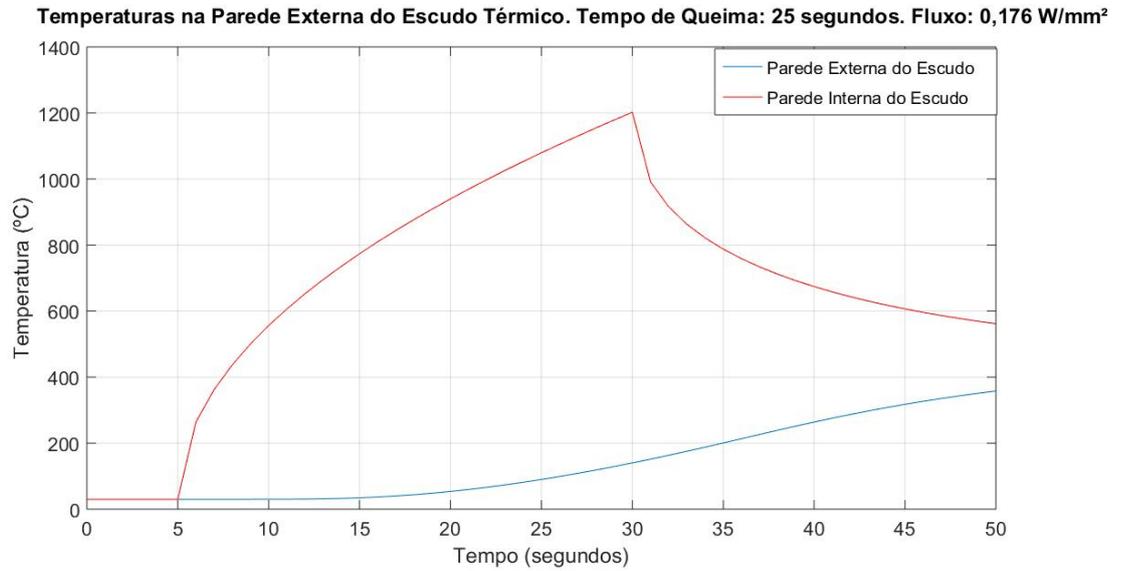


Figura 31 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 25 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm²

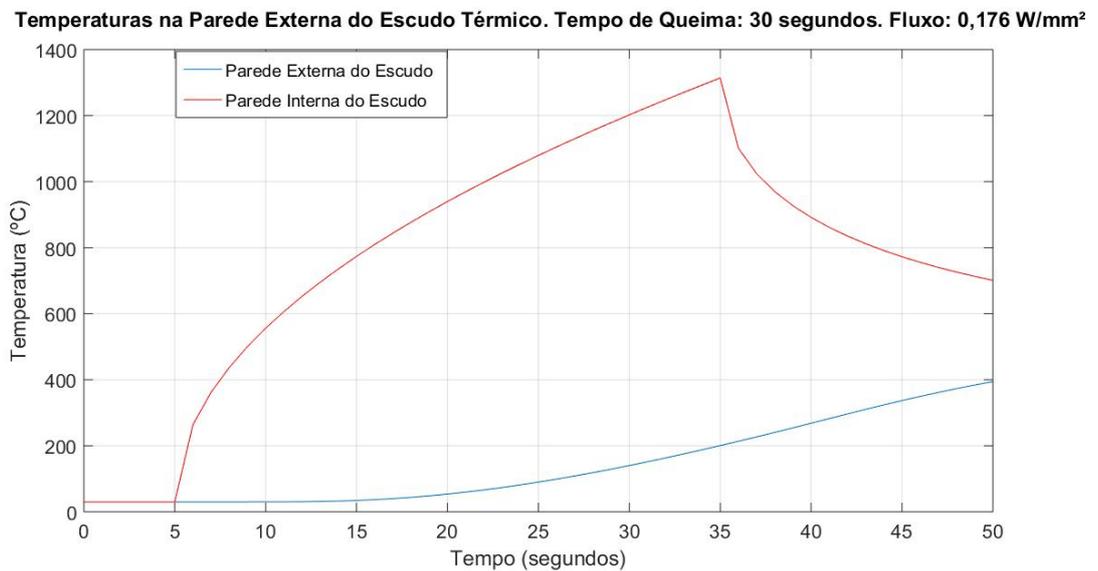


Figura 32 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 30 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm²

