



**Universidade de Brasília  
Departamento de Estatística**

**Comparação entre os testes CUSUM e MOSUM para detecção de quebras  
estruturais em séries temporais**

**Gutemberg Fernandes Schiessl**

Projeto para trabalho de conclusão de curso  
de Bacharel em Estatística.

**Brasília  
2016**



Gutemberg Fernandes Schiessl

**Comparação entre os testes CUSUM e MOSUM para detecção de quebras estruturais em séries temporais**

Orientador:

Prof. Dr. **RAUL YUKIHIRO MATSUSHITA**

Projeto para trabalho de conclusão de curso de Bacharel em Estatística.

**Brasília  
2016**

## SUMÁRIO

|  |    |
|--|----|
| 1 INTRODUÇÃO . . . . .                             | 5  |
| 1.1 Objetivo . . . . .                             | 6  |
| 1.2 Forex . . . . .                                | 6  |
| 1.3 Estrutura . . . . .                            | 7  |
| 2 METODOLOGIA . . . . .                            | 9  |
| 2.1 Revisão teórica . . . . .                      | 9  |
| 2.1.1 Séries estacionárias . . . . .               | 9  |
| 2.1.2 Modelo . . . . .                             | 10 |
| 2.1.2.1 ARIMA . . . . .                            | 10 |
| 2.1.3 Quebras estruturais . . . . .                | 11 |
| 2.1.4 Testes . . . . .                             | 11 |
| 2.1.4.1 Testes de flutuação generalizada . . . . . | 12 |
| 2.1.4.1.1 Processo CUSUM . . . . .                 | 13 |
| 2.1.4.1.2 Processo MOSUM . . . . .                 | 13 |
| 2.1.4.1.3 Limites das fronteiras . . . . .         | 14 |
| 2.2 Simulação . . . . .                            | 15 |
| 3 APLICAÇÃO . . . . .                              | 18 |
| 3.1 Média . . . . .                                | 18 |
| 3.2 Assimetria . . . . .                           | 23 |
| 3.3 Curtose . . . . .                              | 25 |
| 3.4 Desvio Padrão . . . . .                        | 27 |
| 4 CONCLUSÃO . . . . .                              | 32 |
| 5 BIBLIOGRAFIA . . . . .                           | 35 |



## 1 INTRODUÇÃO

A modelagem do comportamento de taxas de câmbio é de grande interesse para os diferentes agentes do mercado. Esses agentes, tais como, os especuladores, os hedges e os formuladores e executores de políticas/atividades econômica e cambial, podem se beneficiar dessas modelagens. Para estes agentes das finanças empírica e econométrica, modelos de correlação têm sido de grande importância, pois tais modelos provêm informações úteis sobre as tendências do mercado. Entretanto, muitos modelos deparam-se com dificuldades de descrever o retorno diário de ativos financeiros de forma confiável, já que por diversas vezes, estes modelos encontram-se viesados.

Neste contexto, encontra-se o mercado de câmbio internacional FOREX (*foreign exchange market*), que é um dos principais mercados da atualidade, considerando-se sua quantidade massiva de operações. Uma das características desse mercado é seu grau de regulação baixo, juntamente com a alta alavancagem, além de oferecer uma liquidez 24 horas por dia. Essas características dão a este mercado uma alta sensibilidade à ocorrência de quebras estruturais.

Quando se procura descrever o mercado, um dos problemas encontrados é comumente uma intervenção econômica, política, tecnologia ou guerras, choque nos preços do petróleo, epidemias, bolhas especulativas, crash, isto é, após um período em que as ações estejam com cotações bastante valorizadas ocorre uma abrupta desvalorização ou outras coisas que podem fazer com que o sistema tenha grandes oscilações. Essas intervenções momentâneas, quando duradouras, são chamadas de quebras estruturais, e têm sido de grande importância com relação à regressão de modelos econométricos e temporais. Ultimamente, profissionais da área têm demonstrado mais atenção ao monitoramento de quebras estruturais e como detectá-las o mais rápido possível.

Em particular, tem-se observado a persistência de erros na previsão do retorno da taxa de câmbio, tornando-os viesados devido à presença de mudanças estruturais constantes ou eventuais e que estas taxas estão muito associadas a sua assimetria, curtose e desvio padrão.

A estimação através de modelos com quebras estruturais permitem avaliar a eficiência do mercado financeiro e a identificação da reação à eventos que podem afetar o

mecanismo do processo gerador de preços. Além disso, permite a melhoria na avaliação do risco associado à taxa de câmbio, pois os erros incubidos às mudanças do regime representam uma medida importante de risco.

Dentre as classes mais importantes de testes para quebras estruturais, serão usadas as de estrutura de teste de flutuação generalizada (Kuan e Hornik, 1995) que incluem o CUSUM, MOSUM e o teste baseado em estimativas, os quais serão o foco desta monografia. Outros testes seriam os baseados na estatística F (Hansen, 1992a; Andrews, 1993 e Andrews e Ploberger, 1994), os quais não serão abordados.

## 1.1 Objetivo

O trabalho consiste no estudo de modelos de séries temporais da taxa de câmbio entre o Dólar e o Real com foco em quebra estruturais. A identificação de quebras estruturais, será feita através de 2 modelos (CUSUM e MOSUM). E por meio de suas respectivas previsões para o mesmo banco de dados, será obtida uma comparação dos modelos por meio de seus erros, para uma identificação do melhor método a ser empregado em dados econômicos.

Através da comparação entre esses modelos, será observada a sensibilidade de cada um para previsão de quebras e em qual tempo seria mais propício sua utilização. Não só para a média dos valores cambiais diários, mas também para sua assimetria, sua curtose e seu desvio padrão.

Utilizando esses quesitos para obtenção de quebras estruturais, será avaliado como estas quebras de diferentes momentos se relacionam entre si. Assim, será verificado se tais quebras seriam observadas nos mesmos tempos ou se diferenciariam quanto à sua localização temporal, já que estas diferenças poderiam indicar quebras anteriores ou posteriores às médias diárias.

## 1.2 Forex

Conforme a *Série Alertas* da CVM (*Comissão de Valores Mobiliários*) acessado dia 09/08/2016, Forex, é uma abreviação para *Foreign Exchange Market*, um mercado onde as várias moedas do mundo são negociadas. Esta negociação não ocorre propriamente com a

venda da moeda, mas com a troca de moedas distintas, observando sua taxa de câmbio atual. Assim, o investidor obtém lucro conforme as variações na taxa de câmbio entre estas moedas. Estas operações podem ser realizadas 24 horas por dia, 5 dias por semana.

O Forex, criado em 1971, é um mercado interbancário de quando a negociação internacional transitou de taxas de câmbio fixas para flutuantes. Por ter um alto nível de volume e fluidez, o mercado Forex tornou-se o principal mercado financeiro do mundo. Um mercado com estimativas de movimentação de até 3 trilhões de dólares por dia de acordo com a CVM.

O Forex é um mercado virtual e não há uma instituição que centraliza este mercado, mas sim, uma rede entre bancos e operadoras. Por essa falta de formalidade, o investidor pode colocar-se em riscos maiores.

Apesar de o Forex ser um mercado internacional, as corretoras que atuam nesse segmento são registradas nos países em que operam. Porém, no Brasil, não havia nenhuma corretora registrada na CVM até julho de 2009.

Este mercado é muito utilizado por pessoas e empresas negociando com divisas. Entretanto, seus maiores investidores são pessoas que buscam lucro ou especulam com seus valores. Essas pessoas geralmente buscam moedas com maior liquidez, ou seja, as que têm o maior número de negociações. Suas 2 principais moedas são o Dólar e o Euro.

Os dados utilizados neste estudo serão dados de séries temporais coletados através do site <https://www.tickdata.com/product/historical-forex-data>. O conjunto de dados consiste de 2214 dias úteis regulares, entre 06 de Maio de 2008 a 16 de Junho de 2015, coletados os preços de compra e de venda *intraday* com um intervalo de 15 minutos a cada observação.

### 1.3 Estrutura

No **Capítulo 2** será apresentada a metodologia com uma breve revisão de teorias básicas para o entendimento deste trabalho, como Modelos de Séries Temporais como  $ARIMA(p, d, q)$ . Serão explicados detalhadamente os procedimentos feitos, o porquê de suas aplicações e parâmetros, além de suas possíveis implicações.

