

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**ANÁLISE DO FENÔMENO DE PUNÇÃO EM LAJES LISAS
PELA TEORIA DA FISSURA CRÍTICA DE CISALHAMENTO**

DIOGO HENRIQUE DE OLIVEIRA SOUZA

ORIENTADOR: MARCOS HONORATO DE OLIVEIRA

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ENGENHARIA
CIVIL**

**BRASÍLIA / DF
JUNHO / 2016**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ENGENHARIA
CIVIL**

DIOGO HENRIQUE DE OLIVEIRA SOUZA

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

**MARCOS HONORATO DE OLIVEIRA, D. Sc. (ENC/FT/UNB)
(ORIENTADOR)**

**PAULO CHAVES DE REZENDE MARTINS, D. Sc. (ENC/FT/UNB)
(EXAMINADOR INTERNO)**

**GALILEU SILVA SANTOS, D. Sc
(EXAMINADOR EXTERNO)**

BRASÍLIA, 30 DE JUNHO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Souza, Diogo Henrique de Oliveira

Análise do Fenômeno de Punção em Lajes Lisas Pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento.

X, 75p, 210 x 297 mm (ENC/FT/UNB, Bacharel, Engenharia Civil, 2016)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Punção

2. Fissura Crítica

3. Concreto armado

4. Armadura de cisalhamento

I. ENC/FT/UnB

II. Bacharel em Engenharia Civil (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOUZA, D. H. O. (2016) Análise do Fenômeno de Punção em Lajes Lisas Pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento. Monografia de Projeto Final, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Diogo Henrique de Oliveira Souza

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Análise do Fenômeno de Punção em Lajes Lisas Pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2016

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito dos autores.

Diogo Henrique de Oliveira Souza
QND 08 Casa 05 – Taguatinga Norte
71120-080 – Brasília – DF - Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por estar sempre presente na minha vida, me dando forças e discernimento para continuar em momentos de dificuldades e de alegrias.

Um sincero agradecimento ao Professor Marcos Honorato, pelo apoio, conselhos, ensinamentos e dedicação no decorrer deste trabalho e durante a graduação. Pelos conselhos relativos à vida profissional.

A todos meus familiares por sempre estar sendo solícito comigo, por estar na torcida na minha vida. Em especial ao meu avô Jorge Filete de Oliveira e ao meu pai José Rodrigues de Souza Filho, pelo exemplo que foram na minha vida e pela imensa saudade que me deixam.

Dedico este trabalho à minha mãe Maria, aos meus irmãos Dickson e Diego, que sempre estiveram presentes, me apoiando e torcendo em todos os momentos da minha vida. Em especial agradeço minha mãe, pelo exemplo, por todo amor e por ser tão maravilhosa.

Dedico especialmente também este trabalho a Aldenora Santos, a Sabrinna Gualberto, a Raul Nacamura, a Cleide Nacamura.

A todos meus colegas de graduação, pelos bons momentos vivenciados e pelas lutas que juntos superamos.

Queria agradecer em especial a todos os professores que me deram aula e passaram todo o conhecimento que adquiri ao longo do curso, pois sem eles não seria engenheiro.

RESUMO

Este trabalho versa sobre a avaliação da resistência e do comportamento de cisalhamento de lajes lisas de concreto com armaduras de cisalhamento na ligação laje x pilar. Para isso, foram estudados o código normativo fib Model Code 2010 e o modelo teórico proposto por Muttoni (2008). Ambos, código e modelo se baseiam na avaliação da resistência da ligação laje x pilar em função da relação carga x rotação associado a um critério de ruína, denominada Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, que prescreve a resistência à punção pela teoria da fissura crítica. Nas normas atuais para armadura de cisalhamento na ligação laje-pilar, nota-se uma dissensão entre os resultados normativos gerando assim insegurança quanto às recomendações normativas. Para comparação entre a teoria da fissura crítica de cisalhamento e o CEB-FIB Model Code 2010 utilizou-se o bancos de dados dos pesquisadores Oliveira (2013) e de Ferreira (2010). Com o software excell, calculou-se as forças de cisalhamento, dentro da região de armadura de cisalhamento, fora da região de armadura de cisalhamento e a máxima força de cisalhamento. Com este software também se calculou a rotação da laje ψ em relação ao pilar com o auxílio da função atingir meta e com a utilização de macros. Comparando-se os resultados nove lajes pelo CEB-FIB Model Code 2010 e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, de acordo com a precisão de cada método se verificou melhores resultados para a Teoria da Fissura crítica de cisalhamento para precisão completa. Analisando os métodos da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento e o CEB-FIB Model Code 2010 o método completo da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento foi o mais eficiente em estimar a carga de ruptura e o modo como acontece a ruptura na laje, com uma média razoável da carga de ruptura e estar respeitando os resultados frágeis em 5%.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Punção em lajes	1
1.2	Teoria da fissura crítica de cisalhamento.....	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	Teoria da fissura da crítica por Aurélio Muttoni (1985).....	5
2.2	Modelo de Estudo para a falha de cisalhamento de viga bi apoiada com barras longitudinal e sem barras transversais	9
2.3	Modelo de cisalhamento com base na plastificação da ligação da laje com o pilar ..	13
2.4	Modelo para cálculo de cisalhamento para laje circular axissimétricas	22
2.5	Modelo de cisalhamento com base na rugosidade da superfície de fissura.....	27
2.6	Modelo de cisalhamento com base na região de ruptura de cisalhamento	32
2.7	Modelo de força de cisalhamento com armadura de cisalhamento	39
2.8	CÓDIGO MODELO 2010 – MC 2010	44
3	BANCO DE DADOS DE LAJES ENSAIADAS	53
4	RESULTADOS	58
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	69
6	CONCLUSÃO	72
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Detalhe da armadura em quatro direções de lajes Turner	1
Figura 2 – Laje com Carptel	2
Figura 3 – Colapso do Prest-o-Building	2
Figura 4 – Fissura crítica por punção	4
Figura 5 – Área de influência para punção devido ao cisalhamento	6
Figura 6 – Área de influência em borda de pilares	7
Figura 7 - Lajes com espessura variável	7
Figura 8 – Área de influência	7
Figura 9 – Área de influência de pilar de borda e de canto	8
Figura 10 - Resultados de Ensaio de Punção de Cisalhamento em lajes. Ensaio B-2, B-4, B-9, e B-14 de referência 1	9
Figura 11 - Cisalhamento em vigas sem estribo	10
Figura 12 - Modelos estruturais de fissura com propagação de trincas	10
Figura 13 - Modelo estrutural devido ao deslocamento relativo da fissura crítica	11
Figura 14 - Reforço de cisalhamento em área crítica e seu efeito	11
Figura 15 - Lajes com armadura anelar	12
Figura 16 - Diagramas de carga-rotação de lajes próxima ao pilar	13
Figura 17 - Faixas de lajes com a solução de equilíbrio de acordo com a teoria da plasticidade e as fissuras e a ruptura	15
Figura 18 – Momento de descompressão em função da força normal	18
Figura 19 - Determinação da carga de punção para o critério de ruptura	19
Figura 20 – Variação da tensão tangencial no aço para o estado elastoplástico e zona plástica	20
figura 21 – Comportamento da deformação devido à punção	21
Figura 22 - Laje circular axissimétricas, dividida em regiões $\Delta\phi$	22
Figura 23 - Ações na laje	22
Figura 24 - Prismas de concreto armado com reforços dispostos a 45° e 90° solicitado tensão pura	23
Figura 25 - Detalhes prismáticos com reforços dispostos a 45°	24
Figura 26 - Força cortante V X rotação ψ máxima	25
Figura 27 - Geometria de uma laje circular e de laje quadrada	25

Figura 28- Linhas de ruptura negativa do momento de flexão e carga de ruptura	25
Figura 29 - Padrão de fissuras à resistência de cisalhamento de vigas	27
Figura 30 - Teste BP0 por Muttoni e Thürlimann	28
Figura 31 - Modelo da Fissura crítica.....	30
Figura 32 - Padrão de Fissuramento em feixe	32
Figura 33 - Modelos de falha em lajes planas com perfuração devido ao cisalhamento	33
Figura 34- Perfuração na zona de cisalhamento com reforço	34
Figura 35 - Contribuição da armadura de cisalhamento.....	36
Figura 36 - Modo de fissura por descolamento	38
Figura 37 - Suporte teórico que se desenvolve a fissura crítica de corte.....	39
Figura 38 - Testes por Bollinger ¹⁴ com reforços de anel e efeito de reforço adicional na vizinhança do corte crítica de fissura na capacidade de carga: (a) e (b) distribuição da armadura de Amostras 11 e 12	40
Figura 39 - Laje axissimétrica com parâmetros geométricos e rotação da laje.....	41
Figura 40 - Laje axissimétrica com forças no concreto e reforço agindo em parte da laje	41
Figura 41 - Laje axissimétrica com forças internas que atuam em parte da laje.....	42
Figura 42 - As curvas de carga-rotação e critérios de falha para várias proporções de armadura longitudinal e espessuras de laje.....	43
Figura 43 - Altura efetiva resistente ao cisalhamento da laje considerando a penetração do apoio (d_v) e altura efetiva considerada para o cálculo de resistência à flexão.....	45
Figura 44 - Perímetro crítico das áreas de apoio	45
Figura 45- Perímetro crítico das paredes	45
Figura 46 - Escolha do perímetro crítico potencialmente determinante.....	46
Figura 47 - Redução do perímetro crítico básico reduzido ($b_{l,red}$) nos casos de: (a) abertura; e (b) tubulações	46
Figura 48 - Laje LN01	54
Figura 49 - Laje LN02	55
Figura 50 - Laje LN04	55
Figura 51 - Laje LN05	56
Figura 52 - Laje LS01.....	56
Figura 53 - Laje LS02.....	57
Figura 54 - Laje LS07.....	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Principais características das lajes.....	54
Tabela 2 - Previsão da carga de ruptura pelo TFCC.....	58
Tabela 3 - Previsão da carga de ruptura pelo CEB-FIB Model Code	59
Tabela 4 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível I de aproximação de ψ	60
Tabela 5 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível II de aproximação de ψ	61
Tabela 6 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível II de aproximação de ψ	62
Tabela 7 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível III de aproximação de ψ	63
Tabela 8 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível III de aproximação de ψ	63
Tabela 9 - Comparação dos métodos teóricos	69

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Laje LN01 Carga resistente e solicitante em função da rotação	64
Gráfico 2 - Laje LN02 Carga resistente e solicitante em função da rotação	64
Gráfico 3 - Laje LN03 Carga resistente e solicitante em função da rotação	65
Gráfico 4 - Laje LN04 Carga resistente e solicitante em função da rotação	65
Gráfico 5 - Laje LN05 Carga resistente e solicitante em função da rotação	66
Gráfico 6 - Laje LS01 Carga resistente e solicitante em função da rotação.....	66
Gráfico 7 - Laje LS02 Carga resistente e solicitante em função da rotação.....	67
Gráfico 8 - Laje LS05 Carga resistente e solicitante em função da rotação.....	67
Gráfico 9 - Laje LS07 Carga resistente e solicitante em função da rotação.....	68

1 INTRODUÇÃO

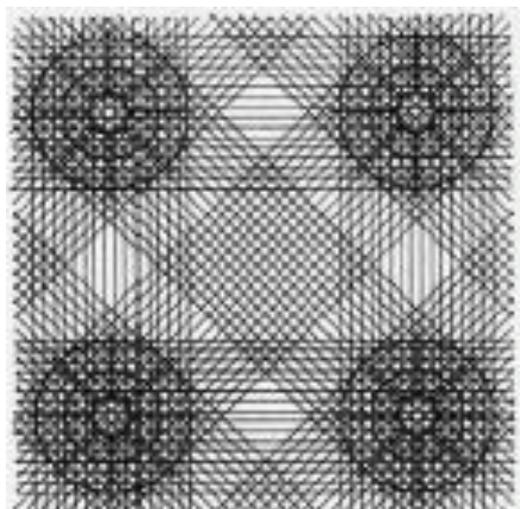
1.1 Punção em lajes

A punção de lajes em concreto armado ou protendido é um modo de ruptura que controla o dimensionamento e a verificação dos sistemas estruturais que eliminam as vigas. A ruptura por punção ocorre pela força de cisalhamento na área fortemente comprimida em torno do pilar.

Segundo Gasparini (2002) o primeiro engenheiro a projetar e construir lajes cogumelos foi George M. Hill, entre 1899 e 1901. A ideia de apoiar uma laje de concreto sobre um pilar foi apresentada por George M. Hill em HILL (1900). A autoria de Hill na construção de uma laje lisa é confirmada nos depoimentos dele para assuntos de patente, onde foi ratificada a construção de uma edificação em laje lisa para a *International Ultramarine Blue Works* em 1899.

De acordo com Gasparini (2002) o sistema Turner é caracterizado pela presença de capitéis na ligação laje-pilar e pelo uso de uma gaiola composta de barras de 32 mm de diâmetro com armaduras dispostas em quatro direções como na Figura 1, responsável pelo combate ao cisalhamento conforme publicado na ASCE Transactions em 1906.

Figura 1 – Detalhe da armadura em quatro direções de lajes Turner



Fonte: Guandalini, 2005.

GUANDALINI (2005) afirma que Robert Maillart foi construtor, desenhista e pesquisador e um dos primeiros a perceber o enorme potencial de lajes de concreto armado. Compreendendo que uma laje armada ortogonalmente pode retomar o momento de flexão em todas as direções. Maillart patenteou um sistema de laje apoiada no pilar, para resolver o

problema causado pela tensão intensa da laje nas colunas e aumentou a espessura da laje na zona crítica.

Figura 2 – Laje com Carptel



Fonte: Guandalini, 2005.

Segundo GUANDALINI (2005), em 1930 nos Estados Unidos foram propostas as primeiras lajes planas, a fim de evitar formas complicadas de reforço local na ligação pilar-laje. Colocaram na estrutura interna do pilar junto à laje uma estrutura metálica, diminuindo, assim o efeito da punção.

A partir da segunda metade dos anos cinquenta, iniciam-se em muitos países pesquisas direcionadas para o problema da punção por lajes planas. Atualmente este fenômeno é constantemente estudado, teoricamente e experimentalmente, pois, além de levar a uma ruptura brusca na ligação da laje com o pilar, também pode desencadear a ruína total da estrutura por meio do colapso progressivo.

MELO (1990) cita o Prest-o-Lite Building (1911), em Indianápolis, quando foi registrada a primeira catástrofe por punção, a qual resultou em 9 mortos e 20 feridos.

Figura 3 – Colapso do Prest-o-Building



Fonte: <http://images.indianahistory.org>

1.2 Teoria da fissura crítica de cisalhamento

De acordo com MUTTONI e RUIZ (2007) os estudos da teoria da fissura crítica por cisalhamento foram iniciados por Aurélio Muttoni no código Suíço de concreto estrutural SIA 162, baseando-se na hipótese de que a resistência à ruptura por cisalhamento diminui com o aumento da rotação da estrutura sobre os aparelhos de apoio e no aparecimento de uma fissura crítica de cisalhamento, cortando a biela comprimida de concreto que transmite a força para o pilar.

MUTTONI e SCHAWARTZ (1991) através de experimentos, desenvolveram um modelo para a força de cisalhamento com o aumento da rotação da laje em relação ao pilar, diminuindo assim o efeito de punção. Com o aparecimento da fissura crítica a resistência de cisalhamento reduz cada vez mais com a propagação desta, reduzindo também a resistência da biela comprimida do concreto.

GUANDALINI (2005) cita que o modelo físico de carga-deformação para o fenômeno de punção em laje de concreto armado ou protendido prevê a carga de ruptura da punção de acordo com a rotação. A punção é uma forma de ruptura brusca, por cisalhamento, podendo ocorrer em razão da concentração de carga em uma área da laje de concreto.

Conforme MUTTONI e RUIZ (2007) o modelo físico para investigar o cisalhamento em lajes retangulares unidirecionais sem a utilização de estribos com base na abertura da fissura crítica se deu com a investigação da transferência das forças ao longo da fissura, levando em conta a largura da laje na região de corte de cisalhamento, à rugosidade da superfície da fissura e a resistência à compressão da biela do concreto.

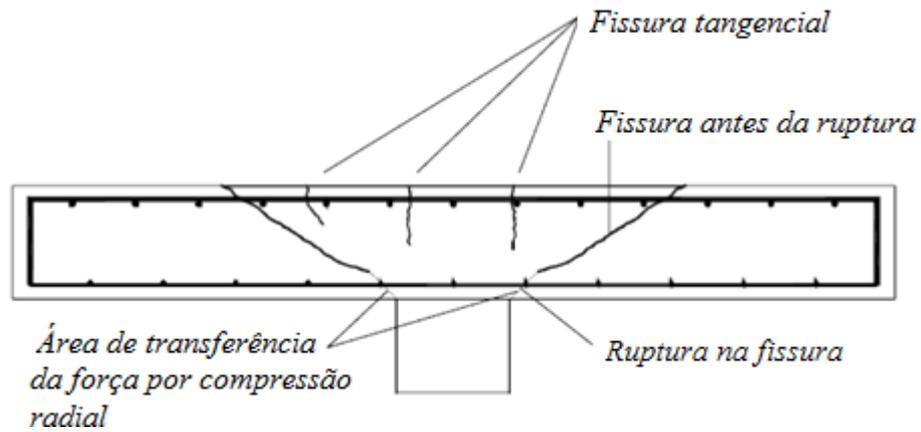
Segundo MUTTONI (2007) a nova formulação para lajes unidirecionais e vigas sem estribos, está baseada na fissura crítica causada por cisalhamento, levando em conta a rotação da laje em relação à sua altura útil. Dessa forma, aumentando o ângulo de rotação da laje em relação ao pilar, diminuirá a ação da perfuração pela força de cisalhamento com o aparecimento da fissura crítica, propagando através da laje até os pilares na região de compressão do concreto junto à laje e ao pilar, gerando uma força cortante junto ao pilar, que diminuirá após atingir sua carga máxima.

RUIZ e MUTTONI (2009) desenvolveu um modelo para estimar a resistência de lajes planas simétricas à punção, com armadura longitudinal de cisalhamento e com parcela da carga final suportada pelo concreto, com três tipos de ruptura por punção: esmagamento do concreto próximo ao pilar, perfuração no meio da zona reforçada com armadura de

cisalhamento e perfuração da laje fora da zona da armadura longitudinal de cisalhamento sendo a estrutura dimensionada pelo modo de menor resistência ao cisalhamento.

FIB (2010) foi baseado na Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento propondo um código modelo de verificação do projeto para a força de cisalhamento relacionado à punção, verificando através de dois níveis através do somatório das forças de cisalhamento que atua no perímetro crítico.

Figura 4 – Fissura crítica por punção



Fonte: Guandalini, 2005.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Teoria da fissura da crítica por Aurélio Muttoni (1985)

Em 1985 MUTTONI desenvolveu a teoria da fissura crítica, através de modelos experimentais, dando início a um modelo de punção de pilares em lajes e de cargas concentradas na laje. A tensão média na parte superior da laje não deve ultrapassar a resistência a compressão da biela comprimida do concreto e nem a resistência média a flexão na região do pilar para parte inferior da laje.

Foi proposto equações de cisalhamento para calcular o momento de flexão resistente de acordo com a seção crítica de aparelho de apoio na laje para pilares centrais de acordo com as equações 1 e 2, para pilares de borda a parte superior ao pilar a resistência a flexão na direção 'y' e 'y' da armadura longitudinal deve ser capaz de tracionar a região de acordo com as equações 2, 3 e 4, para pilares de canto as direções 'x' e 'y' de armadura longitudinal inferior de ancoragem no pilar devem ser capazes de desenvolver tração respeitando as equações 5, 6, 7 e 8.

$$m'_{xR} \geq 0,125 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 1})$$

$$m'_{yR} \geq 0,125 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 2})$$

$$m'_{xR} \geq 0,250 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 3})$$

$$m_{yR} \geq 0,125 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 4})$$

$$m'_{xR} \geq 0,500 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 5})$$

$$m'_{yR} \geq 0,500 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 6})$$

$$m_{xR} \geq 0,500 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 7})$$

$$m_{yR} \geq 0,500 \cdot \gamma_R \cdot V_d \quad (\text{Equação 8})$$

Sendo:

m'_{xR} e m'_{yR} – Resistência média de flexão na região da coluna a uma distância de $0,3 \cdot \ell_x$ ou $0,3 \cdot \ell_y$;

V_d – Resistência de cisalhamento;

γ_R – Fator de resistência;

ℓ_x – Comprimento do vão na direção X;

ℓ_y – Comprimento do vão na direção Y.

A resistência de punção causada por cisalhamento deve ser calculada de acordo com a resistência a compressão dado pela equação 9.

$$V_R = 1,8 \cdot \tau_c \cdot u \cdot d \quad (\text{Equação 9})$$

Sendo:

V_R – Resistência de punção devido ao cisalhamento;

τ_c – Tensão de resistência ao cisalhamento;

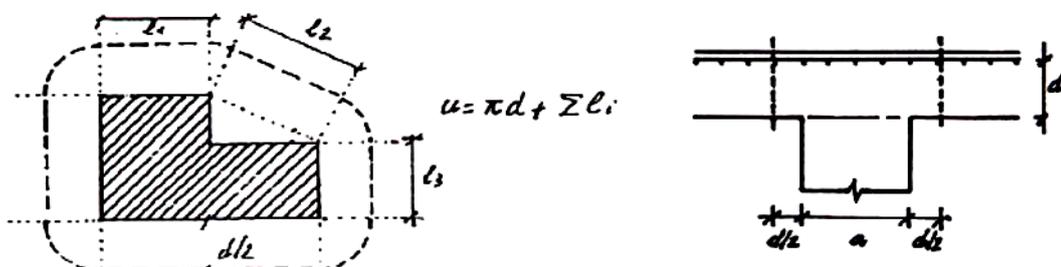
d – Distância a partir da fibra de compressão extrema ao centroide da armadura longitudinal;

u – Perímetro da seção crítica.

Foi proposto por Muttoni modelos de seção crítica para pilares internos, para pilares de canto e pilares de borda. Para pilares internos a seção crítica é definida a menor curva convexa fechada que está à metade da distância da metade da espessura da laje ($d/2$) da fibra de compressão para o perímetro (u) do pilar, como ilustrado na figura 5.