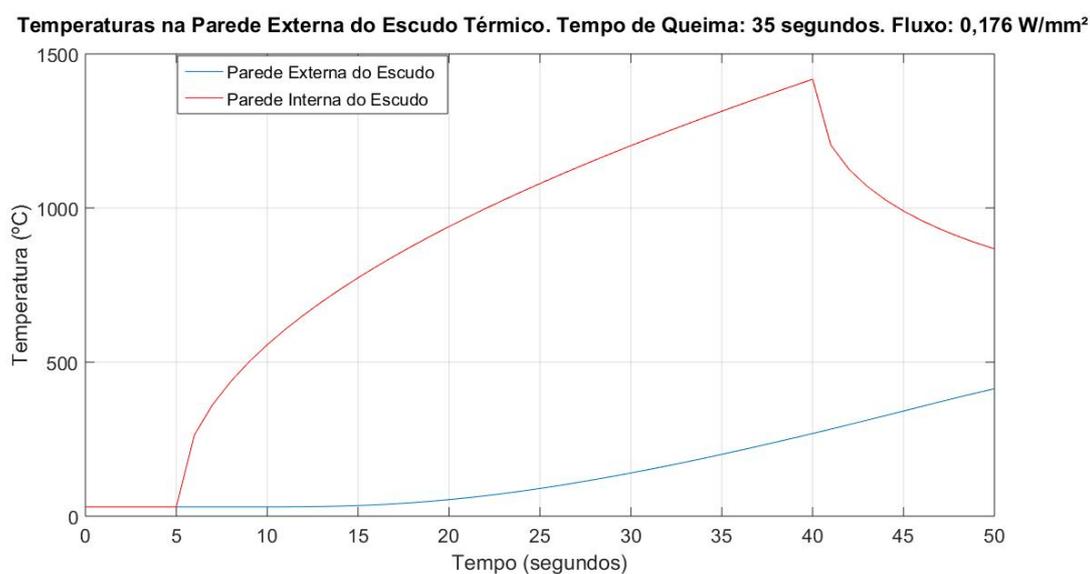


Figura 33 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 35 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm²