No **Capítulo 3** será feita a aplicação das teorias demonstradas nos dados ob-



8

tidos do Forex, e através destes dados será feita uma análise sobre a relação entre as quebras estruturais das variáveis.

O **Capítulo 4** mostrará as conclusões feitas no trabalho e suas implicações no modelo.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Revisão teórica

Uma série temporal é um conjunto de observações de determinadas variáveis ordenadas no tempo. Esta série pode advir de várias áreas, como economia, finanças, meteorologia, engenharia, medicina e outras. E através delas, pode-se obter modelos como o paramétrico *ARIMA* para obter previsões de séries futuras.

Ao obter uma série  $Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n)$  no tempo  $t_1, t_2, \dots, t_n$  em que  $Z(t_1)$  é o valor da série  $Z$  no tempo  $t_1$ , podemos obter sua média, *função de autocovariância* e *função de autocorrelação* expressos respectivamente:  $\mu(t) = E\{Z(t)\}$ ;  $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{Z(t_1), Z(t_2)\}$  e  $\rho = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}$ ,  $\tau \in Z$ , em que  $\tau = |t_1 - t_2|$ .

Podemos investigar diversas características, tais como amplitude da série, valores futuros, onde originou-se e se houve intervenções para mudança de sua tendência. Porém, para obter tais intervenções uma das suposições é que a série seja estacionária.

#### 2.1.1 Séries estacionárias

Segundo Morettin e Toloi no livro *Análise de séries temporais, 2006*, há duas formas de estacionariedade: fraca (ou ampla, ou de segunda ordem) e estrita (ou forte).

**Definição:** uma série temporal  $Z = \{Z(t), t \in T\}$  diz-se *estritamente estacionária* se todas as distribuições finito-dimensionais permanecerem as mesmas sob translações no tempo, ou seja,  $F(z_1, \dots, z_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n)$ .

**Definição:** uma série temporal  $Z = \{Z(t), t \in T\}$  diz-se *fracamente estacionária* se e somente se  $E\{Z(t)\} = \mu(t) = \mu$ , constante para todo  $t \in T$ ;  $E\{Z^2(t)\} < \infty$ , para todo  $t \in T$  e  $\gamma(t_1, t_2) = Cov\{Z(t_1), Z(t_2)\}$ , é uma função de  $|t_1 - t_2|$ .

Porém, usualmente uma série não apresenta-se estacionária. Séries econômicas e financeiras em geral não apresentam um nível muito estável, e por diversas vezes observa-se uma mudança de seu nível. Assim, é necessário usar artifícios para obter uma série estacionária a fim de suprir os requisitos dos modelos. A forma mais comum de obtê-la é fazendo a diferença dos dados sucessivamente até obter uma série estacionária.

Logo, a primeira e sua  $d - \text{ésima}$  diferença são:  $\Delta Z(t) = Z(t) - Z(t - 1)$  e  $\Delta^d Z(t) = \Delta(\Delta^{d-1} Z(t))$ , em que  $\Delta$  é o operador de diferença.

Por meio disso, podemos utilizar modelos para identificar uma mudança de tendência, sua intensificação ou mesmo um deslocamento. Para isso, modelos com quebras estruturais são uma ótima escolha.

## 2.1.2 Modelo

Neste trabalho só será utilizada a classe *paramétrica*. Dentro desta classe, há vários modelos, como o ARIMA e modelos estruturais.

### 2.1.2.1 ARIMA

Para descrever o comportamento de séries econômicas e sociais, em que os erros observados são auto-correlacionados e influenciam a evolução do processo, o modelo *ARIMA* é muito útil. Conhecido como abordagem de Box e Jenkins (1970), o modelo *ARIMA* tem sua forma como:

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)a_t,$$

em que  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  e  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  e  $B$  é o operador translação para o passado ( $BZ_t = Z_{t-1}$ ),  $\phi_i$  e  $\theta_j$  para  $0 \leq i \leq p$  e  $0 \leq j \leq q$  são parâmetros da regressão de ordem  $p, q$  respectivamente. Escrevemos *ARIMA*( $p, d, q$ ) e  $a_t$  é um ruído branco não correlacionado. Ou seja:  $E(a_t) = 0, \forall t$ ;  $Var(a_t) = \sigma^2, \forall t$  e  $E(a_t, a_s) = 0, s \neq t$ .

O método para identificação do *ARIMA*( $p, d, q$ ) foi feito através das seguintes medidas:

Diferenças consecutivas ( $\Delta^d Z_t$ ) da série até obter uma série estacionária em que possa ser feito um modelo *ARMA*( $p, q$ ). Essa estacionariedade pode ser obtida quando a *função de autocorrelação* decresce para zero rapidamente.

Obtendo a série estacionária, pode-se identificar o modelo *ARMA*( $p, q$ ) por meio da análise de autocorrelação e através do critério de penalização BIC (*critério de informação bayesiano*) que foi escolhido para ser implementado neste trabalho.

Após a identificação do melhor modelo *ARIMA*( $p, d, q$ ), é obtido o resíduo deste modelo para a implementação dos testes de quebras estruturais.

### 2.1.3 Quebras estruturais

Os modelos de séries temporais são muito influenciados por quebras estruturais ou intervenções, sejam elas políticas, econômicas ou sociais.

Essas intervenções, introduzidas por Glass (1972), podem ser identificadas utilizando-se séries indicadoras de intervenções, que podem ter seus efeitos de dois tipos:

$$\bullet X_{j,t} = S_t^T = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases}$$

$$\bullet X_{j,t} = I_t^T = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases}$$

em que,  $S_t^T$  é a função degrau cujo efeito é permanente e  $I_t^T$  é a função impulso cujo efeito é temporário. Mas ambos efeitos podem ser abruptos ou residuais. Assim, a fórmula geral do modelo com intervenções é:

$$Z_t = \sum_{j=1}^k v_j(B) X_{j,t} + N_t,$$

em que  $v_j(B) = \frac{(\omega_{j,0} - \omega_{j,1}B - \dots - \omega_{j,s}B^s)B^{b_j}}{1 - \sigma_{j,1}B - \dots - \sigma_{j,r}B^r}$ , na qual  $b_j$  é a defasagem no tempo para o início do efeito da  $j$ -ésima intervenção, e  $N_t$  é a série livre do efeito das intervenções que pode ser um *ARIMA*. Assim, um dos objetivos do trabalho seria obter o tempo de defasagem (quebras estruturais) da série, ou seja, identificar  $b_j$ .

### 2.1.4 Testes

Para a identificação do modelo *ARIMA*( $p, d, q$ ) é utilizado o teste BIC (*critério de informação bayesiana*), feito primeiramente por Schwarz (1978), e posteriormente para a identificação das quebras com as formas:

$$BIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + (p + q) \frac{\ln N}{N},$$

$$BIC(k) = \sum_{j=1}^{k+1} \left( \ln \hat{\sigma}_{j,j-1}^2 + j \frac{\ln N_{j,j-1}}{N_{j,j-1}} \right),$$

em que  $N$  é o número de observações,  $N_{j,j-1}$  é o número de observações entre a quebra  $j$  e  $j-1$ ,  $k$  é o número de quebras estruturais,  $\hat{\sigma}_{p,q}^2$  é a estimativa de máxima verossimilhança da variância do resíduo do  $ARIMA(p, d, q)$ .

Para a identificação das quebras estruturais, é necessária a aplicação de testes. Estes testes consistem em algoritmos para reconhecer os pontos específicos  $t_0$  das quebras. Os mais conhecidos são CUSUM e MOSUM, que serão abordados.

Outro quesito para ajudar na identificação da quantidade de quebras estruturais seria o  $rss$  (*residual sum of squares*) dado por:

$$rss = \sum_{t=1}^n (Z_t - \hat{Z}_t)^2,$$

em que  $Z_t$  é o valor da série no tempo  $t$ ,  $\hat{Z}_t$  é o valor do modelo  $ARIMA(p, d, q)$  no tempo  $t$  e  $n$  é o número de observações.

Assim, é possível achar um modelo com quebras estruturais que minimize  $RSS$  para os dados como a formula:

$$RSS(i_1, \dots, i_m) = \sum_{j=1}^{m+1} rss(i_{j-1} + 1, i_j),$$

em que  $i_1, \dots, i_m$  é a  $m$ -ésima quebra estrutural e  $rss$  é o (*residual sum of squares*) no seguimento  $(i_{j-1} + 1, i_j)$ .