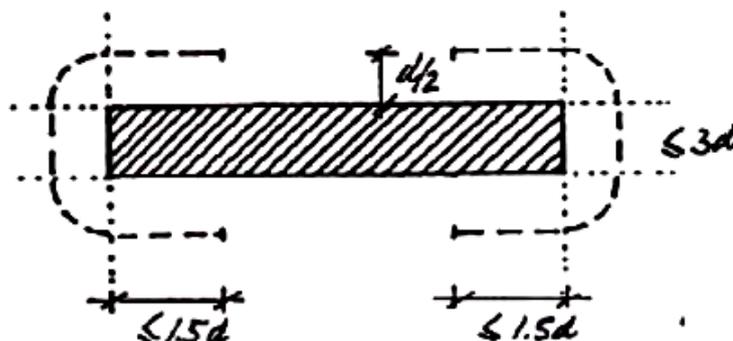
Considerando a concentração de tensões nas bordas dos pilares, o comprimento dos ferros retos da seção crítica devem ser inferior a três vezes a espessura da laje ($3 \cdot d$), conforme mostra nas figuras 5 e 6, já para casos de concentração das tensões de cisalhamento restritas o valor do perímetro deve ser reduzido proporcionalmente, sendo o perímetro para lajes de espessuras variáveis, calculado de acordo com o ângulo e a espessura.

Figura 5 – Área de influência para punção devido ao cisalhamento



Fonte: Muttoni, 1985.

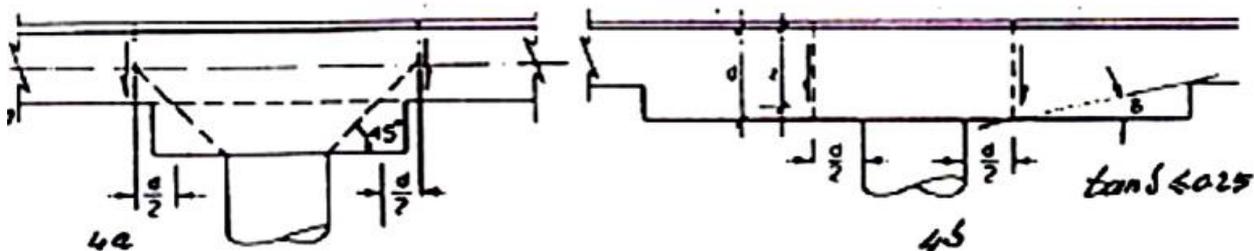
Figura 6 – Área de influência em borda de pilares



Fonte: Muttoni, 1985.

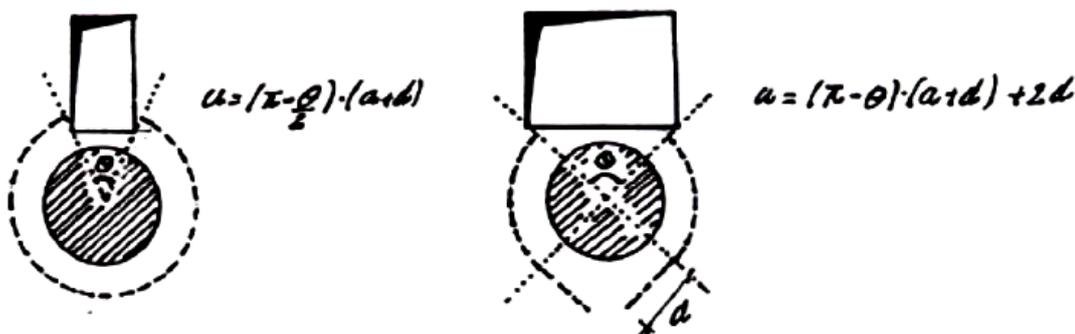
Para se determinar a seção crítica em lajes com capitel na região do pilar deve considerar o ângulo entre a extremidade do pilar e a extremidade do capitel com 45° , a uma distância de meia altura útil (d), conforme ilustrado na figura 7 - visto em corte em planta - para abertura de fissuras localizadas a uma distância menor que cinco vezes a espessura da laje deve tomar como valor absoluto o menor perímetro calculado conforme a figura 8.

Figura 7 - Lajes com espessura variável



Fonte: Muttoni, 1985.

Figura 8 – Área de influência



Fonte: Muttoni, 1985.

Para pilares de canto ou borda a região eficaz é definida na seção de cruz da coluna que corresponde a uma média devido à resistência de compressão do concreto, sendo a região crítica delimitada pela linha n-n com a distância (d) a partir da fibra de compressão extrema ao centroide da armadura longitudinal conforme mostra a figura 9. A armadura longitudinal deve ter resistência no máximo uma vez e meia a resistência de cisalhamento conforme a equação 10.

O modelo deve ser desenvolvido como uma treliça tridimensional com compressão diagonal inclinada com ângulos menores que 45° em relação ao plano da laje, com valor limite de ($f_y = 460$ MPa).

Figura 9 – Área de influência de pilar de borda e de canto



Fonte: Muttoni, 1985.

$$V_{R,max} = 1,50 \cdot V_R \quad (\text{Equação 10})$$

Sendo:

$V_{R,max}$ – Resistência máxima de punção;

V_R – Resistência de punção devido ao cisalhamento.

Para casos normais a armadura de punção será composta de estribo vertical (envolve a armadura longitudinal superior e inferior) a uma distância radial entre dois estribos ou barras vizinhas, não ultrapassando a metade da espessura da laje. O reforço de punção deve ser colocado da borda do pilar a uma distância onde a punção vai ter a capacidade de ser rejeitada pelo concreto.

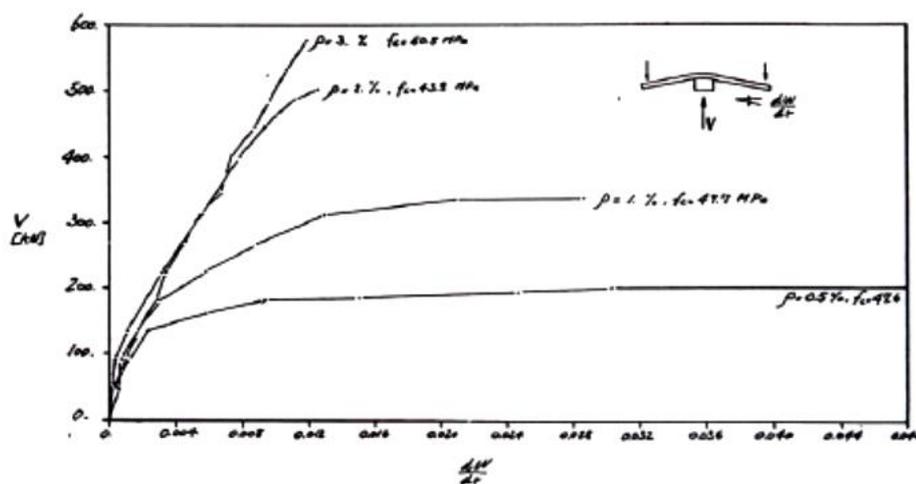
Os desvios de tensões efetivas ao longo da estrutura podem ser considerados em lajes de concreto protendido, considerando a parcela resistente adicional a resistência de cisalhamento.

A transferência das forças com o desvio de tensões fora da região da coluna deve ser investigada com base no modelo de treliça tridimensional.

O modelo físico da estrutura de cisalhamento deve satisfazer condições de contorno estático e condições de rendimento em todos os locais.

Com base em quatro ensaios de punção, MUTTONI (1985) pôde concluir que o comportamento da laje pode ser descrito como dúctil quando se deforma e frágil quando se rompe sem aviso, sendo este comportamento dependente da taxa de armadura de cisalhamento, conforme a figura 10, verificada nos ensaios que quanto maior as deformações (ρ) maior o carregamento suportado.

Figura 10 - Resultados de Ensaio de Punção de Cisalhamento em lajes. Ensaio B-2, B-4, B-9, e B-14 de referência 1

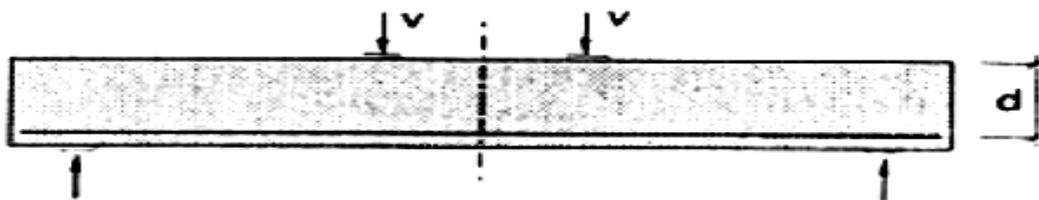


Fonte: Muttoni, 1985.

2.2 Modelo de Estudo para a falha de cisalhamento de viga bi apoiada com barras longitudinal e sem barras transversais

MUTTONI e SCHWARTZ (1991) estabelece um modelo de estudo para a falha de cisalhamento em vigas e lajes sem armadura de cisalhamento. O modelo proposto não leva em consideração a resistência de tração do concreto e não utiliza armadura de cisalhamento. A viga inicialmente estudada é uma viga bi apoiada, com barras longitudinais sem estribo conforme a figura 11.

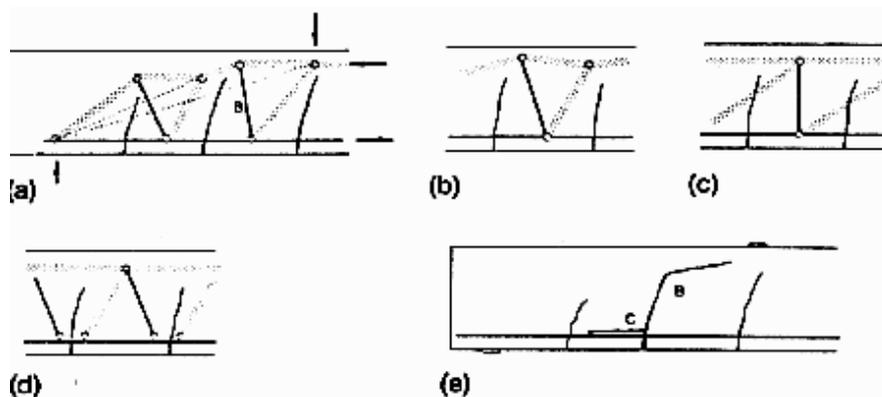
Figura 11 - Cisalhamento em vigas sem estribo



Fonte: Muttoni e Schawartz, 1991.

Com a aplicação da carga monoliticamente do zero ao nível de carga da ruptura, gerou fissuras de flexão com o desenvolvimento completo através da transferência de fissuras e desvios dessas, podendo assim decompor a ação interna de suporte da carga como resultante contra o cisalhamento figura 12-B. Na figura 12-C temos a transferência da força de compressão do concreto em consequência do bloqueio gerado pela rugosidade figura 12-D, na figura 12-D tem a transmissão de força transversal devido as forças geradas na barra longitudinal. Na figura 12-E pode ver a combinação das fissuras das figura 12-B, figura 12-C e figura 12-D.

Figura 12 - Modelos estruturais de fissura com propagação de trincas



Fonte: Muttoni e Schawartz, 1991.

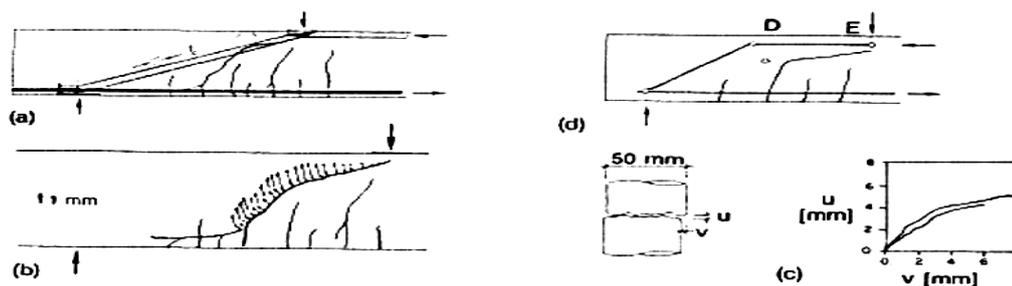
A fissura se propaga de acordo com a discretização dos três modelos das figura 13-B, 13-C e 13-D, assim, o modelo se torna ineficaz quando tem rachaduras perdendo a capacidade de carga.

Desenvolveu-se um novo modelo de solução plástica de apoio direto com dimensão da barra de aço estimada em condições de equilíbrio e com à resistência do concreto, a carga aplicada para cada estrutura sendo $V = 0,87 \cdot V_r$ e $V = 0,95 \cdot V_r$.

Como pode ser visto na figura 13, o ensaio da viga no Instituto de Engenharia de Estrutura Federal de Tecnologia da Suíça tem fissuras que passam pelo suporte teórico cuja transferência de força nas mesmas depende do limite de fissuração e da rugosidade da fissura.

Na figura 13-D o suporte de concreto juntamente com o dormente de concreto gera um desvio de força da viga. Quando a força de tração atinge a região 'D' ou a resistência de compressão 'E', ocorrendo falha devido a fissura crítica, que vai depender do estado de tensão e das cargas submetidas ao longo da sua vida útil.

Figura 13 - Modelo estrutural devido ao deslocamento relativo da fissura crítica

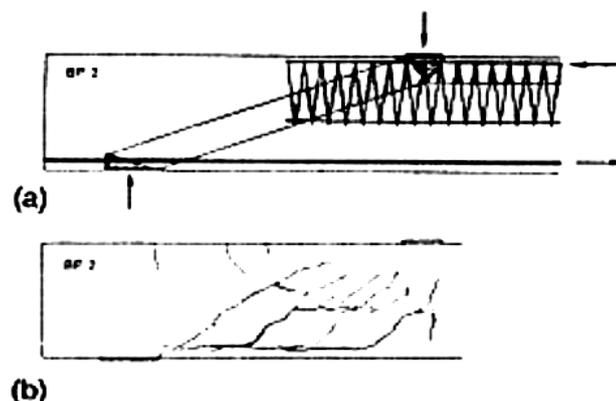


Fonte: Muttoni e Schawartz, 1991.

Com os padrões das fissuras e da carga de ruptura podem determinar um melhor desempenho das estruturas de concreto armado sabendo como ocorrem as fissuras.

Com a identificação dos padrões das fissuras pode-se prever parcialmente como ocorre a ruptura, ao se utilizar armação longitudinal na região crítica como pode ser visto na figura 14, por conseguinte aumentando a capacidade da carga de ruptura da estrutura, podendo aumentar o limite de escoamento das barras longitudinais de aço. Pode-se verificar no experimento que a carga de ruptura foi próxima do dobro da estrutura sem reforço.

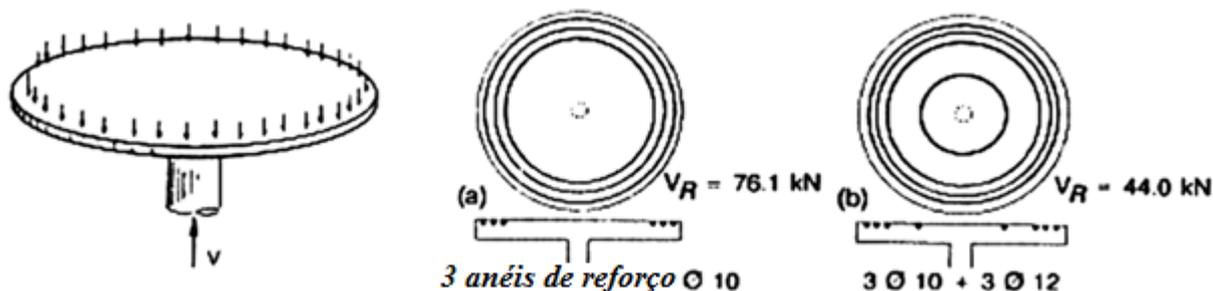
Figura 14 - Reforço de cisalhamento em área crítica e seu efeito



Fonte: Muttoni e Schawartz, 1991.

Com modificações e considerações feitas no comportamento estrutural de vigas podem ser utilizadas em placas planas como na figura 15.

Figura 15 - Lajes com armadura anelar



Fonte: Muttoni e Schawartz, 1991.

Através de inúmeros ensaios de cisalhamento por punção realizados em laboratório, pôde verificar-se que a curvatura na direção radial e concentrada nas colunas, observando-se também, que em regiões anelares da coluna se desenvolvem fissuras em consequência da flexão e em outras regiões têm somente fissuras radiais. Nas regiões de cisalhamento uma parcela da força pode ser desprezada devido ao limite das fissuras e a ação da força na direção transversal das barras longitudinais.

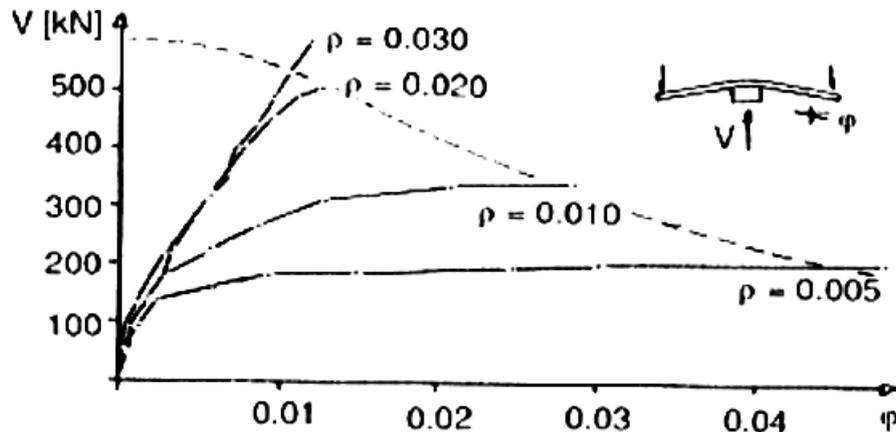
Verificou-se experimentalmente que a biela de compressão do concreto na direção radial próxima a coluna aumenta com intensificação da carga, após a estrutura atingir certo patamar de escoamento diminui alcançando valores negativos pouco antes da fissura ser exibida.

O padrão da fissura pode ser fortemente influenciado pela ausência de armadura longitudinal na região dos pilares, isso pode ocorrer em vigas sem estribo ao desenvolvimento das fissuras nas regiões vizinhas da aplicação do carregamento, nas lajes as fissuras tangenciais se desenvolvem acima da borda do pilar.

O teste realizado em lajes planas circulares com reforço de anéis concêntricos colocados na laje com uma força de cisalhamento mais elevada $V_r = 76,10 \text{ kN}$ do que para lajes idênticas com o mesmo reforço, pode ser visto na figura 15-A, já na figura 15-B possui reforço adicional ($3\phi 12$) e força de cisalhamento $V_r = 44\text{kN}$. Na região crítica teve redução na força devido a abertura de fissura e a rotação (ϕ) da laje em relação ao pilar, sendo que a força de cisalhamento é inversamente proporcional a largura da fissura como pode ser visto na figura 16, para 4 lajes planas com mesma espessura e com quantidade distinta de reforço. Este teste pode comprovar que a abertura da fissura em lajes é em função da espessura da laje

podendo melhorar o desempenho com o aumento da espessura da laje próxima aos pilares e utilizando reforço na região crítica.

Figura 16 - Diagramas de carga-rotação de lajes próxima ao pilar



Fonte: Muttoni e Schawartz, 1991.

2.3 Modelo de cisalhamento com base na plastificação da ligação da laje com o pilar

MUTTONI (2003) desenvolveu um modelo experimental para a resistência de punção gerada por cisalhamento em lajes sem armadura de cisalhamento.

A não utilização da armadura de cisalhamento em lajes pode levar a uma ruptura frágil, resultando em um colapso generalizado da estrutura. A resistência de cisalhamento para lajes sem estribos é determinada pela equação 11, onde k_d depende da deformação da estrutura, da altura útil da laje e do diâmetro do agregado, calculado pelas equações 12 e 13, e τ_{cd} é a influência resistente da compressão do concreto na resistência de esforços de cisalhamento, sendo o cálculo de acordo com a equação 14.

$$V_{Rd} = K_d \cdot \tau_{cd} \cdot d \quad \text{(Equação 11)}$$

Sendo:

V_{Rd} – Resistência de cisalhamento;

K_d – Coeficiente em função da altura útil de da deformação;

τ_{cd} – Influência da resistência na compressão do concreto;

d – Altura útil da laje.

$$k_d = \frac{1}{1 + 2,50 \cdot \varepsilon \cdot d \cdot k_{D_{max}}} \quad (\text{Equação 12})$$

Sendo:

K_d – Coeficiente em função da altura útil e da deformação;

ε - Deformação longitudinal;

d – Altura útil da laje;

$K_{D_{max}}$ – Coeficiente que depende do diâmetro máximo do agregado.

$$k_{D_{max}} = \frac{48}{D_{max} + 16} \quad (\text{Equação 13})$$

Sendo:

$K_{D_{max}}$ – Coeficiente dependente do diâmetro máximo do agregado;

D_{max} – Diâmetro máximo do agregado.

$$\tau_{cd} = \frac{0,3 \cdot \sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \quad (\text{Equação 14})$$

Sendo:

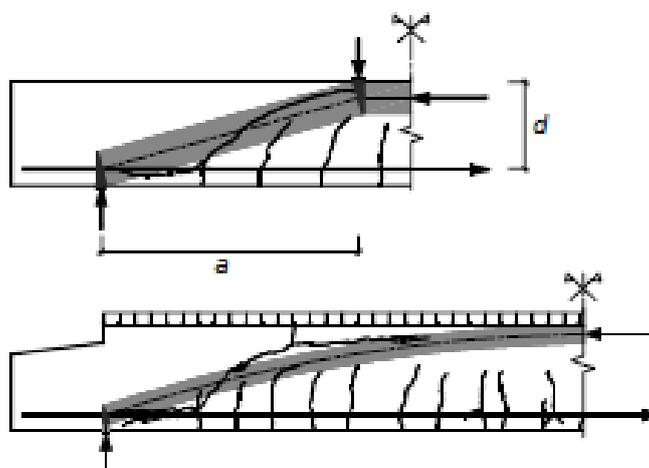
τ_{cd} – Tensão limite de cisalhamento;

$\gamma_c = 1.5$;

f_{ck} – Resistência à compressão do concreto.

MUTTONI propôs no seu modelo experimental para a laje ensaiada sem armadura de cisalhamento com as bielas de compressão, com a carga final definida pela teoria da plasticidade. Porém, foram realizados diversos ensaios que mostraram que a carga de ruptura pode divergir significativamente da solução de equilíbrio plástico. A flexão das fissuras se propaga e desenvolve nas bielas comprimidas como pode ser visto na figura 17.

