

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**CONTROLE POR PLANEJAMENTO  
DE TRAJETÓRIA PARA HOVERCRAFT**

José Oniram de Aquino Limaverde Filho



**ENGENHARIA  
MECATRÔNICA**  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Brasília, julho de 2012

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE GRADUAÇÃO  
**CONTROLE POR PLANEJAMENTO  
DE TRAJETÓRIA PARA HOVERCRAFT**

**José Oniram de Aquino Limaverde Filho**

*Relatório submetido  
como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro de Controle e Automação*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio L. F. Fortaleza, ENM/UnB  
*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Guilherme C. de Carvalho, ENM/UnB  
*Examinador interno*

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Alex da Rosa, ENE/UnB  
*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

## FICHA CATALOGRÁFICA

LIMAVERDE FILHO, JOSÉ ONIRAM DE AQUINO

CONTROLE POR PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA PARA HOVERCRAFT

[Distrito Federal] 2012.

xi, 75p., 210 x 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, 2012).

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| 1. Controle de Trajetória | 2. Sistemas Planejáveis                                     |
| 3. Hovercraft             | 4. Sistemas Subatuados                                      |
| I. Mecatrônica/FT/UnB     | II. Controle por Planejamento de Trajetória para Hovercraft |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LIMAVERDE FILHO, J. O. A. (2012). CONTROLE POR PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA PARA HOVERCRAFT, Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-nº 03/2012, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: José Oniram de Aquino Limaverde Filho

TÍTULO: CONTROLE POR PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA PARA HOVERCRAFT.

GRAU: Engenheiro de Controle e Automação ANO: 2012

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste trabalho de conclusão de curso e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

José Oniram de Aquino Limaverde Filho

CCSW 04 Lote 04 Bloco A Apto 413

Setor Sudoeste

CEP 70680-450 - Brasília - DF - Brasil

## **Dedicatória**

*Aos meus pais, José Oniram e Natércia, que são as minhas maiores fontes de inspiração nessa vida.*

*José Oniram de Aquino Limaverde Filho*

## Agradecimentos

*No momento em que terminar de escrever essa seção, estarei não somente finalizando meu trabalho de graduação, mas também encerrando uma árdua etapa da minha vida que se iniciou em 2007. Após esses mais de cinco anos e meio, fico honrado de ter a oportunidade de agradecer a todos que tornaram possível a minha entrada no grupo seleto de alunos que podem dizer que se formaram em Engenharia.*

*Em primeiro lugar, agradeço ao meus pais, José Oniram e Natércia, a quem dedico esse trabalho, pelo amor e por todo apoio ao longo desses quase 23 anos. Mesmo nem sempre tão perto devido a distância, tenho certeza de que contar com a confiança de vocês foi o fundamental para continuar lutando até hoje por meus sonhos. Não posso deixar de citar a minha segunda mãe, Lúcia, por ter cuidado de mim por mais de 15 anos e que, até hoje, continua ao meu lado quando possível. Agradecer também a minha avó do coração, Sinhá, por ter me recebido em sua casa no início dessa grande jornada e pela dedicação durante todos esses anos. E a toda minha família que sempre me deu apoio, em especial, Vó Nair, Vó Noêmia, Tio João, Tia Lucinha e Diogenes Linard.*

*Ao meu primo, quase irmão, Júlio Seype por estar sempre ao meu lado ao longo desses anos, pela amizade, pelos inúmeros conselhos de vida e pelas noites de estudo. A minha grande amiga, Mariana de Andrade, por ser essa pessoa maravilhosa que posso contar a qualquer momento.*

*Também devo agradecer aos meus orientadores por todo o aprendizado e pela confiança depositada em mim durante minha formação acadêmica. Agradeço ao prof. Díbio Borges por ter sido o primeiro a acreditar no meu potencial. Agradeço ao Celius Magalhães por ter me dado a honra de ser seu aluno e monitor. Agradeço à prof. Carla Koike por todo o suporte e disponibilidade como orientadora e amiga. Agradeço também ao prof. Eugênio Fortaleza pela orientação nesse trabalho e por me motivar a ser um profissional diferenciado.*

*Gostaria de agradecer aos meus colegas de turma, Aline Venturelli, André Teles, Antônio Pedro, Cauê Dobbin, Elias Rachid, Gabriela Marcolino, Heyder Araújo, Ítalo Tadeu, João Vítor Vilela, Jonaylton Moura, Luan Calaça, Miguel Léo, Rodrigo Castro, Rodrigo Fernandes, Rodrigo Sabino e Tiago Carneiro, pela amizade e honestidade ao longo dessa incrível jornada. Também não posso esquecer o companheirismo dos meus gloriosos veteranos André Geraldês, David Bevilaqua, George Brindeiro, Jefferson Chaurais e Thiago Rocha. Foram momentos juntos que serão lembrando várias e várias vezes com muito carinho.*

*Agradeço também a todos meus amigos da Mecajun que foram fundamentais para minha readaptação ao Brasil após o meu período de intercâmbio, os quais formam a base dessa nova geração da Mecatrônica. Em particular, gostaria de agradecer à Paula Freitas e ao Caio Cavalcante pela amizade construída nesse último ano.*

*Não posso deixar de agradecer aos meus companheiros de Fé, como diria Fabiano Marcolino, durante todos os jogos do São Paulo. Em especial, às minhas queridas amigas, Ana Carolina e Luciano Lobato, e ao meu amigo, Jorge Henrique, que, junto comigo, seremos os eternos Modinhas. Também agradeço ao apoio da “Panela” por estarem sempre juntos, seja assistindo os jogos, seja na convivência diária.*

*Aos amigos de Fortaleza, digo que preciso mais do que agradecer, pois é uma honra ter vocês como amigos. Uma das maiores certezas nessa vida que, sem o apoio de cada um de vocês, não teria iniciado essa jornada em 2007, pois, mesmo longe, sei que continuariam acreditando no meu sucesso. Cada retorno a Fortaleza representava estar perto dos meus grandes amigos de infância, de colégio e que, independente de qualquer distância, estarão sempre ali com um sorriso de felicidade no rosto ao me receberem. A vocês, o meu muito obrigado.*

*Por fim, a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho, os meus sinceros agradecimentos.*

*José Oniram de Aquino Limaverde Filho*

---

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um sistema de controle de acompanhamento de trajetória para veículos marítimos subatuados. A estratégia de controle utilizada se baseia na análise da planejabilidade desses sistemas para estabilização global do erro de acompanhamento de trajetória. Apresenta-se um modelo simplificado de um *Hovercraft* subatuado a partir de considerações assumidas em relação ao modelo geral do veículo marítimo de seis graus de liberdade, pois o primeiro pertence à classe dos sistemas planejáveis. Para validação do controlador proposto, foi escolhida uma trajetória de referência circular centrada na origem do sistema de coordenadas global. Simulações numéricas são apresentadas para aferir o desempenho do sistema a partir de diferentes configurações iniciais e na presença de perturbações externas do tipo senoidal.

**Palavras Chaves:** Controle de Trajetória, Sistemas Planejáveis, Hovercraft, Sistemas Subatuados

---

## ABSTRACT

This work describes the development of a control system for trajectory tracking of underactuated marine vehicles. The control strategy used is based on the flatness analysis of such systems for global stabilization of the trajectory's tracking error. A simplified model of the underactuated hovercraft is presented from considerations undertaken in relation to the general model of marine vehicles with six degrees of freedom, since the first belongs to the class of differentially flat systems. It was chosen a reference circular trajectory centered at the origin of the global coordinate system to validate the proposed controller. Numerical simulations are presented to assess the performance of the system from different initial configurations and in the presence of external sinusoidal perturbations.

**Keywords:** Trajectory Tracking, Flat Systems, Hovercraft, Underactuated Systems

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS DO PROJETO	3
1.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	4
1.4	RESULTADOS ALCANÇADOS	4
1.5	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	4
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>5</b>
2.1	INTRODUÇÃO	5
2.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.3	MODELAGEM MATEMÁTICA	7
2.3.1	CINEMÁTICA	9
2.3.2	DINÂMICA	10
2.3.3	PERTURBAÇÕES EXTERNAS	11
2.3.4	MODELO DO NAVIO DE SUPERFÍCIE	13
2.3.5	MODELO DO HOVERCRAFT	15
2.4	SISTEMAS PLANEJÁVEIS	16
2.4.1	SAÍDAS PLANEJÁVEIS EM SISTEMAS LINEARES	17
2.4.2	SAÍDAS PLANEJÁVEIS EM SISTEMAS NÃO-LINEARES	19
2.4.3	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	22
2.4.4	ACOMPANHAMENTO DE TRAJETÓRIA	23
2.4.5	SISTEMAS LIOUVILIANS	23
<b>3</b>	<b>Desenvolvimento da Lei de Controle</b>	<b>24</b>
3.1	INTRODUÇÃO	24
3.2	CONSIDERAÇÕES SOBRE O MODELO DO HOVERCRAFT	24
3.3	DETERMINAÇÃO DA SAÍDA PLANEJÁVEL DO SISTEMA	25
3.4	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	26
3.5	CONTROLE DE TRAJETÓRIA	29
<b>4</b>	<b>Simulações Numéricas</b>	<b>31</b>
4.1	INTRODUÇÃO	31
4.2	ACOMPANHAMENTO DE TRAJETÓRIA CIRCULAR	32



4.2.1	TRAJETÓRIAS NOMINAIS .....	32
4.2.2	CONFIGURAÇÃO INICIAL 01: PONTO INTERNO .....	34
4.2.3	CONFIGURAÇÃO INICIAL 02: PONTO EXTERNO .....	37
4.3	PERTURBAÇÕES EXTERNAS .....	39
<b>5</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>42</b>
5.1	TRABALHOS FUTUROS .....	42
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>		<b>44</b>
<b>Anexos .....</b>		<b>48</b>
<b>I</b>	<b>Descrição do conteúdo do CD .....</b>	<b>49</b>
<b>II</b>	<b>Descrição da Implementação no Ambiente de Simulação <i>Simulink</i> .....</b>	<b>50</b>
II.1	MODELO DO <i>Hovercraft</i> .....	51
II.2	TRANSFORMAÇÃO HOMOGÊNEA .....	51
II.3	GERAÇÃO DA LEI DE CONTROLE .....	52
<b>III</b>	<b>Expressões da Cinemática e Dinâmica para um Veículo Marítimo .....</b>	<b>55</b>
III.1	CINEMÁTICA .....	55
III.2	DINÂMICA .....	56
III.3	ESFORÇOS HIDRODINÂMICOS .....	58
<b>IV</b>	<b>Modelo do Hovercraft como Sistema Planejável .....</b>	<b>60</b>

# LISTA DE FIGURAS

1.1	<i>Hovercraft</i> da Marinha dos Estados Unidos.....	2
1.2	Arquitetura de controle para veículos marítimos .....	2
2.1	Sistemas de coordenadas de referência .....	8
2.2	Forças restauradoras no Sistema <i>B</i> .....	13
2.3	O modelo simplificado para um <i>Hovercraft</i> .....	15
4.1	Implementação do modelo do <i>Hovercraft</i> e do controlador em ambiente <i>Simulink</i> ....	31
4.2	Comportamento dinâmico desejado para o <i>Hovercraft</i> no Sistema <i>E</i> .....	32
4.3	Trajectoria desejada para a posição no Sistema <i>E</i> .....	33
4.4	Trajectoria desejada para as velocidades linear e angular no Sistema <i>B</i> .....	33
4.5	Trajectoria desejada para a saída planejável e suas derivadas temporais.....	34
4.6	Controle nominal na direção Avanço .....	34
4.7	Trajectoria executada pelo <i>Hovercraft</i> no Plano XY.....	35
4.8	Velocidades lineares no Sistema <i>B</i> .....	35
4.9	Controle na direção Avanço .....	36
4.10	Saída planejável e suas derivadas temporais .....	36
4.11	Trajectoria executada pelo <i>Hovercraft</i> no Plano XY.....	37
4.12	Velocidades lineares no Sistema <i>B</i> .....	37
4.13	Controle na direção Avanço .....	38
4.14	Saída planejável e suas derivadas temporais .....	38
4.15	Perturbação externa .....	39
4.16	Trajectoria executada pelo <i>Hovercraft</i> no Plano XY.....	40
4.17	Velocidade linear no Sistema <i>B</i> .....	40
4.18	Controle na direção Avanço .....	40
4.19	Saída planejável e suas derivadas temporais .....	41
II.1	Implementação em <i>Simulink</i> .....	50
II.2	Implementação do modelo linear SISO do <i>Hovercraft</i> no <i>Simulink</i> .....	51
II.3	Implementação da transformação homogênea de sistemas de coordenadas no <i>Simulink</i>	52
II.4	Implementação do controlador desenvolvido no <i>Simulink</i> .....	52
II.5	Implementação da etapa de geração da saída planejável e suas derivadas temporais no <i>Simulink</i> .....	53

II.6	Implementação da etapa de geração da saída planejável e suas derivadas temporais no <i>Simulink</i> .....	53
II.7	Implementação da etapa de construção do comando em malha fechada no <i>Simulink</i> .	54
II.8	Implementação da etapa de adição do termo de correção ao comando em malha aberta no <i>Simulink</i> .....	54

# LISTA DE TABELAS

2.1	Notação SNAME para um veículo marítimo .....	8
-----	--	---

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos

$O$	Origem do sistema de coordenadas
$\eta$	Vetor de posição e orientação no Sistema $E$
$\eta_1$	Vetor de posição no Sistema $E$
$\eta_2$	Vetor de orientação no Sistema $E$
$\nu$	Vetor de velocidade linear e angular no Sistema $B$
$\nu_1$	Vetor de velocidade linear no Sistema $B$
$\nu_2$	Vetor de velocidade angular no Sistema $B$
$\tau$	Vetor de forças e momentos no Sistema $B$
$\tau_1$	Vetor de forças no Sistema $B$
$\tau_2$	Vetor de momentos no Sistema $B$
$r_G$	Vetor de coordenadas do centro de gravidade do corpo no Sistema $B$
$r_B$	Vetor de coordenadas do centro de empuxo do corpo no Sistema $B$
$I_0$	Tensor de inércia em relação a origem no Sistema $B$
$0_{n \times n}$	Matriz nula
$M_{RB}$	Matriz de inércia
$C_{RB}(\nu)$	Matriz de forças centrípetas e de coriolis
$M_A$	Matriz de inércia de massa adicional
$C_A(\nu)$	Matriz de forças centrípetas e de coriolis de massa adicional
$D(\nu)$	Matriz de amortecimento hidrodinâmico
$D$	Matriz de componentes lineares do amortecimento hidrodinâmico
$D_n(\nu)$	Matriz de componentes não-lineares do amortecimento hidrodinâmico
$\tau_{RB}$	Vetor de perturbações externas
$\tau_H$	Vetor de forças e momentos devido aos esforços hidrodinâmicos
$\tau_E$	Vetor de forças e momentos devido aos esforços ambientais
$\tau_E^{cu}$	Vetor de forças e momentos induzidos pelas correntes marítimas
$\tau_E^{wave}$	Vetor de forças e momentos induzidos pelas ondas
$\tau_E^{wind}$	Vetor de forças e momentos induzidos pelos ventos
$g(\eta)$	Forças restauradoras

$\beta$	Parâmetro do modelo simplificado do <i>Hovercraft</i>
$f$	Saída planejável
$C_K$	Matriz de controlabilidade de Kalman
$\gamma$	Índices de controlabilidade de Kronecker
$e$	Erro de acompanhamento de trajetória
$\rho$	Raio da trajetória circular
$\lambda$	Perturbação externa
$C_{i,\alpha}$	Matriz de rotação em relação ao eixo $i$ definida pelo ângulo de rotação $\alpha$
$\rho_a$	Densidade da água
$\nabla$	Volume de fluido deslocado pelo corpo
$g$	Aceleração da gravidade

### Subscritos

$B$	Vetor no sistema $B$
$E$	Vetor no sistema $E$
$\delta$	Referente à variável linearizada
$u$	Referente à direção avanço
$r$	Referente à direção guinada

### Sobrescritos

$\cdot$	Variação temporal
(3)	Terceira derivada temporal
(4)	Quarta derivada temporal
*	Referente ao valor nominal da variável

### Operadores

$J$	Transformação não-linear entre os sistemas de coordenadas
-----	---

### Siglas

SNAME	Society of Naval Architects and Marine Engineers
CG	Centro de Gravidade

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contextualização

O controle de sistemas mecânicos é, atualmente, um dos campos mais ativos de pesquisa devido às diversas aplicações desses sistemas na vida real. Embora o estudo de sistemas mecânicos remonta a Euler e Lagrange em 1700, somente a partir de 1850 que sistemas de controle mecânico surgiram em aplicações para regulação de motores a vapor. Durante o século passado, uma série de aplicações científicas, industriais e militares motivou a análise rigorosa e projeto de controle de sistemas mecânicos [1].

Por outro lado, a natureza teórica desafiadora de análise do comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares atraíram muitos matemáticos para estudar tais sistemas de controle. Como resultado, os esforços de engenheiros e cientistas em conjunto levaram à criação do Controle Linear, do Controle Ótimo, do Controle Adaptativo e de teorias de controle não-lineares. Nesse contexto, destaca-se uma classe importante de sistemas mecânicos conhecidos como sistemas subatuados (*do inglês Underactuated Systems*) [1].

Sistemas mecânicos subatuados são sistemas que possuem um número de entradas de controle inferior ao número de graus de liberdade. Esses sistemas aparecem em uma ampla gama de aplicações, incluindo Sistemas Aeroespaciais [2], Sistemas Marítimos [3] e Sistemas Biomecânicos [4]. O interesse se deve principalmente ao fato que há uma redução de custos do projeto e ainda evita que o peso dos atuadores adicionais possa influenciar no desempenho do sistema. Além disso, em situações em que há a possibilidade de falha dos atuadores, o sistema, inicialmente projetado para ser completamente atuado, pode continuar operando, o que evita maiores problemas (e.g. aeronaves).

Como citado anteriormente, os veículos marítimos pertencem a classe dos sistemas subatuados. O controle de tais sistemas ganhou relevância nos últimos anos por sua importância nas áreas de petróleo e militar, trazendo à tona vários desafios da aplicação da teoria de controle não-linear a sistemas reais [5]. Para um navio convencional, por exemplo, é comum considerar o movimento nas direções Avanço, Deriva e Guinada. No entanto, a grande maioria é equipada com dois propulsores de popa ou com um propulsor principal e um leme de popa, o que impede um controle na direção

de Deriva [6]. Dentro desse grupo, inclui-se também o *Hovercraft* que é um veículo sustentado por um colchão de ar e propulsionado normalmente por um ou dois ventiladores independentes, conforme visto na Figura 1.1.



