

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

COLAGEM DE ESTRUTURAS METÁLICAS

Por,

Lucas Santana Moura

Brasília, 23 de novembro de 2016

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

COLAGEM DE ESTRUTURAS METÁLICAS

POR,
Lucas Santana Moura

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Eder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM (Orientador) _____

Prof. Flaminio Levy Neto, UnB/ ENM _____

Prof. Dianne Magalhães Viana, UnB/ ENM _____

Brasília, 23 de novembro de 2016

*Aos meus pais,
Ao meu tio Santana,
Aos meus irmãos, Tiago e Robson.*

RESUMO

Quando se objetiva realizar a ligação de mais de um componente, existem diferentes técnicas possíveis. As principais são soldagem, brasagem, rebiteagem, parafusagem e colagem. Com a modernização da indústria e a criação de novos materiais, a colagem estrutural de componentes vem apresentando uma grande evolução e despertando um considerável interesse nos últimos anos. Isso ocorre devido às suas vantagens, tais como: maior absorção de impactos e vibrações, melhor distribuição de tensões, fácil aplicabilidade e melhor resistência à fadiga, quando comparada a métodos mais tradicionais. O objetivo desse projeto é trazer informações sobre o dimensionamento de estruturas coladas sob carregamentos estáticos e cíclicos. Assim como, uma análise numérica de uma junta por sobreposição simples utilizando o Método dos Elementos de Contorno, comparando o resultado obtido com modelos analíticos.

Palavras chave: Colagem; Carregamento estático; Carregamento cíclico; Análise numérica; Método dos Elementos de Contorno.

ABSTRACT

When the objective is to make connections between two or more components, there are different possible techniques used during the process. The main techniques are welding, brazing, riveting, bolting and bonding. As the industry has been modernized and new materials have been developed, the structural bonding has been improving considerably. Structural bonding has earned a significant interest in recent years based on its advantages, such as, greater capacity for shock absorption and vibration, better stress distribution, easier application and better resistance to fatigue than traditional methods. The objective of this project is to provide information on the design of bonded structures subjected to static and cyclic loadings. As well as, a numerical analysis of a single lap joint using the Contour Element Method, comparing the result obtained with analytical models.

Key Words: Bonding; Static Loadings; Cyclic Loadings; Numerical Analysis; Contour Element Method.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	MOTIVAÇÃO.....	1
1.2	OBJETIVOS.....	1
1.3	DESCRIÇÃO DO TRABALHO.....	1
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1	ADESIVOS.....	3
2.2	JUNTAS COLADAS.....	4
2.3	DOUBLERS.....	9
2.4	OUTRAS APLICAÇÕES.....	11
2.5	MODELAGEM DE JUNTAS COLADAS.....	12
3.	COLAGEM SOB CARREGAMENTO ESTÁTICO	16
3.1	MODELOS ANALÍTICOS.....	16
3.1.1	Volkersen.....	16
3.1.2	Goland & Reissner.....	18
3.1.3	Hart-Smith.....	22
3.1.4	Ojalvo & Eidinoff.....	26
3.2	CRITÉRIOS DE FALHA.....	29
3.2.1	Máximo valor de tensão ou deformação.....	29
3.2.2	Tensão ou deformação a uma distância ou sobre uma zona.....	29
3.2.3	Critério da zona ou estado limite.....	30
3.2.4	Critério do envelope de falha energético.....	31
3.2.5	Critério da máxima densidade de energia de deformação.....	36
4.	COLAGEM SOB CARREGAMENTO CÍCLICO	39
4.1	MECÂNICA DA FRATURA.....	39
4.1.1	Balanço de energia durante a propagação da trinca.....	39
4.1.2	Teoria de Griffith.....	41
4.1.3	Análise de tensões nas trincas.....	42
4.1.4	A integral J.....	44
4.2	O FENÔMENO DA FADIGA.....	44

4.3	MODELOS ANALÍTICOS	46
4.3.1	Energia e Flexibilidade.....	47
4.3.2	<i>Double Cantilever Beam</i> – Modo I.....	48
4.3.3	<i>Double Cantilever Beam</i> – Modo II.....	50
4.3.4	<i>Single Lap Join</i> – Modo Misto	52
5.	MÉTODOS NUMÉRICOS	54
5.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	55
5.1.1	Preliminares Matemáticas.....	55
5.1.2	Formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Mecânica dos Sólidos.....	58
5.1.3	Discretização do problema em elementos de contorno.....	60
5.1.4	Solução fundamental	63
5.1.5	Formulação de Elementos de Contorno aplicada à chapas coladas	65
5.1.6	O Método das sub-regiões.....	66
6.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	71
6.1	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	71
6.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO	72
6.2.1	Propriedades dos materiais.....	73
6.3	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA	75
6.4	COMPARAÇÃO COM OS MODELOS ANALÍTICOS.....	77
6.5	ANÁLISE DA VARIAÇÃO DE ESPESSURA DO ADESIVO E ADERENTE.....	80
6.6	EFEITO DE BORDA	86
6.7	EFEITO DO CHANFRO EM UMA JUNTA POR SOBREPOSIÇÃO SIMPLES	88
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	91
7.1	CONCLUSÕES.....	91
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	92
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - O mercado de adesivos estruturais dividido por classes de matérias-primas. (Broxterman, 2001).....	4
Figura 2.2 - Boas e Más aplicações de juntas coladas. (Shigley, 2005).....	7
Figura 2.3 - Configurações geométricas de juntas coladas. (Fanton, 2012).....	8
Figura 2.4 - Exemplo de estrutura de fuselagem reforçada por doublers. (Fanton, 2012).	10
Figura 2.5 - Reforços estruturais aplicados em automóveis utilizando adesivos. (Maia, 2010).....	11
Figura 2.6 - Aplicação do adesivo no para-brisas e aplicação robotizada do mesmo. (Maia, 2010).	11
Figura 2.7 - Plaza Centenário, São Paulo, Brasil. (3M, 2015)	12
Figura 2.8 - Iguatemi Corporate, Porto Alegre, Brasil. (3M, 2015)	12
Figura 3.1 - Modelo de Volkersen. (Souza, 2012).....	17
Figura 3.2 - Princípio da máxima tensão para juntas com espessuras diferentes. (Souza, 2012).	18
Figura 3.3 - Modelo de Goland & Reissner. (Quispe Rodríguez, 2011).....	19
Figura 3.4 - Comportamento das tensões no adesivo segundo (Goland e Reissner, 1944).....	21
Figura 3.5 - Comparação da distribuição de tensão entre os modelos de Goland & Reissner e Volkersen para uma carga de 2000 lbf. (Ficarra, 2001)	22
Figura 3.6 - Modelo proposto por (Hart-Smith,1973ab).....	22
Figura 3.7 - Regiões elásticas e plásticas consideradas pela análise de Hart-Smith. (Quispe Rodríguez, 2011).	24
Figura 3.8 – Distribuição de tensões de acordo o modelo de (Hart-Smith, 1973a).	26
Figura 3.9 - Processo para achar a carga máxima de falha por cisalhamento e por tensões normais. (Quispe Rodríguez, 2011).	29
Figura 3.10 - (a). Forças resultantes nos extremos da zona colada para uma SLJ. (b) Forças Resultantes atuando nos extremos da zona colada para uma junta tipo lap-shear. (Quispe Rodríguez, 2011).....	32
Figura 3.11 - Equilíbrio de forças para um elemento infinitesimal da junta. (Quispe Rodríguez, 2011).	33
Figura 4.1 - Modelo Utilizado por Griffith. (Souza, 2012).	41
Figura 4.2 - Modos de deslocamento da ponta da trinca. (Pastoukhov, 1995).....	42
Figura 4.3 - Coordenadas na frente da trinca. (Pastoukhov, 1995).....	43

Figura 4.4 - Contorno arbitrário em torno da ponta de uma trinca. (Cravo, 2012).....	44
Figura 4.5 - Taxa de liberação de energia e flexibilidade. (Souza, 2012).....	47
Figura 4.6 - DCB em modo I. (Souza, 2012)	48
Figura 4.7 - DCB em modo II. (Souza, 2012).	50
Figura 4.8 - Lap Joint simétrica centralmente carregada. (Çalık, 2016)	52
Figura 4.9 - (a) Separação de carga em modo I. (b) Separação de carga em modo 2. (Souza, 2012)....	52
Figura 5.1: Domínio da integração de $f(x,y)$. (Kane, 1994)	56
Figura 5.2 - Exemplos da função pulso retangular unitária. (Kane, 1994).....	57
Figura 5.3 - Representação de um elemento de quatro nós no sistema de coordenadas intrínseco.	61
Figura 5.4: SLJ colada por adesivo. (Souza, 2009)	65
Figura 5.5 - Distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo com aderentes isotrópicos. (Souza, 2009).....	66
Figura 5.6 - Modelo com duas sub-regiões. (Cravo, 2012).....	67
Figura 6.1 - Fluxograma do programa utilizado para análise da junta.....	71
Figura 6.2 - Junta de Sobreposição Simples.....	72
Figura 6.3 - Dimensões da junta analisada.....	72
Figura 6.4 - Condição de Contorno utilizada na junta	73
Figura 6.5 - Tensões máximas de cisalhamento e descolamento relacionadas ao número de elementos da malha.	75
Figura 6.6 - Tensões mínimas de cisalhamento e descolamento relacionadas ao número de elementos da malha.....	76
Figura 6.7 - Tempo x Número de Elementos	77
Figura 6.8 - Comparação da tensão de cisalhamento entre modelo analíticos e o modelo numérico para uma carga de 1000N.	78
Figura 6.9 - Comparação da tensão de descolamento entre modelo analíticos e o modelo numérico para uma carga de 1000N.	78
Figura 6.10 - Distribuição da tensão de cisalhamento para cinco espessuras diferentes ao longo do toda a área colada utilizando o MEC.....	81
Figura 6.11 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de adesivos diferentes ao longo do toda a área colada utilizando o MEC.....	81

Figura 6.12 - Distribuição da tensão de cisalhamento para cinco espessuras de adesivo diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.	82
Figura 6.13 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de adesivo diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.	83
Figura 6.14 - Distribuição da tensão de cisalhamento para cinco espessuras diferentes do aderente ao longo do toda a área colada utilizando o MEC.....	84
Figura 6.15 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras do aderente diferentes ao longo do toda a área colada utilizando o MEC.....	84
Figura 6.16 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de aderentes diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.	85
Figura 6.17 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de aderentes diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.	85
Figura 6.18 - Tensão de Cisalhamento no adesivo para $el = 5\text{mm}$	87
Figura 6.19 - Tensão de Descolamento no Adesivo para $el = 5\text{mm}$	87
Figura 6.20 - Dimensões da junta chanfrada.	88
Figura 6.21 - Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento nas juntas.	89
Figura 6.22 - Comparação da distribuição da tensão de descolamento nas juntas.	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Comparação das principais características de alguns tipos de ligações. (Quispe Rodriguez, 2011)	6
Tabela 2.2 - Resumo da revisão bibliográfica	15
Tabela 6.1 - Dimensões da junta analisada	73
Tabela 6.2- Propriedades do alumínio 7075-T651. (Coppermetal)	74
Tabela 6.3 --Propriedades do adesivo AF163-2K. (3M, 2009)	74
Tabela 6.4 - Erro entre o modelo numérico e os modelos analíticos.	80

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

P	Força Aplicada
b	Largura da zona colada
l	Comprimento da zona colada
E	Módulo de elasticidade do aderente
G	Módulo de cisalhamento do aderente
t, h	Espessura
k	Fator do momento fletor
M	Momento Fletor
V	Força cortante, trabalho virtual interno
c	Metade da região colada
D	Rigidez a flexão dos aderentes, variável de dano
d	Variável do modelo de Hart-Smith
Q	Força Transversal
Nel	Número de elementos do adesivo
i	índice subscrito
T	Período de uma onda senoidal, forças de superfície
U	Energia de deformação

Símbolos Gregos

ω	Distância característica de cisalhamento
σ	Tensão normal
ν	Coefficiente de Poisson
τ	Tensão de cisalhamento
ε	Deformação Transversal
γ	Deformação por cisalhamento

Termos com Subscritos e Sobrescritos

k'	Fator de força cortante
t_t	Espessura do aderente superior
t_b	Espessura do aderente inferior
t_a	Espessura do Adesivo
\bar{P}	Carga Aplicada por unidade de largura
τ_p	Limite de escoamento por cisalhamento
τ_{MAX}	Máxima tensão de cisalhamento
γ_e	Deformação elástica do adesivo
γ_p	Deformação elástica do aderente
E_a	Módulo de elasticidade do adesivo
u_i	Deslocamento longitudinal
ω_i	Deslocamento transversal
U_I	Taxa de energia de deformação por tensões normais
U_{II}	Taxa de energia de deformação por cisalhamento
u_I	Densidade de energia de deformação por tensões normais
u_{II}	Densidade de energia de deformação por cisalhamento
k_G	Fator do momento fletor para o modelo de Goland & Reissner
k_H	Fator do momento fletor para o modelo de Hart-Smith
σ_{MAX}	Máxima tensão Normal

Siglas

MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MDF	Método das Diferenças Finitas
SLJ	Junta de Sobreposição Simples
DLJ	Junta de Sobreposição Dupla
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
DCB	<i>Double Cantilever Beam</i>

1. INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Tanto na indústria aeronáutica, quanto na automotiva, a aplicação de adesivos para conexão de componentes metálicos e compósitos vem crescendo consideravelmente nos últimos anos. Tal crescimento foi proporcionado pelos benefícios gerados por esse tipo de ligação quando comparado com modelos mais convencionais, como solda ou rebites. Distribuição de tensões mais uniforme, melhor acabamento, possibilidade de ligação de materiais diferentes e maior absorção de vibrações são características que têm garantido o sucesso das juntas coladas.

Devido à quantidade de fatores que afetam a integridade de uma junta colada, não foi possível, até hoje, a criação de um modelo global para análise da resistência. Assim, existe uma necessidade específica de análise e criação de ferramentas que auxiliem o dimensionamento desse tipo de junta, sendo esta a principal motivação desse trabalho.

1.2 OBJETIVOS

O principal objetivo desse trabalho é realizar a análise estática de uma junta colada do tipo sobreposição simples utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC), implementado o método das sub-regiões. Outros objetivos desse trabalho são: análise do efeito de borda e do efeito do chanfro, além do estudo da variação da espessura do aderente e do adesivo.

1.3 DESCRIÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é dividido em sete capítulos e estruturado da seguinte forma:

Capítulo 1. INTRODUÇÃO: Nesse capítulo é apresentada a motivação e os objetivos do trabalho, além de como o mesmo é estruturado.

Capítulo 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: Esse capítulo apresenta uma breve revisão sobre adesivos e juntas coladas, assim como, um breve resumo da evolução do estudo desse método de ligação.

Capítulo 3. COLAGEM SOB CARREGAMENTO ESTÁTICO: O propósito desse capítulo é mostrar os principais modelos analíticos para distribuição de tensões no adesivo, assim como, os principais critérios de falha para juntas sob carregamentos estático.

Capítulo 4. COLAGEM SOB CARREGAMENTO CÍCLICO : Nesse capítulo são mostrados alguns princípios básicos da mecânica da fratura, necessários para desenvolver o dimensionamento de juntas sob carregamento cíclico, também presente nesse capítulo.

Capítulo 5. MÉTODOS NUMÉRICOS: O objetivo desse capítulo é mostrar os principais métodos numéricos utilizados em juntas coladas. Além de trazer alguns princípios básicos e a formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à mecânica dos sólidos e juntas coladas. Esse capítulo também contém as informações sobre o método das sub-regiões.

Capítulo 6. RESULTADOS E DISCUSSÕES: Nesse capítulo serão apresentadas as análises realizadas e os resultados obtidos e as discussões sobre os mesmos.

Capítulo 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS: Conclusões do trabalho e proposições para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 ADESIVOS

Segundo Kinloch (1987), adesivo é qualquer substância aplicada em uma superfície, ou em ambas as superfícies, de dois objetos separados que os une e oferece resistência à sua separação.

Os adesivos podem ter origem natural ou ser produzidos de forma sintética. As primeiras referências aos adesivos na literatura apareceram por volta de 2000 a.c. Um tipo antigo de cola é a chamada goma-arábica, que consiste em um extrato retirado do tronco e ramos da acácia, de uso bastante difundido no passado, por ser eficiente e atóxica. Na Europa, a cola só começou a ter uso generalizado entre os séculos XVI e XVIII. Até o início do século XX, o avanço tecnológico nos adesivos foi lento e gradual e só no último século e até a atualidade é que a inovação nos adesivos sintéticos ocorreu de forma acelerada.

Na indústria atual, os adesivos são utilizados em muitas aplicações diferentes, que vão desde embalagens e selos postais até componentes aeronáuticos e aeroespaciais. O foco nesse trabalho serão as aplicações estruturais. Além de possuírem uma alta resistência ao cisalhamento, os adesivos utilizados nessas aplicações, também possuem uma boa resistência às adversidades do meio ambiente. Geralmente, são fabricados com base em resinas termoendurecíveis (a temperatura ou um catalizador provoca uma reação permanente), modificados por resinas termoplásticas (necessitam de calor para serem enformados, porém o processo é reversível).

Cetim (2006) e Kinloch (1997) mostram que a maioria dos adesivos utilizados neste tipo de aplicação são de materiais poliméricos: epóxis, uretanos, compostos fenólicos, acrílicos e cianoacrilatos. Segundo Maia (2010), os epóxidos são os mais aplicados no setor aeronáutico e automotivo, apresentam grande resistência à compressão e ao cisalhamento, mas pouca resistência ao descolamento. São constituídos por uma resina epóxida e um endurecedor. Para que a resistência às adversidades aumente, essas juntas costumam ser pós-curadas, endurecendo o adesivo. Contrariamente aos epóxidos, os uretanos são flexíveis e possuem elevada resistência ao arrancamento, são os melhores adesivos em baixas temperaturas, apresentam boa resistência química, mas possuem baixa resistência em altas temperaturas. Devido à sua boa molhabilidade e flexibilidade, os uretanos aderem bem a uma elevada gama de substratos. Os fenólicos formam-se devido à condensação de fenol com formaldeído, sendo utilizados, principalmente, para colar madeira e apresentam como principal vantagem o baixo custo. Por apresentarem uma boa resistência ao calor, são usados em discos abrasivos, lixas e moldes de fundição. Geralmente, são aplicados como uma solução em álcool, acetona ou água.

A Figura 2.1 traz o mercado de adesivos estruturais dividido por classes de matérias-primas.

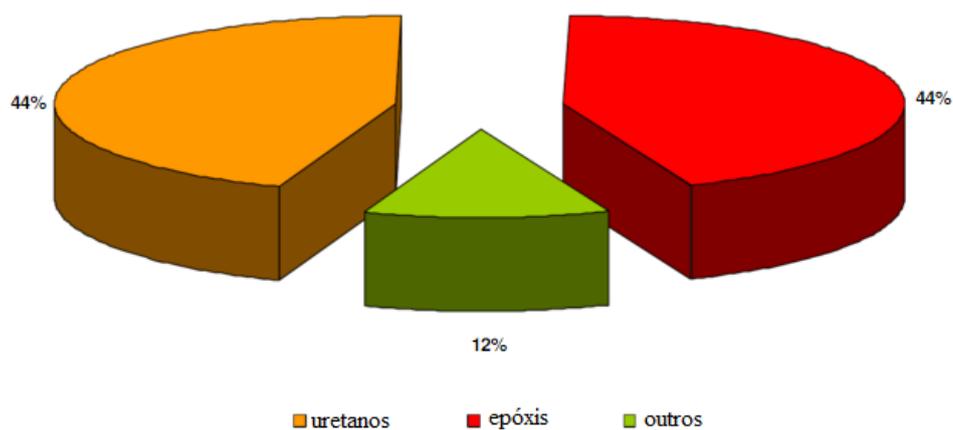


Figura 2.1 - O mercado de adesivos estruturais dividido por classes de matérias-primas. (Broxterman, 2001)

Um dos principais fatores para um sucesso de um adesivo é a adesão. A mesma pode ser afetada por diversos fatores internos e externos, por exemplo, tensão normal, tensão de cisalhamento, impacto, descolamento (*peel*), clivagem, fadiga, temperatura, envelhecimento, taxa de cura, fatores biológicos (bactérias, mofo, roedores ou insetos), entre outros. Entender como esses fatores afetam a adesão irá garantir um maior sucesso para o procedimento de colagem.

2.2 JUNTAS COLADAS

O adesivo é o elemento que diferencia a junta colada das demais juntas. Sua função é unir duas ou mais partes estruturais, possuindo suas próprias características mecânicas e químicas, sendo considerado um elemento fundamental no processo de colagem, pois é através dele que as cargas são transferidas entre as partes coladas de uma estrutura, chamadas de aderentes. A região de interface entre os aderentes e o adesivo é chamada de superfície de colagem.

Quando se compara juntas coladas com métodos mais tradicionais, como juntas rebitadas e parafusadas, esse método apresenta algumas vantagens e desvantagens. As principais vantagens, de acordo Noorman (2014), são:

- Possibilidade de formação de estruturas de baixo peso, fortes e compactas;
- União de materiais diferentes;
- Melhor eficiência na transferência de tensões entre aderentes;
- União eficiente de placas delgadas;
- Não possuem concentração de tensões significativas;
- Propriedades de fadiga reforçadas devido à melhor distribuição de tensões;

- Melhora na resistência à corrosão, já que existe a possibilidade de minimizar a corrosão galvânica interpondo uma barreira não condutora entre os aderentes metálicos;
- Melhor acabamento, gerando uma melhor eficiência aerodinâmica;
- Facilidade no processo de automatização;
- Maior vedação.

Em contrapartida, as juntas coladas apresentam algumas desvantagens. As principais são:

- Dificuldade na desmontagem das juntas;
- Esforços residuais podem ser criados devido à diferença nos coeficientes de dilatação térmica;
- Não existem ensaios não destrutivos confiáveis para a verificação da integridade e eficiência das juntas coladas;
- Limitados a uniões de configurações simples;
- Sensíveis às tensões descolamento, apesar de ser bastante resistente a cisalhamento e à compressão;
- Pequena resistência a temperaturas elevadas e fogo;
- Tendência à degradação ambiental, durabilidade incerta quando submetida a condições severas de serviço;
- Problemas de toxicidade ou inflamabilidade;
- Difícil inspeção, tornando assim o controle de qualidade crítico.

A Tabela 2.1 compara em uma classificação relativa as principais características de juntas coladas, rebitadas e soldadas.

Tabela 2.1 - Comparação das principais características de alguns tipos de ligações. (Quispe Rodriguez, 2011)

	Junta Colada	Junta Rebitada	Junta Soldada
Exigência da preparação da superfície	Alta	Pequena	Pequena
União de materiais diferentes	Boa	Limitada	Ruim
Peso adicional na estrutura	Baixo	Alto	Moderado
Resistência à fadiga	Alta	Baixa	Moderada
Inspeção por ensaio não destrutivo	Muito limitado	Adequado	Adequado
Facilidade na desmontagem	Difícil	Fácil	Difícil
Custo de produção	Médio	Baixo	Baixo
Resistência à degradação pelo meio ambiente	Pobre	Pobre	Moderado
Tempo de produção	Baixo	Rápido	Moderado

Os adesivos utilizados em juntas coladas apresentam grande resistência à compressão e cisalhamento, mas são pouco resistentes a tensões de descolamento. As tensões normais trativas devem ser minimizadas ou eliminadas, em vez de serem tomadas em conta como limite de projeto no cálculo de juntas coladas (Hart-Smith, 1985). Em geral, quanto mais complexa for a geometria da junta, menor será a existência de tensões normais. A Figura 2.2 mostra boas e más aplicações de juntas coladas, as boas aplicações tendem a reduzir o efeito das tensões normais.

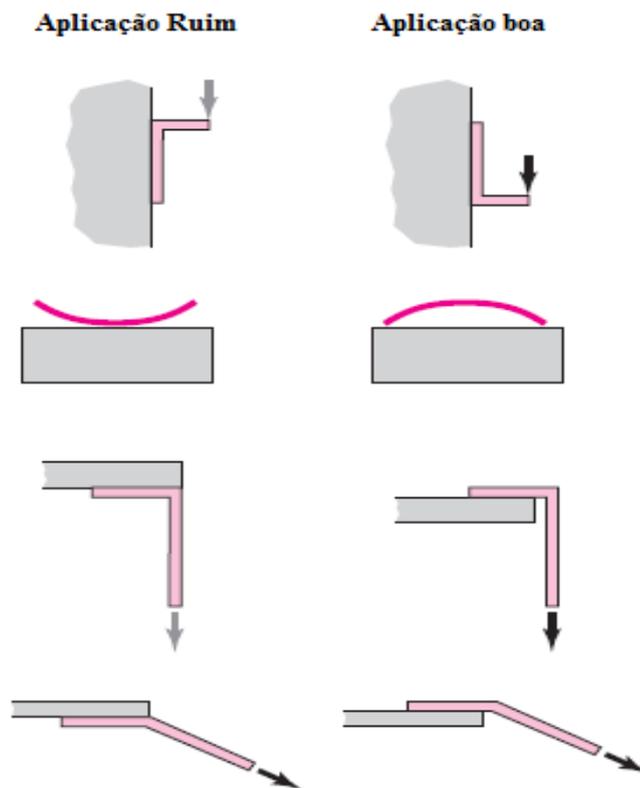


Figura 2.2 - Boas e Más aplicações de juntas coladas. (Shigley, 2005)

Paralelo à colagem, um método de ligação que vem ganhando destaque na indústria, principalmente na aeronáutica e automobilística, é a soldagem por fricção (*Friction Stir Welding - FSW*). Este é um processo de soldagem, no estado sólido, que produz soldas pela rotação ou movimento relativo de duas peças sob forças compressivas, produzindo calor e deformando plasticamente o material nas superfícies de atrito. As principais vantagens desse método quando comparado à colagem são:

- Não é necessária uma atenção especial com a limpeza da superfície, uma vez que a soldagem por fricção tende a romper, deslocar, e finalmente remover os filmes de superfície no flash ("colar") da solda;
- O equipamento atual pode ser operado a até 4 quilômetros, sendo adequado para aplicações distantes em ambientes perigosos;
- Defeitos associados a fenômenos de solidificação, como porosidade e segregação, não estão presentes;
- Maior resistência a esforços mecânicos.

As principais desvantagens desse método são:

- A área de pelo menos uma peça deve ser simétrica, de forma que a parte possa girar sobre o eixo do plano de rotação;

- As geometrias típicas que podem ser soldadas por fricção são: barra com barra, barra com tubo, barra com chapa, tubo com tubo e tubo com chapa;
- O processo é normalmente limitado a fazer juntas de topo planas e angulares (ou cônicas);
- Material de pelo menos um componente deve ser plasticamente deformável sob as dadas condições de soldagem;
- Preparação e alinhamento das peças podem ser críticas para o desenvolvimento uniforme do atrito e aquecimento;
- Capital de equipamento e custos com ferramentas são altos;
- Ligas usinadas são difíceis de serem soldadas.

Sabe-se que existem diversas configurações para a aplicação de juntas coladas. A Figura 2.3 mostra as mais utilizadas na prática. Cada configuração tem como objetivo suportar um tipo de carga, apresentando assim características específicas.

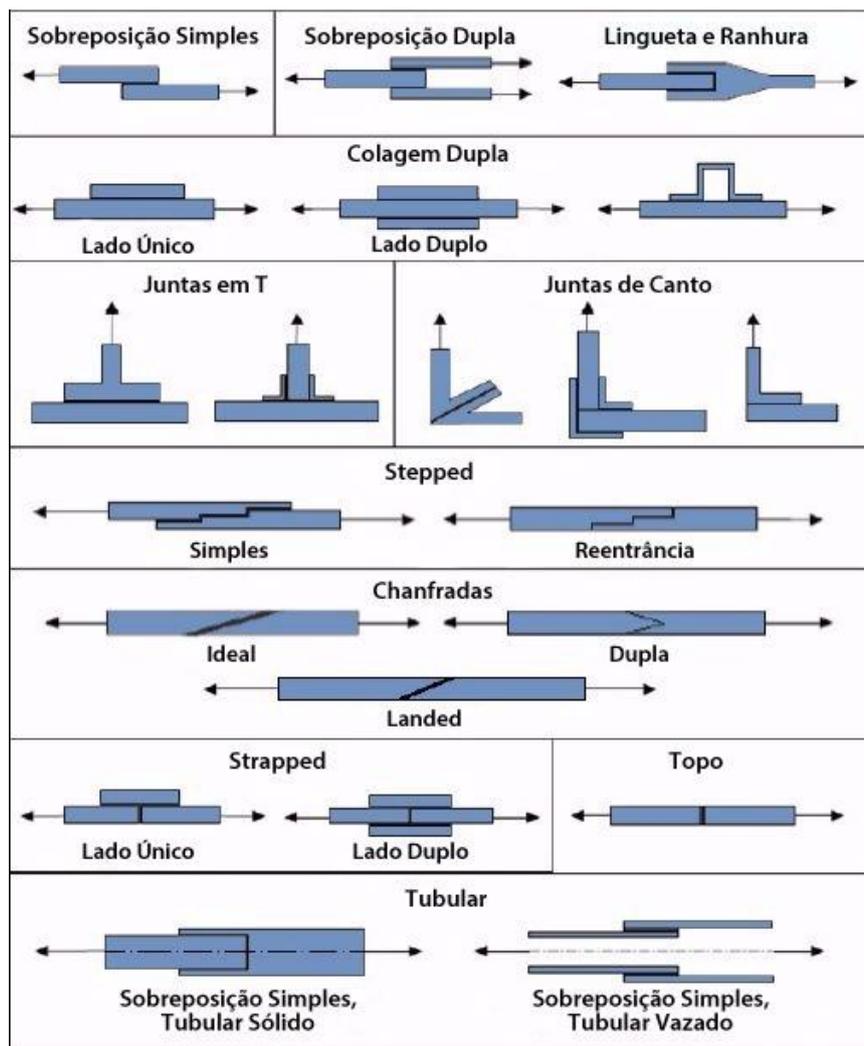


Figura 2.3 - Configurações geométricas de juntas coladas. (Fanton, 2012)

Juntas de sobreposição simples (*Single Lap Joint*) têm a vantagem da facilidade de fabricação, porém apresentam como desvantagem a excentricidade no caminho da carga, provocando flexão e, conseqüentemente, elevadas tensões no adesivo.

