



**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Aeroespacial**

**MODELAGEM E DINÂMICA DE PLATAFORMA
EXPERIMENTAL DE SATELITES VISANDO O
CONTROLE DA ATITUDE**

**Autor: Patrick Hauschild Lemos Schneiders
Orientador: Luiz Carlos Gadelha de Souza**

**Brasília, DF
2017**



PATRICK HAUSCHILD LEMOS SCHNEIDERS

**MODELAGEM E DINÂMICA DE PLATAFORMA EXPERIMENTAL DE SATELITES
VISANDO O CONTROLE DA ATITUDE**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Orientador: Luiz Carlos Gadelha de Souza, PhD.

**Brasília, DF
2017**

CIP – Catalogação Internacional da Publicação*

Schneiders, Patrick Hauschild Lemos.

Modelagem e Dinâmica de Plataforma Experimental de Satélites visando o Controle da Atitude/Patrick Hauschild Lemos Schneiders. Brasília: UnB, 2017.
92p: il. ; 29,5 cm.

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília
Faculdade do Gama, Brasília, 2017. Orientação: Luiz Carlos Gadelha.

1. Dinâmica de satélites. 2. Controle de Atitude. 3. Simulador de satélite I. Gadelha, Luiz Carlos. II. Modelagem e Dinâmica de Plataforma Experimental de Satélites visando o Controle da Atitude.

CDU Classificação



**MODELAGEM E DINÂMICA DE PLATAFORMA EXPERIMENTAL DE SATELITES
VISANDO O CONTROLE DA ATITUDE**

Patrick Hauschild Lemos Schneiders

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, em __/__/2017, apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

Prof. Dr. Eng. Luiz Carlos Gadelha de Souza, UnB/FGA
Orientador

Prof. Dr. Leonardo Aguayo, UnB/ FGA
Membro Convidado

Prof. Dr. Artem Andrianov, UnB/FGA
Membro Convidado

Brasília, DF
2017

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo apoio incondicional em todas as decisões que tomei no caminho até aqui. Seu carinho e amor formaram a base necessária para que todos os esforços valham a pena.

Aos meus irmãos, por terem caminhado ao meu lado, não deixando que eu fraquejasse em qualquer momento que seja.

Aos meus amigos, que permitiram que eu soubesse como é se sentir especial e acolhido.

Ao meu orientador Prof. Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, que com empenho me ajudou a concretizar esse trabalho de conclusão de curso. A boa dose de confiança e paciência que foram de suma importância para minha chegada até aqui, e aos próximos frutos que serão colhidos.

To the infinity and beyond. (Buzz Lightyear)

RESUMO

Missões espaciais são projetos que envolvem um alto custo, mas que podem gerar lucros de valor ainda mais elevado. Sua complexidade inerente não permite que testes experimentais de seus subsistemas, em particular o Sistema de Controle de Atitude (SCA), sejam realizados facilmente no espaço. Uma solução barata que permite solucionar esse problema são testes experimentais em laboratórios com protótipos - os quais podem ser testados e simulados em condições bem próxima o ambiente espacial. O trabalho aqui proposto tem como principal objetivo a modelagem de um Simulador de Sistemas de Controle de Atitude de Satélites, o que permite a investigação da dinâmica e de técnicas e estratégias de controle do SCA com diferentes configurações. A flexibilidade de tais configurações está associada à modularidade do SCA no que diz respeito ao número e posições de atuadores e sensores. Para o desenvolvimento deste trabalho foi feita uma revisão bibliográfica que destaca os principais projetos de SCA desenvolvidos e adotados por algumas Universidades e Centros de Pesquisas Internacionais. Inicia-se a modelagem do SCA com um equacionamento detalhado da dinâmica e da cinemática não linear de uma plataforma com rotação em três dimensões (3D) e com três rodas de reação como atuadores. As equações geradas são posteriormente linearizadas e usadas para investigar o desempenho de algoritmos que visam controlar a velocidade angular e o deslocamento angular (atitude). Particularmente, aplica-se a técnica de controle LQR (Regulador Linear Quadrático) e, em seguida, a técnica LQG (Linear Quadrático Gaussiano), associado à alocação de polos. Estas estratégias de controle permitiram obter diferentes ganhos, propiciando ao projetista obter as principais condições de controle de modo a satisfazer aos requisitos de desempenho do sistema, tais como, baixa ou alta taxa de amortecimento e redução das oscilações nas respostas dinâmicas do sistema. Investiga-se também a capacidade dos ganhos obtidos com a técnica LQR para o sistema linear controlar o sistema não linear. Nesta investigação observou-se que embora o controlador LQR consiga reduzir as velocidades angulares e a atitude da plataforma, as velocidades angulares das rodas de reação atingem valores muito altos, caracterizando a situação de saturação, uma vez que este controlador tem que vencer os termos não lineares da dinâmica. Por fim, como extensão deste trabalho é sugerido um estudo da dessaturação das rodas de reação por meio de uma lei de controle oriunda da interação de um magneto-torque e o campo magnético da Terra e também através da utilização do arrasto atmosférico.

Palavras-chave: Dinâmica de satélites, Controle de Atitude, Simulador de Satélites.

ABSTRACT

Space missions are projects that involve a high cost, but that can generate profits of even higher value. Its inherent complexity does not allow experimental testing of its subsystems, in particular the Attitude Control System (SCA), to be easily performed in space. An inexpensive solution to reduce this problem is tests in laboratories with prototypes that allows modeling and closely simulate the spatial environment. The work proposed here has as main objective the modeling of a Simulator of Attitudes Control Systems (ACS) of Satellites, which allowed the investigation of the dynamics, techniques and strategies of control of the system with different configurations. The flexibility of such configurations is associated with the modularity of the ACS with respect to the number and positions of actuators and sensors. For the development of this work a bibliographic review was done which highlights the main projects ACS developed and adopted by some Universities and International Research Centers. The Simulator of ACS of satellite is modeled with a detailed analysis of the dynamics and non-linear kinematics of a platform with three-dimensional rotation (3D) and three reaction wheels as actuators. The equations generated are later linearized and used to investigate the performance of algorithms that aim to control angular velocity and attitude. Particularly, the LQR (Quadratic Linear Regulator) control technique is applied, followed by the LQG (Gaussian Quadratic Linear), associated with pole allocation. These control strategies allowed to obtain different gains, allowing the designer to obtain the main control conditions to satisfy the performance requirements of the system, such as low or high damping rate and reduction of oscillations in the dynamic responses of the system. The gains obtained with the LQR technique for the linear system are used to control the nonlinear system. In this investigation, it was observed that although the LQR control laws can reduce the angular velocities and the attitude of the platform, the angular velocities of the reaction wheels reach very high values, which characterizes the saturation situation, since this controller has That overcome the non-linear suits of dynamics. Finally, as an extension of this work, a study of the desaturation of the reaction wheels is suggested by means of a control law using the Earth's magnetic field.

Keywords: Satellites dynamics, attitude control, satellites simulator.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Explorer 1, primeiro satélite dos EUA.....	17
Figura 2 – Telescópio Espacial Hubble	18
Figura 3 – Representação dos 22000 pedaços de detrito que podem ser rastreados da superfície.....	22
Figura 4 – Esquemático de uma plataforma experimental para controle de atitude de satélite.....	23
Figura 5 – Fluxograma modelagem de um processo.....	27
Figura 6 – Vista Superior da Plataforma Experimental.....	30
Figura 7 – Esquemático da plataforma para controle de atitude com três rodas de reação.....	31
Figura 8 – Rodas de reação de 3 eixos.....	32
Figura 9 – Componentes de uma órbita	34
Figura 10 – Diagrama de blocos para um sistema de controle de atitude e orbita. ...	36
Figura 11 – Modelo da configuração da plataforma com as rodas de reação.	37
Figura 12 – Diagrama de Blocos de um Sistema Linear representado no espaço de estados.....	49
Figura 13 - Esquema para controle em malha aberta.....	50
Figura 14 – Esquema para controle em malha fechada.....	50
Figura 15 – Diagrama de blocos para o sistema em malha fechada.....	53
Figura 16 – Valores de K para Q = Identidade.....	56
Figura 17 – Valores de K para Q = 0.1*Identidade.....	56
Figura 18 – Valores de K para Q = 0.01*Identidade.....	56
Figura 19 – Velocidade Angular P para Alocação de Polos.....	60
Figura 20 – Velocidade Angular Q para Alocação de Polos.....	60
Figura 21 – Velocidade Angular R para Alocação de Polos.....	61
Figura 22 – Ângulo ϕ para Alocação de Polos.....	61
Figura 23 – Ângulo θ para Alocação de Polos.....	62
Figura 24 – Ângulo ψ para Alocação de Polos.....	62
Figura 25 – Esforço de controle para a primeira roda de reação considerando os três conjuntos de pólos.....	64
Figura 26 – Esforço de controle para a primeira roda de reação considerando os três conjuntos de pólos.....	64

Figura 27 – Esforço de controle para a terceira roda de reação considerando os três conjuntos de pólos.....	65
Figura 28 – Velocidades Angulares para LQR (Q=Identidade)	66
Figura 29 – Ângulos para LQR (Q=Identidade)	66
Figura 30 – Esforço de controle para o LQR (Q = Identidade)	67
Figura 31 – Velocidades Angulares para LQR (Q=0.1*Identidade)	68
Figura 32 – Ângulos para LQR (Q=0.1*Identidade)	68
Figura 33 – Esforço de controle para o LQR (Q = 0.1*Identidade)	69
Figura 34 – Velocidades Angulares para LQR (Q=0.01*Identidade)	70
Figura 35 – Ângulos para LQR (Q=0.01*Identidade)	70
Figura 36 – Esforço de controle para o LQR (Q = 0.1*Identidade)	71
Figura 37 – Valores de K para Q = Identidade.....	73
Figura 38 – Valores de K para Q = 0.1*Identidade.....	73
Figura 39 – Valores de K para Q = 0.01*Identidade.....	73
Figura 40 – Velocidades Angulares para os ganhos encontrados quando Q = 1 no LQR.....	74
Figura 41 – Ângulos de Euler para os ganhos encontrados quando Q = 1 no LQR.....	74
Figura 42 – Esforços de controle para os ganhos encontrados quando Q = 1 no LQR.....	75
Figura 43 – Velocidades Angulares para os ganhos encontrados quando Q = 0.1 no LQR.....	76
Figura 44 – Ângulos de Euler para os ganhos encontrados quando Q = 0.1 no LQR.....	76
Figura 45 – Esforços de controle para os ganhos encontrados quando Q = 0.1 no LQR.....	77
Figura 46 – Velocidades Angulares para os ganhos encontrados quando Q = 0.01 no LQR	77
Figura 47 – Ângulos de Euler para os ganhos encontrados quando Q = 0.01 no LQR.....	78
Figura 48 – Esforços de controle para os ganhos encontrados quando Q = 0.01 no LQR.....	78

Figura 49 – Velocidade das Rodas de Reação para os ganhos encontrados quando $Q = 1$ no LQR.....	79
Figura 50 – Velocidade das Rodas de Reação para os ganhos encontrados quando $Q = 0.1$ no QR.....	80
Figura 51 – Velocidade das Rodas de Reação para os ganhos encontrados quando $Q = 0.01$ no LQR.....	80
Figura 52 – Satélite com dois atuadores associados, as rodas de reação e o “magnetorquer”.....	82
Figura 53 – Estimador de estados para os três primeiros estados.....	84
Figura 54 – Estimador de estados para os três últimos estados.....	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Satélites operacionais em orbita (Fonte: Union Concerned Scientists)...	19
Tabela 2 – Estimativa de custos por libra para lançamento a órbitas geoestacionárias. (Fonte: Site Illumin – University of Southern Califórnia)	20

LISTA DE SÍMBOLOS

x, y, z – Sistema de coordenadas da plataforma.

x_1, y_1, z_1 – Sistema de coordenadas de cada roda de reação (respectivamente roda de reação 1, roda de reação 2 e roda de reação 3, dependendo do número subscrito).

φ, θ, ψ – Ângulos de Euler.

p, q, r – Componentes da velocidade de rotação da plataforma.

I_1, I_2, I_3 – Momentos de inércia das rodas de reação.

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – Momentos de inércia da plataforma.

$\vec{R}_{1,2,3}$ – Posição dos centros de massa das rodas de reação.

$\vec{\rho}_{1,2,3}$ – Posição dos elementos de massa em relação a cada sistema de coordenadas das rodas de reação.

\vec{W} – Velocidade angular absoluta da plataforma.

\vec{w}_1, \vec{w}_2 e \vec{w}_3 – Velocidade angular de cada roda de reação com relação ao sistema de coordenadas da plataforma.

\vec{H} – Momento angular da plataforma.

\vec{v} – Velocidade absoluta de cada elemento de massa infinitesimal.

$\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ – Momento angular das rodas de reação.

\vec{r}_{cg} – Posição do centro de massa da plataforma em relação ao sistema de coordenadas fixo.

$(X, Y, Z)_{Terra}$ – Sistema de coordenadas inercial, referente ao sistema de coordenadas fixo no planeta Terra.

\vec{g} – Componente do sistema de coordenadas que aponta no sentido e direção ao centro de gravidade da Terra.

$\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dot{Q}_3$ – Movimento relacionado as rodas de reação.

T_1, T_2 e T_3 – Torques gerados pelas rodas de reação.

R_{321} – Matriz de rotação 3-2-1 dos ângulos de Euler.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	16
1.1.CONTEXTUALIZAÇÃO DO ASSUNTO.....	16
1.2.OBJETIVO DO TRABALHO.....	24
1.2.1. Objetivo principal	24
1.2.2. Objetivos específicos.....	24
1.3.ESTRUTURA DO TRABALHO	25
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26
2.1.MODELAGEM E SIMULAÇÃO	26
2.1.1. Conceitos básicos de modelagem e simulação	26
2.2.MODELAGEM DE SATELITES	29
2.2.1. Componentes Satélite.....	29
2.2.2. Orbita e Atitude.....	32
2.3.MODELO MATEMÁTICO	36
3. SISTEMAS DE CONTROLE.....	48
3.1.TEORIA DE CONTROLE MODERNO	48
3.1.1. Variáveis de Estado.....	48
3.1.2. Controlabilidade	49
3.1.3. Malha Aberta e Malha Fechada	49
3.2.ALOCAÇÃO DE POLOS.....	51
3.3.REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	54
3.4.CONTROLADOR LINEAR QUADRATICO GAUSSIANO	57
4. SIMULAÇÃO	58
4.1.RESULTADOS PARA ALOCAÇÃO DE POLOS.....	60
4.2.RESULTADOS PARA REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	66
4.3.RESULTADOS PARA SISTEMA NÃO LINEAR.....	72
4.4.RESULTADOS PARA ESTIMADOR DE ESTADOS.....	83
5. CONTRIBUIÇÕES E CONCLUSÕES	86
6. TRABALHOS FUTUROS	88
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO DO ASSUNTO

*“A cura para o tédio é a curiosidade. Não existe cura para a curiosidade.”
Ellen Parr.*

O universo é encoberto de mistérios e isso sempre fascinou a humanidade. Pensando a partir desse ponto, o homem começou a buscar soluções para os questionamentos que surgiam e ainda surgem a todo o momento. Foi essa busca incessante de respostas, que fez com que a humanidade se interessasse pelas estrelas. A esse interesse pelas estrelas e demais mistérios do universo, dá-se o nome de Astronomia (AABOE, 2001).

Sabe-se que a astronomia tem sua origem em períodos tão antigos quanto à própria origem do homem. Desde muito antes de se pensar em satélites ou veículos lançadores, o céu tem sido a base de calendários, mapas e relógios. Os primeiros astrônomos utilizavam-se de ferramentas pré-históricas para calcular a posição das estrelas, e dessa forma conseguir determinar o que viriam a ser as estações do ano (AABOE, 2001). Foi através dessas ferramentas pré-históricas que o homem rudimentar conseguiu desenvolver um sistema de agricultura que permitiu sua sobrevivência, perpetuação e desenvolvimento da espécie humana.

O desenvolvimento tecnológico ao longo da história permitiu descobertas astronômicas que mudaram os rumos da ciência da época, cientistas como Galileu Galilei, Nicolau Copérnico e Johannes Kepler mostraram resultados que são relevantes e usados séculos após séculos nas descobertas feitas.

A fonte de mistérios e estórias envoltas no universo permite ao mundo do século XXI, ser o que é, proporcionando a utilização dos céus para incentivar a globalização, diminuindo distâncias, ampliando as telecomunicações, transmitindo dados, analisando regiões, proporcionando uma infinidade de funções. O principal elemento e talvez o agente protagonista destes feitos é o satélite artificial (WALKER, 2010).

Motivado pelo Ano Internacional da Geofísica, onde cientistas de todo o mundo se organizaram para observação de vários fenômenos científicos, em outubro de 1957, a antiga União Soviética (URSS) foi capaz de enviar ao espaço o Satélite Sputnik, este satélite consistia de uma pequena esfera com um rádio

transmissor, que apesar do pequeno tamanho revolucionou o meio científico, que ficou impressionado com a capacidade da URSS na época (ROMANO, 2005).

O satélite Sputnik tornou-se motivacional para a Explorer 1, o primeiro satélite construído pelos Estados Unidos da América que entrou em órbita em janeiro de 1958. Apesar de simples, o satélite era capaz de enviar dados sobre o comportamento da radiação logo acima da superfície terrestre, originando a famosa “corrida espacial” entre URSS e Estados Unidos (ROMANO, 2005).



Figura 1 - Explorer 1, primeiro satélite americano. (Fonte: NASA JPL).¹

Em quase 60 anos desde o primeiro satélite artificial, houve um avanço tecnológico que permitiu um aumento significativo tanto em complexidade quanto em funções exercidas pelas estruturas aeroespaciais.

Seguindo essa linha de raciocínio o Telescópio Espacial Hubble (TEH), lançado em 1990 foi fruto de um esforço conjunto entre a agência espacial americana (NASA) e a agência espacial europeia (ESA). Lançado em uma órbita a 569 km, o TEH foi responsável por observações astronômicas em alta resolução, o que possibilitou ausências de distorções atmosféricas. Entretanto, o TEH quase se tornou um fracasso completo, pois poucos meses após ser colocado em órbita notou-se uma aberração esférica grave no espelho principal do telescópio (NASA, 2015).

¹Disponível em: <http://www.jpl.nasa.gov/jplhistory/early/firstsatellites.php>. Acesso em maio 2015.

A análise das imagens borradas enviadas pelo TEH mostrou que a causa do problema era devida ao espelho principal que tinha sido construído com uma forma errada, mesmo que provavelmente tenha sido o espelho mais precisamente construído de todos os tempos: com variações de apenas 10 nanômetros a partir da curva prevista, plano nas bordas em cerca de 2.200 nanômetros (NASA,2012).



Figura 2 - Telescópio Espacial Hubble (Fonte: NASA).²

Com a utilização cada vez mais comum de satélites artificiais, uma nova expressão deu início à comercialização do espaço. O termo se refere à utilização de equipamentos no espaço a fim de produzir bens e serviços com determinado valor comercial. O primeiro satélite de uso comercial foi o Telstar 1, lançado em 1962 com o objetivo de transmitir sinais de televisão através do oceano Atlântico. (ROMANO, 2005).

Até 2004, o investimento mundial nos setores espaciais era estimado em 50.8 bilhões de dólares. Segundo Romano (2005), a indústria aeroespacial consiste em três setores, sendo eles:

Setor de Segurança Nacional: fornece sistemas espaciais capazes de auxiliar diretamente as forças armadas e a inteligência, suas capacidades incluem comunicação, navegação, condições climáticas, aviso de mísseis.

Setor Civil: responsável pela condução de explorações, ciências astronômicas, experimentos científicos, e outras pesquisas e desenvolvimentos de

²Disponível em: <http://spaceflight.nasa.gov/gallery/images/shuttle/sts-82/html/s82e5937.html>. Acesso em maio 2015.

missões não militares. No Brasil, o órgão responsável por esse setor é a Agência Espacial Brasileira (AEB).

Setor Comercial: executa a construção de satélites, foguetes e sistemas de suporte em operações aeroespaciais, providenciando serviços ao governo e a clientes comerciais. A economia globalmente integrada é dependente das capacidades no espaço comercial para atingir seu crescimento econômico, tendo como exemplo os celulares, televisão por satélite e navegação. Embora seja dominada por companhias particulares, alguns órgãos governamentais são responsáveis por subsídios dentro dessa área.

A tabela abaixo apresenta números atualizados até agosto de 2015 e é possível observar como está a divisão dos satélites em órbita hoje. Pode-se destacar o alto número de satélites em órbitas baixas (Low Earth Orbit – LEO) e em órbitas geoestacionárias (Geostationary Earth Orbit – GEO).

Satellite Quick Facts <i>(includes launches through 8/31/15)</i>			
Total number of operating satellites: 1,305			
United States: 549	Russia: 131	China: 142	Other: 483
LEO: 696	MEO: 87	Elliptical: 41	GEO: 481
Total number of U.S. satellites: 549			
Civil: 21	Commercial: 250	Government: 126	Military: 152

Tabela 1 – Satélites operacionais em órbita (Fonte: Union Concerned Scientists).³

A partir dos investimentos feitos, os satélites têm se tornado cada vez mais complexos, o que impõe uma redução em erros de projetos, construção e transporte de satélites. Dentro desta perspectiva, o custo para envio de um satélite artificial pode atingir valores substanciais. Observa-se que custos de lançamento, apesar de ainda serem altos, caíram de aproximadamente \$18000 para \$11800 libras na última década, fato que ocorreu especialmente pela intervenção de companhias espaciais privadas (GENDOTTI, 2012).

³Disponível em: http://www.ucsusa.org/nuclear-weapons/space-weapons/satellite-database.html#.Vkkoh_mrTIU. Acesso em outubro 2015.

Para Elon Musk (2004), CEO da Space Technologies Exploration (SPACEx), na próxima década será possível atingir preços de \$500 por libra ou até menos para lançamentos espaciais.

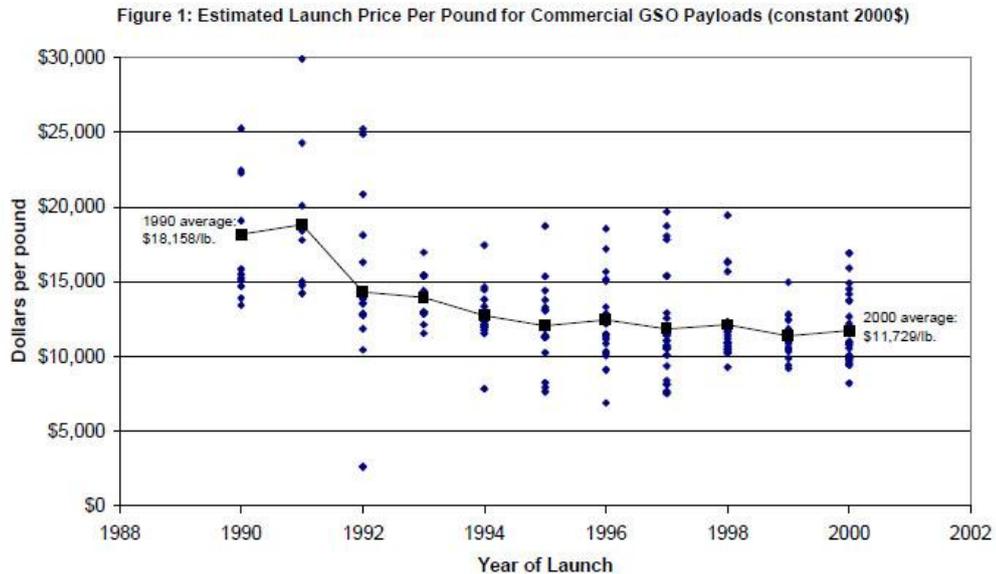


Tabela 2 – Estimativa de custos por libra para lançamento a órbitas geoestacionárias. (Fonte: Site Illumin – University of Southern Califórnia).⁴

Missões de reparo e atualização de um satélite artificial em órbita foram unicamente realizadas no caso do Telescópio Hubble, o que elevou consideravelmente o custo envolvido na missão inicial. No caso do Hubble, cinco missões de reparo e atualização foram necessárias para permitir o aumento na sua vida útil. O sucessor do telescópio Hubble será provavelmente o James Webb Telescópio Espacial, com previsão de lançamento em 2018 e que já custou aos cofres de NASA e ESA o equivalente a 8.8 bilhões de dólares até o ano de 2013 (BBC, 2013).

Para a empresa Globalcom (GENDATTI, 2012), o custo de um satélite não se limita apenas aos gastos com lançamento, mas também com seus projetos, construção e monitoramento, levando então um satélite a custar muito dinheiro.