Figura 1.1: *Hovercraft* da Marinha dos Estados Unidos. Retirado de [7]

Segundo De Souza [8], o sistema de controle empregado segue uma composição de blocos funcionais estruturados em camadas distribuídas hierarquicamente formando o que se conhece como arquitetura de controle, como pode ser observado na Figura 1.2.

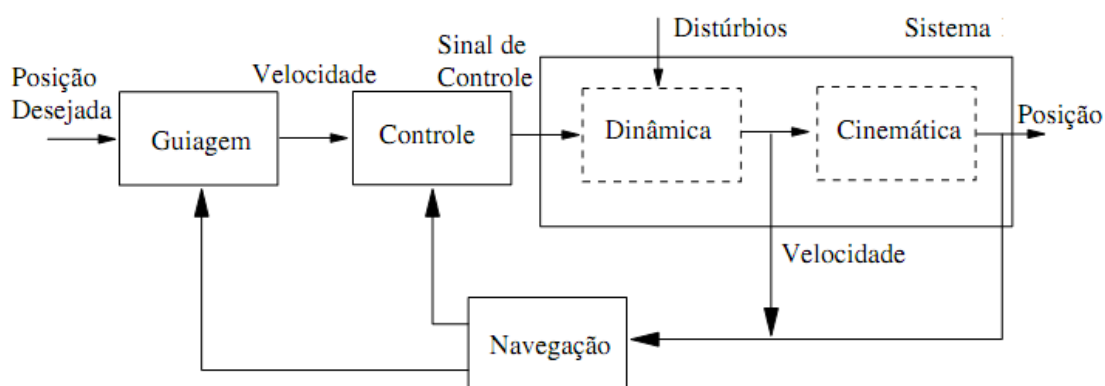


Figura 1.2: Arquitetura de controle para veículos marítimos. Adaptado de [8]

As camadas superiores são responsáveis pela especificação das tarefas a serem desempenhadas pelo sistema. Uma estratégia de controle é então empregada para acionar os atuadores de modo a acompanhar as trajetórias desejadas. Estas estratégias, implementadas nos níveis inferiores da arquitetura, são um conjunto de algoritmos distribuídos em blocos e que se relacionam com o veículo. De maneira geral, esses blocos são especificados da seguinte maneira:

- **Navegação:** Envolve os subsistemas de sensoriamento e processamento de sinais relacionados com a estimação do estado do sistema móvel, isto é, a posição, velocidade e aceleração, em um sistema de coordenadas de referência.



- **Guiagem:** Atua de maneira que o veículo siga a trajetória desejada, comparando-a com a estimativa do subsistema de navegação através de realimentação.
- **Controle:** Aplicação das forças e momentos apropriados para garantir estabilidade no acompanhamento da velocidade de referência frente a ação de distúrbios.

Controlabilidade é uma propriedade desejável e normalmente referenciada a sistemas completamente atuados. No entanto, no caso dos sistemas subatuados, não se apresenta como uma tarefa fácil principalmente devido à presença de não-linearidades no modelo. Mais frequentemente encontrada em aplicações de robótica móvel, o uso da propriedade planejável (*do inglês flatness property*) do sistema foi proposta e desenvolvida, a partir de 1992, por M. Fliess, J. Lévine, P. Martin e P. Rouchon [9] com o objetivo de estender a teoria de controlabilidade de Kalman aos casos não-lineares. A noção de planejabilidade consiste no fato de ser possível determinar variáveis “internas” ao sistema que possam representar a dinâmica global do mesmo. Os sistemas que apresentam tal propriedade são comumente denominados planejáveis.

Devido ao grau de não-linearidade dos modelos dinâmicos de veículos marítimos, estratégias de controle baseadas na planejabilidade de sistemas estão sendo gradativamente adaptadas para aplicações que necessitam o planejamento e acompanhamento de trajetória desejadas, pois tal propriedade permite encontrar um conjunto de variáveis internas que apresenta a capacidade de resumir toda a dinâmica do sistema. Espera-se que os resultados deste trabalho possam ajudar a comprovar a aplicabilidade dessa abordagem no controle desses modelos.

## 1.2 Objetivos do projeto

O objetivo principal deste trabalho de graduação é realizar um controle de acompanhamento de trajetória circular em uma aplicação marítima a partir de uma estratégia de controle baseada na análise da planejabilidade do sistema. Para tanto, é necessário:

1. Descrever métodos que proporcionem diretamente a determinação das saídas planejáveis de sistemas lineares e não-lineares;
2. Apresentar como as saídas planejáveis podem facilitar nas etapas de planejamento de trajetória e na etapa de projeto do controlador responsável pela minimização do erro de acompanhamento de trajetória;
3. Validar o funcionamento do controlador proposto a partir de simulações numéricas;
4. Verificar o grau de robustez do controlador em situações críticas como, por exemplo, na presença de perturbações externas;

### 1.3 Definição do problema

Nesse trabalho, é abordado o problema de acompanhamento de uma trajetória circular para o modelo simplificado de um *Hovercraft* com dois propulsores independentes, o que acarreta no controle de um sistema não-linear subatuado. Este sistema possui um grande interesse prático, pois, além do *Hovercraft*, os navios com dois motores de popa possuem comportamento similar.

### 1.4 Resultados Alcançados

Neste trabalho, realizou-se um controle de acompanhamento de trajetória para veículos marítimos seguindo uma abordagem de controle que se baseia na análise de planeabilidade desses sistemas. Restrito a verificar o desempenho do controlador proposto através de simulações devido a falta de plataforma disponível, implementou-se, no ambiente *Simulink* do *software MATLAB*<sup>®</sup>, o modelo dinâmico simplificado do *Hovercraft* juntamente com o controlador proposto nesse manuscrito.

### 1.5 Apresentação do manuscrito

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre as estratégias de controle de acompanhamento de trajetória para veículos marítimos, além de descrever o modelo dinâmico do *Hovercraft* e de apresentar os conceitos e fundamentos teóricos referentes à classe dos sistemas planeáveis. Em seguida, o Capítulo 3 descreve as etapas de planejamento e acompanhamento das trajetória nominais para o *Hovercraft*. No Capítulo 4, são apresentadas as simulações numéricas que validam o controle desenvolvido a partir da planeabilidade do sistema, além de verificar o grau de robustez perante perturbações externas. As conclusões deste trabalho são apresentadas no Capítulo 5, bem como propostas de trabalhos futuros. Os anexos contém material complementar sobre o modelo genérico de um veículo marítimo, a demonstração que o *Hovercraft* é um sistema planeável, a implementação no *MATLAB*<sup>®</sup>, além da descrição do conteúdo do CD.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

### 2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar soluções presentes na literatura para controle de veículos marítimos, além de descrever a modelagem do sistema utilizado neste trabalho junto com a estratégia escolhida para a implementação de um controle de acompanhamento de trajetória.

A Seção 2.2 apresenta a revisão bibliográfica realizada para este trabalho. A Seção 2.3 apresenta os modelos cinemáticos e dinâmico para um veículo marítimo de seis graus de liberdade, onde os vários aspectos qualitativos são discutidos separadamente e, então, reunidos em uma expressão geral. A partir dessa expressão, determinadas hipóteses são assumidas com o objetivo de obter tanto o modelo do navio de superfície, como o modelo não-linear do *Hovercraft*. A Seção 2.4 apresenta os conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento de um controle de acompanhamento de trajetória baseado no caráter planejável de sistemas lineares e não-lineares.

### 2.2 Revisão Bibliográfica

Esta seção tem como objetivo descrever diferentes estratégias encontradas na literatura para controle de trajetória aplicadas ao posicionamento de veículos marítimos, tais como, navios de superfície. A revisão bibliográfica feita durante o desenvolvimento do trabalho abrangeu os seguintes pilares: modelagem da cinemática e dinâmica para veículos marítimos, técnicas de controle para tais modelos, e aplicabilidade do caráter planejável de alguns desses modelos visando encontrar soluções para problemas de planejamento e acompanhamento de trajetória. Artigos que englobam esses pilares foram analisados, como pode ser visto a seguir.

A partir da década de 50, os primeiros modelos para veículos marítimos foram propostos e procuravam obter uma relação linear que representasse o comportamento do sistema. Davidson e Schiff [10] propuseram um modelo em que a velocidade de avanço era supostamente constante, o que permitia a omissão da equação de movimento nessa direção, obtendo assim, uma característica linear aproximada ao modelo. Alternativamente, Nomoto et al. [11] apresentam duas representa-

ções para o modelo em [10] onde é proposta a eliminação da velocidade em deriva, o que permite obter uma relação linear entre o curso do navio e o ângulo do leme.

Analisando a literatura recente sobre a modelagem da cinemática e da dinâmica para veículos marítimos, predominam os trabalhos realizados por Fossen [12, 13], já que apresentam um maior detalhamento, principalmente devido à inclusão da análise dos componentes não-lineares oriundos dos esforços externos ao sistema, tais como, forças hidrodinâmicas e ambientais. Além disso, normalmente, tais veículos apresentam a característica de serem subatuados, o que acarreta uma maior dificuldade na realização de controle de tais modelos. Um histórico geral do desenvolvimento de modelos matemáticos para esses sistemas pode ser encontrado em [14].

O grau de não-linearidade dos modelos incentivou o uso de estratégia de controle não-linear em aplicações, que envolvam o posicionamento de veículos marítimos, tais como os navios de superfície [15], os veículos subaquáticos autônomos [16, 17], e o *Hovercraft* [18]. A seleção da estratégia de controle para implementação é dependente não somente do sistema, mas, também, das condições de operação as quais está sujeito [8]. Predominantemente, os problemas são distribuídos nas áreas de estabilização e acompanhamento de trajetória.

A estabilização de navios de superfície subatuados tem sido abordado, em diversos estudos nas últimas décadas, principalmente, devido a sua importância em áreas cruciais como a de petróleo. Segundo os resultados apresentados por Brockett [19], não é possível estabilizar o sistema em torno do equilíbrio desejado utilizando teoria de controle linear ou teoria clássica de controle não-linear como linearização por realimentação. Para contornar esse problema, estratégias de controle descontínuo são encontradas na literatura. Reyhanoglu [20] propõe um controle descontínuo realimentado que permite uma convergência exponencial para um ponto de equilíbrio assumindo certas hipóteses sobre a condição inicial do sistema. De forma similar, Cheng Jin et al. [21] apresentam um controle descontínuo baseado na teoria de modos deslizantes (*do inglês sliding mode control*), o que torna o sistema exponencialmente convergente para o ponto de equilíbrio desejado. Em Pettersen e Egeland [22], emprega-se uma abordagem *backstepping* descontínua através de uma realimentação de estado parcial, o que garante uma estabilização global uniforme assintótica do sistema.

Adicionando-se a influência de perturbações ambientais, o que não é abordado nos trabalhos citados anteriormente, é possível analisar o grau de robustez dos controladores. Para compensar tais perturbações em todas as direções, Yang Liu et al. [23] combinam a teoria de Lyapunov e técnicas de realimentação com alto ganho. Uma outra abordagem foi proposta por Pettersen e Nijmeijer [24] onde estratégias de controle adaptativo, as quais são justificadas frente às alterações das condições de operação do veículo, e uma realimentação variante no tempo foram combinadas, proporcionando assim uma estabilização assintótica semi-global.

A discussão sobre problemas envolvendo acompanhamento de trajetória para veículos marítimos vem sendo estudada por se apresentar como um grande desafio, já que alguns modelos propostos na literatura não são totalmente linearizáveis por realimentação e ainda exibem restrições não-holonômicas, o que acarreta em um problema inerentemente não-linear. Godhavn [25] propõe uma tentativa de linearização por realimentação que proporciona um acompanhamento

exponencial global da posição do barco assumindo que a velocidade de avanço é sempre positiva, porém sua orientação não consegue ser regulada.

Para permitir a regulação tanto da posição como da orientação, uma técnica recursiva para sistemas na forma padrão de cadeias [26] foi usada em [27] para proporcionar uma convergência exponencial para uma vizinhança em torno da trajetória desejada. Ressalta-se também que em [27] é requerido que a velocidade de guinada não pode ser nula, o que impede o uso de retas como trajetórias de referência. Em Do et al. [28], propõe-se uma solução baseada no método direto de Lyapunov e em uma abordagem *backstepping* a fim de eliminar a restrição da velocidade de guinada do sistema ser nula.

Como alternativa às técnicas de controle não-linear presentes na literatura para resolver problemas relacionados a estabilização e a acompanhamento de trajetórias, iniciaram-se alguns estudos sobre como a planeabilidade de um sistema pode facilitar o controle de veículos móveis. Isso se deve também pelo fato de que uma variedade de sistemas tem se mostrado planejável (ou aproximadamente planejável), logo se permitiu o desenvolvimento de controladores baseados nessa propriedade para diferentes sistemas, tais como carros com trailers [29], pêndulo duplo invertido [30], aeronaves convencionais [31], motores de indução [32] e reatores químicos [33]. Uma outra vantagem dessa propriedade consiste na resolução de problemas relacionados aos zeros instáveis que possam aparecer durante a linearização de sistemas não-lineares [34].

Em relação aos veículos marítimos, Sira-Ramírez [35] demonstra que o modelo geral de um navio de superfície [12] pertence a uma classe de sistemas não-planejáveis que apresentam um caráter Liouvilian [36], o que permite um rápido planejamento das trajetórias nominais devido ao fato de ser possível extrair um subsistema planejável do sistema original. Em um segundo trabalho, Sira-Ramírez e Ibanez [37] desenvolvem um controle por realimentação dinâmica de estados para o modelo simplificado de um *Hovercraft*, o qual foi obtido a partir de considerações apresentadas por Fantoni et al. [18]. Isso foi possível porque o *Hovercraft*, diferentemente do navio de superfície, é um sistema planejável.

## 2.3 Modelagem matemática

As expressões que descrevem os modelos matemáticos de veículos marítimos estão bem consolidadas e difundidas pela literatura e não representam desafios ao seu entendimento ou campo para possíveis contribuições da pesquisa científica. A necessidade de levantar um modelo matemático do sistema em questão se deve basicamente por serem considerados aqui apenas estratégias de controle de trajetória que dependem exclusivamente do modelo. Além disso, observa-se que uma caracterização do sistema real por expressões matemáticas permite discussões sobre estabilidade e controlabilidade do sistema.

De acordo com o Fossen [12], para um veículo marítimo se movendo com seis graus de liberdade, seis coordenadas independentes são requeridas para determinar a posição e orientação. As primeiras três coordenadas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) e suas primeiras derivadas temporais correspondem respectivamente a posição e ao movimento translacional ao longo dos eixos X, Y e Z. Enquanto isso, as últimas

três coordenadas ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) e suas primeiras derivadas temporais descrevem respectivamente a orientação e o movimento rotacional.

Segundo a notação definida pela SNAME [38], as componentes do movimento do veículo marítimo são convencionalmente definidos como Avanço, Deriva, Afundamento, Jogo, Arfagem e Guinada (*do inglês surge, sway, heave, roll, pitch e yaw, respectivamente*), ver Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Notação SNAME para um veículo marítimo

Graus de Liberdade		Forças e Momentos	Velocidade Linear e Angular	Posições e Ângulos de Euler
1	movimento na direção X (Avanço)	X	u	x
2	movimento na direção Y (Deriva)	Y	v	y
3	movimento na direção Z (Afundamento)	Z	w	z
4	rotação sobre o eixo X (Jogo)	K	p	$\phi$
5	rotação sobre o eixo Y (Arfagem)	M	q	$\theta$
6	rotação sobre o eixo Z (Guinada)	N	r	$\psi$

Para determinar as equações de movimento, dois sistemas de coordenadas são empregados (Figura 2.1):

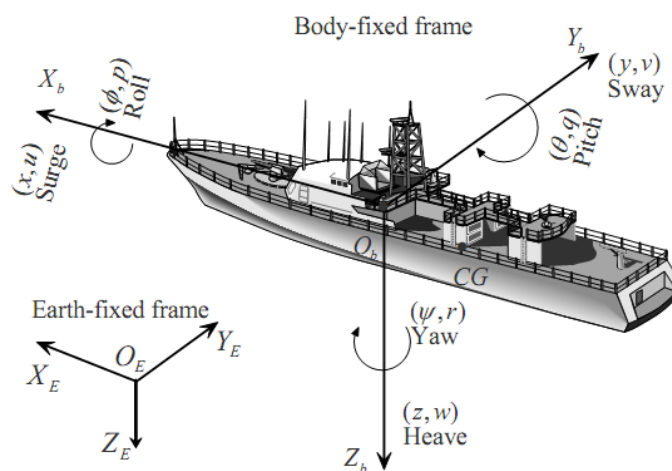


Figura 2.1: Sistemas de coordenadas de referência. Retirado de [12]

- **Sistema de coordenadas fixo na Terra ( $O_E X_E Y_E Z_E$ )**, ou Sistema  $E$ , que pode coincidir com o sistema de coordenadas fixo ao navio em algumas condições iniciais. Geralmente é assumido que as acelerações de um ponto na superfície da Terra podem ser negligenciadas, já que o movimento da Terra dificilmente afeta a baixa velocidade dos veículos marítimo (diferentemente dos veículos aéreos). Como resultado disso, esse sistema de coordenadas pode ser considerado inercial.

- **Sistema de coordenadas fixo ao Corpo ( $O_B X_B Y_B Z_B$ )** ou Sistema  $B$ , tem sua origem  $O_B$  normalmente escolhida para coincidir com o centro de gravidade (CG), quando o CG é o principal plano de simetria, ou com algum outro ponto quando esse não for o caso [12]. Os eixos  $O_B X_B$ ,  $O_B Y_B$  e  $O_B Z_B$  coincidem com os eixos principais de inércia e são geralmente definidos como a seguir:  $O_B X_B$  é o eixo longitudinal (direcionado da popa à proa);  $O_B Y_B$  é o eixo transversal (direcionado a estibordo); e  $O_B Z_B$  é o eixo normal (direcionado de cima para baixo).

Baseado na notação da Tabela 2.1, a movimentação do veículo marítimo em seis graus de liberdade pode ser descrito a partir dos seguintes vetores:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} &= [\boldsymbol{\eta}_1 \ \boldsymbol{\eta}_2]^T; & \boldsymbol{\eta}_1 &= [x \ y \ z]^T; & \boldsymbol{\eta}_2 &= [\phi \ \theta \ \psi]^T & (\text{posição}) \\ \boldsymbol{\nu} &= [\boldsymbol{\nu}_1 \ \boldsymbol{\nu}_2]^T; & \boldsymbol{\nu}_1 &= [u \ v \ w]^T; & \boldsymbol{\nu}_2 &= [p \ q \ r]^T & (\text{velocidade}) \\ \boldsymbol{\tau} &= [\boldsymbol{\tau}_1 \ \boldsymbol{\tau}_2]^T; & \boldsymbol{\tau}_1 &= [X \ Y \ Z]^T; & \boldsymbol{\tau}_2 &= [K \ M \ N]^T & (\text{forças})\end{aligned}$$

onde  $\boldsymbol{\eta}$  denota o vetor posição e orientação com coordenadas no Sistema  $E$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  denota o vetor velocidade linear e angular com coordenadas no Sistemas  $B$ , e  $\boldsymbol{\tau}$  denota as forças e os momentos atuantes sobre o navio no Sistema  $B$ .