Juntas por sobreposição dupla (*Double Lap*) possuem tensões normais muito menores que as por sobreposição simples, devido à simetria em relação ao eixo x. Em contrapartida, sua fabricação é mais complexa.

As juntas coladas de topo (*Butt Join*) apresentam um ótimo acabamento e não sofrem alteração na espessura da região colada. Essa junta tem a desvantagem do adesivo ser mais utilizado em tração, sendo que ele é mais resistente à compressão e ao cisalhamento, o que torna junta muito frágil.

As juntas tipo T são formadas ao conectar painéis verticais e horizontais. Essas juntas são carregadas em tensão no painel vertical e são, geralmente, utilizadas na indústria naval.

2.3 DOUBLERS

Doublers são chapas adicionais unidas a uma chapa base como reforço localizado para diminuir o nível de tensão. Os *doublers* colados são constituídos por duas ou mais chapas sobrepostas, aderidas por filmes adesivos que promovem uma maior integração das peças, atualmente, sua maior aplicação é no setor aeronáutico.

As estruturas da fuselagem na maioria das aeronaves comerciais modernas são classificadas como estruturas semi-monocoque metálicas, que consistem em uma casca fina ou revestimento, reforçado por vários perfis longitudinais (reforçadores) e anéis transversais (cavernas), como ilustrado na Figura 2.4.

Em estruturas de fuselagem rebitadas convencionais, uma chapa de revestimento possui uma espessura base maior em pontos de concentração de tensão, como por exemplo, em áreas de emendas rebitadas ou cantos de portas e janelas. Esta chapa é usinada quimicamente em áreas menos críticas, visando a diminuição de peso. Assim, a relação entre o peso de material que efetivamente está no produto e o peso de material comprado (*buy to fly*) diminui, resultando em menos custos.

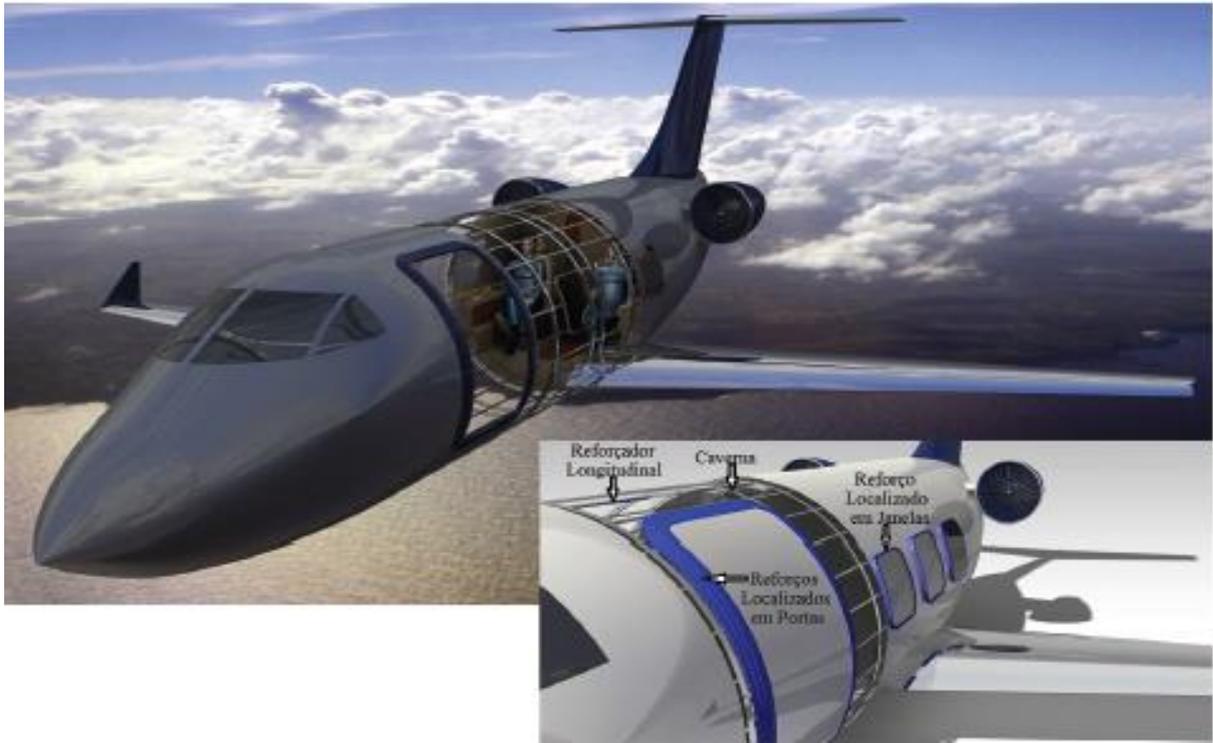


Figura 2.4 - Exemplo de estrutura de fuselagem reforçada por doublers. (Fanton, 2012).

Para se evitar a usinagem química em algumas áreas críticas da fuselagem, são instalados *doublers* rebitados à chapa base como reforço localizado para diminuir o nível de tensão. Este conceito, que é o mesmo aplicado em reparos de trincas e outros danos de operação, tem a desvantagem de introduzir altas concentrações de tensão na interface restante da estrutura, geralmente, na primeira linha de prendedores que são mais carregados.

Os *doublers* colados são uma alternativa de junta bastante eficaz, podendo substituir outras alternativas presentes na indústria aeronáutica, já que permite uma maior integração das peças, aumentando a relação *buy to fly* e diminuindo o tempo de montagem, o que pode acarretar em menores custos. Estas peças coladas apresentam também uma transferência de carga mais eficiente, com menores concentrações de tensões, quando bem dimensionadas, além de alta resistência à corrosão e fadiga, baixo custo e a característica de retardar qualquer propagação de trinca, o que resulta em uma maior vida em fadiga da estrutura e em potenciais reduções de peso.

Os *doublers* colados são encontrados dentro de muitas aplicações na estrutura aeronáutica. As principais são: nos cantos de portas, nas janelas, asas e em reparos de trincas e outros danos de operação.

2.4 OUTRAS APLICAÇÕES

Os adesivos estruturais possuem aplicações nos mais diversos ramos da indústria. Essas aplicações vão desde poliuretanos expansíveis na construção civil a epóxidos estruturais aplicados na indústria automotiva e aeronáutica.

Na indústria automotiva, adesivos podem ser utilizados na fixação de reforços estruturais (Figura 2.5), com o objetivo semelhantes aos *doublers*, e também na fixação de componentes essenciais ao automóvel, como o para-brisas (Figura 2.6).

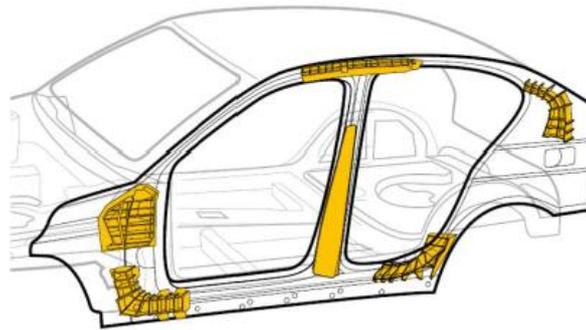


Figura 2.5 - Reforços estruturais aplicados em automóveis utilizando adesivos. (Maia, 2010).



Figura 2.6 - Aplicação do adesivo no para-brisas e aplicação robotizada do mesmo. (Maia, 2010).

Na construção civil, a principal aplicação de adesivos é no envidraçamento estrutural. O Plaza Centenário, São Paulo - Brasil, utiliza adesivo nos reforços de alumínio em painéis de ACM, como mostrado na Figura 2.7. Outro exemplo de construção que utiliza a mesma tecnologia é o Iguatemi Corporate (Figura 2.8), Porto Alegre – Brasil, os adesivos são utilizados na fixação das vidraças do edifício.

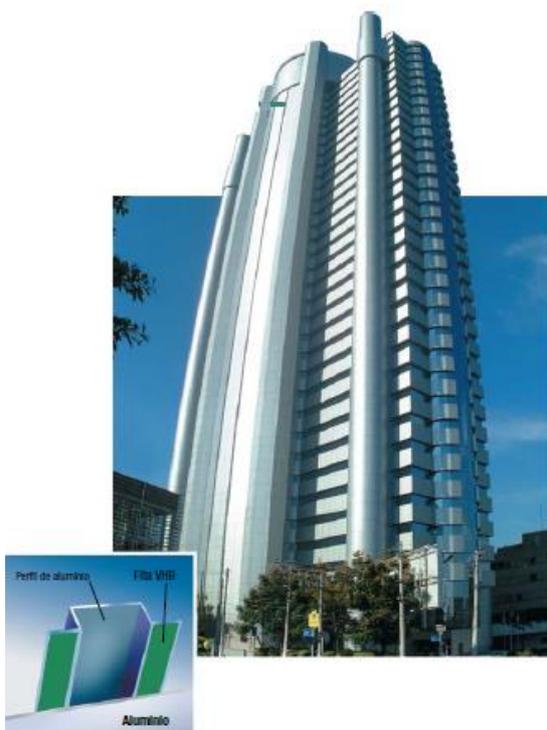


Figura 2.7 - Plaza Centenário, São Paulo, Brasil. (3M, 2015)

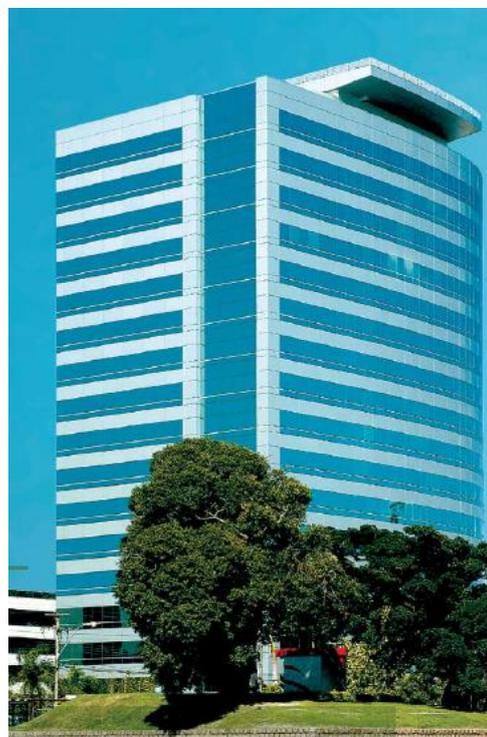


Figura 2.8 - Iguatemi Corporate, Porto Alegre, Brasil. (3M, 2015)

2.5 MODELAGEM DE JUNTAS COLADAS

No projeto de juntas coladas, existe a necessidade de estimar o nível de tensões e esforços no adesivo e nos aderentes. De uma forma geral, sabe-se que o papel do adesivo em juntas coladas ou em qualquer aplicação é transferir o carregamento entre as partes coladas e resistir a esses esforços.

Vários métodos para modelagem de juntas coladas foram criados, visando uma melhor aproximação com a realidade e resultados mais confiáveis. Os mais importantes, segundo Da Silva et al (2009a), são:

- Volkersen (1938): Primeiro método analítico conhecido na literatura para calcular esforços em juntas coladas. O trabalho apresentou a análise conhecida como modelo de cisalhamento (*shear-lag model*), onde foi introduzido o conceito de diferencial de cisalhamento, considerando apenas as tensões cisalhantes e deformações elástica dos aderentes.

- Goland e Reissner (1944): Modificaram a teoria de Volkersen (1938), sendo os primeiros a considerar as tensões normais ou tensões de descolamento (*peel*) no adesivo, além dos efeitos devido a rotação dos aderentes.
- Dickson et al (1972); Grimes e Greimann (1975): Primeiros a considerar aderentes de material compósito e consideraram a variação da tensão ao longo da espessura do aderente. Eles predisseram também que para uma análise mais realista da junta era necessário incluir a não-linearidade do adesivo.
- Hart-Smith (1973a,b): Considerou a plasticidade no adesivo para juntas coladas por sobreposição (SLJ) e para juntas coladas por sobreposição dupla (DJL). Para as primeiras, ele considerou a tensão normal como sendo puramente elástica e o cisalhamento como sendo elástico e elasto-perfeitamente plástico. Em seus trabalhos, a deficiência na determinação do momento fletor nas extremidades da zona colada foi eliminada. Esse modelo mostrou também, que não se deve levar em conta como principal parâmetro de resistência de uma junta as tensões de cisalhamento calculadas simplesmente dividindo a carga de falha pela área colada, pois a carga de falha não é proporcional ao comprimento da colagem.
- Ojalvo e Eidinoff (1978): Realizaram uma investigação analítica sobre a influência da espessura do adesivo na distribuição das tensões, sendo os primeiros a prever a variação da tensão cisalhante através da espessura do adesivo.
- Grayley (1978): Apresentou um procedimento baseado em dados experimentais de curvas de tensão-deformação cisalhante em adesivos para estimar a resistência da junta colada por sobreposição dupla. Este procedimento considera o adesivo trabalhando somente em cisalhamento e os aderentes somente como membrana, ambos em material isotrópico e linearmente elástico.
- King (1978): Elaborou um procedimento para a determinação de distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo em juntas coladas por sobreposição simples e *multi-step*, sujeitas a carregamento de tração, compressão e cisalhamento. A técnica leva em conta a plasticidade do adesivo e assume que os aderentes se comportam elasticamente em membrana e são rígidos em flexão, podendo também considerar os aderentes como laminados de material ortotrópico. Por não considerar o efeito de flexão na junta devido ao momento fletor aplicado ou devido à excentricidade da carga, esse método deve ser aplicado somente a juntas coladas por sobreposição dupla (DLJ) ou *multi-step*.
- Grayley (1980): Elaborou curvas que possibilitam a determinação das tensões máximas de cisalhamento e normal, em regime elástico de DLJ sujeitas a carregamento de tração ou compressão.

Os modelos analíticos descritos acima consideram que a tensão máxima ocorre nas bordas, violando o princípio da borda livre. A não consideração deste princípio superestima as tensões nas bordas e

tendem a fornecer cargas de falha conservativas. Os primeiros a conservar esse modelo de borda foram Allman (1977), Chen e Cheng (1983), demonstrando que a distância na qual ocorre a tensão máxima depende da flexibilidade máxima relativa entre os aderentes e adesivos. Chen e Cheng (1983) concluíram que a tensão ocorre a uma distância equivalente a 20% da espessura do aderente.

Alguns autores tentaram obter soluções fechadas mais gerais, considerando aderentes diferentes ou aderentes de materiais compósitos, por exemplo. Porém, a medida que o modelo se torna mais geral, a equação governante se torna mais complexa, tornando necessário o uso de computadores de alta performance e uma abordagem numérica. Os principais trabalhos a utilizar esses recursos foram:

- Mortensen (1998): Desenvolveu um método de análise de juntas coladas que foi implementado no programa comercial de cálculo de juntas *ESAComp*. Esse método modela os aderentes como vigas ou placa planas sem flexão cilíndrica e é utilizada a teoria clássica de laminação (Daniel e Ishai, 1994).
- Andruet (1998): Utilizando o *software* comercial de elementos finitos *ABAQUS*, desenvolveu dois modelos para modelagem de juntas coladas, sendo o primeiro 2D e o segundo 3D. No primeiro, os aderentes são dimensionados como uma viga de Euler-Bernoulli e a camada plana de adesivo utiliza a teoria de tensão-deformação. Já no segundo, os aderentes são representados como placas planas de Kirchoff-Love e o adesivo como sólido.
- Chihdar e Pang (1993, 1996): Propuseram um modelo analítico para determinação das tensões e deformações elásticas em SLJs considerando a flexibilidade dos aderentes ao cisalhamento transversal, permitindo assim a utilização de aderentes espessos. Os resultados obtidos foram comparados com modelos 2D feitos utilizando o programa comercial de elementos finitos *ALGOR*.
- Tahmasebi (2001): Utilizando o programa de elementos finitos *MSC Nastran*, propôs uma técnica de modelagem de junta colada do tipo sobreposta, onde os aderentes podem ser considerados como laminados de material isotrópico ou ortotrópico.

A Tabela 2.2 mostra um resumo das principais características de cada um dos trabalhos citados a cima.

Tabela 2.2 - Resumo da revisão bibliográfica

	Linearidade do Material				Aderente					Tensões no Adesivo			Solução	
	Adesivo		Aderente		Isotrópico	Compósito	Similar	Não - Similar		σ_x	σ_x	τ_{xy}	Analítica	Numérica
	Linear	Não - Linear	Linear	Não - Linear				Espessura	Material					
Volkersen, 1938	X		X		X		X	X			X	X		
Goland e Reissner, 1944	X		X		X		X			X	X	X		
Dickson et al., 1972	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X		
Hart-Smith, 1973a,b	X	X	X		X		X			X	X	X		
Grimes e Greimann, 1975	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	
Ojalvo e Eidinoff, 1978	X	X	X		X		X			X	X	X		
Grayley, 1978	X		X		X		X				X	X		
King, 1978	X			X	X	X	X				X	X		
Grayley, 1980	X		X		X		X			X	X	X		
Chen and Cheng, 1983	X		X		X		X	X	X	X	X	X		
Mortensen, 1998	X		X		X		X			X	X		X	
Andruet, 1998	X	X	X	X	X		X			X	X		X	
Chihdar e Pang, 1993	X		X		X	X	X	X	X	X	X		X	
Tahmasebi, 2001	X		X		X	X	X	X	X	X	X		X	

3. COLAGEM SOB CARREGAMENTO ESTÁTICO

Esse capítulo teve como principal referência a dissertação feita por Quispe Rodríguez (2011). Nele será apresentada uma síntese sobre os principais modelos analíticos para análise de juntas coladas, são eles: Volkersen, Goland e Reissner, Hart-Smith, Ojalvo e Eidinoff.

Serão apresentados também os principais critérios de falha para juntas coladas sobre carregamento estático. Esses critérios, geralmente, estão divididos nas seguintes categorias, (Randolph e Clofford, 2004):

- Máximo valor de tensão - deformação;
- Tensão ou deformação máxima a uma distância ou sobre uma zona;
- Critério da zona ou estado limite;
- Critérios baseado em energia;
- Critérios baseados em resultados experimentais;
- Critérios baseados na mecânica da fratura;
- Critérios baseados na mecânica do dano;

Como o objetivo desse capítulo é abordar cargas estáticas, serão descritos apenas os quatro primeiros métodos. No caso específico de cargas estáticas, os critérios visam predizer a carga que a junta será capaz de resistir, enquanto que para cargas cíclicas (fadiga), os critérios visam predizer o tempo de vida da junta.

3.1 MODELOS ANALÍTICOS

3.1.1 Volkersen

Primeiro modelo analítico conhecido na literatura para calcular esforços em juntas coladas. Apresentou a análise conhecida como “*shear-lag model*”, ou modelo de cisalhamento, onde foi introduzido um conceito de diferencial de cisalhamento.

Este modelo considera apenas as tensões de cisalhamento devido à diferença de deformação, desprezando assim as tensões normais devido à flexão dos aderentes. Considera-se que os aderentes estão submetidos a um carregamento uniaxial de tração e que as tensões são analisadas apenas na camada do adesivo, que tem espessura uniforme e cujas extremidades são planas e normais à direção de aplicação da carga. A distribuição de tensões é dada por:

$$\tau = \frac{P\omega}{2b} \cdot \frac{\cosh(\omega x)}{\sinh\left(\frac{\omega l}{2}\right)} + \left(\frac{t_t - t_b}{t_t + t_b}\right) \cdot \left(\frac{\omega l}{2}\right) \cdot \frac{\sinh(\omega l)}{\cosh\left(\frac{\omega l}{2}\right)}, \quad (3.1)$$

onde,

$$\omega = \sqrt{\frac{G_a}{E t_t t_a} \left(1 + \frac{t_t}{t_b}\right)}. \quad (3.2)$$

O valor de ω é expresso em unidades de comprimento, sendo a distância característica de cisalhamento, uma medida de quão rápido a carga aplicada é transferida de um aderente ao outro. t_t , t_b e t_a representam a espessura do aderente superior, do aderente inferior e do adesivo, respectivamente, b é a largura da área colada, l é o comprimento da zona colada, E é o módulo de elasticidade do aderente, G é o módulo de cisalhamento do adesivo e P é a força aplicada. A origem x é a metade do comprimento da zona colada, como mostra a Figura 3.1.

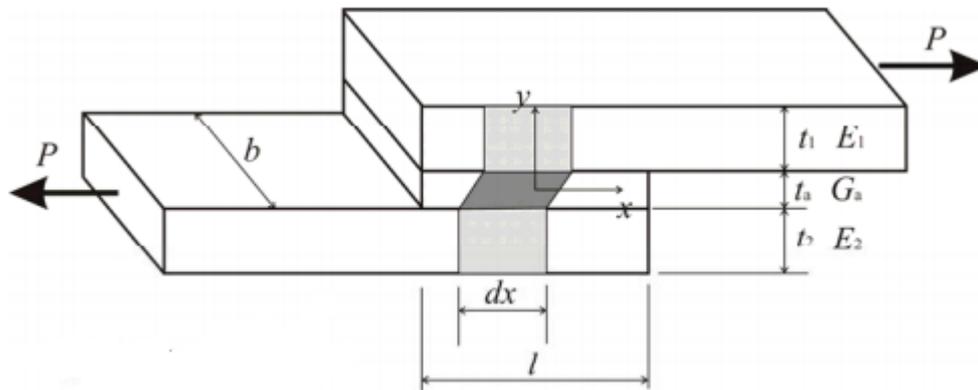


Figura 3.1 - Modelo de Volkersen. (Souza, 2012).

Observando a Equação (3.1), pode-se notar que para juntas com aderentes diferentes a tensão é máxima no extremo da zona colada, onde o aderente submetido a carga é o mais fino. A Figura 3.2 mostra o comportamento da distribuição da tensão no aderente.

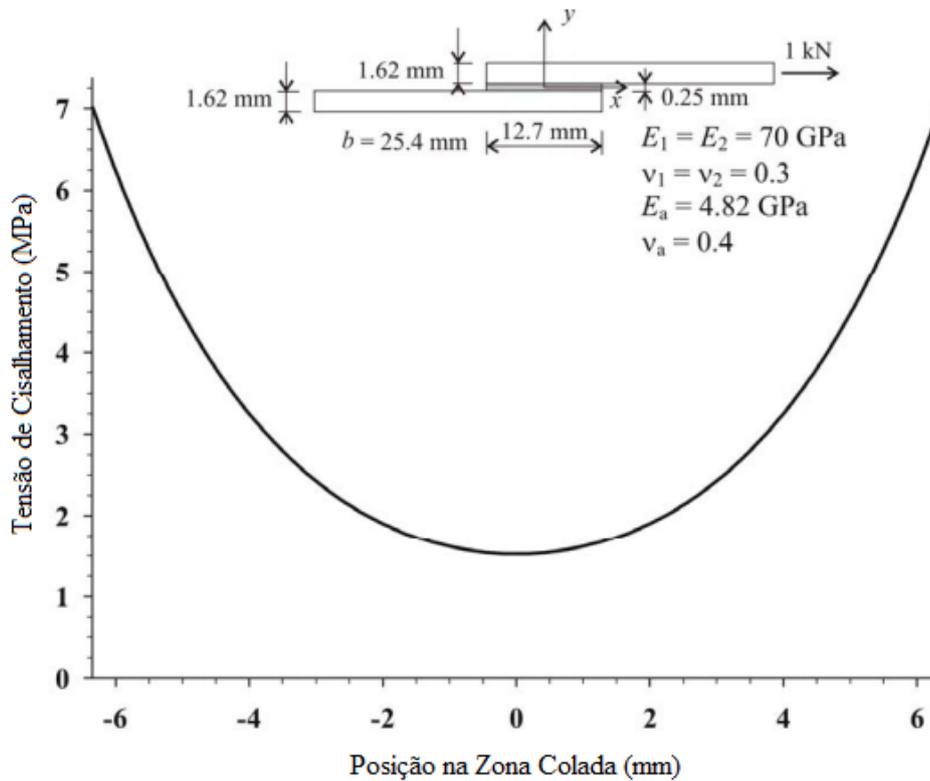


Figura 3.2 - Princípio da máxima tensão para juntas com espessuras diferentes. (Souza, 2012).

Quando a espessura dos aderentes é igual e a junta é suficientemente longa para considerar $\cosh\left(\frac{\omega l}{2}\right) = \sinh\left(\frac{\omega l}{2}\right)$, a Equação (3.1) resulta em:

$$\tau = \frac{P\omega}{2} = \sqrt{\frac{G_a}{Et_t t_a} \left(1 + \frac{t_t}{t_b}\right)} \cdot \frac{P}{2} \quad (3.3)$$

A Equação (3.3) mostra aspectos essenciais de tensão máxima do adesivo:

- Para juntas muito longas, é independente do comprimento da zona colada;
- Aumenta quando o módulo de cisalhamento do adesivo aumenta e quando o módulo de elasticidade, espessura do aderente e espessura do adesivo diminuem.

3.1.2 Goland & Reissner

O efeito devido à carga excêntrica de uma SLJ provoca um momento fletor (M) e uma força cortante (V) que são aplicados nas extremidades da região colada juntamente com a carga de tração (P), como

mostrado na Figura 3.3. Devido ao momento de flexão, a junta tende a rotacionar. Goland e Reissner (1944) foram os primeiros a considerar os efeitos devido a rotação dos aderentes. O problema foi dividido em duas partes. A primeira tem como objetivo determinar as cargas nas extremidades da região colada, considerando os efeitos das deflexões dos aderentes mediante à teoria de placas finas. O principal objetivo da segunda parte foi a determinação das tensões devido às cargas aplicadas. Devido à largura das chapas ser muito maior que a espessura, o problema foi formulado como um estado plano de tensões.

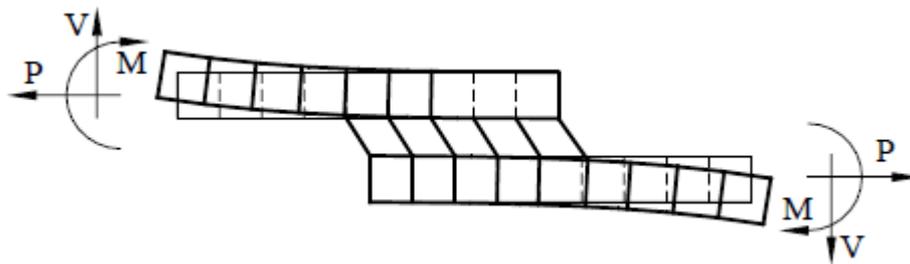


Figura 3.3 - Modelo de Goland & Reissner. (Quispe Rodríguez, 2011)

O efeito da rotação foi introduzido mediante um fator de momento fletor k e o fator de força cortante k' , os quais relacionam a carga aplicada por unidade de largura \bar{P} com o momento fletor M e a força cortante V , respectivamente. Estes fatores são descritos nas Equações (3.4) e (3.5).

$$M = k \frac{\bar{P} \omega}{2}, \quad (3.4)$$

$$V = k' \frac{\bar{P} t}{c}. \quad (3.5)$$

Quando a carga é muito pequena, não há rotações da junta e os fatores k e k' são iguais a um. Com o aumento da carga, k e k' decrescem, conseqüentemente a força transversal e o momento fletor também decrescem.

A expressão para a tensão de cisalhamento $\tau_{(x)}$, segundo Goland e Reissner (1994), é dada por:

$$\tau_{(x)} = -\frac{\bar{P}}{8c} \cdot \left\{ \frac{\beta c}{t} (1 + 3k) \frac{\cosh\left(\frac{\beta c x}{t c}\right)}{\sinh\left(\frac{\beta c}{t}\right)} + 3(1 - k) \right\}, \quad (3.6)$$

onde, \bar{P} é a carga aplicada por unidade de largura, c é a metade do comprimento da zona colada, t é a espessura do aderente e ν é o coeficiente de Poisson do aderente. O fator de momento fletor k é dado por:

$$k = \frac{\cosh(u_2 c)}{\cosh(u_2 c) + 2\sqrt{2} \sinh(u_2 c)}, \quad (3.7)$$

onde:

$$u_2 = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{3(1 - \nu^2) \bar{P}}{2 t E}}, \quad (3.8)$$

$$\beta^2 = 8 \frac{G_a t}{E t_a}. \quad (3.9)$$

A expressão para a tensão normal $\sigma_{(x)}$ é dada por:

$$\sigma_{(x)} = \frac{1 \bar{P} t}{\Delta 8c} \left[\left(\frac{R_2 \lambda^2 k}{2} + \lambda k' \cosh(\lambda) \cos(\lambda) \right) \cosh\left(\frac{\lambda x}{c}\right) \cos\left(\frac{\lambda x}{c}\right) + \left(\frac{R_1 \lambda^2 k}{2} + \lambda k' \sinh(\lambda) \sin(\lambda) \right) \sinh\left(\frac{\lambda x}{c}\right) \sin\left(\frac{\lambda x}{c}\right) \right], \quad (3.10)$$

onde:

$$k' = \frac{kc}{t} \sqrt{3(1 - \nu^2) \frac{\bar{P}}{tE}}, \quad (3.11)$$

$$\lambda = \gamma \frac{c}{t}, \quad (3.12)$$

$$\gamma^4 = 6 \frac{G_a t}{E t_a}, \quad (3.13)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(\sinh(2\lambda) + \sin(2\lambda)), \quad (3.14)$$

$$R_1 = \cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \sinh(\lambda) \cos(\lambda), \quad (3.15)$$

$$R_2 = -\cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \sinh(\lambda) \cos(\lambda), \quad (3.16)$$

Um típico resultado para a distribuição de tensões normais e de cisalhamento de acordo com as equações fornecidas pelo modelo pode ser observado na Figura 3.4.