Figura 17 - Faixas de lajes com a solução de equilíbrio de acordo com a teoria da plasticidade e as fissuras e a ruptura



Fonte: Muttoni, 2003.

A propagação da fissura crítica vai depender do comportamento eficaz antes da ruptura residual que se propaga através de esforços de flexão das fissuras. A abertura da fissura na região crítica situa-se numa seção localizada a uma distância de $0,5 \cdot d$ do ponto de inserção da carga e $0,6 \cdot d$ da superfície comprimida do concreto, que é determinada de acordo com a equação 12, sendo a abertura da fissura proporcional ao produto do alongamento longitudinal (ε) dado pela equação 15.

De acordo com a equação 12, a resistência à força de cisalhamento depende do alongamento ε na área crítica. Este valor deve ser determinado em função da rigidez do concreto e da armadura longitudinal e de valores de cálculo dos efeitos das ações devido ao momento fletor e a força normal (m_d , n_d).

A deformação longitudinal ε na zona crítica pode ser expresso em função da deformação na armadura ε_s e a altura da zona de compressão x . Admitindo $x \cong 0,32 \cdot d$, temos:

$$\varepsilon = \varepsilon_s \cdot \frac{0,6 \cdot d - x}{d - x} \approx 0,41 \cdot \varepsilon_s \quad (\text{Equação 15})$$

Sendo:

ε – Deformação longitudinal;

ε_s – Deformação do aço;

d – Altura útil;

X – Altura da zona comprimida.

Admitindo que o alongamento da armadura esteja diretamente ligado ao momento solicitante de flexão m_d e que a plastificação da armadura coincide com a obtenção do momento de resistência à flexão m_{Rd} , é obtido pelas equações 16 e 17.

$$f_{sd} = \frac{500}{1,15} = 435 \frac{N}{mm^2} \quad (\text{Equação 16})$$

Sendo:

f_{sd} – Tensão de escoamento de projeto do aço.

$$\varepsilon = 0,41 \cdot \frac{f_{sd}}{E_s} \cdot \frac{m_d}{m_{Rd}} \approx 0,0009 \cdot \frac{m_d}{m_{Rd}} \quad (\text{Equação 17})$$

Sendo:

ε – Deformação longitudinal ;

E_s – Deformação do aço;

m_d – Momento solicitante de flexão;

m_{Rd} – Momento de resistência à flexão.

Ao substituímos a deformação longitudinal na equação 12 e desenvolvendo chega a equação 18.

$$k_d = \frac{1}{1 + k_v \cdot d} \quad (\text{Equação 18})$$

Sendo:

K_d – Coeficiente em função da altura útil e da deformação;

k_v - Coeficiente de ajuste para rotula plástica;

d – Altura útil da laje.

O efeito da ação do momento solicitante de flexão m_d e o momento de resistência à flexão m_{Rd} deve ser calculada para a seção determinante.

Se um aço com $f_{sd} > 435 \text{ N/mm}^2$ ou um diâmetro granular $D_{\max} < 32 \text{ mm}$ utilizar-se-á a equação 13. Para o concreto leve os agregados tem diâmetro máximo igual a zero para mesma equação.

Foi observado em ensaios que um aumento da armadura na zona crítica leva a uma concentração de fissuras e a uma diminuição da resistência do esforço de cisalhamento. Para se considerar esse fenômeno aumenta-se em 50% o coeficiente k_v , se o escalonamento da armadura longitudinal se encontra a uma distância menor ou igual a altura útil (d) da seção de controle.

O alongamento é medido na direção da armadura, nas lajes, pode acontecer que a direção principal da força de cisalhamento não coincide com a armadura principal. Se as armaduras são dispostas paralelamente aos eixos x e y , o ângulo entre a armadura principal e a direção principal da força de cisalhamento é dado pela equação 19. Para o alongamento na direção principal da força de cisalhamento pode ser determinado através da amplificação do alongamento da armadura (ε) pela equação 17.

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \quad (\text{Equação 19})$$

Sendo:

ϑ – Ângulo entre as forças de cisalhamento v_x e v_y ;

v_x – Forças de cisalhamento na direção x ;

v_y – Forças de cisalhamento na direção y .

Foi verificado através de ensaios que a força normal pode influenciar na deformação da área crítica gerando momentos de compressão sendo calculado pelas equações 20 e 21.

$$n_d < 0: m_{Dd} = -n_d \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{d}{3}\right) \quad (\text{Equação 20})$$

$$n_d > 0: m_{Dd} = -n_d \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right) \quad (\text{Equação 21})$$

Sendo:

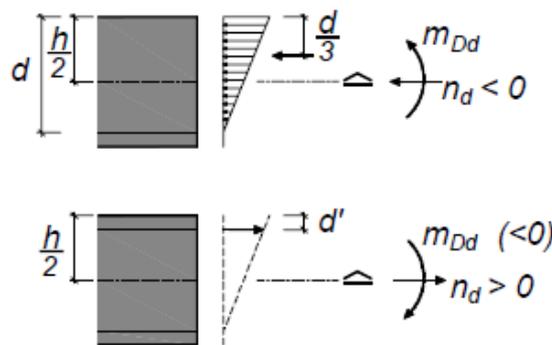
n_d – Força normal;

m_{Dd} – Momento de resistência à flexão;

d – Altura útil da armadura ativa;

d' – Altura útil da armadura passiva.

Figura 18 – Momento de descompressão em função da força normal



Fonte: Muttoni, 2003.

MUTTONI (2003) verificou através de diversos ensaios que quando a carga pontual está próxima de um apoio pode ter transmissão direta para o mesmo, podendo desenvolver uma biela de compressão que aumentará as fissuras de flexão. As cargas pontuais na superfície de carregamento estão localizadas a uma distância de apoio $a \leq 2d$, (sendo ‘a’ a abertura da fissura próximo ao apoio e d a altura útil) podendo essa distância se reduzida pelo fator $(a/2d)$, quando se determina o valor do cálculo da força de cisalhamento.

Para colunas que estão ligadas monoliticamente para a laje e retomam os momentos de flexão, as forças de cisalhamento não são distribuídas de maneira uniforme pela laje ao longo da seção de controle. Este efeito pode ser considerado através da redução do perímetro da seção de controle pelo coeficiente k_e e pela equação 22. Para lajes planas apoiadas regularmente pelos pilares interiores pode ser considerado $K_e = 0.9$.

$$k_e = \frac{1}{1 + \frac{e}{b}} \quad (\text{Equação 22})$$

Sendo:

k_e – Coeficiente de controle do perímetro da seção crítica;

e – Excentricidade da força no apoio;

b – Diâmetro do círculo com área igual à do apoio.

Foi verificado que para lajes com apoios lineares a transmissão da força de cisalhamento por punção é influenciada pela propagação da fissura de flexão, sendo a força de cisalhamento estimada pela equação 23.

$$v_{Rd} = k_r \cdot \tau_{cd} \cdot d \quad (\text{Equação 23})$$

Sendo:

v_{Rd} – Resistência de cisalhamento;

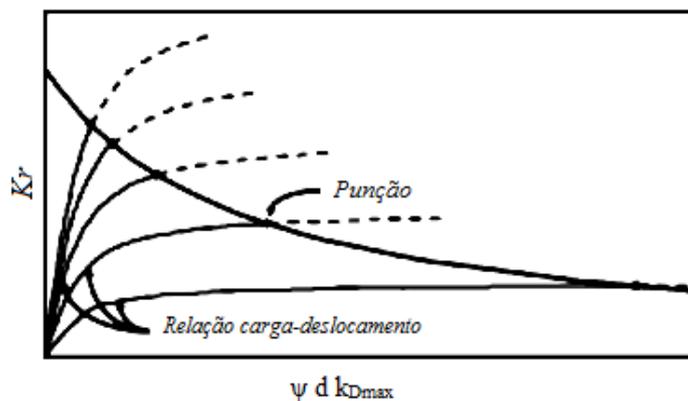
k_r – Coeficiente em função da deformação na área crítica;

τ_{cd} – Tensão limite de cisalhamento;

d – Altura útil da armadura ativa.

Quando as deformações das tensões se concentram na vizinhança do pilar as tensões variam significativamente na direção radial, neste caso a deformação determinante é estimada pela rotação da laje (ψ) de acordo com a abertura da fissura crítica, sendo para a rotação da laje deve-se levar em conta o estado final da armação situado na vizinhança da coluna se levando a relação da carga por deformação não linear como pode ser visto pela figura 19, sendo a interseção da curva de carga deformação estimada pela equação 25.

Figura 19 - Determinação da carga de punção para o critério de ruptura



Fonte: Muttoni, 2003.

$$k_r = \frac{1}{0,45 + 0,135 \cdot \psi \cdot d \cdot k_{D_{\max}}} \quad (\text{Equação 24})$$

Sendo:

k_r – Coeficiente em função da deformação na área crítica;

ψ – Rotação da laje;

d – Altura útil da armadura ativa;

$k_{D_{\max}}$ – Coeficiente dependente do diâmetro máximo do agregado.

Pode se verificar que o método proposto para o cálculo de punção não está adequado para condições reais de dimensionamento devido a não se levar em conta o cálculo não linear.

Para o cálculo da zona plástica (r_y) o fenômeno de punção entre a laje e o pilar se assume uma rotação (ψ) para estimar a curvatura x na direção tangencial com as condições axissimétrica como uma função do raio (r), dado pela equação 25 é ilustrada pela figura 20. Para a área plástica na ruptura r_y vai depender do formato da laje e do efeito das ações sendo r_y por tanto o efeito da plastificação descrito pela equação 26 para lajes planas e regulares, para outros sistemas de lajes r_y pode ser determinado pela equação 28.

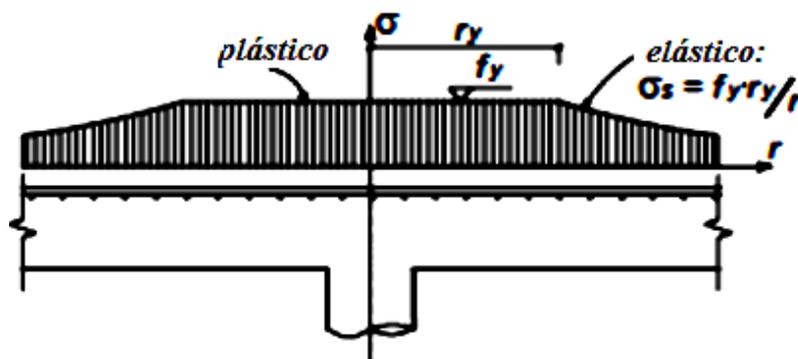
$$x = \frac{\psi}{r} \quad (\text{Equação 25})$$

Sendo:

x – Curvatura na direção tangencial;

ψ – Rotação da laje;

r – Comprimento da área de plastificação do centro do apoio para borda da laje.



Fonte: Muttoni, 2003.

$$r_y = 0,15 \cdot \ell \cdot \left(\frac{m_{0d}}{m_{Rd}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Equação 26})$$

Sendo:

r_y – Comprimento da área de plastificação do centro do apoio para borda da laje;

ℓ – Comprimento da laje.

m_{0d} – Momento de referência correspondente à resistência mínima;

m_{Rd} – Momento de resistência à flexão.

$$r_y = 0,7 \cdot a \cdot \left(\frac{m_{0d}}{m_{Rd}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Equação 27})$$

Sendo:

r_y – Comprimento da área de plastificação do centro do apoio para borda da laje;

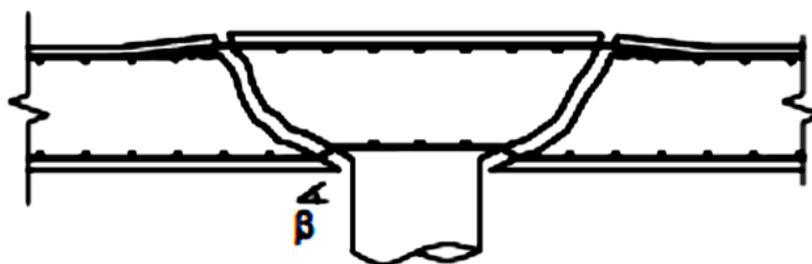
a – Comprimento da área de plastificação com momento nulo;

m_{0d} – Momento de referência correspondente à resistência mínima;

m_{Rd} – Momento de resistência à flexão.

Através dos ensaios realizados por MUTTONI (2003), foi possível se verificar que a armadura da zona comprimida do pilar pode ser mobilizada pela tração após a punção como pode ser visto na figura 21, a única armadura que consegue ser completamente ancorada é a que atravessa a seção do pilar após acontecer o fenômeno de punção.

Figura 21 – Comportamento da deformação devido à punção



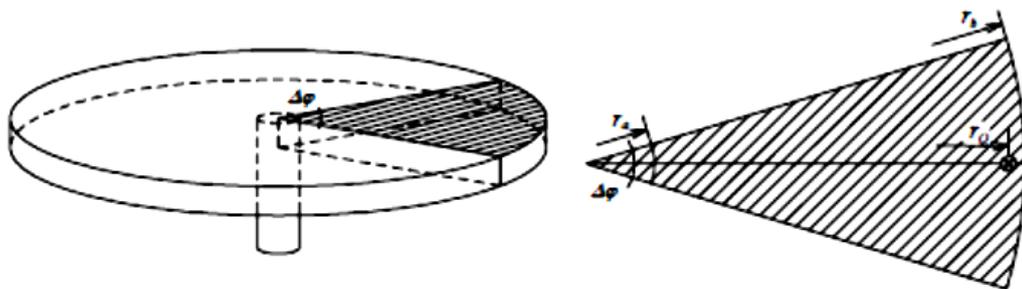
Fonte: Muttoni, 2003.

2.4 Modelo para cálculo de cisalhamento para laje circular axissimétricas

GUANDALINI (2005) propôs um modelo físico através da realização de 10 ensaios de estudo para punção em laje de concreto armado e protendido para prever a carga de ruptura de cisalhamento (V_r), conforme os parâmetros da rotação da laje em relação ao eixo do pilar. Dessa forma o modelo elaborado pelo autor é também capaz de determinar a fissura no estado limite de fissuração. Propondo assim um modelo de cálculo de carga baseado na relação de carga deformação de um elemento de laje levando-se em conta a geometria, as características do concreto e as características do aço.

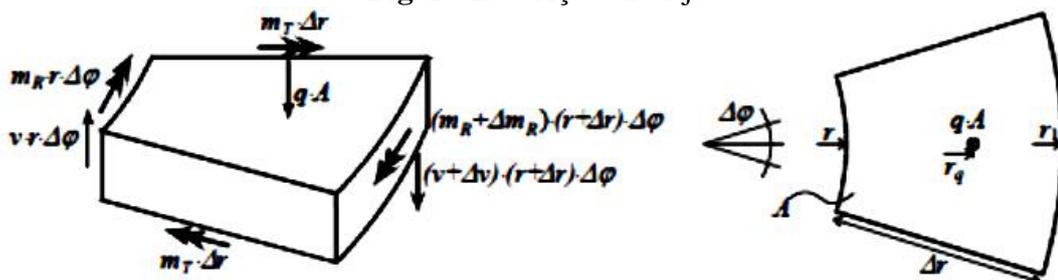
O modelo é proposto para lajes axissimétricas circulares apoiadas sobre a coluna. Deve-se moldar a laje a partir do centro do pilar para a extremidade da mesma ou do anel de reforço, dividindo-a em regiões simétricas tomando como base os ângulos ($\Delta\phi$) como ilustrado na figura 22. Para avaliar a deformação da seção onde a região de elementos comprimidos Δr da laje, com carga distribuída (q) que atua na face da laje como mostrado na figura 23, e como uma força de cisalhamento atuando a uma distância (r) do eixo do pilar para a borda podendo, assim, ser calculado pela equação 28 e o cálculo do momento radial atuante próximo a laje pode ser mensurado através da equação 29.

Figura 22 - Laje circular axissimétricas, dividida em regiões $\Delta\phi$



Fonte: Guandalini, 2005.

Figura 23 - Ações na laje



Fonte: Guandalini, 2005.

$$v = q \cdot \frac{r_b^2 - r^2}{2 \cdot r} + \frac{Q_{tot}}{2 \cdot r \cdot \pi} \quad (\text{Equação 28})$$

Sendo:

- V – Força de cisalhamento;
- q – Carga distribuída;
- r_b – Raio da laje;
- r – Raio da coluna;
- Q_{tot} – Força resultante que atua no pilar.

$$m_{Ri+1} = m_{Ri} + \Delta m_R \quad (\text{Equação 29})$$

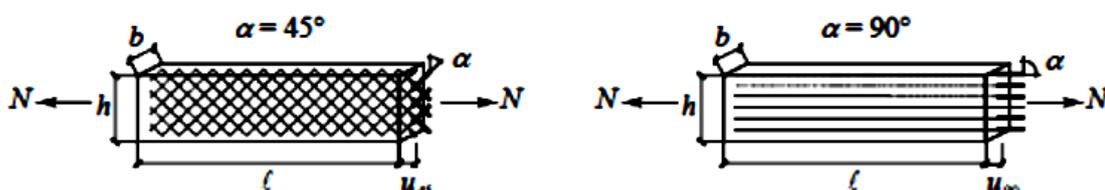
Sendo:

- m_{Ri} – Momento radial total;
- m_{Ri} – Momento radial próximo a laje;
- Δm_R – Variação do momento radial próximo a laje.

Segundo GUANDALINI (2005), para o cálculo dos vergalhões ortogonais do modelo físico deve-se considerar uma laje perfeitamente axissimétricas que deve ter seu eixo radial a partir do centro da coluna para a extremidade da laje e o anel de reforço deve ter forma tangencial circular ao pilar com arranjo perfeito polar para as barras de aço.

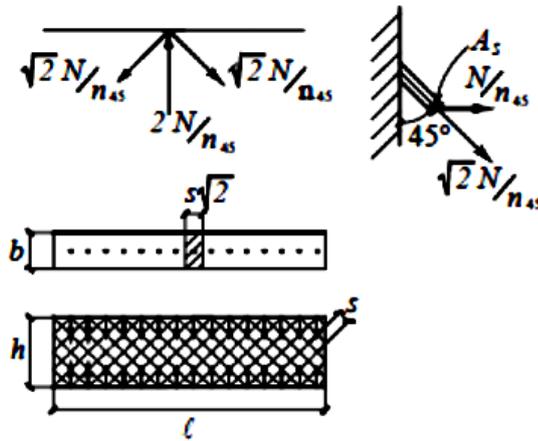
O modelo proposto de armadura longitudinal em elementos prismáticos de concreto armado vai ser disposto para regiões de maiores esforços com ângulos $\alpha = 90^\circ$ e para regiões de esforços menores $\alpha = 45^\circ$ como pode ser visto nas figuras 24 e 25, sendo a tensão no vergalhão de aço acordo com a direção da barra calculada pela equação 30 e a tensão no concreto pela equação 31, que vai gerar compressão transversal no concreto causando alongamento.

Figura 24 - Prismas de concreto armado com reforços dispostos a 45° e 90° solicitado tensão pura



Fonte: Guandalini, 2005.

Figura 25 - Detalhes prismáticos com reforços dispostos a 45 °



Fonte: Guandalini, 2005.

$$\sigma_{s45} = \frac{N}{\rho \cdot b \cdot h} \quad \text{(Equação 30)}$$

Sendo:

- σ_{s45} – Tensão no aço;
- ρ – Taxa de armadura;
- b – Largura da seção;
- h – Espessura da laje;
- N – Força normal.

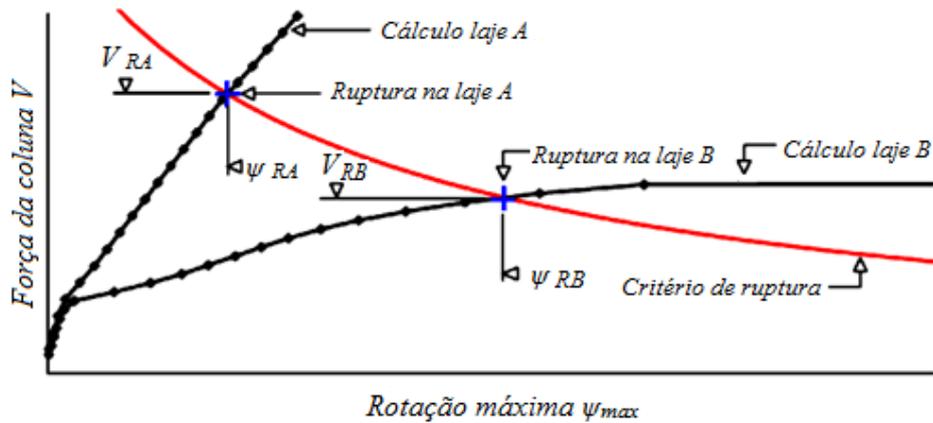
$$\sigma_{c45} = \frac{N}{b \cdot h} \quad \text{(Equação 31)}$$

Sendo:

- σ_{c45} – Tensão no concreto;
- b – Largura da seção;
- h – Espessura da laje;
- N – Força normal.

Calculando-se a rotação ψ da laje por processos iterativos com a determinação da curva radial na extremidade do pilar, da curvatura tangencial do cálculo de elementos de laje sucessivo para borda pode se obter o diagrama de carga-rotação como visto na figura 26. De acordo com GUANDALINI (2005) a razão para determinar à resistência a perfuração e a inclinação na ruptura, o cálculo deve ser repetido para diferentes carregamentos.

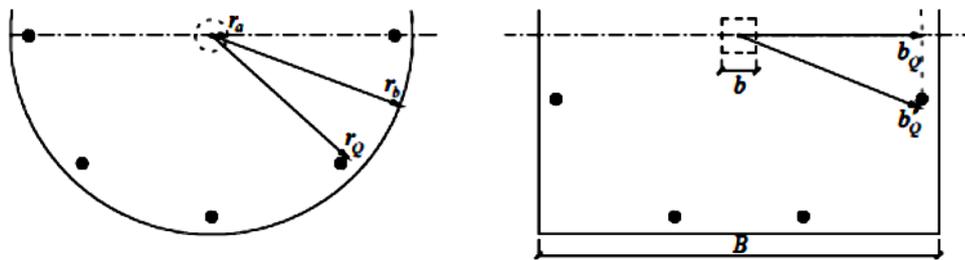
Figura 26 - Força cortante V X rotação ψ máxima



Fonte: Guandalini, 2005.