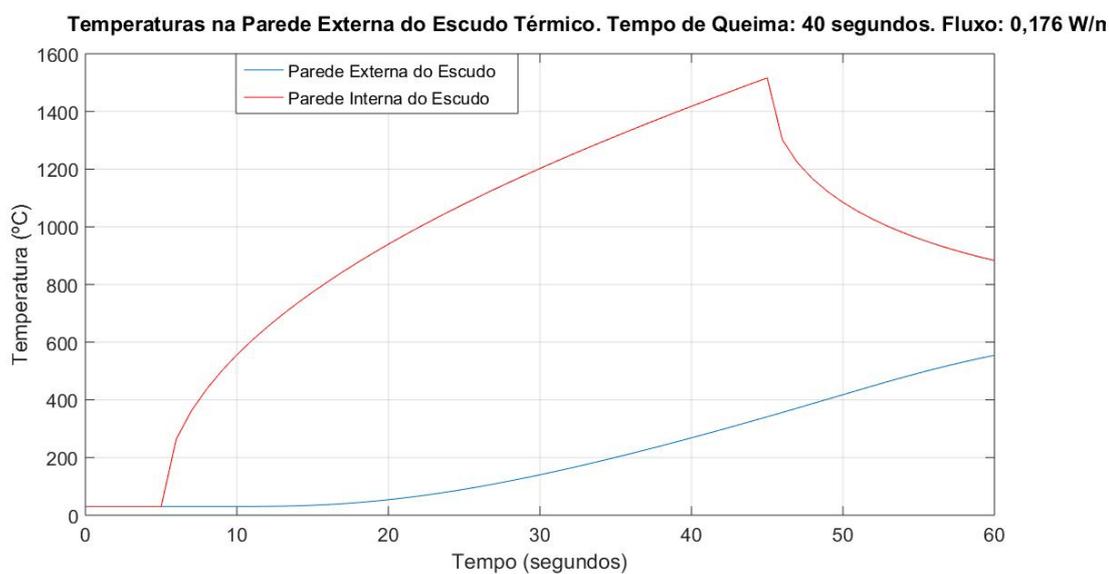


Figura 34 – Temperaturas no Escudo Térmico de Celeron. Tempo de Queima 40 segundos. Fluxo de 0.176 W/mm²

As temperaturas máximas na parede externa do escudo térmico de celeron são de: 200°C, nas figuras 29 e 30, 380°C na 31, 400°C na figura 32, 470° C na figura 33 e aproximadamente 580°C na figura 34.

Segundo o autor Kalinichev V.A. (2011), as temperaturas admissíveis na parede do involucro de motores feitos de ligas de alumínio é de 150° C, 300 °C para aço, 450 °C para ligas de titânio e para aço resistente ao calor e ligas de níquel, 750 °C. Comparando os resultados obtidos da solução analítica para tempos variados de queima com o apresentado pelo autor é possível avaliar a eficiência e necessidade do escudo térmico de celeron como barreira ao calor.

Para o tempo de queima de 30 segundos, figura 32, a temperatura máxima atingida na parede externa do escudo é 400°C. Para ligas de titânio, como o material utilizado na estrutura do motor foguete SARA, esta temperatura não causará danos estruturais ao material.

5 CONCLUSÃO

Com os resultados apresentados, é possível concluir que:

1. O método inverso é uma ferramenta útil para estimativa do valor dos fluxos de calor provenientes da combustão dos propelentes do motor foguete, dada a complexidade dos mecanismos que envolvem o processo de combustão de propelentes.
2. Para os dados obtidos experimentalmente, as curvas referentes às temperaturas obtidas pelos termopares 2 e 3 alcançam menores valores em relação à do termopar 1. Por este motivo, acredita-se que os fluxos de calor pertinentes à estas curvas não são boas estimativas para outras análises.
3. Entende-se que os baixos valores de temperatura das curvas referentes aos termopares 2 e 3 são originários de curto tempo de teste.
4. A solução analítica obtida para a variação transiente da temperatura em sólidos cilíndricos, considerando apenas o mecanismo da condução de calor, é uma poderosa ferramenta para cálculo da distribuição de temperaturas em domínio polar. Isto pode ser visto nas figuras 24, 25, 26 e 27 onde a curva obtida de simulações computacionais no ANSYS coincidiu com a obtida pela solução analítica.
5. Os erros obtidos da comparação entre os resultados analítico e da simulação computacional, visto na figura 28, podem ser derivados de problemas de aproximação.
6. Com a solução analítica apresentada, é viável a predição do fluxo de calor de corpos cilíndricos, caso houver conhecimento da variação da temperatura ao longo do tempo em alguma fronteira deste corpo.
7. Comparando as temperaturas máximas obtidas analiticamente para os tempos de queima de 15, 20, 25, 30, 35 e 40 segundos, visto nas figuras 29, 30,

31, 32, 33 e 34 com os dados apresentados pelo autor Kalinichev V.A. (2011) a respeito das temperaturas máximas admissíveis na parede do invólucro do motor, é possível concluir que o material Celeron é uma boa alternativa como escudo de barreira ao calor para o motor foguete SARA e sua espessura (5 mm) é adequada para o funcionamento do motor para até 30 segundos.