A partir desses vetores, a descrição do modelo se divide em duas partes: *Cinemática* que trata somente dos aspectos geométricos do movimento, e *Dinâmica* que é a análise das forças resultantes no movimento. Dessa forma, procura-se nas próximas subseções apresentar o desenvolvimento das equações do modelo geral do veículo marítimo, conforme descrito [5, 12].

### 2.3.1 Cinemática

O interesse em caracterizar o movimento de um corpo no espaço resulta na necessidade de estabelecer as relações entre os diferentes sistemas de coordenadas. A primeira derivada do vetor posição  $\boldsymbol{\eta}_1$  se relaciona com o vetor velocidade linear  $\boldsymbol{\nu}_1$  através do operador de transformação não-linear  $J_1$  como definido:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = J_1(\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{\nu}_1 \quad (2.1)$$

onde  $J_1(\boldsymbol{\eta}_2)$  é uma matriz de transformação definida em relação aos ângulos de Euler: Jogo ( $\phi$ ), Arfagem ( $\theta$ ) e Guinada ( $\psi$ ). Devido ao tamanho da matriz, foi preferível, nesse caso, adotar a notação  $s = \text{sen}(\cdot)$  e  $c = \text{cos}(\cdot)$ , logo essa matriz é dada por:

$$J_1(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + s\phi s\theta c\psi & s\psi s\phi + s\theta c\psi c\phi \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Quando o veículo não sofre rotação em qualquer um dos seus eixos, a matriz  $J_1(\boldsymbol{\eta}_2)$  é equivalente a matriz identidade e, portanto, as velocidades são equivalentes em ambos os sistemas

de coordenadas. De maneira análoga, a transformação das velocidades de rotação  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_2$  e  $\boldsymbol{\nu}_2$  entre os dois sistemas de coordenadas é obtida pela matriz de transformação não-linear  $J_2$  através da seguinte expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = J_2(\boldsymbol{\eta}_2)\boldsymbol{\nu}_2 \quad (2.3)$$

onde a matriz de transformação  $J_2(\boldsymbol{\eta}_2)$  é dada por:

$$J_2(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi)/\cos(\theta) & \cos(\phi)/\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Notar que a matriz  $J_2(\boldsymbol{\eta}_2)$  é indefinida para  $\theta = \pm\pi/2$ , o que acarreta, conseqüentemente, em  $J_2^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) \neq J_2^T(\boldsymbol{\eta}_2)$ . No entanto, sabe-se que, durante a maioria das operações práticas, os veículos marítimos não são susceptíveis a entrar na vizinhança de  $\theta = \pm\pi/2$  ou podem operar sem problemas próximos a essa região. Para os casos em que seja essencial considerar a região contendo  $\theta = \pm\pi/2$ , as equações cinemáticas podem ser descritas através de uma representação com quatro parâmetros ou quatérnions. Contudo, pelo fato dos ângulos de Euler apresentarem um apelo mais intuitivo, estes serão considerados nesse trabalho. O leitor pode obter mais detalhes sobre uma representação por quatérnions em [12].

As matrizes  $J_1(\boldsymbol{\eta}_2)$  e  $J_2(\boldsymbol{\eta}_2)$  podem ser obtidas através da composição de movimentos de rotação do sistema  $B$  em relação a cada um dos eixos do sistema  $E$ , conforme apresentado no Anexo III. Sumarizando os resultados dessa seção, as equações cinemáticas para um veículo marítimo podem ser expressadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\boldsymbol{\eta}_2) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & J_2(\boldsymbol{\eta}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1 \\ \boldsymbol{\nu}_2 \end{bmatrix} \iff \dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu} \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Dinâmica

A caracterização da dinâmica consiste em estabelecer relações entre causa e efeito para o movimento de um corpo material. Este pode ser interpretado como ponto material ou como corpo rígido dependendo das dimensões e da sua distribuição de massa.

Inicialmente, definem-se os vetores abaixo seguindo a notação definida na Tabela 2.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{OB} = \boldsymbol{\tau}_1 &= [X \ Y \ Z]^T : \text{Vetor forças externas em relação ao Sistema } B \\ \mathbf{m}_{OB} = \boldsymbol{\tau}_2 &= [K \ M \ N]^T : \text{Vetor momentos externos em relação ao Sistema } B \\ \mathbf{v}_{OB} = \boldsymbol{\nu}_1 &= [u \ v \ w]^T : \text{Vetor velocidade linear em relação ao Sistema } B \\ \boldsymbol{\omega}_{OB} = \boldsymbol{\nu}_2 &= [p \ q \ r]^T : \text{Vetor velocidade angular em relação ao Sistema } B \\ \mathbf{r}_{OB} &= [x_g \ y_g \ z_g]^T : \text{Vetor de origem } O_B \text{ até CG em relação ao Sistema } B \end{aligned}$$



Pelo fato de o veículo marítimo possuir dimensões não desprezíveis, sua massa não está concentrada em um único ponto, mas, sim, distribuída pela sua estrutura e, portanto, deve ser tratado como um corpo rígido. Dessa forma, a sua dinâmica apresenta componentes relacionados com o movimento de rotação do corpo em torno dos seus eixos, as quais correspondem à força de Coriolis e à força Centrípeta, e surgem devido ao fato que o veículo é um referencial não-inercial. Deve-se ressaltar também que é conveniente escrever as equações da dinâmica do movimento do corpo rígido segundo uma parametrização no sistema  $E$ , visto a ação dos agentes externos e a inércia do veículo serem constantes em relação a este sistema de coordenadas [8].

A partir de uma formulação Newton-Euler para um corpo rígido de massa  $m$ , as expressões que representam sua dinâmica, definidos em relação ao sistema  $E$ , podem ser escritas como [12]:

$$m[\dot{\boldsymbol{\nu}}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 \times \boldsymbol{\nu}_1 + \dot{\boldsymbol{\nu}}_2 \times \mathbf{r}_{OB} + \boldsymbol{\nu}_2 \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_{OB})] = \boldsymbol{\tau}_1 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{I}_0 \dot{\boldsymbol{\nu}}_2 + m \mathbf{r}_{OB} \times (\dot{\boldsymbol{\nu}}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 \times \boldsymbol{\nu}_1) = \boldsymbol{\tau}_2 \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{I}_0$  é o tensor de inércia em relação a  $O_B$  e contém os momentos e os produtos de inércia do corpo rígido.

Para simplificar a representação do modelo não-linear do comportamento dinâmico do veículo marítimo, manipulam-se as equações 2.6 e 2.7 de maneira a agrupá-las em uma forma matricial, como se observa na equação 2.8. Mais detalhes desse desenvolvimento podem ser encontrados no Anexo III.

$$M_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} + C_{RB}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}_{RB} \quad (2.8)$$

onde  $\boldsymbol{\nu} = [u v w p q r]^T$  é o vetor velocidade linear e angular em relação ao Sistema  $B$  e  $\boldsymbol{\tau}_{RB} = [X Y Z K M N]$  é o vetor generalizado para as forças e os momentos externos que agem sobre o veículo. A matriz  $M_{RB}$  corresponde a matriz de inércia do sistema e apresenta a característica de ser única. A matriz  $C_{RB}$  corresponde a matriz de forças centrípetas e de Coriolis do sistema e pode ser parametrizada de diferentes maneiras. O vetor  $\boldsymbol{\tau}_{RB}$  corresponde as perturbações externas ao sistema e é representado pela soma de três outros vetores, como se observa na equação 2.9.

$$\boldsymbol{\tau}_{RB} = \boldsymbol{\tau}_H + \boldsymbol{\tau}_E + \boldsymbol{\tau} \quad (2.9)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}_H$  representa as forças e os momentos devidos aos esforços hidrodinâmicos,  $\boldsymbol{\tau}_E$  representa as forças e os momentos devidos aos esforços ambientais, e  $\boldsymbol{\tau}$  representa as forças e os momentos devidos aos propulsores conectados ao veículo marítimo.

### 2.3.3 Perturbações Externas

De acordo com Faltinsen [39], para a maioria das aplicações de controle em veículos marítimos, o princípio da superposição é considerado um boa aproximação para acrescentar a influência das perturbações externas nas equações de movimento do veículo marítimo. Nessa subseção, é desenvolvido um breve resumo sobre cada uma das perturbações externas citadas na subseção 2.3.2 com o objetivo de estimular o interesse do leitor a obter mais detalhes sobre a modelagem

matemática, os quais podem ser encontrados em [5, 12].

## Esforços Hidrodinâmicos

Devido aos esforços hidrodinâmicos, um veículo marítimo está sujeito a forças e momentos quando esse é forçado a oscilar com uma frequência de excitação de onda e não há presença de ondas incidentes. Esse comportamento pode ser identificado como a soma de três componentes:

1. Massa adicional devido à inércia do fluido circundante.
2. Arrasto ou amortecimento hidrodinâmico devido à energia levada pelas ondas de superfície.
3. Forças restauradoras.

Dessa forma, o vetor  $\boldsymbol{\tau}_H$  pode ser expressado da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\tau}_H = -M_A \dot{\boldsymbol{\nu}} - C_A(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - D(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - g(\boldsymbol{\eta}) \quad (2.10)$$

onde  $M_A$  é a matriz de massa adicional,  $C_A(\boldsymbol{\nu})$  é matriz de forças centrípetas e de Coriolis de massa adicional,  $D(\boldsymbol{\nu})$  é a matriz de amortecimento hidrodinâmico, e  $g(\boldsymbol{\eta})$  corresponde à resultante das forças restauradoras. Vale ressaltar que a matriz  $D(\boldsymbol{\nu})$  é frequentemente composta por duas matrizes:  $D$  e  $D_n(\boldsymbol{\nu})$ . A primeira é composta por elementos lineares, enquanto que a segunda é composta por elementos não-lineares dependentes do vetor  $\boldsymbol{\nu}$ . Mais detalhes das matrizes que compõem  $\boldsymbol{\tau}_H$  podem ser visualizados no Anexo III.

Os esforços devido a massa adicional correspondem ao efeito hidrodinâmico mais importante nos instantes iniciais de aceleração de um veículo marítimo, pois o gradiente de velocidade relativa entre o corpo e o fluido é relativamente pequeno, permitindo assim desprezar os fenômenos viscosos. À medida que o corpo possui sua velocidade elevada, os esforços hidrodinâmicos se devem cada vez mais aos efeitos de viscosidade devido ao aparecimento de vórtices na superfície do corpo [8].

Em hidrodinâmica, a força gravitacional e o empuxo hidrostático correspondem as forças restauradoras. A primeira vai atuar através do centro de gravidade  $\mathbf{r}_G = [x_G \ y_G \ z_G]^T$  do veículo, enquanto que a segunda vai atuar através do ponto de aplicação do empuxo  $\mathbf{r}_B = [x_B \ y_B \ z_B]^T$ , ver Figura 2.2 [12].

## Esforços Ambientais

Como apresentado em [5], a ação das ondas, dos ventos e das correntes marítimas constituem os agentes de distúrbios ambientais mais importantes quando se considera embarcações de superfície, como navios ou plataformas marítimas. Dessa forma, o vetor  $\boldsymbol{\tau}_E$  pode ser expressado como mostra a equação 2.11.

$$\boldsymbol{\tau}_E = \boldsymbol{\tau}_E^{cm} + \boldsymbol{\tau}_E^{onda} + \boldsymbol{\tau}_E^{vento} \quad (2.11)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}_E^{cm}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_E^{onda}$  e  $\boldsymbol{\tau}_E^{vento}$  correspondem aos vetores de forças e momentos induzidos pelas correntes marítimas, ondas e ventos, respectivamente.

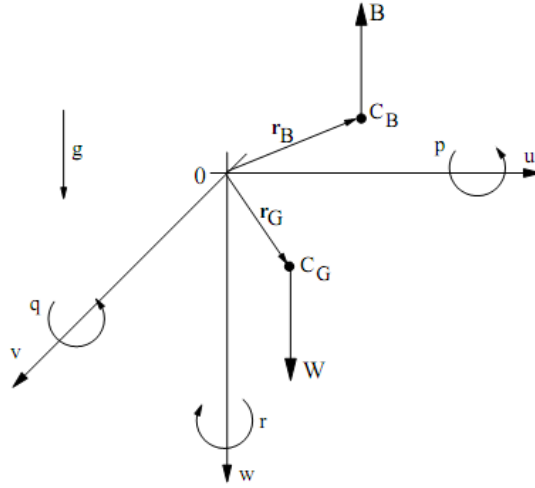


Figura 2.2: Forças restauradoras no Sistema  $B$ . Retirado de [8]

## Forças e Momentos de Propulsão

O vetor  $\tau$  depende da configuração específica dos atuadores, por exemplo, se há hélices e lemes instalados no veículo. Nesse trabalho, negligencia-se a dinâmica dos atuadores que provêm as forças e os momentos de propulsão, supondo que a resposta dos atuadores, tais como sistemas hidráulicos ou motores elétricos, é muito mais rápida que a resposta do veículo.

### 2.3.4 Modelo do Navio de Superfície

Considerando os principais resultados discutidos nas seções anteriores, chega-se ao modelo geral para a dinâmica do veículo marítimo de 6 graus de liberdade, como mostrado na equação 2.12.

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= J(\eta)\nu \\ M\dot{\nu} &= -C(\nu)\nu - D(\nu)\nu - g(\eta) + \tau + \tau_E \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} M &= M_{RB} + M_A \\ C(\nu) &= C_{RB}(\nu) + C_A(\nu) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assumindo que o corpo está em repouso (ou na maioria das vezes está se movendo em baixa velocidade) em um fluido ideal, a matriz  $M$  é sempre simétrica positiva, ou seja:

$$M = M^T > 0 \quad (2.14)$$

Para um corpo rígido se movendo em um fluido, a matriz  $C(\nu)$  pode ser sempre parametrizada

de tal forma que ela seja anti-simétrica, enquanto que a matriz  $D(\boldsymbol{\nu})$  é real, não-simétrica e estritamente positiva [5], ou seja:

$$C(\boldsymbol{\nu}) = -C(\boldsymbol{\nu})^T, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^6 \quad (2.15)$$

$$D(\boldsymbol{\nu}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^6 \quad (2.16)$$

A partir da equação 2.12, pode-se derivar um modelo geral para a dinâmica de um navio de superfície se movendo em um plano horizontal [5]. Para isso, assumem-se três hipóteses iniciais:

1. A dinâmica associada com o movimento nas direções Afundamento, Jogo e Arfagem é ignorada, ou seja,  $z = 0$ ,  $w = 0$ ,  $\phi = 0$ ,  $p = 0$ ,  $\theta = 0$  e  $q = 0$ . Isso se deve ao fato que o movimento na horizontal é descrito somente pelas componentes nas direções Avanço, Deriva e Guinada.
2. O corpo apresenta uma distribuição de massa homogênea e um plano de simetria em XZ, implicando assim que os momentos de inércia  $I_{xy}$  e  $I_{yz}$  são nulos.
3. O centro de gravidade e o ponto de aplicação do empuxo são localizados verticalmente no eixo Z.

Além das hipóteses acima, pode-se obter um modelo simplificado ao ignorar os termos não-diagonais das matrizes  $M$  e  $D$ , além de todos os elementos da matriz  $D_n(\boldsymbol{\nu})$ . Essas considerações são consistentes quando o corpo apresenta três planos de simetria e os eixos do Sistema  $B$  são escolhidos para serem paralelos ao eixo principal do fluido deslocado, os quais são iguais ao eixo principal do corpo. Por último, as perturbações induzidas por ondas, ventos ou correntes marítimas também são ignoradas. Assim, o modelo simplificado que representa a dinâmica de um navio de superfície se movendo em um plano horizontal é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= J(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu} \\ M\dot{\boldsymbol{\nu}} &= -C(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - D\boldsymbol{\nu} - g(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde as matrizes  $J(\boldsymbol{\eta})$ ,  $M$ ,  $C(\boldsymbol{\eta})$  e  $D$  são dadas por:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & M &= \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \\ C(\boldsymbol{\nu}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{22}v \\ 0 & 0 & m_{11}u \\ m_{22}v & -m_{11}u & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

com

$$\begin{aligned} m_{11} &= m - X_{\dot{u}}, & m_{22} &= m - Y_{\dot{v}}, & m_{33} &= I_z - N_{\dot{r}} \\ d_{11} &= -X_u, & d_{22} &= -Y_v, & d_{33} &= -N_r \end{aligned} \quad (2.19)$$

A configuração do vetor  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ 0 \ \tau_3]^T$  implica que o navio de superfície não apresenta um atuador independente na direção Deriva, ou seja, tem-se um sistema subatuado. As componentes  $\tau_1$  e  $\tau_3$  correspondem a uma força aplicada na direção Avanço e um momento aplicado na direção Guinada, respectivamente.

Por último, a equação 2.17 pode ser reorganizada a fim de facilitar sua visualização:

$$\begin{cases} \dot{x} &= u \cos(\psi) - v \sin(\psi) \\ \dot{y} &= u \sin(\psi) + v \cos(\psi) \\ \dot{\psi} &= r \\ \dot{u} &= \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{d_{11}}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} \tau_1 \\ \dot{v} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}} ur - \frac{d_{22}}{m_{22}} v \\ \dot{r} &= \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} uv - \frac{d_{33}}{m_{33}} r + \frac{1}{m_{33}} \tau_3 \end{cases} \quad (2.20)$$

### 2.3.5 Modelo do Hovercraft

A versão simplificada de um *Hovercraft* subatuado pode ser visualizada na Figura 2.3.

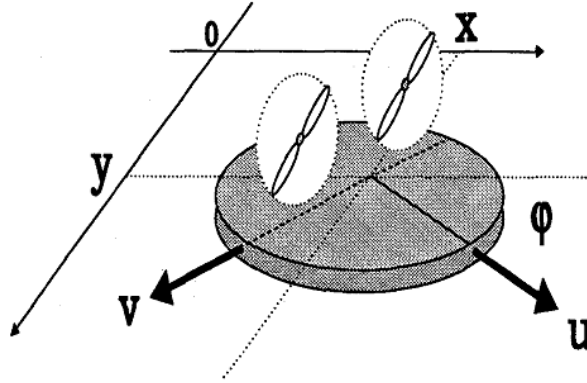


Figura 2.3: O modelo simplificado para um hovercraft. Retirado de [37]

Como apresentado em [18, 37], o modelo não-linear de um *Hovercraft* subatuado é facilmente derivado do modelo simplificado de um navio de superfície se movendo em um plano horizontal. Para isso, consideram-se as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} & d_{11} &= d_{33} = 0 & \beta &= \frac{d_{22}}{m_{22}} \\ \tau_1 &= m_{11} \tau_u & \tau_3 &= m_{33} \tau_r \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde  $m_{11} = m_{22}$  implica que o *Hovercraft* apresenta simetria em relação aos eixos  $u$  e  $v$ , o que pode ser observado claramente pelo formato circular adotado. Outro ponto a ressaltar é que não seria preciso necessariamente negligenciar os coeficientes de amortecimento, pois poderiam ser eliminados através de alguma técnica de realimentação parcial através dos controles  $\tau_1$  e  $\tau_3$ .