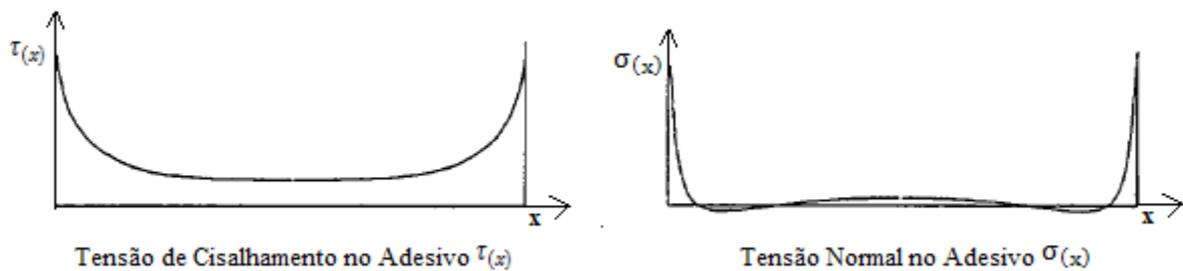


Figura 3.4 - Comportamento das tensões no adesivo segundo (Goland e Reissner, 1944).

Comparando o modelo de Volkersen (1938) com o modelo Goland e Reissner (1944), pode-se notar que em ambos as tensões máximas encontram-se na extremidade da área colada, porém no modelo de Goland e Reissner (1944) esses valores tendem a ser maiores. O fato é observado na Figura 3.5.

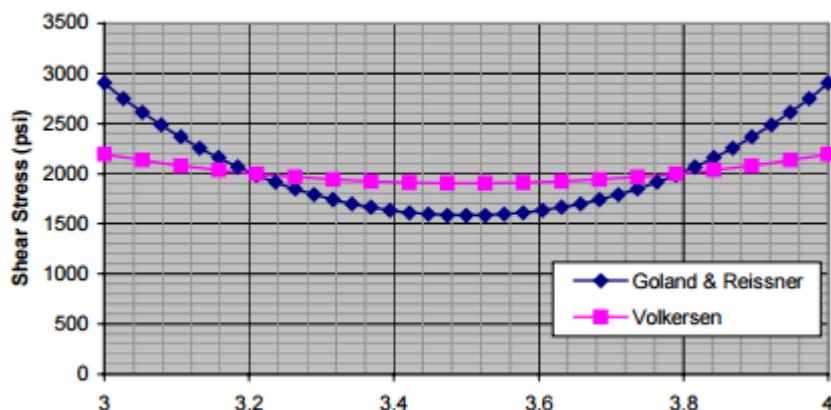


Figura 3.5 - Comparação da distribuição de tensão entre os modelos de Goland & Reissner e Volkersen para uma carga de 2000 lbf. (Ficarra, 2001)

3.1.3 Hart-Smith

Hart-Smith (1973a,b) foi um dos primeiros a considerar a não-linearidade do material. Ele considerou a plasticidade do adesivo tanto para juntas coladas de sobreposição simples (SLJ), (Hart-Smith, 1973b), quanto para juntas coladas de superposição dupla (DLJ), (Hart-Smith, 1973a). No modelo elastoplástico é assumido que o adesivo é plástico em pequenas regiões nas extremidades. A tensão normal foi considerada como sendo puramente elástica e o cisalhamento como sendo elástico e elasto-perfeitamente plástico. O modelo elastoplástico foi traçado tal que a tensão e a deformação última são equivalentes à tensão e deformação última do adesivo, sendo que nos dois casos a energia de deformação é igual, como representa a Figura 3.6.

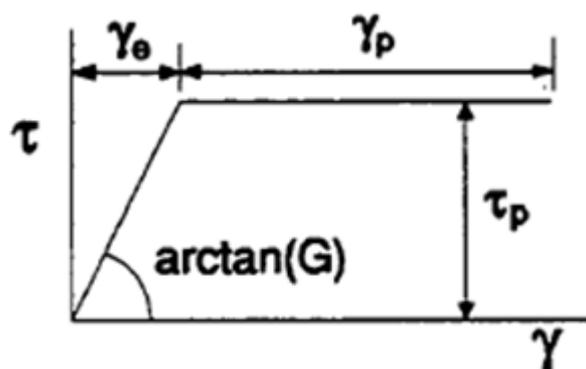


Figura 3.6 - Modelo proposto por (Hart-Smith,1973ab).

De acordo com Hart-Smith (1973b), a tensão de cisalhamento elástica $\tau_{(x)}$ em uma SLJ é dada por:

$$\tau_{(x)} = A_2 \cosh(2\lambda'x) + C_2, \quad (3.17)$$

onde:

$$\lambda' = \sqrt{\left[\frac{1 + 3(1 - \nu^2)}{4} \right] \frac{2G_a}{t_a E t'}} \quad (3.18)$$

$$A_2 = \frac{G_a}{t_a E t} \left[\bar{P} + \frac{6(1 - \nu^2)M}{t} \right] \frac{1}{2\lambda' \sinh(2\lambda'c)}, \quad (3.19)$$

$$C_2 = \frac{1}{2c} \left[\bar{P} - \frac{A_2}{\lambda'} \sinh(2\lambda'c) \right], \quad (3.20)$$

$$M = \bar{P} \left(\frac{t + t_a}{2} \right) \frac{1}{1 + \xi c + \left(\frac{\xi^2 c^2}{6} \right)}, \quad (3.21)$$

$$\xi^2 = \frac{\bar{P}}{D}, \quad (3.22)$$

D é a rigidez à flexão dos aderentes e é dada pela Eq. (3.23).

$$D = \frac{E t^3}{(1 - \nu^2)}. \quad (3.23)$$

A tensão normal $\sigma_{(x)}$ no adesivo é definida por:

$$\sigma_{(x)} = A \cosh(\chi x) \cos(\chi x) + B \sinh(\chi x) \sin(\chi x), \quad (3.24)$$

onde:

$$\chi^4 = \frac{E_a}{2Dt_a}, \quad (3.25)$$

$$A = - \frac{E_a M [\sin(\chi c) - \cos(\chi c)]}{t_a D \chi^2 e^{(\chi c)}}, \quad (3.26)$$

$$B = \frac{E_a M [\sin(\chi c) - \cos(\chi c)]}{t_a D \chi^2 e^{(\chi c)}}. \quad (3.27)$$

Segundo o modelo de Hart-Smith (1973ab), o adesivo é dividido em três regiões: uma central, que é considerada elástica de comprimento d e duas externas, que são consideradas plásticas, como mostra a Figura 3.7.

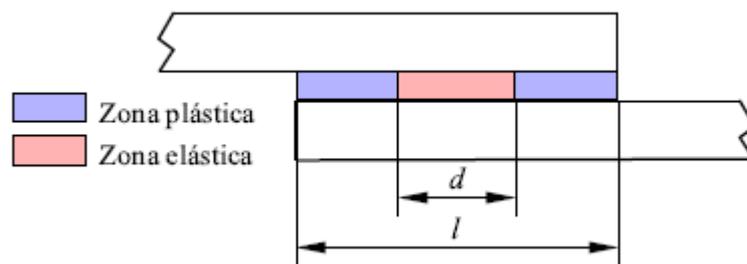


Figura 3.7 - Regiões elásticas e plásticas consideradas pela análise de Hart-Smith. (Quispe Rodríguez, 2011).

O problema é resolvido na região elástica em termos da tensão de cisalhamento, de acordo com a expressão dada por:

$$\tau_{(x)} = A_2 \cosh(2\lambda'x) + \tau_p(1 - K), \quad (3.28)$$

$$A_2 = \frac{K\tau_p}{\cosh(\lambda'd)}. \quad (3.29)$$

A deformação de cisalhamento é dada por:

$$\gamma_{(x')} = \gamma_e \{1 + 2K [(\lambda'x')^2 + \lambda'x' \tanh(\lambda'd)]\}, \quad (3.30)$$

onde τ_p é o limite de escoamento por cisalhamento do adesivo. Os valores de K e d são obtidos por iteração usando as seguintes equações:

$$\frac{\bar{P}}{l\tau_p}(\lambda'l) = 2\lambda' \left(\frac{l-d}{2}\right) + (1-K)(\lambda'd) + K \tanh(\lambda'd), \quad (3.31)$$

$$\left[1 + 3k(1 - \nu^2) \left(1 + \frac{t_a}{t}\right)\right] \frac{\bar{P}}{\tau_p} \lambda^2 \left(\frac{l-d}{2}\right) = \frac{\gamma_p}{\gamma_e} + K \left[2\lambda' \left(\frac{l-d}{2}\right)\right]^2, \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\gamma_p}{\gamma_e}\right) = \left\{ \left[2\lambda' \left(\frac{l-d}{2}\right) + \tanh(\lambda'd)\right] - \tanh^2(\lambda'd) \right\}, \quad (3.33)$$

onde γ_e e γ_p são as deformações elásticas e plásticas do adesivo respectivamente.

A análise da tensão normal é baseada no modelo de Goland e Reissner (1944), sendo assumida unicamente elástica por duas razões:

- Para aderentes compósitos, o aderente é pouco resistente a tensões transversais do que o adesivo em *peel*; Os adesivos são longas cadeias poliméricas e essencialmente incompressíveis. A Figura 3.8 representa a distribuição de tensões no adesivo segundo Hart-Smith.

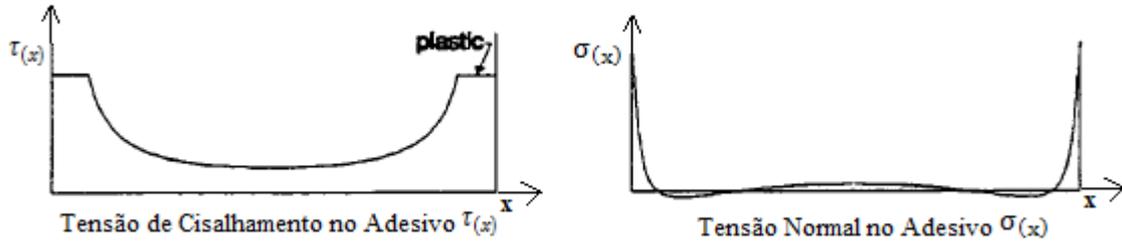


Figura 3.8 – Distribuição de tensões de acordo o modelo de (Hart-Smith, 1973a).

3.1.4 Ojalvo & Eidinoff

Esse modelo foi o primeiro a prever a variação da tensão cisalhante através da espessura do adesivo. Para isso, foi necessária a modificação de alguns coeficientes na formulação da tensão presente no modelo de Goland e Reissner (1944) e adicionando novos termos na equação diferencial e novas condições de contorno para formulação da tensão normal. A distribuição de tensões por cisalhamento adimensional encontrada por Ojalvo e Eidinoff (1978) é dada por:

$$\tau^* = A \cosh\left(\lambda\sqrt{2 + 6(1 + \beta)^2} x^*\right) + B, \quad (3.34)$$

onde:

$$A = \frac{2\lambda (1 + 3(1 + \beta)^2 k)}{\sqrt{2 + 6(1 + \beta)^2} \sinh(\lambda\sqrt{2 + 6(1 + \beta)^2} x^*)}, \quad (3.35)$$

$$B = 1 - \frac{A \sinh(\lambda\sqrt{2 + 6(1 + \beta)^2})}{(\lambda\sqrt{2 + 6(1 + \beta)^2})}, \quad (3.36)$$

$$\lambda^2 = \frac{G_a c^2}{E^* t h'}, \quad (3.37)$$

$$\beta = \frac{h}{t}, \quad (3.38)$$

onde $E^* = E$ para aderentes no estado plano de tensões e $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ para aderentes no estado plano de deformação, h é a espessura do adesivo, e k é o fator de momento fletor obtido do modelo de Hart - Smith (1973b). A máxima distribuição de esforços por cisalhamento adimensional é encontrada na interface adesivo/aderente e é equivalente a:

$$\tau^{**} = \tau^* \pm \Delta\tau^*, \quad (3.39)$$

onde:

$$\Delta\tau^* = \frac{G_a h}{2E_a} \sigma^{*'}, \quad (3.40)$$

A distribuição de tensões normais adimensional σ^* é descrita por:

$$\sigma^* = C \sinh(\alpha_1 x^*) \sin(\alpha_2 x^*) + D \cosh(\alpha_1 x^*) \cos(\alpha_2 x^*), \quad (3.41)$$

onde:

$$\alpha_1^2 = \frac{3\beta\lambda^2}{2} + \frac{\rho}{2}, \quad (3.42)$$

$$\alpha_2^2 = -\frac{3\beta\lambda^2}{2} + \frac{\rho}{2}, \quad (3.43)$$

$$\rho^2 = -\frac{24E_a c^4}{E^* h t^3}. \quad (3.44)$$

As variáveis C e D são obtidas mediante substituição das derivadas da Equação (3.41) nas Equações (3.45) e (3.46):

$$\sigma^{*'''}(\pm 1) - 6\beta\lambda^2\sigma^{*'}(\pm 1) = \mp k \frac{t}{2c} \rho^2(1 + \beta), \quad (3.45)$$

$$\sigma^{*''}(\pm 1) = k \frac{t}{2c} \rho^2(1 + \beta), \quad (3.46)$$

Toda análise é feita adimensionalmente, considerando as expressões dadas por:

$$\tau^* = \frac{\tau}{\bar{\tau}} \quad (3.47)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}}, \quad (3.48)$$

$$x^* = \frac{x}{c}, \quad (3.49)$$

onde:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{P}}{2c}. \quad (3.50)$$

3.2 CRITÉRIOS DE FALHA

3.2.1 Máximo valor de tensão ou deformação

Este critério de falha é considerado como a maior e mais intuitiva categoria de falha em juntas coladas. Este critério assume que a junta falhará quando atingir um valor crítico de tensão ou deformação em qualquer ponto da junta.

No modelo de Volkersen (1938), o adesivo era assumido com deformação somente no cisalhamento, portanto é lógico considerar a máxima tensão como critério de falha. Este princípio também foi usado por Greenwood et al. (1969), usando o modelo analítico desenvolvido por Goland e Reissner (1944). A tensão de falha prevista por Greenwood et al. (1969) superestima a falha experimental em 14%.

Segundo esse modelo a distribuição de tensões, tanto de cisalhamento quanto normais, tem valor máximo nas extremidades da área colada. A carga aplicada que gere tensão igual à máxima permitível nas bordas do adesivo será denominada carga de falha. Esse processo pode ser observado na Figura 3.9.

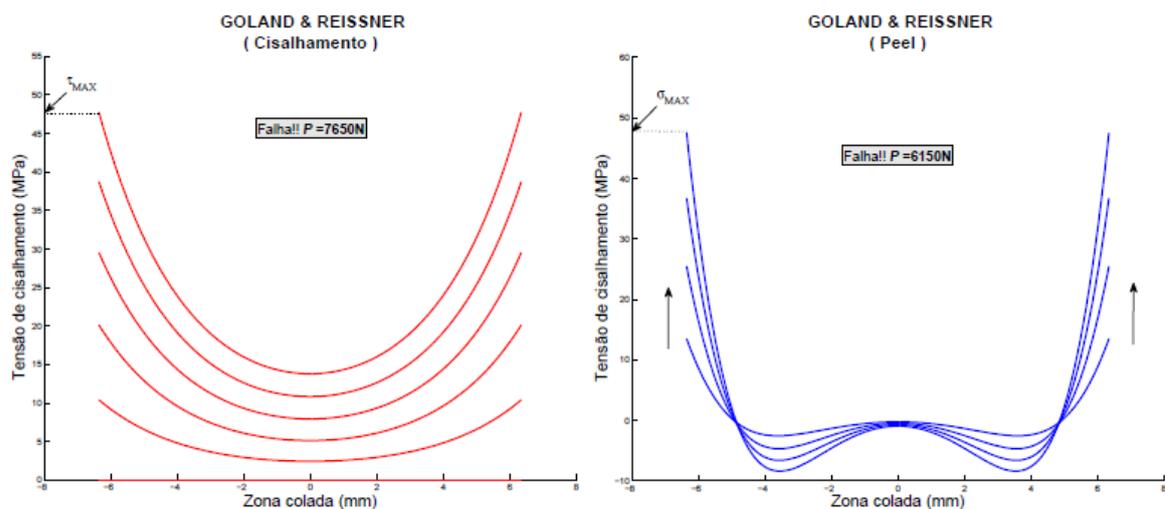


Figura 3.9 - Processo para achar a carga máxima de falha por cisalhamento e por tensões normais. (Quispe Rodríguez, 2011).

3.2.2 Tensão ou deformação a uma distância ou sobre uma zona

Uma maneira de contornar os problemas associados com o critério de valor máximo é a utilização de um valor máximo de tensão/deformação a uma determinada distância a partir da singularidade, ou um valor crítico de tensão/deformação calculados sobre uma dada região. Sendo utilizado pela maioria dos critérios de falha que utilizam uma análise de elementos finitos. A tensão/deformação ou é encontrada a uma certa distância fixa de uma singularidade, ou utilizando algum valor médio (um valor de linha de centro do adesivo). O valor máximo determinado por uma solução fechada não será singular, representando um valor médio.

Tal critério foi utilizado pela primeira vez no campo de materiais compósitos por Witney et al. (1974) para lidar com o efeito de concentrações de tensão nesses materiais. A abordagem tem sido desenvolvida desde então e funciona bem ao longo de um intervalo limitado de dados.

Zhao (1991) usou um critério baseado na máxima tensão média ponderada, onde a espessura do adesivo é a distância sobre a qual é calculada a média de tensões e logo comparada com a tensão de escoamento do adesivo. Charalambides et al. (1997) mostrou mais tarde para DLJs, que a tensão máxima está localizada fora da zona analisada por Zhao (1991).

Clarke e Mcgregor (1993) estabeleceram que para a falha ocorrer, a tensão máxima principal deve exceder a tensão máxima uniaxial do adesivo numa zona infinita. Mais tarde, Charalambides et al. (1997) descobriram que tais predições sobrestimavam as cargas experimentais em, aproximadamente, 68% para DLJs com zonas coladas comprimidas.

A deformação crítica numa distância foi utilizada Towse et al. (1997a) em DLJs. Eles usaram uma análise não-linear incluindo tensões residuais térmicas na sua formulação. Foi demonstrado que a junta falha quando a deformação mais próxima da singularidade atinge a deformação máxima permissível do adesivo.

A maior desvantagem desta abordagem é a falta de qualquer significado físico para os parâmetros críticos. Além disso, outra desvantagem é que não foi estabelecido se estes parâmetros são propriedades materiais únicas, ou se podem variar com a espessura de adesivo, tipo de carregamento e etc. Esse critério não pode ser aplicado a juntas que não possuam os mesmos aderentes e adesivos caracterizados previamente.

3.2.3 Critério da zona ou estado limite

Esse critério foi desenvolvido por Crocombe (1989), sendo também conhecido como critério do escoamento global. Crocombe (1989) validou o seu critério mediante três estudos independentes. No primeiro, ele estudou a junta colada de sobreposição simples (SLJ), demonstrando por que a força da junta aumenta quando a espessura do adesivo diminui. Na segunda, ele analisou a falha em juntas por sobreposição dupla (DLJ). Por último, foi realizado um estudo em ambas as juntas sob cargas compressivas.

Esse critério é baseado no fato de que, na maioria dos adesivos, a curva tensão-deformação é assintótica para certo valor de tensão, atingindo um nível de deformação acima do qual a junta não resistiria com mais um incremento de carga. Se todo adesivo atingir este nível de deformação antes da ruptura local, será definido este como um limite da carga que a junta poderá resistir.

Quando aplicado ao modelo elastoplástico de Hart-Smith, que divide o adesivo em três regiões: uma central que é elástica de comprimento d e duas regiões externas, será definido a falha da junta quando o estado de escoamento global seja atingindo no adesivo, ou seja, quando cada ponto ao longo da zona colada tenha escoado (plastificado).

Sabendo que a zona plástica aumenta com o incremento de carga, quando o adesivo plastifica totalmente, a junta atinge um nível acima do qual não resistirá a mais um incremento significativo de carga.

A formulação proposta por Hart-Smith (1973b) é complexa e precisa de um processo iterativo para poder achar completamente a distribuição de tensões. Porém, com a realização de algumas simplificações, é possível achar a carga de falha. Este processo de simplificação é mostrado como segue:

Reescrevendo a Equação (3.31), descrita na seção 3.1.3:

$$\frac{\bar{P}}{l\tau_p}(\lambda'l) = 2\lambda' \left(\frac{l-d}{2} \right) + (1-K)(\lambda'd) + K \tanh(\lambda'd). \quad (3.51)$$

Fazendo $d = 0$, (Estado de escoamento global, o adesivo plastificou totalmente):

$$\bar{P} = \frac{P}{b} = l\tau_p, \quad (3.52)$$

Portanto, a carga de falha dependerá somente do limite de escoamento por cisalhamento τ_p , do comprimento l e da largura de junta b . Sendo assim:

$$P_{FALHA} = bl\tau_p. \quad (3.53)$$

3.2.4 Critério do envelope de falha energético

Considerando uma estrutura do tipo “sanduíche” (aderente-adesivo-aderente), sujeito a uma combinação de força nos extremos, como visto da Figura 3.10 (a), para uma combinação do tipo SLJ e na Figura 3.10 (b), para uma configuração do tipo *lap-shear*. Para um elemento infinitesimal, Figura 3.11, têm as seguintes equações fundamentais:

Para os aderentes 1 e 2, as equações são:

$$\frac{dN_i}{dx} + \tau = 0; \quad \frac{dQ_i}{dx} + \sigma = 0; \quad \frac{dM_i}{dx} + Q_i + \frac{t_i}{2}\tau = 0, \quad (i = 1,2), \quad (3.54)$$

onde N_i, M_i, Q_i ($i = 1, 2$) são as forças longitudinais, momentos fletores e forças transversais por unidade de largura dos dois aderentes, respectivamente. As forças longitudinais e os momentos fletores podem ser expressos em função dos deslocamentos longitudinais u_i na direção x e dos deslocamentos longitudinais w_i na direção z da seguinte forma:

$$N_i = A_i \frac{du_i}{dx}; \quad M_i = -D_i \frac{d^2 w_i}{dx^2}, \quad (i = 1, 2), \quad (3.55)$$

onde $A_i = E_i t_i$ e $D_i = E_i t_i^3 / 12$ ($i = 1, 2$) são a rigidez à flexão dos aderentes.

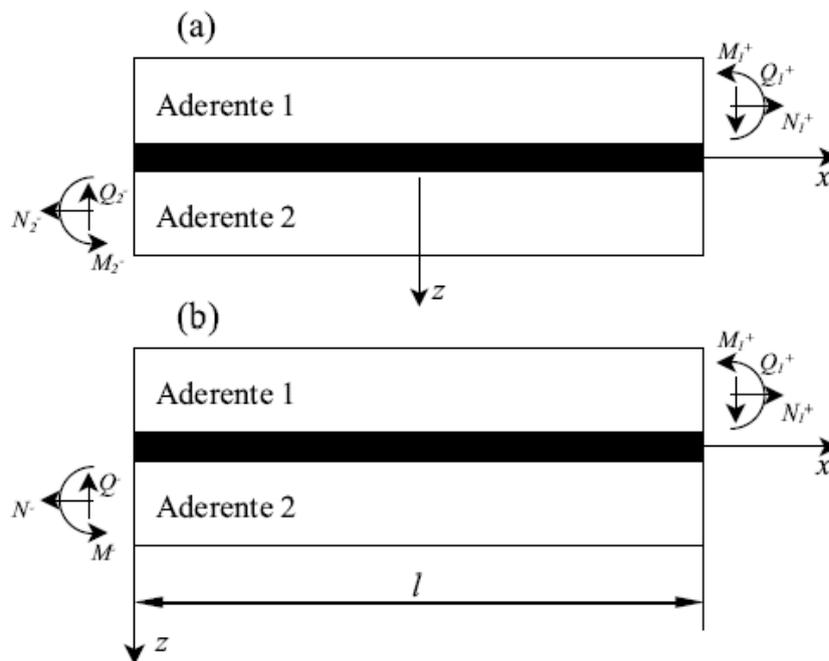


Figura 3.10 - (a). Forças resultantes nos extremos da zona colada para uma SLJ. (b) Forças Resultantes atuando nos extremos da zona colada para uma junta tipo lap-shear. (Quispe Rodríguez, 2011).

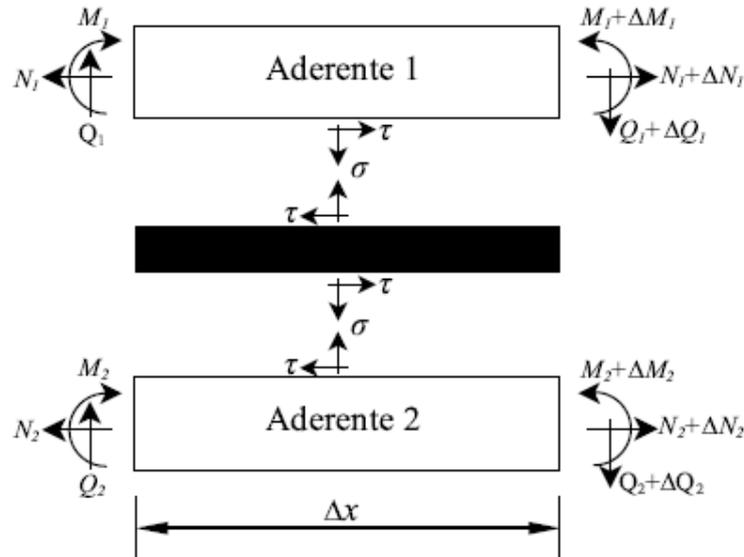


Figura 3.11 - Equilíbrio de forças para um elemento infinitesimal da junta. (Quispe Rodríguez, 2011).

No adesivo, a tensão normal σ e a tensão de cisalhamento τ são iguais a:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon); \quad \tau = \tau(\gamma), \quad (3.56)$$

onde $\sigma(\varepsilon)$ e $\tau(\gamma)$ são funções arbitrárias de ε e γ , respectivamente. As deformações tanto para tensões de cisalhamento quanto para tensões normais são consideradas constantes ao longo da espessura. Segundo Carpenter (1991), Goland e Reissner (1994) podem ser definidas como:

$$\varepsilon = \frac{w_2 - w_1}{t}; \quad \gamma = \frac{u_2 - u_1}{t} + \frac{1}{2t} \left(t_1 \frac{dw_1}{dx} + t_2 \frac{dw_2}{dx} \right). \quad (3.57)$$

Esse conjunto de equações não permite soluções analíticas simples devido à presença da não linearidade do material do adesivo. Porém, a força da junta pode ser prevista usando o método da densidade de energia de deformação (Tong, 1998). Nesse método, a densidade de energia, tanto de cisalhamento quanto normal, são calculadas sem determinar completamente as tensões no adesivo.

Sabe-se que a densidade de deformação por cisalhamento é a área abaixo da curva tensão-deformação num ensaio de cisalhamento. A taxa de deformação de energia por cisalhamento (U_{II}) é definida como produto da espessura do adesivo pela densidade de energia de deformação por

cisalhamento do mesmo. Em casos que a densidade de energia de deformação não for constante ao longo do adesivo, a taxa de deformação de energia pode ser determinada como a integral da densidade de energia de deformação ao longo da espessura do adesivo (Chai, 1993 apud Tong, 1998).

$$U_{II} = t \int_0^{\gamma} \tau(\gamma) d\gamma. \quad (3.58)$$

Usando das Equações ((3.54) - (3.58)), pode ser desenvolvida uma fórmula para a taxa de deformação em cisalhamento:

$$U_{II} = \frac{A_1 A_2}{8(A_1 + A_2)} \left\{ \left[\frac{N_2}{A_2} - \frac{N_1}{A_1} - \frac{t_2 M_2}{2 D_2} - \frac{t_1 M_1}{2 D_1} \right]^2 \right\} \\ + \frac{A_1 A_2}{8(A_1 + A_2)} \left\{ t \left(\frac{t_1}{D_1} \int_0^{\gamma} Q_1 d\gamma + \frac{t_2}{D_2} \int_0^{\gamma} Q_2 d\gamma \right) \right\}. \quad (3.59)$$

De acordo com Tong (1998), a contribuição das forças transversais e da deformação por cisalhamento do adesivo na taxa de deformação por cisalhamento pode ser desprezada. Assim, temos:

$$U_{II} = \frac{A_1 A_2}{8(A_1 + A_2)} \left[\frac{N_2}{A_2} - \frac{N_1}{A_1} - \frac{t_2 M_2}{2 D_2} - \frac{t_1 M_1}{2 D_1} \right]^2. \quad (3.60)$$

A densidade de energia de deformação por cisalhamento é dada por:

$$u_{II} = \frac{U_{II}}{t}. \quad (3.61)$$

Para a taxa de energia de deformação por tensões normais, a energia de deformação também está definida como a área abaixo da curva tensão – deformação, nesse caso, em um ensaio de descolamento. Utilizando um processo análogo ao caso do cisalhamento, tem-se uma taxa, segundo Tong (1998), igual a:

$$\begin{aligned}
U_I = & \frac{D_1 D_2}{2(D_1 + D_2)} \left(\frac{M_1}{D_1} - \frac{M_2}{D_2} \right)^2 \\
& - \frac{(t_1 D_2 - t_2 D_1) t}{2(D_1 + D_2)(t_1 + t_2)} \left[\frac{M_1^2}{D_1} + 2 \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right) M_1 M_2 - \frac{M_2^2}{D_2} \right] \\
& + \frac{(t_1 D_2 - t_2 D_1)}{(D_1 + D_2)(t_1 + t_2)} \left(\frac{1}{D_2} \int_0^{M_1} M_2 dM_1 + \frac{1}{D_1} \int_0^{M_2} M_1 dM_2 \right).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

A densidade de energia de deformação por cisalhamento é dada por:

$$u_I = \frac{U_I}{t}. \tag{3.63}$$

Para uma deformação específica de cisalhamento e da tensão normal, a taxa de energia de deformação pode ser definida:

$$U(\psi) = U_I + U_{II}. \tag{3.64}$$

onde ψ é a razão da energia de deformação definida por:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{U_{II}}{U_I}} \right). \tag{3.65}$$

Nesse critério, ocorrerá a falha quando a taxa de deformação atingir um valor máximo U_C para a combinação de cisalhamento e descolamento.

$$U(\psi) = U_c(\psi), \tag{3.66}$$

onde $U_c(\psi)$ é o envelope de falha, definido como a taxa de energia de deformação crítica para uma combinação de cisalhamento e descolamento.