#### 2.1.4.1 Testes de flutuação generalizada

O teste de flutuação generalizada ajusta o modelo de acordo com os dados observados e diferencia-os por meio de um processo empírico, que através desta diferença observa a flutuação por meio dos resíduos. Para que esse processo tenha efeito, o limite do processo é conhecido para que os limites possam ser computados. Assim, quando as flutuações do processo ultrapassarem os limites da hipótese nula, então, esta flutuação é uma indicação de que houve algum tipo de intervenção nos dados e que a hipótese nula deveria ser rejeitada ao nível de significância de  $\alpha$ . Entre esses processos, serão trabalhados o CUSUM e o MOSUM.

Como o intuito do trabalho é a comparação entre os teste de quebras, foi fixado  $\alpha$  a 5% em ambos os métodos (CUSUM e MOSUM).

### 2.1.4.1.1 Processo CUSUM

O primeiro teste foi feito por meio do processo CUSUM (*cumulative sums of standardized residuals*), que significa soma acumulada de resíduos padronizados. Este processo originalmente introduzido por Brown, Durbin, e Evans (1975) sugeria utilizar a soma acumulada de resíduos recursivos. Posteriormente, Ploberger and Kramer (1992) sugeriram que o teste fosse feito por *ordinary least squares residuals (OLS)* ou mínimos quadrados ordinário dos resíduos:

$$W_n^0(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor tn \rfloor} v_i.$$

em que  $(0 \leq t \leq 1)$ ,  $n$  é o número de observações e  $\lfloor tn \rfloor$  é a parte inteira de  $tn$ , e  $v_i$  é o resíduo do  $ARIMA(p, d, q)$ .

O uso do teste CUSUM, além de sua eficiência computacional, é muito utilizado pela sua aplicação estatística a modelos lineares. Este processo baseia-se na hipótese nula de que o limite da flutuação empírica do processo  $W_n^0(t)$  é uma Ponte Browniana  $W(t) - tW(1)$ .

Já para a hipótese alternativa, se existe alguma quebra estrutural no ponto  $t_0$ , o resíduo somente irá ter valor de média 0 no ponto  $t_0$ . O processo deve ficar em torno de 0 até  $t_0$  e depois abandonar progressivamente ou abruptamente esta média. Krämer, Ploberger e Alt (1988) mostraram que a principal propriedade do CUSUM permanece a mesma, mesmo sobre uma suposição fraca.

### 2.1.4.1.2 Processo MOSUM

Ao invés de usar a soma acumulada dos resíduos, uma outra maneira de se obter uma quebra estrutural é analisando a soma dos resíduos móveis. Assim, o resultado do processo flutuante empírico contém a soma de um número fixo de resíduos nos dados cujo parâmetro é  $h \in (0, 1)$ , que se move conforme a amostra do banco de dados, contrariamente ao CUSUM, que tem a soma de todos os resíduos até o ponto  $t$ . Logo, o processo está definido por:

$$\begin{aligned} M_n^0(t|h) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=\lfloor N_n t \rfloor + 1}^{\lfloor N_n t \rfloor + \lfloor nh \rfloor} v_i, \quad (0 \leq t \leq 1 - h), \\ &= W_n^0\left(\frac{\lfloor N_n t \rfloor + \lfloor nh \rfloor}{n}\right) - W_n^0\left(\frac{\lfloor N_n t \rfloor}{n}\right), \end{aligned}$$

em que  $N_n = (n - \lfloor nt \rfloor)/(1 - h)$  e  $v_i$  é o resíduo do  $ARIMA(p, d, q)$ . Assim, o limite do processo empírico para o MOSUM é uma Ponte Browniana, mostrado mais detalhadamente no artigo de Chu, Hornik e Kuan (1995a).

### 2.1.4.1.3 Limites das fronteiras

Testes de flutuação generalizada são baseados na ideia de que a hipótese nula (não há mudança na estrutura) deveria ser rejeitada quando a flutuação do processo empírico torna-se maior que os limites do processo. Este limite é definido pela fronteira  $b(t)$  ao nível de significância  $\alpha$ . Assim, se o valor da flutuação ultrapassar  $b(t)$  ou  $-b(t)$  para qualquer  $t$ , então, há informação suficiente para dizer que a flutuação é larga suficiente para que a hipótese nula seja rejeitada.

Os limites para o MOSUM são constantes da forma  $b(t) = \lambda$ , pois os limites do processo são estacionários. Já os limites do processo CUSUM, não. O limite do processo da Ponte Browniana não é estacionário. Tendo isso em mente, usam-se os limites das fronteiras proporcionais ao desvio padrão dos correspondentes processos teóricos.

$$b(t) = \lambda\sqrt{t(1-t)},$$

em que  $\lambda$  é o nível de confiança para o CUSUM.

Apesar de calcular e visualizar graficamente o processo de flutuação empírico com as fronteiras, ainda é necessário fazer algum teste de significância. Para isso, comumente são feitos testes estatísticos e observado o  $p$ -valor. Assim, tomamos  $S_r$  como teste estatístico para o processo baseado em resíduo:

$$S_r = \max_t \frac{pfe}{f(t)},$$

em que  $pfe$  = processo de flutuação empírico que pode ser  $W_n^0(t)$  ou  $M_n^0(t)$ , e  $f(t)$  depende da forma da fronteira,  $b(t) = \lambda f(t)$ , sendo  $f(t) \equiv 1$  para MOSUM, e  $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$  para CUSUM.

## 2.2 Simulação

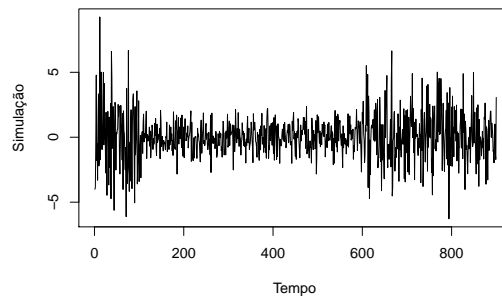


Figura 1 – Série Simulação pelo tempo.

Durante a simulação, foram utilizadas 3 Distribuições Normais com média 0 e Variâncias 2, 1 e 3 plotadas nesta ordem respectivamente. Com essas três distribuições, é possível observar na Figura 1 que há 2 quebras estruturais depois das 100 primeiras observações e depois das 500 consecutivas, onde começam as próximas distribuições.

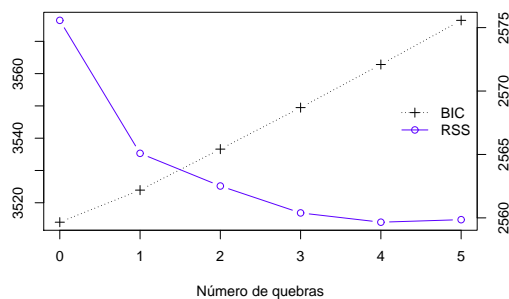


Figura 2 – BIC e RSS do CUSUM pelo número de quebras.

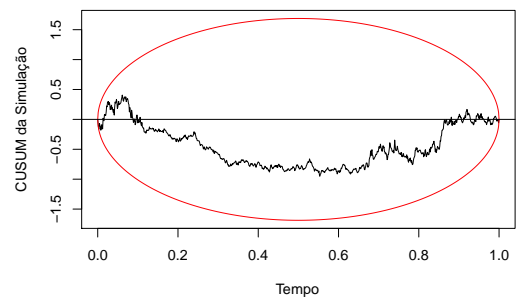


Figura 3 – Teste CUSUM pelo tempo.

Pelos quesitos de BIC e RSS, por meio do teste CUSUM, é possível notar que o melhor modelo que explica a simulação feita seria aquele com duas quebras estruturais. Entretanto, foi necessário um nível de significância de 30%, o que não torna o teste muito forte. O teste apontou para uma quebra na observação 230, o que difere significativamente da simulação, mas a segunda quebra foi apontada em 610, próxima o suficiente da simulação.



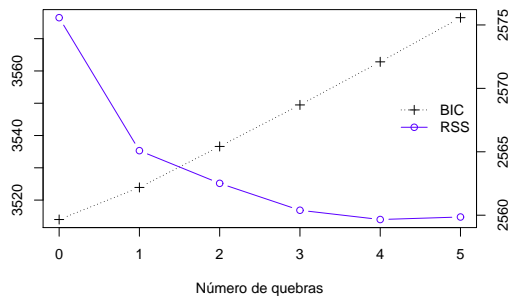


Figura 4 – BIC e RSS do MOSUM pelo número de quebras.