GUADALINI (2005) propõe um modelo de cálculo para ligar a geometria da laje retangular à laje circular cujo modelo é mostrado na figura 27, à carga aplicada em lajes circulares se encontra em um círculo de raio eficaz (r_Q), e para lajes quadradas apoiadas nas quatro bordas do raio eficaz (b_Q).

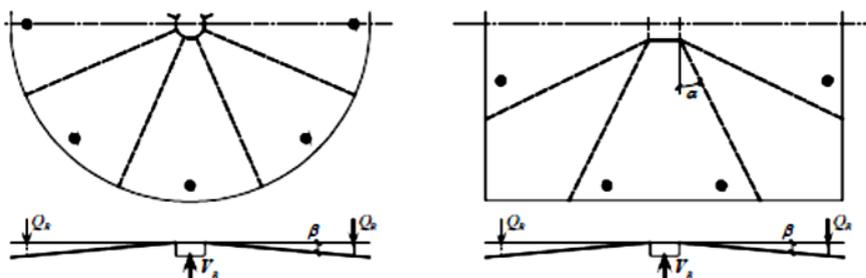
Figura 27 - Geometria de uma laje circular e de laje quadrada



Fonte: Guandalini, 2005.

O critério equivalente da força flexão à tração (V_{Rflex}) vai definir o raio equivalente da laje ($r_{b,eq}$), figura 28 mostrando as linhas de falha para laje circular e quadrada.

Figura 28- Linhas de ruptura negativa do momento de flexão e carga de ruptura



Fonte: Guandalini, 2005.

A carga de flexão final (V_{Rflex}), é determinada para lajes circulares e retangulares pelos mecanismos:

Para Laje Circular:

$$\frac{v_R}{m_u} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r_b}{r_Q - r_a} \quad (\text{Equação 32})$$

Sendo:

- V_R – Força de cisalhamento última;
- m_u – Momento de flexão última;
- r_b – Raio da laje circular;
- r_a – Raio do apoio da laje circular;
- r_Q – Raio equivalente da laje circular.

Para Laje quadrada:

$$\frac{v_R}{m_u} = \frac{8}{b_Q - \frac{b}{2}} \cdot \left[(B - b) \cdot (\sqrt{2} - 1) + \frac{b}{2} \right] \quad (\text{Equação 33})$$

Sendo:

- V_R – Força de cisalhamento última;
- m_u – Momento de flexão última;
- b_Q – Raio da laje retangular;
- b – Largura do apoio retangular;
- B – Comprimento da laje.

Para calcular o raio equivalente para ambas as lajes:

$$r_{b,eq} = \frac{2}{\pi} \cdot \left[(\sqrt{2} - 1) \cdot (B - b) + b \right] \quad (\text{Equação 34})$$

Sendo:

- $r_{b,eq}$ – Raio equivalente;
- b – Largura do apoio retangular;

B – Comprimento da laje.

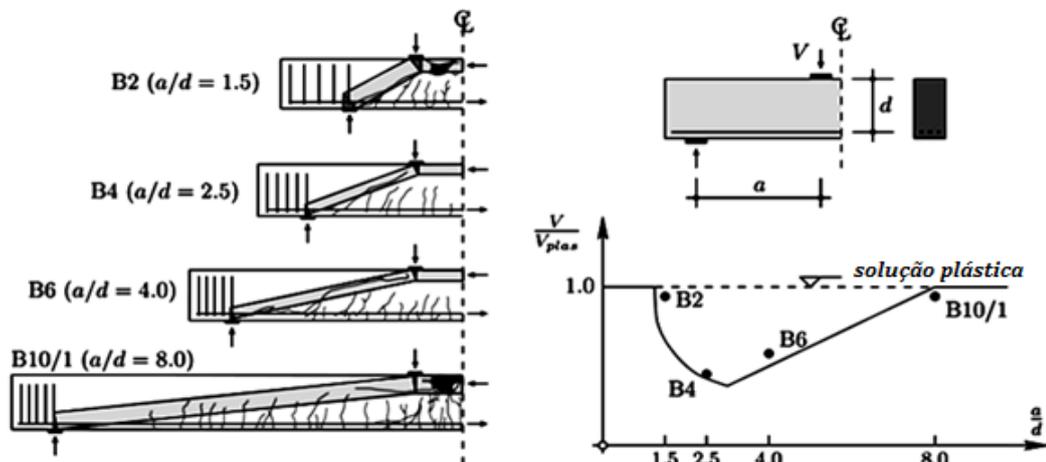
O modelo proposto é bastante flexível e pode ser adaptado aos casos particulares que surgem na prática da engenharia. É muito útil para a avaliação da capacidade das estruturas existentes ou de carga de projeto para avaliar a armadura de cisalhamento.

2.5 Modelo de cisalhamento com base na rugosidade da superfície de fissura

MUTTONI e RUIZ (2007) propuseram um modelo para melhorar a teoria da fissura crítica com investigação na resistência ao cisalhamento de vigas e lajes unidirecionais sem estribo e com a investigação da transferência das forças ao longo da fissura, baseando na largura da fissura crítica da região de corte, na rugosidade da superfície e na resistência a compressão da biela de concreto.

Através de um modelo físico de ensaios feito por Leonhardt e Walther foi possível verificar que o desenvolvimento da fissura através do suporte de concreto inclinando, sofre influência do cisalhamento com dependência da relação entre a distância da aplicação da carga ao apoio da viga e a altura da armadura ativa da viga (a/d), que varia de 1,50 para pequenas fissuras no suporte inclinado à 8, para fissuras mais desenvolvidas ao longo da seção inclinada diminui a resistência ao cisalhamento do concreto, esse fenômeno pode ser observado na figura 29.

Figura 29 - Padrão de fissuras à resistência de cisalhamento de vigas

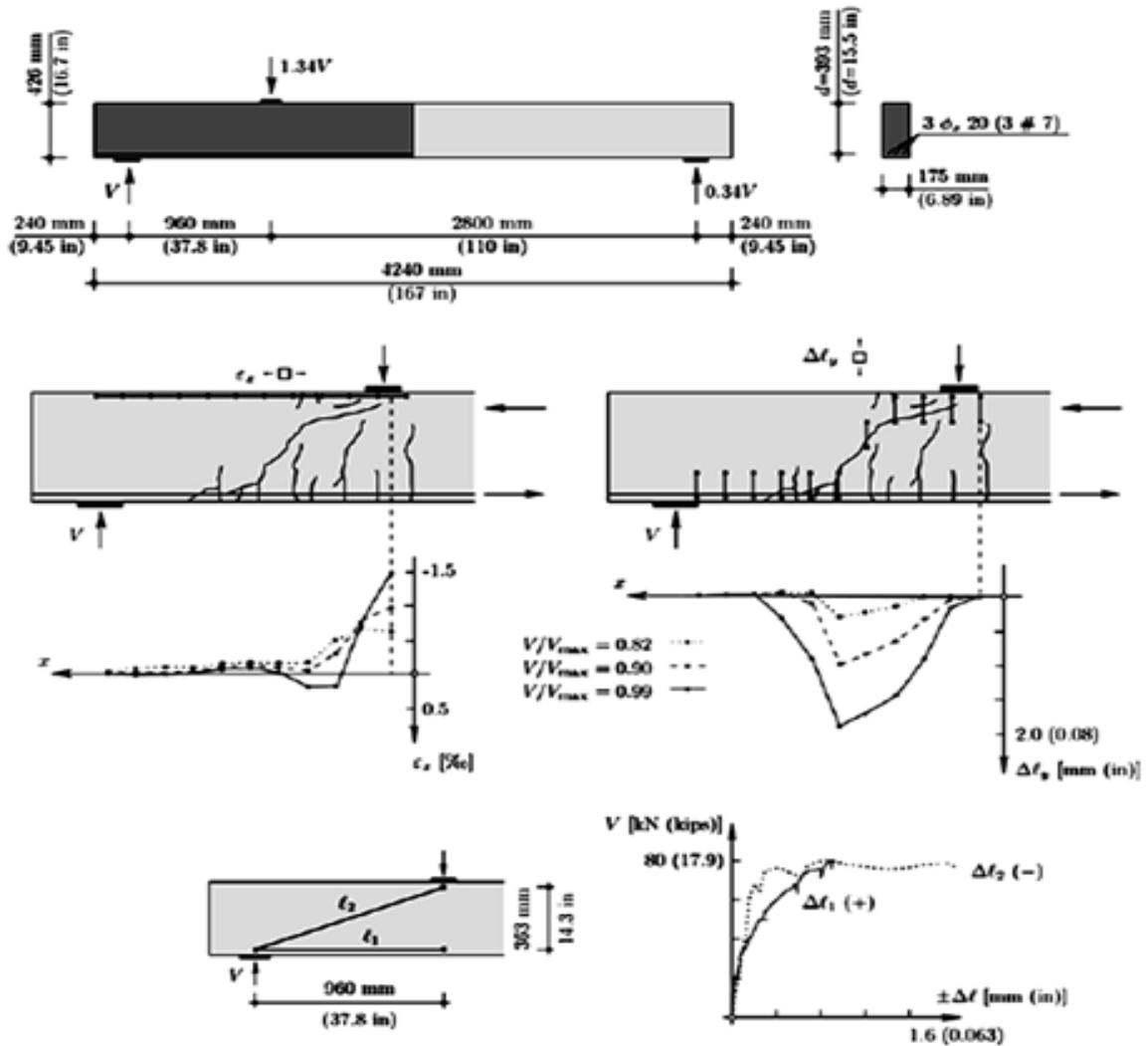


Fonte: Muttoni e Ruiz, 2007.

No modelo de deformação longitudinal da viga proposto por MUTTONI e RUIZ, antes de atingir a falha à tração que desenvolveu próximo a região de carregamento,

obtiveram resultados insatisfatórios devido à fissura que se desenvolveu paralelamente ao reforço propagando-se entre os pinos, logo se verifica que quando aumenta o tamanho dos pinos e se dispõem uma dobra em forma de cotovelo temos aumento da resistência à deformação da estrutura, como pode ser visto na figura 30.

Figura 30 - Teste BPO por Muttoni e Thürlimann



Fonte: Muttoni e Ruiz, 2007.

A teoria da fissura crítica para o modelo desenvolvido por MUTTONI e RUIZ depende da resistência ao cisalhamento de estruturas sem estribos, que pode ser calculado pela equação 35.

$$\frac{V_R}{b \cdot d} = \sqrt{f_c \cdot f(w, d_g)} \quad (\text{Equação 35})$$

Sendo:

v_r – Força de cisalhamento;

f_c – Resistência à compressão do concreto;

f – Função em relação a fissura crítica (w) e o tamanho do agregado (d_g);

b – Largura do pilar;

d – Altura útil;

Foram desenvolvidas as hipóteses de que a resistência ao cisalhamento é verificada em uma seção, onde a largura da fissura crítica pode ser representada adequadamente pela deformação a uma profundidade de 0,6 vezes a distância da armadura ativa a face superior da estrutura, como pode ser visto na figura 31, a outra hipótese é da largura da fissura crítica (w) é inversamente proporcional ao produto da deformação longitudinal (ε) vezes a profundidade efetiva (d).

A deformação longitudinal (ε) é avaliada na região crítica assumindo que as seções planas permanecem planas e um comportamento linear elástico em compressão para o concreto sendo medido pela equação 36 e representado pela figura 31.

$$\varepsilon = \frac{M}{b \cdot d \cdot \rho \cdot E_s \cdot \left(d - \frac{c}{a}\right)} \cdot \frac{0,6 \cdot d - c}{d - c} \quad \text{(Equação 36)}$$

Sendo:

ε – Deformação Longitudinal;

M – Momento de flexão;

d – Altura útil;

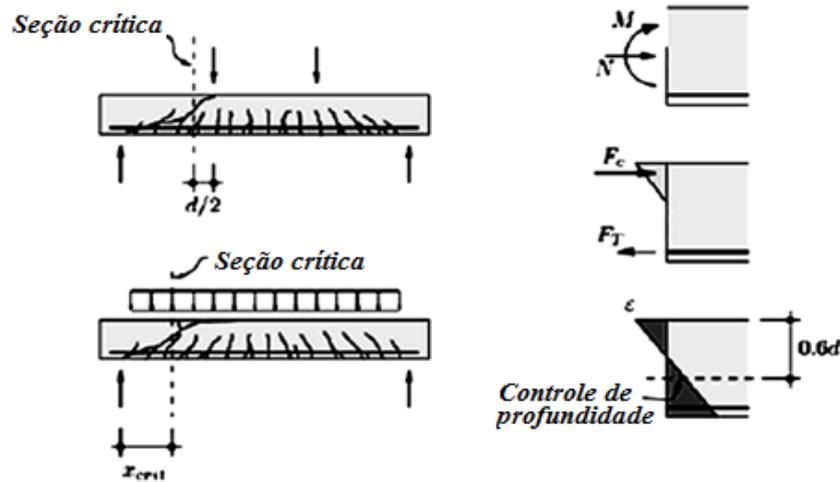
c – Profundidade da zona de compressão;

b – Largura do aparelho de apoio;

ρ –Taxa de armadura;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

Figura 31 - Modelo da Fissura crítica



Fonte: Muttoni e Ruiz, 2007.

Através de combinação da equação 36 e resolvendo a equação resultante para o concreto com alta resistência acima de 60 MPa, obtém-se a força de cisalhamento. Comparando este resultado a 150 ensaios com carga concentrada, 16 ensaios com carga uniforme para concreto de alta resistência e 285 ensaios realizados para vigas de seção retangular sem estribos e sem armadura de pele foi possível verificar resultados conservadores de força de cisalhamento e de resistência duas vezes superiores a resultados obtidos anteriormente, esses resultados mais altos podem ter sido obtidos ao se levar em conta o fator da profundidade eficaz da viga.

$$c = d \cdot \rho \cdot \frac{E_s}{E_c} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2E_c}{\rho \cdot E_s}} - 1 \right) \quad \text{(Equação 37)}$$

Sendo:

C – Profundidade da zona de compressão;

d – Profundidade efetiva;

ρ – Taxa de armadura.

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

$E_c = 10000 \cdot f_c^{\frac{1}{3}}$ MPa ;

Para a equação 36 foi desenvolvido um modelo simplificado que propôs as seguintes hipóteses: o valor de ε é estimada assumindo que a profundidade da zona de compressão c é igual a $0.35d$, o reforço de tensão (ε_s) é assumida proporcionalmente ao momento de flexão médio. Desenvolvendo a equação 38 para o modelo simplificado conclui-se que para concreto de alta resistência pode se considerar o tamanho do agregado como zero e para os valores de m_{Ed} e m_{Rd} devem ser multiplicados por 1,50 em região de ancoragem para se levar em conta a localização da fissura, como pode ser visto na figura 32. Para barras de reforço que não são paralelas se propõe o fator de correção da equação 38 que deve ser multiplicado pela equação 39 e para correção da equação 38 devido ao aparecimento de força axial que pode aumentar ou diminuir a fissura crítica deve se substituir m_{Ed} por $(m_{Ed} - m_{dd})$ e m_{Rd} por $(m_{Rd} - m_{dd})$.

$$\frac{V_{Rd}}{b \cdot d \cdot \sqrt{f_{ck}}} = \frac{\frac{0,30}{\gamma_c}}{1 + \frac{0,50}{16 + d_g} \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_c \cdot E_s} \cdot d \cdot \frac{m_{Ed}}{m_{Rd}}} \quad (\text{Equação 38})$$

Sendo:

V_{Rd} – Força de cisalhamento;

b – Largura do pilar;

d – Altura útil;

f_{ck} – Resistência de compressão do concreto;

γ_c – 1,50;

d_g – Diâmetro do agregado;

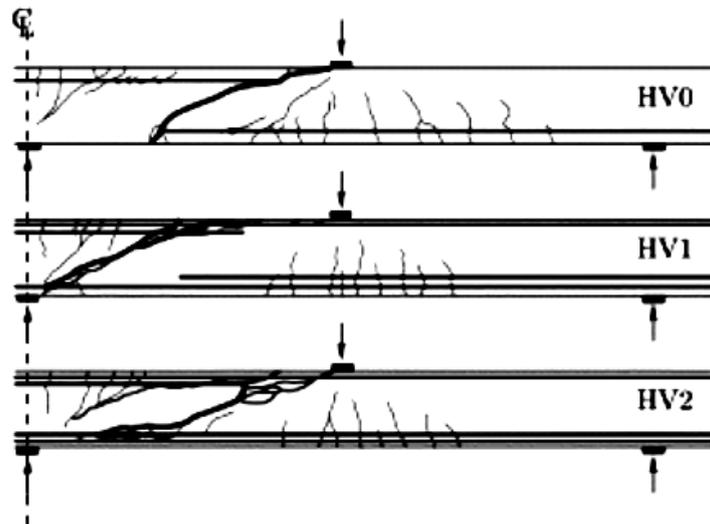
f_{yk} – Resistência do aço a tração;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

m_{Ed} – Momento de flexão médio;

m_{Rd} – Momento estimado com a teoria da plasticidade.

Figura 32 - Padrão de Fissuramento em feixe



Fonte: Muttoni e Ruiz, 2007.

$$\frac{1}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}$$

(Equação 39)

Sendo:

θ – ângulo entre a direção da armadura longitudinal e a direção de corte principal.

Com esse modelo proposto por MUTTONI e RUIZ foi possível se verificar que o modelo plástico superestima a resistência ao cisalhamento quando a fissura crítica se desenvolve na estrutura, contudo em contra partida ao se comparar com 285 resultados se obteve resultado satisfatório.

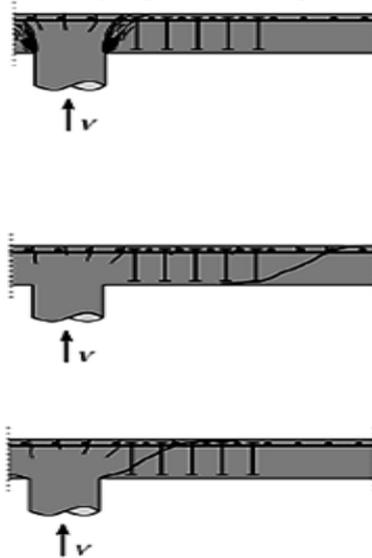
2.6 Modelo de cisalhamento com base na região de ruptura de cisalhamento

RUIZ e MUTTONI (2009) propuseram um modelo físico para estimar a resistência à punção de lajes planas com armadura longitudinal de cisalhamento em que o concreto suporta uma parcela da carga aplicada no final da resistência da estrutura, enquanto, a outra parcela da carga é distribuída pela estrutura por cisalhamento.

Fazendo as considerações para a armadura de cisalhamento distribuída em laje plana de concreto pode-se desenvolver três tipos de perfurações diferentes como ilustrado na figura

33, sendo por esmagamento do concreto próximo a coluna, de perfuração da laje fora da região de reforço de cisalhamento e de perfuração da região de reforço de cisalhamento, conclui-se que o fator limitante será o que conduz a menor resistência, levando a falha na estrutura.

Figura 33 - Modelos de falha em lajes planas com perfuração devido ao cisalhamento



Fonte: Ruiz e Muttoni, 2009.

Para o dimensionamento da punção no interior da zona de armadura longitudinal de cisalhamento mostrado na equação 51, em que V_{c0} é a força de cisalhamento que gera punção na laje sem armadura de reforço e considerando a contribuição da armadura de cisalhamento (V_{s0}) e multiplicando por um fator η_s que é menor ou igual a 1, já V_{c0} é multiplicado também por um fator menor ou igual a 1 que é a contribuição do concreto que se reduz por esse índice (η_c). Pode-se analisar que a contribuição de reforço no concreto ao se verificar que η_c varia com a quantidade de armadura de cisalhamento e com a taxa longitudinal do aço.

$$V_{R,in} = \eta \cdot V_{c0} + \eta_s \cdot V_{s0} \quad (\text{Equação 40})$$

Sendo:

$V_{R,in}$ – Cisalhamento devido a parcela do aço e do concreto;

η_c – Fator de correção para o concreto;

V_{c0} – Força de cisalhamento sem armadura de reforço;

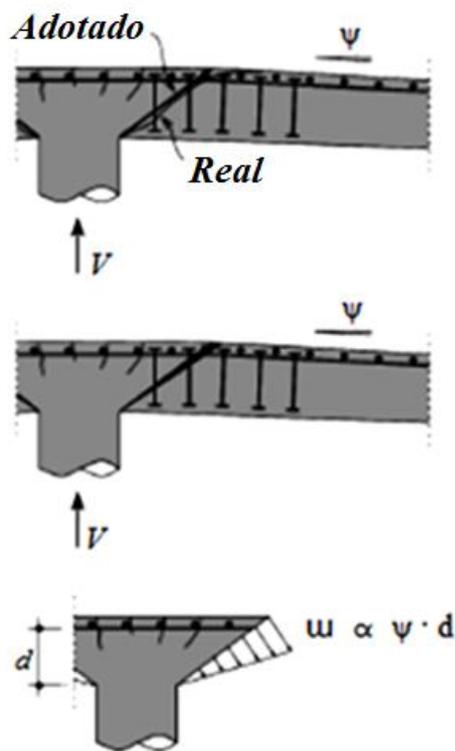
η_s – Fator de correção para armadura de cisalhamento;

V_{s0} – Força de cisalhamento devido a armadura de reforço;

Ruiz e Muttoni propõem um modelo físico de acordo com a teoria da fissura crítica que permite estimar a contribuição do concreto e da armadura de cisalhamento para o corte de perfuração baseando-se em um modelo físico, que permite considerar a disposição do reforço de cisalhamento, o diâmetro do agregado, a taxa de aço e além de outros parâmetros mecânicos e geométricos descrito pelas equações 41, 42 e 43.

Através do experimento realizado foi verificado o desenvolvimento de uma fissura crítica como mostrado na figura 34, na qual uma parcela da resistência é dada pelo concreto e a outra pela armadura de cisalhamento.