Deseja-se medir o envelope “*in situ*” para uma combinação aderente-adesivo determinada. No entanto, tal medição “*in situ*” requer um grande esforço, e aplicável a uma combinação única, o que pode ser caro. Por esta razão, define-se o seguinte critério de falha:

$$\left(\frac{U_{II}}{U_{IIC}}\right)^\alpha + \left(\frac{U_I}{U_{IC}}\right)^\beta = 1. \quad (3.67)$$

Tong (1998) definiu dois critérios de falha simples. O primeiro um critério de falha do envelope linear $\alpha = \beta = 1$, que pode ser observado na Equação (3.68). O segundo, um critério de falha para um envelope quadrático $\alpha = \beta = 2$, que pode ser observado na Equação (3.69).

$$\left(\frac{U_{II}}{U_{IIC}}\right)^1 + \left(\frac{U_I}{U_{IC}}\right)^1 = 1. \quad (3.68)$$

$$\left(\frac{U_{II}}{U_{IIC}}\right)^2 + \left(\frac{U_I}{U_{IC}}\right)^2 = 1. \quad (3.69)$$

3.2.5 Critério da máxima densidade de energia de deformação

Proposto por Beltrami (1885), segundo este critério, a falha está prevista a acontecer num estado multiaxial de tensões quando a energia de deformação total por unidade de volume torna-se igual a energia de deformação total por unidade de volume no momento da falha em um ensaio simples uniaxial de tensão, usando um espécime do mesmo material.

Considerando um estado multiaxial de tensões, sabe-se que a densidade de energia de deformação equivale a:

$$u_T = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (3.70)$$

onde σ_{ij} e ε_{ij} são as tensões e deformações no plano ij , respectivamente.

Considerando um estado triaxial de tensões e um comportamento puramente elástico e um comportamento puramente elástico, tem-se:

$$u_T = \frac{1}{2} [\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3]. \quad (3.71)$$

Aplicando a Lei de Hooke para o estado triaxial:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (3.72)$$

Substituindo na equação (2.72):

$$u_T = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3)]. \quad (3.73)$$

Para um ensaio uniaxial de tensão, a única tensão existente é, ao momento da falha, igual a σ_f . O valor da densidade de energia de deformação para esse estado é igual a:

$$u_{Tf} = \frac{1}{2E} [\sigma_f^2]. \quad (3.74)$$

Segundo Beltrami (1885), a falha ocorrerá quando a densidade de energia de deformação total atingir ou exceder a densidade de energia de deformação de um ensaio uniaxial.

$$u_T \geq u_{Tf}, \quad (3.75)$$

$$[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3)] \geq \sigma_f^2. \quad (3.76)$$

A Equação (3.76) representa um elipsoide, onde a região interna caracteriza a região livre de falha, enquanto a externa representa a de falha.

Considerando somente as tensões de cisalhamento e normais no adesivo, pode ser rescrita a densidade de deformação como:

$$u_T = u_I + u_{II}. \quad (3.77)$$

4. COLAGEM SOB CARREGAMENTO CÍCLICO

Esse capítulo teve como principal referência a tese feita por Souza (2012). Nele será apresentado um resumo sobre a Mecânica da Fratura e fadiga, mostrando conceitos necessários para melhor compreensão dos modelos analíticos de juntas coladas sob carregamentos cíclicos.

Baseados em expressões simples para a taxa de liberação de energia no adesivo, determinadas pela teoria de viga a *Double Cantilever Beam (DCB)* é analisada em modo I e modo II. Em seguida, é mostrado um modelo misto para *Lap Joint*.

4.1 MECÂNICA DA FRATURA

O objetivo da Mecânica da Fratura é o de determinar se um defeito tipo trinca irá ou não levar o componente a fratura catastrófica para tensões normais de serviço, permitindo, ainda, determinar o grau de segurança efetivo de um componente trincado. O grande mérito da mecânica da fratura é a de possibilitar ao projetista valores quantitativos de tenacidade do material permitindo projetos que aliem segurança e viabilidade econômica. A mecânica da fratura quando aplicada à fadiga e à corrosão sob tensão permite a operação segura de componentes com defeitos prévios e/ou trincas nucleadas em serviço.

Desde de 1960, teorias sobre Mecânica da Fratura têm sido desenvolvidas para considerar vários tipos de comportamentos não-lineares do material (ou seja, plasticidade e viscoplasticidade), assim como efeitos dinâmicos.

Quando um sólido é fraturado, novas superfícies são criadas no meio de uma maneira termodinamicamente irreversível. A separação do material é causada pela ruptura das ligações atômicas devido a altas tensões locais. O fenômeno da fratura pode ser abordado de diferentes pontos de vista, dependendo da escala de observação. Nesse trabalho, a abordagem utilizada será a do contínuo usando as teorias da Mecânica do Contínuo e da Termodinâmica Clássica.

4.1.1 Balanço de energia durante a propagação da trinca

Considerando uma trinca com uma área A em um meio contínuo deformável sujeito a um carregamento arbitrário. De acordo com a Lei da Conservação da Energia pode-se escrever:

$$\dot{W} = \dot{E} + \dot{K} + \dot{\Gamma}, \quad (4.1)$$

onde \dot{W} é o trabalho realizado pelas cargas aplicadas por unidade de tempo, \dot{E} e \dot{K} são as taxas de variação de energia interna e da energia cinética do corpo e $\dot{\Gamma}$ é a energia por unidade de tempo gasta no aumento da área da trinca.

A energia interna pode ser escrita na forma:

$$E = U^e + U^p, \quad (4.2)$$

onde U^e representa a energia de deformação elástica e U^p o trabalho plástico. Se as cargas aplicadas independem do tempo e a trinca cresce lentamente, o termo cinético pode ser desprezado da Equação (4.1). Assim, pode-se estabelecer:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial}{\partial A} = \dot{A} \frac{\partial}{\partial A}, \dot{A} \geq 0, \quad (4.3)$$

e a Equação (4.1) se torna:

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \left(\frac{\partial U^e}{\partial A} + \frac{\partial U^p}{\partial A} \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial A}. \quad (4.4)$$

A Equação ((4.4) representa o balanço de energia durante o crescimento da trinca. Indicando o trabalho fornecido ao contínuo pelas cargas aplicadas é igual à taxa de energia de deformação elástica, mais o trabalho de deformação plástica, mais a energia dissipada na propagação da trinca. A Equação ((4.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \left(\frac{\partial U^p}{\partial A} + \frac{\partial \Gamma}{\partial A} \right), \quad (4.5)$$

onde:

$$\Pi = U^e - W. \quad (4.6)$$

4.1.2 Teoria de Griffith

Segundo Griffith, em materiais idealmente frágeis a trinca se propagaria de maneira instável se a energia de deformação liberada quando a trinca avançasse de um comprimento infinitesimal fosse maior que energia requerida para formar uma nova superfície de trinca, isto é, a energia necessária para romper a coesão entre os átomos à frente da trinca. Considerando uma placa infinita, como na Figura 4.1, com comprimento de trinca $2a$ e sujeita a uma tensão uniforme aplicada no infinito, o balanço energético de Griffith para um incremento de área de trinca ∂A , sob condições de equilíbrio pode ser expresso como na Equação (4.5).

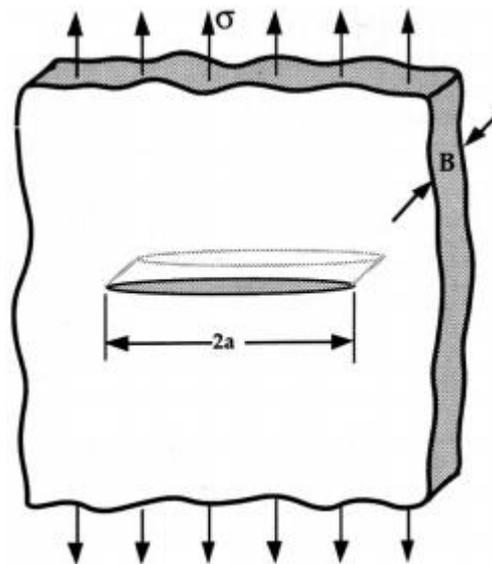


Figura 4.1 - Modelo Utilizado por Griffith. (Souza, 2012).

Usando a análise desenvolvida por Inglis (1913), Griffith mostrou que:

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E}, \quad (4.7)$$

onde Π_0 é a energia potencial total de uma placa sem trinca e B espessura da placa. Sabe-se que Γ é igual ao produto da energia elástica de superfície do material, γ_s , e a nova superfície de área da trinca:

$$\Gamma = 2(2aB\gamma_S). \quad (4.8)$$

Substituindo as Equações (4.8) e (4.7) em (4.5), obtêm-se a tensão de fratura:

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_S}{\pi a} \right)^{1/2}. \quad (4.9)$$

A equação anterior é válida somente para materiais idealmente frágeis. Griffith obteve bons resultados trabalhando com vidros. Porém, a equação subestima a tensão de fratura dos materiais estruturais comuns.

4.1.3 Análise de tensões nas trincas

Primeiro é conveniente definir os três tipos de movimentos relativos das duas superfícies das trincas, que são mostrados na Figura 4.2. No modo I, um carregamento principal é aplicado perpendicular ao plano da trinca, tendendo a abrir a trinca. O modo II corresponde a um carregamento de cisalhamento no plano da trinca e tende a deslizar uma face da trinca com relação a outra. Por fim, o modo III se refere a um carregamento de cisalhamento fora do plano. Um corpo trincado pode ser carregado em qualquer um desses modos, ou em uma combinação de dois ou três modos. Nas aplicações práticas, o modo I é o mais importante, pois corresponde ao modo de fraturamento da maioria das peças trincadas.

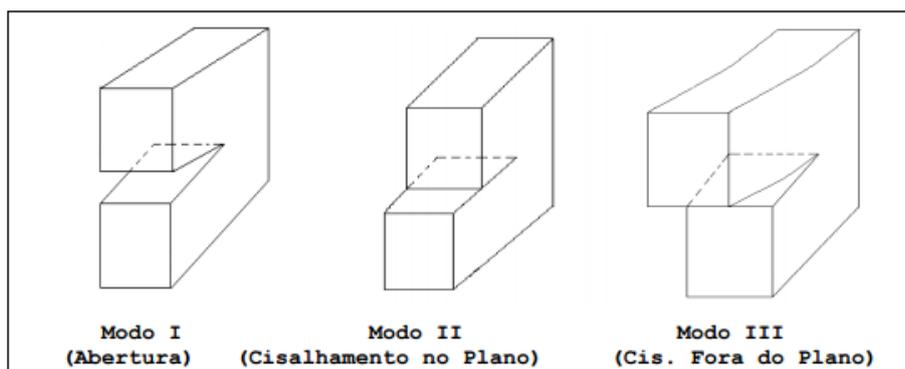


Figura 4.2 - Modos de deslocamento da ponta da trinca. (Pastoukhov, 1995)

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) a trinca pode ser caracterizada (mensurada) em termos de um parâmetro simples, K , chamado fator de intensidade de tensões, introduzido em 1957 por Irwin (1957) e Williams (1957) para quantificar o campo de tensões em torno de uma trinca numa peça

predominantemente elástica. Os trabalhos foram independentes, mas chegaram no mesmo resultado. Cada modo está associado a um fator de intensidade de tensões. O valor crítico de K_I é K_{IC} que se trata de uma propriedade do material e é chamado de tenacidade à fratura.

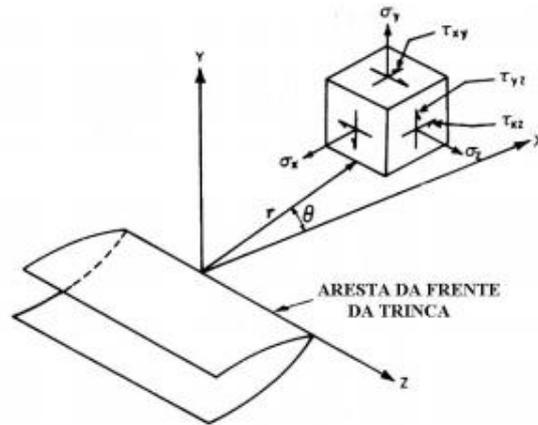


Figura 4.3 - Coordenadas na frente da trinca. (Pastoukhov, 1995)

Se definirmos um eixo de coordenadas polares com a origem na frente da trinca, como mostra a Figura 4.3, o campo de tensões em um material elástico trincado pode ser dado pela expressão (Anderson, 1995):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}}\right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta), \quad (4.10)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, r e θ são definidos na Figura 4.3, k é uma constante relacionada ao fator de intensidade de tensões $K = k\sqrt{\pi a}$ e f_{ij} uma função de θ . Assim, para os modos I, II, III o campo de tensões na ponta de uma trinca para um material isotrópico é dado, respectivamente, por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta), \quad (4.11)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta), \quad (4.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta). \quad (4.13)$$

4.1.4 A integral J

Em algumas situações é impossível caracterizar o comportamento de uma fratura pela MFLE, nesses casos aplica-se a Mecânica da Fratura Elastoplástica. Os dois parâmetros elastoplásticos mais usados são o *crack tip opening displacement* (CTOD) e a integral J.

Introduzida por Rice (1968), a integral J é uma integral de linha em torno da ponta da trinca, invariante para qualquer percurso utilizando desde que se inicie na face inferior e termine na face superior da trinca, como mostra a Figura 4.4.

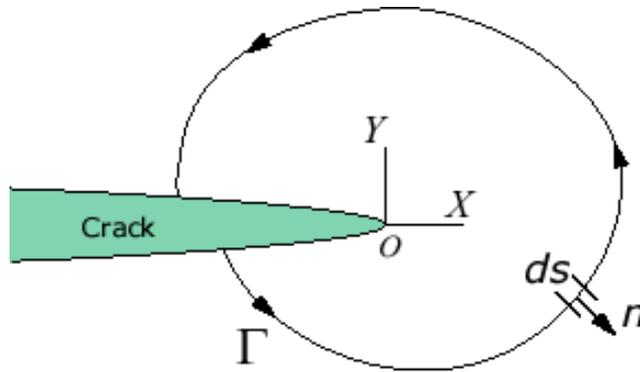


Figura 4.4 - Contorno arbitrário em torno da ponta de uma trinca. (Cravo, 2012)

Utilizando o eixo de coordenadas mostrado na Figura 4.2. A expressão de J é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} \left[W n_x - \sigma_{ij} \eta_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] d\Gamma, \quad (4.14)$$

onde $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ é a energia de deformação por unidade de volume, u_i representa o vetor de deslocamento e η_j são os cossenos diretores do caminho Γ .

4.2 O FENÔMENO DA FADIGA

A fadiga, no sentido de engenharia, pode ser definida como a falha de uma estrutura sob um regime de carregamento repetitivo ou cíclico no qual as cargas envolvidas são consideravelmente menores que

aquelas envolvidas em falhas instantâneas ou quase-estáticas. De um modo geral para que ocorra fadiga são necessários que três fatores sejam aplicados juntos: solicitações cíclicas, solicitações de tração e deformação plástica.

Atualmente, o fenômeno da fadiga é estudado em quase todas as grandes estruturas da engenharia, ou seja, aviões, navios, carros, prédios, pontes, assim como em muitas outras aplicações, como equipamentos esportivos e até mesmo no corpo humano. O estudo desse fenômeno é de extrema importância, pois a fadiga pode resultar em súbitas falhas catastróficas depois de longos anos de serviço aparentemente seguros. O maior agravante da falha por fadiga é a dificuldade da previsão com precisão, já que o problema é composto pelo fato de que o carregamento em serviço e o meio ambiente são raramente conhecidos com um ótimo grau de precisão.

As vantagens de colagem com adesivo, quando comparada com outras técnicas de união, são bem reconhecidas e dois dos benefícios frequentemente citados é que a concentração de tensões é mais uniformemente distribuída nas juntas coladas do que nas rebitadas ou parafusadas e o processo de colagem não enfraquece explicitamente o aderente. Pode-se esperar dessa forma uma performance melhor em fadiga, e de fato isso frequentemente é o caso. Entretanto, um número de problemas potenciais para juntas adesivas sujeitas à fadiga deve ser reconhecido, já que adesivos são, como a maioria dos materiais, suscetíveis a fadiga. É bem conhecido que os adesivos e a região interfacial entre adesivo e aderente são sensíveis ao meio ambiente e isso irá afetar a resistência à fadiga da junta, podendo levar a uma aceleração da falha. Deve também ser lembrado que a falha em uma junta colada pode ocorrer no adesivo, aderente ou na região interfacial entre os dois.

Segundo Pastoukhov (1995), o estudo da fadiga é dividido geralmente em três enfoques:

1° - Fadiga em alto ciclo: Também conhecido como fadiga controlada por tensões cíclicas, as principais características de componentes classificados dentro desse enfoque são dadas pelas inequações (4.15). As curvas S – N são as curvas que caracterizam esse enfoque.

$$\begin{aligned} \sigma_N &< \sigma_e \\ N_f &> 10000 \text{ ciclos} \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde σ_N é a tensão nominal (tensão aplicada no componente mecânico ou espécime), σ_e é o limite de escoamento do material e N_f é a vida em fadiga (número de ciclos até a fratura).

2° - Fadiga em baixo ciclo: Também conhecido como fadiga controlada por deformações cíclicas, nesse enfoque os níveis de tensão nominal, dados pelas inequações (3.15), são superiores ao limite de escoamento e o número de ciclos até a fratura é inferior a 10000 ciclos. As curvas $\epsilon - N$ (deformação em função do número de ciclos até a fratura) são características fundamentais desse enfoque.

$$N_f < 10000 \text{ ciclos} \quad \sigma_N > \sigma_e \quad (4.16)$$

3° - Propagação de trinca por fadiga: Essa abordagem utiliza a metodologia de mecânica da fratura. Neste caso, a curva característica é a taxa de propagação da trinca por fadiga (da/dN) em função da variação do fator de intensidade de tensão (ΔK) ou taxa de liberação de energia (ΔG).

Existem três modelos de falha por fadiga em uso atualmente, e cada um possui uma área de aplicação e um propósito. As abordagens são: o modelo tensão-número de ciclos (S-N), o modelo deformação-número de ciclos (ϵ -N) e o modelo da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE).

O primeiro modelo, apesar de mais antigo, ainda é o mais frequentemente utilizado nas aplicações que envolvem fadiga de alto-ciclo, já que proporciona melhores resultados quando as amplitudes das solicitações são conhecidas e consistentes ao longo da vida da peça. Trata-se de um modelo baseado na tensão, que busca determinar a resistência à fadiga e/ou o limite de fadiga para o material. O segundo modelo é aplicado com maior frequência em regimes de fadiga de baixo-ciclo e em problemas de vida finita, baseado na deformação fornece uma visão razoavelmente precisa do estágio de iniciação da trinca. Já a teoria da mecânica da fratura fornece o melhor modelo para o estágio de propagação da trinca do processo de fadiga. Este método, bastante utilizado para prever o tempo de vida restante em peças trincadas durante serviço, é aplicado em regimes de fadiga de baixo-ciclo e em problemas de vida finita nos quais as tensões cíclicas são conhecidas por serem elevadas o suficiente para causarem a formação de trincas.

4.3 MODELOS ANALÍTICOS

Os modelos analíticos mostrados nesse trabalho foram baseados em expressões simples para a taxa de liberação de energia no adesivo, determinadas pela teoria de viga. Essa metodologia foi desenvolvida por Krenk (1992). Depois de uma breve descrição da relação entre taxa de liberação de energia e flexibilidade a *Double Cantilever Beam (DCB)* é analisada em modo I e modo II e em seguida, é mostrado um modelo analítico misto para *SLJ*.

A *DCB* é utilizada para medir os valores de taxa de liberação de energia em trincas sob condições de carga estática e cíclica. Embora este teste tenha atraído interesse acadêmico considerável, não é amplamente utilizado na indústria. As principais vantagens desse método vêm do fato dele ser compatível com metais e compósitos, além de possuir um baixo custo e fácil aplicação, porém ele apresenta como desvantagem a limitação a aderentes rígidos e grandes incertezas de medição.

4.3.1 Energia e Flexibilidade

A taxa de liberação de energia associada ao crescimento de uma trinca é a energia que se torna disponível pelo aumento unitário da área da trinca A quando a carga é mantida constante. O princípio é ilustrado na Figura 4.5.

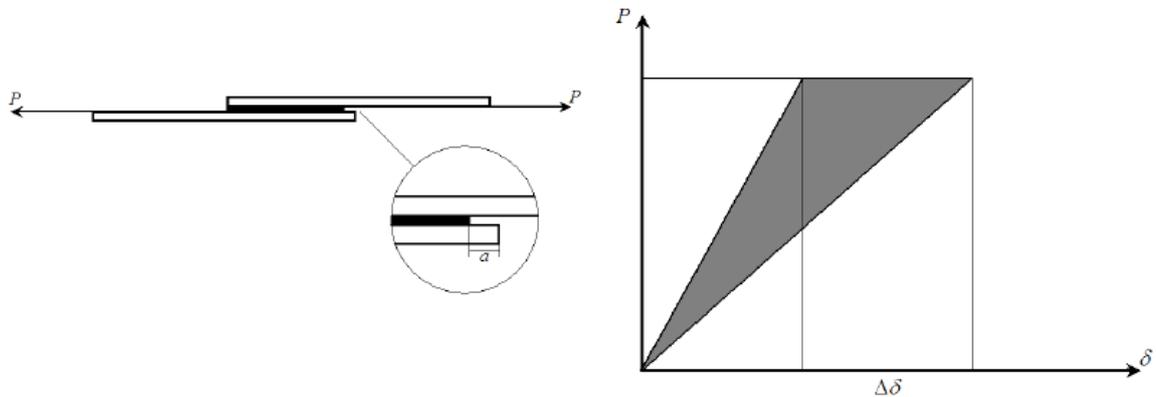


Figura 4.5 - Taxa de liberação de energia e flexibilidade. (Souza, 2012)

A carga consiste em duas forças opostas P . Como a área original da trinca A , o deslocamento mútuo devido as duas forças é dado por:

$$\delta = C(A)P, \quad (4.17)$$

onde C é a flexibilidade. Se a área da trinca for estendida de ΔA o deslocamento adicional é:

$$\Delta\delta = (C(A + \Delta A) - C(A))P = \frac{\partial C}{\partial A} \Delta AP, \quad (4.18)$$

o trabalho externo associado é dado $P\Delta\delta$, enquanto a variação associada da energia interna é $\frac{1}{2}P\Delta\delta$.

Assim a taxa de liberação de energia é:

$$G = \frac{\partial}{\partial A} (V - U) = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial A} P^2. \quad (4.19)$$

4.3.2 Double Cantilever Beam – Modo I

A Figura 4.6 mostra o espécime de teste clássico para DCB, onde o carregamento simétrico (modo I) é dado por duas forças P de magnitudes opostas.

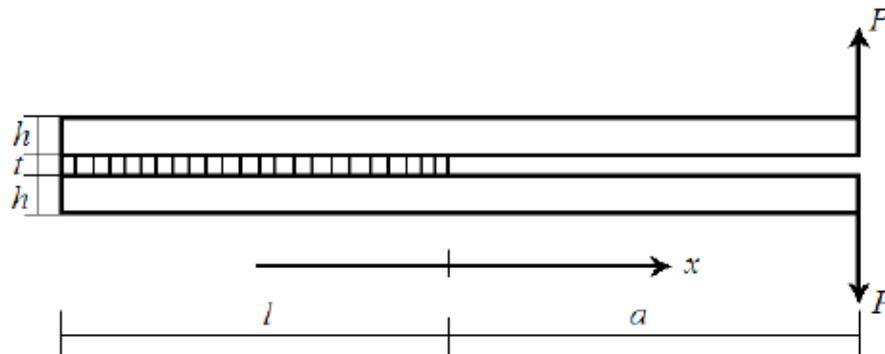


Figura 4.6 - DCB em modo I. (Souza, 2012)

A camada de adesivo é aproximada por molas com rigidez E'_a/t por unidade de área, onde o valor em estado plano de deformações, $E'_a = E_a / (1 - \nu^2)$ do módulo de elasticidade do adesivo é usado por causa das restrições. Cada viga possui uma altura h e largura b , sendo tratada separadamente como uma viga elástica, cuja a rigidez é $EI = \frac{1}{12} Ebh^3$ e a rigidez da mola associada é $k = 2E'_a b/t$.

Baseado na teoria de vigas em fundação elástica dada por Hetényi (1946), a tensão máxima de peel que ocorre no final da área colada é dada por:

$$\sigma_{max} = \frac{2P\lambda_\sigma}{b} (1 + \lambda_\sigma a), \quad (4.20)$$

onde:

$$\lambda_\sigma^4 = \frac{k}{4EI} = \frac{6 E'_a}{h^3 t E}, \quad (4.21)$$

o parâmetro λ_σ^{-1} serve como uma escala de comprimento do problema em modo I. Para juntas rígidas λ_σ é grande, e a tensão de descolamento é grande e concentrada em uma zona estreita próxima ao final da camada de adesivo.

A taxa de liberação de energia é deduzida da relação de flexibilidade da Equação (3.19). Sabe-se que o deslocamento é dado por:

$$\delta = \frac{4P\lambda_\sigma}{k} \left(1 + 2\lambda_\sigma a + 2(\lambda_\sigma a)^2 + \frac{2}{3} (\lambda_\sigma a)^3 \right). \quad (4.22)$$

Portanto, a taxa de liberação de energia G_I para o problema em modo I é dada por:

$$G_I = \frac{1}{2} \frac{t}{E'_a} \sigma_{max}^2 = \frac{(Pa)^2}{bEI} \left(1 + \frac{1}{\lambda_\sigma a} \right)^2. \quad (4.23)$$

A equação da vida em fadiga para o DCB em modo I é obtida por meio da integração da equação clássica de Paris (Lei de Paris):

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta G)^m, \quad (4.24)$$

logo:

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \left(\frac{da}{dN} \right)^{-1} da, \quad (4.25)$$

onde, a é comprimento da trinca, N é o número de ciclos, G é a taxa de liberação de energia e C e m , são constantes obtidas experimentalmente, a_0 é o comprimento inicial da trinca e a_f é o comprimento da trinca na fratura.

Realizando algumas manipulações algébricas, desenvolvidas por Krenk (1992) na Equação (3.23) é possível reescrever a equação da seguinte forma:

$$G_{I\ MAX} = \frac{1}{2} \frac{t}{E'_a} \left(\frac{P_{max} h}{2b} \lambda_\sigma^2 \frac{\sinh(\lambda_\sigma l) - \sin(\lambda_\sigma l)}{\sinh(\lambda_\sigma l) + \sin(\lambda_\sigma l)} \right)^2, \quad (4.26)$$

onde, l é o comprimento residual, dado pela subtração do comprimento da região colada e a comprimento da trinca. Substituindo a Equação (3.24) na Equação (3.26) na e realizando as manipulações algébricas necessárias, tem-se:

$$N_f = \frac{\zeta_1^m}{C} \int_{a_0}^{a_f} \left(\frac{\sinh(\lambda_\sigma l) - \sen(\lambda_\sigma l)}{\sinh(\lambda_\sigma l) + \sen(\lambda_\sigma l)} \right)^{2m} da, \quad (4.27)$$

onde:

$$\zeta_1 = \frac{4}{3} \frac{Ehb^2}{P_{max}^2 (1 - R^2)}, \quad (4.28)$$

$$R = \frac{P_{max}}{P_{min}}. \quad (4.29)$$

4.3.3 Double Cantilever Beam – Modo II

A Figura 4.7 mostra a DCB carregada em modo II. Analisado por Wernesson (1990), esse teste tem como objetivo determinar a carga de cisalhamento.

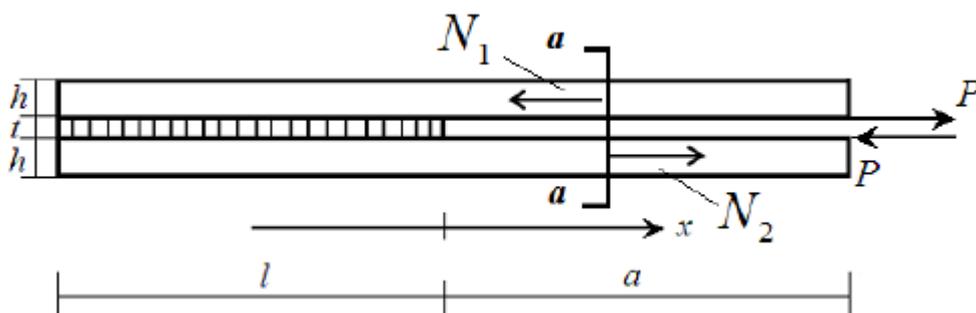


Figura 4.7 - DCB em modo II. (Souza, 2012).

Nesse modelo a espessura do adesivo (t) é considerada muito menor com relação a espessura dos aderentes (h). Devido à assimetria da carga, as tensões peel desaparecem identicamente. Assim, os aderentes são carregados por uma tensão de cisalhamento $b\tau(x)$ na linha colada.