Assumindo as hipóteses anteriores, obtém-se o seguinte modelo do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= u \cos(\psi) - v \sin(\psi) \\ \dot{y} &= u \sin(\psi) + v \cos(\psi) \\ \dot{\psi} &= r \\ \dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur - \beta v \\ \dot{r} &= \tau_r \end{cases} \quad (2.22)$$

## 2.4 Sistemas Planejáveis

A noção de Sistemas Planejáveis (*do inglês Flat Systems*), relativamente recente no campo da Automação, pode-se resumir na capacidade de parametrizar cada variável do sistema em termos de um conjunto finito de variáveis “internas” ao sistema, denominadas Saídas Planejáveis (*do inglês Flat Output*), e de suas derivadas temporais. A definição formal para esses tipos de sistemas pode ser encontrada em [40, 41].

**Definição 1** *Um sistema definido pela equação*

$$\dot{x} = g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

*é dito planejável se existe uma função  $h: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma função  $\lambda_0: (\mathbb{R}^m)^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  e uma função  $\lambda_1: (\mathbb{R}^m)^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tais que se possa escrever as seguintes relações:*

$$f = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) \quad (2.23a)$$

$$x = \lambda_0(f, \dot{f}, \dots, f^{(r)}) \quad (2.23b)$$

$$u = \lambda_1(f, \dot{f}, \dots, f^{(r)}, f^{(r+1)}) \quad (2.23c)$$

onde  $r$  é um inteiro finito.

É interessante ressaltar que:

1. A dimensão das saídas planejáveis é igual ao número de variáveis de controle do sistema, logo se sabe a priori sempre o número de saídas planejáveis a fim de comprovar a característica de planejabilidade do sistema.
2. Não há necessariamente somente um único conjunto de saídas planejáveis, pois pode haver diversas formas de parametrizar o sistema.

3. Frequentemente, as saídas planejáveis podem expressar alguma interpretação física, facilitando a sua compreensão.
4. As saídas planejáveis podem ser as próprias variáveis de saída do sistema.

Essa característica apresenta diversas e interessantes consequências no que se diz respeito a dois problemas bem comuns em diversos domínios de aplicação para sistemas de controle:

- **Planejamento de trajetória**, ou seja, a etapa responsável pela geração antecipada da trajetória desejada para o sistema e dos controles associados que permitirão a sua realização. Se o sistema é precisamente conhecido e supondo o caso ideal onde não há perturbações suficientes para desviá-lo da trajetória, tem-se que um comando em malha aberta é suficiente para realizar tal planejamento. Normalmente, a trajetória é denominada trajetória nominal, ou de referência, e os controles associados são denominados controle nominal, ou de referência.
- **Acompanhamento de Trajetória**, ou seja, a etapa responsável pelo desenvolvimento de uma lei de controle capaz de garantir que o sistema, a partir de uma configuração inicial qualquer, seguirá a trajetória nominal mesmo submetido a perturbações desconhecidas. Para este propósito, a lei de controle precisa levar em conta informações sobre a evolução do sistema ao longo do tempo com o objetivo de deduzir o grau de desvio em relação a trajetória nominal a cada instante. Um comando em malha fechada é necessário e será adicionado ao controle em malha aberta obtido na etapa de Planejamento de Trajetória. Esse novo comando garante a convergência do sistema à trajetória nominal.

Nas próximas subseções, apresentam-se alguns métodos para determinar as saídas planejáveis de um sistema e, a partir delas, propor soluções para problemas relacionados ao planejamento e acompanhamento de trajetórias em sistemas lineares e não-lineares. Por último, os sistemas *Liouvillians* serão abordados brevemente, os quais não são considerados sistemas planejáveis, porém se pode extrair um subsistema que apresente tal característica.

### 2.4.1 Saídas Planejáveis em Sistemas Lineares

Mesmo sendo inicialmente abordado em problemas relacionados a sistemas não-lineares, os conceitos relacionados a sistemas planejáveis são facilmente encontrados no caso dos sistemas lineares. Além disso, observa-se que a representação em espaço de estados para um sistema linear é uma ferramenta natural para colocar em evidência as saídas planejáveis do sistema.

Geralmente, é desejado que um sistema estabilize suas saídas ou que essas acompanhem uma trajetória nominal. Como dito anteriormente, um sistema dito planejável facilita a realização dessas tarefas independente da natureza da dinâmica interna associada com as variáveis de saída.

A identificação das saídas planejáveis de um sistema linear ganha uma importância particular, já que a correspondente parametrização permite reduzir quaisquer problemas de estabilização

ou acompanhamento de trajetória a um problema correspondente definido em relação à saída planejável. Por exemplo, isso significa que, determinando uma lei de controle que estabilize a saída planejável em torno da origem, todas as outras variáveis do sistema serão estabilizadas igualmente.

Em relação aos sistemas lineares, pode-se classificar um sistema de acordo com o número de entradas e de saídas: **SISO** (*do inglês Single-Input, Single-Output*) que corresponde a sistemas com uma única entrada e uma única saída, e **MIMO** (*do inglês Multi-Input, Multi-Output*) que corresponde a sistemas com duas ou mais entradas e duas ou mais saídas. Nesses sistemas, a conexão entre a planejabilidade de sistemas e o conceito de controlabilidade é, talvez, o mais claro de todos: *Um sistema linear invariante no tempo é planejável se e somente se o sistema é controlável* [41].

A partir da equivalência entre sistemas planejáveis e controlabilidade, Sira-Ramírez e Agrawal [42] propõem um método para a determinação das saídas planejáveis de um sistema linear invariante no tempo que esteja em sua representação de espaços de estados. Esse método será discutido para cada um dos tipos de sistemas lineares descritos anteriormente e está relacionado diretamente a representação canônica do sistema.

## Sistemas Lineares SISO

Seja o sistema linear SISO controlável na forma de espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

onde  $A$  é uma matriz constante  $n \times n$ , e  $b$  é um  $n$ -vetor de valores constantes.

Sendo controlável, a matriz de controlabilidade de Kalman  $C_K$  é dada por:

$$C_K = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \quad (2.25)$$

e tem posto igual a  $n$ .

A saída planejável do sistema acima é dada por uma combinação linear dos estados obtidos a partir da última linha de  $C_K^{-1}$ , como pode ser visto na equação 2.26.

$$f = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]C_K^{-1}x \quad (2.26)$$

Deve-se ressaltar que a saída planejável não é única, ou seja, qualquer múltiplo constante de  $f$  também será uma saída planejável do sistema.



## Sistemas Lineares MIMO

Seja o sistema linear multivariável controlável em sua representação de espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.27)$$

onde  $A$  é uma matriz constante  $n \times n$ , e  $B$  é uma matriz  $n \times m$  de posto igual a  $m$ .

Sendo controlável, a matriz de controlabilidade de Kalman  $C_K$  do sistema é dada por:

$$C_K = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.28)$$

e tem posto igual a  $n$ .

Para sistemas lineares MIMO, a controlabilidade do sistema também garante que é possível extrair uma matriz  $C$  de posto igual a  $n$  com o seguinte formato:

$$C = [b_1, Ab_1, \dots, A^{(\gamma_1-1)}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{(\gamma_2-1)}b_2, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{(\gamma_m-1)}b_m] \quad (2.29)$$

com  $\gamma_i, i = 1, \dots, m$ , sendo os índices de controlabilidade de Kronecker [43] do sistema, os quais devem satisfazer a seguinte condição:  $\sum_i \gamma_i = n$ .

Dessa forma, percebe-se que há diversas maneiras de escolher os índices  $\gamma_i$ , o que acarreta em diferentes conjuntos de saídas planejáveis, conseqüentemente em diferentes parametrizações possíveis para o sistema. Normalmente, a escolha deve ser guiada a partir de considerações físicas do sistema em estudo ou das intuições dos próprios engenheiros.

Após determinar a matriz  $C$ , as saídas planejáveis do sistema descrito pela equação 2.27 são dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} C^{-1}x \quad (2.30)$$

onde  $\phi_j, j = 1, \dots, m$  sendo vetores linhas  $n$ -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (2.31)$$

onde a posição do 1 será dada por  $\sum_{i=1}^j \gamma_i$ .

Nota-se que o método descrito acima para a determinação das saídas planejáveis é uma generalização do método para sistemas lineares SISO.

### 2.4.2 Saídas Planejáveis em Sistemas Não-Lineares

Como abordado em Sira-Ramírez e Agrawal [42], problemas relacionados a planejamento e acompanhamento de trajetória em sistemas não-lineares podem ser equivalentes a problemas de

estabilização de sistemas lineares variantes no tempo em torno da origem. Isso ocorre porque a linearização de um sistema não-linear em torno das trajetórias desejadas acarreta em um sistema linear variante no tempo.

O interesse nessa subseção é de apresentar o procedimento para linearizar um sistema não-linear em torno de uma determinada trajetória, e, assim, como determinar as saídas planejáveis para sistemas lineares variantes no tempo.

## Linearização em torno de uma trajetória

Considere o sistema não-linear

$$\dot{x} = g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.32)$$

Suponha as trajetórias desejadas para o estado nominal e para as variáveis de controle nominal da seguinte forma:

$$x = x^*(t), \quad u = u^*(t) \quad (2.33)$$

A linearização tangente do sistema não-linear em torno das trajetórias dadas é, desprezando os termos de ordem mais alta, dada pelo seguinte sistema linear variante no tempo [42]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= A(t)x_\delta + B(t)u_\delta \\ x_\delta &= x - x^*(t) \\ u_\delta &= u - u^*(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

e as matrizes A(t) e B(t) são matrizes jacobianas calculadas da seguinte forma:

$$A(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) \Big|_{(x^*(t), u^*(t))} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right) & \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) & \dots & \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right) \\ \left( \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) & \dots & \dots & \left( \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left( \frac{\partial g_n}{\partial x_1} \right) & \left( \frac{\partial g_n}{\partial x_2} \right) & \dots & \left( \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \right) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$B(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right) \Big|_{(x^*(t), u^*(t))} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right) & \left( \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \right) & \dots & \left( \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \right) \\ \left( \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \right) & \dots & \dots & \left( \frac{\partial g_2}{\partial u_n} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left( \frac{\partial g_n}{\partial u_1} \right) & \left( \frac{\partial g_n}{\partial u_2} \right) & \dots & \left( \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \right) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

## Sistemas Lineares Variantes no Tempo SISO

Seja o sistema linear variante no tempo SISO em sua representação de espaço de estados

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

Assumindo que o sistema acima é uniformemente controlável, de acordo com os resultados de Malrait et al. [44], implica-se que o sistema é equivalente a um sistema invariante no tempo na forma canônica de Brunovsky após uma mudança estática de coordenadas e uma redefinição dependente de estado (*do ingles state-dependent re-definition*) da entrada de controle. Dessa forma, o sistema é considerado também planejável [42].

Consequentemente, seguindo o raciocínio apresentado para sistemas lineares invariantes no tempo, a saída planejável para o sistema acima é dada por uma combinação linear dos estados obtidos a partir da última linha de  $C_K^{-1}(t)$ , como pode ser visto na equação 2.38.

$$f = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]C_K^{-1}(t)x \quad (2.38)$$

Para calcular  $C_K^{-1}(t)$ , Silvermam e Meadows [45] propõem uma extensão da matriz de controlabilidade  $C_K$  para sistemas lineares variante no tempo SISO, como pode ser observado na equação 2.39.

$$C_K(t) = [b(t), (A(t) - \frac{d}{dt})b(t), \cdots, (A(t) - \frac{d}{dt})^{(n-1)}b(t)] \quad (2.39)$$

onde  $C_K(t)$  apresenta posto igual a  $n$  ao longo de um intervalo finito de tempo  $[t_0, t_1]$ .

Além disso, ressalta-se novamente que qualquer múltiplo escalar não-nulo de  $f$  também é considerado uma saída planejável.

## Sistemas Lineares Variantes no Tempo MIMO

Considere o sistema abaixo

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.40)$$

onde é assumido ser uniformemente controlável e, conseqüentemente, planejável.

Silvermam e Meadows [45] também propõem uma extensão da matriz de controlabilidade  $C_K$  para sistemas lineares variante no tempo MIMO, como pode ser observado nas equações 2.41 e 2.42.

$$C_K(t) = [B(t), (A(t) - \frac{d}{dt})B(t), \cdots, (A(t) - \frac{d}{dt})^{(n-1)}B(t)] \quad (2.41)$$

$$(A(t) - \frac{d}{dt})^{(n-1)}B(t) = A^{(n-1)}(t)B(t) - \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}B(t) \quad (2.42)$$

onde  $C_K(t)$  apresenta posto igual a  $n$  ao longo de um intervalo finito de tempo  $[t_0, t_1]$ .

Para sistemas lineares MIMO, a controlabilidade do sistema também garante que é possível extrair uma matriz  $C(t)$  de posto igual a  $n$  com o seguinte formato:

$$C(t) = [b_1(t), \dots, (A(t) - \frac{d}{dt})^{(\gamma_1-1)}b_1(t), b_2(t), \dots, b_m(t), \dots, (A(t) - \frac{d}{dt})^{(\gamma_m-1)}b_m(t),] \quad (2.43)$$

com  $\gamma_i, i = 1, \dots, m$ , sendo os índices de controlabilidade de Kronecker do sistema, os quais, evidentemente, satisfazem a seguinte condição:  $\sum_i \gamma_i = n$ .

Ao determinar  $C(t)$ , as saídas planejáveis do sistema descrito pela equação 2.40 são dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{bmatrix} C^{-1}(t)x \quad (2.44)$$

onde  $\phi_j, j = 1, \dots, m$  sendo vetores linhas  $n$ -dimensionais da seguinte forma:

$$\phi_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \quad (2.45)$$

onde a posição do 1 será dada por  $\sum_{i=1}^j \gamma_i$ .

### 2.4.3 Planejamento de Trajetória

De acordo com Levine [41], a planejabilidade do sistema implica que, se for construído uma trajetória com condições iniciais e finais especificadas, é suficiente calcular a correspondente trajetória para a saída planejável, o que evitaria a necessidade de integração das equações diferenciais que descrevem o sistema.

Desde que as condições iniciais e finais de  $x$  e  $u$  sejam dadas, é possível determiná-las para  $f$  e suas derivadas temporais devido a sobrejetividade de  $(\lambda_0(\cdot), \lambda_1(\cdot))$ , as quais foram definidas nas equações 2.23b e 2.23c. Então, é suficiente encontrar uma trajetória  $t \mapsto f(t)$  ao menos  $r + 1$  vezes diferenciável que satisfaça as condições iniciais e finais de  $f$  e suas derivadas temporais. Além disso, ressalta-se também que a trajetória  $t \mapsto f(t)$  não precisa satisfazer quaisquer equações diferenciais, o que permite o uso de interpolações polinomiais a fim de facilitar a sua construção. Por último, é interessante perceber que, como consequência direta da definição de saída planejável, as trajetórias  $t \mapsto x(t)$  e  $t \mapsto u(t)$  obtidas satisfazem as equações diferenciais do sistema.

Na literatura, propõem-se métodos para a construção de trajetórias genéricas, de trajetórias com condições iniciais e finais nulas, de trajetórias ótimas, de trajetórias com restrições, e outras, como detalhados em [41]. No estudo realizado nesse trabalho, escolheu-se por trajetórias tradicionais utilizadas largamente na literatura, tais como retas e círculos. Para um estudo mais aprofundado sobre a relação entre planejamento de trajetórias e sistemas planejados, convida-se o leitor a procurar mais informações em [41].

## 2.4.4 Acompanhamento de Trajetória

No caso dos sistemas planejáveis, se há sensores o suficiente para realizar medições de todas as variáveis de estado do sistema, o acompanhamento de trajetória pode ser desenvolvido a partir de uma realimentação dinâmica de estados.

Seja  $f$  a saída planejável de um sistema com estados e entradas supostamente conhecidas, e  $f^*$  a trajetória desejada para a saída planejável. Denota-se  $e_i = f_i - f_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ , as componentes do erro de acompanhamento. A realimentação necessária é adicionada às equações que representam a parametrização das variáveis de controle a partir das saídas planejáveis do sistema e de suas derivadas temporais. Para tanto, definindo  $v_i = f_i^{(r+1)}$ , garante-se que a convergência do erro a 0 quando  $t \rightarrow \infty$  ao fazer:

$$v_i = v_i^* + \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.46)$$

onde os ganhos  $k_{i,j}$  são escolhidos de tal forma que  $m$  polinômios da forma  $s^{(r+1)} + \sum_{j=0}^r k_{i,j} s^j = 0$  possuem suas raízes com parte real estritamente negativa [41]. Dessa forma, por ser um polinômio mônico e segundo o critério de Routh, basta garantir que os ganhos  $k_{i,j}$  sejam positivos diferentes de zero, implicando assim na convergência de  $f$  e suas derivadas temporais de ordem até  $r + 1$  em  $f^*, \dots, (f^*)^{r(+1)}$ . Além disso, usando a diferenciabilidade do isomorfismo de Lie-Backlund [46], pode-se provar que  $x$  e  $u$  convergem para suas trajetórias nominais.

Para um estudo mais aprofundado sobre a relação entre acompanhamento de trajetórias e sistemas planejáveis, convida-se o leitor a procurar mais informações em [41].

## 2.4.5 Sistemas Liouvilians

Alguns sistemas não-lineares clássicos presentes na literatura, como o pêndulo duplo invertido, são conhecidos por não serem planejáveis. Mesmo assim, os sistemas não-planejáveis podem ainda ser controláveis, mas, definitivamente, nem todas as variáveis podem ser expressas a partir de um conjunto de saídas planejáveis independentes e suas respectivas derivadas temporais. O número de variáveis que não podem ser parametrizadas é definido como o “defeito” do sistema não-planejável.

Nesse contexto, encontram-se os sistemas *Liouvilians*, ou sistemas integráveis por quadratura. Esses representam uma classe de sistemas não-planejáveis em que se pode extrair um subsistema planejável do sistema original. Isso implicada que as variáveis não pertencentes a esse subsistema podem ser expressas a partir de simples integrações das saídas planejáveis e de um número finito de suas derivadas temporais [42].

Também conhecido como caráter *Liouvillian*, mostra-se importante por permitir antecipadamente o cálculo do controle ideal em malha aberta, como nos casos dos sistemas planejáveis. Nesse caso, o controle em malha fechada a fim de garantir o sistema convirja para trajetória nominal é normalmente realizado através de técnicas tradicionais presentes na literatura.