Um satélite capaz de monitorar e perseguir furacões, por exemplo, tem preço por volta de 290 milhões de dólares. Já um satélite com tecnologia antimíssil (*missile-warning device*) pode chegar aos 400 milhões de dólares. Todo o material utilizado, bem como os equipamentos dentro da estrutura de um satélite precisam

⁴Disponível em: <https://illumin.usc.edu/257/space-based-solar-power-a-new-path-towards-sustainable-clean-energy/>. Acesso em outubro 2015.

ser otimizados e manufaturados de forma precisa para evitar defeitos como o do Hubble. Outro dado de interesse diz respeito a missões tripuladas, que podem atingir a cifra dos 500 milhões de dólares (GLOBALCOM, 2015).

Com um investimento tão alto, o esperado é que o satélite possa operar pelo máximo de tempo possível, produzindo resultados satisfatórios. Além de toda perturbação que uma órbita pode sofrer com os efeitos de gravidade, arrasto, pressão solar; um dos fatores que não é estimado são os detritos espaciais. O lixo espacial (outro nome que se dá ao acúmulo dos detritos) é composto por restos de foguetes e satélites fora de uso que vão circundando a órbita terrestre (ZOLFAGHARIFARD, 2013).

Sabe-se que em 2013, eram estimados cerca de 22.000 pedaços de detritos capazes de serem rastreados por bases na superfície terrestre (ZOLFAGHARIFARD, 2013). Existem outros pequenos pedaços de lixo espacial de menor proporção, totalizando cerca de 370.000 pedaços de lixo orbitando nosso planeta, sendo que alguns deles conseguem atingir velocidade de até 35.000 quilômetros/hora. Apesar de, por definição, serem apenas lixo, tais detritos têm se tornado um obstáculo para novos satélites em funcionamento (ZOLFAGHARIFARD, 2013).

Com um número de detritos tão grande colisões podem ocorrer, algumas intencionais enquanto outras são acidentais. A primeira colisão acidental de dois satélites inteiros se deu em 2009, entre o satélite desativado russo Kosmos-2251 e o ainda funcional satélite Iridium 33. A colisão ocorreu a uma velocidade acima dos 40.000 km/h, destruindo ambas as estruturas aeroespaciais (BBC, 2013). Algumas outras colisões já ocorreram, principalmente entre algum tipo de detrito e um satélite operante, tais como (BBC,2013):

- Colisão entre o satélite de reconhecimento francês Cerise e detritos de um foguete Ariane, em 1996.
- Colisão entre detritos do satélite Fungyun FY-1C e o nano-satelite russo BLITS em 2013.
- Colisão entre dois CubeSats: NEE-01 Pegaso (Equador) e o CubeBug-1 (Argentina), também em 2013.

Alguns países, tomando consciência dos prejuízos que podem ocorrer devido colisões desses tipos, começaram a fazer investimentos a fim de minimizar esses

danos. Um exemplo de colisão de grande impacto para o país, foi o caso do Equador que investiu cerca de 700 mil dólares no CubeSat Pegasus, pesando apenas 1.2 quilogramas, seu primeiro e único satélite em órbita (BBC, 2013).



Figura 3 – Representação dos 22.000 pedaços de detritos que podem ser rastreados da superfície. (Fonte: DailyMail).⁵

Dessa ótica, tem-se uma necessidade da utilização de sistemas de controle capazes de responder bem ao ambiente externo no qual o satélite estará localizado, de forma a evitar colisões e ao mesmo tempo permitir o completo funcionamento para o qual o satélite foi projetado. Visando uma solução de custo mais baixo, e com resultados próximos a realidade, uma excelente alternativa é a modelagem computacional e posteriormente a utilização de uma plataforma experimental para avaliar os efeitos dos sensores e atuadores num ambiente com condições próximas a realidade do artefato espacial.

O que se propõe então é a análise simplificada da dinâmica de um satélite, principalmente em fatores relacionados ao controle de sua atitude. Dessa forma, pode-se criar um modelo matemático que seja capaz de expressar a dinâmica a qual o satélite estará sob efeito. Para tal considerou-se uma base com os componentes

⁵Disponível em:<http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-2523271/Image-reveals-disused-rockets-abandoned-satellites-orbit-Earth.html>. Acesso em outubro 2015.

do satélite, como pode ser visto na figura abaixo, e que será melhor descrita no desenvolvimento desse trabalho.

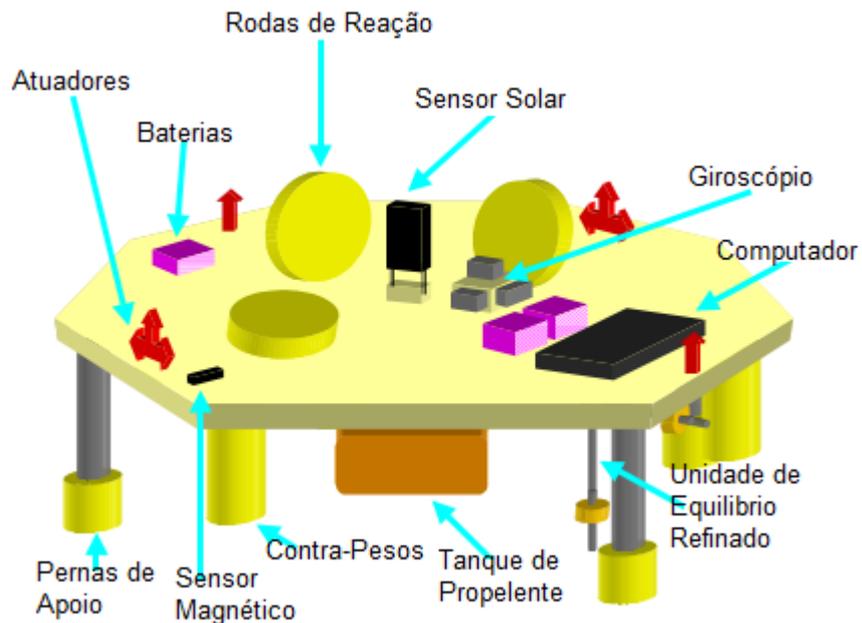


Figura 4 - Esquemático de uma plataforma experimental para controle de atitude de satélite (Fonte: Chernesky, 2001).

Como pode ser visto na figura acima, o modelo que será analisado é uma plataforma que irá receber os diversos componentes de um satélite. Além disso, para recriar o ambiente mais próximo ao da órbita, busca-se sua movimentação através de suporte sem atrito. O foco aqui não está na construção da plataforma, e sim na análise das equações que irão adequar seu movimento. Com elas, foi possível obter um software capaz de simular de forma inicial a atitude do satélite. Da imagem, pode-se destacar os vários dispositivos presentes em um satélite e que serão dessa forma simulados: baterias, computadores, atuadores, sensores, entre uma outra infinidade de dispositivos que podem ser anexados.

1.2. OBJETIVO DO TRABALHO

1.2.1. Objetivo principal

O sucesso de uma missão espacial está diretamente relacionado com o conhecimento prévio das características orbitais, como ponto de injeção, janela de lançamento e inclinação, bem como do desempenho dos vários subsistemas embarcados, que são responsáveis pelas tarefas a serem realizadas pelo satélite, em particular, o desempenho do Sistema de Controle de Atitude (SCA).

Nesse contexto, esse trabalho tem como principal objetivo, o desenvolvimento de um Simulador do SCA de satélite em 3D, que permita investigar sua dinâmica e testar o desempenho dos algoritmos de controle por meio de simulações.

1.2.2. Objetivos específicos

- Realizar um estudo bibliográfico de SCA de satélites experimental;
- Analisar os componentes e as configurações do SCA de satélites artificiais;
- Desenvolver as equações de um simulador do SCA de satélites em 3D;
- Usar as equações do simulador para investigar as características dinâmicas;
- Utilizar as equações do simulador para projetar o SCA e investigar o seu desempenho para diferentes estratégias de controle disponíveis na literatura.

1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO

De forma a tornar mais clara a divisão do trabalho, optou-se por dividir a revisão bibliográfica em três partes principais: 2.1 Modelagem e Simulação, que consiste na definição de forma sucinta dos conceitos importantes que serão utilizados ao longo do texto; 2.2 Modelagem de Satélites, área onde se procurou caracterizar componentes do satélite e 2.3 Desenvolvimento do equacionamento do modelo matemático envolvido na dinâmica do satélite.

Posteriormente, buscou-se realizar um breve resumo da teoria de sistemas de controle moderno, buscando evidenciar todos os parâmetros aqui analisados. Além de definir as estratégias de controle que aqui serão utilizadas: 3.2 Alocação de Polos, 3.3 Regulador linear quadrático e por fim 3.4 Controlador Linear Quadrático Gaussiano. Também foi implementado o controle para o sistema não linear obtido, visando resultados mais próximos da realidade. Ao final, apresentam-se todos os resultados obtidos com a simulação computacional, divididos para cada estratégia de controle, assim como breve discussão dos resultados obtidos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. MODELAGEM E SIMULAÇÃO

A necessidade de contenção de despesas tem introduzido na indústria a tendência para realização de processos fortemente integrados. No âmbito destes processos, as validades de suas integrações e suas operabilidades práticas requerem a simulação de toda a planta com uso de modelos rigorosos. Em outras palavras: a tendência da indústria é de tornar processos cada vez mais integrados, e umas das opções existentes visando diminuir gastos é a simulação de todos esses processos conectados (SECCHI, 1995).

Quanto mais complexo um processo, existirá uma necessidade maior de técnicas de análise dos problemas associados com o projeto e sua operação. Análises modernas de processos envolvem modelos matemáticos, seguindo o raciocínio de quanto mais complexo e rigoroso um processo o conjunto de equações resultantes será maior e de maior dificuldade o seu tratamento (equações não lineares, por exemplo); e naturalmente, irão existir diversos modelos matemáticos que conseguem resolver um mesmo sistema, cada um finamente ajustado para determinar certa condição no projeto, portanto, a determinação do grau de detalhe depende do problema a ser resolvido e de dados disponíveis (SECCHI, 1995).

2.1.1 Conceitos básicos de modelagem e simulação

Segundo Secchi, (1995) existem certos conceitos e definições utilizadas no ambiente da simulação e modelagem, para um melhor entendimento da continuação do trabalho é necessária uma breve apresentação:

- **Processo:** arranjo de unidades de operação integradas entre si de uma maneira racional e sistemática;
- **Modelo:** descrição matemática de processos;
- **Modelos Matemáticos:** leis fundamentais;
- **Variável:** símbolo matemático;
- **Variável de estado:** descreve o comportamento do sistema;
- **Parâmetro:** uma propriedade do processo ou do seu ambiente, que pode assumir um valor conhecido ou ser estimado;
- **Condição inicial:** estado inicial do processo;

- **Condições de contorno:** delimitação do processo (restrição em algumas variáveis).

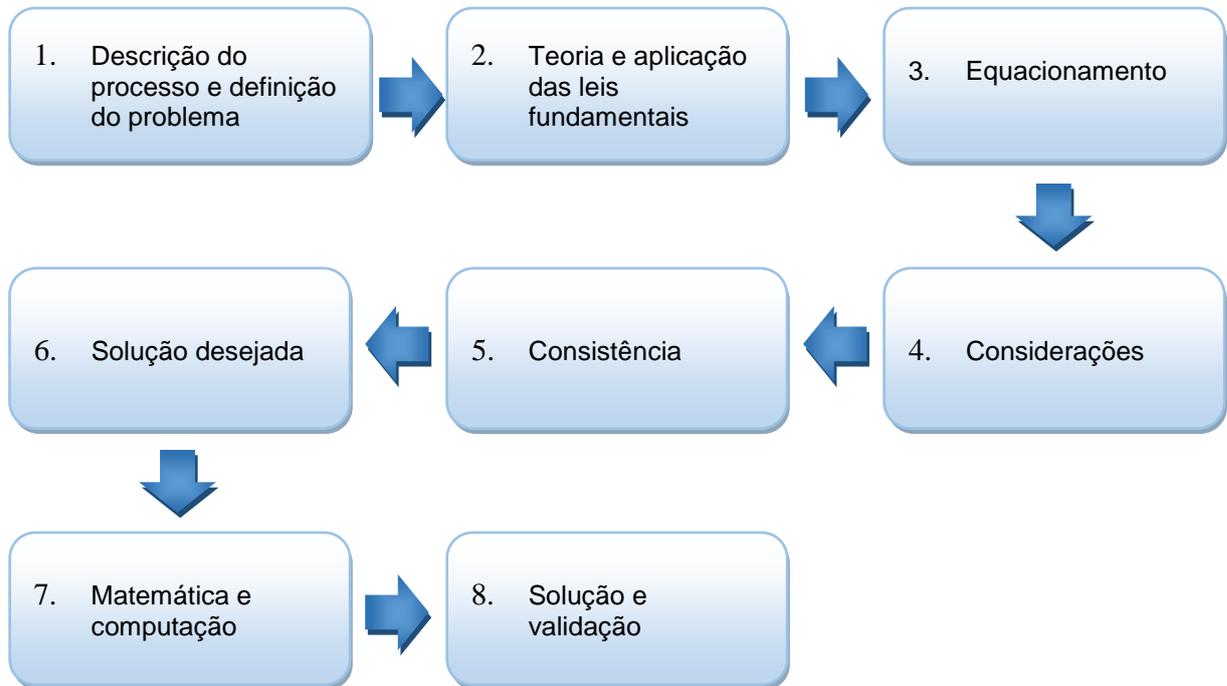


Figura 5 – Fluxograma de modelagem de um processo.

No contexto de uma modelagem de um processo, pode-se dividir em etapas a serem seguidas (SECCHI, 1995):

Descrição do processo e definição do problema: considera-se como parte importante para análise de um processo além do conhecimento dos fenômenos envolvidos, as suas causas e efeitos, mesmo que não seja possível estabelecer regras para a definição do problema.

Teoria e aplicação das leis fundamentais: a partir do momento que se entende o processo, é possível definir uma teoria que irá governar os seus fenômenos. Em geral as teorias estão disponíveis em diversas fontes (publicadas ou não), porém, existem casos isolados onde não se existe uma teoria disponível. Nestes casos procura-se postular uma ou várias teorias e testá-las mais tarde comparando a solução do modelo matemático com os resultados experimentais.

Equacionamento: descrição de uma teoria em simbologia matemática.

Considerações: o julgamento que é realizado em relação às considerações a serem feitas é talvez o papel mais importante do engenheiro na modelagem. Um modelo extremamente rigoroso que incluem detalhes microscópicos de cada fenômeno é tão complexo que tomará um longo tempo para o seu desenvolvimento, podendo até ser intratável com os recursos atuais. Deste modo deve-se ter um compromisso entre a rigorosa descrição, até alcançar uma resposta suficientemente boa. Portanto, as considerações feitas devem ser listadas e analisadas cuidadosamente para assegurar que qualquer termo omitido é de fato insignificante durante toda a simulação do processo, se os mesmos não impõem limitações no modelo que deve se ter em mente ao buscar valores preditos. Deste modo frequentemente é possível eliminar equações por inteiro pelo simples fato de desprezar pequenas flutuações em certas variáveis intermediárias. Como resultado das considerações tem-se um conjunto menos complexo de equações a serem resolvidas.

Consistência: consiste em checar se o número de equações é igual ao número de variáveis a determinar (ou grau de liberdade igual a zero). Esta é uma tarefa importante para confirmar a consistência matemática do modelo. Para sistemas complexos e grandes, caso isto não aconteça, corre-se o risco de o sistema estar sub-especificado ou sobre especificado e até mesmo errado com a formulação do problema. Outra verificação que também se faz importante dentro deste tópico é a da consistência das unidades de medida de todos termos envolvidos nas equações.

Solução desejada: fazer a consideração das soluções requeridas do modelo é um passo necessário antes de suas obtenções propriamente ditas. Uma lista de vários casos requeridos e a informação que é esperada em cada caso podem revelar possíveis situações redundantes, auxiliando na etapa de simulação.

Matemática e computação: a natureza das equações do modelo é que determina o método a ser selecionado para obtenção da solução, seja ele analítico, numérico ou por inspeção. Embora exista uma variedade de métodos para a solução de um determinado conjunto de equações, deve se ter uma noção básica sobre a adequabilidade de cada método em função das características do problema a ser

resolvido; por exemplo, se um sistema de equações diferenciais ordinárias devem ser integradas através de métodos implícitos ou explícitos.

Solução e validação: o estudo e verificação das soluções obtidas do modelo matemático através de comparações com dados experimentais ou julgamentos de engenharia são considerados a última fase do desenvolvimento de modelos de um processo, nesta etapa qualquer solução não esperada deve ser racionalizada para assegurar que não ocorreram erros de computação.

2.2 MODELAGEM DE SATELITES

2.2.1 Componentes do Satélite

No caso analisado, como forma de obter todo o equacionamento matemático que descreverá de forma mais correta a dinâmica da plataforma, é preciso dimensionar como será a plataforma por si só: formato e componentes instalados. Nesse sentido, o Simulador de Sistemas de Controle de Atitude de Satélites (SSCAS) consistirá de uma plataforma em formato discoide suportada por um mancal a ar. Tal equipamento permitirá revoluções em torno de seu eixo vertical (eixo z) em ambiente sem atrito, ou o mais próximo disso possível. Existe a necessidade de tornar tais movimentos sem atrito, pois é a condição mais próxima de um ambiente parecido com a órbita que um satélite artificial estará sujeito ao longo de sua vida útil.

A figura abaixo apresenta de forma prática o que é buscado no que tange a construção de uma plataforma experimental, recordando que no presente trabalho, a construção da base não será feita.

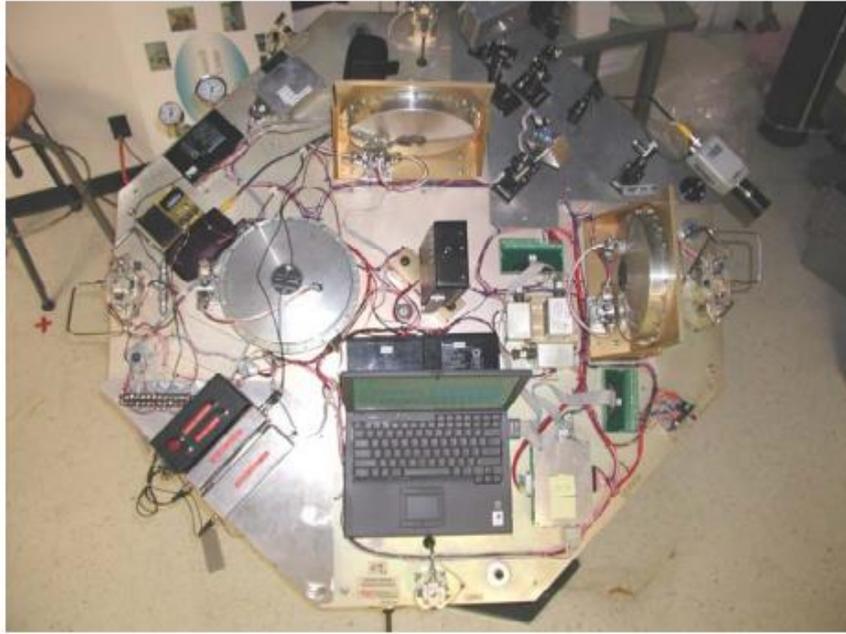


Figura 6 - Vista Superior da Plataforma Experimental. (Fonte: Chernesky, 2001).

A plataforma em formato de disco pode suportar diversos equipamentos em sua superfície, como os componentes do sistema de controle de atitude com suas interfaces e conexões. Outros equipamentos que podem ser considerados são: sensores, atuadores, baterias, computadores. Nesse caso inicial serão considerados um giroscópio e as rodas de reação na base da plataforma simuladora.

A figura abaixo representa um satélite com três rodas de reação, o que será buscado nesse presente trabalho. Da figura, nota-se que os componentes 11, 12 e 13 representam as rodas de reação fixas aos eixos da plataforma (HOLMES, 2001).

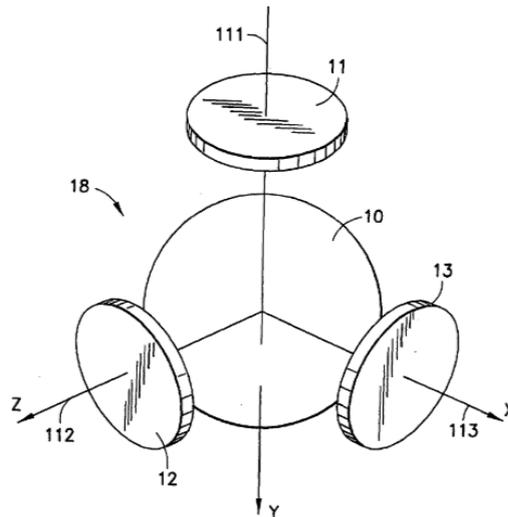


Figura 7 - Esquemático da plataforma para controle de atitude com três rodas de reação. (Fonte: <http://www.google.com/patents/EP1114774A2?cl=en>).

As rodas de reação são usadas por estruturas aeroespaciais no intuito de realizar o controle de atitude sem usar combustível ou outro tipo de reação, são acionadas por motores elétricos. São extremamente úteis quando consideradas rotações de pequenos valores, tais como as usadas para manter um satélite apontado para uma estrela (NASA, 2001). São atuadores que exploram a lei de conservação de momento angular: quando a velocidade de rotação é alterada, causa ao satélite uma reação de girar no sentido contrário proporcionalmente, para aplicar torque sobre o corpo do satélite e vice-versa (FILHO, 2006). Rodas de reação são capazes apenas de rotacionar um dispositivo ao redor de seu centro de massa, não conseguindo mover a estrutura de uma região à outra.

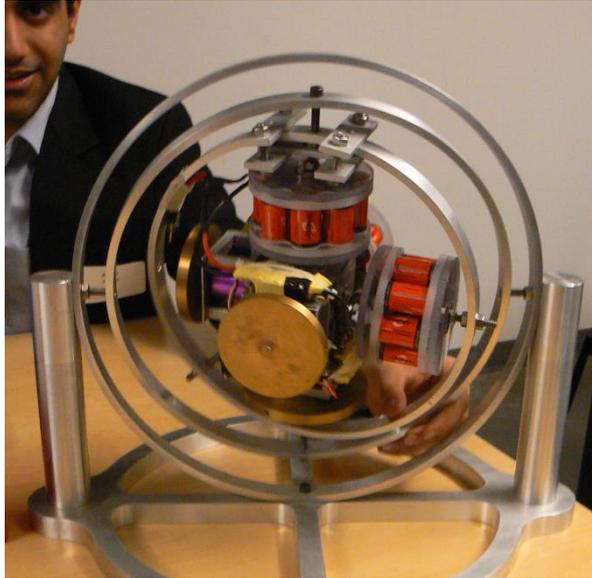


Figura 8 - Rodas de reação de 3 eixos. (Fonte: The University of British Columbia).⁶

Outro dispositivo de extrema importância a ser destacado é o giroscópio, sensor capaz de medir a velocidade angular do corpo do satélite em relação a um sistema de coordenadas inercial. O conjunto de roda de reação e giroscópio pode ser usado num sistema de controle em malha fechada para controlar a velocidade angular de eixo vertical da plataforma (FILHO, 2006). Para uma plataforma com três graus de liberdade, como na figura acima uma montagem possível utiliza três rodas de reação.

2.2.2 Órbita e Atitude

Como vimos até aqui aplicações de simulações são muito comuns para sistemas de controle de veículos espaciais. O controlador pode pertencer ao subsistema de controle de atitude e órbita (KANG et al., 1995). Portanto, o conhecimento da órbita de um satélite artificial é fundamental para o sucesso da missão a qual ele se destina, sendo tão importante quanto o conhecimento da atitude. Essencialmente diferentes são estas determinações. Enquanto que a primeira se refere ao movimento translacional do centro de massa, a segunda refere-

⁶Disponível em:http://teams.engineering.ubc.ca/events/event-showcase/2014_01_22_engteamshowcase_me-091/. Acesso em outubro 2015.

se ao movimento rotacional em torno do centro de massa, ambos de um corpo (SILVA, 2005)

Em termos de precisão, tanto para determinação de órbita quanto para de atitude, são necessárias as observações adquiridas por meio de instrumentos de medidas sujeitos a erros, tais como: de alinhamento e de modelagem. Não obstante, outras fontes de erros também são relevantes em tais determinações, como por exemplo, os métodos matemáticos de determinação (SILVA, 2005).

Como foi visto acima, a determinação de órbita é um processo para o conhecimento da magnitude, forma, orientação e posição num dado instante; que se refere à trajetória de um satélite artificial no espaço. Este processo envolve tarefas que vão desde a modelagem das acelerações agentes no satélite, passando pela escolha dos métodos de propagação, até o processamento de medidas para levantamento dos resultados para gerar-se os conhecimentos, com relação a órbita do satélite (KUGA et al, 2001).