A tensão máxima de cisalhamento que ocorre o final da área colada é dada por:

$$\tau_{max} = \frac{P\lambda_{\tau}}{b} \coth(\lambda_{\tau}l), \quad (4.30)$$

onde:

$$\lambda_{\tau}^2 = \frac{8 G_a}{th E}. \quad (4.31)$$

A taxa de liberação de energia é deduzida da relação de flexibilidade da Equação (4.19). Sabe-se que o deslocamento é dado por:

$$\delta = \frac{t}{G_a} \frac{b\lambda_{\tau}}{b} (\coth(\lambda_{\tau}l) + \lambda_{\tau}l). \quad (4.32)$$

Portanto, a taxa de liberação de energia G_{II} para o problema em modo I é dada por:

$$G_{II} = \frac{1}{2} \frac{t}{G_a} \tau_{max}^2 = \frac{4h}{E} \left(\frac{P}{bh} \right)^2 \coth^2(\lambda_{\tau}l). \quad (4.33)$$

Realizando um procedimento semelhante ao utilizado para a DCB em modo I, tem-se que a vida é fadiga para DCB em modo II é dada por:

$$N_f = \frac{\zeta_{II}^m}{C} \int_{a_0}^{a_f} \left(\tanh\left(\frac{\lambda_{\tau}l}{2}\right) \right)^{2m} da, \quad (4.34)$$

onde:

$$\zeta_{II} = \frac{Ehb^2}{P_{max}^2 (1 - R^2)}, \quad (4.35)$$

$$R = \frac{P_{max}}{P_{min}}. \quad (4.36)$$

4.3.4 Single Lap Join – Modo Misto

Na prática, a geometria e o carregamento da maioria das juntas adesivas conduzem a uma mistura do modo I e do modo II. A SLJ simétrica e centralmente carregada mostrada na Figura 4.8 é um típico exemplo dessa situação.

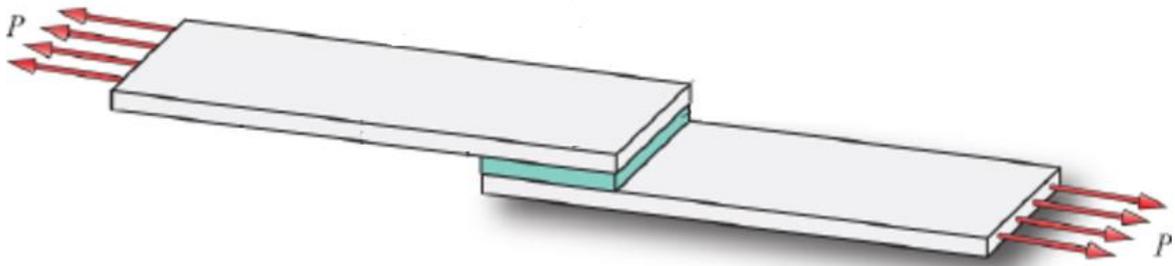


Figura 4.8 - Lap Joint simétrica centralmente carregada. (Çalık, 2016)

Neste caso é conveniente dividir a carga em parte simétrica e outra assimétrica, como mostra a Figura 4.9. Sendo assim, cada parte pode ser resolvida separadamente.

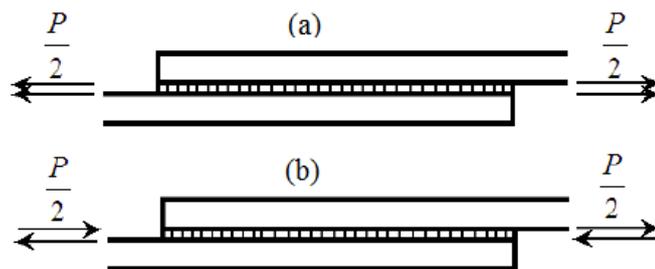


Figura 4.9 - (a) Separação de carga em modo I. (b) Separação de carga em modo 2. (Souza, 2012)

Utilizando essa metodologia, a tensão máxima de *peel*, que governa o problema em modo I, é dada por:

$$\sigma_{max} = \frac{Ph}{2b} \lambda_{\sigma}^2 \frac{\sinh(\lambda_{\sigma}l) - \sin(\lambda_{\sigma}l)}{\sinh(\lambda_{\sigma}l) + \sin(\lambda_{\sigma}l)}, \quad (4.37)$$

a tensão máxima de cisalhamento, que governa o problema em modo II, é dada por:

$$\tau_{max} = \frac{P\lambda_{\tau}}{2b} \coth\left(\frac{\lambda_{\tau}l}{2}\right). \quad (4.38)$$

A taxa de liberação de energia no modo misto é dada como soma das taxas em modo I e em modo II. Portanto, pode ser definida como:

$$G_{mix} = \frac{1}{2} \frac{t}{E'_a} (\sigma_{max})^2 + \frac{1}{2} \frac{t}{G_a} \tau_{max}^2. \quad (4.39)$$

Quando deseja-se estudar a vida em fadiga para uma junta do tipo mista, deve-se analisar separadamente o modo I e o modo II de maneira semelhante ao método mostrado nas secções 4.3.2 e 4.3.3. A vida da junta mista será definida como o menor valor encontrado.

5. MÉTODOS NUMÉRICOS

Em muitos casos, a solução de situações práticas de engenharia é conduzida por meio da solução de problemas físicos relativamente complexos, onde nem sempre é possível encontrar um resultado por meio de soluções analíticas. Com uma evolução da necessidade de resolver problemas onde esse tipo de solução não é possível, técnicas matemáticas conhecidas como métodos numéricos foram desenvolvidas, encontrando soluções aproximadas através de um valor numérico.

Atualmente, os métodos numéricos mais utilizados para encontrar soluções aproximadas de problemas físicos são:

- Método das Diferenças Finitas (MDF);
- Métodos dos Elementos Finitos (MEF);
- Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O MDF é classificado como um método diferencial, pois, trata-se de um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. Ele transforma equações diferenciais em equações algébricas nos nós de um domínio. Já o MEF transforma a equação diferencial governante do problema numa equação integral equivalente que trabalha com respostas desconhecidas. Essas equações integrais são aproximadas por um conjunto semelhante de equações integrais discretizadas, onde a resposta é desconhecida em um conjunto finito de nós. A resposta de cada elemento é caracterizada em termos de um número finito de graus de liberdade, sendo estes representados como os valores das funções desconhecidas, em um conjunto de pontos nodais (Felippa, 2011 apud Albuquerque, 2014). O MEF apresenta algumas vantagens sobre o MDF, já que permite uma melhor aplicação das condições de contorno, além da construção de uma malha de tamanho mais viável. Porém, existem algumas desvantagens, pois o MEF utiliza um grande número de variáveis nas equações, consumindo assim um tempo computacional muito grande. A uso do MEF em trabalhos envolvendo juntas coladas é, geralmente, realizado por meio de softwares comerciais, como *ABAQUS*, *ANSYS* e *MSC Nastran*.

Nesse trabalho, o método computacional mais explorado será o MEC, que consiste em obter as equações integrais somente com informações de contorno de um problema. A principal vantagem do MEC sobre o MDF e MEF, é que ele diminui, em uma ordem, a dimensão do problema proposto, gerando uma redução na quantidade de dados de entrada, no tempo de processamento e no armazenamento das informações processadas, propiciando uma menor quantidade de operações aritméticas. Contudo, a aplicação desse método é comercialmente menos utilizada, visto que está limitada a problemas que apresentam as chamadas soluções fundamentais ou funções de Green.

5.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1.1 Preliminares Matemáticas

Esta seção tem por objetivo mostrar algumas relações matemáticas de importância absolutamente crítica para a dedução e entendimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

5.1.1.1 O teorema de Gauss

O teorema de Gauss-Green é uma identidade fundamental que relaciona uma integral de área da derivada de uma função escalar a uma integral de linha ao redor do contorno dessa área. Considerando uma função $f(x,y)$ contínua sobre uma área A (Figura 5.1). A integral da derivada desta função sobre a área A pode ser escrita como:

$$\iint_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \partial x \right) \partial y. \quad (5.1)$$

Resolvendo a primeira integral, tem-se:

$$\iint_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} [f(x_2(y)) - f(x_1(y))] \partial y. \quad (5.2)$$

Da Figura 5.1, tem – se:

$$n_x = \frac{dy}{dS} \Rightarrow dy = n_x dS, \quad (5.3)$$

$$n_y = -\frac{dx}{dS} \Rightarrow dy = -n_y dS, \quad (5.4)$$

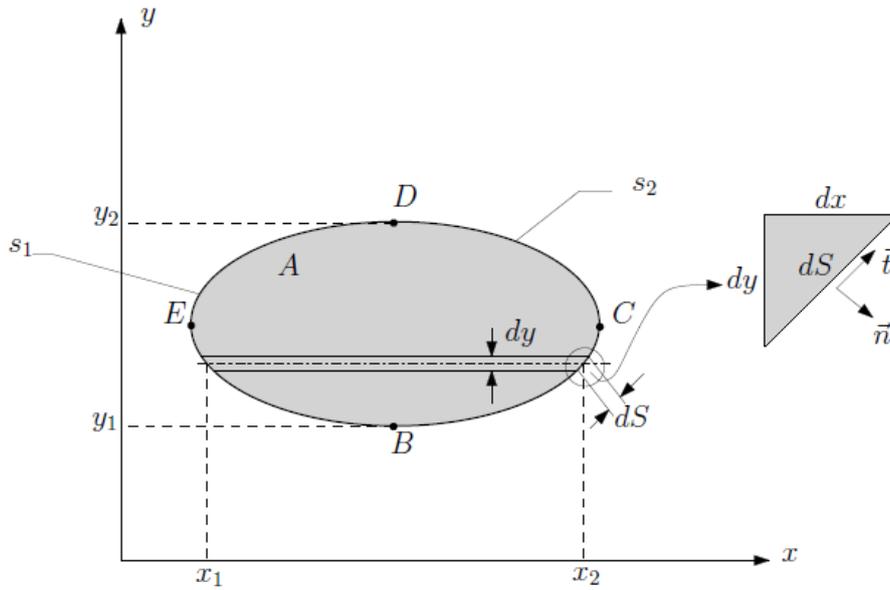


Figura 5.1: Domínio da integração de $f(x,y)$. (Kane, 1994)

Substituindo a equação (5.3) na equação (5.2), tem-se:

$$\int_{y_1}^{y_2} [f(x_2(y)) - f(x_1(y))] dy = \int_{y_1}^{y_2} [f(x_2(y(s)))n_x dS] - \int_{y_1}^{y_2} [f(x_1(y(s)))n_x dS]. \quad (5.5)$$

Na Figura 5.1, nota-se que o trajeto de integração de y_1 até y_2 corresponde ao trajeto BCE , enquanto y_2 até y_1 corresponde ao trajeto BED . Invertendo o sentido de BED para DEB , inverte-se também o sinal da integral. Após essas operações, o lado direito da equação (5.5) corresponde a uma integral ao longo do contorno s da área A , ou seja:

$$\iint_A \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx dy = \oint_s f(s) n_x ds. \quad (5.6)$$

5.1.1.2 Delta de Dirac

Em diversas situações na engenharia, perturbações são idealizadas como se ocorressem em um ponto, por exemplo, cargas concentradas na mecânica dos sólidos, fontes e sorvedouros de energia em análises de transferência de calor. Ao imaginar uma carga concentrada, na realidade pensamos em uma carga "relativamente concentrada". Idealizar como ponto depende qualitativamente da proximidade a qual o local de aplicação da perturbação é observado. Em um limite onde o raio da curvatura da carga

tende a zero, a tensão tenderá ao infinito e o material falhará. Finalmente, deve-se admitir que fontes concentradas são matematicamente úteis, porém abstratas, mostrando-se úteis para resolver problemas práticos.

Para se construir uma descrição de uma fonte de excitação pontual, considera-se a função menos exótica, mostrada na Figura 5.2.

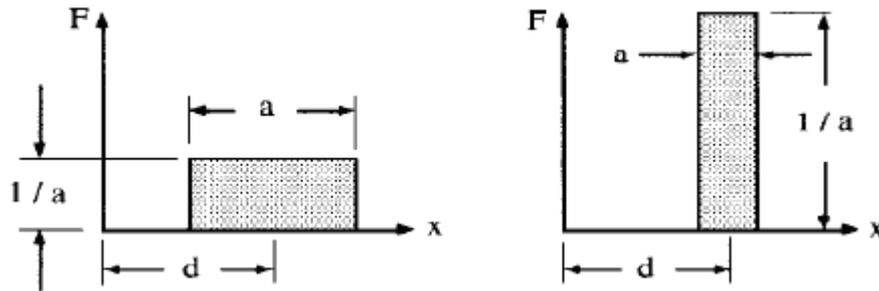


Figura 5.2 - Exemplos da função pulso retangular unitária. (Kane, 1994)

Essa função pode ser chamada de pulso retangular unitário centrado em d de largura a . Sendo configurada de forma que a sua integral (área) seja igual a unidade sobre qualquer domínio onde a função é definida. Sendo definida da seguinte forma:

$$F(x, d, a) = \begin{cases} 0; & x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}; & d - \frac{a}{2} < x < d + \frac{a}{2} \\ 0; & x > d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (5.7)$$

Agora, pode-se definir a função delta Dirac como o limite da função pulso retangular unitário quando a se aproxima de zero.

$$\delta(x - d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x, d, a). \quad (5.8)$$

Essa função comporta-se de tal maneira que pode ser utilizada para representar as fontes pontuais. Quando a região onde a função atua fica menor, a intensidade aumenta de tal forma que a integral da função permanece constante.

$$\delta(x - d) = \begin{cases} 0; & x \neq d \\ \infty; & x = d \end{cases} \quad (5.9)$$

A função delta de Dirac possui as seguintes propriedades que são a base do método dos elementos de contorno:

- Integral da função delta de Dirac:

$$\int_a^b \delta(x - d) = \begin{cases} 0; & d < a \\ 1; & a \leq d \leq b \\ 0; & d > b \end{cases} \quad (5.10)$$

- Integral do produto da função delta de Dirac com outra função $g(x)$:

$$\int_a^b g(x) \delta(x - d) = \begin{cases} 0; & d < a \\ g(d); & a \leq d \leq b \\ 0; & d > b \end{cases} \quad (5.11)$$

5.1.2 Formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Mecânica dos Sólidos

Quando se analisa problemas de elasticidade linear, três equações descrevem o equilíbrio do corpo e outras três a compatibilidade cinética.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0; \quad (\text{Equações de equilíbrio}) \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (\text{Lei de deformação – deslocamento}) \quad (5.13)$$

onde, b_i são as forças de corpo resultantes do peso próprio, de reações químicas no corpo ou devida a campos magnéticos, $\sigma_{ij,j}$ é o divergente do tensor de tensões e u_i é o vetor de deslocamento linear.

Existem também as equações constitutivas, também conhecidas como Lei de Hooke generalizada, que relacionam as tensões com deslocamentos. De forma geral, são descritas como (Fung e Tong, 2001 apud Souza, 2009):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (5.14)$$

onde o tensor C_{ijkl} é denominado matriz de flexibilidade. Formalmente, este tensor é constituído de 81 constantes elásticas, uma vez que i, j, k, l variam de 1 a 3 (direções x, y e z, respectivamente), relacionando, através de uma combinação linear, cada uma das nove componentes do tensor de tensão, a cada uma das nove componentes do tensor de deformação. Como o tensor de constantes elásticas para um sólido equilibrado é baseado no conceito de valor estacionário da energia de deformação U_o , pode-se concluir que $C_{ijkl} = C_{klij}$. Além disso, considerando a simetria do tensor de deformações, temos que $C_{ijkl} = C_{jikl}$ e considerando também a simetria do tensor de tensões, temos por fim que $C_{ijkl} = C_{ijlk}$. Partindo dessas relações de simetria, tem-se que de duas 81 componentes, apenas 21 são independentes. Sendo assim:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \left[\left(\begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2213} & C_{2232} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3312} \\ & & & C_{1313} & C_{1323} & C_{1312} \\ & Sim. & & & C_{2323} & C_{2312} \\ & & & & & C_{1212} \end{array} \right) \right] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix}. \quad (5.15)$$

Outra equação fundamental para a Mecânica dos Sólidos é a equação de Cauchy, equação (5.16), que determina as forças de superfícies em uma determinada direção t_i em um dado ponto, relacionando o estado de tensão descrito pelo tensor $\sigma_{ij}(x)$ com o versor normal $n_j(x)$:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (5.16)$$

Para obtenção das equações integrais de contorno (EIC's) será utilizado a técnica dos resíduos ponderados, que consiste em aproximar a solução por uma base de funções que são denominadas de funções de aproximação. Ponderando a equação (5.12) por meio de uma função w qualquer e integrando no domínio, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \cdot w d\Omega = 0. \quad (5.17)$$

Sabe - se que a função w é arbitrária, as três equações, ponderadas por funções w diferentes, podem ser somadas e assim, a Equação (5.17) fica (Kane, 1994 apud Souza, 2009):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \cdot w_i d\Omega = 0. \quad (5.18)$$

Integrando por partes o primeiro termo da equação, aplicando o teorema de Gauss-Green e o conceito da equação de Cauchy, tem - se:

$$\int_{\Gamma} t_i w_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i w_i d\Omega = 0. \quad (5.19)$$

A equação pode ser interpretada como uma equação integral de equilíbrio, relacionando termos de forças de superfície, forças de corpo e tensões.

O objetivo do MEC é, em última análise, evitar o cálculo das integrais no domínio do problema. Para que isso aconteça, é escolhida um função ponderadora, tal que, dado um operador diferencial \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}w_i^* = \delta(x - d), \quad (5.20)$$

onde $\delta(x - d)$ é a função delta de Dirac, que representa uma carga concentrada. A função w_i^* é chamada de solução fundamental e constitui um desafio que algumas vezes é um limitante para o desenvolvimento do método.

5.1.3 Discretização do problema em elementos de contorno

A discretização de juntas coladas, geralmente, se dá utilizando funções de formas contínuas, ou seja, os elementos da malha compartilham nós, gerando resultados mais refinado e malhas mais simples.

Quando elementos quadrilaterais de quatro nós são utilizados (Figura 5.3), as variáveis u e t devem ser interpoladas nos elementos através de funções polinomiais adequadas, conhecidas como funções de forma, que devem obedecer os seguintes parâmetros:

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}, \quad (5.21)$$

$$\sum_{n=1}^{Nnós} N_n(\xi, \eta) = 1. \quad (5.22)$$

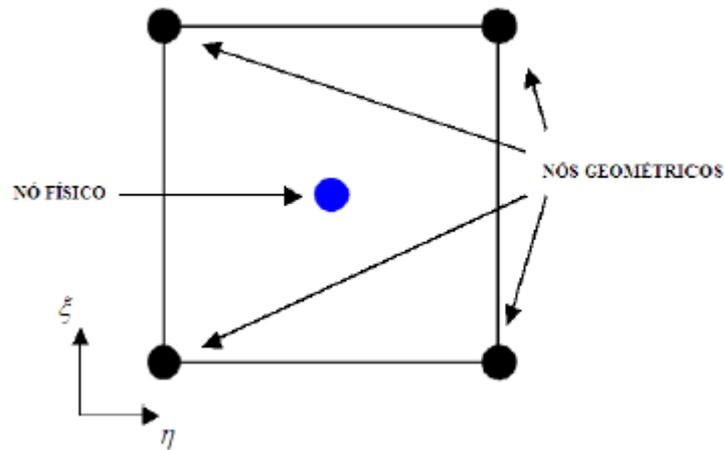


Figura 5.3 - Representação de um elemento de quatro nós no sistema de coordenadas intrínseco.

Sendo, $Nnós$ o número de nós presentes nos elementos e δ_{ij} é o chamando Delta de Kronecker definido pela equação (5.23)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases} \quad (5.23)$$

Baseado nas equações (5.21) e (5.22) as funções de forma para o elemento em coordenadas intrínsecas são:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1), \\
N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), \\
N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \\
N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Esse conjunto de equações pode ser utilizado tanto para mapear as variáveis físicas quanto as geométricas do problema. A variável interpolada é expressa por:

$$v = \sum_{n=1}^4 v_n N_n, \tag{5.25}$$

onde v pode tanto representar as coordenadas nodais como as forças de superfície ou os deslocamentos.

No caso de um problema 3D, existem seis incógnitas por nó: três forças de superfície e três deslocamentos, assim, a grandeza vetorial pode ser expressada como:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ \vdots \\ v_1^4 \\ v_2^4 \\ v_3^4 \end{Bmatrix}. \tag{5.26}$$

Assim, a integral de contorno para N elementos pode ser escrita como:

$$c(\xi)u_i = \sum_{e=1}^N \sum_{n=1}^4 \left(\int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) t_j^n - t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) u_j^n d\Gamma_e \right), \tag{5.27}$$

onde t_j^n e u_j^n são valores nodais (não dependem ξ e η), a equação (5.27) pode ser escrita na forma:

$$c(\xi)u_i + \sum_{e=1}^N \sum_{n=1}^4 \left(\int_{\Gamma_e} t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) u_j^n d\Gamma_e \right) = \sum_{e=1}^N \sum_{n=1}^4 \left(\int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) t_j^n \right), \quad (5.28)$$

Definindo:

$$H_{ij}^e = \sum_{n=1}^4 \int_{\Gamma_e} t_{ij}^* N_n(\xi, \eta) u_j^n d\Gamma_e + c(\xi)\delta_{ij}, \quad (5.29)$$

$$G_{ij}^e = \sum_{n=1}^4 \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* N_n(\xi, \eta) t_j^n, \quad (5.30)$$

A equação passa a ser em forma matricial, igual a:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\}, \quad (5.31)$$

os vetores $\{u\}$ e $\{t\}$ contém incógnitas, deslocamentos e forças de superfície prescritos, ou seja, descrevem as condições de contorno do problema.

5.1.4 Solução fundamental

Para um problema isotrópico, a equação (5.14) pode ser escrito como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (5.32)$$

onde:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad (5.33)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.34)$$

Substituindo a equação (5.1) em (5.12), é obtido as equações de Navier:

$$\frac{\mu}{1 - 2\nu} u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + b_i = 0. \quad (5.35)$$

Escrevendo Equação (5.35) para um força pontual unitária aplicada no corpo em um ponto ξ , obtemos:

$$\frac{\mu}{1 - 2\nu} u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \delta(x - \xi)e_i = 0. \quad (5.36)$$

Para solução da Equação (5.36), a abordagem do vetor de Galerkin será utilizada. Segundo Kane (1994), os deslocamentos são expressos em termos no vetor de Galerkin, como:

$$u_i^* = G_{k,ik} - \frac{1}{2(1 - \nu)} G_{k,ik}. \quad (5.37)$$

Substituindo (5.37) em (5.36), temos:

$$\mu G_{i,kkjj} + \delta(x - \xi)e_i = 0, \quad (5.38)$$

Sendo $G_{k,ikjj} = G_{k,jjki}$, $G_{j,kkjj} = G_{k,jjki}$, $G_{k,jkij} = G_{k,jjki}$. A Equação (5.41) pode ser escrita como:

$$\nabla^2 F_i + \frac{1}{\mu} \delta(x - \xi) e = 0. \quad (5.39)$$

5.1.5 Formulação de Elementos de Contorno aplicada à chapas coladas

O modelo representado na Figura 5.4, foi utilizado na formulação desenvolvida para uma análise estática de juntas sobrepostas coladas utilizando o Método dos Elementos de Contorno, proposta por Souza (2009). A chapa 1 (C1) está completamente engastada e a Chapa 2 está submetida a uma carga estática.

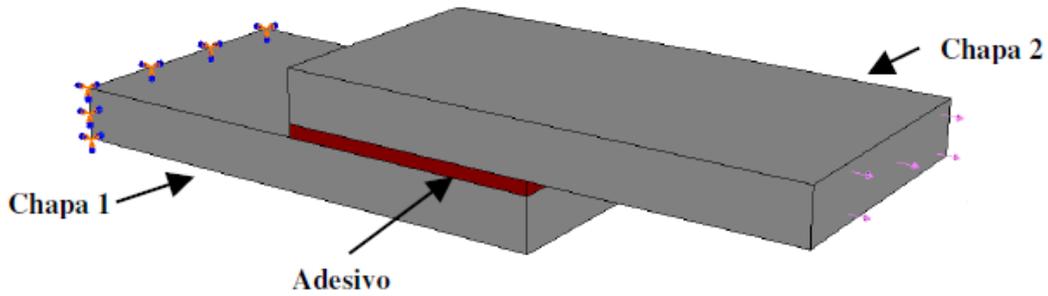


Figura 5.4: SLJ colada por adesivo. (Souza, 2009)

As equações (5.40) e (5.41) mostram a formulação utilizadas

$$c_{ij}^{C1}(\xi) u_j^{C1}(\xi) + \int_{\Gamma_{C1}} t_{ij}^{*(C1)} u_j^{C1}(\xi) d\Gamma = \int_{\Gamma_{C1}} u_{ij}^{*(C1)} t_j^{C1}(\xi) d\Gamma + \frac{1}{h^{C1}} \int_{\Omega_{C2}} u_{ij}^{*(C1)} b_j^{C1}(\xi) d\Omega, \quad (5.40)$$

$$c_{ij}^{C2}(\xi) u_j^{C2}(\xi) + \int_{\Gamma_{C2}} t_{ij}^{*(C2)} u_j^{C2}(\xi) d\Gamma = \int_{\Gamma_{C1}} u_{ij}^{*(C2)} t_j^{C2}(\xi) d\Gamma + \frac{1}{h^{C2}} \int_{\Omega_{C2}} u_{ij}^{*(C2)} b_j^{C2}(\xi) d\Omega, \quad (5.41)$$

onde, h é a espessura do material que está sendo estudado. Os primeiros três termos das equações (5.40) e (5.41) referem-se à formulação clássica da elastoestática, o quarto termo refere-se ao acoplamento da

Chapa 1 e da Chapa 2. As reações de cisalhamento no adesivo são consideradas como forças de corpo $b_j(\xi)$ serão calculadas através da diferença de deslocamento entre os pontos partilhados pelas chapas:

$$b_j(\xi) = \frac{G_A}{h_A} \{u_j^{(c1)}(\xi) - u_j^{(c2)}(\xi)\}, \quad (5.42)$$

onde G_A é o módulo de cisalhamento do material adesivo e h_A a espessura da camada do adesivo.

A Figura 5.5 mostra os resultados obtidos por Souza (2009) utilizando a formulação mostrada, além de uma comparação com o modelo analítico de Goland e Reissner (1944) para aderentes isotrópicos. Pode ser notada uma boa concordância entre as curvas

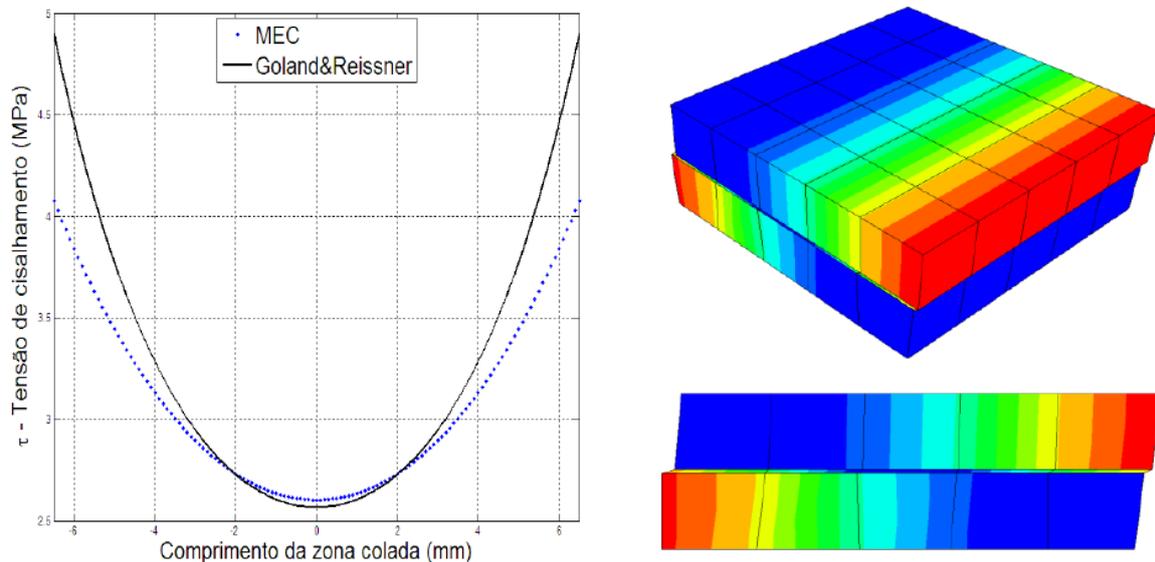


Figura 5.5 - Distribuição de tensão de cisalhamento no adesivo com aderentes isotrópicos. (Souza, 2009)

5.1.6 O Método das sub-regiões

O método das sub-regiões é aplicado quando as propriedades do material variam ao longo da estrutura, como é caso de uma junta colada, ou quando deseja-se otimizar o armazenamento nas matrizes $[H]$ e $[G]$, mostradas na secção 5.1.3. A Figura 5.6 mostra um modelo genérico com duas sub-regiões, onde cada uma delas apresenta materiais com propriedades diferentes e condições de contorno diferentes. Nesse trabalho será utilizado um modelo com 3 sub-regiões (aderente superior, adesivo, aderente inferior).