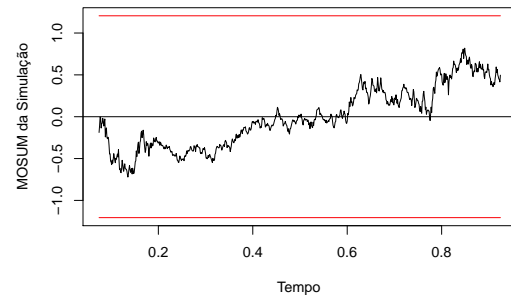


Figura 5 – Teste MOSUM pelo tempo.

Já pelos quesitos de BIC e RSS, por meio do MOSUM, ao mesmo nível de significância de 30%, o modelo com duas quebras foi identificado como o melhor. Porém, o MOSUM também conseguiu identificá-las ao nível de 5%, tornando-o mais eficiente em detectar quebras com diferença de variâncias pequenas.

O MOSUM teve maior êxito ao identificar a primeira quebra, quando apontou para a observação 135, mostrando-se muito mais eficiente que o CUSUM. Porém, para a segunda quebra, o MOSUM apontou a observação 734, o que foi menos eficiente que o CUSUM.

Logo, para quebras iniciais, o modelo MOSUM seria um correspondente melhor, entretanto, para mudanças com grande carga de dados anteriores, o CUSUM seria a melhor opção.



### 3 APLICAÇÃO

Na análise de dados como Forex, é muito comum para os analistas da bolsa de valores, que ao manipularem os dados, obtenham o log dos valores e/ou a diferença dos valores para obter uma função estacionária que torna o desenvolvimento da análise mais fácil.

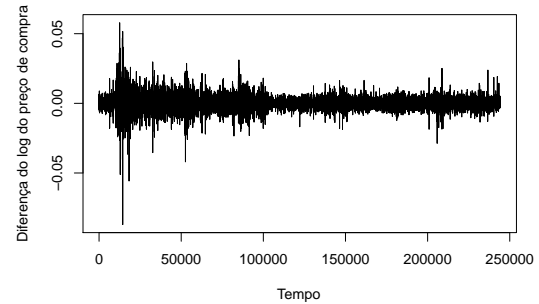
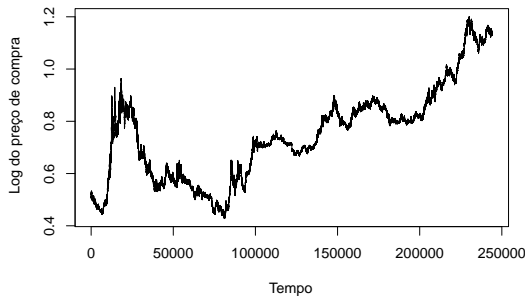


Figura 6 – Preço de compra do Dólar/Real pelo tempo.

Figura 7 – Primeira diferença do log da Cotação Dólar/Real.

Como mostrado na Figura 6, o formato do gráfico do log dos valores não difere muito do original, entretanto, na diferença desses, o gráfico obtém uma aparência maior de estacionariedade indicando que uma diferença é suficiente para o modelo.

Porém, os dados foram obtidos *intraday*, e para a identificação de quebras estruturais não há necessidade desses dados. Por isso, foram feitos a média, assimetria, curtose e desvio padrão diários dos dados para obtenção das medidas que serão utilizadas nas detecções de quebras estruturais.

#### 3.1 Média

Primeiramente, foi feita a média dos dados por dia operado, reduzindo assim 244302 operações em apenas 2214 valores de médias correspondentes aos dias operados. As médias  $\mu_t$  são obtidas através da fórmula:

$$\mu_t = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} X_{t,i}.$$

em que  $n_t$  é a quantidade de operações feitas no dia  $t$  e  $X_{t,i}$  valor da operação  $i$  no dia  $t$ .

Posteriormente, foram testados vários modelos  $ARIMA(p, d, q)$  por meio da autocorrelação e do critério BIC para identificar aquele que melhor se adequa aos dados.

Assim, o melhor modelo obtido, com  $BIC = -12173.25$  ao nível de significância de 5%, foi o  $ARIMA(2, 1, 1)$  com os valores de:

$$(1 - 0.0273B + 0.0643B^2)\Delta\mu_t = (1 - 0.3493B)a_t$$

em que  $\mu_t$  é a média dos valores diários da série no dia  $t$ ,  $\Delta$  é o operador de diferença e  $a_t$  é o ruído branco.

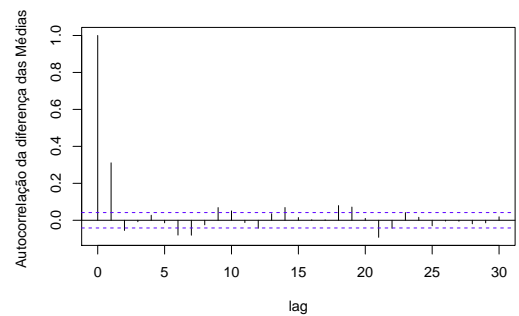
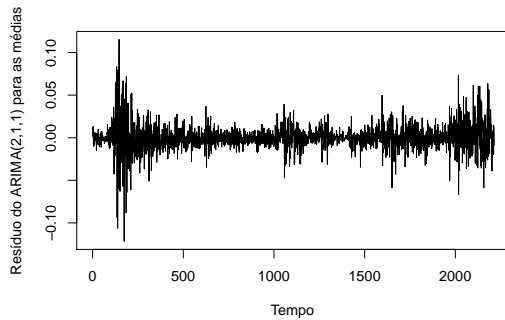


Figura 8 – Resíduo do modelo  $ARIMA(2,1,1)$  para as médias diárias pelo Tempo.

Figura 9 – Autocorrelação da diferença das médias diárias pelo Tempo.

Como mostra a Figura 8, os resíduos aparentam ter uma forma estacionária com locais de maior variação. Essas variações podem ocorrer por meio de quebras estruturais ainda não identificadas. E por meio da Figura 9, nota-se um decréscimo rápido na autocorrelação da série de médias.

Aplicando os testes CUSUM e MOSUM chegou-se à conclusão, por meio do CUSUM, de que 5 quebras seriam suficientes para explicar as mudanças na variação das médias, ao nível de significância de 5%. Quanto ao processo MOSUM, também foram achadas 5 quebras que explicavam o modelo. Porém, foi notada uma maior sensibilidade para observações iniciais no MOSUM, como mostram os gráficos nas Figuras 10 e 11 de processos de flutuação empírica.

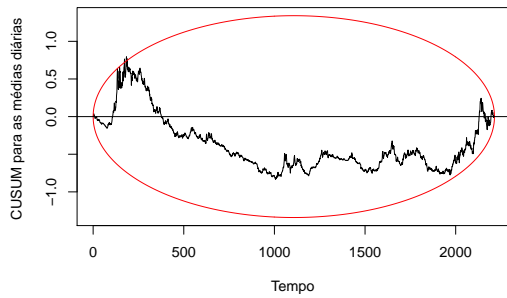


Figura 10 – Teste CUSUM das médias diárias pelo tempo

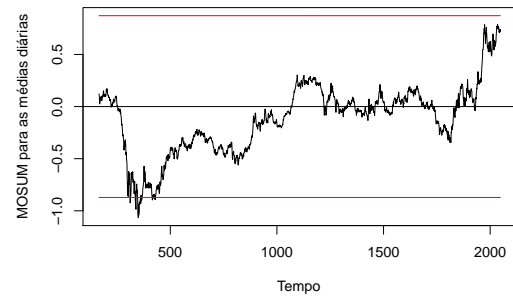


Figura 11 – Teste MOSUM das médias diárias pelo tempo

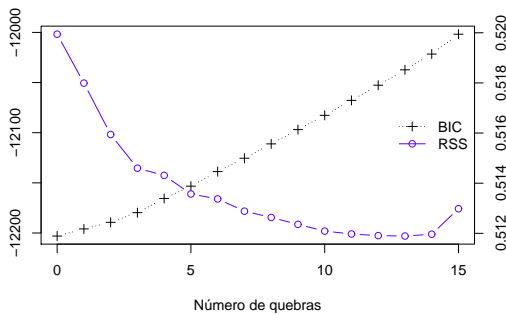


Figura 12 – BIC e RSS do CUSUM das médias diárias pelo tempo

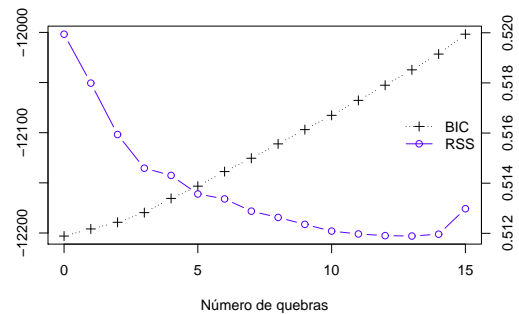


Figura 13 – BIC e RSS do MOSUM das médias diárias pelo tempo

O MOSUM foi mais sensível inicialmente na detecção da quebra estrutural, mas ambos os modelos apresentaram a mesma observação como ponto de quebra.