## Capítulo 3

# Desenvolvimento da Lei de Controle

### 3.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo descrever as etapas de planejamento e acompanhamento de trajetória para o modelo simplificado do *Hovercraft* subatuado. Esse sistema foi adotado por ser planejável, como pode ser observado no Anexo IV, onde as saídas planejáveis são as coordenadas  $x$  e  $y$  do *Hovercraft* no Sistema  $E$ . No entanto, neste trabalho, é proposto a utilização dos métodos descritos na seção 2.4 para encontrar um outro conjunto de saídas planejáveis para o sistema.

A Seção 3.2 descreve algumas considerações que foram impostas ao modelo com o objetivo de facilitar a determinação da saída planejável do sistema, como será visto na Seção 3.3. A Seção 3.4 apresenta a trajetória nominal para cada uma das variáveis do sistema. A Seção 3.5 detalha o desenvolvimento da lei de controle em malha fechada que permita o *Hovercraft* a seguir uma trajetória circular a partir de uma configuração inicial qualquer.

### 3.2 Considerações sobre o modelo do Hovercraft

Inicialmente, antes de determinar as saídas planejáveis, percebeu-se que seria interessante adotar duas considerações a fim de reduzir os esforços no desenvolvimento da lei de controle. A primeira consiste em aplicar uma transformação de coordenadas, observada em [18, 47], visando desaparecer com as funções trigonométricas presentes nas equações que representam a cinemática do modelo:

$$z_1 = x \cos(\psi) + y \sin(\psi) \quad (3.1a)$$

$$z_2 = -x \sin(\psi) + y \cos(\psi) \quad (3.1b)$$

$$z_3 = \psi \quad (3.1c)$$

O modelo do *Hovercraft* resultante é dado por:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= u + z_2 r \\ \dot{z}_2 &= v - z_1 r \\ \dot{z}_3 &= r \\ \dot{u} &= vr + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur - \beta v \\ \dot{r} &= \tau_r \end{cases} \quad (3.2)$$

A segunda consideração consiste na análise do subsistema a seguir:

$$\begin{cases} \dot{z}_3 &= r \\ \dot{r} &= \tau_r \end{cases} \quad (3.3)$$

Observou-se que  $(\dot{r} = \tau_r)$  é diretamente controlável, ou seja, é possível determinar uma lei de controle para  $\tau_r$  de tal forma a garantir que  $r$  convergirá para sua trajetória nominal supondo que a dinâmica do subsistema é mais rápida que o sistema completo [48]. Partindo desse pressuposto, o modelo do *Hovercraft* se resume a:

$$\begin{cases} \dot{u} &= vr^* + \tau_u \\ \dot{v} &= -ur^* - \beta v \\ \dot{z}_1 &= u + z_2 r^* \\ \dot{z}_2 &= v - z_1 r^* \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $r^*$  corresponde a trajetória nominal para a velocidade angular do *Hovercraft* no Sistema *B*.

A estratégia descrita é interessante porque transforma o modelo não-linear MIMO do *Hovercraft* em um sistema linear SISO, o que amenizará consideravelmente os esforços para encontrar a saída planejável do modelo representado por (3.4).

### 3.3 Determinação da Saída Planejável do Sistema

O modelo linear SISO do *Hovercraft* na representação de espaço de estados é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r^* & 0 & 0 \\ -r^* & -\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & r^* \\ 0 & 1 & -r^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_u \quad (3.5)$$

Inicialmente, como ainda não se sabe qual a trajetória nominal para  $r$ , supõe-se que ela corresponda a uma trajetória variante no tempo, ou seja, assume-se que  $r^* = r(t)$ , o que acarreta em

um sistema linear variante no tempo.

Em seguida, determinou-se a matriz de controlabilidade  $C_K(t)$ , conforme foi descrito na equação 2.39. Nota-se que  $\dot{b}(t) = \ddot{b}(t) = b^{(3)}(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , logo  $C_K(t)$  se resume a:

$$C_K(t) = [b(t), A(t)b(t), A(t)^2b(t), A(t)^3b(t)] \quad (3.6a)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r(t)^2 & \beta r(t)^2 \\ 0 & -r(t) & \beta r(t) & -r(t)(\beta^2 - r(t)^2) \\ 0 & 1 & 0 & -3r(t)^2 \\ 0 & 0 & -2r(t) & \beta r(t) \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

Observa-se que a  $\det(C_K(t)) = 4r(t)^4$ , o que implica que o sistema deixa de ser controlável quando  $r(t) = 0$ . Portanto, nesse trabalho, assume-se que  $r(t)$  será persistentemente excitado, ou seja, não será desejável, por exemplo, que a trajetória nominal seja uma reta.

Utilizando a equação 2.38, determina-se a saída planejável do modelo linear SISO do *Hovercraft*:

$$f = [0 \ 0 \ \dots \ 1] C_K^{-1}(t) [u \ v \ z_1 \ z_2]^T \quad (3.7a)$$

$$= \left( \frac{-2}{r(t)[\beta^2 + 4r(t)^2]} \right) v - \left( \frac{2r(t)}{r(t)[\beta^2 + 4r(t)^2]} \right) z_1 - \left( \frac{\beta}{r(t)[\beta^2 + 4r(t)^2]} \right) z_2 \quad (3.7b)$$

Por último, sabendo que qualquer múltiplo inteiro de  $f$  também representa uma saída planejável do sistema, obtém-se que:

$$f = -2v - 2r(t)z_1 - \beta z_2 \quad (3.8)$$

### 3.4 Planejamento de Trajetória

Nesse trabalho, o planejamento de trajetória se concentrará em encontrar as trajetórias nominais para todas as variáveis do modelo linear SISO do *Hovercraft* com o objetivo que o sistema acompanhe uma trajetória circular de raio  $\rho$  no Sistema  $E$  assumindo sentido horário.

A análise da planeabilidade do sistema garante que é suficiente encontrar as trajetórias nominais de  $f$  e suas derivadas temporais que permitam o sistema a executar a trajetória circular. No entanto, há uma grande dificuldade em determiná-las, principalmente, devido a inexistência de um sentido físico para  $f$ . Dessa forma, para contornar esse problema, propõe-se uma estratégia que utiliza o conhecimento da trajetória desejada e de suas parametrizações, juntamente com as equações do modelo.

Seguindo esse raciocínio, uma possível parametrização da trajetória circular em função de  $x$  e



$y$  é dada por:

$$x^*(t) = \rho \cos(\omega t) \quad (3.9a)$$

$$y^*(t) = \rho \sin(\omega t) \quad (3.9b)$$

Para esta escolha particular de  $x^*(t)$  e  $y^*(t)$ , a orientação angular nominal  $\psi^*(t)$  pode ser obtida a partir do modelo representado por 2.22, como descrito pela equação IV.1.

$$\begin{aligned} \psi^*(t) &= \arctan \left( \frac{\omega \sin(\omega t) - \beta \cos(\omega t)}{\omega \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)} \right) \\ &= \arctan(\tan(\omega t - \theta)) \\ &= \omega t - \theta \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\theta = \arctan(\beta/\omega)$ .

As trajetórias nominais  $z_1^*(t)$ ,  $z_2^*(t)$  e  $z_3^*(t)$  são facilmente obtidas aplicando a transformação de coordenadas, conforme descrita pelas equações (3.1a - 3.1c). A partir delas,  $u^*(t)$ ,  $v^*(t)$ ,  $r^*(t)$  e  $\tau_u^*(t)$  são obtidas diretamente do modelo representado por 3.2, como pode ser visto a seguir.

$$u^*(t) = -\rho\omega \sin(\theta) \quad (3.11a)$$

$$v^*(t) = \rho\omega \cos(\theta) \quad (3.11b)$$

$$r^*(t) = \omega \quad (3.11c)$$

$$\tau_u^*(t) = -\rho\omega^2 \cos(\theta) \quad (3.11d)$$

Após determinar as trajetórias nominais para as variáveis do sistema, percebe-se que a velocidade de guinada será constante, logo suas derivadas temporais são nulas. Esse fator, como será visto a seguir, facilitará significativamente na construção das derivadas temporais da saída planejável  $f$ , porém o sistema estará restrito a seguir trajetórias que apresentam tal característica.

Como observado em Slotine [49], para sistemas lineares, o grau relativo equivale ao número de vezes em que se precisa derivar para se obter uma relação explícita entre a entrada e a saída do sistema. Caso o grau relativo seja no máximo igual a ordem do sistema, tem-se que o sistema é controlável, logo é planejável.

Seguindo esse raciocínio, Sira-Ramírez e al. [42] mostram que, para sistemas lineares SISO, a parametrização de  $\tau_u^*(t)$  em função de  $f$  e de suas derivadas temporais é obtida derivando  $f$   $n$ -vezes. Dessa forma, como  $n = 4$ , determinaram-se  $\dot{f}$ ,  $\ddot{f}$ ,  $f^{(3)}$  e  $f^{(4)}$ , como observado nas equações 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15.

$$\dot{f} = -2\dot{v} - 2r\dot{z}_1 - \beta\dot{z}_2 \quad (3.12a)$$

$$= 2(ur + \beta v) - 2r(u + z_2 r) - \beta(v - z_1 r) \quad (3.12b)$$

$$= 2ur + 2\beta v - 2ur - 2r^2 - \beta v + \beta r z_1 \quad (3.12c)$$

$$= \beta v + \beta r z_1 - 2r^2 z_2 \quad (3.12d)$$

$$\ddot{f} = \beta\dot{v} + \beta r\dot{z}_1 - 2r^2\dot{z}_2 \quad (3.13a)$$

$$= \beta(-ur - \beta v) + \beta r(u + z_2 r) - 2r^2(v - z_1 r) \quad (3.13b)$$

$$= -\beta ur - \beta^2 v + \beta r u + \beta r^2 z_2 - 2r^2 v + 2r^3 z_1 \quad (3.13c)$$

$$= -(\beta^2 + 2r^2)v + 2r^3 z_1 + \beta r^2 z_2 \quad (3.13d)$$

$$f^{(3)} = -(\beta^2 + 2r^2)\dot{v} + 2r^3\dot{z}_1 + \beta r^2\dot{z}_2 \quad (3.14a)$$

$$= -(\beta^2 + 2r^2)(-ur - \beta v) + 2r^3(u + z_2 r) + \beta r^2(v - z_1 r) \quad (3.14b)$$

$$= \beta^2 r u + \beta^3 v + 2r^3 u + 2\beta r^2 v + 2r^3 u + 2r^4 z_2 + \beta r^2 v - \beta r^3 z_1 \quad (3.14c)$$

$$= (\beta^2 r + 4r^3)u + (\beta^3 + 3\beta r^2)v + 2r^4 z_2 - \beta r^3 z_1 \quad (3.14d)$$

$$f^{(4)} = (\beta^2 r + 4r^3)\dot{u} + (\beta^3 + 3\beta r^2)\dot{v} + 2r^4\dot{z}_2 - \beta r^3\dot{z}_1 \quad (3.15a)$$

$$= (\beta^2 r + 4r^3)(vr + \tau_u) + (\beta^3 + 3\beta r^2)(-ur - \beta v) + 2r^4(v - z_1 r) - \beta r^3(u + z_2 r) \quad (3.15b)$$

$$= \beta^2 r^2 v + \beta^2 r \tau_u + 4r^4 v + 4^3 \tau_u - \beta^3 r u - \beta^4 v - 3\beta r^3 u - 3\beta^2 r^2 v + 2r^4 v - 2r^5 z_1 - \beta r^3 u - \beta r^4 z_2 \quad (3.15c)$$

$$= -(\beta^3 r + 4\beta r^3)u + (6r^4 - 2\beta^2 r^2 - \beta^4)v - 2r^5 z_1 - \beta r^4 z_2 + (\beta^2 r + 4r^3)\tau_u \quad (3.15d)$$

É interessante ressaltar que  $f^*$ ,  $\dot{f}^*$ ,  $\ddot{f}^*$ ,  $f^{*(3)}$  e  $f^{*(4)}$  são automaticamente determinadas por  $u^*(t)$ ,  $v^*(t)$ ,  $z_1^*(t)$ ,  $z_2^*(t)$  e  $\tau_u^*(t)$ .

Por último, a partir das equações 3.8, 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15, é possível demonstrar que o modelo linear SISO do *Hovercraft* é realmente planejável. Para tanto, monta-se um sistema do

tipo  $F = EX$  :

$$\begin{bmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ f^{(3)} \\ f^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2r & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & \beta r & -2r^2 & 0 \\ 1 & -(\beta^2 + 2r^2) & 2r^3 & \beta r^2 & 0 \\ \beta^2 r + 4r^3 & \beta^3 + 3\beta r^2 & -\beta r^3 & 2r^4 & 0 \\ -(\beta^3 r + 4\beta r^3) & 6r^4 - 2\beta^2 r^2 - \beta^4 & -2r^5 & -\beta r^4 & \beta^2 r + 4r^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ z_2 \\ \tau_u \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Portanto, invertendo a matriz  $E$ , obtém-se a parametrização para todas as variáveis do sistema em função de  $f$  e suas derivadas temporais:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ z_2 \\ \tau_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta r}{q} & \frac{r}{q} & \frac{\beta}{rq} & \frac{1}{rq} & 0 \\ \frac{-r^2}{q} & 0 & \frac{-1}{q} & 0 & 0 \\ \frac{-r}{q} & \frac{\beta}{rq} & \frac{1}{rq} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{q} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r^3}{q} & \frac{\beta r}{q} & \frac{2r}{q} & \frac{\beta}{rq} & \frac{1}{rq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ f^{(3)} \\ f^{(4)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde  $q = \beta^2 + 4r^2$ .

### 3.5 Controle de Trajetória

Para garantir que o *Hovercraft* irá convergir para a trajetória circular a partir de uma configuração inicial qualquer, fez-se necessário o desenvolvimento de uma lei de controle em malha fechada, conforme apresentado na subseção 2.4.4.

A partir de (3.17), extrai-se que:

$$\tau_u = \left(\frac{r^3}{q}\right)f + \left(\frac{\beta r}{q}\right)\dot{f} + \left(\frac{2r}{q}\right)\ddot{f} + \left(\frac{\beta}{rq}\right)f^{(3)} + \left(\frac{1}{rq}\right)f^{(4)} \quad (3.18)$$

que corresponde ao controle em malha aberta necessário para que o sistema execute a trajetória desejada.

O termo de correção de trajetória  $v$  é construído a partir de  $f, \dot{f}, \ddot{f}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^*, \dot{f}^*, \ddot{f}^*, f^{*(3)}$  e  $f^{*(4)}$ , como descrito pela equação 2.46. Assim, expressão final para  $v$  é dada por:

$$v = f^{*(4)} - k_4(f^{(3)} - f^{*(3)}) - k_3(\ddot{f} - \ddot{f}^*) - k_2(\dot{f} - \dot{f}^*) - k_1(f - f^*), \quad k_i > 0 \quad (3.19)$$

que corresponde ao controle em malha fechada responsável por convergir o erro de acompanhamento para zero.

A expressão final para  $\tau_u$  é obtida ao substituir a equação 3.19 em 3.18 ao fazer  $v = f^{(4)}$  :

$$\begin{aligned} \tau_u = & \left(\frac{r^3}{q}\right)f + \left(\frac{\beta r}{q}\right)\dot{f} + \left(\frac{2r}{q}\right)\ddot{f} + \left(\frac{\beta}{rq}\right)f^{(3)} + \left(\frac{1}{rq}\right)[f^{*(4)} - k_4(f^{(3)} - f^{*(3)}) - k_3(\ddot{f} - \ddot{f}^*) \\ & - k_2(\dot{f} - \dot{f}^*) - k_1(f - f^*)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

A partir da equação 3.20, implementou-se em ambiente *Simulink* do *software MATLAB*<sup>®</sup> o controlador desenvolvido juntamente com o modelo linear SISO do *Hovercraft*, conforme apresentado no Anexo II. No Capítulo 4, algumas situações serão abordados para que, a partir da análise dos resultados, seja possível validar o controlador proposto.

# Capítulo 4

## Simulações Numéricas

### 4.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar simulações numéricas que foram realizadas no ambiente *Simulink* do *software MATLAB*<sup>®</sup> para verificação da performance do controle proposto nesse trabalho, e fazer uma análise dos resultados obtidos tendo em vista que o sistema deverá acompanhar a trajetória circular centrada na origem. Embora não tenha sido possível implementar a lei de controle em um protótipo do *Hovercraft* a fim de obter resultados experimentais, procurou-se analisar numericamente o comportamento dinâmico do sistema para duas configurações iniciais distintas a partir da implementação apresentada pela Figura 4.1. Foi possível avaliar também o grau de robustez do controle ao introduzir uma perturbação externa do tipo senoidal ao sistema.

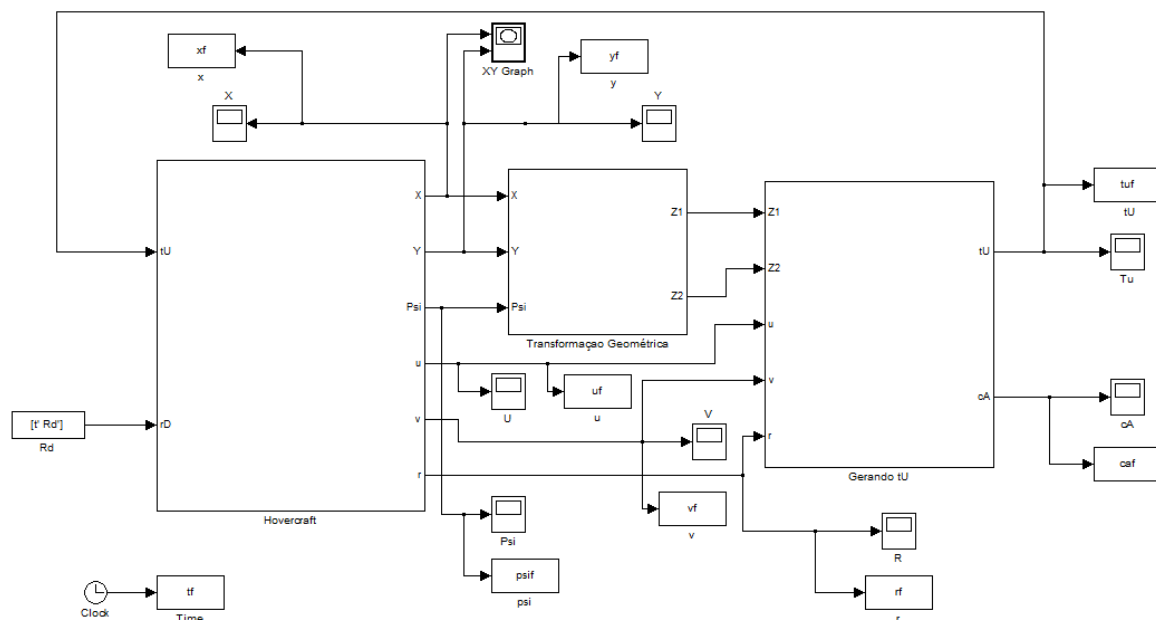


Figura 4.1: Implementação do modelo do *Hovercraft* e do controlador em ambiente *Simulink*

A Seção 4.2 apresenta graficamente os resultados das simulações numéricas supondo que o sistema inicia seu movimento internamente e externamente em relação a trajetória circular. Para tanto, mostra-se a evolução no tempo de cada um das variáveis do modelo dinâmico do *Hovercraft* a fim de observar como convergem para as respectivas trajetórias nominais. A Seção 4.3 apresenta os mesmos resultados, porém na presença de perturbações externas.