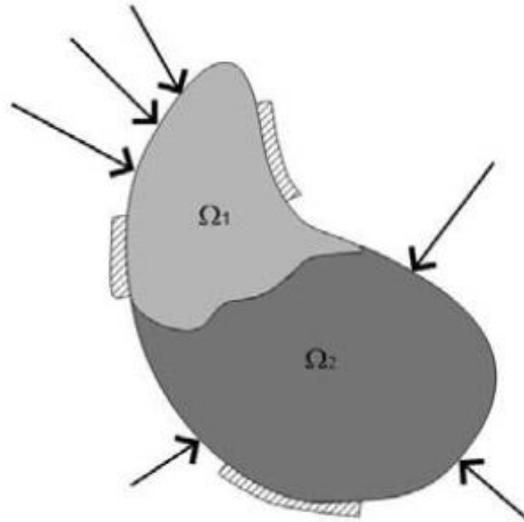


Figura 5.6 - Modelo com duas sub-regiões. (Cravo, 2012)

De acordo com Aliabadi (2002), as matrizes $[H]$ e $[G]$ podem ser escritas para cada domínio individualmente, onde cada ponto fonte gera um conjunto de seis equações com seis incógnitas (três deslocamentos e três forças de superfície).

$$[H]_1\{u\}_1 = [G]_1\{t\}_1, \quad (5.43)$$

$$[H]_2\{u\}_2 = [G]_2\{t\}_2, \quad (5.44)$$

$$[H]_3\{u\}_3 = [G]_3\{t\}_3, \quad (5.45)$$

Cada matriz pode então ser dividida da seguinte forma:

$$[H]_s = [H_E \quad H_I]_s, \quad (5.46)$$

$$[G]_s = [G_E \quad G_I]_s, \quad (5.47)$$

onde, o sub-índice E representa os elementos que não estão na interface, ou seja, as variáveis que pertencem apenas a uma sub-região. O sub-índice I representa o conjunto de variáveis relacionadas aos elementos da interface e s a sub-região em questão. Logo, o sistema das Equações (5.43), (5.44) e (5.45) pode ser escrito de maneira genérica, como:

$$[H_E \quad H_I]_s \begin{Bmatrix} u_E \\ \dots \\ u_I \end{Bmatrix}_s = [G_E \quad G_I]_s \begin{Bmatrix} t_E \\ \dots \\ t_I \end{Bmatrix}_s. \quad (5.48)$$

Na interface, é possível escrever relações de equilíbrio de forças e de compatibilidade de deslocamento:

$$\{t\}_1 + \{t\}_2 = \{t\}_A, \quad (5.49)$$

$$\{t\}_2 + \{t\}_3 = \{t\}_A, \quad (5.50)$$

$$\{u\}_1 = \{u\}_2 = \{u\}_A, \quad (5.51)$$

$$\{u\}_2 = \{u\}_3 = \{u\}_A, \quad (5.52)$$

onde, $\{t\}_A$ e $\{u\}_A$ são condições pré-estabelecidas de forças de superfície e deslocamentos impostos na interface.

De acordo com Cravo (2008), neste ponto podem ser adotadas duas formas para a solução do problema. O primeiro consiste em pré-multiplicar (5.48) por $[G]_s^{-1}$, o que equivale a encontrar a matriz

de rigidez no MEF, que não será utilizado nesse trabalho. A segunda solução consiste em acoplar as sub-regiões 1 e 2 aplicando as Equações (5.49) e (5.51) em (5.46) e (5.48), e de forma análoga para as sub-regiões 2 e 3, dessa forma, temos:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 & 0 \\ 0 & -G_I^2 & G_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I \\ t_E^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^1 & H_I^1 & 0 \\ 0 & H_I^2 & H_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I \\ u_E^2 \end{Bmatrix}, \quad (5.53)$$

$$\begin{bmatrix} G_E^2 & G_I^2 & 0 \\ 0 & -G_I^3 & G_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^3 \\ t_I \\ t_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^2 & H_I^2 & 0 \\ 0 & H_I^3 & H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^2 \\ u_I \\ u_E^3 \end{Bmatrix}. \quad (5.54)$$

Ao contrário do que ocorre no MEF, as contribuições dos elementos/nós da interface não são somadas. As colunas $[H]_E$ e $[H]_I$ ainda são rearranjadas de forma a separar as incógnitas em $\{u\}$ e $\{t\}$ das condições impostas:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_E^{1N} & G_I^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_I^2 & G_E^{2N} & G_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_E^{1N} \\ t_I \\ t_E^{2N} \\ t_E^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^1 & H_E^{1D} & H_I^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_I^2 & H_I^{2D} & H_E^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_E^{1D} \\ u_I \\ u_E^{2D} \\ u_E^2 \end{Bmatrix}, \quad (5.55)$$

$$\begin{bmatrix} G_E^2 & G_E^{2N} & G_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_I^3 & G_E^{3N} & G_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^2 \\ t_E^{2N} \\ t_I \\ t_E^{3N} \\ t_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_E^2 & H_E^{2D} & H_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_I^3 & H_I^{3D} & H_E^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^2 \\ u_E^{2D} \\ u_I \\ u_E^{3D} \\ u_E^3 \end{Bmatrix}. \quad (5.56)$$

onde, o superíndice N e D se referem as condições de Neumann e Dirichlet, respectivamente. Assim, as condições de contorno são impostas e as colunas rearranjadas, resultando:

$$\begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 & 0 & -H_E^1 & -H_I^1 & 0 \\ 0 & -G_I^2 & G_E^2 & 0 & -H_I^2 & -H_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I \\ t_E^2 \\ u_E^1 \\ u_I \\ u_E^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_E^{1N} & 0 & H_E^{1D} & 0 \\ 0 & -G_E^{2N} & 0 & H_E^{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^{1N} \\ t_E^{2N} \\ u_E^{1D} \\ u_E^{2D} \end{Bmatrix}, \quad (5.57)$$

$$\begin{bmatrix} G_E^2 & G_I^2 & 0 & -H_E^3 & -H_I^3 & 0 \\ 0 & -G_I^3 & G_E^3 & 0 & -H_I^3 & -H_I^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^2 \\ t_I \\ t_E^3 \\ u_E^2 \\ u_I \\ u_E^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_E^{2N} & 0 & H_E^{2D} & 0 \\ 0 & -G_E^{3N} & 0 & H_E^{3D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^{2N} \\ t_E^{3N} \\ u_E^{2D} \\ u_E^{3D} \end{Bmatrix}. \quad (5.58)$$

O uso de elementos descontínuos implica em uma série de vantagens, como maior facilidade na montagem das matrizes e aplicação das condições de contorno e, quando usado em análises de sub-regiões não há necessidade de se tratar quinas e cantos nas interfaces. Outra vantagem importante dos elementos descontínuos com relação aos elementos contínuos é que no caso destes últimos existe uma grande complexidade em acoplar as matrizes.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Para implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno na análise da junta colada, foram realizadas algumas modificações no programa criado por Souza (2009), objetivando ampliar a possibilidade de geometrias utilizadas e melhorar o cálculo das tensões no adesivo. O programa foi executado utilizando o software *MatLab*[®] 2015.

O fluxograma da Figura 6.1 mostra as etapas de execução programa.

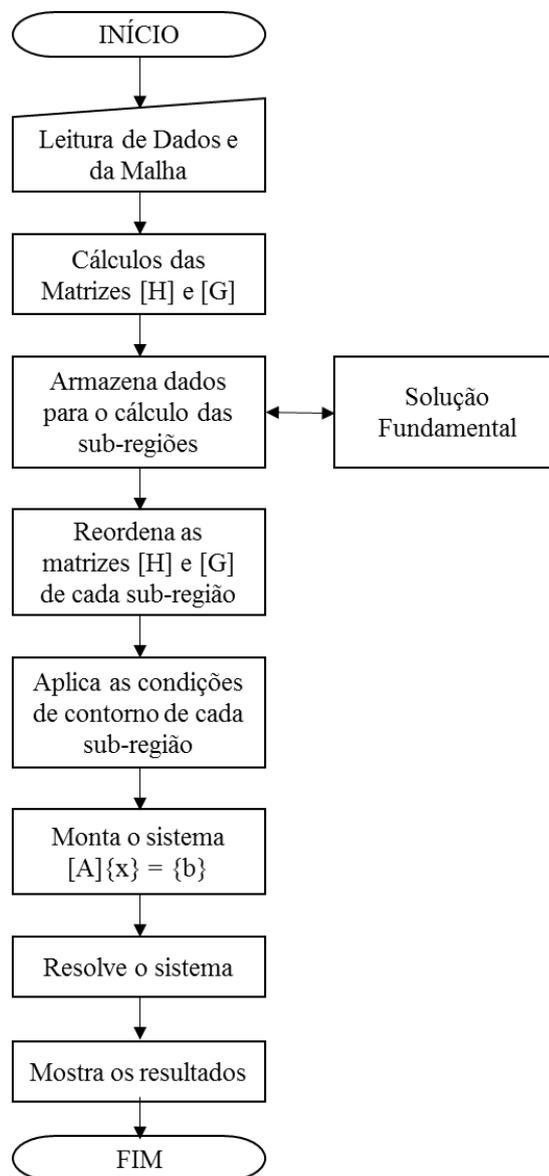


Figura 6.1 - Fluxograma do programa utilizado para análise da junta

6.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Devido à possibilidade de comparação com modelos analíticos, a geometria estudada nesse trabalho foi uma junta de sobreposição simples (SLJ). A Figura 6.2 mostra a forma da junta utilizada no trabalho, ressaltando a região onde existe a presença do adesivo.

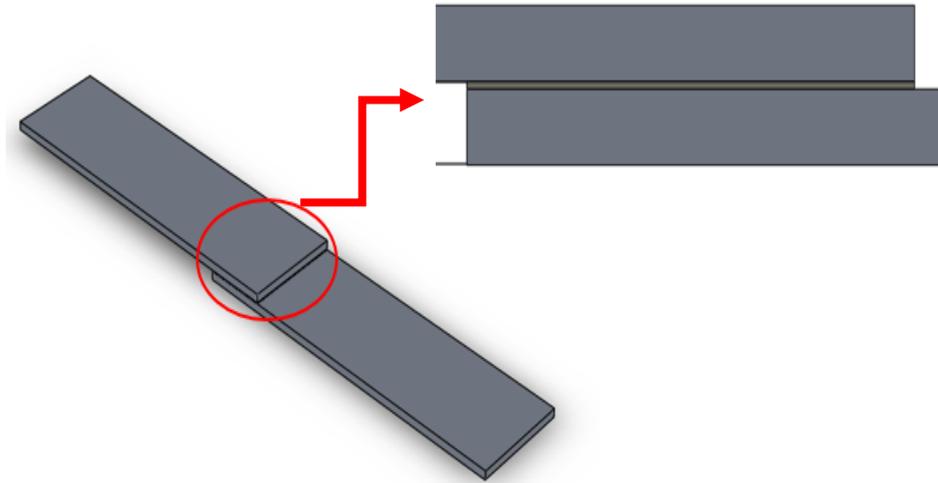


Figura 6.2 - Junta de Sobreposição Simples.

As dimensões da junta analisada encontram-se na Figura 6.3 e na Tabela 6.1.

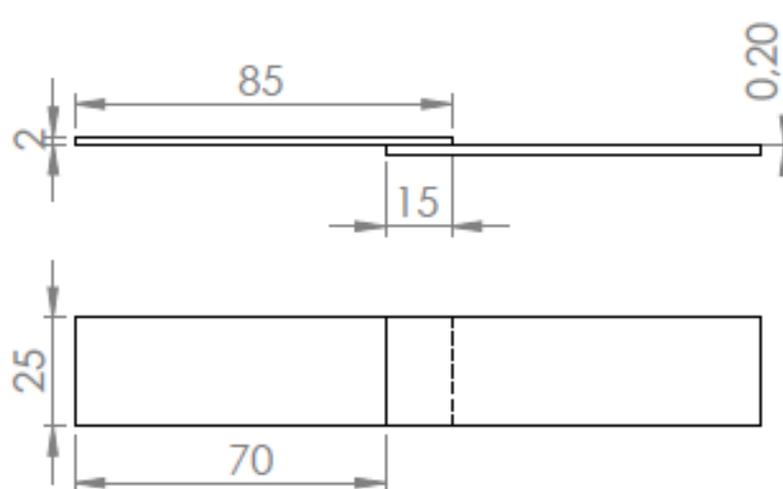


Figura 6.3 - Dimensões da junta analisada

Tabela 6.1 - Dimensões da junta analisada

Variável	Descrição	Valor (mm)
b	Largura da Junta	25
el	Comprimento da zona livre do aderente	70
l	Comprimento da zona colada	15
t	Espessura do Aderente	2
t_a	Espessura do Adesivo	0,2

Estas dimensões foram usadas em todos os casos, exceto quando citado alguma nova dimensão no texto. Por exemplo, no estudo da influência dos efeitos de borda, a dimensão utilizada para o comprimento da zona livre do aderente foi de 5 mm. O mesmo acontece com a espessura do adesivo e a espessura do aderente quando se estuda a influência dos mesmos nos resultados.

Durante a análise, a extremidade esquerda do aderente superior foi considerada engastada, e a extremidade direita do aderente inferior foi considerada tracionada por uma força de 1000 N, como mostra a Figura 6.4.

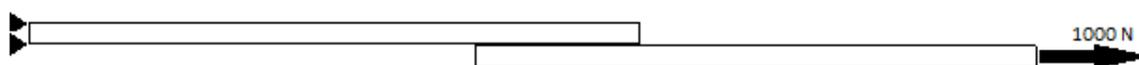


Figura 6.4 - Condição de Contorno utilizada na junta

6.2.1 Propriedades dos materiais

Para os aderentes, o material utilizado foi a liga de alumínio aeronáutico 7075-T651. A escolha foi baseada na sua alta aplicação no meio aeronáutico. As propriedades do alumínio encontram-se na Tabela 6.2. Esses valores foram obtidos no catálogo da distribuidora Coppermetal.

Tabela 6.2- Propriedades do alumínio 7075-T651. (Coppermetal)

Propriedade	Descrição	Valor
E (GPa)	Módulo de elasticidade	73,10
ν	Razão de Poisson	0,3

O adesivo selecionado foi o AF163-2K produzido pela 3M. A escolha foi realizada devido a sua difusão no meio aeronáutico. As propriedades do adesivo encontram-se na Tabela 6.3, os valores foram retirados do catálogo da fabricante.

Tabela 6.3 --Propriedades do adesivo AF163-2K. (3M, 2009)

Propriedade	Descrição	Valor
E (GPa)	Módulo de Elasticidade	1,12
ν	Razão de Poisson	0,34
τ_{MAX} (MPa)	Máxima Tensão de Cisalhamento	48,51
σ_{MAX} (MPa)	Máxima Tensão de Descolamento	48,26

As principais características desse adesivo são:

- Alta capacidade de fixação entre -55 ° C e 121 ° C;
- Alta resistência ao cisalhamento e ao descolamento;
- Alta resistência a ambientes com umidade elevada, antes e após a cura;
- Curto tempo de cura a 107 °C (90 min);
- Capacidade de ligação em baixa pressão;
- Capacidade de cura no vácuo.

Para bom funcionamento do adesivo é necessário que sua aplicação seja realizada em uma superfície completamente limpa, seca e sem gordura. Métodos de limpeza que produzam uma superfície livre de água costumam ser satisfatórios.

6.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DA MALHA

Afim de evitar custos computacionais desnecessários, uma análise de convergência da malha foi realizada.

A Figura 6.5 mostra a variação da tensão máxima de cisalhamento e da tensão máxima de descolamento na junta em função do número de elementos na malha. Já a Figura 6.6 mostra a variação das tensões mínimas.

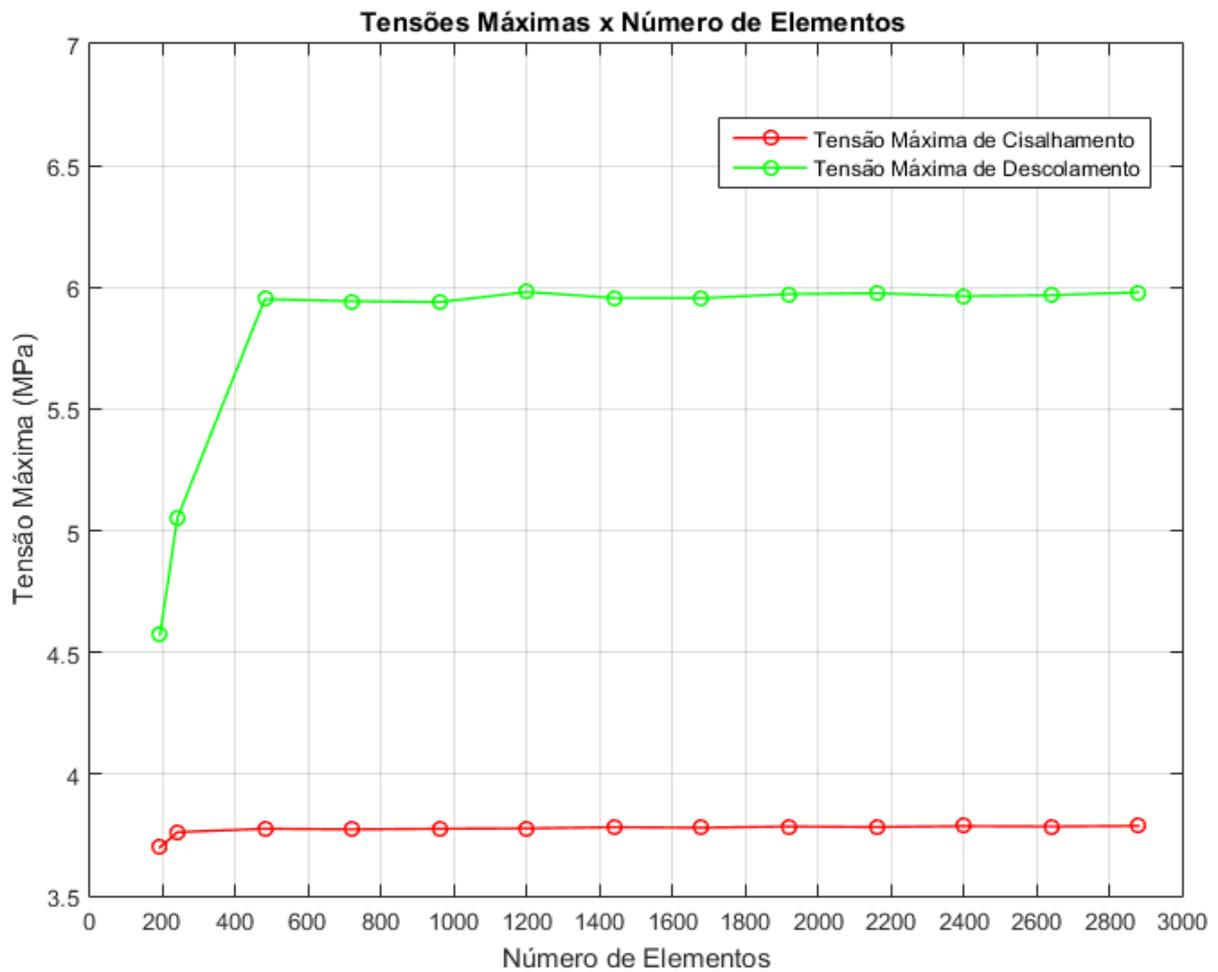


Figura 6.5 - Tensões máximas de cisalhamento e descolamento relacionadas ao número de elementos da malha.

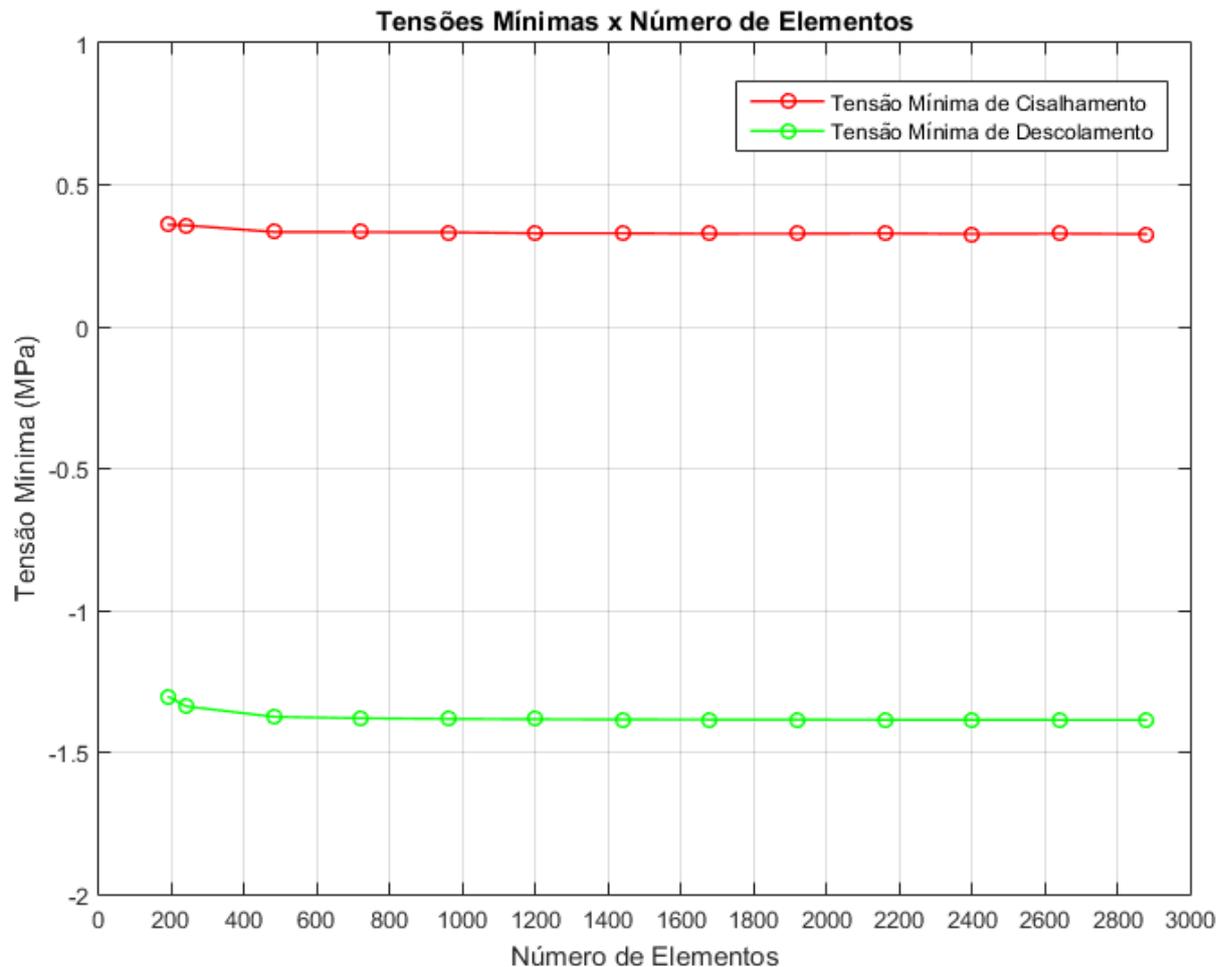


Figura 6.6 - Tensões mínimas de cisalhamento e descolamento relacionadas ao número de elementos da malha.

Analisando a Figura 6.5 e a Figura 6.6, pode-se notar que, em aproximadamente 1400 elementos ocorre uma convergência no valor de cada uma das tensões. Nesse valor também foi notada uma excelente qualidade nas curvas de descolamento e cisalhamento. Assim, ele foi adotado nas demais análises.

A Figura 6.7 mostra o tempo de execução do programa em função do número de elementos. Para essa análise, o software MatLab® 2015 foi executado no Ubuntu 14.06, em uma máquina que utiliza um processador Intel® Core™ i7-4500U CPU @1.80GHz e memória instalada de 8,00 GB.

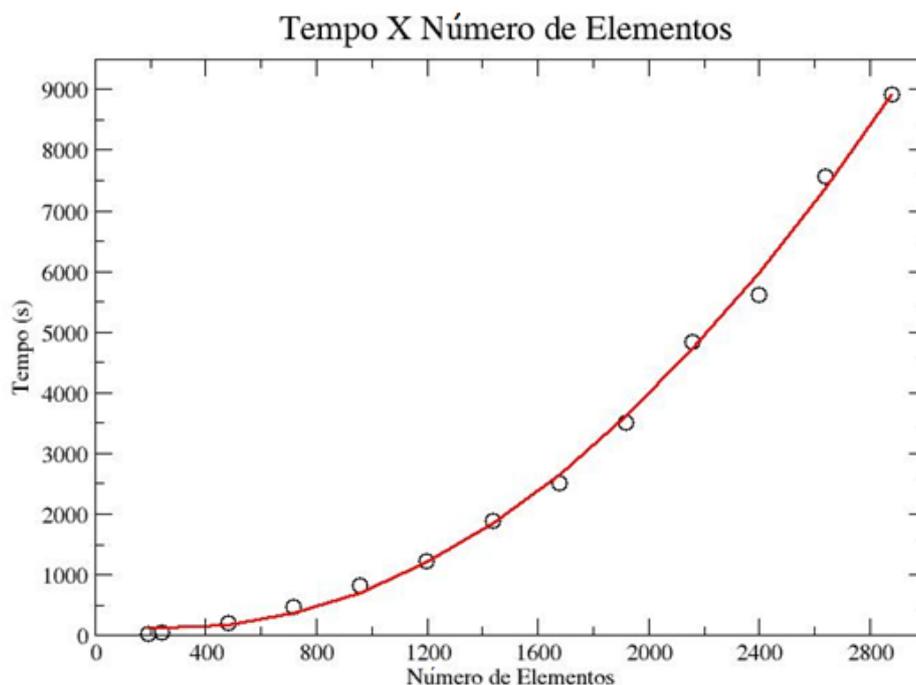


Figura 6.7 - Tempo x Número de Elementos

Como mostra a Figura 6.7, uma regressão quadrática foi realizada objetivando estimar o tempo de execução em interação futuras. A fórmula que rege o comportamento da curva é mostrada na Equação (6.1).

$$T = 212,47 - 0,74N + 0,0013N^2, \tag{6.1}$$

onde, T indica o tempo de execução do programa em segundos, e N o número de elementos da malha.

O fato de se tratar um algoritmo de complexidade quadrática gera dificuldade na análise de problemas que necessitem de um grande número de elementos para sua solução.

6.4 COMPARAÇÃO COM OS MODELOS ANALÍTICOS

Com a análise de convergência da malha concluída, foi realizada uma comparação entre o modelo numérico utilizando o MEC e os principais modelos analíticos (Volkersen, Goland e Reissner, Hart-Smith). A comparação foi realizada para uma carga de 1000 N.

A Figura 6.8 mostra a comparação da tensão de cisalhamento. Já a Figura 6.9 mostra a comparação da tensão de descolamento.

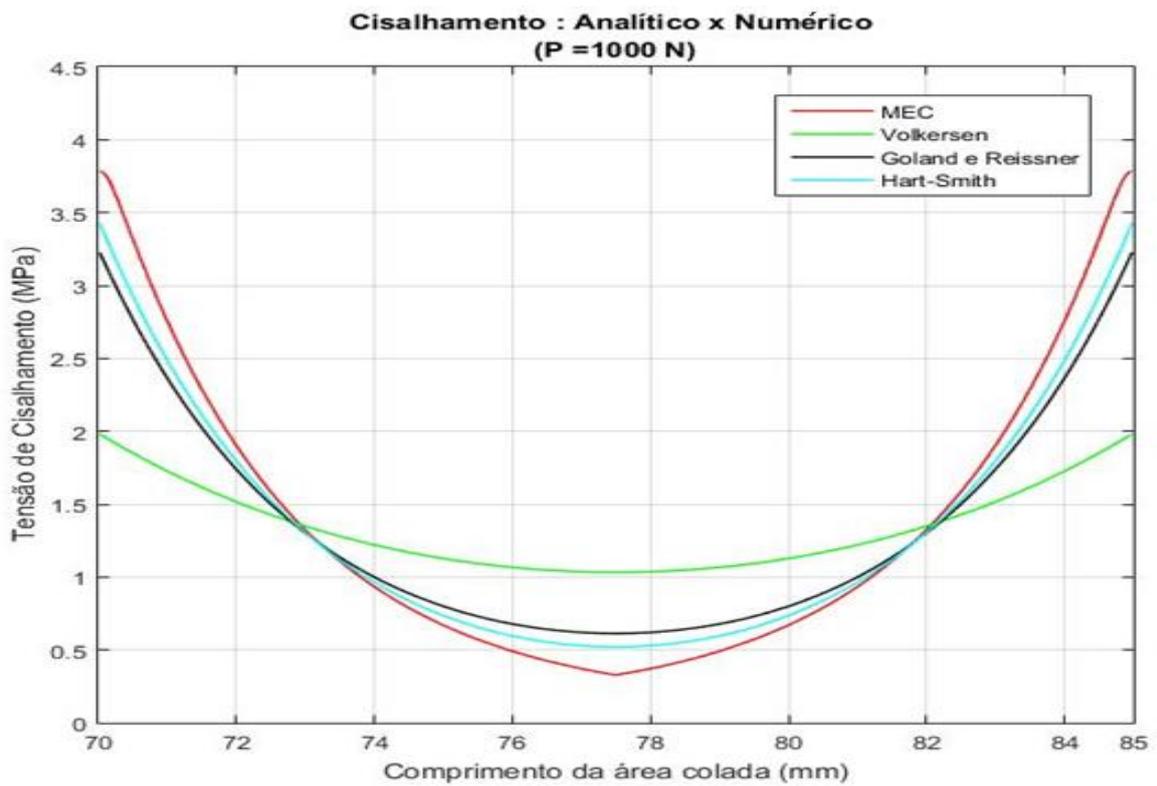


Figura 6.8 - Comparação da tensão de cisalhamento entre modelo analíticos e o modelo numérico para uma carga de 1000N.