O período de 05/12/2008 a 29/08/2009<sup>1</sup>, quando foram encontradas as duas primeiras quebras, também foi marcado por uma alta volatilização de ações e FOREX no mercado devido à crise financeira nos Estados Unidos da América.

Essa crise deveu-se inicialmente ao desequilíbrio da balança comercial dos EUA<sup>2</sup>, pois suas importações estavam maiores que as exportações. Para solucionar esse problema, houve uma diminuição nas taxas de juros e ajuda financeira de países como China e Inglaterra. Com esse excesso de dinheiro, os bancos americanos liberaram uma quantidade maior de créditos para empréstimos para seus clientes comprarem suas casas. Com essa quan-

<sup>1</sup><http://www.forbes.com/sites/stevedenning/2011/11/22/5086/#70307a3e5b56>

<sup>2</sup><https://www.theguardian.com/business/2008/dec/28/markets-credit-crunch-banking-2008>

tidade de créditos saturada, houve uma valorização excessiva dos imóveis cujos empréstimos tornaram-se maiores que o usuários poderiam pagar. Mesmo assim, as linhas de créditos continuaram a fluir tanto para clientes que pagavam em dia, quanto para usuários com históricos de dívidas altas. Essa linha de crédito para clientes com pagamentos duvidosos é chamada de *subprime*<sup>3</sup>, um investimento de alto risco de inadimplência.

Em seguida, o mercado de imóveis começou a se desvalorizar rapidamente, devido ao aumento das taxas de juros e à queda na demanda, entrando em crise, e com isso reduzindo as garantias dos empréstimos. Posteriormente, os bancos começaram a indeferir mais empréstimos para compra de casas, o que agravou a crise, diminuindo ainda mais sua demanda. A partir disso, a inadimplência generalizada começou, pois havia incoerência em pagar hipotecas exorbitantes enquanto as propriedades estavam cada vez mais baratas.

Com essa crise, a circulação de dinheiro nos EUA diminuiu e houve uma recessão acentuada no período das quebras, quando a maioria das bolsas mundiais tiveram drásticas reduções e o desemprego aumentou, fazendo com que a moeda americana perdesse seu poder de compra em quase 30% com relação à moeda brasileira neste período. Isso acarretou na falência de vários bancos americanos, como o **Lehman Brother**, e na venda de outros, como o **Merrill Lynch** e o **Bear Stearns**<sup>4</sup>.

O Brasil não foi afetado fortemente como outros países, pois o presidente da época, com uma equipe de economistas, foi capaz de reduzir os efeitos da crise por meio da diminuição das taxas de juros e impostos e da elevação do crédito para pequenos empresários.

Porém, países como Grécia<sup>5</sup>, Portugal, Espanha e Itália não conseguiram se recuperar apropriadamente, levando a Europa à uma crise em 2012, quando houve outras duas quebras estruturais mostradas nas Figuras 14 e 15.

---

<sup>3</sup><http://economia.uol.com.br/ultnot/2008/03/31/ult4294u1176.jhtm>

<sup>4</sup><http://www.forbes.com/sites/robertlenzner/2012/06/02/the-2008-meltdown-and-where-the-blame-falls/#491079cf6fd0>

<sup>5</sup>[http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2010/04/100428\\_entendagrecia\\_ba.shtml](http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2010/04/100428_entendagrecia_ba.shtml)

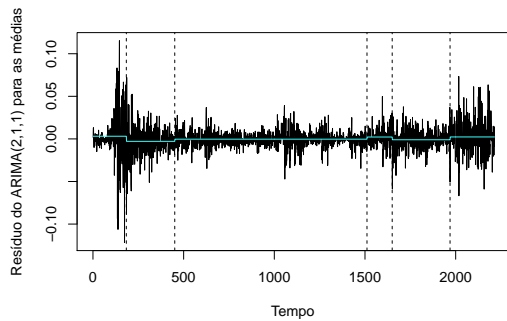


Figura 14 – Quebras estruturais nos resíduos do modelo  $ARIMA(2,1,1)$  da média dos preços Dólar/Real pelo Tempo.

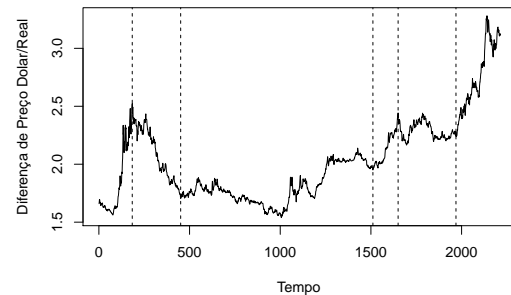


Figura 15 – Quebras estruturais nas médias diárias do Preço Dólar/Real pelo Tempo.

O período de 24/07/2012<sup>6</sup> a 10/12/2012, indicado pelas quebras, mostra uma parte da crise de 2012, mais conhecida como crise europeia.

A crise na Europa começou com a crise de 2008, porém tornou-se mais evidente em 2012 para o Brasil, quando países da Europa reduziram o consumo de commodities (principal produto de exportação brasileira). Aliada a isso, veio também a crise energética brasileira, uma vez que a capacidade dos reservatórios de água chegaram a níveis alarmantes. Assim, os custos de produção aumentaram e a demanda diminuiu.

Devido a esses fatores, o Brasil viu sua moeda ter uma desvalorização acentuada em relação ao Dólar. Entretanto, por um breve período de tempo, entre 10/12/2012 e 27/10/2013, houve um momento de estabilização na taxa de câmbio por causa de medidas tomadas para a contenção da crise. Após esse período, a desvalorização do Real se intensificou ainda mais depois da quebra do dia 27/10/2013, caracterizada pela crise dos países emergentes BRICS (Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul), influenciada pela forte recuperação dos Estados Unidos<sup>7</sup>.

<sup>6</sup><https://economia.terra.com.br/mantega-diz-que-2012-e-pior-ano-da-crise-economica-internacional,20184ab305c31410VgnCLD200000bbccceb0aRCRD.html>

<sup>7</sup><http://www.economist.com/news/schoolsbrief/21584534-effects-financial-crisis-are-still-being-felt-five-years-article>

### 3.2 Assimetria

O coeficiente de assimetria (*skewness*) é uma medida que indica como uma determinada distribuição de frequência está distribuída em torno da média, e é definido como:

$$A_t(X_t) = E \left( \frac{(X_t - \mu_t)^3}{\sigma_t^3} \right),$$

em que  $\mu_t$  é a média do dia  $t$  e  $\sigma_t^3 = E(X_t^3)$  é o 3º momento do dia  $t$ .

Com o  $BIC = 7572.12$  e uma autocorrelação que decresce para zero rapidamente como mostra a Figura 14, o modelo obtido para a assimetria foi o  $ARIMA(1, 0, 0)$ , ou seja, um modelo  $AR(1)$ :

$$(1 - 0.0120B)A_t = a_t,$$

em que  $A_t$  é o valor diário da assimetria da série e  $a_t$  é o ruído branco.

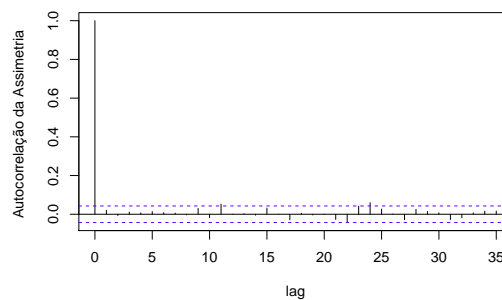


Figura 16 – Autocorrelação do coeficiente de assimetria dos preços pelo lag.

Nesse sentido, como mostra o gráfico de autocorrelação da assimetria na Figura 16, nota-se um decréscimo rápido. Logo, pode-se utilizar os resíduos para detecção de quebras estruturais.