Segundo Prado (2001), imediatamente após a colocação de um satélite em órbita da Terra, faz-se necessário observar a sua evolução observando suas tarefas, tais como: previsões de passagens (para apontamento de antenas parabólicas para telemetria e telecomando), rastreamento, manobras orbitais, etc.

Na ausência de perturbações o movimento de um satélite artificial é descrito somente pela força da atração gravitacional entre dois corpos, ou seja, isento de quaisquer outras acelerações. Desse modo o plano da sua órbita encontra-se permanentemente fixo em relação a um referencial inercial. Porém, um referencial inercial é somente uma idealização (ESCOBAL, 1965).

O movimento de um corpo, no caso um satélite artificial em torno de outro (neste caso a Terra) no espaço, é modelado pela lei da gravitação universal ou lei do inverso quadrado (por Isaac Newton, 1687), de modo que o movimento do corpo descreve sua trajetória (ou órbita) nos domínios de uma seção cônica em torno do corpo central, que ocupa o ponto fixo, e que associado a uma reta fixa definem a métrica dessa cônica; simplesmente denominados foco e diretriz, respectivamente. O resultado relativo à trajetória deve-se a Johannes Kepler, o descobridor das três leis do movimento planetário (ESCOBAL, 1965).

Segundo Larson e Wertz (1992), os satélites artificiais descrevem órbitas elípticas em torno da terra e estas são definidas por parâmetros conhecidos por elementos orbitais, como se vê na figura abaixo.

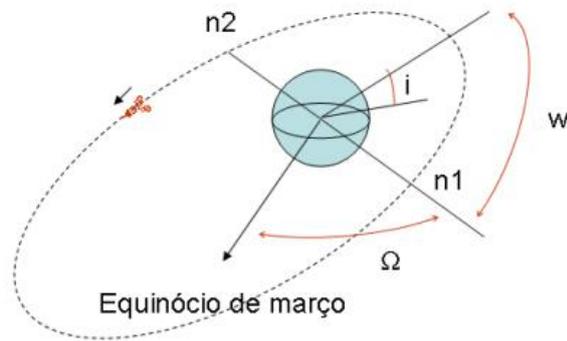


Figura 9 - Componentes de uma órbita. (Fonte: HOFFMANN, 2009).

- Semi-eixo maior (a): é metade do eixo maior de uma elipse;
- Excentricidade (E): da elipse;
- Inclinação (i): é a distância angular entre o plano da órbita do satélite e o plano do equador. Para uma inclinação diferente de zero, existem dois pontos na órbita em que o satélite cruza o plano equatorial. Esses pontos são chamados de nodo ascendente n1 (quando a direção do movimento se dá do Sul para o norte) e nodo descendente n2 (quando a direção do movimento se dá do Norte para o sul);
- Argumento do perigeu (w): é a distância angular entre o perigeu e o nodo ascendente;
- Longitude do nodo ascendente (Ω): é a distância angular do nodo ascendente com o equinócio de março;
- Anomalia verdadeira (v): o ângulo que a posição do satélite faz com o perigeu.

Porém, para dar continuidade a este trabalho, apenas o controle de atitude será abordado, onde se tem que a atitude de um satélite nada mais que a sua orientação no espaço.

Para Souza (2011), atualmente se sabe que o movimento de um satélite rígido possui 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações) e é normalmente modelado por meio de 12 variáveis de estado. Sendo elas:

- Movimento de translação do centro de massa: 3 Posições + 3 Velocidades lineares.

- Movimento de rotação em torno do centro de massa: 3 Ângulos + 3 Velocidades angulares.

Portanto, a determinação de atitude é um processo de cálculo da orientação de um satélite artificial em relação a um referencial inercial, por meio das observações realizadas por sensores (SOUZA, 2011). É necessário conhecer a atitude de um satélite para orientá-lo corretamente no espaço. As observações obtidas pelos sensores formam a base necessária para a determinação deste critério, que podem ser feitas por métodos determinísticos ou não determinísticos. Dentre estes últimos, destacam-se o estimador de Mínimos Quadrados e o filtro de Kalman (HOFFMANN, 2009).

Uma modelagem da dinâmica de atitude que melhor represente a realidade do movimento rotacional de um satélite artificial no espaço deve incluir os efeitos de torques externos que perturbam o momento angular deste satélite, tais como: gradiente de gravidade, pressão de radiação solar, campo geomagnético, pressão aerodinâmica e os impactos de meteoritos (HOFFMANN, 2009).

A grande maioria dos satélites em órbita utiliza um sistema de controle dito embarcado, pelo qual a determinação e o controle da atitude são realizados de forma autônoma e independente por uma eletrônica (geralmente baseada em microcomputadores) a bordo da espaçonave. Manobras de atitude e órbita, quando necessárias, são realizadas através de comandos provindos de Terra, e interpretados e supervisionados pelo computador de controle (SOUZA, 2011).

O controle de atitude é, entretanto, realizado automaticamente a bordo, em malha fechada (alguns conceitos aqui mencionados serão melhor explicados posteriormente nesse trabalho). As informações provindas dos sensores de atitude são processadas e filtradas por um estimador de estado, que as compara, a seguir, com uma referência previamente comandada (por exemplo, um apontamento geocêntrico). Os erros entre o estado estimado e a referência serão então usados pelo algoritmo do controlador, e este deverá acionar os atuadores de forma adequada, no sentido de reduzir ou eliminar estes erros. Os componentes embarcados são usualmente classificados em: sensores, atuadores, software e eletrônica (KUGA, et al., 2001).

A figura abaixo apresenta de forma esquemática como se dá o controle de atitude e órbita para um satélite. Os sensores de posição e velocidade geram medidas que fornecem alguns parâmetros do sistema de controle. Tais parâmetros

são enviados a um estimador de estados que analisará os valores e efeitos desses sinais, e emitirá um comando de controle. O controle é direcionado aos atuadores que irão gerar algum efeito buscando direcionar os valores mensurados nos sensores para valores que se deseja atingir.

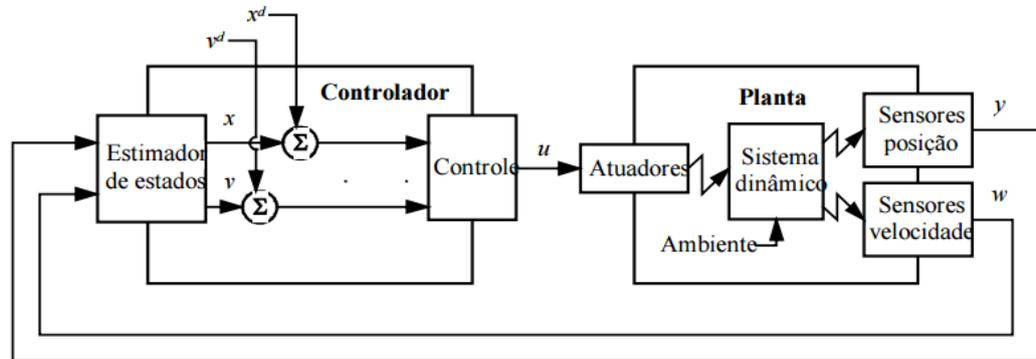


Figura 10 - Diagrama de blocos para um sistema de controle de atitude e órbita. (FONTE: Souza, 2011).

Esse diagrama representa um modelo ideal de controle de órbita e atitude de satélites, apresentando de forma bem próxima a um controle real. O intuito do presente trabalho é apresentar um modelo matemático com equações que irão reger o problema da dinâmica de atitude, bem como fornecer alguns parâmetros que podem e devem ser utilizados para construção de futura bancada experimental do Sistema de Controle de Atitude.

2.3 MODELO MATEMÁTICO

A figura 11 representa o modelo de satélite através do qual as equações matemáticas poderão ser deduzidas. O sistema de coordenadas (x, y, z) está fixo na base da plataforma do satélite com origem no centro de rotação da base. As rodas de reação possuem seus sistemas de coordenadas com origem nos seus respectivos centros de massa ou CM's e alinhados com seus respectivos eixos de rotação, tais sistemas são dados por: (x_1, y_1, z_1) para a roda de reação 1; (x_2, y_2, z_2) para a roda de reação 2 e finalmente (x_3, y_3, z_3) para a roda de reação 3.

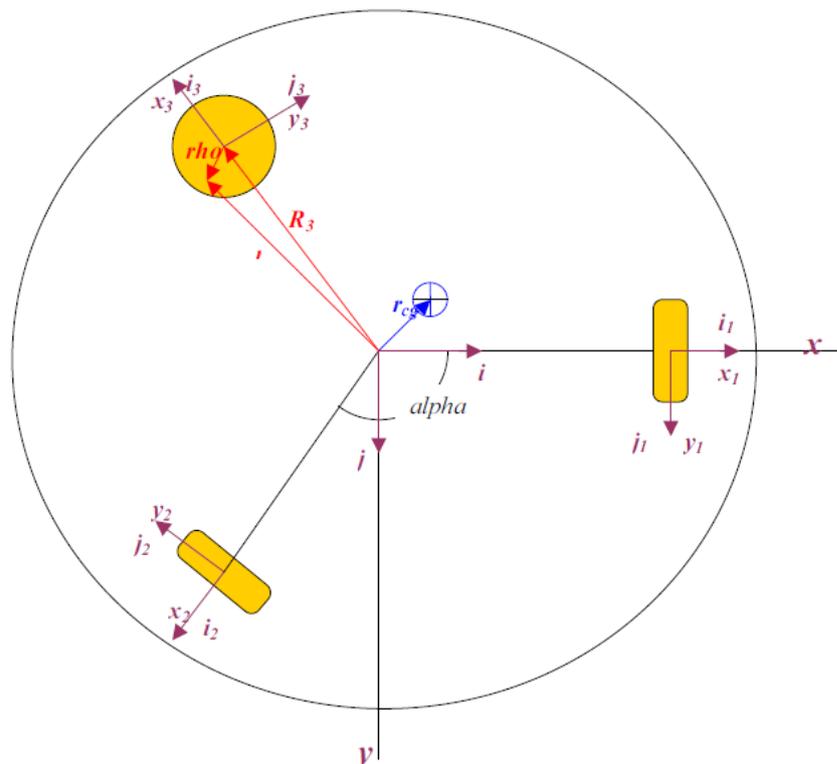


Figura 11 - Modelo da configuração da plataforma com as rodas de reação.
(FONTE: Filho, 2006).

Também na figura, é possível identificar os vetores $\overrightarrow{R_{1,2,3}}$ que indicam a posição do centro de massa das rodas de reação, bem como o vetor \vec{r} que dá a posição do elemento de massa dm em relação ao sistema de coordenadas (x, y, z) . O vetor $\overrightarrow{\rho_{1,2,3}}$ indica a posição dos elementos de massa dm em relação aos respectivos sistemas de coordenadas das rodas de reação $(x, y, z)_{1,2,3}$.

Para o sistema de coordenadas da base (x, y, z) sua velocidade angular absoluta será dada por \overrightarrow{W} . Já para o sistema de coordenadas das rodas $(x, y, z)_{1,2,3}$, a velocidade angular com relação ao sistema de coordenadas da base (x, y, z) será representada por $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ e $\overrightarrow{w_3}$. No modelo de satélite considerado a outro parâmetro de projeto, o ângulo alfa, que será considerado 90° durante o desenvolvimento equacional.

Dividiu-se as equações de movimento em três subpartes:

- Quantidade de movimento angular da base da plataforma onde o sistema de coordenadas (x, y, z) está fixo.
- Quantidade de movimento angular das rodas de reação, onde tem-se $(x, y, z)_{1,2,3}$ estão fixos.

- Cinemática relacionada as velocidades de rotação do sistema de coordenadas fixo a base da plataforma com a atitude do sistema de coordenadas fixo a terra $(X, Y, Z)_{Terra}$, cuja origem é comum ao sistema de coordenadas (x, y, z) .

De início, tem-se o desenvolvimento das equações que descrevem o movimento da base da plataforma. Sabendo-se que a base da plataforma não translada com relação ao sistema de coordenadas inercial, a equação do momento angular será dada por:

$$\vec{H} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm \quad (1)$$

Onde o vetor \vec{v} é a velocidade absoluta de cada elemento de massa infinitesimal dm . Dessa forma, para toda a plataforma tem-se:

$$\vec{H} = \int_{base} (\vec{r} \times \vec{v}) dm + \int_{RR\ 1} (\vec{r} \times \vec{v}) dm + \int_{RR\ 2} (\vec{r} \times \vec{v}) dm + \int_{RR\ 3} (\vec{r} \times \vec{v}) dm \quad (2)$$

A velocidade absoluta dos elementos de massa para a base é:

$$\vec{v} = \vec{W} \times \vec{r} \quad (3)$$

Já a velocidade absoluta para as rodas de reação, pois além de rotacionarem em torno de seus próprios eixos também rotacionam em torno do sistema de coordenadas inercial:

$$\vec{v} = \vec{W} \times \vec{R}_i + \vec{w}_i \times \vec{\rho}_i \quad (4)$$

Substituindo as equações (3) e (4) em (2), obtém-se:

$$\vec{H} = \int_{base} \vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) dm + \sum_{i=1}^3 \int_{Roda} \vec{\rho}_i \times (\vec{W} \times \vec{R}_i + \vec{w}_i \times \vec{\rho}_i) dm \quad (5)$$

$$\vec{H} = \int_{Base} \vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) dm + \sum_{i=1}^3 \int_{Roda} \vec{\rho}_i \times (\vec{W} \times \vec{R}_i) dm + \sum_{i=1}^3 \int_{Roda} \vec{\rho}_i \times (\vec{w}_i \times \vec{\rho}_i) dm \quad (6)$$

Da equação 6, pode-se juntar os dois primeiros termos, de forma a obter o momento angular total da plataforma com velocidade angular \vec{W} . Dessa forma, após a junção dos termos, obtém-se:

$$\vec{H} = \vec{h} + \sum_{i=1}^3 \int_{Roda} \vec{\rho}_i \times (\vec{w}_i \times \vec{\rho}_i) dm \quad (7)$$

A equação 7 representa a soma do momento angular total da plataforma ao momento angular produzido pelas rodas de reação em torno de seus próprios eixos com velocidade angular relativa ao eixo (x,y,z) e dada por \vec{w}_i .

Os vetores \vec{r} e $\vec{\rho}_i$ são os vetores posição, dados em função da posição (x, y, z) e os vetores \vec{W} e \vec{w}_i , funções do tempo:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (8)$$

$$\vec{\rho}_i = x\vec{i}_i + y\vec{j}_i + z\vec{k}_i \quad (9)$$

$$\vec{W} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad (10)$$

$$\vec{w}_i = w_x\vec{i}_i + w_y\vec{j}_i + w_z\vec{k}_i \quad (11)$$

Substituindo as equações nas integrais de momento angular:

$$\vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) = \{[x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}] \times [(p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}) \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})]\} \quad (12)$$

$$(\vec{W} \times \vec{r}) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = (qz - yr)i + (rx - zp)j + (py - xq)k \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{W} \times \vec{r}) &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ qz - yr & rx - zp & py - xq \end{bmatrix} = [(y^2 + z^2)p - xy \cdot q - xz \cdot r] \vec{i} + \dots \\ &+ [(x^2 + z^2)q - zy \cdot r - xy \cdot p] \vec{j} + [(x^2 + y^2)r - xz \cdot p - zy \cdot q] \vec{k} \end{aligned} \quad (14)$$

De forma análoga, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_i \times (\vec{w}_i \times \vec{\rho}_i) &= [(y^2 + z^2)w_x - xy \cdot w_y - xz \cdot w_z] \vec{i} + \dots \\ &+ [(x^2 + z^2)w_y - zy \cdot w_z - xy \cdot w_x] \vec{j} + [(x^2 + y^2)w_z - xz \cdot w_x - zy \cdot w_y] \vec{k} \end{aligned} \quad (15)$$

Por definição, as integrais dos termos de posição definem os momentos e produtos de inércia abaixo:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm & I_{xy} &= I_{yx} = \int -xy dm \\ I_{yy} &= \int (x^2 + z^2) dm & I_{xz} &= I_{zx} = \int -xz dm \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dm & I_{yz} &= I_{zy} = \int -zy dm \end{aligned}$$

Tendo a origem do sistema de coordenadas sobre o centro de massa do corpo, os produtos de inércia se anulam, o que acontece para as rodas de reação, mas não ocorre para toda a base da plataforma, simplificando as equações de movimento:

$$\vec{h} = (I_{xx}p + I_{xy}q + I_{xz}r) \vec{i} + (I_{yx}p + I_{yy}q + I_{yz}r) \vec{j} + (I_{zx}p + I_{zy}q + I_{zz}r) \vec{k} \quad (16)$$

Outra simplificação advém do fato de que a velocidade de rotação das rodas de reação se dá em uma direção constante no tempo em relação ao sistema de coordenadas (x, y, z) .

Para a componente do momento angular na terceira roda de reação \vec{h}_3 considera-se a componente da velocidade na direção do eixo k do seu sistema de coordenadas.

$$\vec{h}_1 = I_{xx} \omega_x \vec{l}_1 = I_1 \omega_1 \vec{l}_1 \quad (17)$$

$$\vec{h}_2 = I_{xx} \omega_x \vec{l}_2 = I_1 \omega_1 \vec{l}_2 \quad (18)$$

$$\vec{h}_3 = I_{xx} \omega_x \vec{k}_3 = I_1 \omega_1 \vec{k}_3 \quad (19)$$

Para torques externos atuando, pode-se utilizar o Teorema de Euler, onde os torques atuantes serão equivalentes a derivada temporal do momento angular. O momento angular irá se conservar caso não existam torques externos.

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{h}} + \dot{\vec{h}}_1 + \dot{\vec{h}}_2 + \dot{\vec{h}}_3 \quad (20)$$

Analisando apenas o termo $\dot{\vec{h}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{h}} = & (I_{xx}\dot{p} + I_{xy}\dot{q} + I_{xz}\dot{r})\vec{l} + (I_{yx}\dot{p} + I_{yy}\dot{q} + I_{yz}\dot{r})\vec{j} + (I_{zx}\dot{p} + I_{zy}\dot{q} + I_{zz}\dot{r})\vec{k} + \dots \\ & + (I_{xx}p + I_{xy}q + I_{xz}r)\dot{\vec{l}} + (I_{yx}p + I_{yy}q + I_{yz}r)\dot{\vec{j}} + (I_{zx}p + I_{zy}q + I_{zz}r)\dot{\vec{k}} \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\dot{\vec{l}} = (\vec{\omega} \times \vec{l}) \quad (21)$$

$$\dot{\vec{j}} = (\vec{\omega} \times \vec{j}) \quad (22)$$

$$\dot{\vec{k}} = (\vec{\omega} \times \vec{k}) \quad (23)$$

Substituindo na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{h}} = & (I_{xx}\dot{p} + I_{xy}\dot{q} + I_{xz}\dot{r})\vec{l} + (I_{yx}\dot{p} + I_{yy}\dot{q} + I_{yz}\dot{r})\vec{j} + (I_{zx}\dot{p} + I_{zy}\dot{q} + I_{zz}\dot{r})\vec{k} + \dots \\ & + (I_{xx}p + I_{xy}q + I_{xz}r)(\vec{\omega} \times \vec{l}) + (I_{yx}p + I_{yy}q + I_{yz}r)(\vec{\omega} \times \vec{j}) \\ & + (I_{zx}p + I_{zy}q + I_{zz}r)(\vec{\omega} \times \vec{k}) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{h}} = & (I_{xx}\dot{p} + I_{xy}\dot{q} + I_{xz}\dot{r})\vec{l} + (I_{yx}\dot{p} + I_{yy}\dot{q} + I_{yz}\dot{r})\vec{j} + (I_{zx}\dot{p} + I_{zy}\dot{q} + I_{zz}\dot{r})\vec{k} + \dots \\ & + \vec{\omega} \times [(I_{xx}p + I_{xy}q + I_{xz}r)\vec{l} + (I_{yx}p + I_{yy}q + I_{yz}r)\vec{j} + (I_{zx}p + I_{zy}q + I_{zz}r)\vec{k}] \end{aligned} \quad (25)$$

Simplificando todos os termos, tem-se:

$$\dot{\vec{h}} = \left(\dot{\vec{h}}\right)_{relativo} + \vec{W} \times \vec{h} \quad (26)$$

Abrindo o somatório de $\dot{\vec{h}}_1 + \dot{\vec{h}}_2 + \dot{\vec{h}}_3$:

$$\dot{\vec{h}}_1 + \dot{\vec{h}}_2 + \dot{\vec{h}}_3 = I_1 w_1 \dot{\vec{l}}_1 + I_1 \dot{w}_1 \vec{l}_1 + I_2 w_2 \dot{\vec{l}}_2 + I_2 \dot{w}_2 \vec{l}_2 + I_3 w_3 \dot{\vec{k}}_3 + I_3 \dot{w}_3 \vec{k}_3 \quad (27)$$

Novamente, tem-se que:

$$\dot{\vec{l}}_1 = [(\vec{W} + \vec{w}_1) \times \vec{l}_1] \quad (28)$$

$$\dot{\vec{l}}_2 = [(\vec{W} + \vec{w}_2) \times \vec{l}_2] \quad (29)$$

$$\dot{\vec{k}}_3 = [(\vec{W} + \vec{w}_3) \times \vec{k}_3] \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{h}}_1 + \dot{\vec{h}}_2 + \dot{\vec{h}}_3 &= I_1 w_1 [(\vec{W} + \vec{w}_1) \times \vec{l}_1] + I_1 \dot{w}_1 \vec{l}_1 + I_2 w_2 [(\vec{W} + \vec{w}_2) \times \vec{l}_2] + I_2 \dot{w}_2 \vec{l}_2 \\ &+ I_3 w_3 [(\vec{W} + \vec{w}_3) \times \vec{k}_3] + I_3 \dot{w}_3 \vec{k}_3 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{h}}_1 + \dot{\vec{h}}_2 + \dot{\vec{h}}_3 &= I_1 w_1 (\vec{W} \times \vec{l}_1) + I_1 \dot{w}_1 \vec{l}_1 + I_2 w_2 (\vec{W} \times \vec{l}_2) + I_2 \dot{w}_2 \vec{l}_2 + I_3 w_3 (\vec{W} \times \vec{k}_3) \\ &+ I_3 \dot{w}_3 \vec{k}_3 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\dot{\vec{h}}_1 + \dot{\vec{h}}_2 + \dot{\vec{h}}_3 = I_1 \dot{w}_1 \vec{l}_1 + I_2 \dot{w}_2 \vec{l}_2 + I_3 \dot{w}_3 \vec{k}_3 + \vec{W} \times (I_1 w_1 \vec{l}_1 + I_2 w_2 \vec{l}_2 + I_3 w_3 \vec{k}_3) \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^3 \dot{\vec{h}}_i = \sum_{i=1}^3 \left(\dot{\vec{h}}_i\right)_{relativo} + \vec{W} \times \left(\sum_{i=1}^3 \vec{h}_i\right) \quad (34)$$

Dado que I é função somente da posição, a derivada de \dot{I} não é calculada para nenhum dos termos, dado que os sistemas de coordenadas são fixos nos corpos. Considerando a plataforma um corpo rígido, tem-se $\dot{I} = 0$.

Aplicando o teorema de Euler, obtém-se as equações de movimento da plataforma:

$$\vec{T} = \dot{\vec{H}} \quad (35)$$

$$m(\vec{r}_{cg} \times \vec{g}) = \left(\dot{\vec{h}}\right)_{relativo} + \vec{W} \times \vec{h} + \sum_{i=1}^3 \left(\dot{\vec{h}}_i\right)_{relativo} + \vec{W} \times \left(\sum_{i=1}^3 \vec{h}_i\right) \quad (36)$$

Para a continuação dos cálculos, é necessária a utilização da mesma base ortonormal para todos os termos da equação. Dessa forma, opta-se por escolher $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ referente ao sistema de coordenadas (x,y,z), utilizando as substituições abaixo:

$$\vec{i}_1 = \vec{i} \quad (37)$$

$$\vec{i}_2 = \vec{j} \quad (38)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{k} \quad (39)$$

$$\vec{g} = |\vec{g}|[-\sin \theta \vec{i} + \sin \phi \cos \theta \vec{j} + \cos \phi \cos \theta \vec{k}] \quad (40)$$

Na última equação observa-se a presença de θ, ϕ, ψ , conhecidos como ângulos de Euler que representam a atitude do sistema de coordenadas (x,y,z) em relação ao sistema de coordenadas inercial $(X, Y, Z)_{Terra}$. A equação correspondente a \vec{g} tem origem na matriz de rotação 321, que será mencionada posteriormente. Tal matriz retornará tal valor de \vec{g} , quando considerada apenas a componente em \vec{k} , ou seja, apenas a componente com sentido a direção da gravidade.