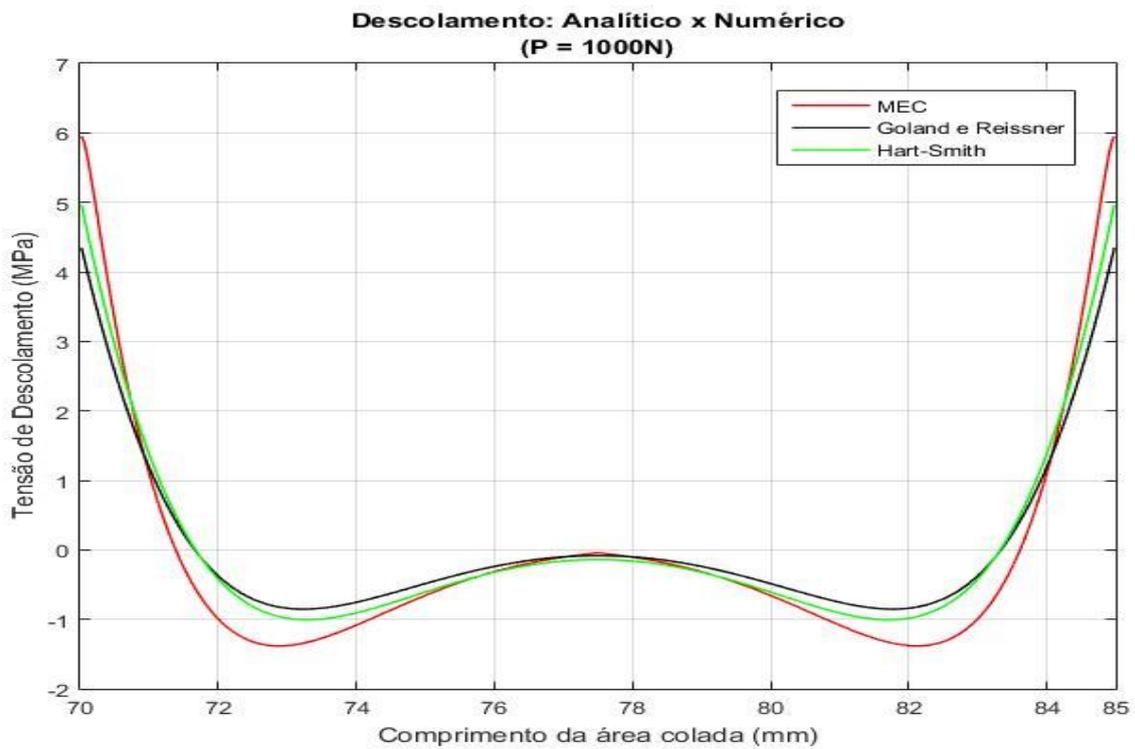


Figura 6.9 - Comparação da tensão de descolamento entre modelo analíticos e o modelo numérico para uma carga de 1000N.

Analisando os gráficos, pode-se notar uma boa concordância entre as curvas, principalmente, entre o modelo numérico e os modelos de Goland e Reissner (1944) e Hart-Smith (1973b), tanto para as tensões de cisalhamento, quanto para as tensões de descolamento. Quando se compara o valor da tensão máxima de cisalhamento no adesivo, o modelo de Goland e Reissner (1944) apresentou uma diferença de 0,55 MPa, enquanto o valor para o modelo de Hart-Smith (1973b) foi de -0,35 MPa. Analisando esta diferença da tensão mínima, esses valores passam a ser 0,28 MPa e 0,19 MPa, para o primeiro e segundo modelo, respectivamente. Na análise da Figura 6.9, o modelo Goland e Reissner (1944) apresentou uma diferença 1,6 MPa no valor da tensão máxima e 0,53 MPa no valor da tensão mínima. Já para o de Hart-Smith (1973b) esses valores foram 0,98 MPa e 0,37 MPa, respectivamente.

O modelo de Volkersen (1938) apresentou os resultados mais discrepantes em comparação com o modelo numérico, -1,8 MPa para a tensão máxima e 0,7 MPa para a tensão mínima. Isso ocorreu, pois neste modelo o efeito da flexão dos aderentes é desconsiderado, resultando em menores tensões de cisalhamento na extremidade do adesivo.

Como medida de erro entre o modelo número e os modelos analíticos a raiz do valor quadrático médio (RMS) do erro normalizado foi utilizada. Esse medidor é dado por:

$$e_{rms} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - y_a)^2}{n}}}{y_{max} - y_{min}}, \quad (6.2)$$

onde y_t é o valor da variável calculada numericamente no nó t , y_a é o valor da variável calculada analiticamente no mesmo ponto, n é o número de nós, y_{max} e y_{min} são os valores máximos e mínimos da variável y_a . Esse é um bom medidor da acurácia do método e, por ser normalizado e não depender de escala, pode ser usado para comparar problemas distintos. O erro máximo também foi calculado sendo este definido por:

$$e_{MAX} = \max (y_t - y_a), \text{ para } j = 1, 2, \dots, N \quad (6.3)$$

Os resultados obtidos encontram-se na tabela

Tabela 6.4 - Erro entre o modelo numérico e os modelos analíticos.

	e_{rms}		e_{MAX} (MPa)	
	Cisalhamento	Descolamento	Cisalhamento	Descolamento
Volkersen	71,37%	-	1,81	-
Goland e Reissner	25,74%	49,37%	0.63	1,68
Hart – Smith	17,75%	36,16%	0.45	1.09

Após a análise de erro, pode-se notar que o modelo de Hart-Smith (1973b) apresentou os melhores resultados, tanto para tensão de cisalhamento (17,75%) quanto para tensão de descolamento (36,16%). O valor do erro para a tensão de descolamento não foi calculado para o modelo de Volkersen (1938), pois o mesmo não permite o cálculo desta tensão.

6.5 ANÁLISE DA VARIAÇÃO DE ESPESSURA DO ADESIVO E ADERENTE

Afim de estudar os efeitos da variação de espessura do adesivo (t_a) na junta colada, foram gerados gráficos de distribuição de tensão de cisalhamento e deslocamento para cinco espessuras diferentes: 0,05, 0,1, 0,2, 0,5 e 1 mm. A análise foi realizada utilizando o MEC e o modelo analítico de Hart-Smith (1973b).

A Figura 6.10 e a Figura 6.11 mostram, respectivamente, as distribuições das tensões de cisalhamento e descolamento na junta utilizando o MEC. As Figura 6.12 e Figura 6.13 mostram as mesmas distribuições, porém utilizando o modelo de Hart-Smith (1973b).

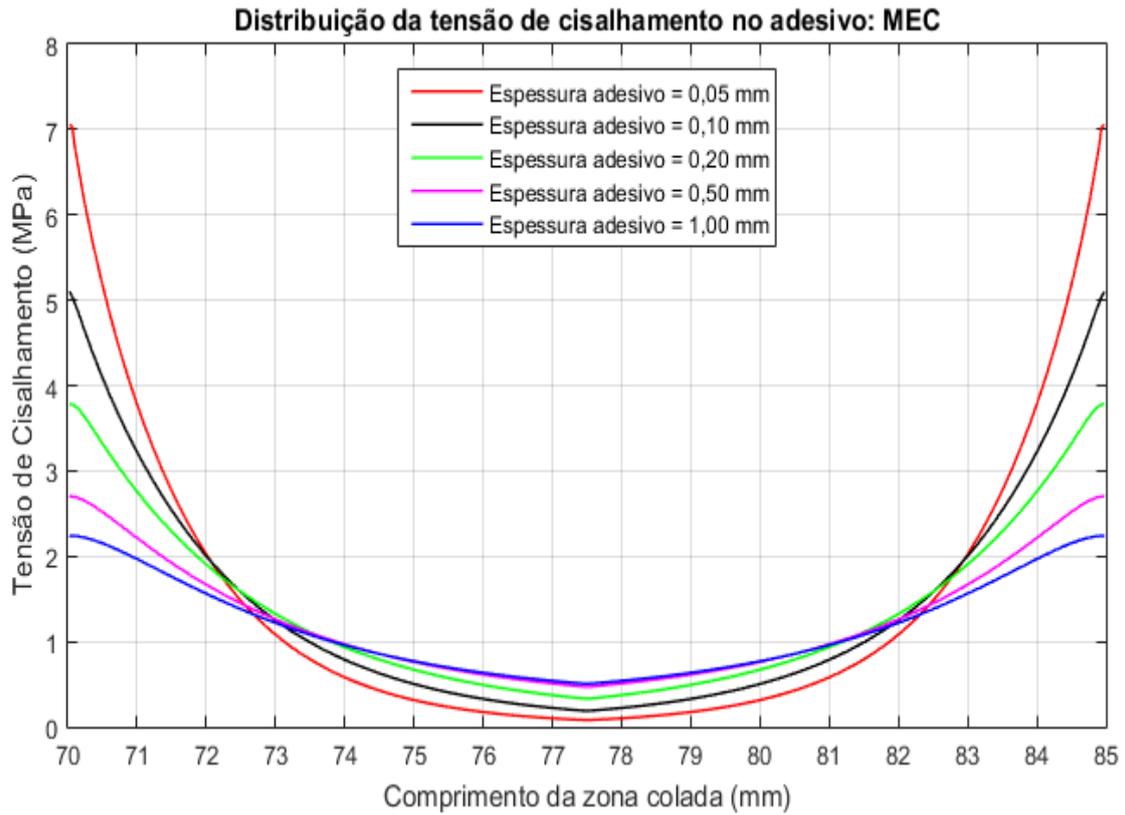


Figura 6.10 - Distribuição da tensão de cisalhamento para cinco espessuras diferentes ao longo de toda a área colada utilizando o MEC.

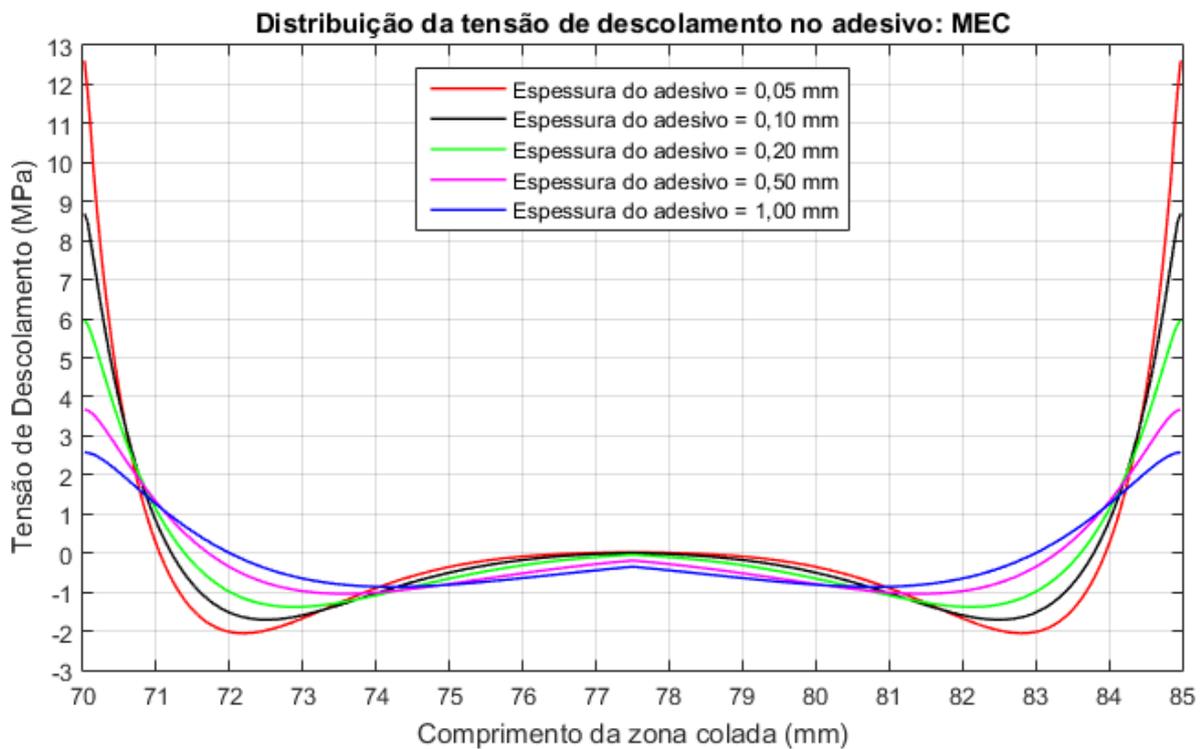


Figura 6.11 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de adesivos diferentes ao longo de toda a área colada utilizando o MEC.

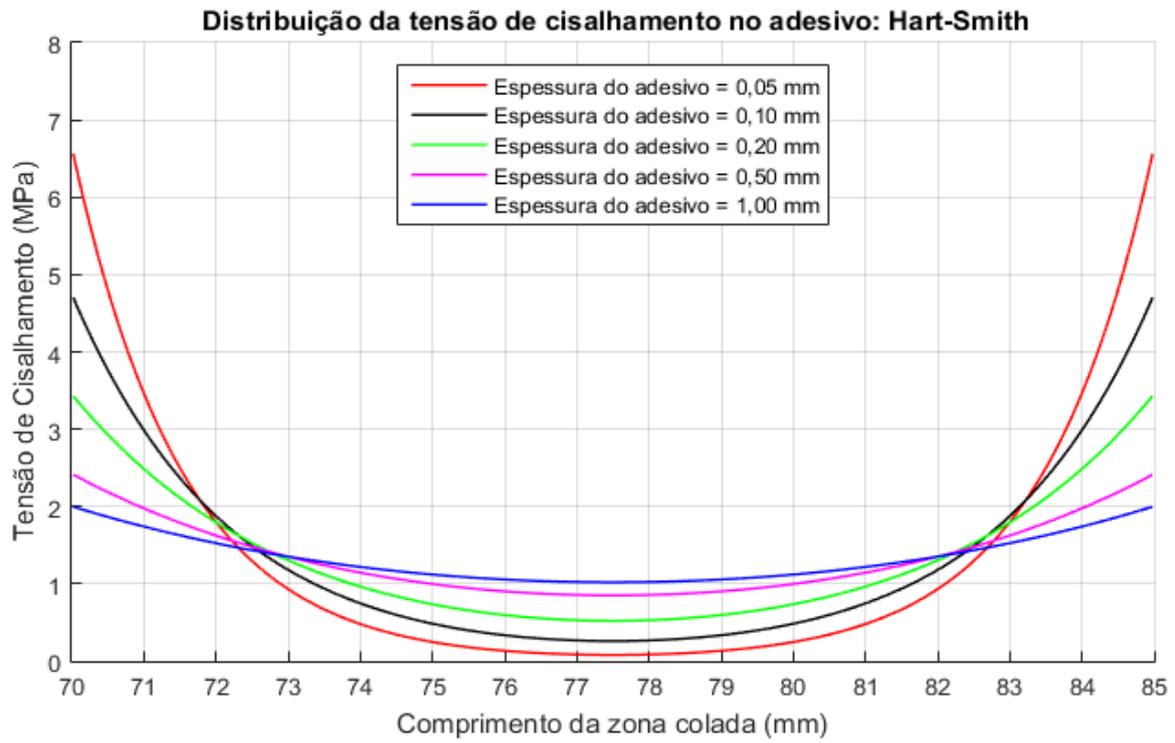


Figura 6.12 - Distribuição da tensão de cisalhamento para cinco espessuras de adesivo diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.

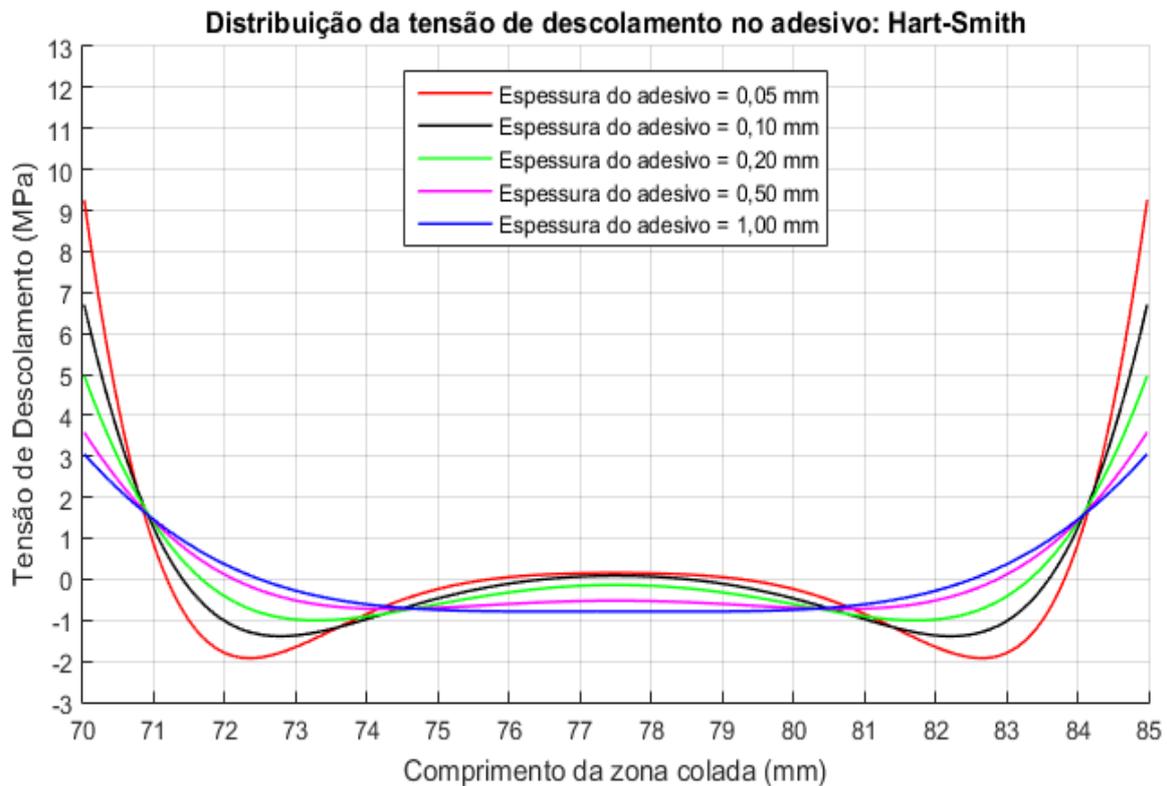


Figura 6.13 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de adesivo diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.

Observando os gráficos de tensão de cisalhamento, pode-se notar que com a diminuição da espessura ocorre um aumento da tensão nas bordas do adesivo e uma redução no centro da junta. Nos gráficos de tensão de descolamento também é possível notar um aumento da tensão na borda com a diminuição da espessura, porém, diferente do que ocorre no cisalhamento, a tensão no centro da junta também aumenta.

Quando se compara os resultados obtidos para tensão de descolamento utilizando o MEC e os obtidos utilizando o modelo de Hart-Smith (1973b), nota-se que no primeiro caso, independente da espessura da junta a curva mantém o mesmo formato, o que não ocorre com o modelo analítico. Por isso, os modelos analíticos mostram melhores resultados em juntas em que a espessura do adesivo é muito menor que a dos aderentes, razão de cerca de 1/10.

Também foi realizado um estudo dos efeitos da variação de espessura dos aderentes (t) na junta colada, foram gerados gráficos de distribuição de tensão de cisalhamento e deslocamento para cinco espessuras diferentes: 1,0, 1,5, 2,0, 2,5 e 3,0 mm. A análise foi realizada utilizando o MEC e o modelo analítico de Hart-Smith (1973b).

A Figura 6.14 e a Figura 6.15 mostram as distribuições das tensões de cisalhamento e descolamento na junta utilizando o MEC. A Figura 6.16 e a Figura 6.17 mostram as mesmas distribuições, porém utilizando o modelo de Hart-Smith (1973b).

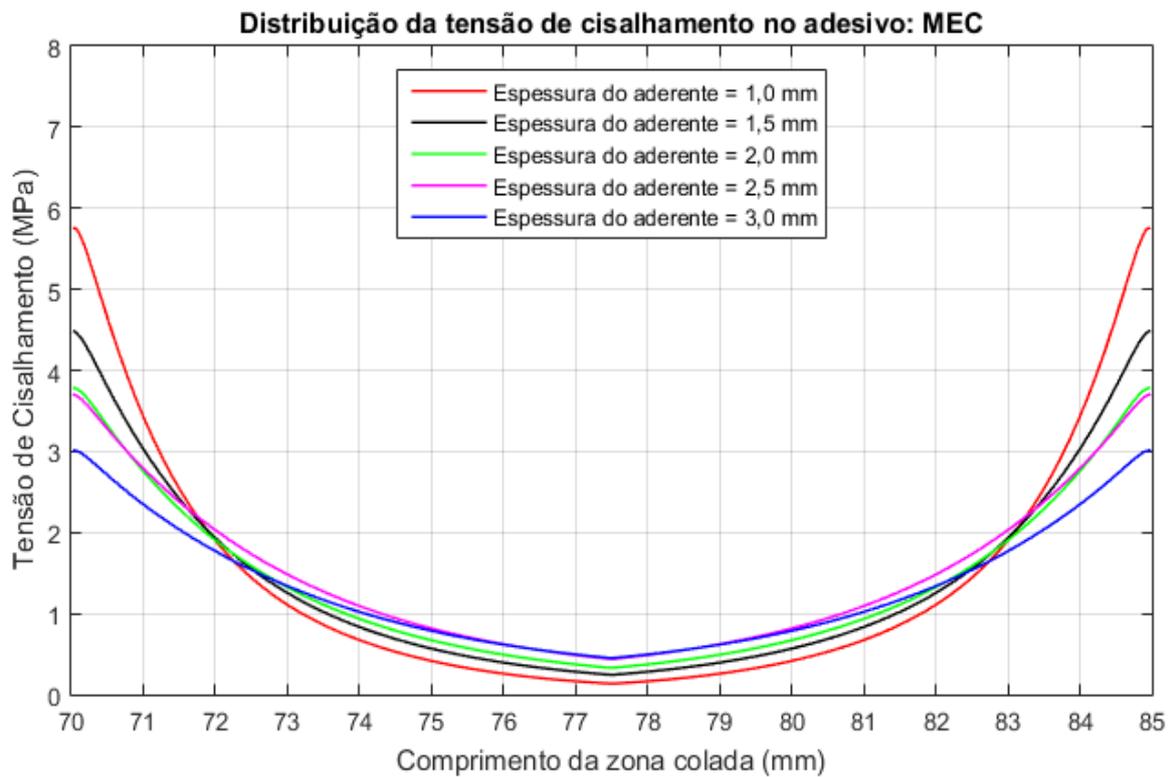


Figura 6.14 - Distribuição da tensão de cisalhamento para cinco espessuras diferentes do aderente ao longo de toda a área colada utilizando o MEC.

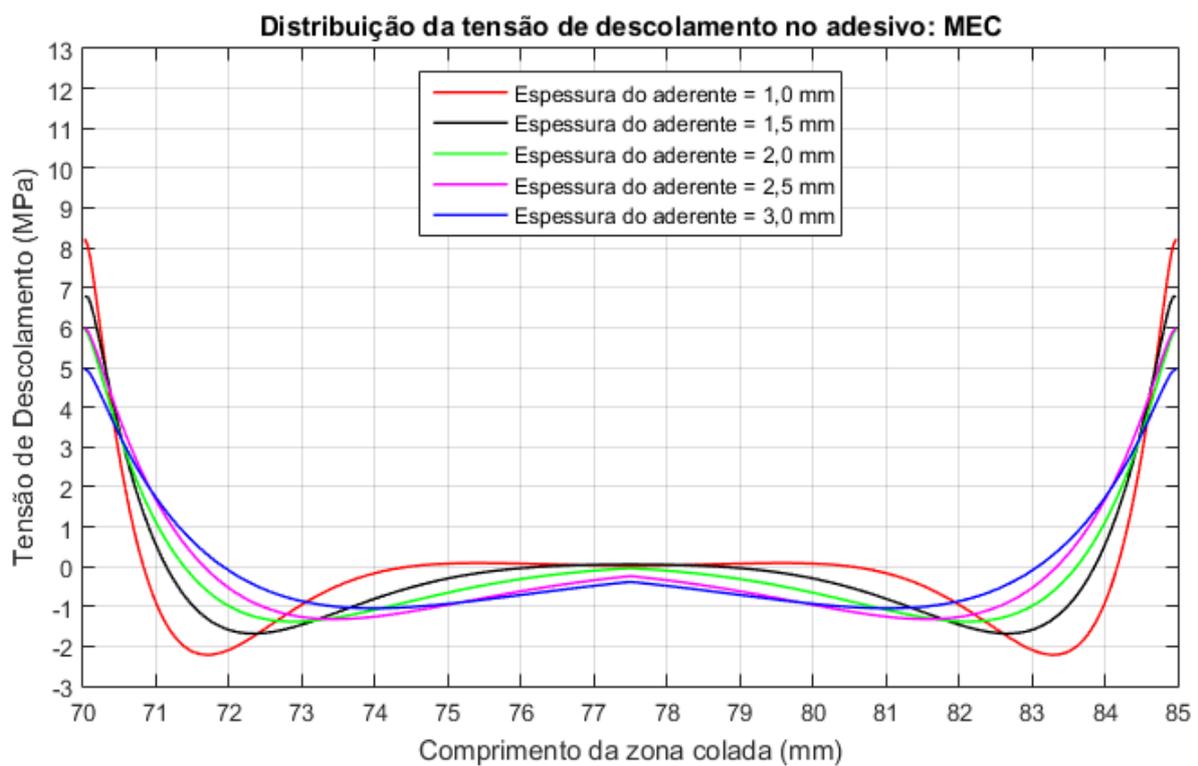


Figura 6.15 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras do aderente diferentes ao longo de toda a área colada utilizando o MEC.

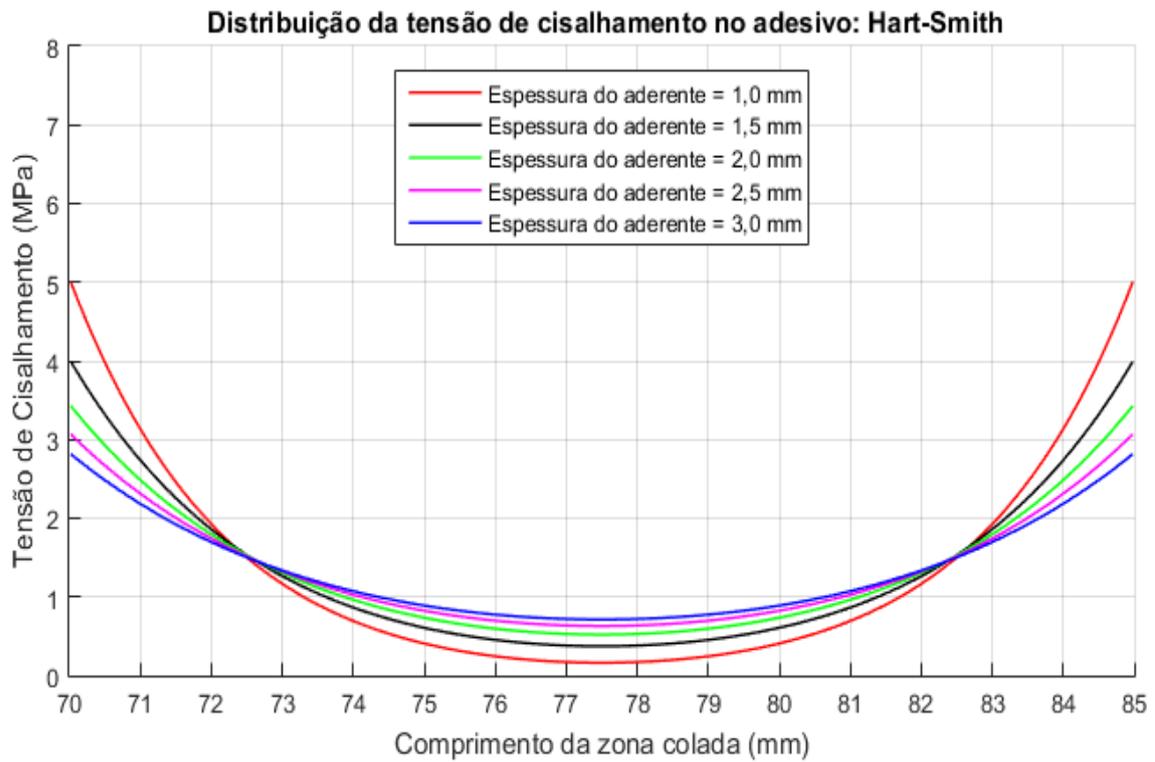


Figura 6.16 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de aderentes diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.

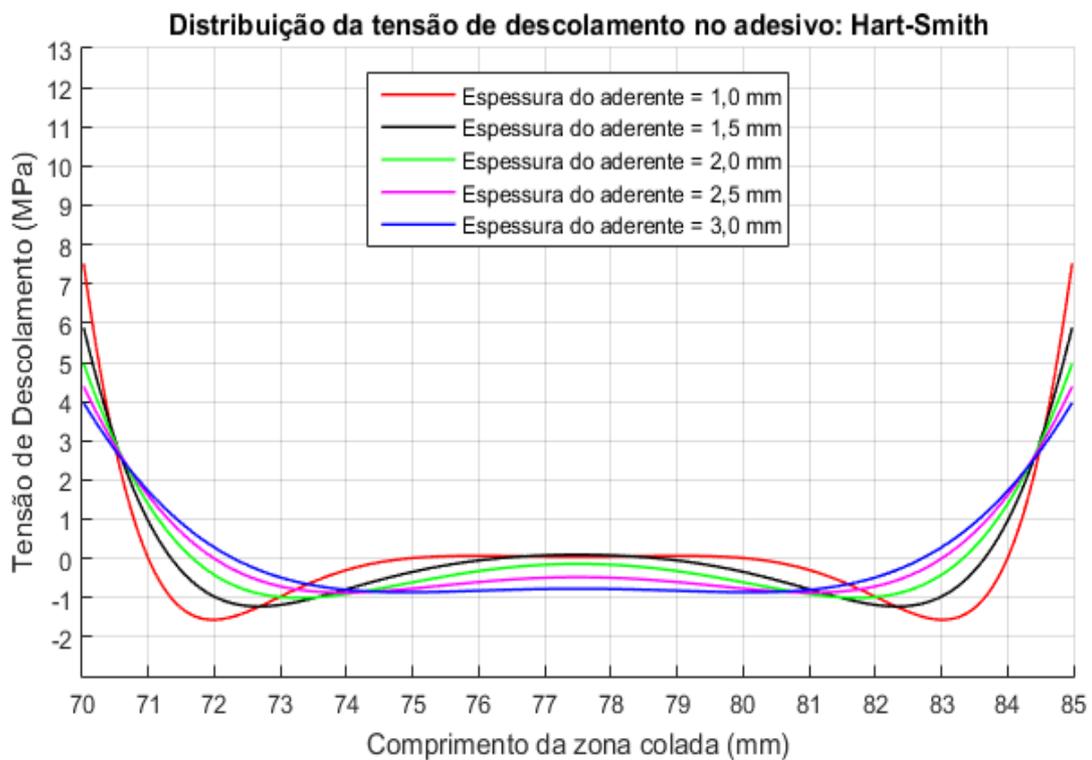


Figura 6.17 - Distribuição da tensão de descolamento para cinco espessuras de aderentes diferentes em toda a área colada utilizando o modelo de Hart-Smith.