Figura 34- Perfuração na zona de cisalhamento com reforço



Fonte: Ruiz e Muttoni, 2009.

$$V_{R,in} = V_c + V_0$$

(Equação 41)

Sendo:

$V_{R,in}$ – Cisalhamento devido a parcela do aço e do concreto;

V_c – Resistência de cisalhamento pela parcela do concreto;

V_s – Resistência de cisalhamento pela parcela do aço;

$$V_c = \frac{3}{4} \cdot \frac{b_{0,int} \cdot d \cdot \sqrt{f'_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} \cdot d_g}} \quad (\text{Equação 42})$$

Sendo:

V_c – Resistência de cisalhamento pela parcela do concreto;

$b_{0,int}$ – Perímetro de controle;

d – Altura útil;

f'_c – Resistência à compressão do concreto;

ψ – Rotação da placa;

d_{g0} – Diâmetro do agregado graúdo;

d_g – Diâmetro máximo do agregado empregado no concreto da laje.

$$V_s = \sum \sigma_{si} \cdot (\psi) \cdot A_{si} \cdot \text{sen}(\beta_i) \quad (\text{Equação 43})$$

Sendo:

V_s – Resistência de cisalhamento pela parcela do aço;

$\sum \sigma_{si}$ – Somatório das tensões ativa da armadura de cisalhamento;

ψ – Rotação da placa;

A_{si} – Áreas de aço de punção do pilar;

β_i – Ângulo entre a barra de reforço ao cisalhamento e o plano do painel.

O modelo proposto foi feito para uma laje com fissura crítica e com rotação na sua extremidade em relação ao pilar, onde a falha tem forma de cone para obter os deslocamentos relativos à borda das fissuras paralelas e perpendiculares para a armadura transversal, como proposto na equação 44 cujo modelo físico pode ser visto na figura 35.

$$\delta_{bi} = k \cdot \psi \cdot h_i \cdot \left(\text{sen}(\alpha) + \beta_i - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{Equação 44})$$

Sendo:

δ_{bi} – Deslocamento;

h_i – Distância vertical entre a ponta da fissura e a ponta do reforço de cisalhamento;

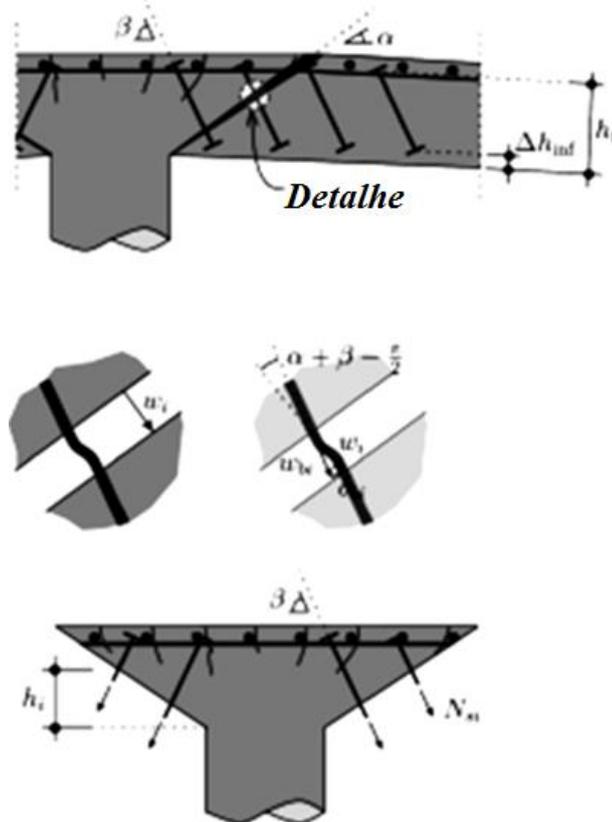
α – Ângulo da fissura de corte crítica;

k – Constante;

β – Ângulo entre a barra de reforço ao cisalhamento e o plano do painel;

ψ – Rotação da placa.

Figura 35 - Contribuição da armadura de cisalhamento



Fonte: Ruiz e Muttoni, 2009.

Para se calcular a rotação da laje foi proposta uma fórmula simplificada na equação 45 em função da carga aplicada.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_y}{E_s} \cdot \left(\frac{V}{V_{flex}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{(Equação 45)}$$

Sendo:

ψ – Rotação da placa;

- r_s – Posição de momento fletor nulo;
- f_y – Resistência do aço de reforço à tração;
- d – Altura útil;
- E_s – Módulo de elasticidade do aço;
- V_{flex} – Carga de plastificação.

O cálculo para resistência de cisalhamento na região da laje sem reforço de cisalhamento pode ser estimado pela relação de carga-rotação da laje de forma conservadora, por considerar a rotação concentrada na fissura crítica, sendo que a rotação acontece na região de reforço. A resistência pode ser calculada pela equação 46.

$$V_{r,out} = \frac{3}{4} \cdot \frac{b_{0,out} \cdot d_v \cdot \sqrt{f'_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} \cdot d_g}} \quad (\text{Equação 46})$$

Sendo:

- $V_{r,out}$ – Resistência ao cisalhamento fora da região de reforço;
- $b_{0,out}$ – Perímetro de controle;
- d – Altura útil;
- d_v – Altura útil reduzida;
- d_{g0} – Diâmetro do agregado graúdo;
- d_g – Diâmetro máximo do agregado empregado no concreto da laje;
- f'_c – Resistência à compressão do concreto;
- ψ – Rotação da placa.

Para questões construtivas o reforço de cisalhamento é disposto da melhor maneira possível quando a largura e a origem da fixação dos pinos são controladas pelo perímetro entre eles.

Outro tipo de falha que pode ocorrer fora da região de reforço é o desenvolvimento das fissuras horizontais ao longo da superfície superior e inferior de pontos de fixação que conduzem ao descolamento do concreto como pode ser visto na figura 36. Este modo de falha pode tornar-se preponderante quando à armadura de cisalhamento não está aderida a armadura longitudinal.

Figura 36 - Modo de fissura por descolamento



Fonte: Ruiz e Muttoni, 2009.

Foi proposto por RUIZ e MUTTONI uma formulação como código simplificador para os três critérios de falha: para falha dentro da região de reforço de cisalhamento, para falha fora da região de reforço e para falha por esmagamento das bielas comprimidas. Para a região dentro da zona de cisalhamento pode-se estimar a força de cisalhamento pela equação 41. Para a força de cisalhamento, para a parcela de concreto propôs a formulas simplificada descrito pela equação 47 e para parcela do aço propôs pela Equação 54.

$$V_{cd} = \frac{1}{\gamma_c} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b_{0,int} \cdot d \cdot \sqrt{f_{ck}}}{1 + 20 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} \cdot d_g}} \quad (\text{Equação 47})$$

Sendo:

V_{cd} – Resistência simplificada de cisalhamento devido à parcela do concreto;

$b_{0,int}$ – Perímetro de controle;

d – Altura útil;

f_{ck} – Resistência à compressão do concreto;

γ_c – Fator de segurança do concreto;

ψ – Rotação da placa;

d_{g0} – Diâmetro do agregado graúdo;

d_g – Diâmetro máximo do agregado empregado no concreto da laje.

$$V_{sd} = \left(\frac{E_s \cdot \psi}{6} \right) \cdot A_{sw} \leq f_{ywd} \cdot A_{sw} \quad (\text{Equação 48})$$

Sendo:

V_{sd} – Resistência simplificada de cisalhamento devido à parcela do aço;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

ψ – Rotação da laje;

A_{SW} – Áreas de aço de punção no intervalo de $0,35 d_v$ a d_v da face do pilar;

f_{ywd} – Tensão de escoamento;

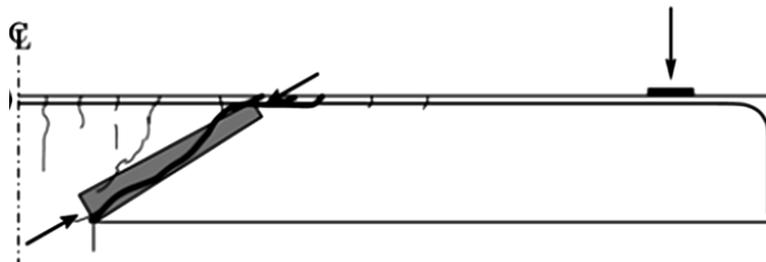
Foi verificado que o código de boas práticas subestima a contribuição da parcela de resistência pelo concreto para pequenas quantidades de reforço de cisalhamento, porém para grandes quantidades de taxa de armadura de cisalhamento pode ser superestimado, entretanto, deve-se atentar para a finalidade da estrutura com a contribuição do concreto e do aço que podem variar.

2.7 Modelo de força de cisalhamento com armadura de cisalhamento

MUTTONI (2010) propôs uma nova formulação para lajes unidirecionais em vigas sem estribos com base na largura da fissura crítica causada por cisalhamento, levando-se em conta a rotação da laje.

Verificou-se através de ensaios que quando se aumenta o ângulo de rotação da laje em relação ao pilar, isso diminuirá a ação da perfuração pela força de cisalhamento em razão ao aparecimento da fissura crítica, que se propaga através da laje até aos pilares na região de compressão do concreto junto à laje e ao pilar (biela comprimida), gerando uma força cortante junto ao pilar como pode ser visto na figura 37, diminuindo após atingir seu máximo de carga e absorvendo o desenvolvimento de uma tensão de tração na região da ligação pilar-laje que vai ser perfurado devido à fissura crítica e a tração no concreto.

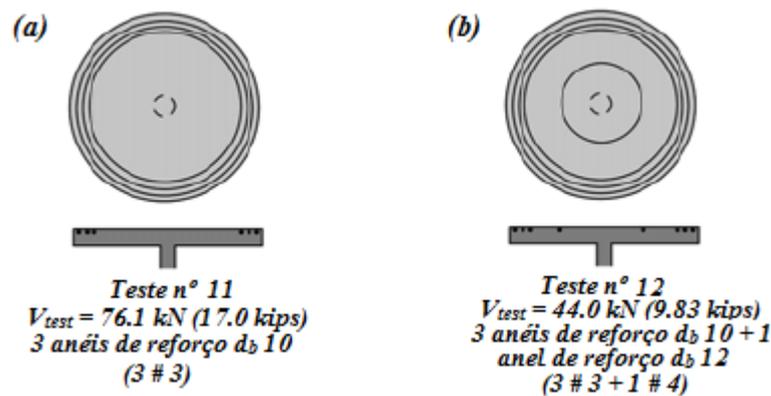
Figura 37 - Suporte teórico que se desenvolve a fissura crítica de corte



Fonte: Muttoni, 2010.

Foram realizados ensaios com lajes de área de influência circular com reforço de anéis radiais concêntricos no limite da região crítica, evitando assim a formação de fissuras nesta região, tendo uma força de cisalhamento maior que no mesmo modelo de ensaio com um anel de reforço adicional na região crítica conforme a figura 38.

Figura 38 - Testes por Bollinger14 com reforços de anel e efeito de reforço adicional na vizinhança do corte crítica de fissura na capacidade de carga: (a) e (b) distribuição da armadura de Amostras 11 e 12



Fonte: Muttoni, 2010.

Muttoni propôs a equação 49 para calcular a força da punção em que se tem a relação entre a rotação ψ e a carga aplicada (v), além de se levar em conta o diâmetro do agregado e da rugosidade da superfície.

$$\frac{V_R}{b_0 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} \cdot d_g}} \quad \text{(Equação 49)}$$

Sendo:

V_R – Força de cisalhamento;

b_0 – Largura do aparelho de apoio;

d – Altura útil;

f_c – Resistência de compressão do concreto;

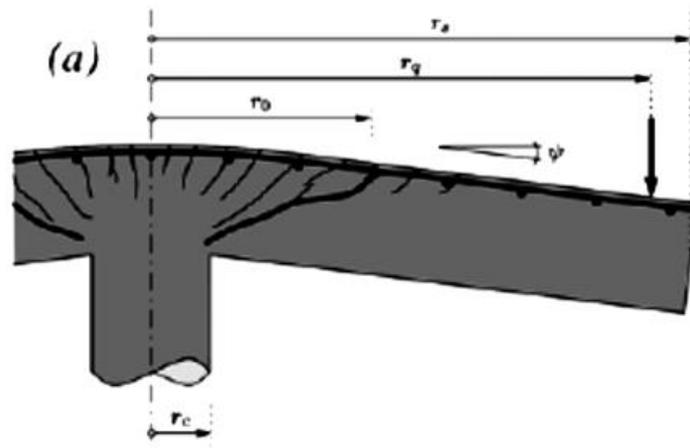
d_g – Diâmetro do agregado graúdo;

d_{g0} – Diâmetro do agregado miúdo;

Ψ_d – Rotação da laje.

Em elementos axissimétricos de lajes isoladas pode ser analisado analiticamente, em que as fissuras tangenciais com curvatura radial estão dispostas ao redor do pilar e a fissura crítica está a uma distância r_0 do eixo do pilar a borda externa superior da laje, como pode ser visto na figura 39, a laje deforma-se de forma cônica com uma rotação (ψ) constante em relação ao pilar.

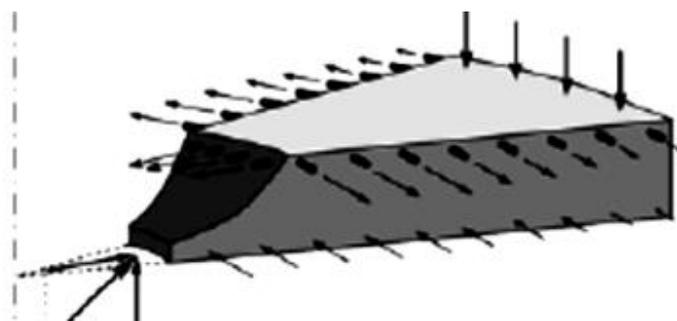
Figura 39 - Laje axissimétrica com parâmetros geométricos e rotação da laje



Fonte: Muttoni, 2010.

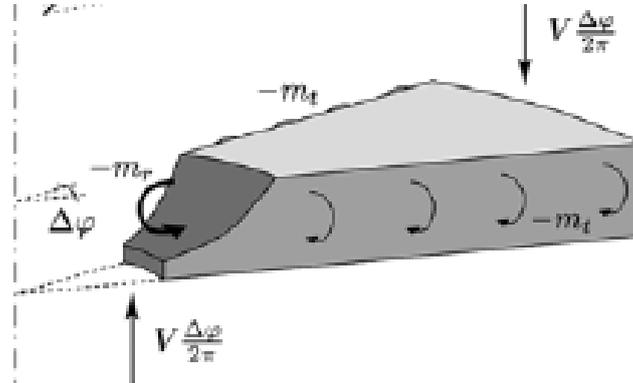
A região de influência do raio (r_0), do momento é considerado constante devido ao equilíbrio da força na seção disposta pelas fissuras inclinadas, como pode ser visto nas figuras 40 e 41.

Figura 40 - Laje axissimétrica com forças no concreto e reforço agindo em parte da laje



Fonte: Muttoni, 2010.

Figura 41 - Laje axissimétrica com forças internas que atuam em parte da laje



Fonte: Muttoni, 2010.

Através de experimentos MUTTONI e RUIZ verificaram que a equação 50 descreve corretamente o comportamento para lajes mais espessas com capacidade de rotação menor, para lajes mais finas podemos verificar um comportamento mais dúctil como pode ser observado na figura 42 e descritas às curvas de carga e rotação de acordo com a equação 49.

$$V = \frac{2 \cdot \pi}{r_q - r_c} \cdot (-m_r \cdot r_0 + m_r \cdot (r_y - r_0)) + EI_1 \cdot \psi \cdot (\ln(r_1) - \ln(r_y)) + EI_1 \cdot x_{Ts} \cdot (r_1 - r_y) + m_{cr} \cdot (r_{cy} - r_1) + EI_0 \cdot \psi \cdot (\ln(r_s) - \ln(r_{cr})) \quad (\text{Equação 50})$$

Sendo:

V – Força de cisalhamento;

r_q – Distância do eixo da laje ao ponto de carregamento;

r_0 – Raio do aparelho de apoio;

r_q – Distância do eixo da laje à fissura crítica;

$r_y = r_s$ – Distância do eixo da laje a borda da laje;

ψ_d – Rotação da laje;

m_r – Momento fletor;

m_{cr} – Momento fletor após a fissura;

r_1 – Área do eixo central da laje ao ponto estável da fissura;

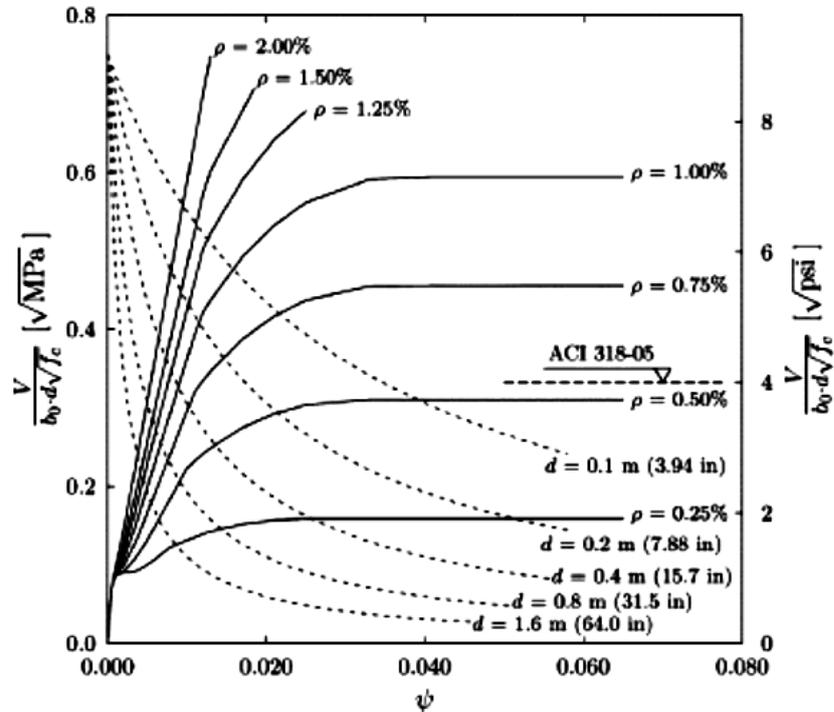
r_{cr} – Área da fissura;

EI_1 – Rigidez de flexão após a fissura;

EI_0 – Rigidez de flexão antes da fissura;

χ_{TS} – Tensão de enrijecimento.

Figura 42 - As curvas de carga-rotação e critérios de falha para várias proporções de armadura longitudinal e espessuras de laje



Fonte: Muttoni, 2010.

MUTTONI (2010) propõe um modelo simplificado para rotação, o qual deve assumir uma parábola com 3/2 para o ângulo da rotação (ψ) em função da relação (V/V_{flex}) e que a área de influência está a $0,75 \cdot r_s$. Esse modelo é descrito pela equação 51, que foi comparado com nove séries de testes por diversos pesquisadores para um total de 87 ensaios, chegando a resultados satisfatórios para a formulação da equação 40.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s \cdot f_y}{d \cdot E_s} \cdot \left(\frac{V}{V_{flex}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Equação 51})$$

Sendo:

Ψ – Rotação da laje;

d – Altura útil;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

- r_s – Posição de momento fletor nulo;
- f_y – Resistência do aço à tração;
- V – Força de cisalhamento;
- V_{flex} – Carga de plástificação;

Os resultados desta pesquisa foram obtidos em sua grande maioria através de testes experimentais de elementos com placas isoladas representando uma laje próxima à coluna, placas com espessuras entre 0,1 a 0,2 metros. Com estes resultados fez-se uma extrapolação por lajes mais espessas de 2 a 3 vezes de acordo com os modelos propostos, podendo concluir que a força real de cisalhamento pode ser mais baixa do que a prevista pelo ACI 318-05⁶. Verificou-se que os modelos propostos pelo ACI 318-05⁶ têm valores conservadores principalmente para modelos inseguros.

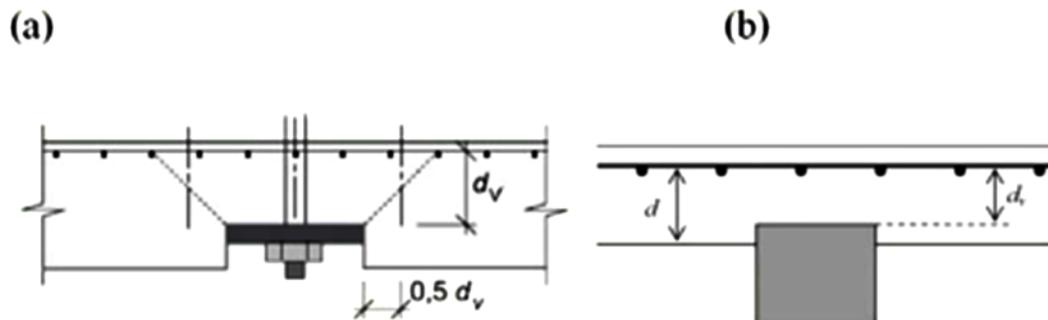
2.8 CÓDIGO MODELO 2010 – MC 2010

Para evitar que a ruptura por punção ocorra por deformação da laje aumenta-se a capacidade de deformação das possíveis rupturas com uma área de apoio grande com uma baixa taxa de armadura de flexão e utilização de armadura de cisalhamento. Quando necessário deverá ser utilizado também armadura contra o colapso progressivo assim permitindo a redistribuição dos esforços internos.

Foi proposto pelo Código Modelo (2010) a verificação quanto a força de cisalhamento para 4 níveis de precisão diferentes. Os três primeiros níveis se baseiam-se na rotação e para o quarto nível utiliza-se análise não linear da estrutura, levando em conta os efeitos da fissuração e enrijecimento, o escoamento das armaduras e outros efeitos lineares relevantes.

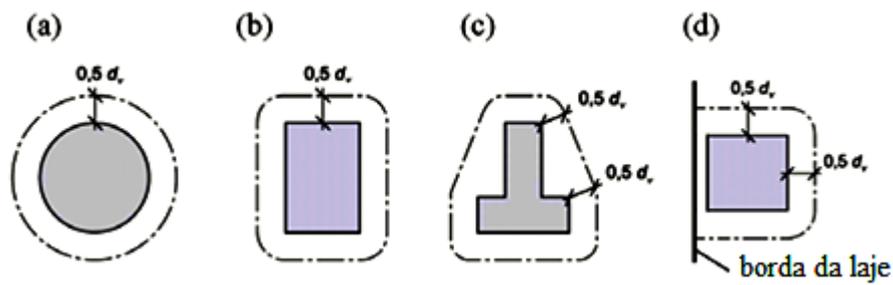
O modelo proposto é composto pelo somatório das forças de cisalhamento que atua no perímetro crítico para verificação quanto a altura última reduzida (d_v) resistente ao cisalhamento da laje e a distância entre o centro de gravidade da camada da armadura de flexão até a área de apoio como pode ser visto na Figura 43. A verificação quanto à área crítica pode ser considerada a uma distância $0,5.d_v$ da face do apoio ou da área carregada de maneira que se minimize o comprimento conforme as figuras 44 e 45, com a exceção de minoração para laje com altura variável em que se utiliza uma maior distância do eixo de apoio como pode ver na figura 46.