Considerando as rodas de reação, as equações de movimento serão dadas pela aplicação do Teorema de Euler, considerando o momento angular observado por esses atuadores em relação ao seu próprio eixo de rotação. Sua velocidade angular será dada pela velocidade angular relativa à base da plataforma \vec{w}_i somada a componente de velocidade angular absoluta da plataforma em relação ao eixo de rotação da roda de reação. Assim, o momento angular das rodas de reação nos seus eixos de rotação será:

$$Q_i = I_i(\vec{w}_i + \vec{W})\vec{i}_i \quad (41)$$

Aplicando as três rodas de reação:

$$Q_1 = I_1(\overline{w}_1 + \overline{W})\overline{i}_1 = I_1[w_1 + p] \quad (42)$$

$$Q_2 = I_2(\overline{w}_2 + \overline{W})\overline{i}_2 = I_2[w_2 + q] \quad (43)$$

$$Q_3 = I_3(\overline{w}_3 + \overline{W})\overline{k}_3 = I_3[w_3 + r] \quad (44)$$

Derivando no tempo, fornece as equações de movimento para as rodas:

$$\dot{Q}_1 = I_1[\dot{w}_1 + \dot{p}] = T_1 \quad (45)$$

$$\dot{Q}_2 = I_2[\dot{w}_2 + \dot{p} \cos \alpha + \dot{q} \sin \alpha] = T_2 \quad (46)$$

$$\dot{Q}_3 = I_3[\dot{w}_3 + \dot{r}] = T_3 \quad (47)$$

Os torques gerados pelas rodas de reação são internos a plataforma, logo T_1, T_2 e T_3 não alteram o momento angular total \vec{H} . O segundo termo tem formato levemente diferente dos outros, pois foi obtido utilizando-se da decomposição dos termos em função do ângulo alfa, mostrado na representação da plataforma do satélite no início do subcapítulo.

O último conjunto de equações necessárias são as que descrevem a atitude da plataforma com relação ao sistema de coordenadas inercial $(X, Y, Z)_{\text{terra}}$. Para tal será considerada uma matriz de rotação com a sequência 3-2-1 dos ângulos de Euler, dessa forma a matriz de cossenos diretores que dá a transformação dos vetores do sistema inercial para o sistema da plataforma de simulação (x, y, z) é:

$$R_{321} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{vmatrix} \quad (48)$$

As equações cinemáticas para a sequência de Euler que descrevem a atitude da plataforma serão, portanto:

$$\dot{\phi} = p + \tan \theta [q \sin \phi + r \cos \phi] \quad (49)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (50)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} [q \sin \phi + r \cos \phi] \quad (51)$$

Nesse ponto do equacionamento todas as equações foram obtidas, bem como suas derivadas temporais. Dessa forma, organizam-se os termos de derivada de primeira ordem à esquerda e os de ordem zero à direita, formando um sistema de equações em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_{xx} - I_{zz})qr + I_{xy}pr - I_{xz}pq + I_{yz}(r^2 - q^2) + \dots I_2 w_2 r - I_3 w_3 q + mgr_y \cos \phi \cos \theta - mgr_z \sin \phi \cos \theta \\ (I_{zz} - I_{xx})pr + I_{yz}pq - I_{xy}qr + I_{xz}(p^2 - r^2) - I_1 w_1 r + I_3 w_3 p - mgr_x \cos \phi \cos \theta - mgr_z \sin \theta \\ (I_{xx} - I_{yy})pq + I_{xz}qr - I_{yz}pr + I_{xy}(q^2 - p^2) + I_1 w_1 q - I_2 w_2 p + mgr_x \sin \phi \cos \theta + mgr_y \sin \theta \\ p + \tan \theta [q \sin \phi + r \cos \phi] \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ \frac{1}{\cos \theta} [q \sin \phi + r \cos \phi] \\ \frac{T_1}{I_1} \\ \frac{T_2}{I_2} \\ \frac{T_3}{I_3} \end{pmatrix} \quad (52)$$

O sistema de equações obtido acima não é linear, tal sistema pode ser considerado o mais próximo da realidade na qual o satélite estará inserido em ambiente espacial. Com o intuito de obter análises mais simplificadas, e também um modelo mais real, serão utilizados o equacionamento não-linear e o modelo linearizado. O modelo linear trará resultados idealizados, dada as simplificações feitas para sua obtenção.

Para uma análise inicial iremos utilizar métodos para o controle de atitude de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI), tendo assim a necessidade de linearizar o sistema. Uma das formas de linearização é a das pequenas perturbações, com isso tem-se que:

$$\text{sen}(\theta) = \theta$$

$$\text{cos}(\theta) = 1$$

Dessa primeira hipótese também se conclui que os produtos de duas velocidades são desprezíveis se comparados a outros termos da matriz. Outra consideração a se fazer é $\vec{r}_{cg} = \vec{0}$, o que leva a conclusão que os produtos de inercia se anulam. Levando em consideração todas as hipóteses, o sistema se torna:

$$I_{xx}\dot{p} + I_1\dot{w}_1 = 0 \quad (53)$$

$$I_{yy}\dot{q} + I_2\dot{w}_2 = 0 \quad (54)$$

$$I_{zz}\dot{r} + I_3\dot{w}_3 = 0 \quad (55)$$

$$\dot{\phi} = p \quad (56)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (57)$$

$$\dot{\psi} = r \quad (58)$$

$$\dot{w}_1 = \frac{T_1}{I_1} - \dot{p} \quad (59)$$

$$\dot{w}_2 = \frac{T_2}{I_2} - \dot{q} \quad (60)$$

$$\dot{w}_3 = \frac{T_3}{I_3} - \dot{r} \quad (61)$$

As três últimas equações serão inseridas nas três primeiras, o que gerará um sistema com todos os estados controláveis, objeto de estudo posteriormente neste trabalho. O sistema combinado ficará:

$$\dot{p}(I_{xx} - I_1) = -T_1 \quad (62)$$

$$\dot{q}(I_{yy} - I_2) = -T_2 \quad (63)$$

$$\dot{r}(I_{zz} - I_3) = -T_3 \quad (64)$$

$$\dot{\phi} = p \quad (65)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (66)$$

$$\dot{\psi} = r \quad (67)$$

Dessa forma, quando o sistema de equações acima é substituído no sistema (68) inicial, obtém-se finalmente, as equações abaixo, que na sua forma vetor-matricial são:

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1 - I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2 - I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3 - I_{zz}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

O sistema acima representado tem uma forma compacta, mostrada abaixo:

$$\{\dot{X}\} = [A]\{X\} + [B]\{u\} \quad (69)$$

3. SISTEMAS DE CONTROLE

3.1 TEORIA DE CONTROLE MODERNO

Tendo todo o modelo matemático que rege a dinâmica do controle de atitude do satélite desenvolvido, pode-se aplicar tal equacionamento a diferentes metodologias buscando obter respostas possíveis a diferentes condições que o sistema irá se sujeitar. O sistema de atitude aqui observado é do tipo MIMO: *Multiple Inputs Multiple Output*, ou seja, um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (OGATA, 1990).

A teoria de controle moderno visa simplificar e reduzir um sistema complexo, descrevendo o mesmo por meio de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem, que irão formar um sistema de equações diferenciais vetor-matricial de primeira ordem. Assim, o sistema não terá sua complexidade ampliada caso o número de entradas ou saídas aumente (OGATA, 1990).

3.1.1 Variáveis de estado

De forma geral, as variáveis de estado de um sistema dinâmico qualquer, são as grandezas cujo conjunto de valores determina o estado de um sistema para qualquer instante de tempo $t \geq t_0$. Tem-se que se são necessárias n variáveis para a descrição completa do comportamento de um sistema dinâmico, então estas n variáveis são um conjunto de variáveis de estado (FRANKLIN, POWEL e EMANNAEINI, 2003).

É bom notar que as variáveis de estados não necessitam serem quantidades fisicamente observáveis ou mensuráveis - essa liberdade de escolha é uma das vantagens do método de espaço de estados (FRANKLIN, POWEL e EMANNAEINI, 2003). Para exemplificar, o modelo linear aqui analisado possui 6 variáveis necessárias para sua descrição, logo um sistema com 6 variáveis de estado. O modelo que é buscado na teoria de controle moderno é justamente o que a obtenção da equação diferencial de estado.

A análise de estados envolve três tipos de variáveis que estão presentes na modelagem de um sistema dinâmico: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado (OGATA, 1990). Tem-se, que para um sistema qualquer utilizando variáveis de estado, é possível obter:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (70)$$

$$y = Cx + Du \quad (71)$$

Nas equações acima, tem-se que A é a matriz de estado, B é a matriz de entrada, C é a matriz de saída e D é a matriz de transmissão direta. Esse sistema é representado em diagrama de blocos pela figura abaixo:

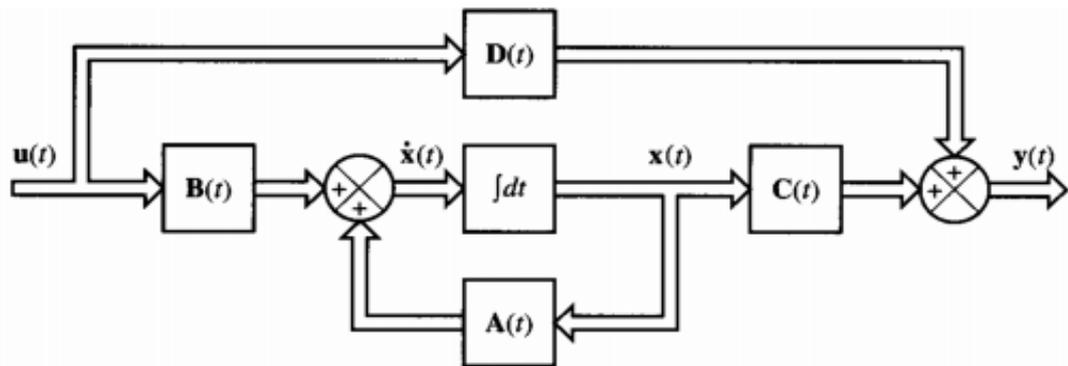


Figura 12 - Diagrama de Blocos de um Sistema Linear representado no espaço de estados. (Fonte: SILVA et. al, 2000)

3.1.2 Controlabilidade

Um sistema é dito controlável (completamente controlável, ou de estado controlável) quando é possível encontrar um controle que permita levar o sistema de um estado $x(t)$ para um estado $x(t + 1)$ em um intervalo de tempo finito. De forma mais geral, tem-se que se um sistema é “controlável”, então é possível leva-lo de qualquer estado inicial para qualquer estado final em tempo finito (LUYBEN).

Esse conceito será utilizado para determinação dos polos que serão utilizados nas implementações do sistema de controle futuras.

3.1.3 Malha aberta e Malha Fechada

O controle em malha aberta consiste na aplicação de um sinal de controle pré-determinado, esperando-se que ao final de um determinado tempo a variável controlada atinja um determinado valor ou apresente um determinado comportamento. Neste tipo de sistema de controle não são utilizadas informações sobre evolução do processo para determinar o sinal de controle a ser aplicado em

um determinado instante (SILVA et. al, 2000). Mais especificamente, o sinal de controle não é calculado a partir de uma medição do sinal de saída. A figura abaixo apresenta esquemático de um controle dado por malha aberta:

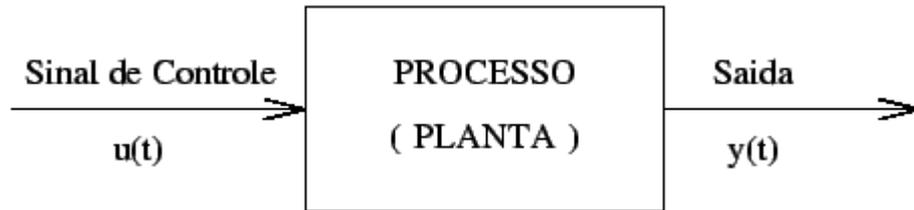


Figura 13 - Esquema para controle em malha aberta. (FONTE: SILVA et. al, 2000).

No controle em malha fechada, informações sobre como a saída do controle está evoluindo são utilizadas para determinar o sinal de controle que deve ser aplicado ao processo em um instante específico. Isto é feito a partir de uma realimentação (retroalimentação, *feedback*) da saída para a entrada. Em geral, a fim de tornar o sistema mais preciso e de fazer com que ele reaja a perturbações externas, o sinal de saída é comparado com um sinal de referência e o desvio (erro) entre estes dois sinais é utilizado para determinar o sinal de controle que deve efetivamente ser aplicado ao processo (SILVA et. al, 2000).

Assim, o sinal de controle é determinado de forma a corrigir este desvio entre a saída e o sinal de referência. O dispositivo que utiliza o sinal de erro para determinar ou calcular o sinal de controle a ser aplicado à planta é chamado de controlador ou compensador. O diagrama básico de um sistema de controle em malha-fechada é mostrado na figura abaixo:

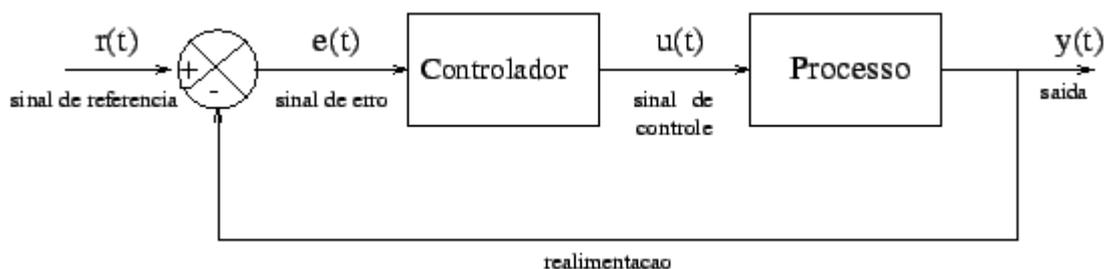


Figura 14 - Esquema para controle em malha fechada. (FONTE: SILVA et. al, 2000).

Segundo Silva (2000), a utilização da realimentação e, portanto, do controle em malha fechada, permite entre outros:

- Amplificar a precisão do sistema.
- Rejeitar efeitos de perturbações externas.
- Melhorar a dinâmica do sistema e, eventualmente, estabilizar um sistema naturalmente instável em malha aberta.
- Diminuir a sensibilidade do sistema a variações dos parâmetros do processo, ou seja, tornar o sistema robusto

3.2 ALOCAÇÃO DE POLOS

Com o desenvolvimento equacional concluído, e com os conceitos iniciais de sistemas de controle apresentados, pode-se enfim analisar qual estratégia de controle será utilizada. Primeiramente, tem-se o método de alocação de polos. Neste método, admite-se que todas as variáveis de estado são mensuráveis e que estão disponíveis para realimentação. O método mostra que se o sistema considerado for de estado completamente controlável, então tem-se que os polos de malha fechada do sistema poderão ser alocados em qualquer posição desejada por meio de uma realimentação de estado, empregando matrizes de ganho apropriada (OGATA, 1990). A técnica de alocação de polos inicia-se com a determinação dos polos de malha fechada desejados em função de alguma especificação determinada. A escolha de uma matriz de ganho apropriada para realimentação de estado, possibilita forçar o sistema a ter polos de malha fechada na posição desejada.

Considere o sistema a controlar representado no espaço de estados por:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (72)$$

Supondo a existência de sensores ou medidores de todas as variáveis de estado em $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]'$, podemos então usar elementos $x_1(t), \dots, x_n(t)$ para implementar a realimentação de estados. A saída $y(t) = Cx(t)$ pode ser reescrita com C igual à matriz identidade. Isso significa que $y(t) = x(t)$. Se cada uma das variáveis de estado $x_i(t)$ for empregada no controle através de um ganho k_i , haverá n ganhos k_i , representados pelo vetor $K = [k_1 \ \dots \ k_n]$ que

podem ser ajustados para produzir os valores desejados dos polos de malha fechada através da fórmula:

$$u(t) = Kx(t) + r(t) \quad (73)$$

No qual $r(t)$ representa a entrada de referência (pode ser degrau, rampa, senoidal, ou outra entrada qualquer).

Para o desenvolvimento dos métodos aqui aplicados será considerado um sinal de referência nulo, ou seja, $r(t) = 0$. Essa abordagem é responsável por duas definições importantes (OGATA, 1990):

- $r(t) = 0$ – Problema de Regulação.
- $r(t) \neq 0$ – Problema de Rastreamento.

Um estado de uma planta linear é dito controlável a partir de um estado inicial, se existir uma trajetória no espaço de estados que possa ser percorrida pelo sistema em malha fechada que consiga conduzir o sistema do estado em um tempo inicial até o estado em um tempo final, em um intervalo de tempo finito (OGATA, 2003). Para um sistema completamente controlável essa condição tem que ser atendida por todos os estados da planta. Com essa condição satisfeita, pode-se obter o vetor de controle como sendo, onde K é a matriz de ganho da realimentação de estados:

$$\{u\} = -[K]\{X\} \quad (74)$$

Considerando o sistema linear obtido ao final do equacionamento, tem-se uma matriz $[K]$ com dimensões 3x6 (6 estados e 3 saídas):

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \end{bmatrix} \quad (75)$$

Na forma compacta, o sistema inicial dado na equação 68 se tornará (substituindo o vetor de controle):

$$\{\dot{X}\} = [A - BK]\{X\} \quad (76)$$

Assim como em qualquer sistema de controle, a forma compacta permite uma representação em blocos, que permite uma visualização melhor de todo o sistema. Para a equação acima, tem-se:

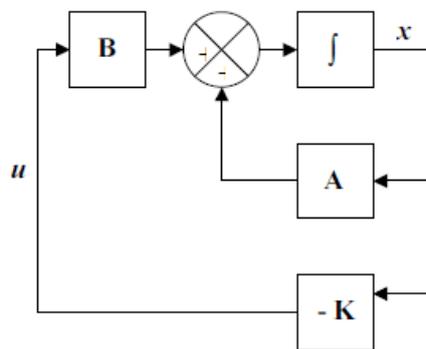


Figura 15 - Diagrama de blocos para o sistema em malha fechada. (FONTE: FILHO, 2006).

O próximo passo consiste na determinação dos fatores K , na matriz de ganhos de realimentação, que faz os polos de $[A - BK]$ serem aqueles escolhidos de forma arbitrária (representados na seção de simulação): p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 . Para isso, seguiu-se a mesma metodologia proposta por Filho, em 2006.

1. Reescrever o sistema explicitando as entradas T_1, T_2 e T_3 .
2. Considerar uma entrada por vez, fazendo as outras entradas $T_i = 0$, e determinar as equações características do sistema.
3. Substituir os polos nas equações características, obtidas no segundo passo da metodologia.
4. A matriz de ganhos de realimentação $[K]$ é obtida resolvendo as equações obtidas no passo acima.

O sistema, após o passo 1, é expresso de forma matricial da seguinte forma:

$$\{\dot{X}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{X\} \quad (77)$$

$$- \left(\begin{bmatrix} 1 \\ I_1 - I_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \\ k_{15} \\ k_{16} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ I_2 - I_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ k_{24} \\ k_{25} \\ k_{26} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ I_3 - I_{zz} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \\ k_{34} \\ k_{35} \\ k_{36} \end{bmatrix}^T \right) \{X\}$$

Da mesma forma, do passo 2, consegue-se obter as equações características dos sistemas:

$$|sI - A + K_1 B_1| = 0 \quad (78)$$

$$|sI - A + K_2 B_2| = 0 \quad (79)$$

$$|sI - A + K_3 B_3| = 0 \quad (80)$$

3.3 REGULADOR LINEAR-QUADRÁTICO

O regulador linear quadrático LQR é um controlador ótimo que vêm sendo amplamente difundido na literatura em diversas aplicações, que vão de controle de servomecanismo sem robótica ao controle de processos químicos (KANIESKI, 2010). Isto se deve às suas excelentes características de desempenho bem como à sua simples implementação. Assim como na alocação de polos, o sistema a ser considerado aqui é dado na forma de:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Segundo Kanieski (2010), o controlador linear-quadrático é um sistema de controle ótimo, ou seja, busca minimizar alguma função do controle, ou algum gasto para controle. Tem-se então dois problemas a serem considerados:

- Problema de Erro de Rastreamento Mínimo: levar o sistema a um estado x_d desejável.
- Problema de Energia Mínima: usar o mínimo de energia para controlar o sistema.

Ainda existe uma terceira via, onde se pode considerar um problema de minimização combinada, visando um rastreamento preciso e uma economia de energia para o controle do sistema. Assim, o objetivo é encontrar uma lei de controle $u = -K(t)x$ que minimize um custo funcional $J(x(t), u(t))$. Tem-se então a função custo definida abaixo, para o intervalo de tempo até o tempo final (TOGNETTI, 2014).

$$Jp = \int_0^T [x^T Q_c x + u^T R_c u] dt \quad (81)$$

As matrizes Q_c e R_c são as ponderações no vetor de estado e no vetor de controle, respectivamente. Os valores de Q_c e R_c podem ser atribuídos de maneira aleatória, sendo que, à medida que se alteram os valores dessas matrizes, são alteradas especificações do projeto (tempo de subida, valores de ultrapassagem). Assim, os valores escolhidos deverão ser aqueles que melhor se aproximem das respostas desejadas para o sistema dinâmico (SELOW, VEIGA, 2005).

De maneira geral, pode-se observar que valores para $R > Q$ tem-se uma maior ênfase na redução do esforço de controle. Dessa forma, o atuador gastará menos energia e provavelmente mais tempo para levar um estado à condição de referência determinada.

Os valores considerados para Q e R sempre fornecem um sistema estável independente dos valores a eles atribuídos, considerando um sistema de estados controláveis. Dessa forma, a matriz de ganhos K para o problema de otimização é obtida resolvendo a equação matricial algébrica de Riccati para um sistema LTI:

$$A^T P + PA - PBR_c^{-1}B^T P + Q_c = 0 \quad (82)$$

O ganho ótimo do controle será então dado por:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (83)$$

Para o sistema analisado neste trabalho, tomou-se a liberdade de obter respostas para diferentes valores de Q. Dessa forma, apresentam-se os ganhos e, posteriormente, os resultados para valores de:

$$Q = \text{Identidade}, 0.1 * \text{Identidade} \text{ e } 0.01 * \text{Identidade}.$$

Tais sistemas geraram diferentes valores para os ganhos, que estão representados abaixo:

K =

-1.8248	-0.0000	-0.0000	-1.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-1.8250	0.0000	-0.0000	-1.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-2.2923	-0.0000	0.0000	-1.0000

Figura 16 - Valores de K para Q = Identidade.

K =

-0.9147	0.0000	0	-0.3162	-0.0000	0
0.0000	-0.9149	0	-0.0000	-0.3162	0
0	0	-1.2023	0	0	-0.3162

Figura 17 - Valores de K para Q = 0.1*Identidade.

K =

-0.4929	-0.0000	0	-0.1000	-0.0000	0
-0.0000	-0.4930	0	-0.0000	-0.1000	0
0	0	-0.6599	0	0	-0.1000

Figura 18 - Valores de K para Q = 0.01*Identidade.

A simulação completa com os resultados obtidos, bem como sua discussão será vista posteriormente. Tais valores serão utilizados nas simulações não-lineares.

3.4 CONTROLADOR LINEAR QUADRATICO GAUSSIANO

Devido à presença de ruído, é necessário que se faça uma filtragem de formar a obter uma informação mais confiável sobre os estados medidos na saída da planta. Para isso, adota-se o projeto de um controlador baseado na metodologia do Regulador Linear Gaussiano (LQG). O problema do regulador LQG pode ser descrito como sendo o de calcular uma lei de controle que mantenha o sistema estável e minimize um critério de erros quadráticos (BARÃO, 2010). Assim, tem-se que o sistema dinâmico com ruído se torna:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w \quad (84)$$

$$y = Cx + v \quad (85)$$

Considera-se assim as variáveis w e v como ruídos brancos de média nula, sendo o valor w para as medidas e o valor v para o ruído da dinâmica. No problema LQG, deseja-se minimizar a função custo dada pela equação abaixo, bem similar a função custo presente no método LQR:

$$J_p = \int_0^T [X^T Q_f x + u^T R_f u] dt \quad (86)$$

Nesse caso, tem-se que Q_f é a matriz de covariância do ruído nas medidas e R_f é a matriz de covariância do ruído da dinâmica. Para solucionar um problema baseado no método LQG, pode-se dividir um problema principal em dois subproblemas (SANTANA et. al, 2010):

- Definir um controlador para o problema linear quadrático (LQR).
- Definir um filtro de Kalman para obter estimativas dos estados do sistema.

Com todo o equacionamento, também da parte de controle desenvolvido, pode-se partir para a implementação do programa.