Analisando os gráficos, pode-se notar que as mudanças nas curvas são semelhantes às que acontecem quando se varia a espessura do adesivo. Porém, observa-se que a junta é menos sensível às variações na espessura dos aderentes do que àquelas na espessura do adesivo. Um acréscimo de 0,95 mm na espessura adesivo, resultou em uma diminuição de 4,85 MPa na tensão máxima de cisalhamento e 10,43 MPa na tensão máxima de descolamento. Já um acréscimo de 2 mm na espessura do aderente, resultou em uma diminuição de 2,80 MPa na tensão máxima de cisalhamento e 3,14 MPa na tensão máxima de descolamento.

Uma análise linear elástica mostra que a distribuição de tensões em uma junta fina tem maior concentração de tensões nas bordas. Ou seja, uma junta espessa terá uma distribuição de tensões mais uniforme. Assim, uma junta fina tende a ter o início de escoamento a uma carga menor. Porém, quando o escoamento inicia em uma junta espessa, existe uma menor reserva elástica para sustentar o incremento de carga, fazendo com que o escoamento completo ocorra mais rápido. Esse efeito faz com que a carga de falha total diminua com o aumento da espessura do adesivo.

6.6 EFEITO DE BORDA

A presença de uma zona livre do aderente com um grande comprimento, quando comparado com a região colada, vem da necessidade de reduzir o efeito de borda. Nas primeiras análises, o comprimento da zona livre do aderente utilizado foi de 5 mm, o que resultou em uma não concordância no cálculo das tensões de cisalhamento e descolamento, quando comparado com os modelos analíticos. O resultado obtido é mostrado na Figura 6.18 e na Figura 6.19.

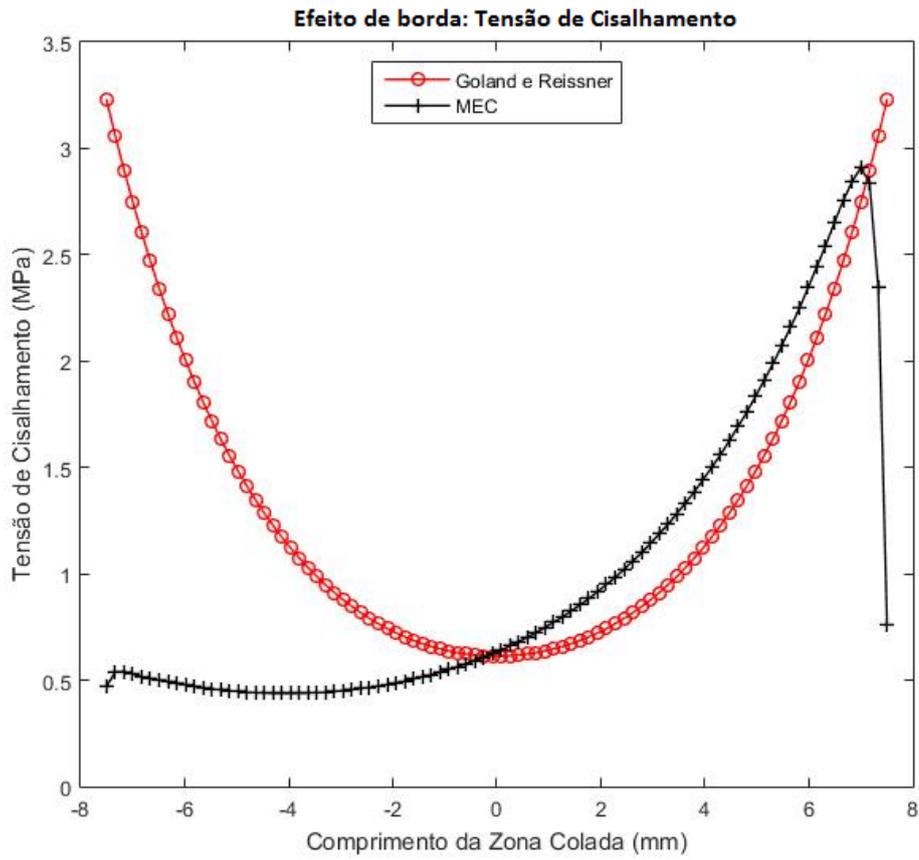


Figura 6.18 - Tensão de Cisalhamento no adesivo para $el = 5\text{mm}$.

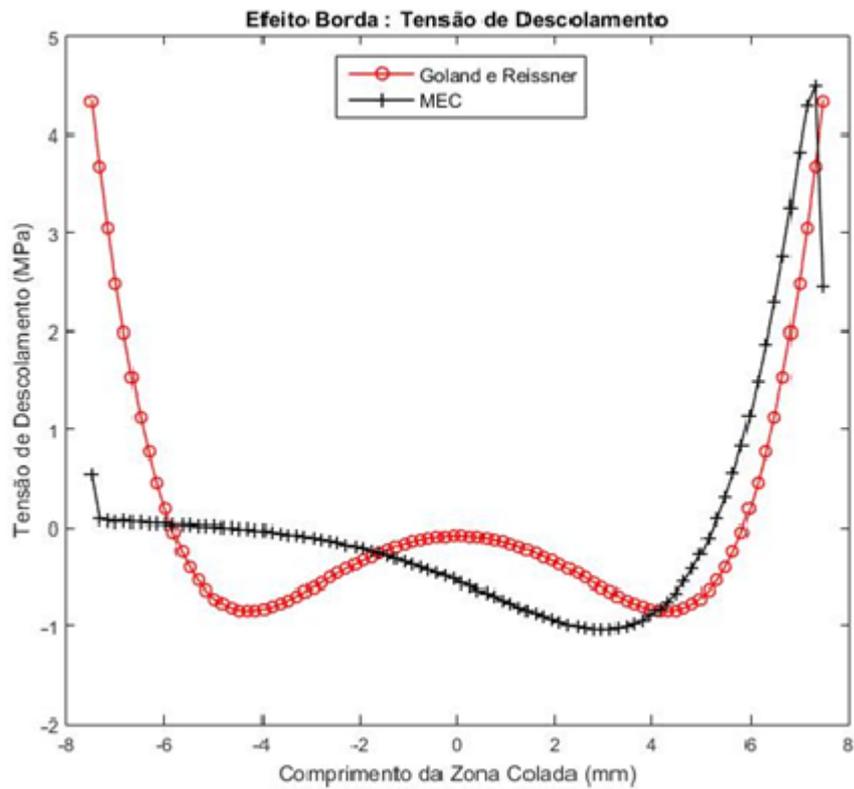


Figura 6.19 - Tensão de Descolamento no Adesivo para $el = 5\text{mm}$.

Nos casos onde a zona livre do aderente é pequena, o uso de modelos analíticos pode levar a resultados errados, uma vez que eles consideram a flexão pura dos aderentes e simetria de deformações e tensões em relação ao centro da região colada.

6.7 EFEITO DO CHANFRO EM UMA JUNTA POR SOBREPOSIÇÃO SIMPLES

Na indústria automotiva e aeronáutica, para a redução das tensões de cisalhamento e descolamento na junta, é comum a realização de uma chanfradura. Para analisar os efeitos dessa técnica, foi realizado um corte da aresta da junta mostrada na seção 6.2. A Figura 6.20 mostra as dimensões da junta chanfrada.

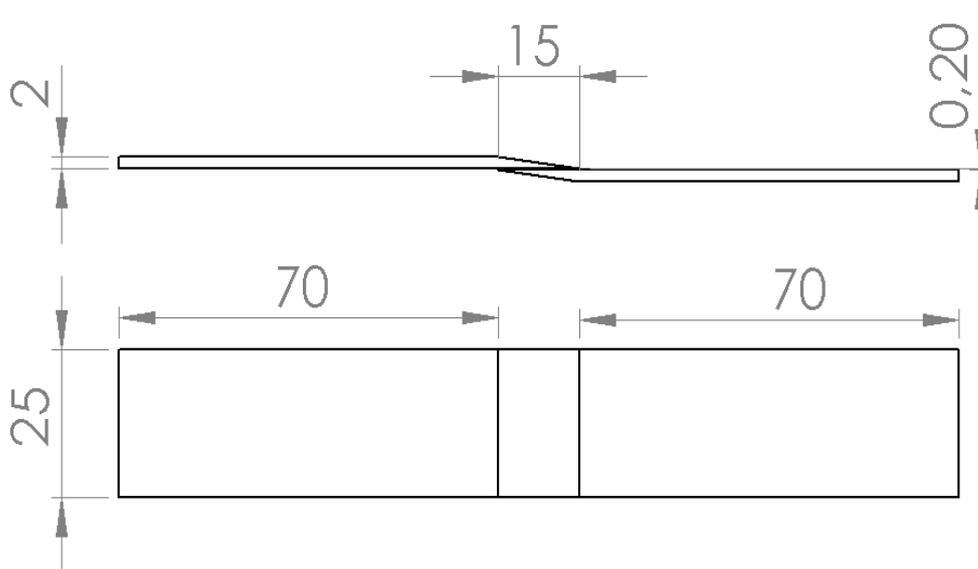


Figura 6.20 - Dimensões da junta chanfrada.

As tensões de cisalhamento e descolamento da junta chanfrada foram comparadas com as obtidas para a junta sem chanfro. Os resultados encontram-se na Figura 6.21 e na Figura 6.22.

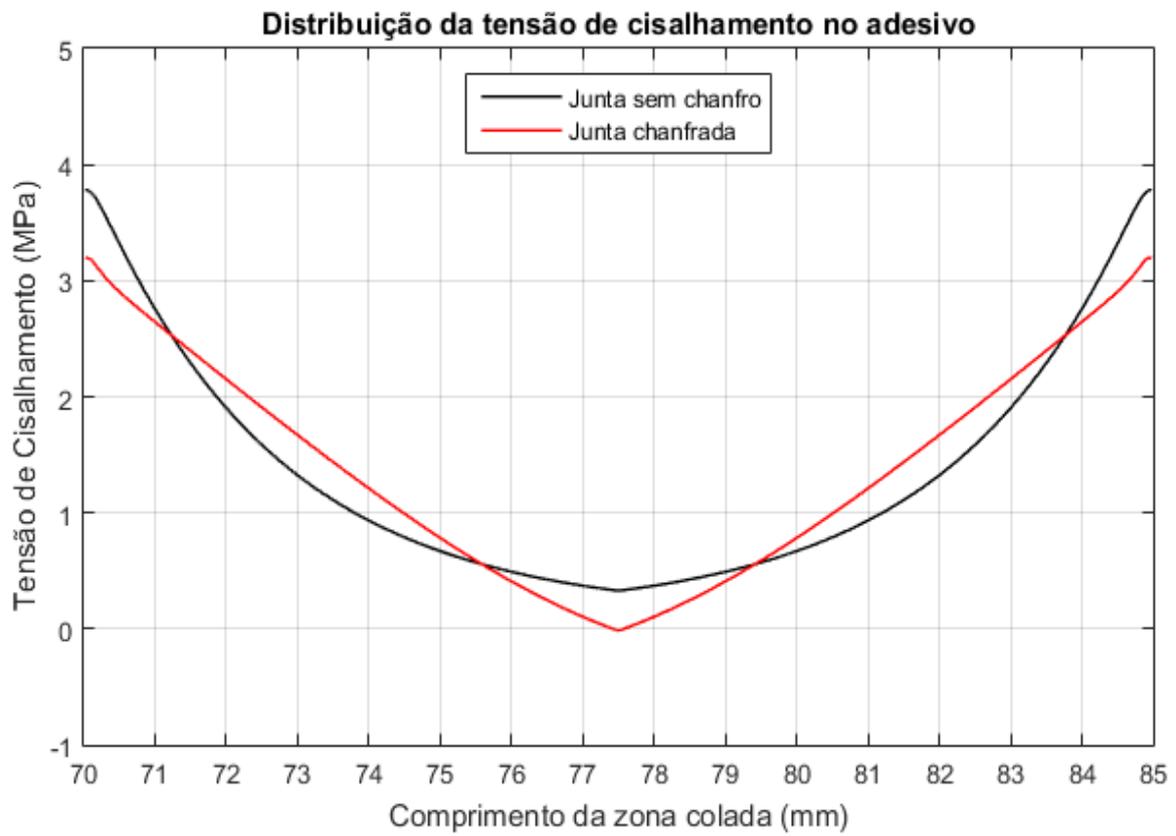


Figura 6.21 - Comparação da distribuição da tensão de cisalhamento nas juntas.

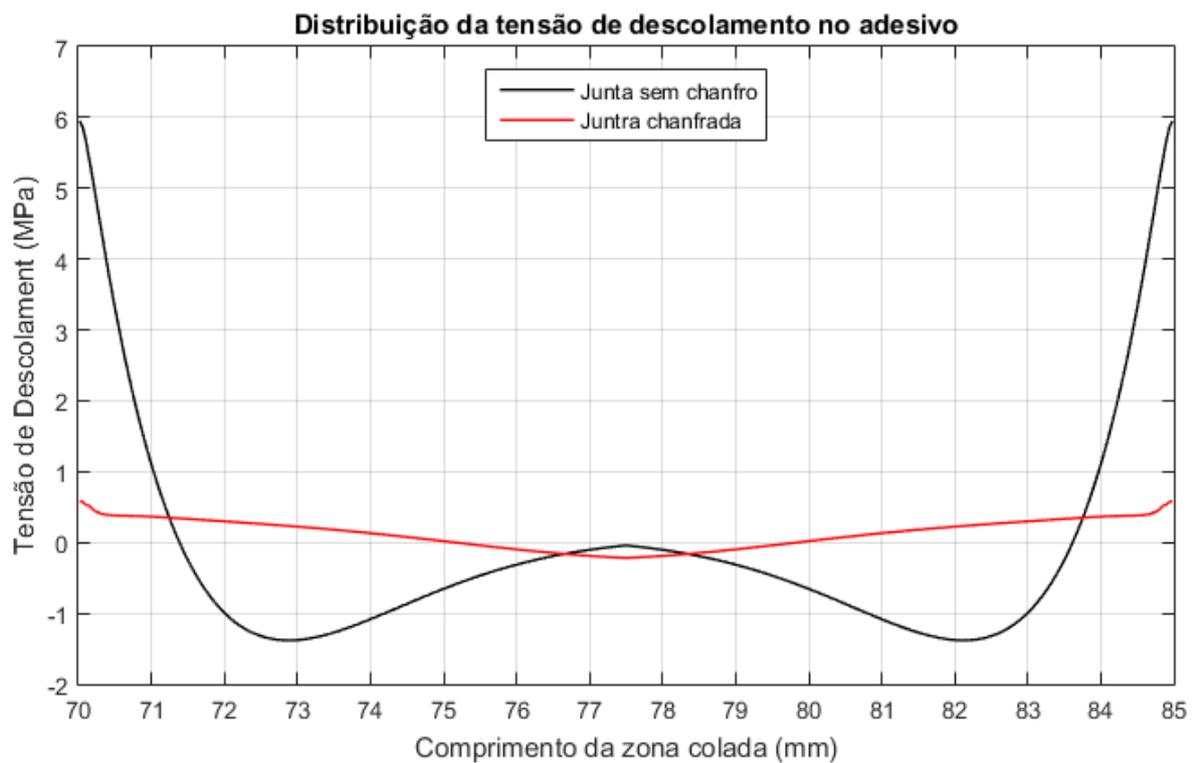


Figura 6.22 - Comparação da distribuição da tensão de descolamento nas juntas.

Analisando a Figura 6.21, pode-se notar uma redução de 15,41 % (0.58 MPa) no valor da tensão de cisalhamento máxima, localizada na extremidade da zona colada. No centro da junta, a redução foi de 103%, porém isso representa uma queda de tensão de apenas 0.35 MPa. Quando se compara o decaimento da tensão do ponto máximo ao mínimo, pode-se notar um comportamento bem mais linear na junta chanfrada.

Quando se analisa o gráfico da tensão de descolamento (Figura 6.22), pode-se notar uma diminuição considerável na tensão da junta, na extremidade da zona colada este decaimento é de 90,22 % (5.37 MPa). O valor da tensão de descolamento torna-se quase nulo ao longo de toda a zona colada.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

A partir das discussões estabelecidas neste trabalho, foi possível formular e fundamentar a análise de juntas metálicas coladas. Inicialmente, foi possível observar as principais vantagens: possibilidade de formação de estruturas de baixo peso, fortes e compactas e melhor eficiência na transferência de tensões entre aderentes. Assim como as principais desvantagens: sensibilidade às tensões normais e ausência de ensaios não destrutivos confiáveis para a verificação da integridade e eficiência. Também foi possível observar as principais aplicações e a evolução no estudo desse tipo de ligação.

Na segunda etapa, foram estudados os modelos analíticos e os critérios de falha sob carregamentos estáticos, possibilitando assim futuros dimensionamentos e estudos da resistência das juntas. Na terceira etapa do trabalho, foi realizado um estudo, ainda analítico, sobre a resistência à fadiga e a vida de juntas coladas.

Por fim, o Método dos Elementos de Contorno foi utilizado para análise de uma junta por sobreposição simples. Durante as primeiras análises, notou-se a presença de um efeito de borda, gerando uma grande diferença entre os resultados das tensões de cisalhamento e descolamento, mostrando que os modelos analíticos devem ser aplicados para juntas com um grande comprimento da zona livre de aderente. Assim, fez-se necessária a utilização de uma zona do livre do aderente com comprimento de, aproximadamente, 5 vezes o comprimento da área colada.

Quando os resultados utilizando o MEC foram comparados com os resultados obtidos utilizando os modelos analíticos, pode-se notar, inicialmente, uma boa concordância entre as curvas, principalmente com os modelos que levam em consideração efeito da flexão dos aderentes. Quando se comparou o valor da tensão máxima de cisalhamento no adesivo, o modelo de Goland e Reissner (1944) apresentou uma diferença de 0,55 MPa, enquanto o valor para o modelo de Hart-Smith (1973b) foi de 0,35 MPa. Analisando esta diferença para a tensão de cisalhamento mínima, esses valores passam a ser 0,28 MPa e 0,19 MPa, para o primeiro e segundos modelo, respectivamente. Na análise da tensão de descolamento, o modelo Goland e Reissner (1944) apresentou uma diferença de 1,6 MPa no valor da tensão máxima e 0,53 MPa no valor da tensão mínima. Já para o de Hart-Smith (1973b) esses valores foram 0,98 MPa e 0,37 MPa, respectivamente. No centro da curva da tensão de descolamento, a diferença entre os 3 modelos foi menor que 1%. O modelo de Volkersen (1938) apresentou os resultados mais discrepantes em comparação com o modelo numérico, 1,8 MPa para a tensão máxima e 0,7 MPa para a tensão mínima. Isso ocorreu, pois neste modelo o efeito da flexão dos aderentes é desconsiderado, resultando em menores tensões de cisalhamento na extremidade do adesivo. Na análise do erro entre as curvas, o modelo de Hart-Smith (1973b) apresentou os melhores resultados, tanto para tensão de cisalhamento (17,75%) quanto para tensão de descolamento (36,16%). O erro obtido pelo modelo de Volkersen

(1938) foi excessivamente alto, 71,37%, mostrando que o modelo deve ser evitado na análise de juntas por sobreposição simples.

Durante a análise de variação de espessura do adesivo, foi observado um aumento significativo nas tensões de cisalhamento e descolamento nas extremidades do adesivo. A principal diferença é que, no centro do adesivo, as tensões de cisalhamento diminuem com o aumento da espessura, enquanto as de descolamento tendem a aumentar. Também foi notado que a curva nos modelos analíticos tende a perder o formato previsto inicialmente quando a espessura dos adesivos ultrapassa o valor de, aproximadamente, 25% da espessura dos aderentes.

O estudo da variação da espessura dos aderentes mostrou resultados semelhantes aos obtidos quando a espessura do adesivo foi variada. Porém, pode-se notar que a junta é menos sensível às variações na espessura dos aderentes do que àquelas na espessura do adesivo. Um acréscimo de 0,95 mm na espessura adesivo, resultou em uma diminuição de 4,85 MPa na tensão máxima de cisalhamento e 10,43 MPa na tensão máxima de descolamento. Já um acréscimo de 2 mm na espessura do aderente, resultou em uma diminuição de 2,80 MPa na tensão máxima de cisalhamento e 3,14 MPa na tensão máxima de descolamento.

No estudo da aplicação do chanfro na junta obteve-se uma redução de 15,22% no valor da tensão de cisalhamento na extremidade do adesivo. Já para a tensão de descolamento este valor foi de 90,22%, sendo que esta tensão se tornou quase nula ao longo da junta. A utilização do chanfro mostrou – se bastante efetiva para redução das tensões na junta.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para continuação dessa linha de pesquisa, segurem-se os seguintes temas:

- Implementar a formulação para uma análise elastoplástica no adesivo;
- Usar métodos rápidos de elementos de contorno para reduzir a complexidade do algoritmo;
- Reescrever o código em uma linguagem de programação mais eficiente, como Fortran, C ou C++;
- Estudar geometrias mais complexas;
- Realizar estudos experimentais e comparar com os resultados obtidos nesse trabalho;
- Implementar um modelo para o cálculo da vida por fadiga.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 3M, 2009. Scotch-Weld Structural Adhesive Film AF 163-2. Disponível em: < <http://multimedia.3m.com/mws/media/282041O/3m-scotch-weld-structural-adhesive-film-af-163-2-af-163-3.pdf> >. Acesso em: 26/07/2016.
- 3M, 2015. Fita VHB para Envidraçamento Estrutural. Disponível em: < <https://goo.gl/a2RIXa> >. Acesso em: 01/06/2016
- Albuquerque, E. L., 2014. “Introdução ao Método dos Elementos de Contorno”. Universidade de Brasília.
- Aliabadi, M. H., 2002. “The Boundary Element Method - Vol. 2 - Applications in Solids and Structures”. John Wiley & Sons.
- Allman, R. D., 1977. “A theory for the elastic stresses in adhesive bonded lap joints”. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, pp. 39-199.
- Anderson, T.L., 1995. “Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications”. CRC Press, Boca Raton.
- Andruet, R., 1998. “Special 2-d and 3-d geometrically nonlinear finite elements for analysis of adhesively bonded joints”. Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg-Virginia.
- Beltrami, E., 1885. “Sulle Condizioni di Resistenza dei Corpi Elastici”. Rend. ist. d. sci. lett.,Cl. mat. nat. 18, pp. 705-714.
- Broxterman, W.E., 2001. “Structural adhesives: Trends and driving forces”. Adhesive and Sealant Council’s Convention & Exposition, New Orleans, LA (USA), Fall 2001.
- Carpenter, W., 1991. “A comparison of numerous lap joint theories for adhesively bonded joints”. Journal of Adhesion 35, 55-73.
- Cetim, 2006. “Guide du collage”. Centre technique des industries mécaniques
- Charalambides, M., Kinloch, A. e Matthews, F., 1997. “Strength prediction of bonded joints”. AGARD Conference on Bolted/ Bonded Joints in Polymeric Composites. AGARD Conference Proceedings CP-590.
- Chen, D. e Cheng, S., 1983. “An analysis of adhesive-bonded single-lap joints”. Journal of Applied Mechanics 50, 109.
- Chihdar, Y. e Pang, S., 1993. “Stress-strain analysis of adhesive-bonded single- lap composite joints under cylindrical bending”. Composite Engineering, pp. 1051-1063.

- Chihdar, Y. e Pang, S., 1996. "Stress-strain analysis of single-lap composite joints under tension". *Journal of Engineering Materials and Technology*, pp. 247-255.
- Clarke, J. e McGregor, I., 1993. "Ultimate tensile stress over a zone: a new failure criterion for adhesive joints". *The Journal of Adhesion*, pp. 227-245.
- Coppermetal. Catálogo de Produtos. Disponível em: http://www.coppermetal.com.br/pdf/catalogo_produtos_coppermetal.pdf. Acesso em : 23/11/2016.
- Cravo, A. G. S., 2008. "Análise de Problemas de Anisotropia 3D com Sub-Regiões Utilizando o Método dos Elementos de Contorno"; Campinas, SP.
- Crocombe, A., 1989. "Global yielding as a failure criteria for bonded joints". *International Journal of Adhesion and Adhesives*, pp. 145-153.
- Çalık, A., 2016. "Effect of adherend shape on stress concentration reduction of adhesively single lap joint". Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering and Architecture, Çukurova University, Adana, Turkey.
- Daniel, I. M., Ishai, O., 1994. *Engineering Mechanics of Composite Material*. New Yourk: Oxford University Press.
- Da Silva, L., das Neves, P., Adams, R. e Spelt, J., 2009a. "Analytical models of adhesively bonded joints - part i: Literature survey". *International Journal of Adhesion & Adhesives* 29, pp. 319-330.
- Dickson, J., Hsu, T. e McKinney, J., 1972. "Development of an understanding of the fatigue phenomena of bonded and bolted joints in advanced lamentary composite materials". Tech. Rep. AFFDL-TR-72-64, Volume 1, Lockheed-Georgia Co.
- Fanton, F., 2012. "Análise de estruturas aeronáuticas reforçadas por doublers colados". Campinas, SP.
- Ficarra, C. H., 2001. "Analysis of adhesive bonded fiber-reinforced composite joints". Raleigh.
- Goland, M. e Reissner, E., 1944. "The stresses in cemented joints". *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, pp. A17-A27.
- Grayley, M., 1978. "Shear stresses in the adhesives in bonded joints: single step double lap joints loaded in tension". Tech. Rep. 78042, ESDU.
- Grayley, M., 1980. "Elastic stresses in the adhesive in single step double lap bonded joints". Tech. Rep. 80011, ESDU.
- Greenwood, L., Boag, T. e McLaren, A., 1969. "Stress distribution in lap joints". *Adhesion: Fundamentals and practice*. pp. 273-279.
- Grimes, C. e Greimann, L., 1975. "Analysis of discontinuities, edge e cts, and joints". Academic Press.

- Hart-Smith, L. J., 1973a. "Adhesive-bonded double lap joints". NASA CR112237, Douglas Aircraft Company, Long Beach.
- Hart-Smith, L. J., 1973b. "Adhesive-bonded double lap joints". NASA CR 112236, Douglas Aircraft Company, Long Beach.
- Hart-Smith, L. J., 1985. "Designing to minimize peel stresses in adhesive-bonded joints. In: Delamination and Debonding of Materials". Pittsburgh, Pennsylvania, USA, pp. 238-266.
- Hetényi, M., 1946. "Beams on elastic foundation". University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Irwin, G. R., 1957. "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate". Journal of Applied Mechanics, pp. 24-361.
- Inglis, C. E., 1913. "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners". Transactions of the Institute of Naval Architects, 55:219.
- King, C., 1978. "Inelastic shear stresses and strains in the adhesives bonding lap joints loaded in tension or shear". ESDU 79016.
- Kinloch, A.J., 1987. "Adhesion and Adhesives: Science and Technology Reprinted". ed. (London: Chapman and Hall). p. 1.
- Kinloch, A.J., 1997. "Adhesives in engineering". Proc. Intsn Mech. Engrs Part G 211, 307-335.
- Krenk, S., 1992. "Energy release rate of symmetric adhesive joints". Engineering Fracture Mechanics.
- Maia, C.M.P., 2010. "Adesivos Estruturais em Automóveis". Faculdade de Engenharia do Porto.
- Mortensen, F., 1998. "Development of Tools for Engineering Analysis and Design of High-Performance FRP-Composite Structural Elements". Phd Thesis, Aalborg University, Aalborg East.
- Noorman, D.C., 2014. "Cohesive zone modelling in adhesively bonded joints: analysis on crack propagation in adhesives and adherends". Delft University of Technology. pp. 5-22.
- Ojalvo, I. e Eidinoff, H., 1978. "Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints". American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 16 (3), 204-211.
- Pastoukhov, V. A., 1995. "Introdução à mecânica da integridade estrutural". Editora da Universidade Paulista.
- Quispe Rodriguez, Rene, 2011. "Análise de tensões e critérios de falha para juntas de estruturas aeronáuticas metálicas coladas". Campinas, SP.
- Randolph, A. e Clifford, M., 2004. "Improved 2d model for bonded composite joints". International Journal of Adhesion and Adhesives 24, 389-405.
- Rice, J. R., 1968. "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks". Journal of Applied Mechanics, 35:379.
- Shigley, J. E. (2005). Projeto de Engenharia Mecânica. Bookman, 7ª edição.

- Souza, Carlos Alexandre Oliveira de, 2009. “Modelagem numérica por elementos de contorno 3D de juntas coladas em estruturas aeronáuticas de material Compósito”. Campinas, SP.
- Souza, Carlos Alexandre Oliveira, 2012. “Análise de Tensões e Vida em Fadiga de Juntas Coladas em Estruturas Aeronáuticas Metálicas”, Campinas, SP.
- Tahmasebi, F., 2001. “Software tools for analysis of bonded joints”. NASA/GSFCCode 542.
- Tong, L., 1998. “Strength of adhesively bonded single-lap and lap-shear joints”. *International Journal of Solids and Structures* 35, pp. 2601-2616.
- Towse, A., Davies, R., Clarke, A., Wisnom, M., Adams, R., Potter, K., 1997a. “The design and analysis of high load intensity adhesively bonded double lap joints”. *Proceedings of the Fourth International Conference on Deformation and Fracture of Composites*. Manchester, UK, pp. 479-488.
- Volkersen, O., 1938. “Die niet kraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten laschenquerschnitten”. *Luftfahrtforschung*, pp. 15:41.
- Wernersson, H., 1990. “Wood adhesive bonds”. Report TVSM-3012, Division of Structural Mechanics, Lund Institute of Technology, Lund Sweden.
- Williams, T.R.G., 1957. “The tensile and fatigue properties of a large section light alloy spar with reference to mass and directionality effects. Tech. Notes R. Aircr. Establ. No. MET 274.
- Witney, J. M. e Nuismer; R. J., 1974. “Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrators”, *J. Comp. Mater.*, 8, pp 253-265
- Zhao, X., 1991. “Stress and failure of adhesively bonded lap joints”. Ph.D. thesis, University of Bristol.