## 4.2 Acompanhamento de Trajetória Circular

Como descrito na seção 3.4, deseja-se que o sistema acompanhe uma trajetória circular centrada na origem de raio  $\rho$  no sentido horário no plano  $(X, Y)$ , como pode ser observado na Figura 4.2. Nas simulações, definiu-se um intervalo de tempo computacional  $t \in [0, 20]$ , e especificaram-se os parâmetros da trajetória e do modelo da seguinte forma:

$$\rho = 5 \quad w = -1, \quad \beta = 1.2 \quad (4.1)$$

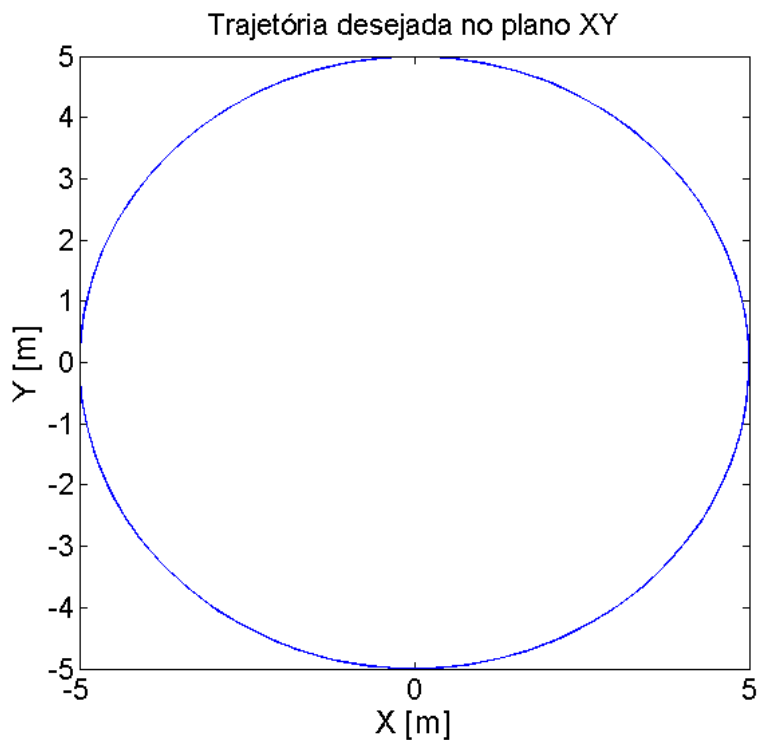


Figura 4.2: Comportamento dinâmico desejado para o *Hovercraft* no Sistema  $E$

### 4.2.1 Trajetórias Nominais

A partir dos parâmetros definidos anteriormente, foi possível computar as trajetórias nominais para as variáveis do modelo dinâmico do *Hovercraft*. A Figura 4.3 apresenta as trajetórias nominais para a posição no Sistema  $E$ , enquanto que a Figura 4.4 apresenta as nominais para a velocidade no Sistema  $B$ .

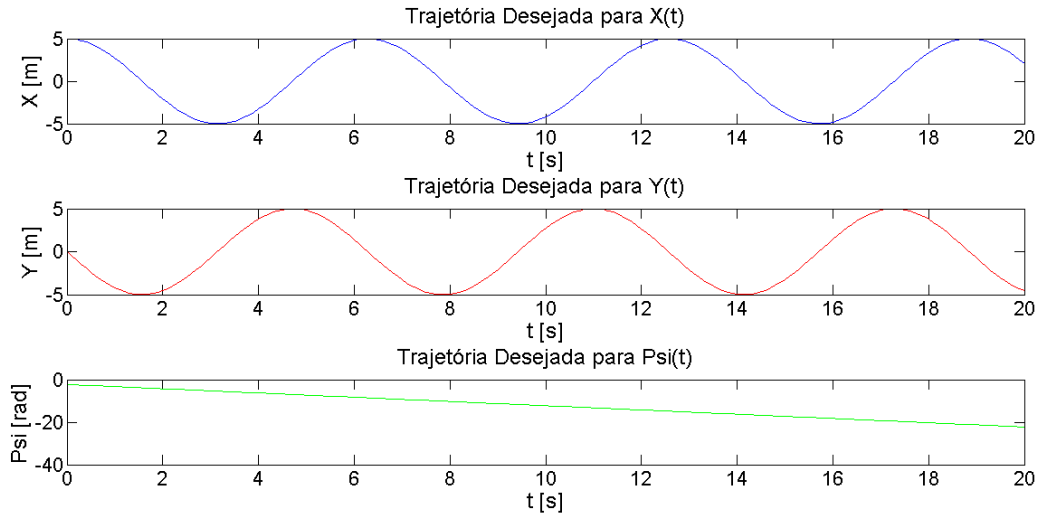


Figura 4.3: Trajetória desejada para a posição no Sistema  $E$

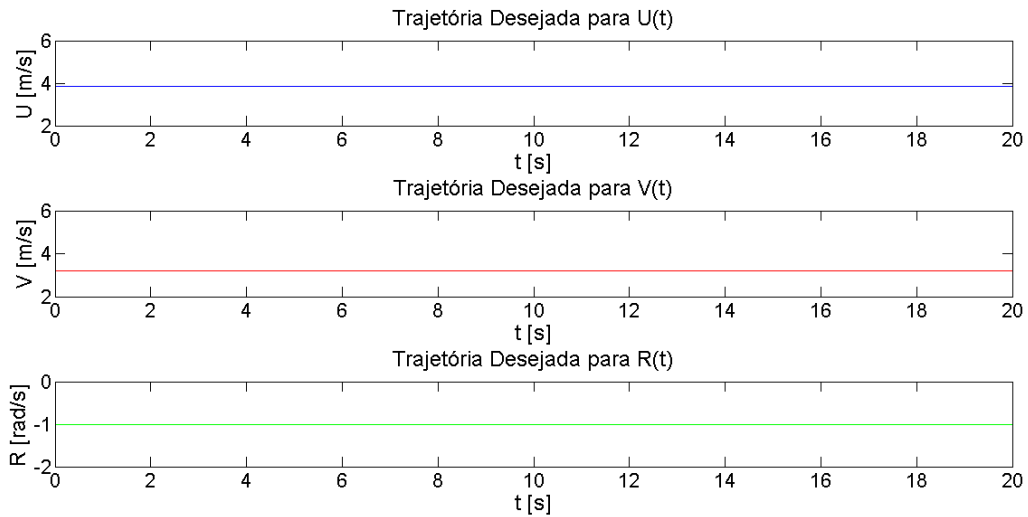


Figura 4.4: Trajetória desejada para as velocidades linear e angular no Sistema  $B$

Após realizar a transformação de coordenadas  $(X, Y, \psi) \Rightarrow (Z_1, Z_2, Z_3)$ , calcularam-se as trajetórias nominais para a saída planejável  $f$  e suas derivadas temporais, como visto na Figura 4.5. Ressalta-se que a ordem de grandeza de  $10^{-14}$  é devido ao erro numérico associado ao *Matlab*<sup>®</sup>, pois as trajetórias nominais das derivadas temporais de  $f$  deveriam ser nulas, já que  $f$  é constante. Enquanto isso, a Figura 4.6 apresenta o controle nominal que, no caso da trajetória circular, é constante e igual a  $-3,2009 [N/Kg]$ .

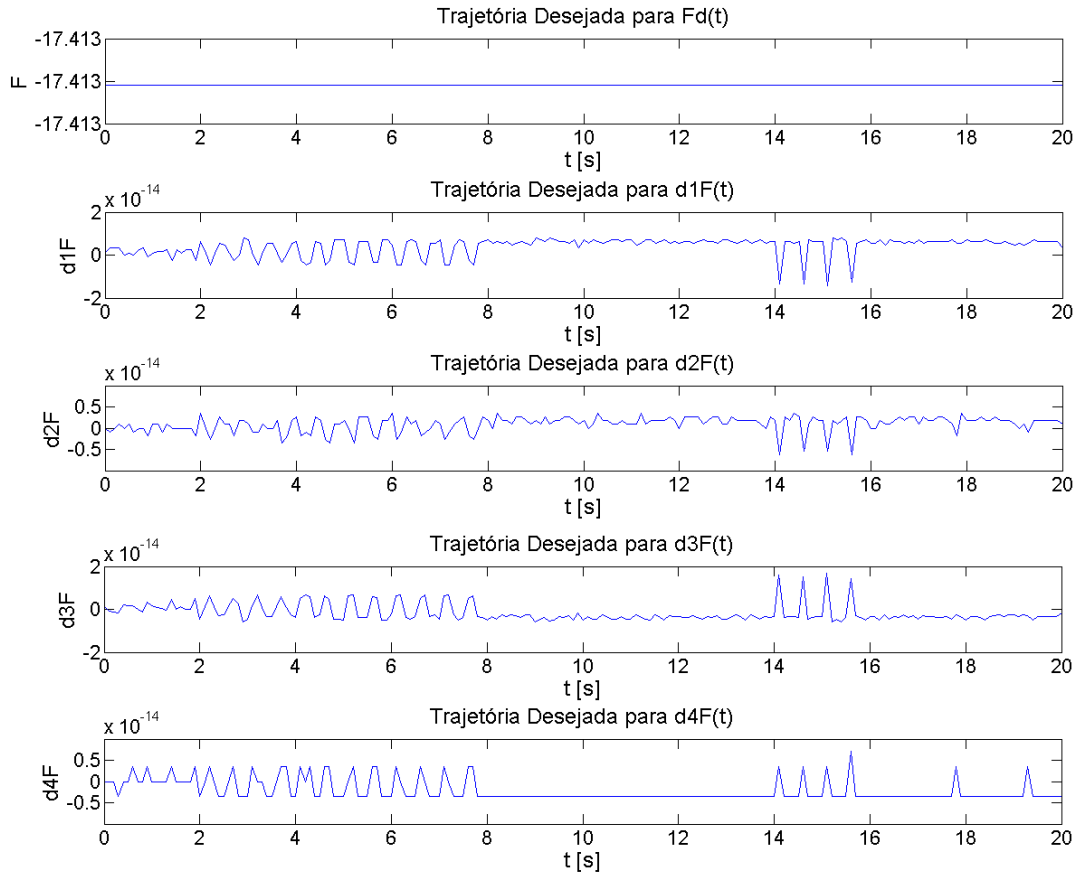


Figura 4.5: Trajetória desejada para a saída planejável e suas derivadas temporais

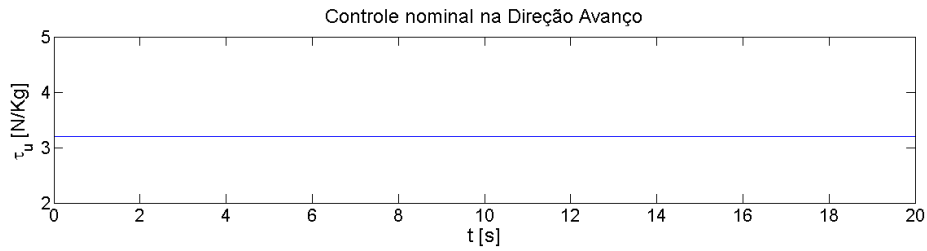


Figura 4.6: Controle nominal na direção Avanço

#### 4.2.2 Configuração inicial 01: Ponto Interno

Na primeira simulação, deseja-se que o *Hovercraft* inicie seu movimento no interior da trajetória circular da Figura 4.2, mais precisamente da origem. O objetivo é avaliar como o comportamento dinâmico do sistema evolui no tempo, ao partir próximo da trajetória desejada, para que o mesmo finalmente a acompanhe. A configuração inicial é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0 & y(0) &= 0 & \psi(0) &= \pi/6 \\
 u(0) &= 0 & v(0) &= 0 & r(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$



Em seguida, escolheram-se os valores para as constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  do controlador descrito pela equação 3.20 de tal forma que a equação característica  $s^4 + k_4s^3 + k_3s^2 + k_2s + k_1 = 0$  apresente raízes com a parte real negativa. Para tanto, como descrito na subseção 2.4.4, definiram-se constantes positivas não-nulas, como pode ser mostrado na equação 4.3. Assim, observa-se que esses valores para as constantes implicam que as quatro raízes do polinômio são iguais a -2, o que acarretará na convergência do erro de acompanhamento de trajetória a zero.

$$k_1 = 16 \quad k_2 = 32 \quad k_3 = 24 \quad k_4 = 8 \quad (4.3)$$

Na Figura 4.7, apresenta o movimento do *Hovercraft* no Plano XY ao se implementar o controlador com os parâmetros definidos anteriormente. As velocidades lineares nas direções Avanço e Guinada são apresentadas na Figura 4.8. O controle aplicado na direção Avanço é apresentado na Figura 4.9, enquanto que as trajetórias executadas pela saída planejável e suas derivadas temporais podem ser observadas na Figura 4.10.

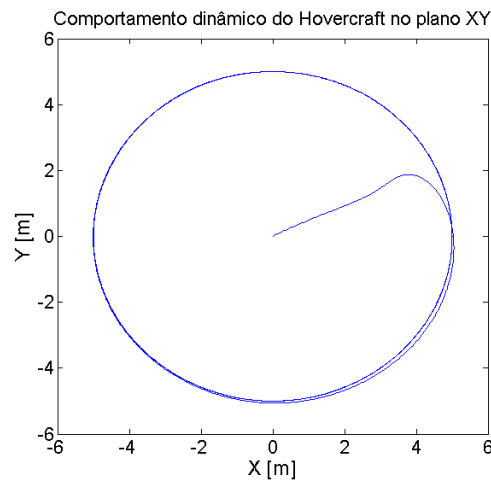


Figura 4.7: Trajetória executada pelo *Hovercraft* no Plano XY

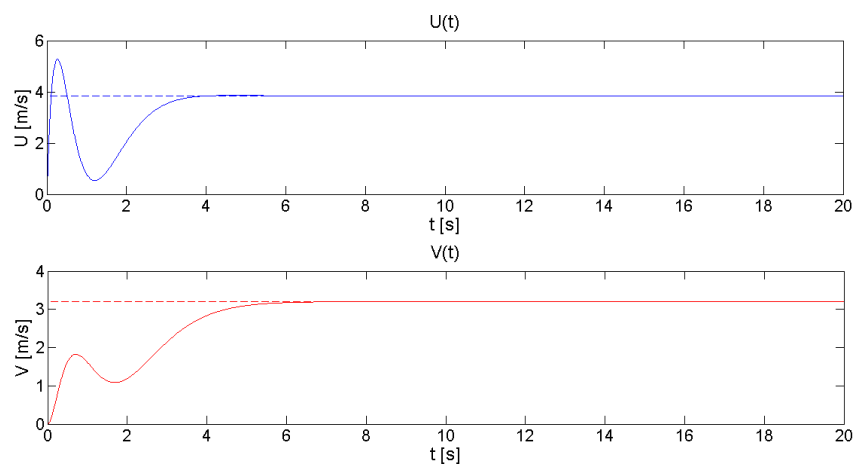


Figura 4.8: Velocidades lineares no Sistema B

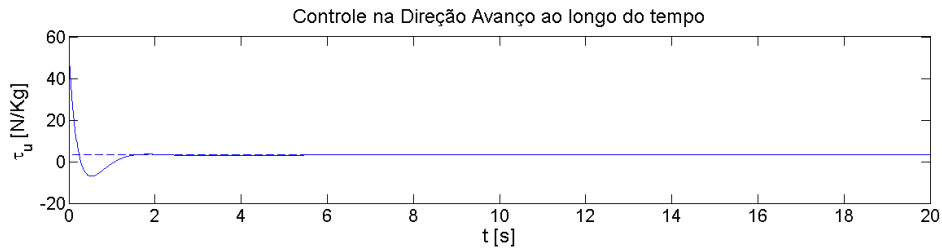


Figura 4.9: Controle na direção Avanço

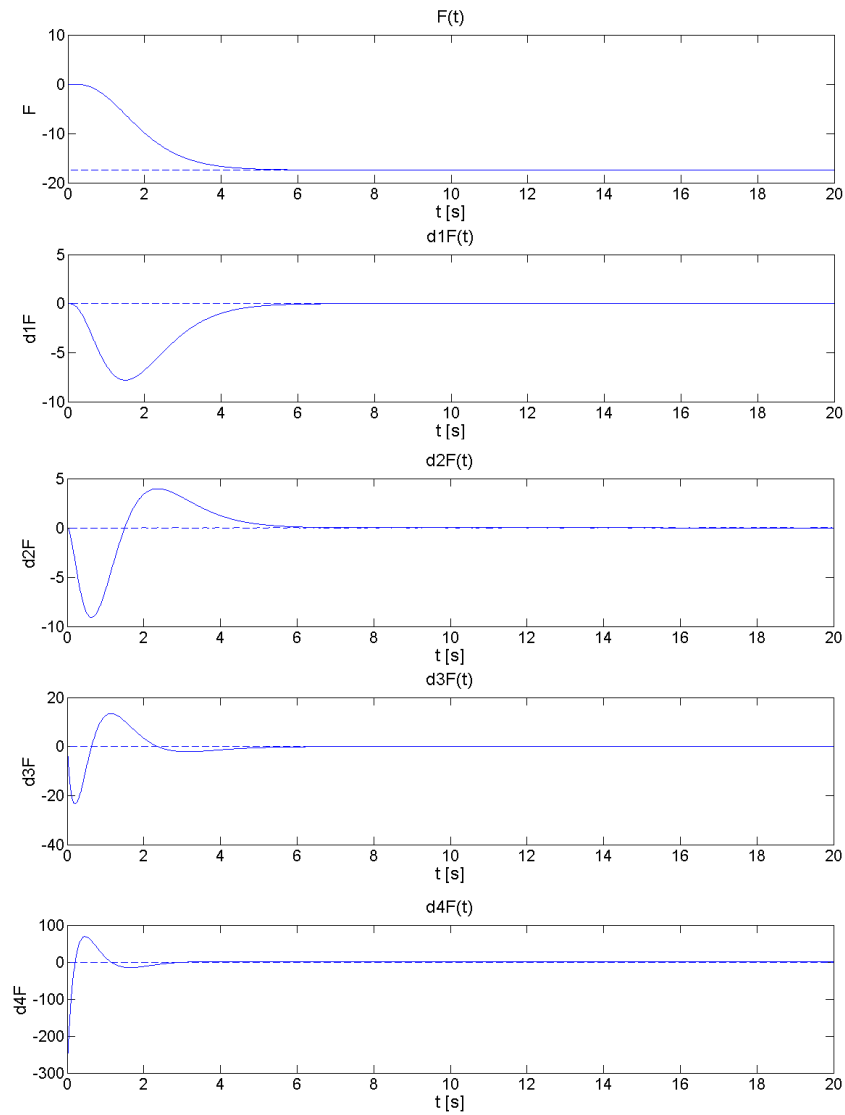


Figura 4.10: Saída planejável e suas derivadas temporais

Como esperado, observa-se que a saída planejável e suas derivadas temporais convergem para a trajetória nominal, o que reflete no bom funcionamento do controlador proposto, pois as variáveis do sistema também convergem para suas respectivas trajetórias nominais. Ressalta-se que não foi apresentando a evolução da velocidade angular ao longo do tempo devido ao fato que é suposto, desde o início, que tal parâmetro já acompanha a trajetória desejada.