De acordo com os itens apresentados acima, é possível concluir que: a) o isolante térmico interno composto de Celeron possui espessura adequada para tempos de queima de até 30 segundos, garantindo a segurança do invólucro estrutural do motor de testes; b) A solução analítica é uma excelente ferramenta para análise da distribuição de temperatura em geometrias cilíndricas, dado um fluxo de calor proveniente da combustão, considerando-se apenas o efeito da condução.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A fim de se dar continuidade para o trabalho, são apresentadas sugestões de tópicos a serem abordados:

1. Para obtenção de valores mais adequados do fluxo de calor, fazem-se necessárias novas medições experimentais com tempo de teste prolongado para melhor avaliação do método inverso proposto.
2. Para valores mais próximos ao real, deve ser feito um estudo de convergência sobre a malha gerada no modelo numérico.
3. Realizar a predição do fluxo de calor utilizando a solução analítica proposta como alternativa ao método inverso. Esta predição pode ser validada ou outros métodos numéricos.
4. Utilizar a solução analítica apresentada para avaliar a performance de outros materiais utilizados como escudo térmico através da verificação da distribuição de temperatura em sua geometria.
5. Acrescentar ao modelo analítico a condição de resfriamento por convecção após o período de queima.

6. Avaliar o processo de ablação no material utilizado como escudo térmico utilizando a distribuição de temperaturas obtidas neste trabalho como parâmetros.

Referências

- AEB, A. E. B. 2009. Disponível em: <<http://www.aeb.gov.br/brasil-desenvolve-satelite-para-pesquisa-de-microgravidade/>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 24.
- AHMED, A. F. *Thermal insulation by heat resistant polymers*. Tese (Doutorado) — Concordia University, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- AL-GWAIZ, M. A. *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer-Verlag GmbH, 2008. ISBN 9781846289712. Disponível em: <http://www.ebook.de/de/product/6759882/m_a_al_gwaiz_sturm_liouville_theory_and_its_applications.html>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- ANDRIANOV, A. et al. Concept and design of the hybrid test-motor for development of a propulsive decelerator of sara reentry capsule. In: . American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015, (AIAA Propulsion and Energy Forum). Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/6.2015-3941>>. Citado 6 vezes nas páginas 13, 15, 51, 52, 53 e 54.
- BöCKH, P. von; WETZEL, T. *Heat Transfer*. Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 978-3-642-19182-4. Disponível em: <http://www.ebook.de/de/product/14131564/peter_von_boeckh_thomas_wetzel_heat_transfer.html>. Citado na página 30.
- BECK, J. V. Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 13, n. 4, p. 703 – 716, 1970. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001793107090044X>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.
- BURGGRAF, O. R. An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications. *Journal of Heat Transfer*, ASME, v. 86, n. 3, p. 373–380, ago. 1964. ISSN 0022-1481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.3688700>>. Citado na página 55.
- CALLISTER, J. W. D. *Ciencia e Engenharia de Materiais: Uma Introducao*. LTC - GRUPO GEN, 2016. ISBN 978-8521631033. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Ciencia-Engenharia-Materiais-Uma-Introducao/dp/8521631030?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&>>

[linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=8521631030](#)>.

Citado na página 31.

HANDBOOK of Mathematical Functions. Dover Publications Inc., 1965. ISBN 978-0486612720. Disponível em: <http://www.ebook.de/de/product/1675514/handbook_of_mathematical_functions.html>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.

HOWARD, F. G. Single-thermocouple method for determining heat flux to a thermally thick wall. 1968. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19680023736.pdf>>. Citado na página 55.

INCONPLAST. *Celeron*. 2017. Disponível em: <<http://www.incomplast.com.br/celeron>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 54.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 4th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1996. Citado 4 vezes nas páginas 27, 28, 31 e 32.

KALINICHEV V.A., Y. D. *Manufacturing Process of Solid-Propellant Rocket Motors*. [S.l.]: Bauman Moscow State Technical University,, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 74.

KIMURA, L. de A. *Transferência de Calor em Motor-Foguete*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 13, 28 e 29.

LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method*. Global Engineering: Christopher M. Shortt, 2012. ISBN 0495668257. Disponível em: <<https://www.amazon.com/First-Course-Finite-Element-Method/dp/0495668257?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0495668257>>. Citado na página 47.

MATWEB. *Material Property Data*. 1996. Disponível em: <<http://www.matweb.com/>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 54.