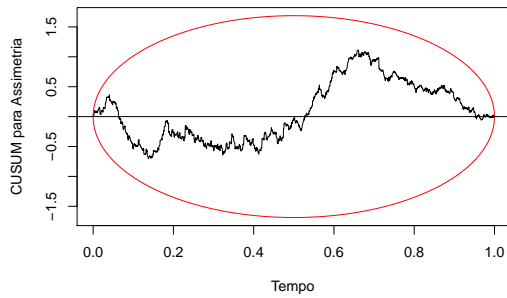


Figura 17 – Teste CUSUM para assimetria pelo tempo.

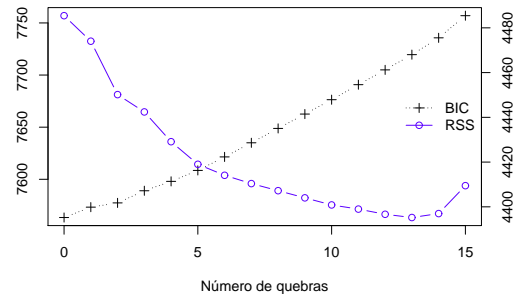


Figura 18 – BIC e RSS do CUSUM da assimetria pelo número de quebras.

Como mostram os gráficos nas Figuras 17 e 18, ao nível de 5% de significância, também foram indicadas 5 quebras estruturais para a medida de assimetria. Entretanto, os valores temporais das quebras não coincidem com os valores das médias diárias obtidos. Já que estas medidas são usadas para quantificar coisas diferentes, é plausível que os valores das quebras tenham diferenças também.

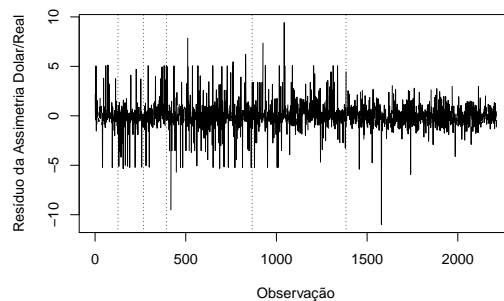


Figura 19 – Quebras estruturais do CUSUM para a assimetria do preço Dólar/Real pela observação.

Como o teste CUSUM perde força com o tempo, e tem uma maior sensibilidade no início, como mostra o gráfico, é possível que o teste seja fraco para detectar valores no centro da série, pois ambas as caudas obtêm uma sensibilidade maior por causa dos limites implementados. Além disso, como a assimetria mede se há maior aglomeração de dados de um lado da média, isso a tornaria mais influenciável por mudanças de tendências, pois isso alteraria seu valor.

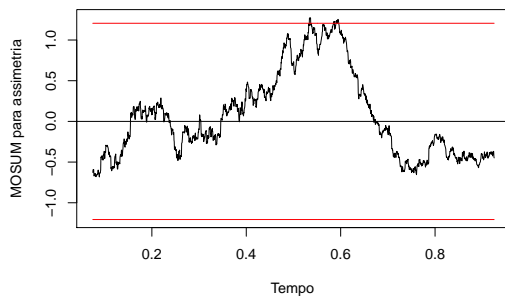


Figura 20 – Teste MOSUM para assimetria pelo tempo.

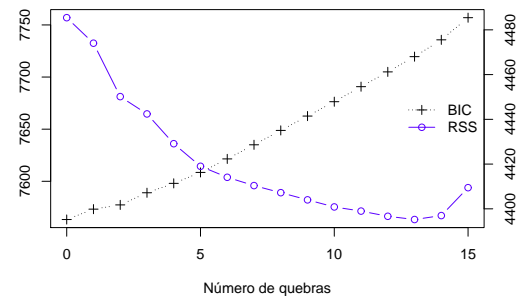


Figura 21 – BIC e RSS do MOSUM da assimetria pelo número de quebras.

Já para o processo MOSUM, como este trabalha com médias móveis, então valores antigos não possuem influência no seu cômputo, logo, ele se torna mais suscetível a identificar quebras posteriores ao CUSUM quando considerada a assimetria. Esta sensibilidade mais apurada posteriormente do MOSUM se dá devido à variação dos dados aumentarem quando há uma tendência ou sua mudança.

Entretanto, apesar de os valores da assimetria serem mais intensificados no MOSUM posteriormente, as quebras detectadas foram as mesmas do processo CUSUM.

### 3.3 Curtose

Na Estatística, o coeficiente de curtose é feito para medir a dispersão dos dados que caracteriza o pico ou achatamento de uma curva da função de distribuição de probabilidade, e é definido como :

$$C_t(X_t) = E\left(\frac{(X_t - \mu_t)^4}{\sigma_t^4}\right)$$

em que  $\sigma_t^4 = E(X_t^4)$  é o 4º momento,  $\mu_t$  é a média do dia  $t$  e  $X_t$  é o valor da operação.

Assim, pode-se obter os valores diários para a curtose. Posteriormente, foram testados vários modelos  $ARIMA(p, d, q)$  por meio da autocorrelação e do critério BIC para identificar aquele que melhor se adequa aos dados. Por meio deste processo, o melhor modelo obtido, com  $BIC = 14267.37$  ao nível de significância de 5%, foi o modelo  $ARIMA(5, 1, 0)$  com os valores de:

$$(1 + 0.8847B + 0.7438B^2 + 0.6111B^3 + 0.5002B^4 + 0.3609B^5)\Delta C_t = a_t$$

em que  $Z_t$  é o valor diário da curtose na série.

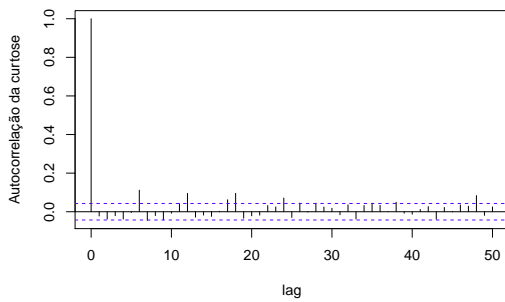


Figura 22 – Autocorrelação da curtose pelo lag até 50.

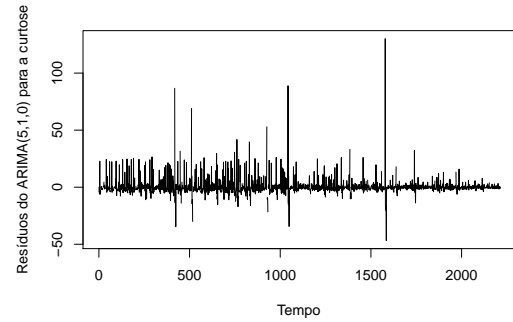


Figura 23 – Resíduo do modelo  $ARIMA(5,1,0)$  pela observação.

Como demonstra o gráfico de autocorrelação da curtose na Figura 22, é perceptível uma sazonalidade nos dados a cada 6 dias em que ocorre um valor mais elevado em relação aos demais, seguido de uma correlação negativa, que tende a se tornar positiva gradualmente até que o ciclo se complete. Porém, a partir do lag 25, este ciclo tende a se tornar mais irregular em seu meio, mas mantém os valores positivos a cada 6 dias.

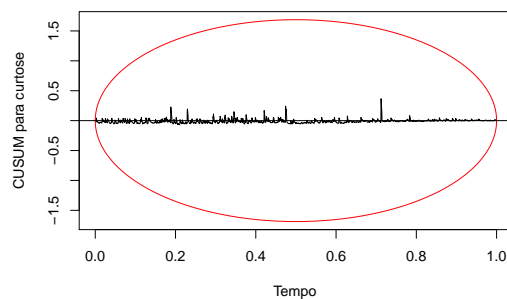


Figura 24 – Teste CUSUM para a curtose pelo tempo.

Quando considerado o teste CUSUM para a curtose, não houve nenhuma quebra aparente. Pois os valores do processo têm uma variação pequena com alguns pontos de amplitude mais alta.

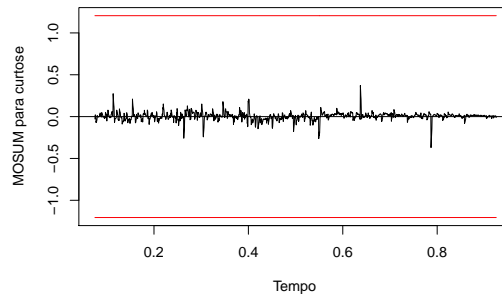


Figura 25 – Teste MOSUM para a curtose pelo tempo.