4. SIMULAÇÃO

Para a simulação foi escolhido o programa Matlab R2013b, o código foi desenvolvido a partir das equações lineares, e a partir das matrizes de ganhos obtidas com as condições pré-determinadas. Visando uma resolução correta, existe a necessidade da determinação de certos parâmetros antes do início da simulação. Para isso, utilizaram-se parâmetros utilizados por Filho (2006), que são apresentados abaixo em unidades do sistema internacional. Vale ressaltar que tais constantes assumiram os valores que o projetista determinar, utilizando assim o método mais adequado para aquisição de tais dados.

$$I_{xx} = 1.1667 \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (87)$$

$$I_{yy} = 1.1671 \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (88)$$

$$I_{zz} = 2.1291 \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (89)$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = 1.792 \times 10^{-3} \text{ kg} * \text{m}^2 \quad (90)$$

No âmbito da alocação de polos, foram escolhidos três conjuntos de polos que irão gerar comportamentos diferentes. O primeiro e terceiro conjuntos visam expor o comportamento indesejável do sistema. O primeiro conjunto é dado por polos próximos ao eixo imaginário, originando pouco amortecimento e muita oscilação; já para o terceiro conjunto de polos que é longe do eixo imaginário, tem-se grande fator de amortecimento e quase nenhuma oscilação. Os polos utilizados estão representados abaixo:

$$p_1 = \{-0.5 + i \quad -0.5 - i \quad -0.3 + i \quad -0.3 - i \quad -0.2 + i \quad -0.2 - i\} \quad (91)$$

$$p_2 = \{-2 + 0.3i \quad -2 - 0.3i \quad -2.25 + 0.3i \quad -2.25 - 0.3i \quad -2.5 + 0.3i \quad -2.5 - 0.3i\} \quad (92)$$

$$p_3 = \{-4 \quad -4 \quad -4.25 \quad -4.25 \quad -4.5 \quad -4.5\} \quad (93)$$

De Filho (2006), obtém-se finalmente a matrizes de ganhos de realimentação para cada conjunto de polos, respectivamente:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} -0.4660 & 0 & 0 & -1.2115 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6992 & 0 & 0 & -1.2712 & 0 \\ 0 & 0 & -2.1273 & 0 & 0 & -2.6591 \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} -5.8245 & 0 & 0 & -7.3855 & 0 & 0 \\ 0 & -5.2439 & 0 & 0 & -6.0042 & 0 \\ 0 & 0 & -8.5092 & 0 & 0 & -8.7007 \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} -9.9017 & 0 & 0 & -20.9683 & 0 & 0 \\ 0 & -10.1964 & 0 & 0 & -22.2865 & 0 \\ 0 & 0 & -17.5503 & 0 & 0 & -36.1642 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Finalmente, a condição inicial para os estados:

$$\{X_0\} = \left\{ 0 \quad \frac{5\pi}{180} \quad 0 \quad -\frac{20\pi}{180} \quad \frac{5\pi}{180} \quad -\frac{5\pi}{180} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (97)$$

Com isso, todas as ferramentas matemáticas necessárias estão prontas e deduzidas, inclusive com hipóteses já assumidas. Tornando a implementação da simulação possível.

4.1 RESULTADOS PARA ALOCAÇÃO DE POLOS:

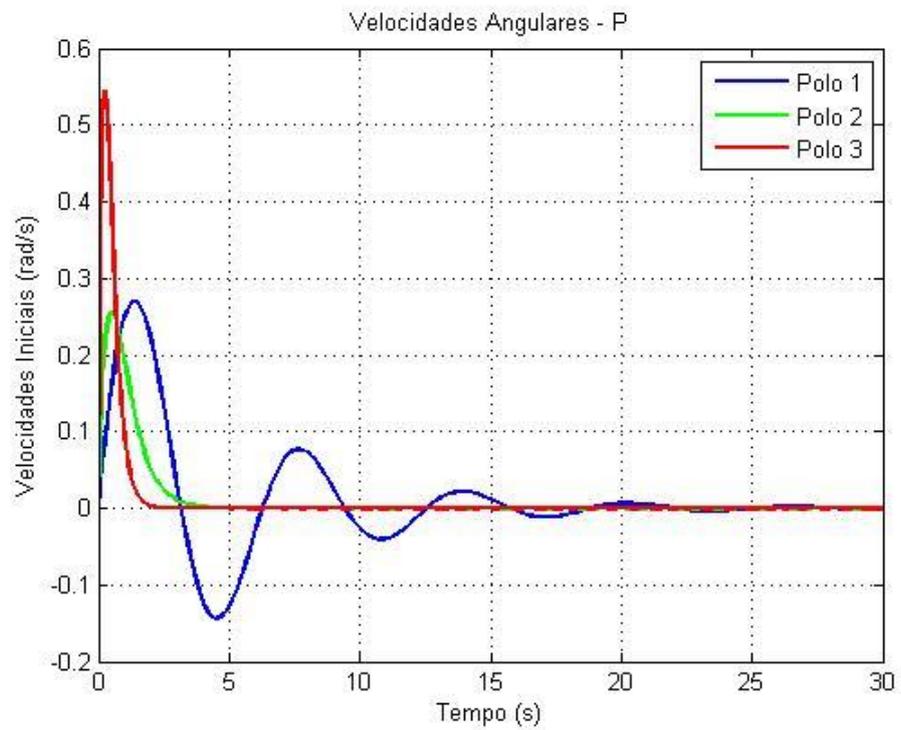


Figura 19 - Velocidade Angular P para Alocação de Polos.

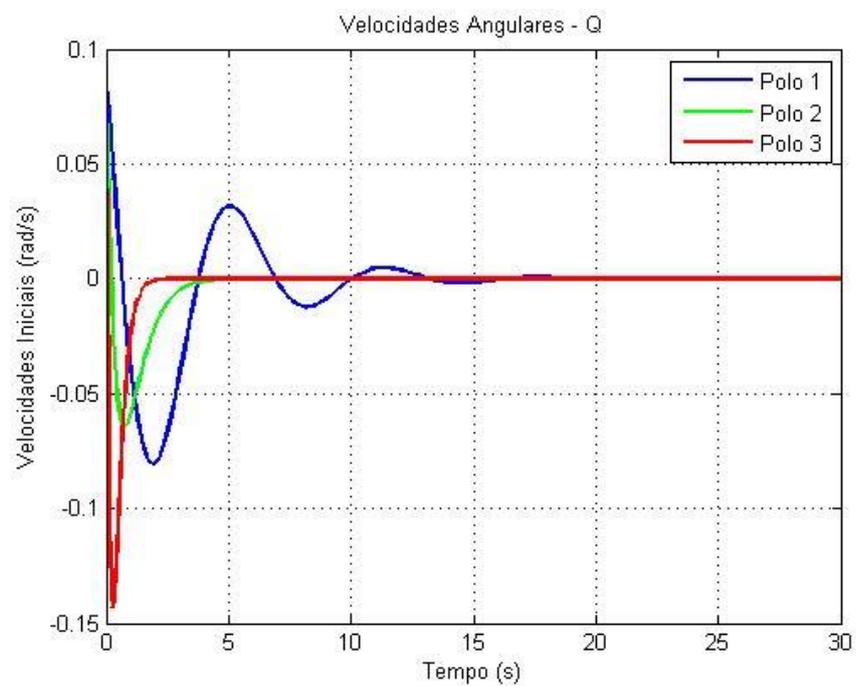


Figura 20 - Velocidade Angular Q para Alocação de Polos.

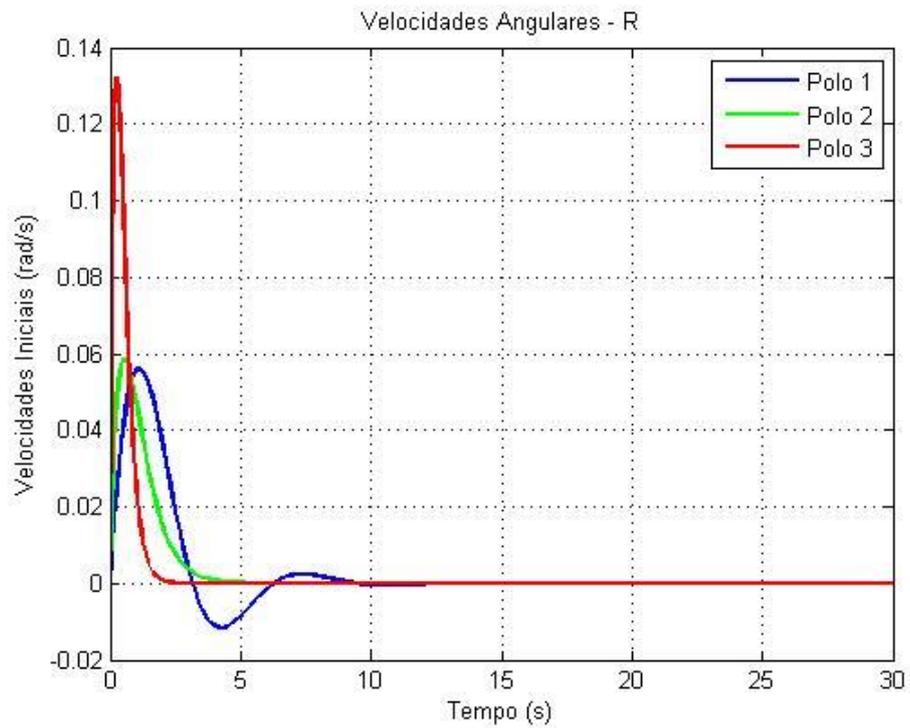


Figura 21 - Velocidade Angular R para Alocação de Polos.

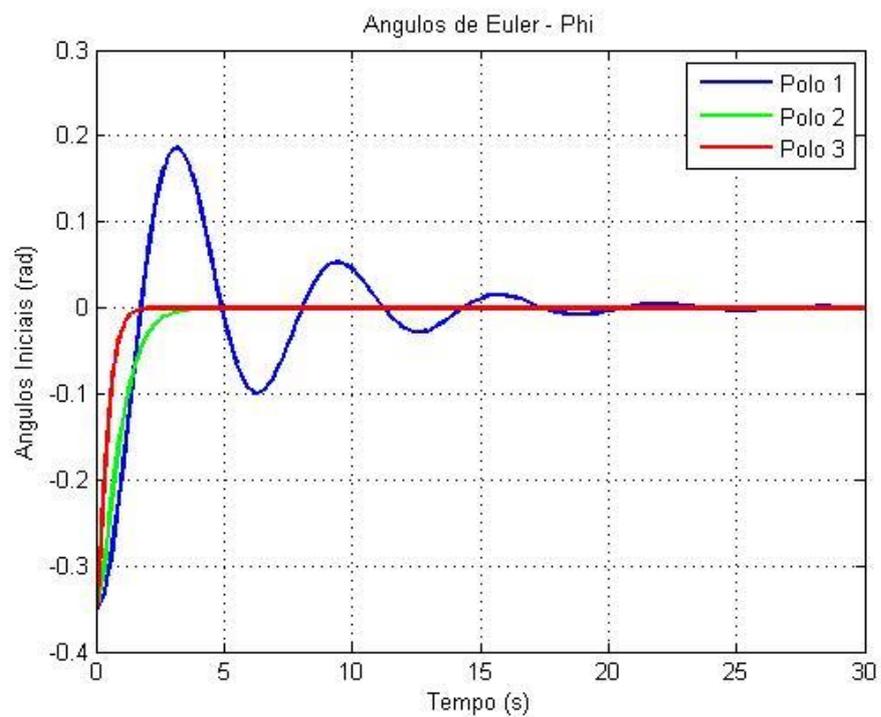


Figura 22 - Ângulo ϕ para Alocação de Polos.

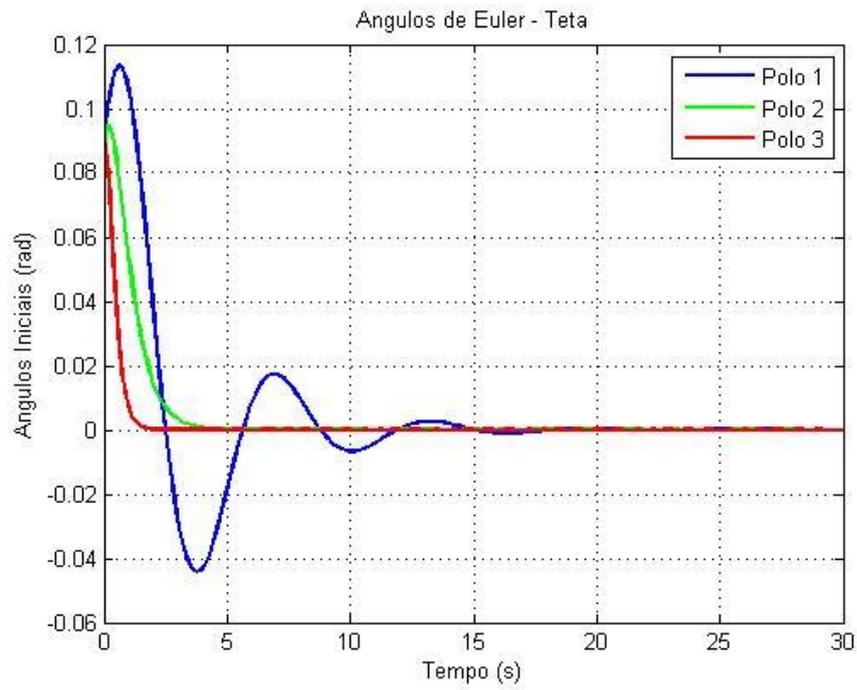


Figura 23 - Ângulo θ para Alocação de Polos.

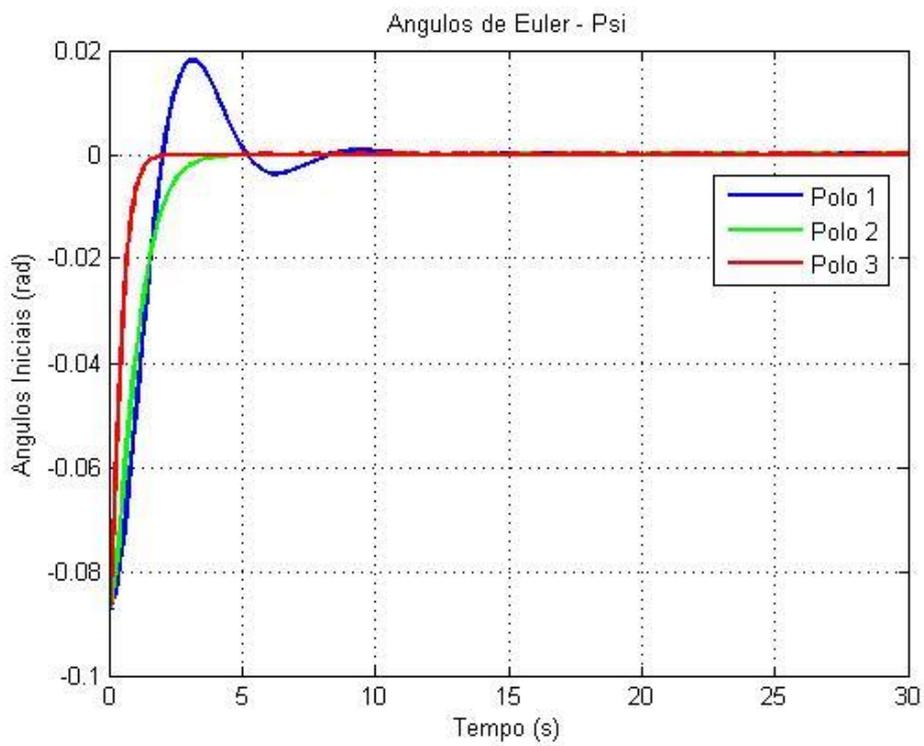


Figura 24 - Ângulo ψ para Alocação de Polos.

Para o caso de alocação de polos, tem-se que todos os estados foram plotados utilizando os diferentes conjuntos de polos. Assim, obtém-se as velocidades angulares e os ângulos por unidade de tempo para cada situação. Como esperado, o sistema observou o mesmo comportamento para cada conjunto de polos:

- Conjunto de polos 1: são polos próximos ao eixo imaginário, o que levaram a uma resposta do sistema com maior oscilação.
- Conjunto de polos 2: são os polos com valores próximos a um controle otimizado, tem-se comportamento entre os dois conjuntos de polos, mostrando-se solução entre dois extremos com quase nenhuma oscilação e menor esforço de controle para o sistema.
- Conjunto de polos 3: são os polos longe do eixo imaginário, tem-se grande fator de amortecimento e quase nenhuma oscilação, o que leva a um maior esforço de controle do sistema.

Um modo extra de visualização da influência da localização dos polos no sistema é a visualização do esforço de controle. De maneira mais clara, qual o esforço necessário realizado pelos atuadores buscando o equilíbrio. No caso aqui estudado, tem-se um sistema regulador que busca a referência zero. Para a implementação, utilizou-se a equação (74): $\{u\} = -[K]\{X\}$, que corresponde a equação do vetor de controle.

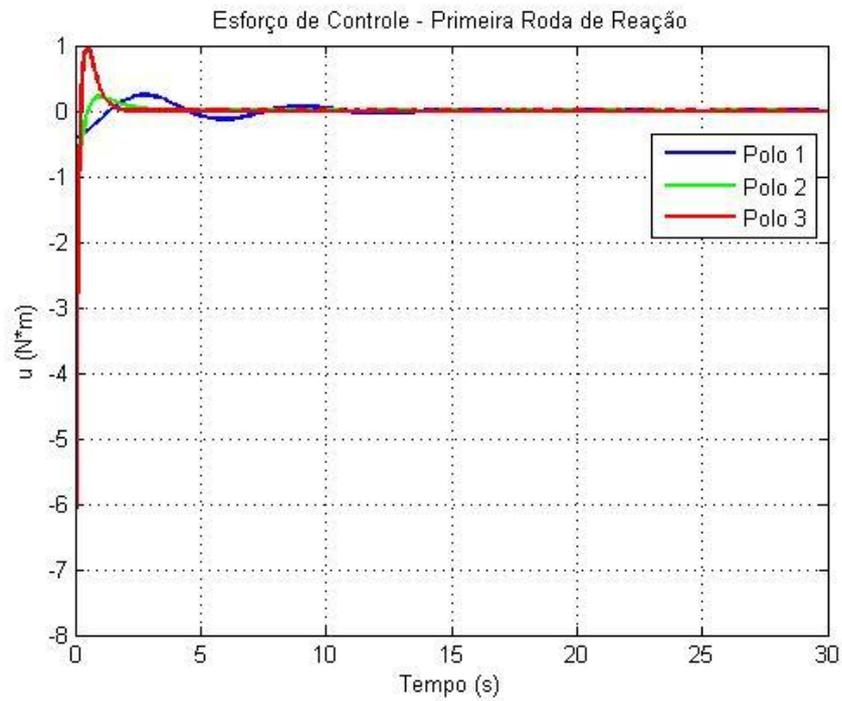


Figura 25 - Esforço de controle para a primeira roda de reação considerando os três conjuntos de polos.

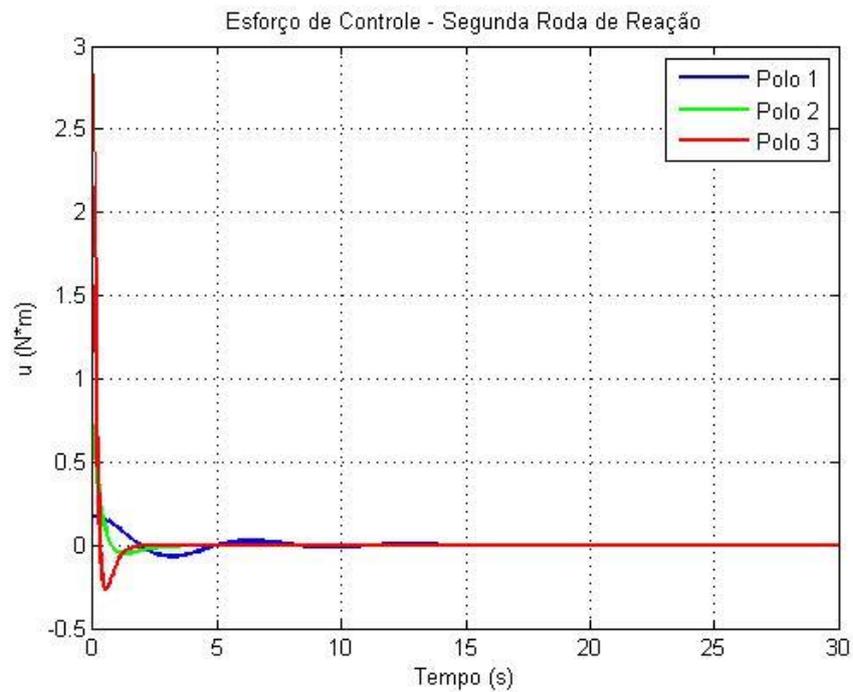


Figura 26 - Esforço de controle para a segunda roda de reação considerando os três conjuntos de polos.

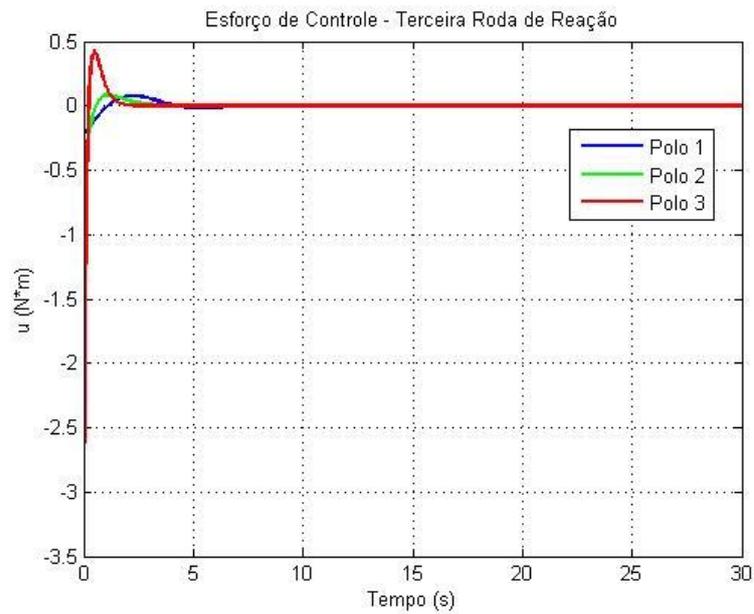


Figura 27 - Esforço de controle para a terceira roda de reação considerando os três conjuntos de polos.

O resultado esperado é um maior esforço de controle, uma maior exigência do uso dos atuadores pelo conjunto de polos 3, como já discutido anteriormente. Sua posição distante do eixo imaginário faz o sistema tender a responder mais rapidamente buscando seu equilíbrio, o que leva aos resultados obtidos acima.

4.2 RESULTADOS PARA REGULADOR LINEAR QUADRATICO

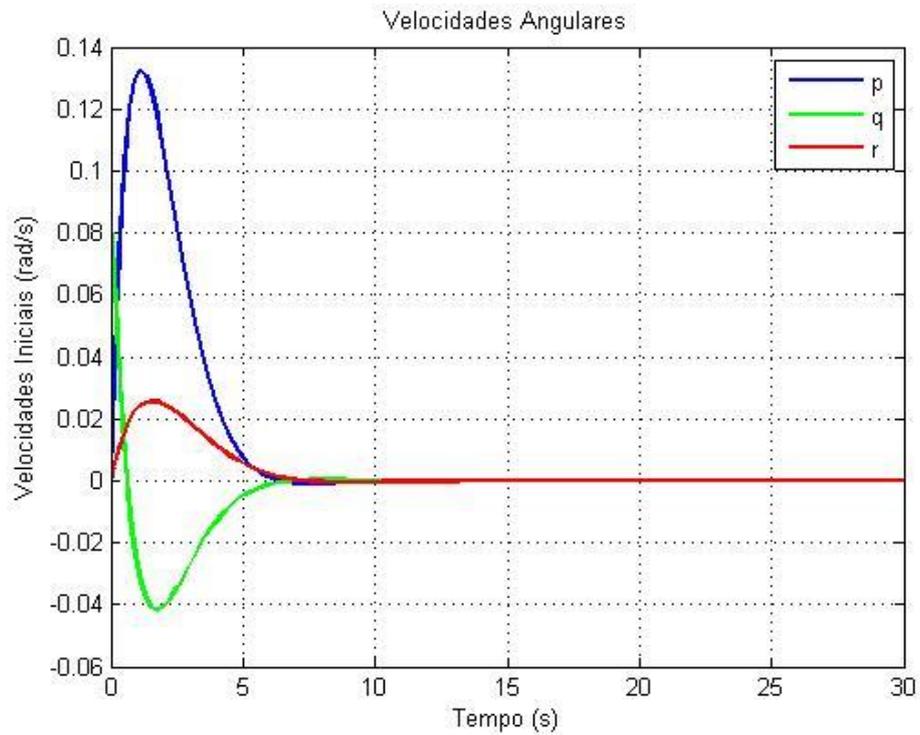


Figura 28 - Velocidades Angulares para LQR (Q=Identidade).