MEHTA, R. C. Estimation of heat-transfer coefficient in a rocket nozzle. *AIAA Journal*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 19, n. 8, p. 1085–1086, ago. 1981. ISSN 0001-1452. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.7846>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 56.

PETERSEN, E. et al. *Solid propellant rocket motor having self-extinguishing propellant grain and systems therefrom*. Google Patents, 2012. US Patent

8,336,287. Disponível em: <<https://www.google.com/patents/US8336287>>. Citado na página 23.

SOUZA, R. M. de. *O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor*. [S.l.], 2003. Citado 3 vezes nas páginas 13, 48 e 49.

STOLZ JR., G. Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes. *Journal of Heat Transfer*, ASME, v. 82, n. 1, p. 20–25, fev. 1960. ISSN 0022-1481. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.3679871>>. Citado na página 55.

SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. *Rocket Propulsion Elements*. Wiley, 2010. ISBN 9780470080245. Disponível em: <<https://www.amazon.com/Rocket-Propulsion-Elements-George-Sutton/dp/0470080248?SubscriptionId=0JYN1NVW651KCA56C102&tag=techkie-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0470080248>>. Citado na página 23.

WILLIAMS, S. D.; CURRY, D. M. An analytical and experimental study for surface heat flux determination. *Journal of Spacecraft and Rockets*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 14, n. 10, p. 632–637, out. 1977. ISSN 0022-4650. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.27987>>. Citado na página 55.

Apêndices

APÊNDICE A – Propriedades das Transformadas

A.1 Ortogonalidade das Autofunções

Dadas duas autofunções $R_m(r)$ e $R_n(r)$ associadas a autovalores diferentes $\tau_m \neq \tau_n$, calcula-se o seu produto interno na forma

$$(R_m, R_n) = \int_a^b r R_m(r) R_n(r) dr$$

e o objetivo é mostrar que $(R_m, R_n) = 0$. Tem-se que as autofunções $R_m(r)$ e $R_n(r)$ satisfazem as seguintes equações

$$\begin{aligned} [rR'_m]' &= -\tau_m^2 r R_m \\ [rR'_n]' &= -\tau_n^2 r R_n. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por $R_n(r)$, a segunda por $R_m(r)$ e combinando as duas, tem-se

$$[rR'_m]' R_n - [rR'_n]' R_m = -(\tau_m^2 - \tau_n^2) r R_m R_n.$$

Integrando,

$$\int_a^b \{ [rR'_m]' R_n - [rR'_n]' R_m \} dr = -(\tau_m^2 - \tau_n^2) \int_a^b r R_m R_n dr.$$

Integrando por partes o lado esquerdo da equação resulta em

$$[rR'_m R_n]_a^b - [rR'_n R_m]_a^b - \int_a^b (rR'_m R'_n - rR'_n R'_m) dr = -(\tau_m^2 - \tau_n^2) \int_a^b r R_m R_n dr.$$

Como $R'_m(a) = R'_m(b) = 0$, $R'_n(a) = R'_n(b) = 0$ e também $\int_a^b (rR'_m R'_n - rR'_n R'_m) = 0$, tem-se que todo o lado esquerdo da equação é nulo e portanto

$$(\tau_m^2 - \tau_n^2) \int_a^b r R_m R_n dr = 0.$$

Finalmente, como os autovalores são diferente, isto é $\tau_m \neq \tau_n$, tem-se que

$$\int_a^b r R_m R_n dr = 0$$

e conseqüentemente as autofunções são ortogonais.