Já para o teste MOSUM na Figura 25, nota-se uma sensibilidade maior para detecção das quebras estruturais, porém, este processo também não foi suficiente para obter nenhuma quebra. Portanto, neste caso, os processos são similares na detecção de quebras quando a medida estudada é a curtose.

### 3.4 Desvio Padrão

O desvio padrão é uma medida muito importante nos estudos de séries temporais tais como para a economia, e consiste na raiz quadrada do segundo momento da série centrada na média, ou seja, os quadrados dos desvios dos dados pela média:

$$D_t = \sqrt{\frac{1}{n_t - 1} \sum_{i=1}^{n_t} (X_{t,i} - \mu_t)^2}$$

em que  $D_t$  é o desvio padrão no dia  $t$ ,  $n_t$  é a quantidade de operações feitas no dia  $t$  e  $X_{t,i}$  é o valor da operação  $i$  no dia  $t$ .

Assim, esta medida é um forte indicativo se o mercado ou a série possui grandes variações nos seus valores. Essas variações podem ser atribuídas a vários fatores, tais como eventos isolados de grande impacto cujos preços tendem a ter uma variação maior, porém voltam à sua variação normal rapidamente, ou como quebras estruturais cujas tendências mudam ou apenas são deslocadas de níveis entre si.

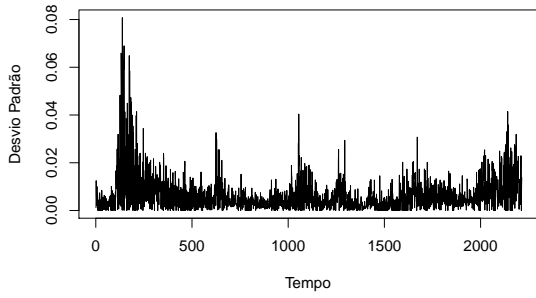


Figura 26 – Desvio padrão da média diária pelo tempo.

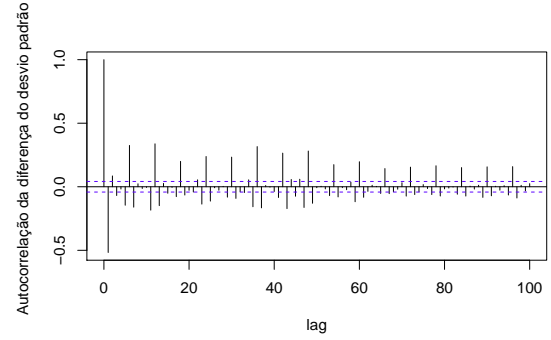


Figura 27 – Autocorrelação da diferença do desvio padrão.

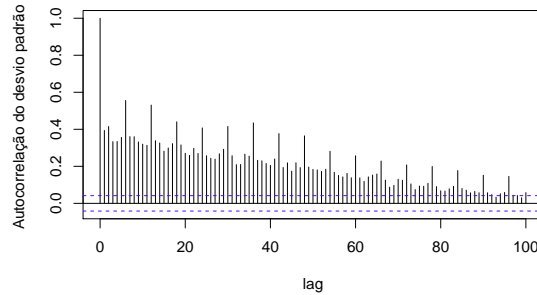


Figura 28 – Autocorrelação do desvio padrão.

Como mostra a Figura 27, a autocorrelação da diferença do desvio padrão demonstra um decréscimo menor que os demais, mas convergindo para zero após o lag 60. Outro fator que vale a pena ressaltar, é que na Figura 28, a autocorrelação do desvio padrão tende a decrescer, mas a cada 6 lags, a autocorrelação tem uma alta significativa que tende a decrescer novamente. Essa sazonalidade semanal é devida aos dias de operação com uma maior variação no sábado. A partir disso, foram feitos vários modelos  $ARIMA(p, d, q)$  e  $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$  para os dados. Através do quesito  $BIC = -30038.06$  como também por meio da autocorrelação, obteve-se o modelo  $SARIMA(2, 1, 4)(1, 0, 1)$ :

$$(1 + 0.4565B + 0.7088B^2)(1 - 0.9492B^6)\Delta D_t =$$

$$(1 + 0.4059B - 0.3826B^2 + 0.6926B^3 + 0.0616B^4)(1 + 0.8157B^6)a_t.$$

em que  $D_t$  é o valor diário do desvio padrão da série no dia  $t$ ,  $\Delta$  é o operador de diferença e  $a_t$  é o ruído branco.

Após obter o melhor modelo *SARIMA* que explica os dados, pode-se fazer os testes de quebras estruturais para seus resíduos.

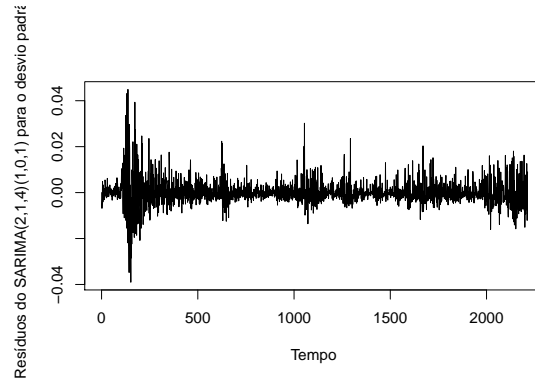


Figura 29 – Resíduos do modelo *SARIMA*(2, 1, 4)(1, 0, 1) para o desvio padrão pelo tempo.

É possível observar vários pontos de elevada variação no gráfico da Figura 26. Esses pontos podem determinar quebras estruturais não vistas anteriormente. Além de mostrar uma variação inicial extremamente grande.

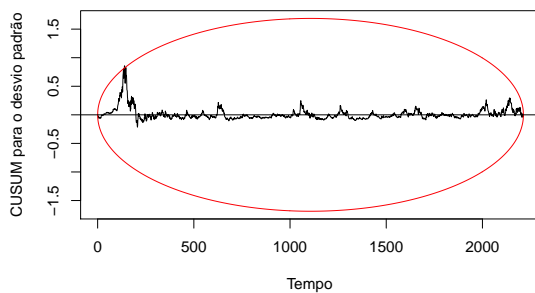


Figura 30 – Teste CUSUM para o desvio padrão pelo tempo.

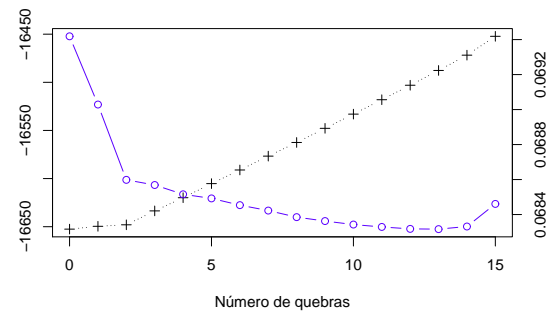


Figura 31 – BIC e RSS do CUSUM para o desvio padrão pelo número de quebras estruturais.

Com o auxílio do gráfico de CUSUM na Figura 31, é fácil notar uma quebra estrutural logo no início. Esta quebra, devida ao valor altíssimo que tem em relação ao resto dos dados, é capaz de influenciar muito o processo CUSUM com seu uso de dados anteriores.

Entretanto, o processo volta para dentro dos limites de CUSUM, e apesar de obter variações pequenas posteriormente, ainda é fácil observar tentativas de elevação da curva indicando outras possíveis quebras.

Como quesito de escolha pelo RSS, a partir de 4 quebras, não há uma diferenciação muito significativa por entrada de novas quebras. E para o quesito BIC, 4 quebras também demonstram uma boa escolha para o número de quebras.

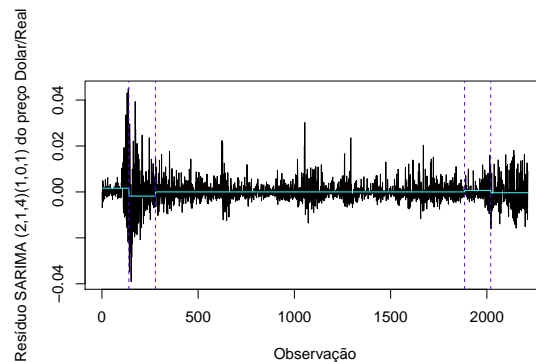


Figura 32 – Quebras estruturais dos resíduos do modelo SARIMA(5,1,1)(1,0,1) para o desvio padrão pelo Tempo.