### 4.2.3 Configuração inicial 02: Ponto Externo

Na segunda simulação, mantendo os parâmetros do controlador inalterados, deseja-se agora analisar o caso em que o movimento é iniciado de um ponto externo em relação a trajetória circular da Figura 4.2. A configuração inicial é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x(0) &= 10 & y(0) &= 10 & \psi(0) &= -\pi/6 \\ u(0) &= 0 & v(0) &= 0 & r(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Na Figura 4.11, apresenta o movimento do *Hovercraft* no Plano XY. As velocidades lineares nas direções Avanço e Guinada são apresentadas na Figura 4.12, enquanto que o controle aplicado na direção Avanço é apresentado na Figura 4.13. As trajetórias executadas pela saída planejável e suas derivadas temporais podem ser observadas na Figura 4.14.

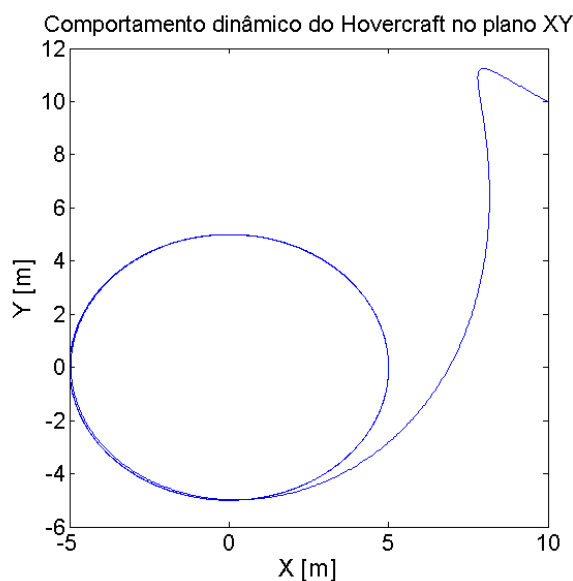


Figura 4.11: Trajetória executada pelo *Hovercraft* no Plano XY

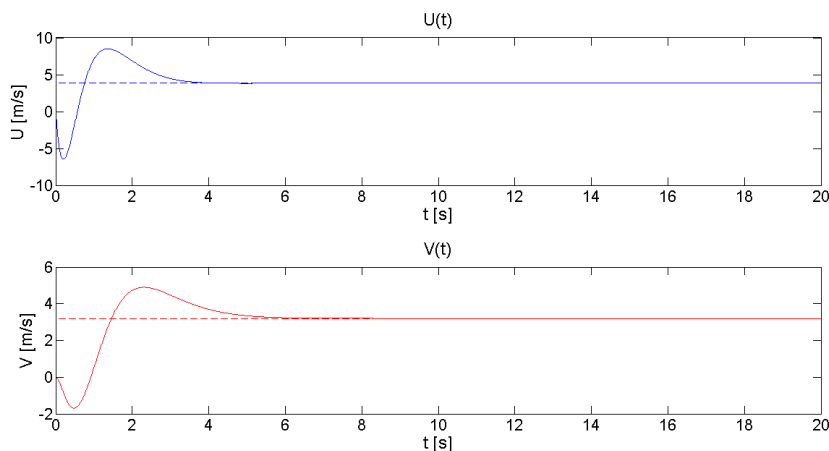


Figura 4.12: Velocidades lineares no Sistema B

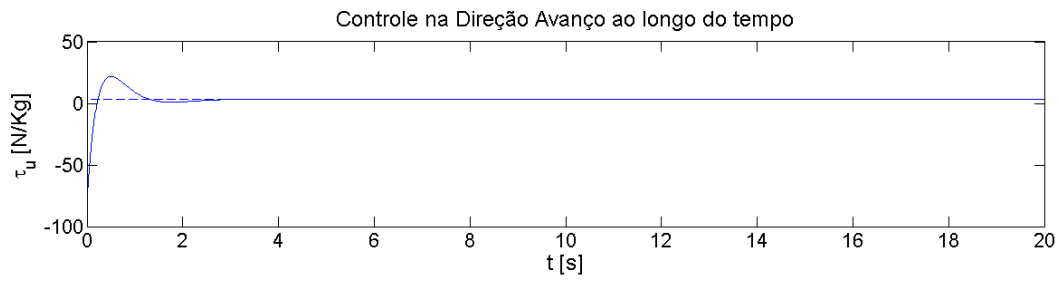


Figura 4.13: Controle na direção Avanço

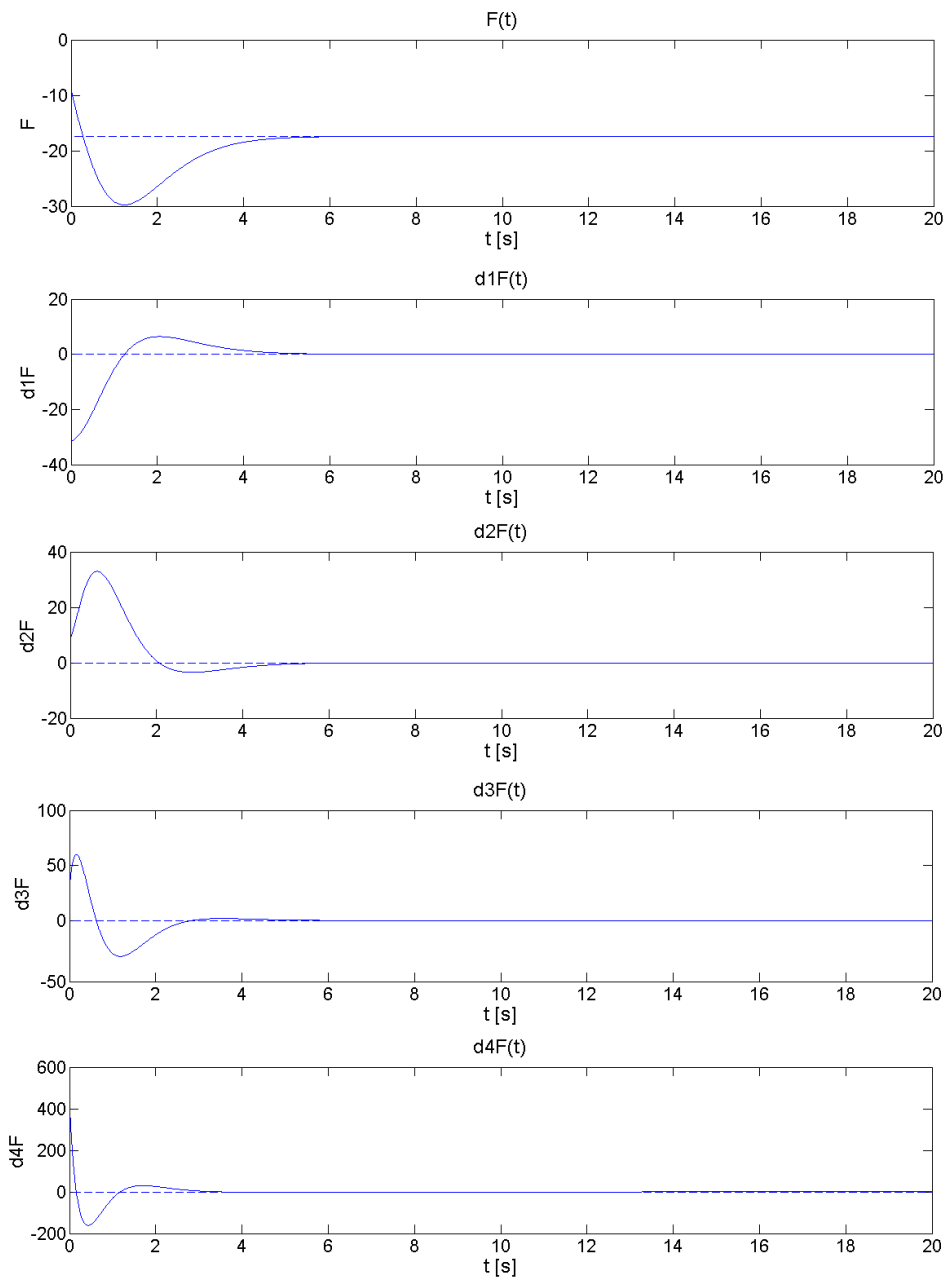


Figura 4.14: Saída planejável e suas derivadas temporais

Como na simulação anterior, observa-se que o sistema acompanha a trajetória desejada, o que corrobora para o fato que o controlador proposto não é restrito para uma única configuração inicial. Além disso, analisando a Figura 4.12, constatou-se que o sistema é de fase não-minima, o que acarreta na presença de zeros no semi-plano direito do plano  $s$ .

### 4.3 Perturbações Externas

A fim de verificar o grau de robustez do controlador proposto, introduziu-se uma perturbação externa do tipo senoidal na direção em que o *Hovercraft* não é atuado no Sistema  $B$ , ou seja, na direção Deriva. Pretende-se simular a influência das ondas no comportamento dinâmico do sistema, conforme descrito pela equação 4.5. Como o controlador apresentou bom funcionamento em ambas as simulações, decidiu-se repetir a primeira simulação, mas acrescentando essa perturbação externa, ver Figura 4.15.

$$\lambda(t) = A(\sin(bt) + 0.2 \cos(\pi bt)), \quad (\dot{v} = -ur - \beta v + \lambda(t)) \quad (4.5)$$

com  $A = 0,6$  e  $b = 10$ .

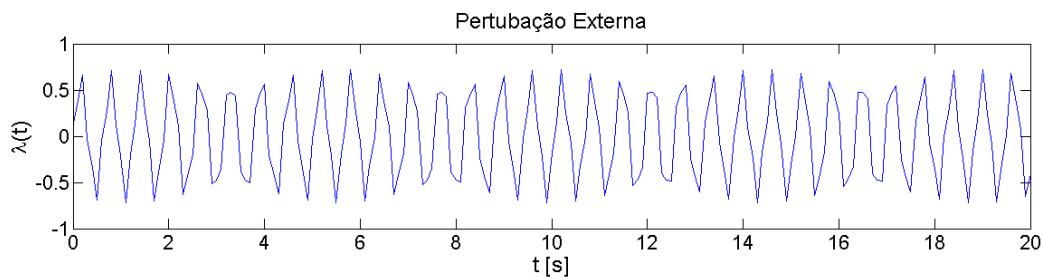


Figura 4.15: Perturbação externa

Apesar da perturbação introduzida, percebe-se que, na Figura 4.16, o sistema converge, mais precisamente, para uma trajetória média em relação a nominal, o que acarreta em um bom grau de robustez do controlador proposto. Esse mesmo fenômeno é facilmente observado para as outras variáveis do sistema, como apresentado nas Figuras 4.17, 4.18 e 4.19.

Neste capítulo, foram apresentados resultados de três simulações numéricas para verificar o desempenho do controlador a partir de diferentes configurações iniciais do sistema, além da análise do comportamento do mesmo na presença de uma perturbação do tipo senoidal na direção em que não há um controle disponível. Como dificuldades encontradas durante a implementação do modelo do *Hovercraft* e do controlador no ambiente *Simulink*, cita-se a complexidade em determinar valores condizentes para os parâmetros do modelo de tal forma a remedir o fato de não contarmos com a disponibilidade de uma plataforma robótica que nos permitiria realizar experimentos em situações reais. Dessa forma, procurou-se adotar os valores utilizados normalmente na bibliografia analisada neste trabalho.

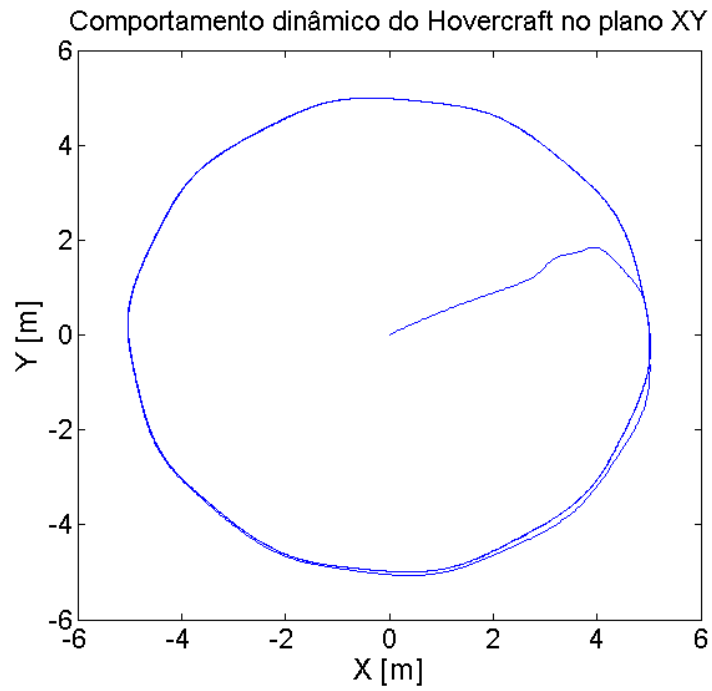


Figura 4.16: Trajetória executada pelo *Hovercraft* no Plano XY

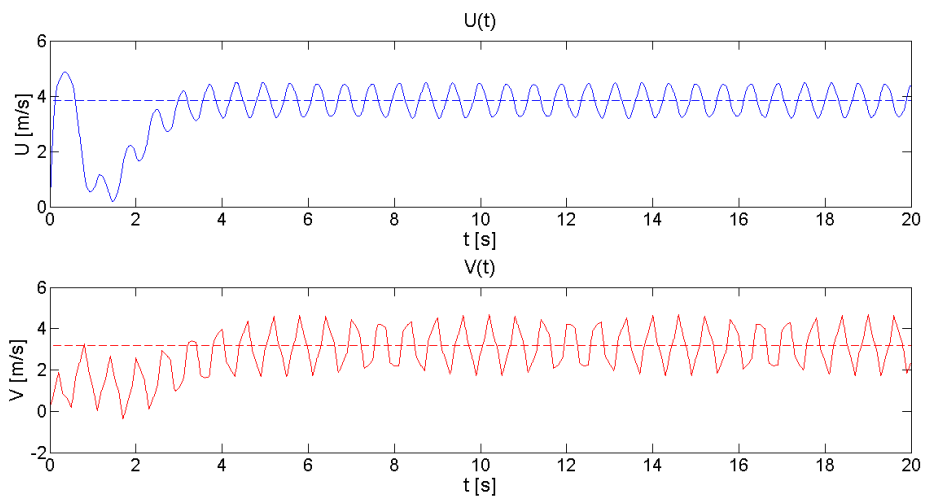


Figura 4.17: Velocidade linear no Sistema *B*

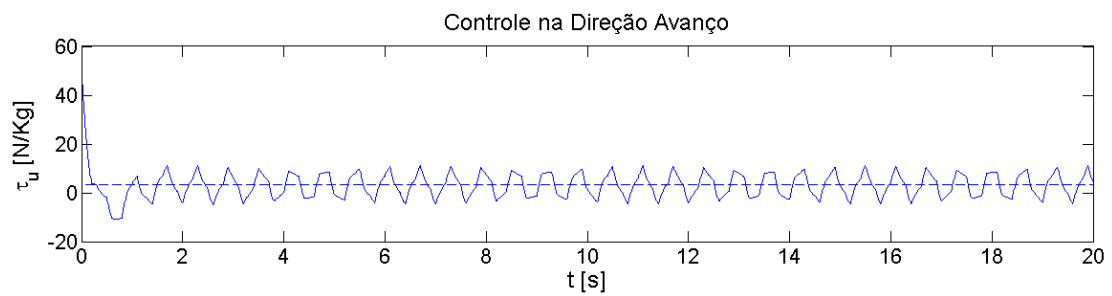


Figura 4.18: Controle na direção Avanço

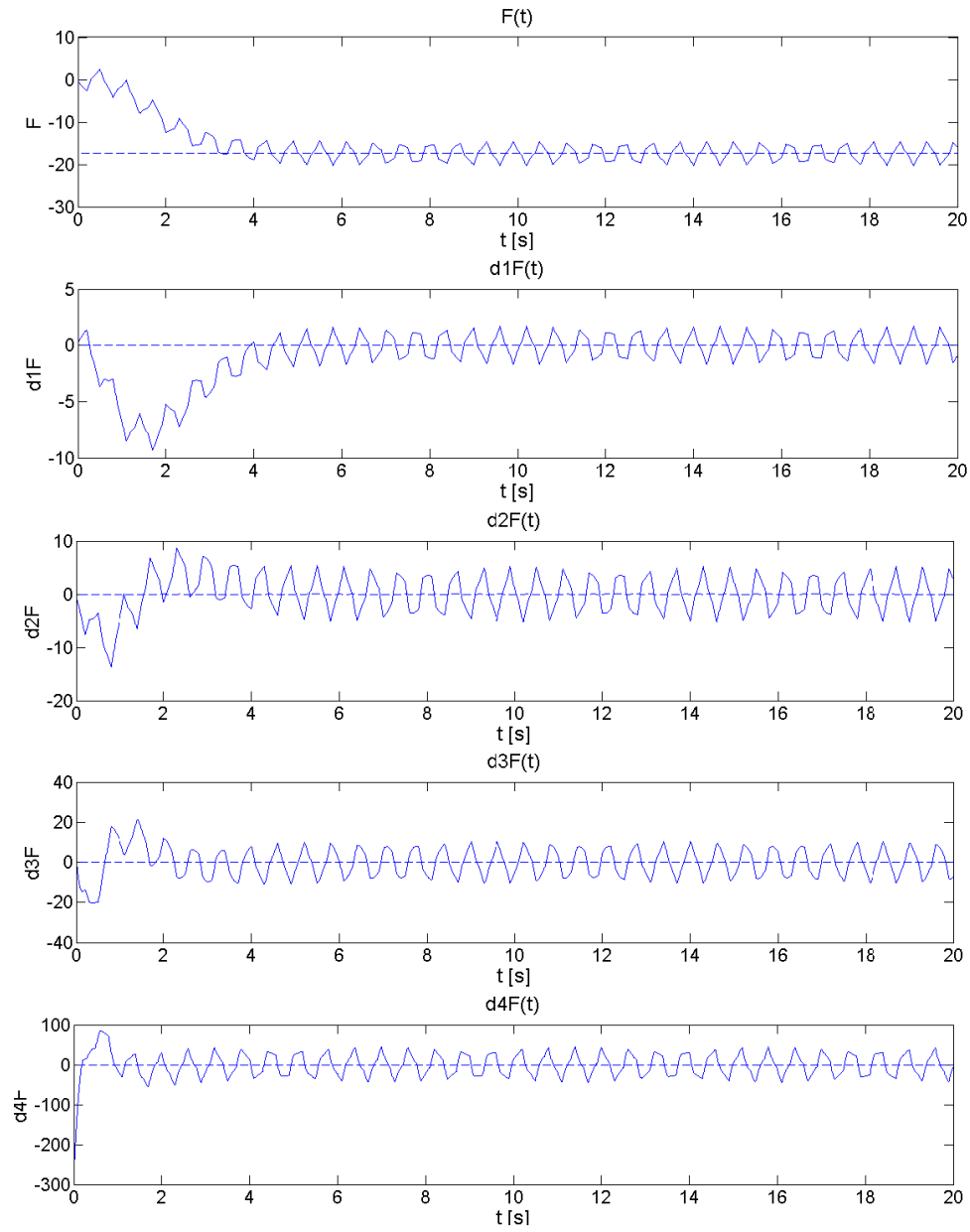


Figura 4.19: Saída planejável e suas derivadas temporais

# Capítulo 5

## Conclusões

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um controle de acompanhamento de trajetória para o modelo simplificado de um *Hovercraft* subatuado a partir da análise de sua planejabilidade. Apresentou-se uma revisão bibliográfica acerca do tema, bem como uma breve descrição da modelagem matemática do comportamento dinâmico do *Hovercraft*, além de descrever alguns métodos para determinar as saídas planejáveis de sistemas lineares e não-lineares. Em seguida, foi feita a apresentação das etapas de planejamento e acompanhamento das trajetórias para o modelo do *Hovercraft*, juntamente com as simulações numéricas para validar o controlador proposto.