Figura 43 - Altura efetiva resistente ao cisalhamento da laje considerando a penetração do apoio (d_v) e altura efetiva considerada para o cálculo de resistência à flexão



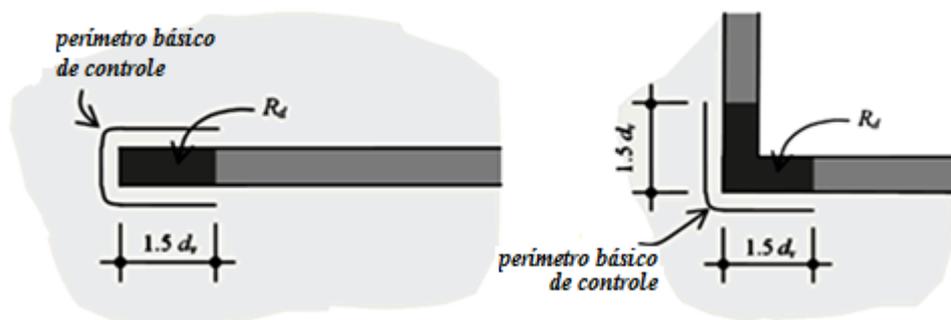
Fonte: Model Code Fib, 2010.

Figura 44 - Perímetro crítico das áreas de apoio



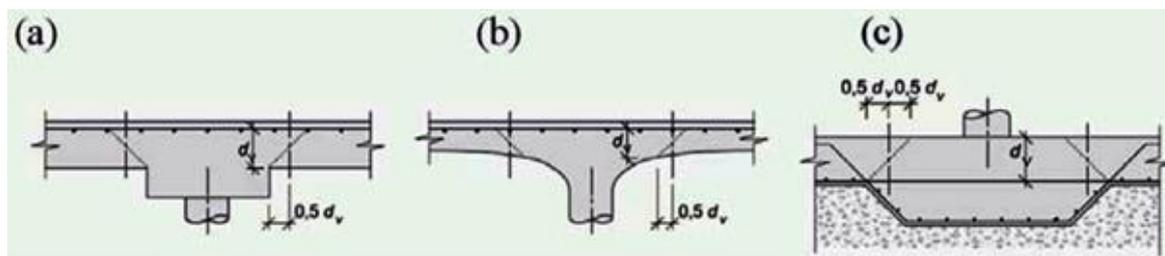
Fonte: Model Code Fib, 2010.

Figura 45 - Perímetro crítico das paredes



Fonte: Model Code Fib, 2010.

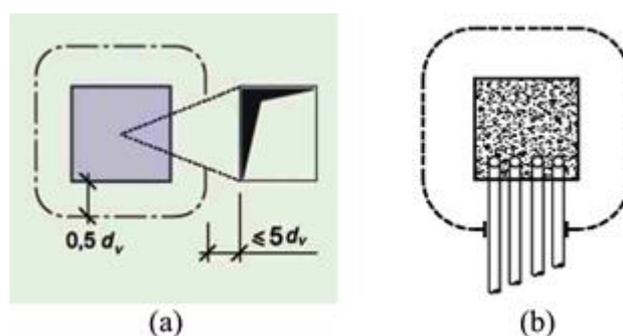
Figura 46 - Escolha do perímetro crítico potencialmente determinante



Fonte: Model Code Fib, 2010.

Foi verificado pelo FIB 2010 que a distribuição de tensões não uniformes de cisalhamento pode ser gerada por quatro fatores distintos: a concentração de forças de cisalhamento no canto de apoio que pode ser considerado analiticamente reduzindo-se o perímetro crítico, a descontinuidade geométrica, descontinuidade estática da laje devido à abertura – para se considerar essas descontinuidades deve-se reduzir o perímetro crítico em $0,5 \cdot d_v$ como pode ser visto na figura 47 – a concentração de forças de cisalhamento causada pela transferência do momento fletor entre a laje e a área do apoio – deve ser considerada analiticamente através do produto do perímetro básico pelo coeficiente de excentricidade (K_e), como demonstrado nas equações 52 e 53.

Figura 47 - Redução do perímetro crítico básico reduzido ($b_{1,red}$) nos casos de: (a) abertura; e (b) tubulações



Fonte: Model Code Fib, 2010.

$$b_0 = k_e \cdot b_{1,yed}$$

(Equação 52)

Sendo:

b_0 – Perímetro de controle resistente ao cisalhamento;

k_e –Coeficiente de excentricidade;

$b_{1,yed}$ – Perímetro reduzido de controle resistente ao cisalhamento.

$$k_e = \frac{1}{1 + \frac{e_u}{b_u}} \quad (\text{Equação 53})$$

Sendo:

k_e –Coeficiente de excentricidade;

e_u –Excentricidade da força de cisalhamento;

b_u –Diâmetro equivalente à área da região interna ao perímetro de controle.

O cálculo de punção é baseado na teoria da fissura crítica de cisalhamento e nos níveis de precisão I, II, III e IV, sendo calculado de acordo com a parcela resistente pelo concreto e pelo aço no perímetro crítico. A resistência de cisalhamento de punção que é a parcela resistente pelo concreto e aço é calculada pela equação 54. A parcela de resistência de cisalhamento do concreto é calculada pelas equações 55, 56 e 57, levando em conta o tamanho do agregado, além da rotação da laje em relação ao pilar e a espessura da laje. Deve-se utilizar para agregados com diâmetro maior ou igual a 16 mm o valor unitário para a equação 57, para agregados menores que 16 mm o coeficiente K_g é calculado pela equação 57, deve-se considerar a influência do tamanho do agregado em concretos de resistência usuais, já para concretos de alta resistência o agregado é igual a zero devido ao agregado se romper.

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \geq V_{Ed} \quad (\text{Equação 54})$$

Sendo:

V_{Rd} –Resistência de cisalhamento à punção;

$V_{Rd,c}$ –Resistência de cisalhamento do concreto;

$V_{Rd,s}$ –Resistência de cisalhamento do aço;

V_{Ed} – Força de cisalhamento.

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_0 \cdot d_v \quad (\text{Equação 55})$$

Sendo:

$V_{Rd,c}$ – Resistência de cisalhamento do concreto;

k_{ψ} – Constante em função das deformações da laje;

f_{ck} – Resistência do concreto a compressão;

γ_c – Fator de segurança do concreto;

b_0 – Perímetro crítico resistente ao cisalhamento;

d_v – Altura útil reduzida.

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,50 + 0,90 \cdot k_{dg} \cdot \psi \cdot d} \leq 0,60 \quad (\text{Equação 56})$$

Sendo:

k_{ψ} – Constante em função da deformação da laje;

k_{dg} – Coeficiente de excentricidade do agregado;

ψ – Rotação da laje;

d – Altura útil;

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g} \geq 0,75 \quad (\text{Equação 57})$$

Sendo:

k_{dg} – Coeficiente de excentricidade do agregado;

d_g – Tamanho do agregado.

Os cálculos de projeto de armaduras de cisalhamento tipo estribo, podem ser obtidos através do produto entre as áreas da seção transversal ancorada, o coeficiente de excentricidade e a tensão de ativação da armadura sendo descrito a resistência de cisalhamento devido a parcela do aço pelas equações 53, 58 e 59. A máxima resistência de

cisalhamento na estrutura deve ser calculada através da equação 60 e a resistência de cisalhamento fora da região de armadura de cisalhamento da biela comprimida do concreto é calculado pela equação 61.

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} \cdot k_e \cdot \sigma_{sw} \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (\text{Equação 58})$$

Sendo:

$V_{Rd,s}$ – Parcela resistente ao cisalhamento pelo aço;

$\sum A_{sw}$ – Somatório das áreas de aço de punção no intervalo de $0,35 d_v$ a d_v da face do pilar Coeficiente de excentricidade do agregado graúdo;

k_e – Coeficiente de Excentricidade;

σ_{sw} – Tensão ativa da armadura de cisalhamento.

α – Ângulo entre a barra de reforço ao cisalhamento e o plano do painel.

$$\sigma_{sw} = \frac{E_s \cdot \psi}{6} \cdot \left(1 + \frac{f_b}{f_{yw}} \cdot \frac{d}{\phi_w} \right) \leq f_{yw} \quad (\text{Equação 59})$$

Sendo:

σ_{sw} – Tensão ativa da armadura de cisalhamento;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

ψ – Rotação da laje;

f_b – Tensão de aderência do concreto (3MPa);

f_{yw} – Tensão de escoamento;

d – Altura útil;

ϕ_w – Diâmetro da armadura de cisalhamento.

$$V_{Rd,máx} = k_{sys} \cdot k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_0 \cdot d_v \leq \sqrt{f_{ck}} \cdot b_0 \cdot d_v \quad (\text{Equação 60})$$

Sendo:

$V_{Rd,máx}$ – Máxima resistência à punção;

k_{sys} – Parâmetro de desempenho da armadura de cisalhamento para controlar a fissuração;
 k_{ψ} – Deformações da laje;
 f_{ck} – Resistência do concreto a compressão;
 γ_c – Fator de segurança do concreto;
 b_0 – Perímetro crítico resistente ao cisalhamento;
 d_v – Altura útil reduzida.

$$V_{RC,out} = k_{\psi} \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot b_{out} \cdot d_v \quad \text{(Equação 61)}$$

Sendo:

$V_{RC,out}$ – Resistência de Cisalhamento fora da zona de armadura de cisalhamento;
 k_{ψ} – Constante em função da deformação da laje;
 f_{ck} – Resistência do concreto a compressão;
 γ_c – Fator de segurança do concreto;
 b_{out} – Perímetro crítico resistente ao cisalhamento.

Para calcular-se a estrutura com o nível de pré-dimensionamento da estrutura deve-se utilizar a rotação no nível I descrito pela equação 62 e para lajes que tenha redistribuição significativa de momento fletor deve-se calcular a rotação pelas equações 63, 64 e 65, nas duas direções principais de armadura de flexão de acordo com os parâmetros de distâncias e momento fletor. Para um nível de maior segurança e uma melhor estimativa para as lajes utiliza-se o Nível III descrito pela equação 66.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{(Equação 62)}$$

Sendo:

ψ – Rotação da laje;
 r_s – Posição de momento fletor nulo;

f_{yd} – Resistência do aço a tração;
 d – Altura útil;
 E_s – Módulo de elasticidade do aço.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \cdot \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad \text{(Equação 63)}$$

Sendo:

ψ – Rotação da laje;
 r_s – Posição de momento fletor nulo;
 f_{yd} – Resistência do aço a tração;
 d – Altura útil;
 E_s – Módulo de elasticidade do aço;
 m_{sd} – Momento fletor solicitante;
 m_{Rd} – Momento fletor resistente.

$$b_s = 1,5 \cdot \sqrt{r_{s,x} \cdot r_{s,y}} \quad \text{(Equação 64)}$$

Sendo:

b_s – Largura da faixa de reforço;
 $r_{s,x}$ – Posição de momento fletor nulo em x;
 $r_{s,y}$ – Posição de momento fletor nulo em y.

$$m_{sd} = V_{Ed} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{e_{ui}}{2 \cdot b_s} \right) \quad \text{(Equação 65)}$$

Sendo:

m_{sd} – Momento fletor solicitante;
 e_{ui} – Excentricidade resultante da força de cisalhamento;
 b_s – Largura da faixa de reforço;
 V_{Ed} – Força de cisalhamento.

$$\psi = 1,2 \cdot \frac{r_s}{d} \cdot \frac{f_{yd}}{E_s} \cdot \left(\frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad (\text{Equação 66})$$

Sendo:

ψ –Rotação da laje;

r_s – Posição de momento fletor nulo;

f_{yd} –Resistência do aço a tração;

d – Altura útil;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

m_{sd} – Momento fletor solicitante;

m_{Rd} – Momento fletor resistente.

Para análise não linear da estrutura contendo fissuração e considerando os efeitos de rigidez a rotação da laje deve ser calculada através de técnicas analíticas ou numéricas pelo nível IV.

3 BANCO DE DADOS DE LAJES ENSAIADAS

Para análise da última carga de ruptura com o CEB-FIB Model Code, foi utilizado um banco de dados de laje com armadura de cisalhamento tipo double-headed studs, cujo os ensaios de resistência à punção foram realizados no Laboratório de Estruturas da Universidade de Brasília por dois pesquisadores. As lajes LN01, LN02, LN03, LN04 e LN05 ensaiadas por Oliveira (2013) e as lajes LS01, LS02, LS05 e LS07 por Ferreira (2010).

Nas lajes com referência LN o carregamento foi aplicado de forma simétrica, sem transferência de momento. As lajes com referência LS o carregamento aplicado foi de forma excêntrica, com transferência de momento na direção de maior inércia da seção transversal do pilar.

As nove lajes ensaiadas possuíam a mesma distribuição das armaduras de flexão, composta por barras de CA-50 de 16 mm. Na parte superior da laje as armaduras principais estão em duas direções, sendo em uma direção a armação a cada 90 mm e na outra direção a cada 10 mm, e cobrimento de 20 mm. Este espaçamento foi escolhido para que a resistência de flexão em ambas direções fossem iguais. Para a parte inferior da laje utilizou-se barras de 8 mm a cada 200 mm em uma direção e na outra direção uma barra de 8 mm a cada 180 mm com cobrimento de 10 mm. Isso para se evitar a fissuração da laje no transporte

As cinco lajes maciças ensaiadas por Oliveira e as quatro lajes maciças ensaiadas por Ferreira, tinham dimensões de 2.500 x 2.500 mm em planta e espessura de 180 mm, com pilar central retangular de 400 x 200 mm e altura total de 1580 mm para as lajes de Oliveira e quadrado para as lajes de Ferreira com seção de 300 mm e altura total de 1580 mm.

A tabela 1 apresenta mais características das lajes ensaiadas e as figuras 48, 49, 50, 51, 52, 53 e 54 mostram as distribuições da armadura de cisalhamento das lajes.

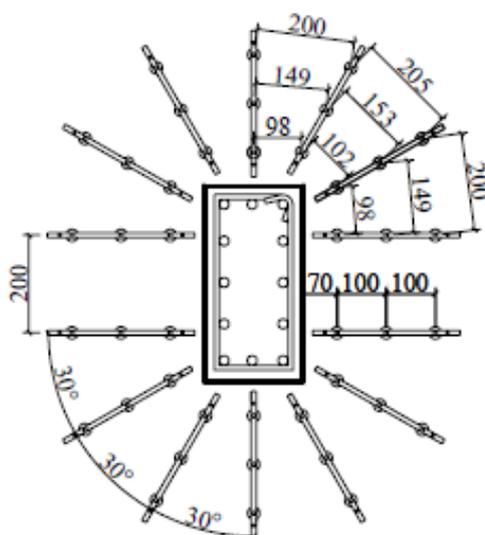
Tabela 1 - Principais características das lajes

Autor	Lajes	d _v (mm)	Pilar (mm)	d _g (mm)	f _{yd} (MPa)	ESY (MPa)	ESw (MPa)	f _{ck} (MPa)	f _{yw} (MPa)	Ø _w (mm)	Armadura de Cisalhamento		
											N ^o de camadas	N ^o de linhas	Asw / Cama da (mm ²)
Oliveira (2013)	LN01	143	400/200	9,5	578	203400	200800	55,1	573	8,0	3	14	704
	LN02	143	400/200	9,5	578	203400	200800	53,8	573	8,0	6	14	704
	LN03	143	400/200	9,5	578	203400	200800	51,2	---	---	---	---	---
	LN04	143	400/200	9,5	578	203400	194600	55,5	651	6,3	4	14	436
	LN05	142	400/200	9,5	578	203400	209400	54,8	602	12,5	5	14	1718
Ferreira (2010)	LS01	145	300/300	9,5	578	203400	200800	48	577	10,0	2	12	942
	LS02	143	300/300	9,5	578	203400	200800	49	577	10,0	4	12	942
	LS05	143	300/300	9,5	578	203400	209400	50	---	---	---	---	---
	LS07	143	300/300	9,5	557	222000	218000	49	577	12,5	4	12	1472

Obs.:
 S₀ = 70 mm (espaçamento entre a face do pilar e a primeira camada de *studs*)
 S_r = 100 mm (espaçamento entre as camadas de *studs*)
 f_{ys} = 577 MPa (tensão de escoamento da armadura de flexão - $\phi f = 16.0$ mm)

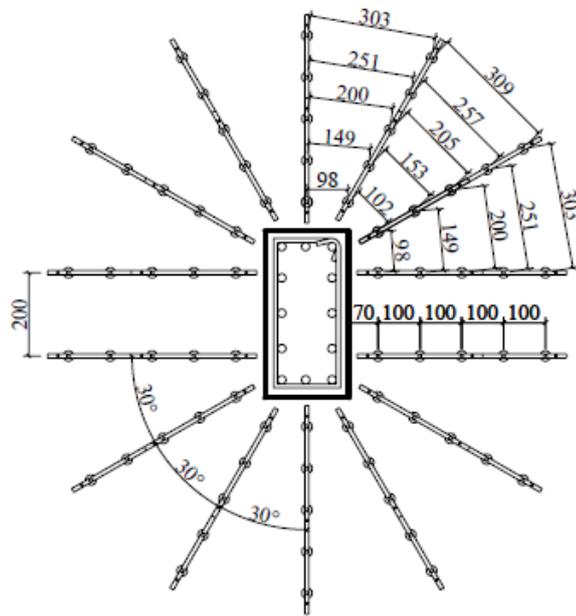
Fonte: Oliveira, 2013.

Figura 48 - Laje LN01



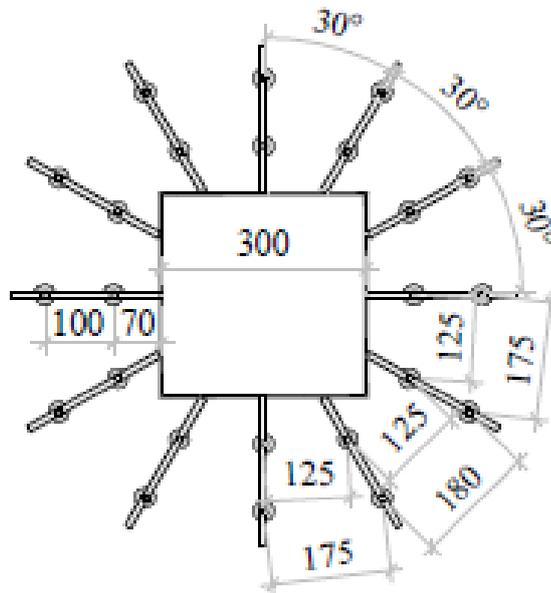
Fonte: Oliveira, 2013.

Figura 51 - Laje LN05



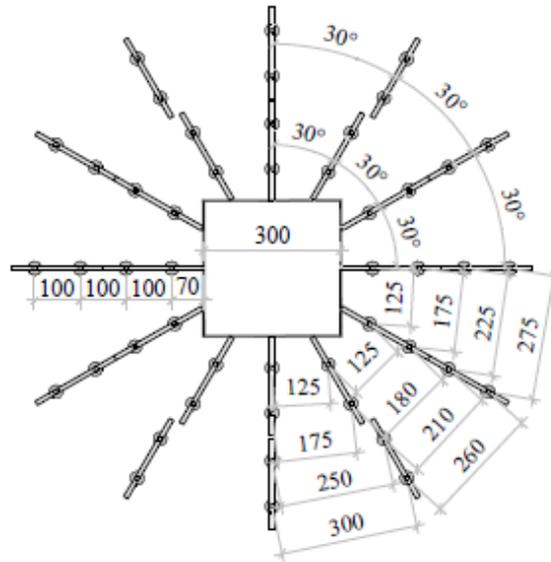
Fonte: Oliveira, 2013.

Figura 52 - Laje LS01



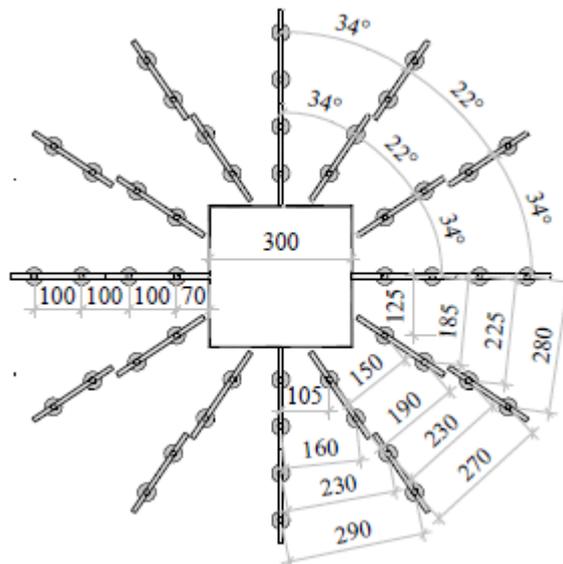
Fonte: Ferreira, 2010.

Figura 53 - Laje LS02



Fonte: Ferreira, 2010.

Figura 54 - Laje LS07



Fonte: Ferreira, 2010.

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta o procedimento de estimativa de carga última de ruptura, nos níveis 1, 2 e 3, para o *fib Model Code 2010*, cujos resultados apresentados servem para comparar com os resultados da Teoria da fissura crítica de cisalhamento na qual foram utilizados dois níveis de precisão (CSCTsimp. e CSCTaver.). Para estimar as cargas de ruptura utilizou-se as equações sem fator de segurança uma vez que se quer obter a carga real de ruptura da estrutura. Os resultados da carga de ruptura estão apresentados nas tabelas 2 e 3, sendo as cargas de ruptura o menor valor entre a força de cisalhamento resistida pelo concreto e o aço $V_{R,cs}$, pela força de cisalhamento máxima $V_{R,máx}$ e pela força de cisalhamento resistida pelo concreto fora da região de armadura de cisalhamento.

Tabela 2 - Previsão da carga de ruptura pelo TFCC

Autor	Laje	Vu (kN)	TFCC simp.				TFCC aver.			
			Vteorico (kN)	Vu/ VTeorico	Med.	C.V	Vteorico (kN)	Vu / VTeorico	Med.	C.V
Oliveira (2013)	LN01	1084	750	1,45	1,40	0,04	875	1,24	1,21	0,05
	LN02	1144	804	1,42			894	1,28		
	LN03	786	545	1,44			632	1,24		
	LN04	965	705	1,37			824	1,17		
	LN05	1143	865	1,32			1014	1,13		
Ferreira (2010)	LS01	1022	650	1,57	1,48	0,05	755	1,35	1,27	0,05
	LS02	1128	770	1,46			898	1,26		
	LS05	779	552	1,41			640	1,22		
	LS07	1197	824	1,45			955	1,25		

Fonte: Oliveira, 2013.