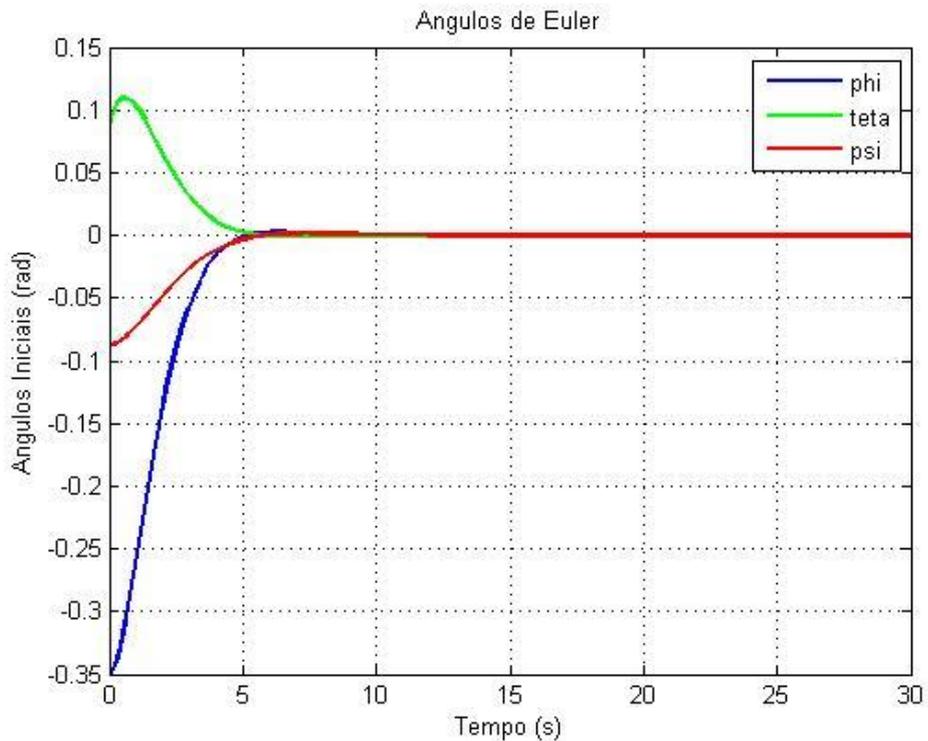


Figura 29 - Ângulos para LQR (Q=Identidade).

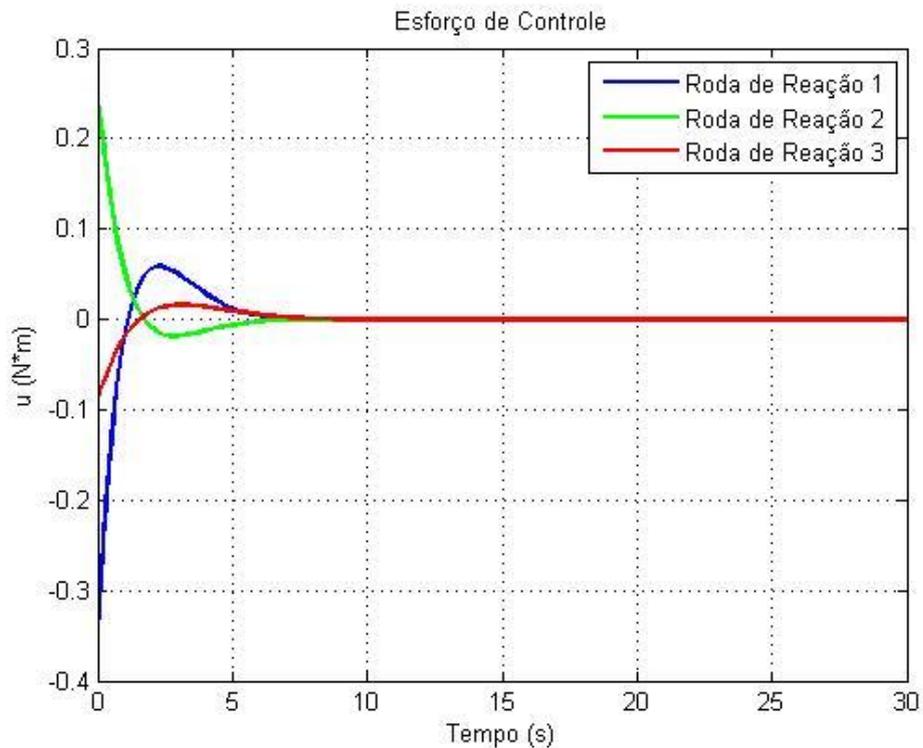


Figura 30 - Esforço de controle para o LQR ($Q = \text{Identidade}$).

Para a simulação do regulador linear quadrático, utilizando valores da diagonal principal da matriz Q iguais a 1, ou seja, valores que geram a resposta com o menor intervalo de tempo. É possível observar o comportamento do sistema, que responde em aproximadamente 5 segundos. Dessa forma, a plataforma inserida nas condições iniciais consegue atingir o estado desejado nesse intervalo de tempo, em até cinco segundos.

Outro ponto de análise é relacionado ao esforço de controle das rodas de reação, que atinge valores de pico aproximados de $0.35 \text{ N}\cdot\text{m}$, durante o intervalo em que a plataforma está buscando o equilíbrio.

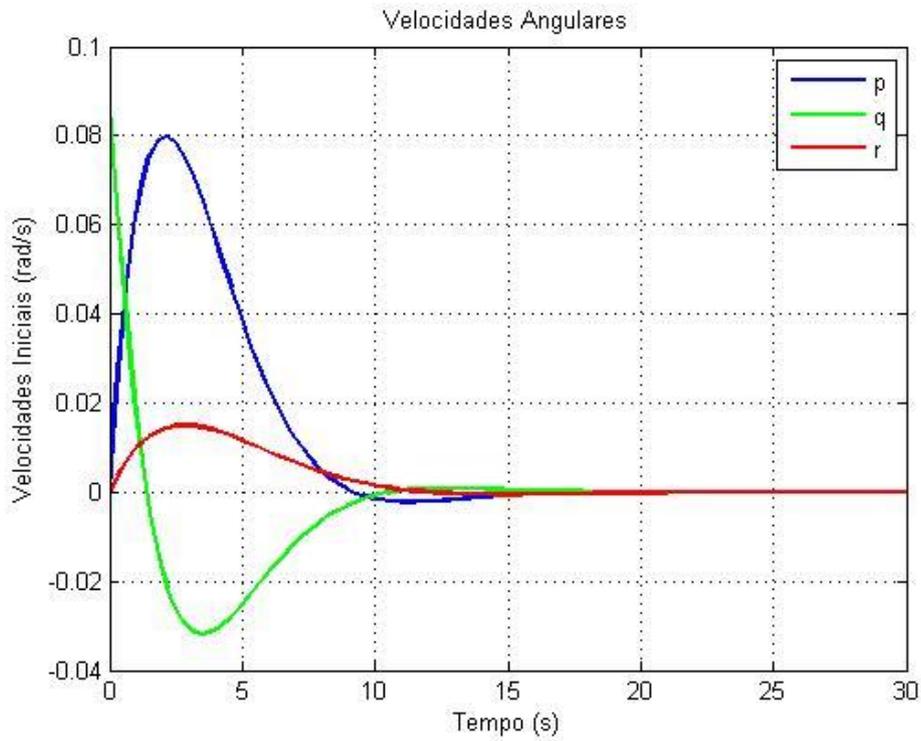


Figura 31 - Velocidades Angulares para LQR ($Q=0.1 \cdot \text{Identidade}$).

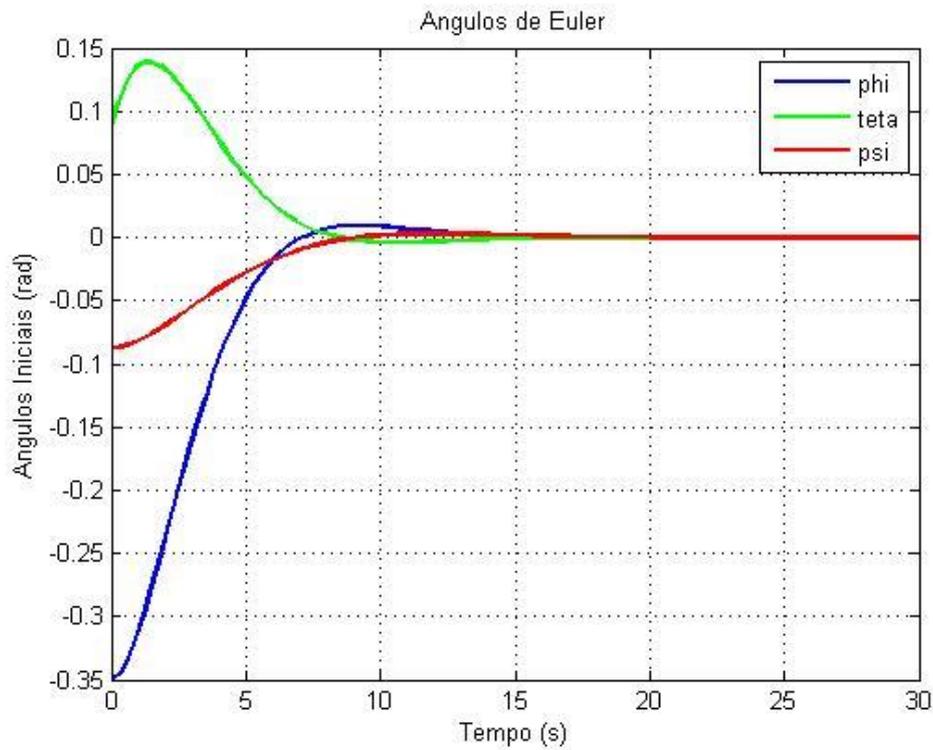


Figura 32 - Ângulos para LQR ($Q=0.1 \cdot \text{Identidade}$).

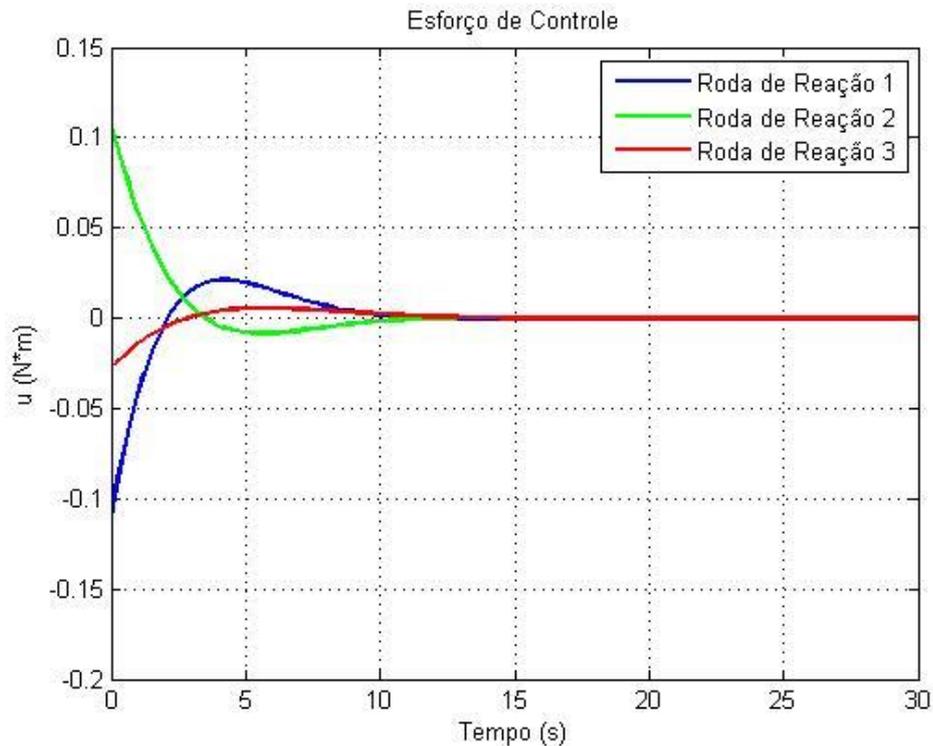


Figura 33 - Esforço de controle para o LQR ($Q = 0.1 \cdot \text{Identidade}$).

A segunda rodada de simulações utilizou-se de valores na diagonal principal da matriz Q igual a 0.1, ou seja, valores 10 vezes menores que os valores utilizados na primeira simulação. Os resultados esperados para tal simulação seriam com intervalos de tempo maiores, mas com esforço de controle reduzido.

Uma breve análise dos gráficos permite concluir que o intervalo de tempo agora é de aproximadamente 10-11 segundos, ou seja, a plataforma levará 10 segundos para atingir o equilíbrio desejável. Em comparação a primeira simulação, a plataforma demandará o dobro do tempo. Entretanto, quando comparados os esforços de controle, agora as rodas de reação necessitarão produzir apenas 0.1 $N \cdot m$, valor cerca de 3 vezes menor que o da simulação inicial do LQR.

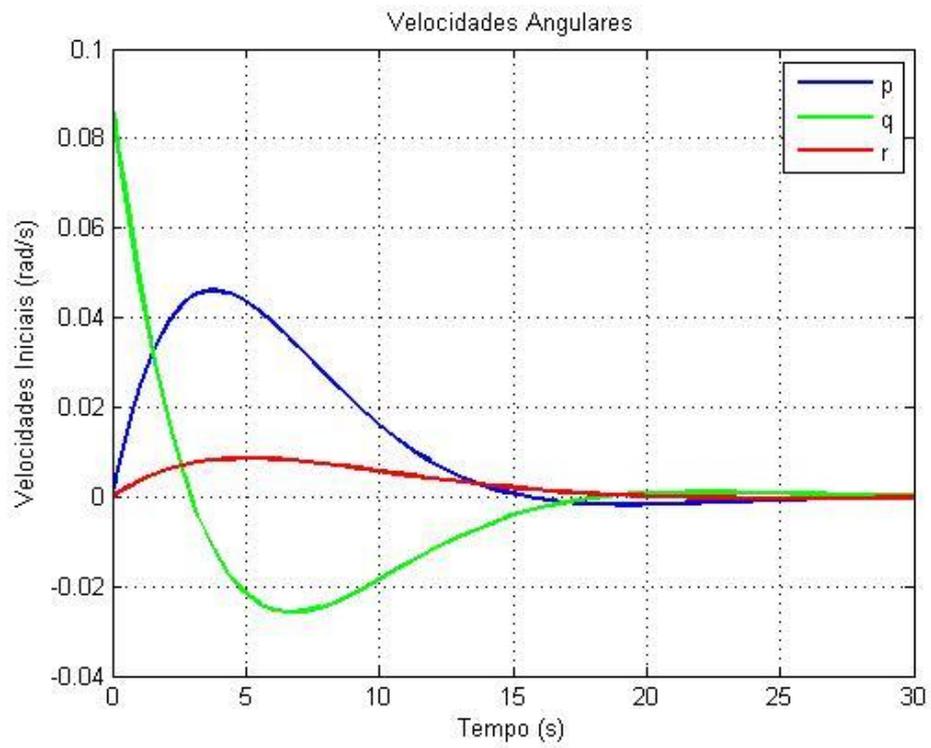


Figura 34 - Velocidades Angulares para LQR ($Q=0.01 \cdot \text{Identidade}$).

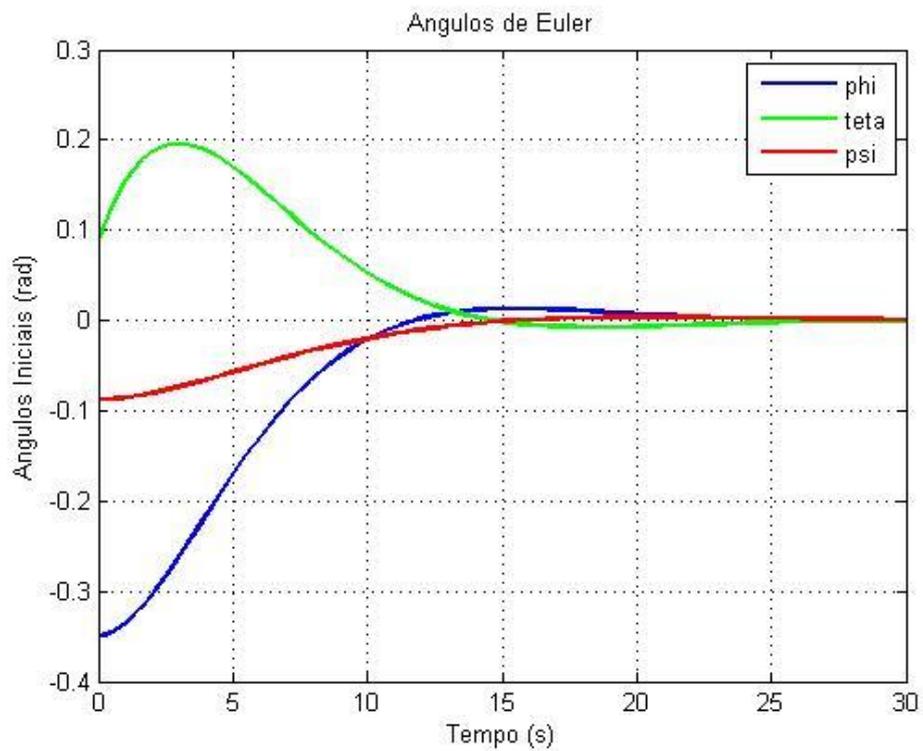


Figura 35 - Ângulos para LQR ($Q=0.01 \cdot \text{Identidade}$).

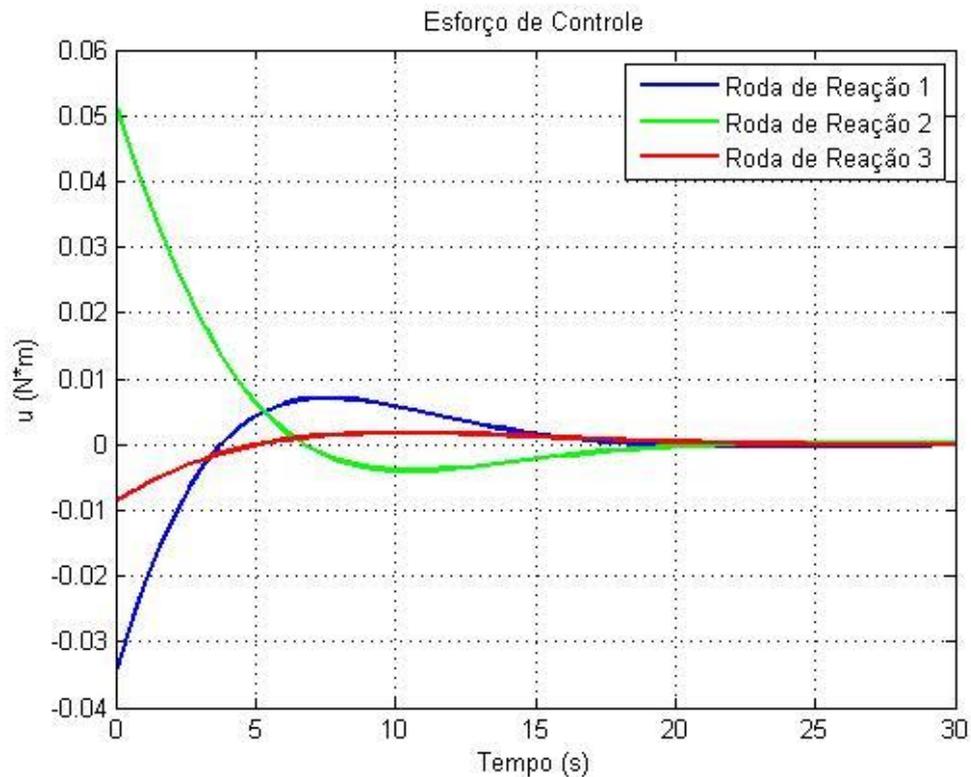


Figura 36 - Esforço de controle para o LQR ($Q = 0.01 \cdot \text{Identidade}$).

A última simulação utilizou de valores da diagonal principal da matriz Q iguais a 0.01, ou seja, 100 vezes menores que os da primeira simulação. Ao analisar os resultados obtidos na simulação, pode-se notar que agora se tem um intervalo de tempo bem maior, a plataforma só conseguirá atingir o equilíbrio aos 17 segundos, aproximadamente.

Logo, ao comparar-se tal valor com o da primeira simulação em LQR, o intervalo de tempo mais que triplicou: passou de 5 segundos para 17 segundos. Já o esforço de controle, teve variação também considerável, passou de 0,35 N*m para 0,035 N*m, valor dez vezes menor.

Como já foi mencionado, para a implementação do LQR foram variados os valores de Q (o valor de $R = 1$ foi mantido constante em todas as simulações), de forma a ver seus efeitos no sistema dinâmico. Assim, pode-se concluir que para valores de Q baixos, o sistema irá utilizar de menor esforço buscando o valor de referência. Entretanto, tal diminuição de esforço acarreta um intervalo de tempo maior. Ou seja, para o sistema atingir o valor de referência foi necessário um

intervalo de tempo bem maior. Para $Q =$ matriz Identidade, tem-se o menor espaço de tempo para que o sistema atinja o referencial predeterminado.

4.3 RESULTADOS PARA O SISTEMA NÃO LINEAR

O objetivo desta seção é verificar o desempenho da lei de controle obtida com a técnica LQR no controle da dinâmica não linear. Assim, utilizou-se do sistema de equações não lineares abaixo (equação 52), sujeito aos ganhos obtidos pelo método LQR apresentados:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_{xx} - I_{zz})qr + I_{xy}pr - I_{xz}pq + I_{yz}(r^2 - q^2) + \dots I_2 w_2 r - I_3 w_3 q + mgr_y \cos \phi \cos \theta - mgr_z \sin \phi \cos \theta \\ (I_{zz} - I_{xx})pr + I_{yz}pq - I_{xy}qr + I_{xz}(p^2 - r^2) - I_1 w_1 r + I_3 w_3 p - mgr_x \cos \phi \cos \theta - mgr_z \sin \theta \\ (I_{xx} - I_{yy})pq + I_{xz}qr - I_{yz}pr + I_{xy}(q^2 - p^2) + I_1 w_1 q - I_2 w_2 p + mgr_x \sin \phi \cos \theta + mgr_y \sin \theta \\ p + \tan \theta [q \sin \phi + r \cos \phi] \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ \frac{1}{\cos \theta} [q \sin \phi + r \cos \phi] \\ \frac{T_1}{I_1} \\ \frac{T_2}{I_2} \\ \frac{T_3}{I_3} \end{pmatrix} \quad (52)$$

O sistema não-linear possui nove variáveis de estado, que podem ser visualizadas na forma matricial acima. Além das seis variáveis de estado (velocidades e deslocamentos angulares) presentes no modelo linear, as velocidades de rotação das rodas de reação voltam a aparecer. Para a simulação da parte não linear, continuou-se usando o Matlab 2013b, utilizando os ganhos obtidos no método LQR, ou seja, para valores de Q iguais a uma matriz identidade, valores de $Q = 0,1$ e $0,01$ na diagonal da matriz, casos vistos no modelo linearizado. Os valores dos ganhos estão relacionados abaixo:

K =

-1.8248	-0.0000	-0.0000	-1.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-1.8250	0.0000	-0.0000	-1.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-2.2923	-0.0000	0.0000	-1.0000

Figura 37 - Valores de K para Q = Identidade.

K =

-0.9147	0.0000	0	-0.3162	-0.0000	0
0.0000	-0.9149	0	-0.0000	-0.3162	0
0	0	-1.2023	0	0	-0.3162

Figura 38 - Valores de K para Q = 0.1*Identidade.

K =

-0.4929	-0.0000	0	-0.1000	-0.0000	0
-0.0000	-0.4930	0	-0.0000	-0.1000	0
0	0	-0.6599	0	0	-0.1000

Figura 39 - Valores de K para Q = 0.01*Identidade.