A.2 Relações e Integrais Envolvendo Funções de Bessel

O objetivo deste apêndice é demonstrar as relações

$$\left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b = \frac{2}{\pi \tau_m} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \frac{J_1(\tau_m b)}{J_1(\tau_m a)} - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \right]$$

e

$$(R_m, R_m) = \frac{2}{\pi^2 \tau_m^2} \left[1 - \frac{J_1^2(\tau_m b)}{J_1^2(\tau_m a)} \right]$$

que surgem naturalmente na solução do problema de valor inicial dado pela 2.6. Lembrando que a autofunção $R_m(r)$ é definida por

$$R_m(r) = J_0(\tau_m r) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m r)$$

enquanto o autovalor τ_m é raiz da equação

$$J_1(\tau_m a) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_1(\tau_m a) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b &= b \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b R_m(b) - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a R_m(a) \\ &= b \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b [J_0(\tau_m b) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m b)] \\ &\quad - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a [J_0(\tau_m a) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m a)]. \end{aligned}$$

Pela propriedade do Wronskiano [Abramowitz, M., Stegun, I.A.: **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.** Dover, New York, USA (1972)],

$$J_0(z) Y_1(z) - J_1(z) Y_0(z) = -\frac{2}{\pi z}, \quad (\text{A.2})$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b &= b \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b [J_0(\tau_m b) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m b)] \\
&\quad - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a [J_0(\tau_m a) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m a)] \\
&= b \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \left(-\frac{2}{\pi \tau_m b} \right) \\
&\quad - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a [J_0(\tau_m a) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m a)] \\
&= -\frac{2}{\tau_m \pi} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \\
&\quad - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a [J_0(\tau_m a) Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m a)]. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Além disso, da equação A.1, que define os autovalores, pode-se verificar que

$$Y_1(\tau_m b) = \frac{J_1(\tau_m b) Y_1(\tau_m a)}{J_1(\tau_m a)}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo na equação A.3, tem-se que

$$\begin{aligned}
\left[r \frac{\partial T}{\partial r} R_m \right]_a^b &= -\frac{2}{\tau_m \pi} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \\
&\quad - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \left[\frac{J_0(\tau_m a) J_1(\tau_m b) Y_1(\tau_m a)}{J_1(\tau_m a)} - J_1(\tau_m b) Y_0(\tau_m a) \right] \\
&= -\frac{2}{\tau_m \pi} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \\
&\quad - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \frac{J_1(\tau_m b)}{J_1(\tau_m a)} [J_0(\tau_m a) Y_1(\tau_m a) - J_1(\tau_m a) Y_0(\tau_m a)] \\
&= -\frac{2}{\tau_m \pi} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \\
&\quad - a \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \frac{J_1(\tau_m b)}{J_1(\tau_m a)} \left(-\frac{2}{\tau_m \pi a} \right) \\
&= \frac{2}{\pi \tau_m} \left[\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_a \frac{J_1(\tau_m b)}{J_1(\tau_m a)} - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_b \right].
\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que $\|R_m\|^2 = (R_m, R_m)$ é dada por

$$\begin{aligned} (R_m, R_m) &= (J_0(\tau_m r)Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b)Y_0(\tau_m r), \\ &\quad J_0(\tau_m r)Y_1(\tau_m b) - J_1(\tau_m b)Y_0(\tau_m r)) \\ &= Y_1^2(\tau_m b) (J_0(\tau_m r), J_0(\tau_m r)) - 2J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b) (J_0(\tau_m r), Y_0(\tau_m r)) \\ &\quad + J_1^2(\tau_m b) (Y_0(\tau_m r), Y_0(\tau_m r)). \end{aligned}$$

Da tabela de integrais [Abramowitz, M., Stegun, I.A.: **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.** Dover, New York, USA (1972)], tem-se que