Tabela 3 - Previsão da carga de ruptura pelo CEB-FIB Model Code

Autor	Laje	Vu (kN)	MC2010 NÍVEL I				MC2010 NÍVEL III				MC2010 NÍVEL III			
			VR (kN)	Vu/ VR	Med .	C.V	VR (kN)	Vu/ VR	Med .	C.V	VR (kN)	Vu/ VR	Med .	C.V
Oliveira (2013)	LN01	1084	826	1,31	1,41	0,24	851	1,27	1,17	0,15	870	1,25	1,15	0,14
	LN02	1144	821	1,39			844	1,36			863	1,33		
	LN03	786	407	1,93			704	1,12			741	1,06		
	LN04	965	694	1,39			792	1,22			822	1,17		
	LN05	1143	1142	1,00			1268	0,90			1239	0,92		
Ferreira (2010)	LS01	1022	625	1,63	1,50	0,24	878	1,16	1,16	0,08	882	1,16	1,16	0,08
	LS02	1128	922	1,22			880	1,28			878	1,28		
	LS05	779	402	1,94			697	1,12			734	1,06		
	LS07	1197	995	1,20			1124	1,06			1049	1,14		

Fonte: Oliveira, 2013.

O CEB-FIB Model Code propõe uma verificação para estimar o local onde a laje vai romper. Uma vez que você tem a carga estrutural do seu projeto, consegue-se estimar se a laje vai romper na região de armação de cisalhamento, ou se vai romper fora ou dentro da região de armadura de cisalhamento por esmagamento do concreto e com isso consegue verificar se sua armação, a resistência do concreto e a espessura da laje são suficientes para resistir a carga. Para estimar a carga de ruptura da estrutura deve-se trabalhar em função da rotação da laje ψ e de concreto na armadura de cisalhamento e fora da região de armadura de cisalhamento.

O código modelo nível I de aproximação do cálculo da rotação ψ é bastante simples com a substituição dos dados, da posição onde o momento fletor é nulo (r_s), da altura útil (d), da resistência do aço a tração (f_{yd}) e do módulo de elasticidade do aço (E_s). Obtendo-se a rotação calculam-se os valores de cisalhamento à parcela resistente pelo concreto por meio da equação 55, a parcela resistente do aço pela equação 58, sendo a soma dessas parcelas a capacidade de carga da ligação laje pilar calculado pela equação 54. Com a rotação pode se calcular também a máxima resistência à punção pela equação 60 e a resistência à punção fora da zona de armadura de cisalhamento pela equação 61 e com isso pode se estimar a carga de ruptura. Obteve para esse procedimento as seguintes cargas na tabela 4 para as lajes de Oliveira e de Ferreira.

Tabela 4 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível I de aproximação de ψ

Autor	Série	Nível 1										Carga última experimental (kN)
		ψ (rad)	$k\psi$	$V_{Rd,c}$ (kN)	$V_{R,c out}$ (kN)	σ_{sw} (MPa)	$\sum A_{sw}$ (mm ²)	$V_{Rd,s}$ (kN)	$V_{R,cs}$ (kN)	k_{sys}	$V_{Rd,max}$ (kN)	
Oliveira (2013)	LN01	0,017 3	0,241	422	835	573,0 0	704	403	825	2,80	1182	1083
	LN02	0,017 3	0,241	417	129 5	573,0 0	704	403	820	2,80	1168	1144
	LN03	0,017 3	0,241	407	0	0,00	0	0	0	2,00	814	786
	LN04	0,017 3	0,241	423	997	618,2 9	436	269	693	2,80	1186	966
	LN05	0,017 4	0,241	417	114 1	602,0 0	1718	1034	1451	2,80	1168	1143
Ferreira (2010)	LS01	0,017 0	0,241	401	625	573,0 0	942	540	941	2,80	1123	1021
	LS02	0,017 3	0,241	398	921	573,0 0	942	540	938	2,80	1115	1127
	LS05	0,017 3	0,241	402	0	0,00	0	0	0	2,00	804	779
	LS07	0,015 3	0,261	430	995	530,0 0	1473	780	1210	2,80	1204	1196

Fonte: O autor, 2016

Para o nível II de aproximação o cálculo da rotação ψ se torna mais complexo e tem o resultado mais refinado uma vez que leva em conta a distribuição de momentos fletores na rotação. Para estimar a carga de ruptura temos que isolar a variável V_{ed} da equação 65 em função da rotação ψ e substituir a variável na equação 63 se obtém a equação 67, em função da ψ .

$$V_{Ed} = (8 \cdot m_{rd}) \cdot \left(\frac{\psi \cdot d \cdot E_s}{1,5 \cdot r_s \cdot f_{yd}} \right)^{1,5} \quad \text{(Equação 67)}$$

Sendo:

V_{Ed} – Força de cisalhamento;;

m_{Rd} – Momento fletor resistente;

ψ – Rotação da laje;

d – Altura útil;

E_s – Módulo de elasticidade do aço;

r_s – Posição de momento fletor nulo;

f_{yd} – Resistência do aço a tração.

Com V_{ed} e $V_{Rd,cs}$ em função de ψ pode se igualar a duas cargas e resolver a equação resultante em função da rotação (ψ) para laje na ruptura e com isso se consegue estimar os valores de V_{ed} e $V_{Rd,cs}$ para ruptura prevista de acordo com a rotação. Para a ruptura na biela comprimida utiliza-se o mesmo procedimento para $V_{Rd,cs}$ contudo igualando V_{ed} à $V_{R, máx}$ e achando uma nova rotação ($\psi_{máx}$) em função de $V_{R, máx}$ e calcula a carga $V_{R, máx}$ em função da mesma. Para estimar a rotação fora da região de cisalhamento utiliza-se do mesmo artifício, porém iguala-se V_{ed} à $V_{Rc,out}$ encontrando uma nova rotação (ψ_{out}) em função de $V_{Rc, out}$ e calcula a carga $V_{Rc, out}$ em função de ψ_{out} . Para esse procedimento se obteve os resultados nas tabelas 5 e 6 de cargas para as lajes de Oliveira e de Ferreira.

Tabela 5 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível II de aproximação de ψ

Autor	Série	Nível II						
		ψ (rad)	$k\psi$	$V_{R,c}$ (kN)	σ_{sw} (MPa)	ΣA_{sw} (mm ²)	$V_{R,s}$ (kN)	$V_{R,cs}$ (kN)
Oliveira (2013)	LN01	0,00782	0,371	650	285	704	200	850
	LN02	0,00775	0,373	644	282	704	198	843
	LN03	0,00589	0,417	703	0	0	0	0
	LN04	0,00704	0,389	682	251	436	109	792
	LN05	0,02261	0,203	351	602	1718	1034	1385
Ferreira (2010)	LS01	0,00826	0,360	598	296	942	279	877
	LS02	0,00939	0,341	563	337	942	317	880
	LS05	0,00586	0,418	696	0	0	0	0
	LS07	0,01036	0,325	536	400	1473	588	1124

Fonte: O autor, 2016.

Tabela 6 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível II de aproximação de ψ

Autor	Série	Nível II								
		k _{sys}	ψ_{\max} (rad)	k ψ_{\max}	V _{R,max} (kN)	ψ_{out} (rad)	K ψ_{out}	b out (mm)	V _{R,c out} (kN)	Carga última experimental (kN)
Oliveira (2013)	LN01	2,8	0,0150	0,264	1293	0,0113	0,310	3262,7	1072	1083
	LN02	2,8	0,0149	0,265	1284	0,0162	0,252	5122,1	1355	1144
	LN03	2	0,0112	0,312	1054	0,0051	0,439	0	0	786
	LN04	2,8	0,0151	0,264	1296	0,0131	0,286	3881,9	1182	966
	LN05	2,8	0,0150	0,265	1283	0,0147	0,268	4501,7	1267	1143
Ferreira (2010)	LS01	2,8	0,0143	0,269	1252	0,0088	0,349	2581	905	1021
	LS02	2,8	0,0153	0,261	1205	0,0132	0,285	3818	1089	1127
	LS05	2	0,0111	0,313	1044	0,0051	0,440	0	0	779
	LS07	2,8	0,0132	0,285	1316	0,0113	0,311	3815	1186	1196

Fonte: O autor, 2016.

Para o nível III de aproximação o cálculo da rotação ψ se torna mais complexo e tem o resultado mais refinado que o nível anterior. Para estimar a carga de ruptura temos que isolar a variável V_{ed} da equação 65 em função da rotação ψ e substituir a variável na equação 63, se obtemos a equação 67, em função da ψ .

$$V_{Ed} = (8 \cdot m_{rd}) \cdot \left(\frac{\psi}{1,2} \cdot \frac{d}{r_s} \cdot \frac{E_s}{f_{yd}} \right)^{1,5} \quad \text{(Equação 68)}$$

Sendo:

- V_{Ed} – Força de cisalhamento;
- m_{Rd} – Momento fletor resistente;
- ψ – Rotação da laje;
- d – Altura útil;
- E_s – Módulo de elasticidade do aço;
- r_s – Posição de momento fletor nulo;
- f_{yd} – Resistência do aço a tração.

O cálculo para nível III é feito seguindo os mesmos procedimentos do nível II, porém com coeficiente 1,2 em vez de 1,5 como pode ser verificado na equação 68, tendo como resultado nas tabelas 7 e 8 de cargas nas lajes de Oliveira e de Ferreira.

Tabela 7 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível III de aproximação de ψ

Autor	Série	Nível III						
		ψ (rad)	$k\psi$	$V_{R,c}$ (kN)	σ_{sw} (MPa)	ΣA_{sw} (mm ²)	$V_{R,s}$ (kN)	$V_{R,cs}$ (kN)
Oliveira (2013)	LN01	0,0065	0,402	703	236	704	165	869
	LN02	0,0064	0,404	698	234	704	164	862
	LN03	0,0051	0,439	740	0	0	0	0
	LN04	0,0060	0,415	729	212	436	92	822
	LN05	0,0109	0,317	548	402	1718	689	1238
Ferreira (2010)	LS01	0,0067	0,395	657	239	942	224	882
	LS02	0,0075	0,379	625	268	942	252	877
	LS05	0,0051	0,440	733	0	0	0	0
	LS07	0,0074	0,380	627	287	1473	421	1048

Fonte: O autor, 2016.

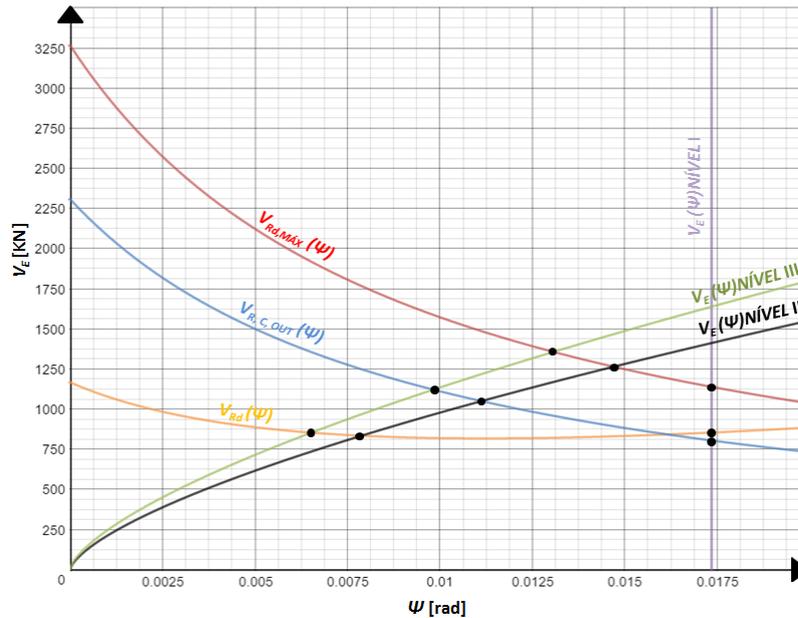
Tabela 8 - Rotações e cargas previstas pelo fib Model 2010 seguindo o nível III de aproximação de ψ

Autor	Série	Nível III								
		k_{sys}	ψ_{max} (rad)	$k_{\psi_{max}}$	$V_{R,max}$ (kN)	ψ_{out} (rad)	$K_{\psi_{out}}$	b_{out} (mm)	$V_{R,c out}$ (kN)	Carga última experimental (kN)
Oliveira (2013)	LN01	2,8	0,0133	0,283	1387	0,0100	0,331	3262	1144	1083
	LN02	2,8	0,0132	0,284	1376	0,0144	0,271	5122	1455	1144
	LN03	2	0,0098	0,333	1124	0,0044	0,460	0	0	786
	LN04	2,8	0,0134	0,283	1390	0,0116	0,306	3881	1264	966
	LN05	2,8	0,0133	0,284	1376	0,0131	0,287	4501	1359	1143
Ferreira (2010)	LS01	2,8	0,0127	0,288	1342	0,0077	0,371	2581	962	1021
	LS02	2,8	0,0136	0,280	1292	0,0117	0,305	3818	1165	1127
	LS05	2	0,0098	0,334	1114	0,0044	0,461	0	0	779
	LS07	2,8	0,0117	0,305	1409	0,0099	0,332	3815	1266	1196

Fonte: O autor, 2016.

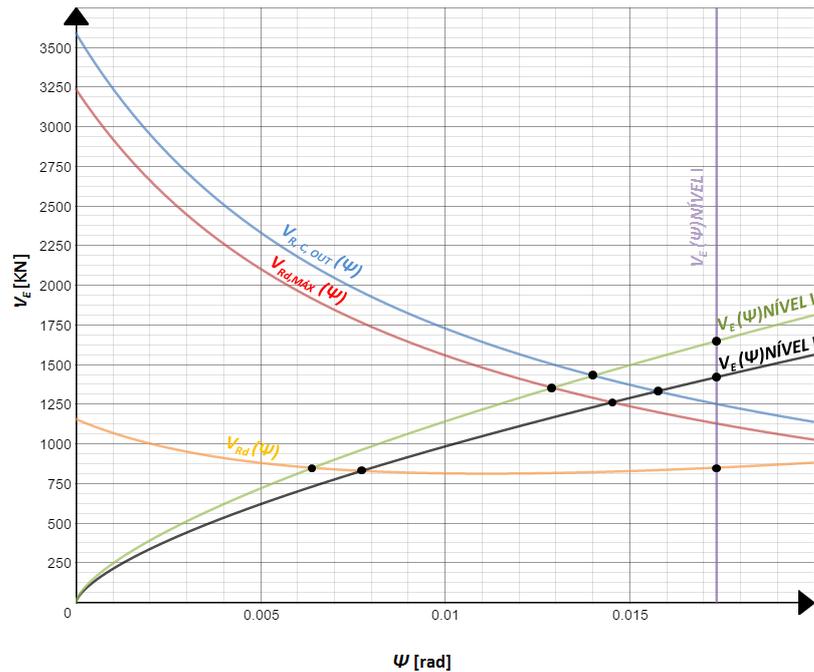
Para ter uma interpretação mais precisa do CEB-FIB Model Code dos diferentes níveis de aproximação rotação (ψ), plotou-se os gráficos de carga solicitante em função da rotação e da carga resistente em função da rotação. No ponto onde os gráficos se cruzam a carga resistente é igual a solicitante podendo assim determinar a carga de ruptura do modelo de cálculo.

Gráfico 1 - Laje LN01 Carga resistente e solicitante em função da rotação



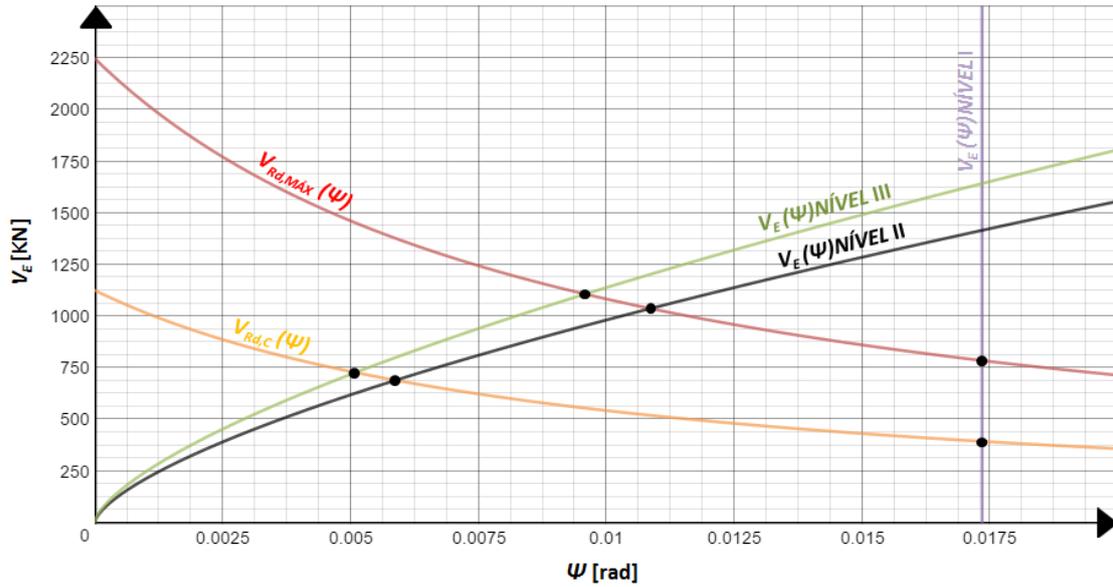
Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 2 - Laje LN02 Carga resistente e solicitante em função da rotação



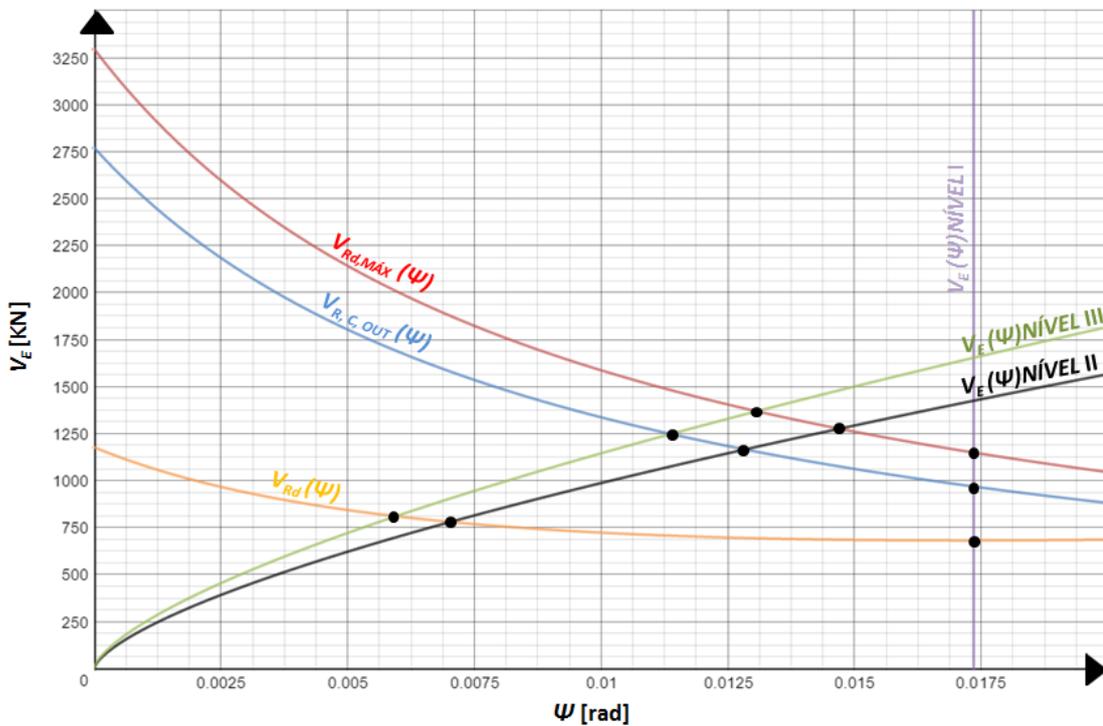
Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 3 - Laje LN03 Carga resistente e solicitante em função da rotação



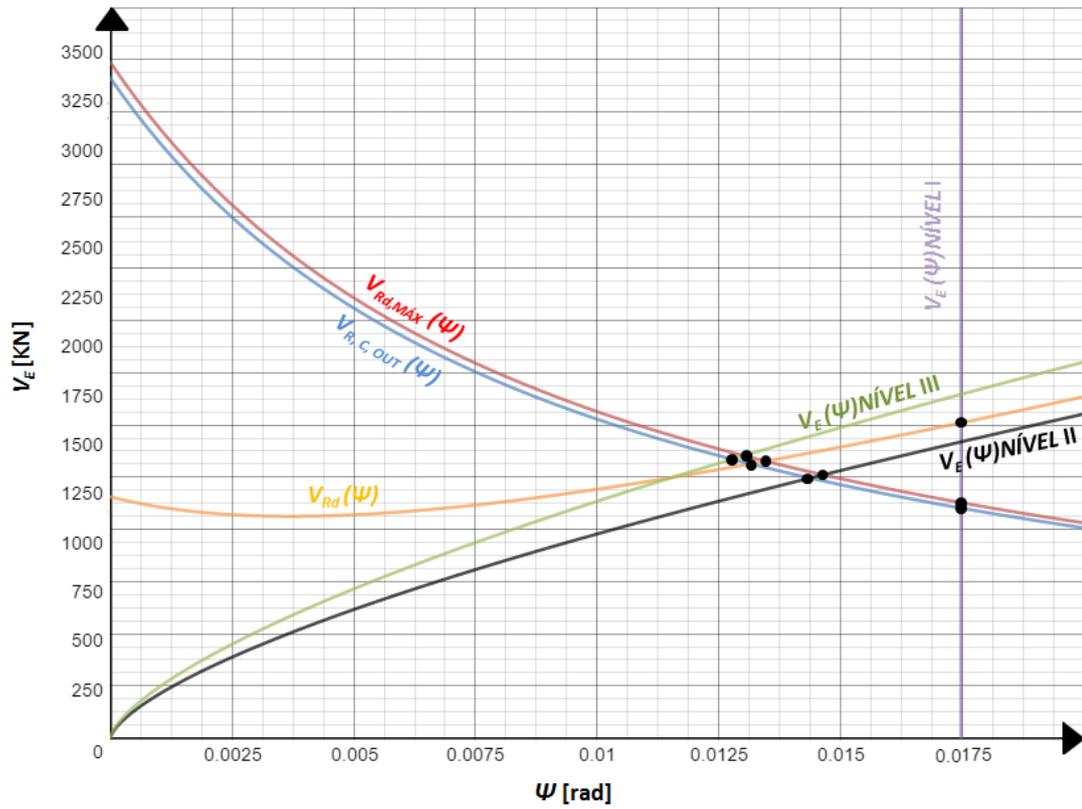
Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 4 - Laje LN04 Carga resistente e solicitante em função da rotação