Dessa forma, buscando resultados mais precisos e mais próximos da realidade na qual o satélite está inserido, outra simulação é realizada utilizando o sistema equacional não linear. Além disso, todas as outras condições foram mantidas as mesmas em ambas as simulações (momentos de inércia, condições iniciais da posição do satélite). Os resultados obtidos estão relatados abaixo:

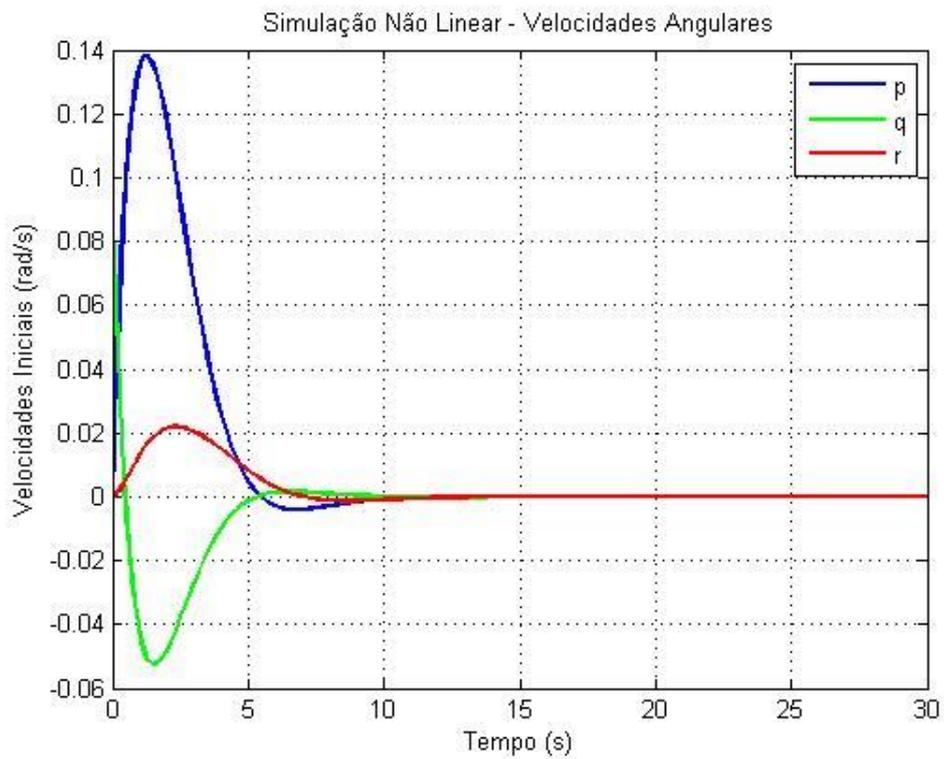


Figura 40 - Velocidades Angulares para os ganhos encontrados quando $Q = 1$ no LQR.

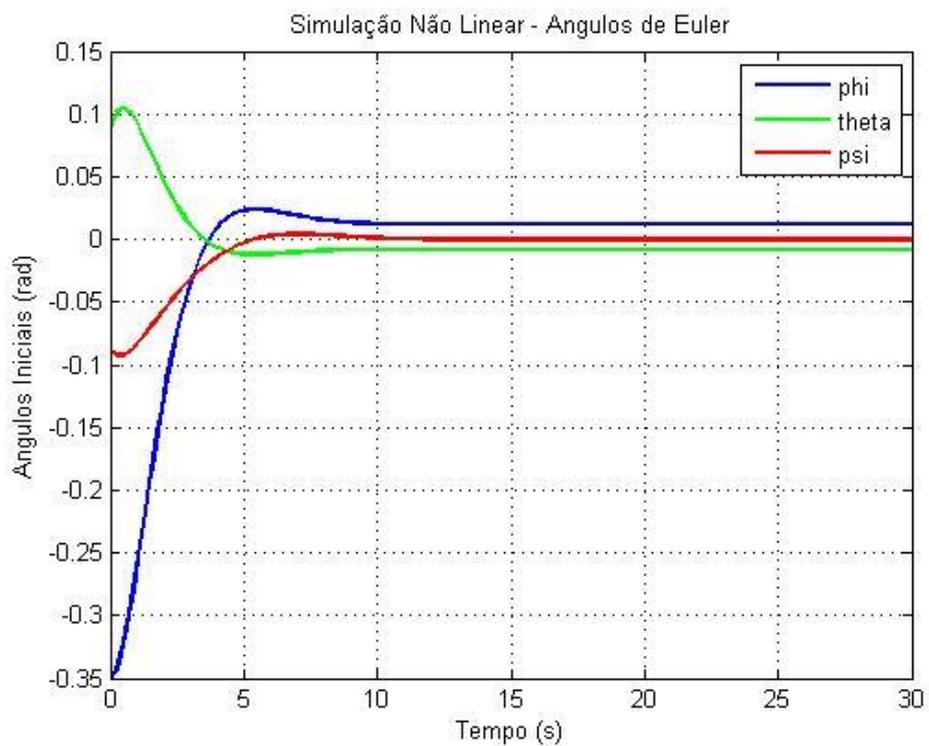


Figura 41 - Ângulos de Euler para os ganhos encontrados quando $Q = 1$ no LQR.

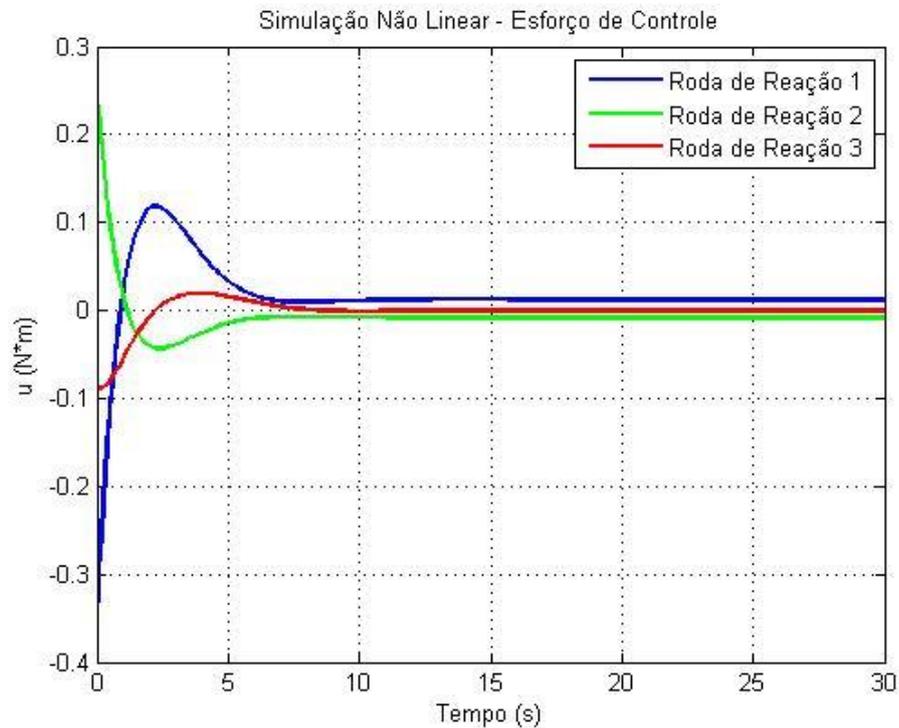


Figura 42 - Esforço de controle para os ganhos encontrados quando $Q = 1$ no LQR.

Para a simulação não-linear, percebe-se comportamento muito próximo ao do sistema linearizado quando aplicado ao LQR. Assim como na simulação linear, o sistema irá buscar atingir o equilíbrio em intervalo de tempo de aproximadamente 5 segundos. Até mesmo os valores do esforço de controle, atingem picos de $0,35 \text{ N*m}$ como na simulação linear para os valores de $Q = 1$.

A diferença agora reside no fato do sistema não conseguir atingir o equilíbrio. É perceptível que as rodas de reação tentam vencer a dinâmica da plataforma, buscando a posição zero, entretanto, não são suficientes para tal movimento. Dessa forma, analisando a figura 42, é notável que as rodas de reação permanecem em regime de ação, sempre produzindo torque, e que mesmo assim o sistema plataforma não atinge (principalmente os ângulos de Euler, representados na figura 41) o equilíbrio.

As próximas simulações, com $Q=0.1$ e $Q=0.01$ possuem comportamento similar, com intervalos de tempo e esforços de controle parecidos com os casos linearizados. Só que assim como na primeira simulação não-linear, o conjunto das

rodas de reação irá continuar trabalhando durante todo o processo, tentando buscar vender a dinâmica da plataforma e não obtendo sucesso.

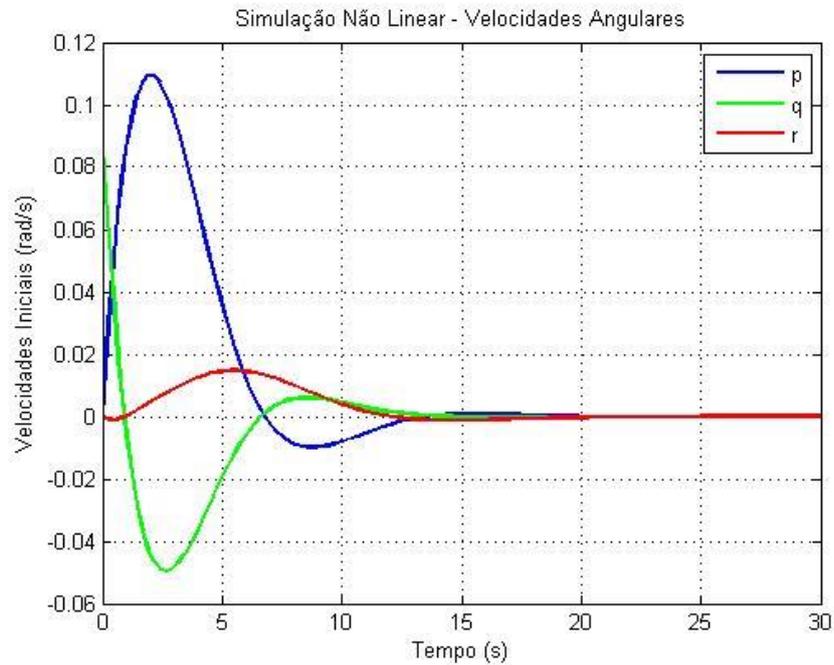


Figura 43 - Velocidades Angulares para os ganhos encontrados quando $Q = 0.1$ no LQR.

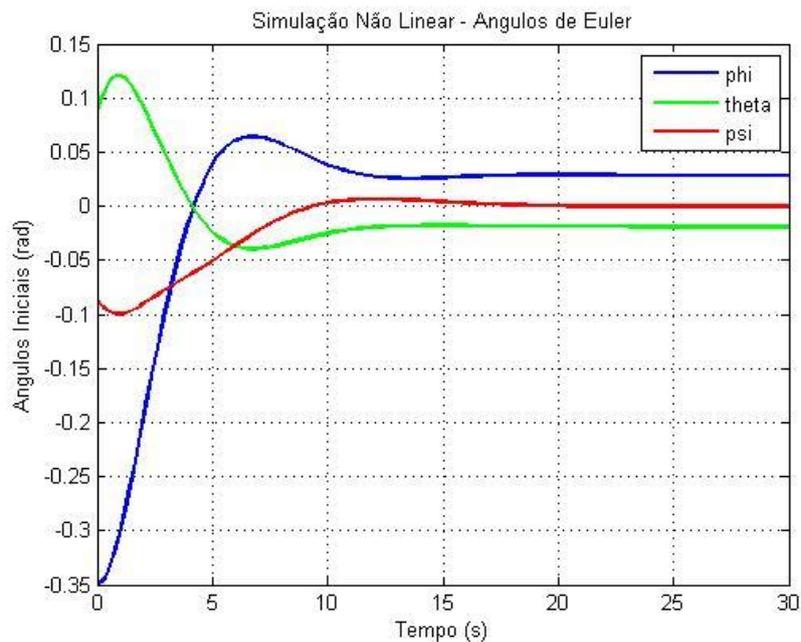


Figura 44 - Ângulos de Euler para os ganhos encontrados quando $Q = 0.1$ no LQR.

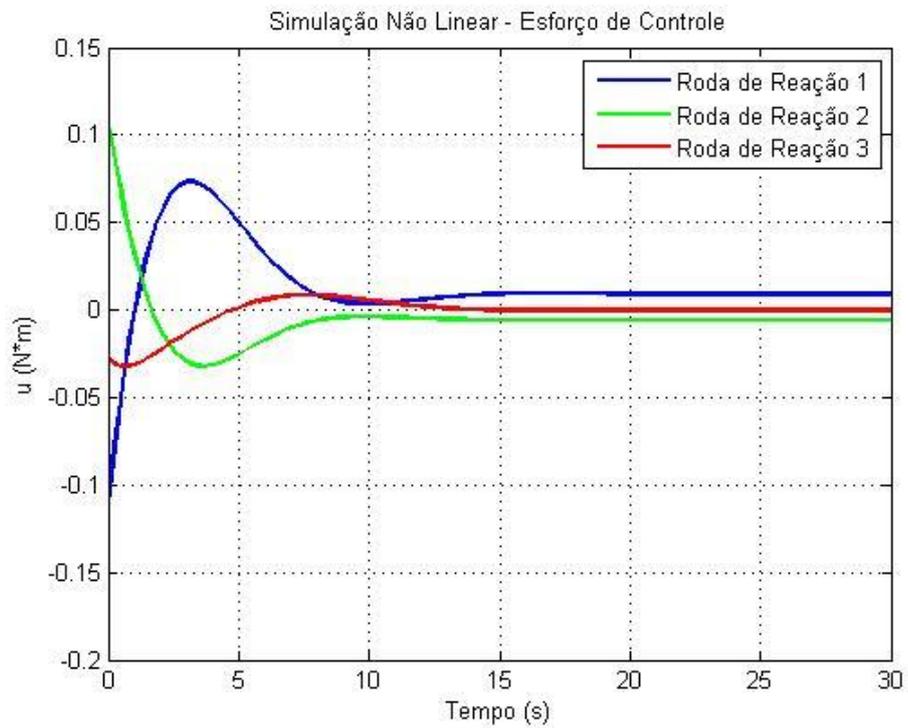


Figura 45 - Esforço de controle para os ganhos encontrados quando $Q = 0.1$ no LQR.

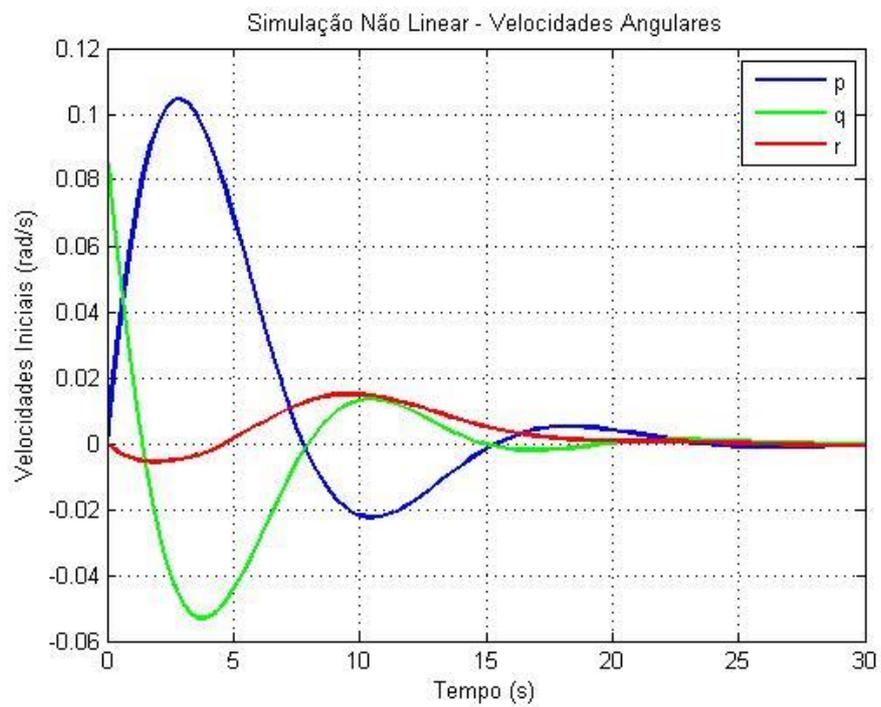


Figura 46 - Velocidades Angulares para os ganhos encontrados quando $Q = 0.01$ no LQR.

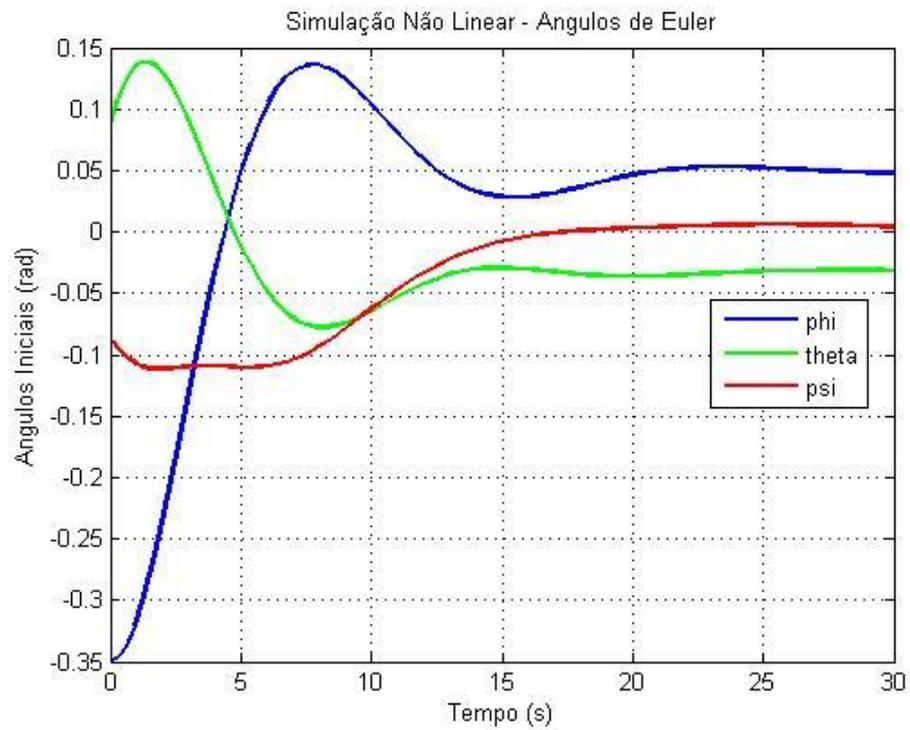


Figura 47 - Ângulos de Euler para os ganhos encontrados quando $Q = 0.01$ no LQR.

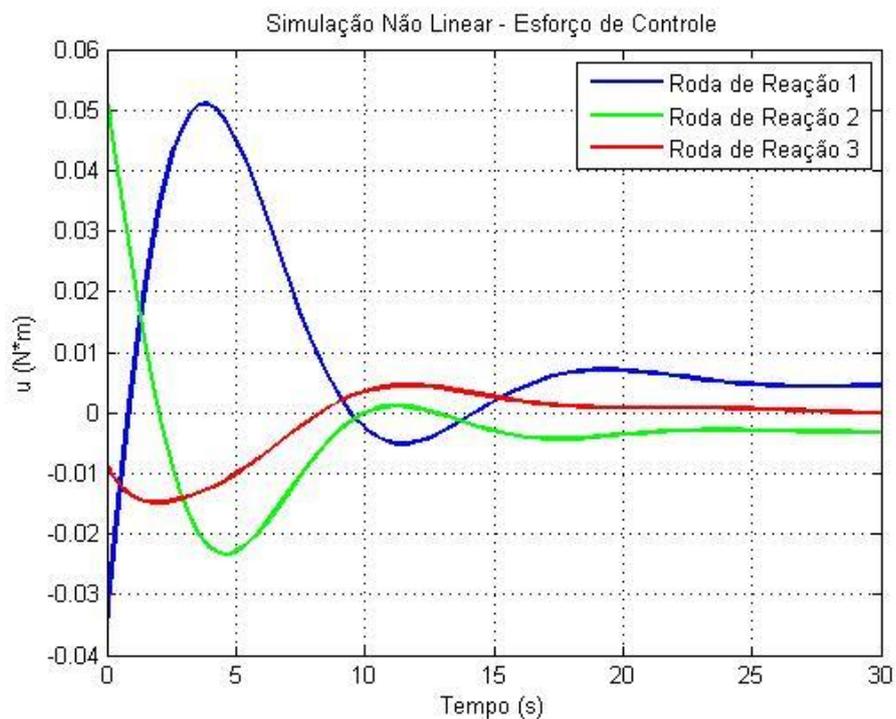


Figura 48 - Esforço de controle para os ganhos encontrados quando $Q = 0.01$ no LQR.

Tais resultados obtidos pelo sistema equacional não-linear podem ser comparados aos valores obtidos do sistema linearizado. Como já relatado anteriormente, adotou-se as condições iniciais para os dois casos, de forma a validar o sistema linearizado.

Assim, quando se compara os valores e comportamentos em ambos os casos, pode-se perceber a proximidade dos valores. O que, dessa forma, corrobora a validade do sistema linearizado, principalmente em casos onde os ângulos iniciais da plataforma experimental são pequenos.

Após essa validação do modelo inicial, linearizado, existe um novo parâmetro que se pode obter com o equacionamento não linear. A velocidade de cada uma das três rodas de reação é uma das variáveis de estado do sistema não linear, o resultado da simulação para conjunto de ganhos será dado abaixo:

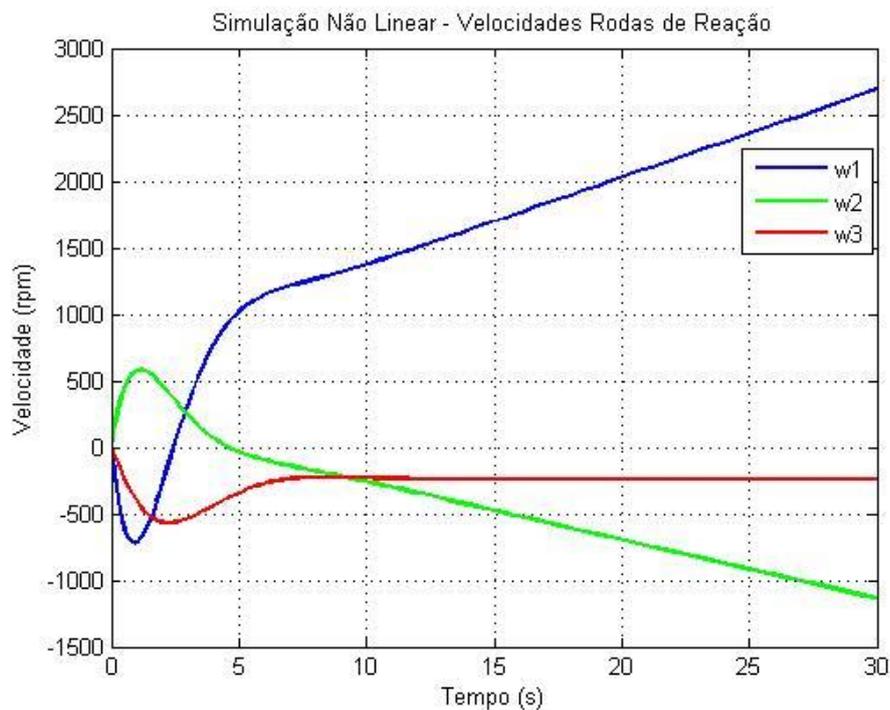


Figura 49 - Velocidade das Rodas de Reação para os ganhos encontrados quando $Q = 1$ no LQR.

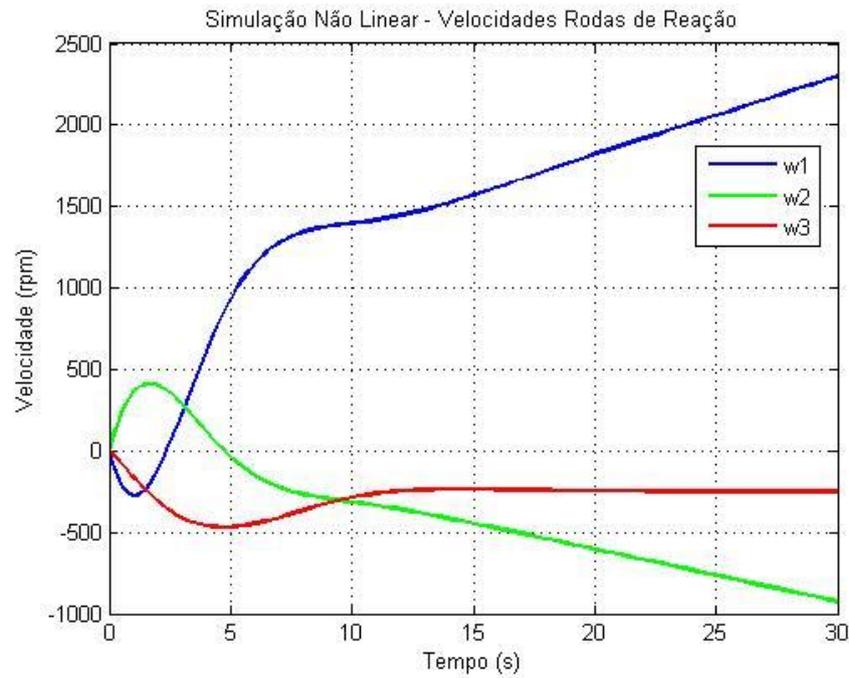


Figura 50 - Velocidade das Rodas de Reação para os ganhos encontrados quando $Q = 0.1$ no LQR.