$$\begin{aligned} (J_0(\tau_m r), J_0(\tau_m r)) &= \int_a^b r J_0^2(\tau_m r) dr \\ &= \left[\frac{r^2}{2} (J_0^2(\tau_m r) + J_1^2(\tau_m r)) \right]_a^b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_0(\tau_m r), Y_0(\tau_m r)) &= \int_a^b r J_0(\tau_m r) Y_0(\tau_m r) dr \\ &\quad \left[\frac{r^2}{2} (J_0(\tau_m r) Y_0(\tau_m r) + J_1(\tau_m r) Y_1(\tau_m r)) \right]_a^b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (Y_0(\tau_m r), Y_0(\tau_m r)) &= \int_a^b r Y_0^2(\tau_m r) dr \\ &= \left[\frac{r^2}{2} (Y_0^2(\tau_m r) + Y_1^2(\tau_m r)) \right]_a^b. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(R_m, R_m) &= Y_1^2(\tau_m b) (J_0(\tau_m r), J_0(\tau_m r)) - 2J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b) (J_0(\tau_m r), Y_0(\tau_m r)) \\
&+ J_1^2(\tau_m b) (Y_0(\tau_m r), Y_0(\tau_m r)) \\
&= Y_1^2(\tau_m b) \left[\frac{b^2}{2} (J_0^2(\tau_m b) + J_1^2(\tau_m b)) - \frac{a^2}{2} (J_0^2(\tau_m a) + J_1^2(\tau_m a)) \right] \\
&- 2J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b) \left[\frac{b^2}{2} (J_0(\tau_m b)Y_0(\tau_m b) + J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b)) \right. \\
&- \left. \frac{a^2}{2} (J_0(\tau_m a)Y_0(\tau_m a) + J_1(\tau_m a)Y_1(\tau_m a)) \right] \\
&+ J_1^2(\tau_m b) \left[\frac{b^2}{2} (Y_0^2(\tau_m b) + Y_1^2(\tau_m b)) - \frac{a^2}{2} (Y_0^2(\tau_m a) + Y_1^2(\tau_m a)) \right] \\
&= \frac{b^2}{2} [Y_1^2(\tau_m b)J_0^2(\tau_m b) - 2J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b)J_0(\tau_m b)Y_0(\tau_m b) \\
&+ J_1^2(\tau_m b)Y_0^2(\tau_m b)] \\
&+ \frac{b^2}{2} [Y_1^2(\tau_m b)J_1^2(\tau_m b) - 2J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b)J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b) \\
&+ J_1^2(\tau_m b)Y_1^2(\tau_m b)] \\
&- \frac{a^2}{2} [Y_1^2(\tau_m b)J_0^2(\tau_m a) - 2J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b)J_0(\tau_m a)Y_0(\tau_m a) \\
&+ J_1^2(\tau_m b)Y_0^2(\tau_m a)] \\
&- \frac{a^2}{2} [Y_1^2(\tau_m b)J_1^2(\tau_m a) - 2J_1(\tau_m b)Y_1(\tau_m b)J_1(\tau_m a)Y_1(\tau_m a) \\
&+ J_1^2(\tau_m b)Y_1^2(\tau_m a)] \\
&= \frac{b^2}{2} [Y_1(\tau_m b)J_0(\tau_m b) - Y_0(\tau_m b)J_1(\tau_m b)]^2 \\
&- \frac{a^2}{2} [Y_1(\tau_m b)J_0(\tau_m a) - Y_0(\tau_m a)J_1(\tau_m b)]^2.
\end{aligned}$$

Das equações A.2 e A.4, tem-se finalmente

$$\begin{aligned}
(R_m, R_m) &= \frac{b^2}{2} [Y_1(\tau_m b)J_0(\tau_m b) - Y_0(\tau_m b)J_1(\tau_m b)]^2 \\
&- \frac{a^2}{2} [Y_1(\tau_m b)J_0(\tau_m a) - Y_0(\tau_m a)J_1(\tau_m b)]^2 \\
&= \frac{b^2}{2} \left[-\frac{2}{\pi \tau_m b} \right]^2 \\
&- \frac{a^2}{2} \frac{J_1^2(\tau_m b)}{J_1^2(\tau_m a)} [Y_1(\tau_m a)J_0(\tau_m a) - Y_0(\tau_m a)J_1(\tau_m a)]^2 \\
&= \frac{b^2}{2} \left[-\frac{2}{\pi \tau_m b} \right]^2 - \frac{a^2}{2} \frac{J_1^2(\tau_m b)}{J_1^2(\tau_m a)} \left[-\frac{2}{\pi \tau_m b} \right]^2 \\
&= \frac{2}{\pi^2 \tau_m^2} \left[1 - \frac{J_1^2(\tau_m b)}{J_1^2(\tau_m a)} \right].
\end{aligned}$$