Como mostrado no gráfico da Figura 32, as 2 primeiras quebras estruturais do desvio padrão não se diferenciam muito das quebras da média, pois seus tempos são próximos. Entretanto, a última quebra marca a data 17/12/2013, próxima da data 21/11/2013, quando eclodiu a crise da Ucrânia envolvendo a União Européia e a Rússia. Neste período, os juros pagos por dívidas são enormes, e houve a necessidade inserir mais dinheiro na economia. Ou seja, mais dívida para governo, aumento da dívida pública. Aliado aos gastos da Copa e da Olimpíada e à crise europeia, o Brasil viu sua moeda desvalorizar continuamente frente ao Dólar.

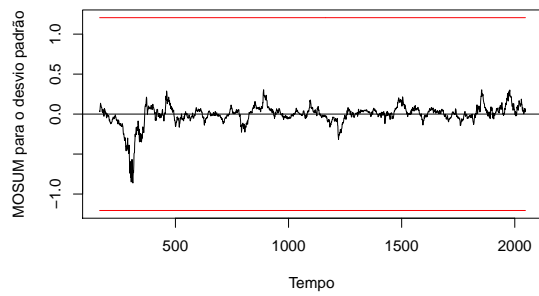


Figura 33 – Processo empírico MOSUM para a variância pelo Tempo.

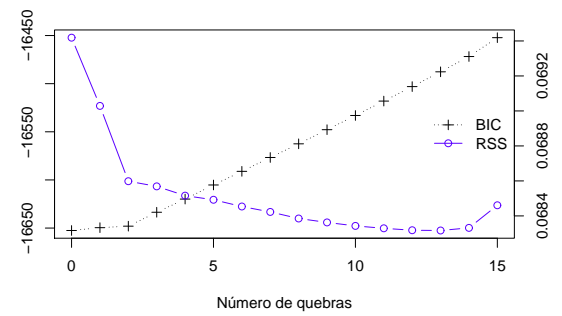


Figura 34 – BIC e RSS do MOSUM para variância pelo número de quebras estruturais.

Aproximando-se ao processo CUSUM, o MOSUM apontou para 4 quebras estruturais no desvio padrão como mostra a Figura 34, mas contrariamente ao CUSUM, o MOSUM não foi influenciado por valores mais antigos, por isso, ele demonstra uma variação maior que o CUSUM. Porém, como o modelo deve permanecer ao nível de 5% de significância, o modelo apresentou apenas as maiores variações dos dados, coincidindo com o CUSUM com 4 quebras.



## 4 CONCLUSÃO

Este trabalho foi uma comparação entre os testes dos processos CUSUM e MOSUM para detecção de quebras estruturais em modelos de séries temporais. Esta comparação foi feita para quatro medidas de posição muito utilizadas e muito influentes na econometria, sendo elas a média, a assimetria, a curtose e o desvio padrão dos dados.

Para as médias diárias, tanto o processo CUSUM quanto o MOSUM chegaram à conclusão de que 5 quebras seriam suficientes para explicar as mudanças na variação, ao nível de significância de 5%. Porém, como esperado, o MOSUM foi mais sensível inicialmente na detecção da quebra estrutural, mas ambos os modelos apresentaram a mesma observação como ponto de quebra. Estes pontos estão relacionados à crise imobiliária dos Estados Unidos, como também às crises europeia e grega.

Para o coeficiente de assimetria, ao nível de 5% de significância, também foram indicadas 5 quebras estruturais. Apesar deste número, os tempos de quebra foram diferentes dos tempos da média. O processo CUSUM perde força no centro dos dados, e tem uma maior sensibilidade no início e no final. Já para o processo MOSUM, valores antigos não possuem influência no seu cômputo, logo, ele se tornou mais suscetível a identificar quebras posteriores ao CUSUM. Esta sensibilidade mais apurada posteriormente do MOSUM se dá devido à variação dos dados aumentarem quando há uma tendência ou sua mudança. Apesar de a sensibilidade do MOSUM ser maior, ambos os processos obtiveram os mesmos tempos de quebras estruturais.

Quanto ao coeficiente de curtose, é perceptível uma sazonalidade nos dados a cada 6 dias em que ocorre um valor mais elevado em relação aos demais. Porém, a partir do lag 25, este ciclo tende a se tornar mais irregular em seu meio, mas mantém os valores positivos a cada 6 dias. Diferente da média e da assimetria, tanto o processo CUSUM quanto o MOSUM para a curtose não mostraram eficiência para detectar quebras estruturais. Porém, notou-se uma sensibilidade maior para detecção das quebras estruturais no processo MOSUM.

Para o desvio padrão, o CUSUM é influenciado fortemente pela quebra inicial devido ao seu uso de dados anteriores, pois a variância teve variações altíssimas no início. Isto é notado pelo pico que o processo tem inicialmente. E apesar desta dificuldade de retorno, ainda são observáveis tentativas de elevação da curva indicando outras quebras. O teste

obteve 4 quebras como ótimo para os dados.

Aproximando-se do processo CUSUM, o MOSUM apontou para 4 quebras estruturais no desvio padrão, mas contrariamente ao CUSUM, o MOSUM não foi influenciado por valores mais antigos, por isso, ele demonstra uma variação maior que o CUSUM. Porém, como o modelo deve permanecer ao nível de 5% de significância, o modelo apresentou apenas as maiores variações dos dados, coincidindo com o CUSUM de 4 quebras.

Finalmente, durante o trabalho, foi obtida uma quantidade total de 14 quebras estruturais distribuídas pelo tempo. Estas quebras situam-se mais onde houve grande volatilidade dos dados devido à intensificação da crise e condizem com vários eventos para a contenção da crise ou seu agravamento.



## 5 BIBLIOGRAFIA

- Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X. e Labys, P. Modeling and Forecasting Realized Volatility. *Econometrica*, v.71, p.529-626, 2003.
- Andrews, D.W.K. Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point. *Econometrica*, v.61, p. 821–856, 1993.
- Andrews, D.W.K. e Ploberger, W. Optimal Tests When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative. *Econometrica*, v.62, p.1383–1414, 1994
- Box, G.E.P. e Jenkins, G.M. Time series analysis forecasting and control. *San Francisco: HoldenDay*, Edição revisada, v.73, p.61-77, 1976.
- Brasil. Ministério da Fazenda. Comissão de Valores Mobiliários (CVM).  *Mercado Forex: Série alertas*. Versão 1. Rio de Janeiro, agosto, 13p 2009.
- Brown, R.L., Durbin, J. e Evans, J.M. Techniques for Testing Constancy of Regression Relationships over Time. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, v.37, 149-163, 1975.
- Bussab, W.O. e Morettin, P.A. *Estatística básica*. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 540p 2011.
- Chu, J., Hornik, K. e Kuan, M. MOSUM tests for parameter constancy. *Biometrika*, v.82 p.603–617, 1995a.
- Glass, G.V. Estimating the effects of intervention into a nonstationary time series. *American research Journal*, v.9, p.463-477, 1972.
- Granger, C.W.J. e Hyung, N. Occasional Structural Breaks and Long Memory with an Application to the S&P 500 Absolute Stock Returns. *Journal of Empirical Finance*, v.11, p.399-421, 2004.
- Hansen, B.E. Testing for Parameter Instability in Linear Models. *Journal of Policy Modeling*, v.14, p.517–533, 1992.
- Holland, M. e Palaia, D. Taxa de Câmbio e Paridade de Poder de compra no Brasil:Análise Econométrica com Quebra Estrutural. *Economia Aplicada*, v.14, pp. 05-24, 2010.
- Krämer, W., Ploberger, W. e Alt, R. Testing for Structural Change in Dynamic Models. *Econometrica*, v.56, p.1355-1369, 1988.
- Kuan, C.M. e Hornik, K. The Generalized Fluctuation Test: A Unifying View. *Econometric Reviews*, v.14, p.135-161, 1995.
- Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. *Análise de séries temporais*, 2.ed. São Paulo: Atual Editora, 538p, 2006.

Ploberger, W. e Krämer, W. The CUSUM Test with OLS Residuals. *Econometrica*, v.60, p.271-285, 1992.

Schwarz, G. Estimating the dimensional of a model. *Annals of Statistics*, Hayward, v.6, n.2, p.461-464, 1978.

Zeileis, A., Leisch, F., Hornik, K. e Kleiber, C. Strucchange: An R package for testing for structural change in linear regression models. *Journal of Statistical Software*, v.7(2), p. 1-38, 2003.