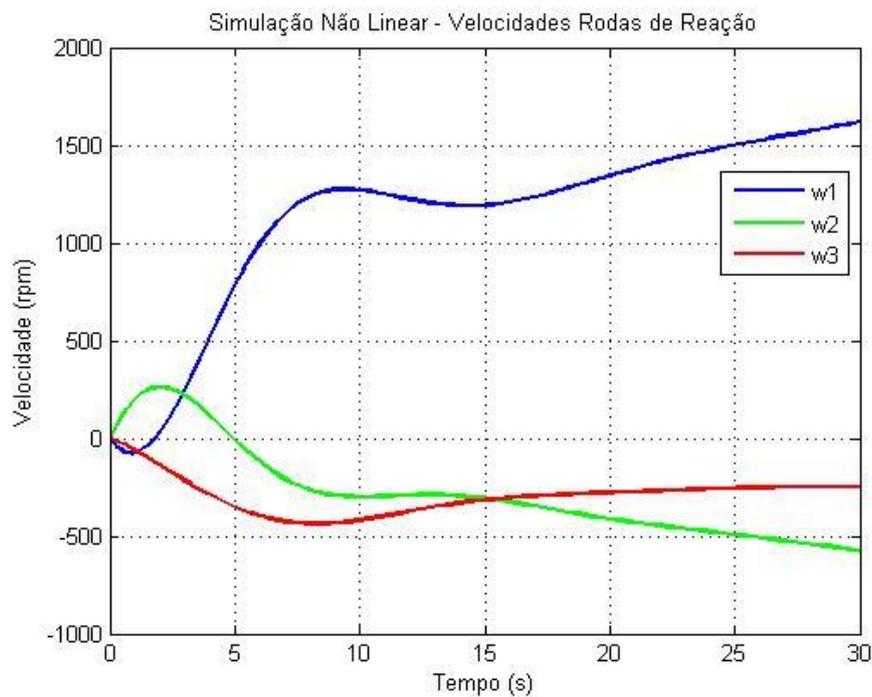


Figura 51 - Velocidade das Rodas de Reação para os ganhos encontrados quando $Q = 0.01$ no LQR.

Ressalta-se, que as rodas de reação funcionam criando torques que contrapõem os torques devidos aos termos não lineares, que por sua vez, afetam atitude do veículo. Eles fazem isso manipulando seu momento angular. É possível observar nas três simulações das rodas de reação comportamentos parecidos em todos os casos: os valores associados às velocidades de cada roda começam a divergir, atingindo valores cada vez mais altos. Esse fenômeno é denominado saturação das rodas de reação. Cada roda tem uma velocidade máxima que é capaz de fornecer para o sistema. Supondo que a velocidade seja de 2000 rpm, isso significa que cada roda poderia ser acelerada para girar a velocidades entre 0 e +2000 rpm e 0 e -2000 rpm. Cada roda pode continuar a produzir um torque enquanto sua velocidade aumenta para +/- 2000 rpm. Ao atingir a velocidade máxima, a roda torna-se incapaz de proporcionar mais torque nesse eixo. Qualquer mudança de velocidade agora será uma desaceleração, o que significa que ele irá produzir um torque na direção oposta que é necessário. Isso é chamado de saturação - o que significa que o sistema armazenou todo o momento que ele pode armazenar está saturado.

Tal comportamento das rodas de reação leva a necessidade de uma nova solução. Assim, ficando evidente, que para o sistema real apenas o controle utilizando as rodas de reação não seria suficiente. Uma das soluções adotadas é utilizando um atuador conhecido como “magneto-torquer” (Trégouët, 2014), como pode ser visto na figura abaixo:

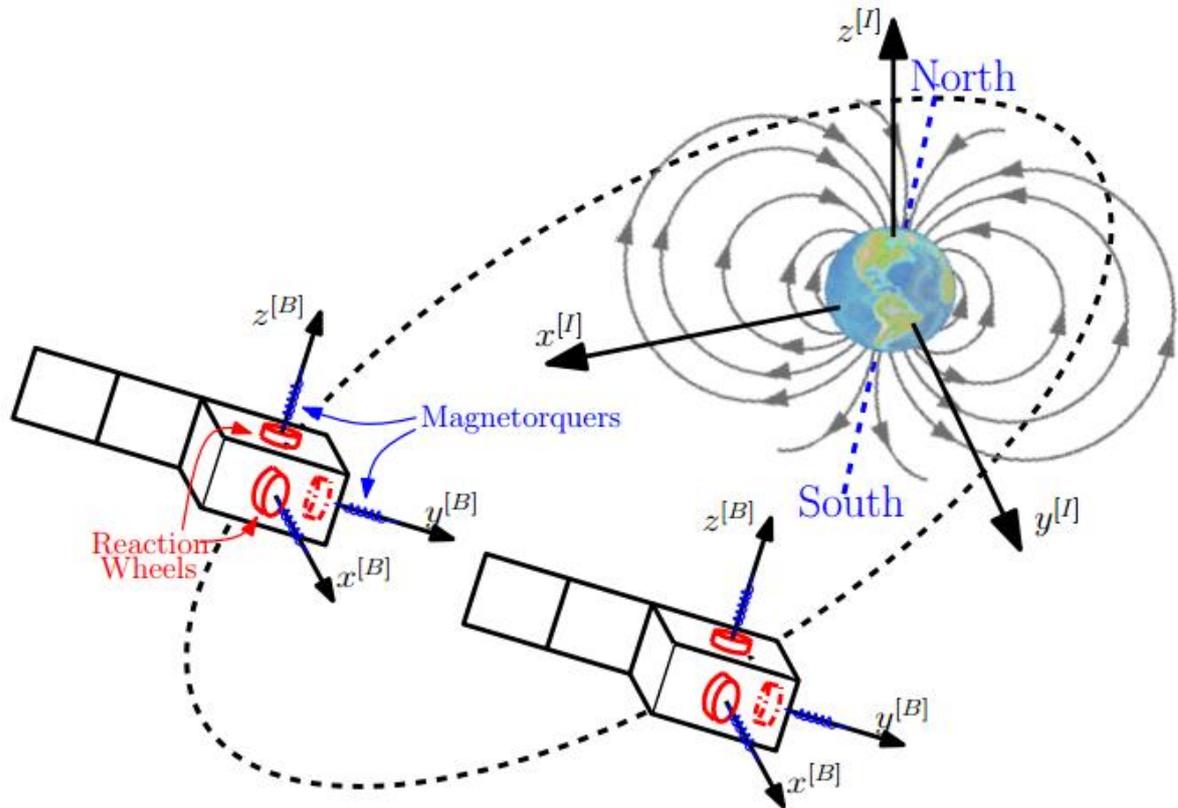


Figura 52 - Satélite com dois atuadores associados, as rodas de reação e os “magnetorquers” (Fonte: Trégouët, 2014).

Com um conjunto desses atuadores agindo, não ocorreria a saturação das rodas de reação. O magneto-torque é capaz de interagir com o campo magnético da terra, e assim gerar torques de dessaturação e assim permitir o controle da atitude do satélite pelo SCA.

Em vez de usar torques magnéticos, outra metodologia possível para que isso ocorra é por meio de torques aerodinâmicos para dessaturação de rodas de reação. À medida que o sistema começa a perder lentamente a capacidade de controle devido à saturação, as rodas de reação podem ser usadas periodicamente para orientar a nave espacial numa orientação em que o torque aerodinâmico resultante dessaturiza o sistema.

Os torques aerodinâmicos em uma nave espacial resultam do arrasto na órbita terrestre baixa (LEO) que atua no braço do momento da espaçonave. O equacionamento e implementação do magneto-torque ou usando torques aerodinâmicos, na plataforma experimental, fogem do escopo desse trabalho, apenas aparecendo como sugestão.

4.4 RESULTADOS PARA ESTIMADOR DE ESTADOS

Após a investigação do controlador LQR para o sistema linear e não linear, nesta seção investiga-se o desempenho do sistema com a introdução de um estimador de estados para o controle de atitude. Tem-se na teoria de sistemas de controles, que nem sempre todos os estados são passíveis de serem medidos. Dessa forma, é necessária utilização de um observador que consiga estimar as variáveis de estado baseado nas medidas das variáveis de saída e das variáveis de controle (OGATA, 1999).

O observador será quase uma cópia da planta inicial, possuirá os mesmos inputs e quase as mesmas equações diferenciais. Um termo é responsável por comparar o sistema atual com a resposta estimada. Dessa forma, obtêm-se os estados estimados que tendam a se aproximar dos valores atuais do sistema. O primeiro passo na construção do observador é escolher um ganho que leve a dinâmica do sistema a ser muito mais rápida que a dinâmica do sistema observado. Dessa forma, escolheu-se polos que estão cinco vezes mais distantes do eixo imaginário que os polos do sistema, dados pela matriz L da equação (99).

O sistema para o observador de estados ficará então, da forma reduzida:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad (99)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (100)$$

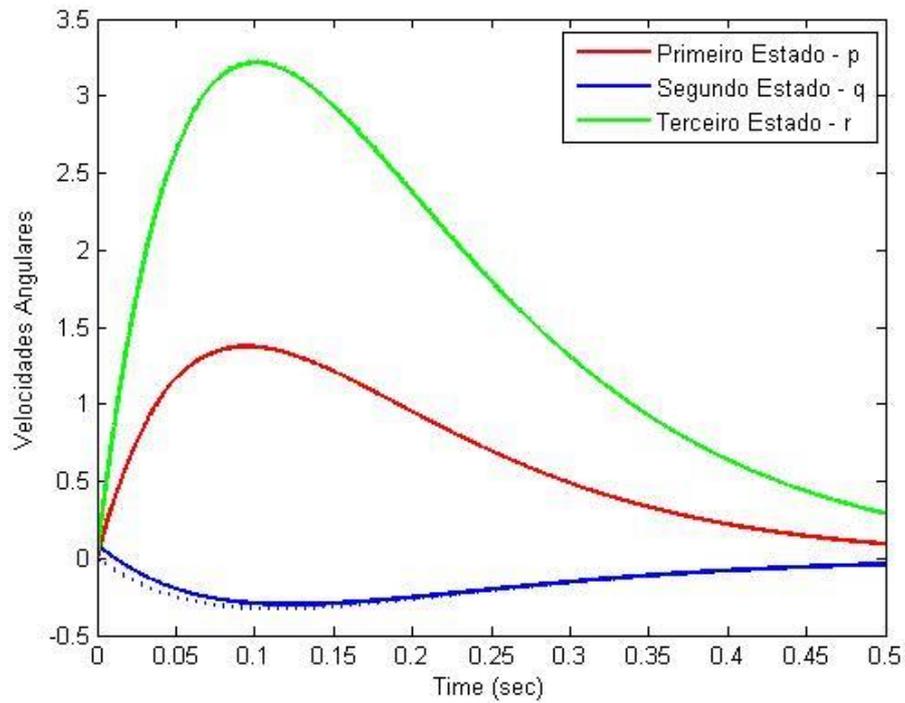


Figura 53 - Estimador de estados para os três primeiros estados.

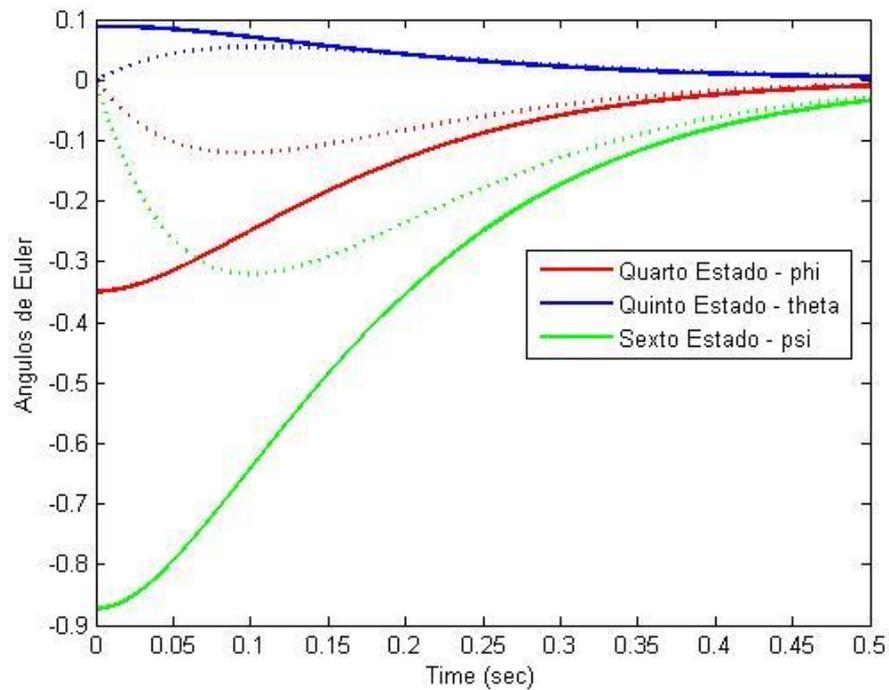


Figura 54 - Estimador de estados para os três últimos estados.

Como esperado, o observador de estados consegue estimar os estados do sistema original de forma rápida, os gráficos são dados no intervalo de 0 a 0.5 segundos, e já é possível observar uma conversão entre o estimador e o valor real do sistema em quase todos os estados. A utilização do sistema com observador é a base para futura implementação de um método linear quadrático gaussiano.

5. CONTRIBUIÇÕES e CONCLUSÕES

Uma primeira contribuição deste trabalho foi a revisão bibliográfica que resumiu os principais conceitos referentes a implementação experimental de Sistemas de Controle de Atitude de satélites, os quais permitem investigar as características da dinâmica e da atitude de um satélite. Além das vantagens econômicas do emprego dessas plataformas experimentais que simulam a dinâmica de veículos aeroespaciais, essas também permitem realizar investigações do desempenho dos subsistemas dos satélites num ambiente próximo ao espacial.

A segunda contribuição deste trabalho foi obter as equações não lineares de movimento deste simulador num ambiente de laboratório computacional. Essas equações foram posteriormente linearizadas e usadas para investigar o desempenho de algoritmos para controlar a velocidade angular e o deslocamento angular (atitude). Particularmente, aplicou-se a técnica de controle LQR (Regulador Linear Quadrático) e em seguida a técnica LQG (Linear Quadrático Gaussiano), associado à alocação de polos. Estas estratégias de controle permitiram obter diferentes ganhos, propiciando ao projetista obter as principais condições de controle de modo satisfazer aos requisitos de desempenho do sistema, tais como, baixa ou alta taxa de amortecimento e redução das oscilações nas respostas dinâmicas do sistema.

Em breve análise das simulações obtidas, tem-se que as simulações realizadas com controlador baseado na alocação de polos foram utilizadas como método de investigação inicial, buscando apenas resultados verificadores dos comportamentos esperados. Ou seja, cada conjunto de polos foi utilizado para levar o sistema a um resultado já esperado.

As simulações com o controlador LQR já foram capazes de disponibilizar resultados mais substanciais. Quando se utilizou valores para Q iguais a 1, o sistema respondeu no menor intervalo de tempo possível, ou seja, aproximadamente cinco segundos e com esforço de controle máximo igual a $0.35 \text{ N}\cdot\text{m}$. As simulações posteriores, foram realizadas diminuindo-se os valores de Q , o que levaria o conjunto da plataforma a utilizar de intervalos de tempo maiores. Assim, para valores de $Q = 0,1$ o sistema levou 10 segundos para atingir o equilíbrio com esforço de controle igual a $0,1 \text{ N}\cdot\text{m}$. Por fim, com valores de $Q = 0,01$ o sistema necessitou de aproximadamente 17 segundos, com esforço de controle de aproximadamente $0,035$

N*m. Em resumo, se tem que o sistema irá necessitar de maiores intervalos de tempo, entretanto, não irá exigir tanto das rodas de reação da plataforma.

Outro ponto relevante é a observação dos resultados para o sistema não-linear. Além dos valores aproximados aos do sistema linearizado, pode-se observar o comportamento das rodas de reação que permanecem funcionando durante todo o intervalo da simulação, dado que o sistema não consegue atingir o equilíbrio durante os 30 segundos simulados.

A terceira contribuição é verificação da capacidade dos ganhos obtidos com a técnica LQR para o sistema linear controlar o sistema não linear. Nesta investigação observou-se que embora o controlador LQR consiga reduzir as velocidades angulares e a atitude da plataforma, as velocidades angulares das rodas de reação atingem valores muito altos, caracterizando a situação de saturação, uma vez que este controlador tem que vencer os termos não lineares da dinâmica.

Por fim, como extensão deste trabalho é sugerido um estudo da dessaturação das rodas de reação por meio de uma lei de controle oriunda da interação de um magneto-torque e o campo magnético da Terra e também através da utilização do arrasto atmosférico.

6. TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresenta a obtenção das equações de movimento de um SCA de satélite com sua dinâmica e sua atitude. Portanto, permite investigar e implementar outros tipos de SCA com diferentes configurações de atuadores e sensores, por meio de outras técnicas de controle, incluindo até maneiras de evitar a saturação das rodas de reação.

Outra forma de expandir o trabalho aqui desenvolvido é validar o código de controle do SCA por meio de um protótipo experimental real. O projeto das leis de controle por meio de simulação tem suas limitações e prevê o comportamento do sistema sob certas condições, mas certamente, um simulador experimental seria muito mais fiel a realidade.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. *Episodes from the Early History of Astronomy*. New York/Berlin: Springer, 2001.

BARÃO, Renato Casali. *Algoritmo de controle ótimo quadrático com restrições*. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, USP, 1997.

BBC - British Broadcasting Corporation. Ecuador Pegasus satellite fears over space debris crash. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: <http://www.bbc.com/news/world-latin-america-22635671>

BBC - British Broadcasting Corporation. JWST price tag now put at over \$8bn. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: <http://www.bbc.com/news/science-environment-14625362>

CHERNESKY, Vincent S. Development and Control of a Three-Axis Satellite Simulator for the Bifocal Relay Mirror Initiative, 2001.

DOYLE, J.C. e STEIN, G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. **IEEE Trans. Auto. Contr.**, v. AC-26, n. 1, p. 4-16, 1981.

ESCOBAL, P.R. *Methods of orbit determination*. New York: John Wiley & Sons, 1965.

FILHO, G. T. C. Simulador de sistemas de controle de atitude de satélites SSCAS. Relatório final de iniciação científica. Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 2006.

FRANKLIN, G.F. *et al. 3rd. ed. Feedback control of dynamic systems*. Boston: Addison-Wesley Longmann, 1993.

GENDOTTI, Patrick. Space-Based Solar Power: A New Path Towards Sustainable, Clean Energy? Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <https://illumin.usc.edu/257/space-based-solar-power-a-new-path-towards-sustainable-clean-energy/>

GLOBALCOM. The costs of building and launching a satellite. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <http://www.globalcomsatphone.com/hughesnet/satellite/costs.html>

HOFFMANN L. T. Estudo de simuladores computacionais aplicados ao ciclo de desenvolvimento de plataformas orbitais. Exame de Qualificação - Gerenciamento e Engenharia de Sistemas Espaciais. INPE. São José dos Campos, 2009. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <http://www.lac.inpe.br/%E2%88%BChoffmann/publicacoes/HoffmannQualificacao.pdf>

HOLMES, Thomas J.; RECKDAHL, Keith J.; TILLEY, Scott W. Onboard attitude control system using reaction wheels (patente de roda de reação). Acesso em maio de 2016. Disponível em: <http://www.google.com/patents/EP1114774A2?cl=en>

HUBBLE SPACE TELESCOPE. About Hubble. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: http://www.spacetelescope.org/about/general/fact_sheet/

JOSHI, S.M. Control of Large Flexible Space Structure. Vol. 131 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1989.

KANG, J.-Y.; KIM, J.-M.; CHUNG, S. J. Design and development of an advanced real-time satellite simulator. **Electronics and Telecommunications Research Institute Journal**, v. 7, n. 13, p. 14, 1995.

KANIESKI, J. M. Modelagem e controle LQR aplicada a um condicionador de energia. 174f. Dissertação de Mestrado – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2010.

KAPLAN. M. H, Modern Spacecraft Dynamics and Control. USA: John Wiley & Sons, 1976.

KUGA, H. K. *et al.* Introdução à determinação de órbita e manobras orbitais. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, p. 38-49, 2001.

KUGA, H. K. Matriz de transição do movimento kepleriano elíptico. (INPE-3779-NTE/250). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, p.13. São José dos Campos, 1986.

LARSON, W. J.; WERTZ, J. R. (Ed.). Space Mission Analysis and Design. 2ª ed., Microcosm, Inc and Kluwer Academic Publishers, 1992.

LUYBEN, W.L. Process modeling simulation and control for chemical engineers. 2ª ed. McGraw- Hill, 1996.

MOOK, D. J.; LEW, J. S. **The Journal of the Astronautical Sciences**. v.38, n.2, pp. 229-243, Apr-Jun, 1990.

NASA - National Aeronautics and Space Administration. About the Hubble Space Telescope. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: https://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/story/index.html

NASA - National Aeronautics and Space Administration. FirstSatellites. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: <https://www.jpl.nasa.gov/jplhistory/early/firstsatellites.php>

NASA - National Aeronautics and Space Administration. The Hubble Space Telescope. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <https://asd.gsfc.nasa.gov/archive/hubble/missions/sm1.html>

NASA - National Aeronautics and Space Administration. The Spinning World of Spacecraft Reaction Wheels. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: https://saturn.jpl.nasa.gov/legacy/files/Spinning_World.pdf

OGATA, K. Engenharia de controle moderno. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1990.

ROCHA, H. R. O. Sistemas Realimentados – projetos de sistema de controle no espaço de estado. UFES. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: <http://www3.ceunes.ufes.br/downloads/2/helderrocha-9-AulaDeSistemasRealimentadosProjetoEspacoDeEstado.pdf>

ROMANO, Anthony F. *SPACE - A Report on the Industry*. Defense Technical Information Center, 2005. Retrieved 15 May 2011.

SANTANA, A. *et al.* Controle Digital de Atitude de Satélites Artificiais. 2010.

[SELOW, R.; VEIGA, S. L. Controlador do Tipo LQG. 2005.](#)

SILVA, J. M. G. da; BAZANELLA, A. S. Ajuste de Controles PID. Acesso em junho de 2016. Disponível em: <http://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/apostila.html>

SILVA C. M. L. Estimaco conjunta de orbita e atitude de satélites artificiais estabilizados por rotao utilizando observaoes do magnetometro e sensor solar. Dissertao de Mestrado do Curso de Ps-Graduao em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecnica Espacial e Controle. INPE, So Jos dos Campos, 2005. Disponível em: <http://mtc-m16c.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/jeferson/2005/06.15.17.32/doc/publicacao.pdf>

SOUZA, L. C. G. Dynamics and Robust Control for Uncertain Flexible Space System. Tese de doutorado. Cranfield Institute of Technology, CoA, Cranfield, England, 1992.

SOUZA P. N. Subsistema de Controle de Atitude. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE, So Jos dos Campos, SP. Acesso em outubro de 2015. Disponível em: http://www.inpe.br/twiki/pub/Main/IntroducaoTecnologiaSatelites/170_Satelites_P_2.2_v4.1_2011.pdf

SPACE X. Elon Musk. "Senate Testimony – May 5, 2004". Acesso em setembro de 2015. Disponível em: <http://illuminate.usc.edu/257/space-based-solar-power-a-new-path-towards-sustainable-clean-energy/3/>

TANYGIN, S. e WILLIAMS, T. Mass property estimation using coasting maneuvers. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Vol. 11, p. 625-632. Maio-Junho, 1997.

TOGNETTI, E. S. *Controle Robusto: Análise e Controle via LMIs*. 2014.

TREGOUET, J. F. *et al.* Reaction wheels desaturation using magnetorquers and static input allocation. 2014.

UNICAMP – Universidade de Campinas. Controlabilidade e alocação de pólos. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: http://www.fem.unicamp.br/~em621/aulas/aula23/controlabilidade_alocacao_de_polos-2.pdf

UCS – Union of Concerned Scientists. USC SatelliteDatabase. Acesso em novembro de 2015. Disponível em: <http://www.ucsusa.org/nuclear-weapons/space-weapons/satellite-database#.WVmVL4TyvIW>

USC – University of Southern California. [Space-Based Solar Power. A New Path Towards Sustainable, Clean Energy?](https://illuminate.usc.edu/257/space-based-solar-power-a-new-path-towards-sustainable-clean-energy/) Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <https://illuminate.usc.edu/257/space-based-solar-power-a-new-path-towards-sustainable-clean-energy/>

WALKER, B. B. *Responsible launching: space security, technology, and emerging space states*. 2010.

ZOLFAGHARIFARD, E. *We're surrounded by SPACE JUNK: Incredible image reveals the disused rockets and abandoned satellites that orbit Earth.* Acesso em outubro de 2015. Disponível em: <http://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-2523271/Image-reveals-disused-rockets-abandoned-satellites-orbit-Earth.html>