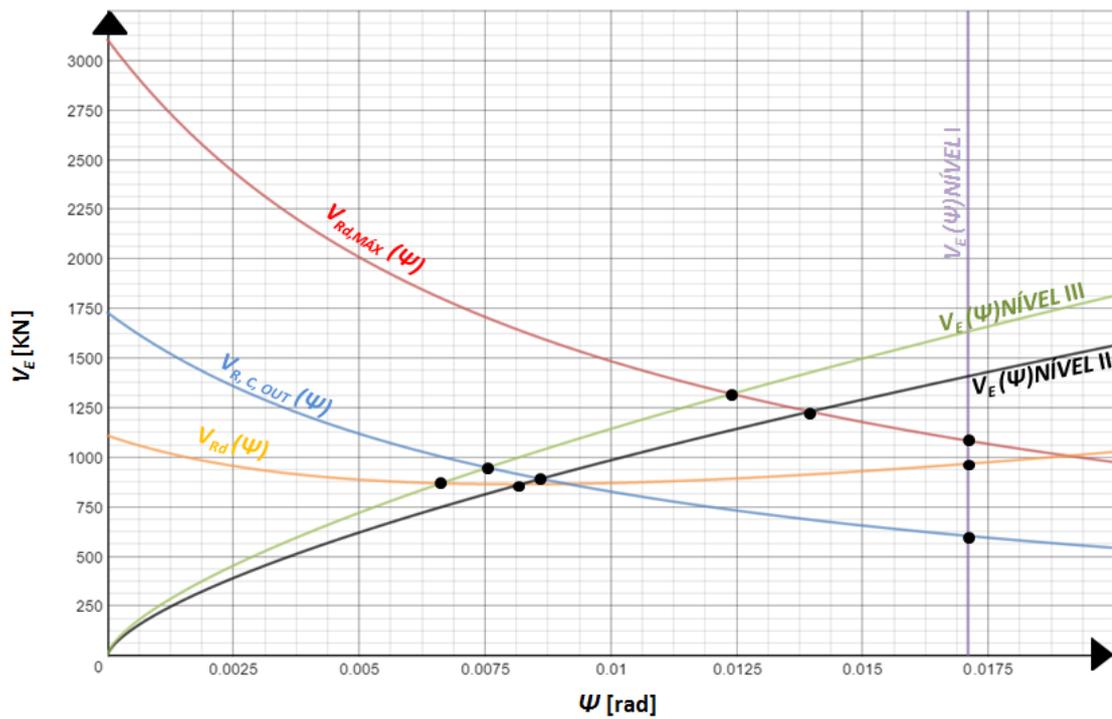
Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 5 - Laje LN05 Carga resistente e solicitante em função da rotação



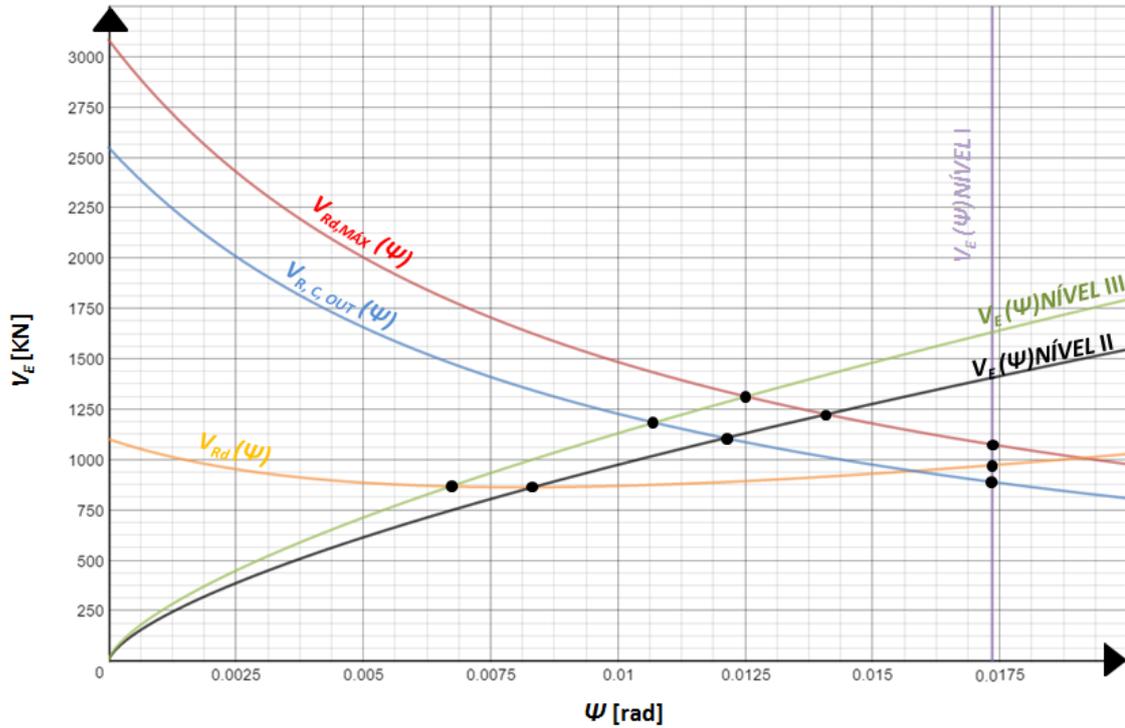
Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 6 - Laje LS01 Carga resistente e solicitante em função da rotação



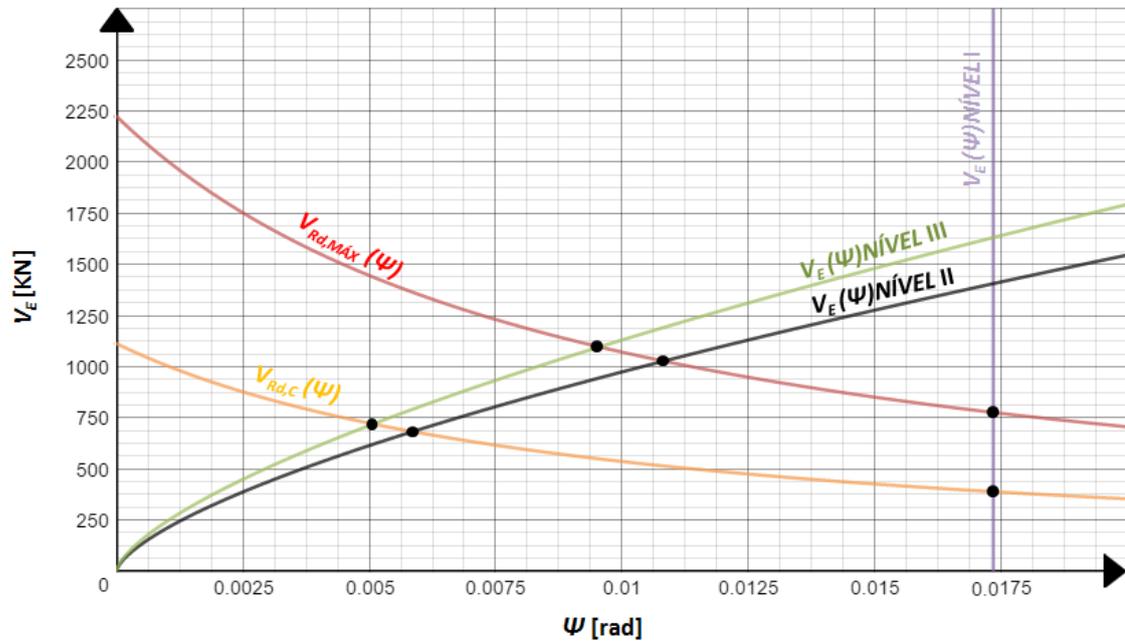
Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 7 - Laje LS02 Carga resistente e solicitante em função da rotação



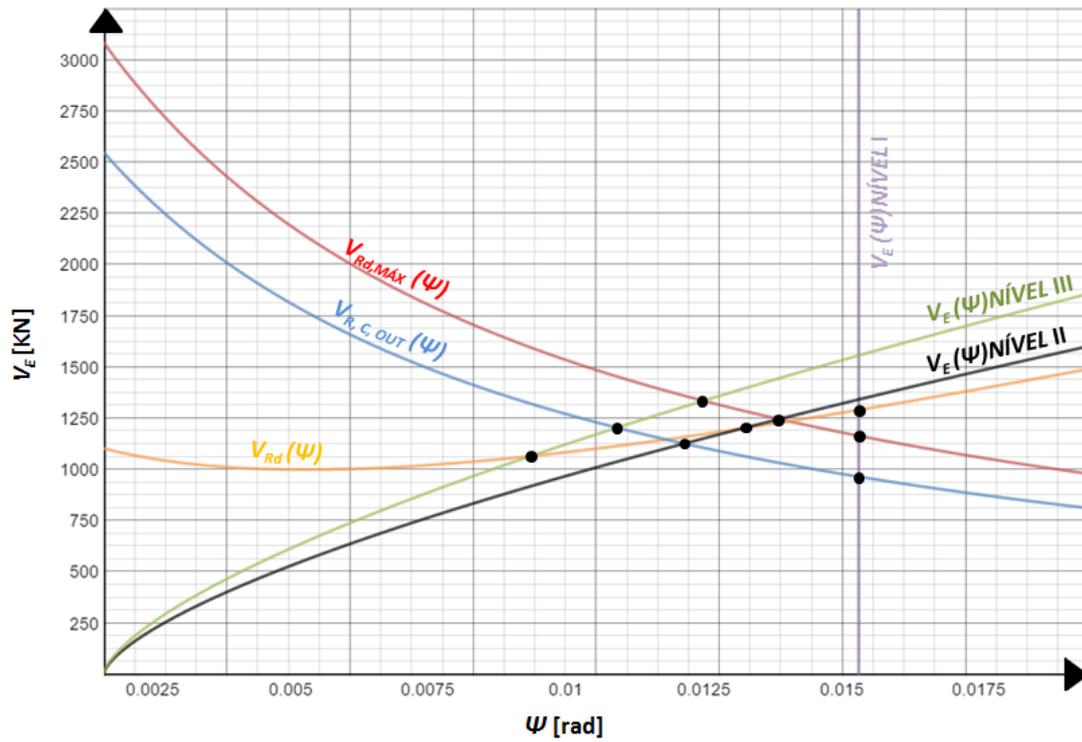
Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 8 - Laje LS05 Carga resistente e solicitante em função da rotação



Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 9 - Laje LS07 Carga resistente e solicitante em função da rotação



Fonte: O autor, 2016.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta as cargas resistentes das 9 lajes previsto pelo CEB-FIB Model Code e pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento. Os resultados apresentados servem para comparar com os resultados do CEB-FIB Model Code com o da Teoria da fissura crítica de cisalhamento e fazer uma avaliação de forma crítica e qualitativa comparando-se a carga última estimada e a carga última de ensaio.

Na tabela 9 o módulo de ruptura na superfície de ruptura foi verificado fora da região de armadura de cisalhamento, dentro da região de armadura de cisalhamento e em laje sem armadura de cisalhamento em que utilizou-se a palavra punção.

Tabela 9 - Comparação dos métodos teóricos

Autor	Laje	Superfície de ruptura	TFCC simp.		TFCC aver.		MC2010 NÍVEL 1		MC2010 NÍVEL 2		MC2010 NÍVEL 3	
			Vu/VTeórico	Superfície de ruptura TFCC	Vu/VTeórico	Superfície de ruptura TFCC	Vu/VR	Superfície de ruptura MC2010	Vu/VR	Superfície de ruptura MC2010	Vu/VR	Superfície de ruptura MC2010
Oliveira (2013)	LN01	Fora	1,45	Fora	1,24	Fora	1,31	Dentro	1,27	Dentro	1,25	Dentro
	LN02	Dentro	1,42	Dentro	1,28	Dentro	1,39	Dentro	1,36	Dentro	1,33	Dentro
	LN03	Punção	1,44	Punção	1,24	Punção	1,93	Punção	1,12	Punção	1,06	Punção
	LN04	Dentro	1,37	Dentro	1,17	Dentro	1,39	Dentro	1,22	Dentro	1,17	Dentro
	LN05	Fora	1,32	Fora	1,13	Fora	1,00	Fora	0,90	Fora	0,92	Dentro
Ferreira (2010)	LS01	Fora	1,57	Fora	1,35	Fora	1,63	Fora	1,16	Dentro	1,16	Dentro
	LS02	Dentro	1,46	Fora	1,26	Fora	1,22	Fora	1,28	Dentro	1,28	Dentro
	LS05	Punção	1,41	Punção	1,22	Punção	1,94	Punção	1,12	Punção	1,06	Punção
	LS07	Fora	1,45	Fora	1,25	Fora	1,20	Fora	1,06	Dentro	1,14	Dentro
		Média	1,43		1,24		1,45		1,17		1,15	
		C.V	0,05		0,05		0,22		0,12		0,11	

Fonte: O autor, 2016.

Os resultados apresentados pela Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC) e pelo CEB-FIB Model Code devem ser analisados de acordo com a precisão de cada método.

Para a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento foi estimada em dois níveis de precisão sendo o método completo (TFCCaver.) e o método simplificado (TFCCsimp.), ambos apresentaram 88% dos seus resultados a favor da segurança, observando que para o método simplificado obteve-se média geral de 1,43 com um coeficiente de variação de 0,05 tendo mínimas variações. Para o método completo pode-se observar valores mais próximos

do real com um valor médio igual 1,24 com pequenas variações, sendo o coeficiente de variação 0,05.

Para o CEB-FIB Model Code foi analisado em três graus para o nível I teve uma média a favor da segurança com 77% de seus resultados favoráveis, tendo uma média de 1,45 e um elevado coeficiente de variação de 0,22, para o nível II devido a precisão ser maior obteve-se uma média de 1,17 com 67% dos valores a favor da segurança e com um coeficiente de variação de 0,12, o nível III obteve um melhor resultado dentre os métodos analisados uma vez que a média foi a mais próxima de um, sendo ela 1,15 com um coeficiente de variação de 0,11, o nível III também teve uma maior precisão nos cálculos de rotação para se estimar a resistência última. Para o CEB-FIB Model Code o modo de ruptura estimado de forma errada contra a segurança pode ser devida a minoração da resistência do concreto tendo uma ruptura diferente da ensaiada.

O método proposto por Muttoni da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento obteve um melhor resultado quando comparado com os resultados do CEB-FIB Model Code, errando em 22% o modo da superfície de ruptura das lajes quanto à segurança, porém superestimando o nível simplificado para o nível completo obteve-se valor próximo do valor real de ruptura e a favor da segurança sem superestimar. Quanto a tendência da superfície de ruptura tanto o modo simplificado quanto o completo, apresentaram uma tendência de ruptura fora da região da armadura de cisalhamento sendo bastante satisfatória quanto a tendência de ruptura da laje.

O CEB-FIB Model Code obteve resultados mais favoráveis a segurança nos níveis 2 e 3 quando comparado a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento. Quanto a tendência de ruptura o nível I apresentou uma tendência de ruptura fora da região de armação de cisalhamento e acertando em 77% dos casos o modo de ruptura, o nível II obteve uma tendência de ruptura dentro da região da armadura de cisalhamento acertando em 66% o modo de ruptura, já o nível III obteve uma tendência de ruptura dentro da região de armadura de cisalhamento com 55% de acerto no modo de ruptura. Pode-se observar que quanto ao modo de ruptura o CEB-FIB Model Code não apresentou resultado satisfatório, considerando-se o número de lajes verificadas no banco de dados.

Analisando os resultados plotados no CEB-FIB Model Code pode-se analisar na laje LN02 a resistência última $V_{r,out}$ é maior do que a resistência $V_{rd,máx}$, isso ocorre devido a laje LN02 ter um grande número de camadas na distribuição da armadura de cisalhamento o que influencia diretamente no cálculo do perímetro crítico, se majorando a resistência do concreto fora da região de armadura de cisalhamento. Seria necessário estudar lajes com número de

camadas maiores para verificar se é recorrente a superestimação da resistência do concreto fora da região de armadura de cisalhamento para fazer correções, caso sejam necessários, na formulação para lajes com grande número de camadas de armadura de cisalhamento.

6 CONCLUSÃO

Investigando as cargas de ruptura por punção pelo método proposto por Muttoni, a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento das 9 lajes ensaiadas percebe-se que o método simplificado (TCCsimp.) obteve valores satisfatórios uma vez que esse método é recomendado para pré-dimensionamento segundo o respectivo autor, com média conservadora de 1,43 e com um coeficiente de variação pequeno de 0,05, além de acertar em 88% na previsão do modo como acontecerá a ruptura na superfície da laje. Para o método completo (TCCaver.) obteve-se resultados bem satisfatórios quanto ao modo de ruptura da laje com erro de 22%, tendo uma média de 1,24 e um coeficiente de variação de 0,05.

Analizando as cargas de ruptura por punção pelas prescrições do CEB-FIB Model Code das 9 lajes ensaiadas para os três primeiros níveis de aproximação do modelo. No nível I de aproximação o resultado foi o mais conservador dos dois modelos comparados, tendo uma média de 1,45, um alto coeficiente de variação de 0,22 e um satisfatório resultado quanto ao modo de ruptura da laje, no nível II de aproximação os resultados não são tão satisfatório devido ao um grande erro de 33% quanto ao modo como acontece a ruptura na superfície da laje com uma média de 1,17 e um coeficiente de variação de 0,12. Para o nível III de aproximação tem um resultado pouco satisfatório quanto ao modo de ruptura na laje, com uma média de 1,15 e com um coeficiente de variação de 0,11.

Se comparando à Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento e o CEB-FIB Model Code, o modo de ruptura pelo método completo da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento foi o método mais eficiente em estimar a carga de ruptura e o modo de ruptura por ter uma média razoável e estar respeitando os resultados frágeis em 5% contra a segurança.

Pode-se verificar no fib Model Code 2010 resultados bem conservadores comparando com os resultados da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento, isso se deve ao fato de o fib Model Code ser uma recomendação de cálculo estrutural que mesmo sem utilizar nos cálculos os coeficientes de segurança deve obter resultados conservadores. Porém, apesar de uma melhor precisão para a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento deve-se tomar cuidado quanto ao seu uso, no seu modelo ao se considerar que o mecanismo de ruptura por punção ocorre apenas com a rotação da laje como corpo rígido do extremo da laje ao cone de punção, o que nem sempre ocorre porque na região de ruptura acontece à rotação da laje, podendo também acontecer o deslizamento do aço, portanto em lajes que contenha armadura de cisalhamento se deve tomar cuidado para não estimar a força de cisalhamento em regiões

mais afastada do pilar. Para uma avaliação mais minuciosa entre os métodos comparados é necessário um banco de dados maior para análise.

Levando-se em conta a utilização dos modelos de cálculos comparados anteriormente torna-se difícil sua aceitabilidade em escritórios de cálculo estrutural, devido a quantidade de variáveis envolvidas no seus cálculos.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FERNÁNDEZ RUIZ M., MUTTONI, A. **Punching shear strength of reinforced concrete slabs with transverse reinforcement**, ACI Structural Journal, Farmington Hills, Mich., submitted for publication, 2007.

FERNÁNDEZ RUIZ M., MUTTONI A., **Applications of the critical shear crack theory to punching of R/C slabs with transverse reinforcement**, ACI Structural Journal, Vol. 106 N° 4, pp. 485-494, USA, 2009.

FERREIRA, M. P. (2010). **Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados**. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 007 A/10 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 275p.

GASPARINNI D. A., **Contributions of C. A. P. Turner to development of reinforced concrete flat slabs 1905–1999**. Journal of Structural Engineering, 2002, 128, No. 10, 1243–1252.

GUANDALINI S. **Symmetric Punching in R/C slabs (in French: “Poinçonnement symétrique des dalles en béton armé”)**, Doctoral thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, No. 3380, Lausanne, Switzerland, 2005. 289p.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (FIB). **Model Code 2010: Final draft**, International Federation for Structural Concrete, Lausanne, Switzerland, 2011.

MELO, G. S. S. A., **Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs after Local Failure**. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, London, England, 1990, 214p.

MORAES NETO, B.N. (2013). **Comportamento à Punção de Lajes Lisas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço sob Carregamento Simétrico**. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-001A/13 Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 343 p.

MUTTONI, A., FERNÁNDEZ RUIZ M. **Shear strength of members without transverse reinforcement as a function of the critical shear crack width**, ACI Structural Journal, Farmington Hills, Mich., accepted for publication, 2007.

MUTTONI, A. 2003b. **Members without shear reinforcement, (in French, “Elements sans armature d’effort tranchant”)**, Introduction to the Swiss code SIA 262, Documentation D 0182, Swiss Society of Engineers and Architects, Zürich, pp. 47–55.

MUTTONI, A., **“Shear and Punching Strength of Slabs without Shear Reinforcement,”** *Beton-und Stahlbetonbau*, V. 98, No. 2, Berlin, Germany, 2003, pp. 74-84. (in German)

MUTTONI, A. **Punching Shear, Draft Code Proposal**, SIA Draft, SIA 162 / AG 5, Swiss Federal Institute of Technology - Zurich 1985, rév. 1988, Zürich, Switzerland, 1988, 14 p.

MUTTONI, A. **Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement**, ACI Structural Journal, Farmington Hills, Mich., accepted for publication, 2008.

MUTTONI A., SCHWARTZ J. **Behaviour of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement**, IABSEV Colloquium Stuttgart, Vol. 62, IABSE, Zurich, Switzerland, 1991. 703–708p.

OLIVEIRA, M. H. (2013). **Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento Submetidas a Carregamento Excêntrico e Apoiadas sobre Pilares Retangulares**. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 01A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 222 p.

MUTTONI A., FERNÁNDEZ RUIZ. M, LIPS S., **Punching of Flat Slabs: Design Example**, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2011. 13p.