A estratégia utilizada para determinar as trajetórias nominais da saída planejável e suas derivadas temporais se apresentou bastante eficiente para solucionar a inexistência de um sentido físico para a saída planejável, o que dificultava consideravelmente a etapa de planejamento das trajetórias. Além disso, após a parametrização do sistema, a facilidade com que se encontrou a expressão final do controlador representa um verdadeiro estímulo para que a estratégia de controle abordada nesse trabalho seja aplicada em outros projetos. No entanto, limita-se aos casos em que o sistema apresente sensores que permitem um conhecimento da sua posição e orientação a cada instante, o que pode ser inviável em aplicações mais complexas.

Os resultados obtidos através das simulações numéricas comprovam o bom desempenho do controlador no acompanhamento de uma trajetória circular quando o movimento é iniciado em distintas configurações iniciais, já que é possível observar que o *Hovercraft* converge para as trajetórias desejadas, atingindo assim o objetivo principal, conforme especificado no capítulo 1. Além disso, mostrou-se robusto com respeito as perturbações externas do tipo senoidal na direção em que o *Hovercraft* não é atuado, sendo esta a direção de perturbação mais crítica.

### 5.1 Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se determinar a saída planejável do modelo linear SISO do *Hovercraft* para que ele possa seguir outros tipos de trajetória. Para isso, basta não supor que a velocidade de guinada será sempre constante e calcular as derivadas temporais da saída planejável. Pretende-se também estender a lei de controle desenvolvida nesse manuscrito



ao modelo não-linear MIMO do *Hovercraft*. Por último, pretende-se adquirir uma plataforma robótica móvel com o objetivo de validar o controlador através testes em situações reais.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] OLFATI-SABER, R. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. Tese (Doutorado), 2001. AAI0803036.
- [2] NAKAMURA, Y.; MUKHERJEE, R. Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, v. 7, n. 4, p. 500–514, aug 1991.
- [3] DO, K.; PAN, J. Robust and adaptive path following for underactuated autonomous underwater vehicles. In: *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 3, p. 1994 – 1999 vol.3.
- [4] BIRGLEN, L.; GOSELIN, C. Kinetostatic analysis of underactuated fingers. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 2, p. 211 – 221, april 2004. ISSN 1042-296X.
- [5] PAN, J.; DO, K. D. *Control of Ships and Underwater Vehicles: Design for Underactuated and Nonlinear Marine Systems*. Crawley, Australia: Springer, 2009. (Advances in Industrial Control).
- [6] LEFEBER, E.; PETTERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Tracking control of an underactuated ship. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, v. 11, n. 1, p. 52 – 61, jan 2003. ISSN 1063-6536.
- [7] <http://www.defense.gov/photos/NewsPhoto.aspx?NewsPhotoID=739>.
- [8] SOUZA, E. C. *Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [9] FLIESS, M. et al. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C. R. Acad. Sciences*, v. 315, p. 619–624, 1992.
- [10] DAVIDSON, K. S. M.; SCHIFF, L. I. Turning and course keeping qualities. *Transactions of SNAME*, v. 54, 1946.
- [11] NOMOTO, K. T.; TAGUCHI, K. H.; HIRANO, S. On the steering qualities of ships. *International Shipbuilding Progress*, v. 4, p. 354–370, 1946.
- [12] FOSSEN, T. I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. Trondheim, Norway: John Wiley & Sons, 1994.

- [13] FOSSEN, T.; FJELLSTAD, O. erik. *Nonlinear Modelling of Marine Vehicles in 6 Degrees of Freedom*. 1995.
- [14] CLARKE, D. The foundations of steering and maneuvering. IEEE, Giron, Spain, p. 10–25, 2003.
- [15] LEFEBER, E.; PETTERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Tracking control of an underactuated ship. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, v. 11, n. 1, p. 52 – 61, jan 2003. ISSN 1063-6536.
- [16] LEONARD, N. Control synthesis and adaptation for an underactuated autonomous underwater vehicle. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, v. 20, n. 3, p. 211 –220, jul 1995. ISSN 0364-9059.
- [17] PETTERSEN, K.; EGELAND, O. Time-varying exponential stabilization of the position and attitude of an underactuated autonomous underwater vehicle. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 44, n. 1, p. 112 –115, jan. 1999. ISSN 0018-9286.
- [18] FANTONI, I. et al. Stabilization of a nonlinear underactuated hovercraft. In: *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*. Phoenix: IEEE, 1999. v. 3, p. 2533 –2538 vol.3.
- [19] BROCKETT, R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In: BROCKETT, R. S. M. R. W.; SUSSMANN, H. J. (Ed.). *Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser, 1983. p. 181–191.
- [20] REYHANOGLU, M. Control and stabilization of an underactuated surface vessel. In: *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE*. [S.l.]: IEEE, 1996. v. 3, p. 2371 –2376 vol.3.
- [21] CHENG, J.; YI, J.; ZHAO, D. Stabilization of an underactuated surface vessel via discontinuous control. In: *American Control Conference, 2007. ACC '07*. [S.l.]: IEEE, 2007. p. 206 –211. ISSN 0743-1619.
- [22] PETTERSEN, K.; EGELAND, O. Exponential stabilization of an underactuated surface vessel. In: *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE*. [S.l.]: IEEE, 1996. v. 1, p. 967 –972 vol.1.
- [23] LIU, Y.; GUO, C.; ZHOU, R. Robust feedback stabilization control of an underactuated surface vessel. In: *Computer Science and Information Engineering, 2009 WRI World Congress on*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 5, p. 46 –50.
- [24] PETTERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Semi-global practical stabilization and disturbance adaptation for an underactuated ship. In: *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 3, p. 2144 –2149 vol.3. ISSN 0191-2216.
- [25] GODHAVN, J.-M. Nonlinear tracking of underactuated surface vessels. In: *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE*. [S.l.]: IEEE, 1996. v. 1, p. 975 –980 vol.1.

- [26] JIANG, Z.-P.; NIJMEIJER, H. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 44, n. 2, p. 265 –279, feb 1999. ISSN 0018-9286.
- [27] PETERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Underactuated ship tracking control: theory and experiments. *International Journal of Control*, v. 74, n. 14, p. 1435–1446, 2001.
- [28] DO, K.; JIANG, Z.; PAN, J. Underactuated ship global tracking under relaxed conditions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 47, n. 9, p. 1529 – 1536, sep 2002. ISSN 0018-9286.
- [29] ROUCHON, P. et al. Flatness, motion planning and trailer systems. In: *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. [S.l.]: IEEE, 1993. p. 2700 –2705 vol.3.
- [30] FLIESS, M.; LÉVINE, J.; ROUCHON, P. Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, v. 61, p. 1327–1361, 1995.
- [31] MARTIN, P. *Contributions à l'étude des systèmes linéaires différentiellement plats*. Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [32] CHELOUAH., A. et al. Differential flatness and control of induction motors. *Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications*, p. 80–85, 1996.
- [33] ROTHFUSS, R.; RUDOLPH, J.; ZEITZ, M. Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model. *Automatica*, v. 32, n. 10, p. 1433 – 1439, 1996. ISSN 0005-1098.
- [34] AYADI, M. *Contributions à la commande des systèmes linéaires plats de dimension finie*. Tese (Doutorado) — Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.
- [35] SIRA-RAMFREZ, H. On the control of the underactuated ship: a trajectory planning approach. In: *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*. [S.l.]: IEEE, 1999. v. 3, p. 2192 –2197 vol.3.
- [36] SIRA-RAMÍREZ, H. Sur la commande des systèmes non différentiellement plats. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, July 2000.
- [37] SIRA-RAMIREZ, H.; IBANEZ, C. The control of the hovercraft system: a flatness based approach. In: *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 692 –697.
- [38] SNAME. Nomenclature for Treating the Motion of a Submerged Body Through a Fluid. *Technical and Research Bulletin*, n. 1-5, April 1950.
- [39] FALTINSEN, O. *Sea Loads on Ships and Offshore Structures*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993. (Cambridge Ocean Technology Series).
- [40] ROTELLA, F.; ZAMBETTAKIS, I. Commande des systèmes par platitude. Editions Techniques de l'Ingénieur, September 2007.
- [41] LEVINE, J. *Analysis and Control of Nonlinear Systems: A Flatness-Based Approach*. [S.l.]: Springer, 2010. (Mathematical Engineering).

- [42] SIRA-RAMÍREZ, H.; AGRAWAL, S. K. *Differentially Flat Systems*. [S.l.]: Marcel Dekker, 2004. (Control Engineering Series).
- [43] POLJAK, S.; MATHEMATICS, U. K. D. of A. *On Controllability Kronecker Indices of Structured Systems*. [S.l.]: Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, 1990. (KAM series, discrete mathematics and combinatorics, operations research, mathematical linguistics).
- [44] MALRAIT, F.; MARTIN, P.; ROUCHON, P. Dynamic feedback transformations of controllable linear time-varying systems. In: ISIDORI, A.; LAMNABHI-LAGARRIGUE, F.; RESPONDEK, W. (Ed.). *Nonlinear control in the year 2000 volume 2*. [S.l.]: Springer Berlin / Heidelberg, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 259). p. 55–62. ISBN 978-1-85233-364-5.
- [45] SILVERMAN, L. M.; MEADOWS, H. E. Controllability and observability in time-variable linear systems. *Siam Journal On Control*, v. 5, n. 1, p. 64–73, 1967. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?SJCODC/5/64/1>>.
- [46] ANDERSON, R.; IBRAGIMOV, N. *Lie-Bäcklund transformations in applications*. [S.l.]: SIAM, 1979. (SIAM studies in applied mathematics).
- [47] SORO, D.; LOZANO, R. Stabilization of an underactuated ship using a linear time-varying control. In: *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*. [S.l.]: IEEE, 2002. v. 2, p. 1693 – 1698 vol.2. ISSN 0191-2216.
- [48] PETTERSEN, K.; NIJMEIJER, H. Tracking control of an underactuated surface vessel. v. 4, p. 4561 –4566 vol.4, dec 1998.
- [49] SLOTINE, J.; LI, W. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1991. ISBN 9780130408907.

# ANEXOS

# I. DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DO CD

No disco CD entregue com o trabalho é disponibilizada uma cópia digital do relatório, bem como uma pasta com todos arquivos utilizados em sua elaboração. Os arquivos do trabalho são organizados conforme a lista abaixo:

- **Figuras** contém as fotos e gráficos obtidos para a confecção deste relatório.
- **LaTeX** contém apostilas, notas de cursos e tutoriais para quem deseja aprender como redigir documentos utilizando a plataforma LaTeX. Além disso, está disponibilizado modelos de Trabalho de Graduação 01 e 02 desenvolvidos pelo Prof. Geovany Araújo Borges, juntamente com um modelo em LaTeX da monografia do Engenheiro de Controle e Automação “George Andrew Brindeiro”, o qual foi de grande ajuda durante a confecção deste relatório.
- **Relatório** contém os arquivos-fonte em LaTeX do relatório, pronto para utilização no editor *TeXnicCenter 2.0Alpha 4* no sistema operacional Windows 7.
- **Revisão Bibliográfica** contém cópias digitais dos documentos referenciados neste trabalho, sempre que disponíveis, organizados em pastas conforme o assunto principal abordado (i.e. *Planejamento de Trajetória, Modelagem do Sistema, Sistemas Planejáveis e Sistemas Não-lineares*), bem como outros documentos não utilizados no relatório.
- **Simulações Numéricas** contém os arquivos desenvolvidos no software *MATLAB*<sup>®</sup> para a realização das simulações numéricas, as quais tiveram os resultados apresentados neste relatório. Uma cópia dos resultados também pode ser encontrado nessa pasta.
- **TG 02 - Apresentação** contém os arquivos-fonte em LaTeX da apresentação de Defesa de Trabalho de Graduação 02 realizada no dia 17 de julho de 2012.
- **TG 01** contém a apresentação de Trabalho de Graduação 01 quando cursava a disciplina Tópicos Especiais em Sistemas Mecânicos no semestre 2/2011. Além disso, há uma cópia do relatório descritivo do trabalho desenvolvido durante a disciplina.

## II. DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO NO AMBIENTE DE SIMULAÇÃO *SIMULINK*

Esse anexo tem como objetivo descrever os módulos implementados no ambiente *Simulink* que correspondem ao modelo linear SISO do *Hovercraft* e a etapa de construção da lei de controle. Inicia-se com uma visão global do que foi implementado e, em seguida, apresenta-se cada módulo individualmente.

Como apresentado no capítulo 4, basicamente foram implementados três blocos principais. Cada bloco foi destacado na Figura II.1 a fim de facilitar a visualização do leitor.

- Modelo Linear SISO do *Hovercraft*
- Transformação Geométrica
- Geração da Lei de Controle

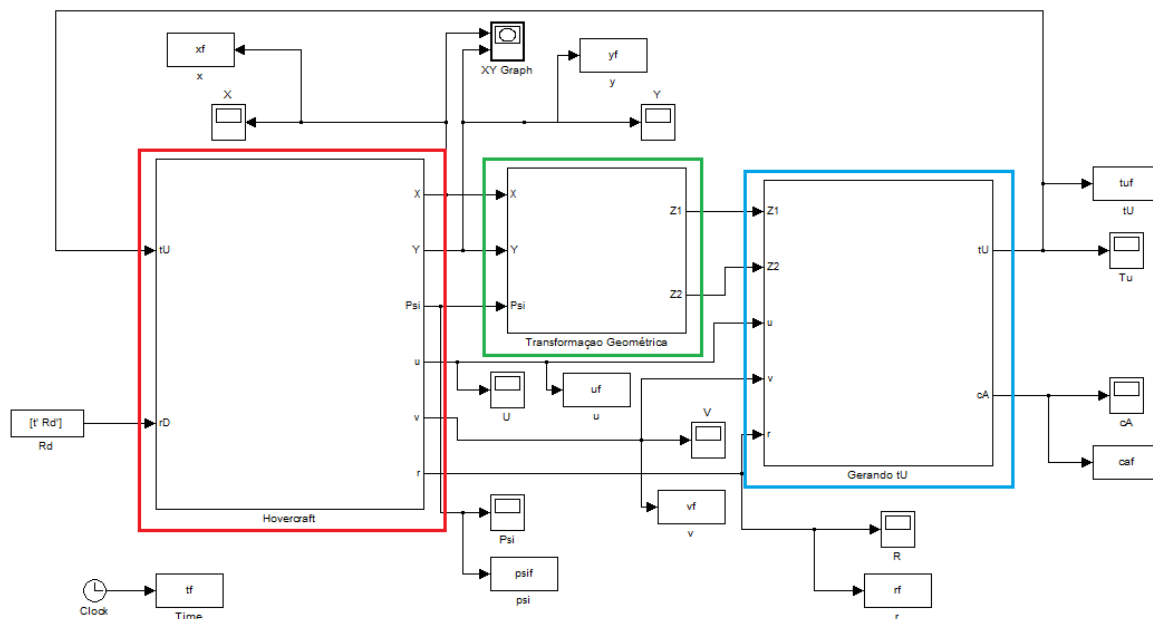


Figura II.1: Implementação em *Simulink*

Na Seção II.1, apresenta-se a implementação do Modelo Linear SISO do *Hovercraft*, conforme descrito no capítulo 2. Na Seção II.2, apresenta-se a implementação da transformação homogênea de sistema de coordenadas, conforme descrito no capítulo 3. Na Seção II.3, descreve-se a implementação da etapa de geração da lei de controle, conforme descrito no capítulo 3.



## II.1 Modelo do *Hovercraft*

A Figura II.2 apresenta a implementação do modelo linear SISO do *Hovercraft* no ambiente *Simulink*, a qual foi baseada de acordo com o sistema de equações 2.22, mas já supondo que a velocidade de guinada  $r$  já é a nominal desde o começo da simulação, por isso, uma das variáveis de entrada é  $rD$ .

Na área destacada em laranja, observa-se as variáveis de entrada  $tU$  e  $pE$ , as quais correspondem, respectivamente, ao sinal de controle e a perturbação externa na direção Deriva. Essas duas variáveis, juntamente com  $rD$ , permitem obter as variáveis de saída  $u$ ,  $v$  e  $r$  que correspondem, respectivamente, as velocidades lineares e angulares no Sistema  $B$  em um determinado instante.

Na área destacada em amarelo, a partir da velocidades lineares e angulares no Sistema  $B$ , obtém-se a posição ( $X$  e  $Y$ ) e a orientação ( $\psi$ ) do *Hovercraft* no Sistema  $E$ , conforme descrito pelas três primeiras equações do modelo linear SISO.

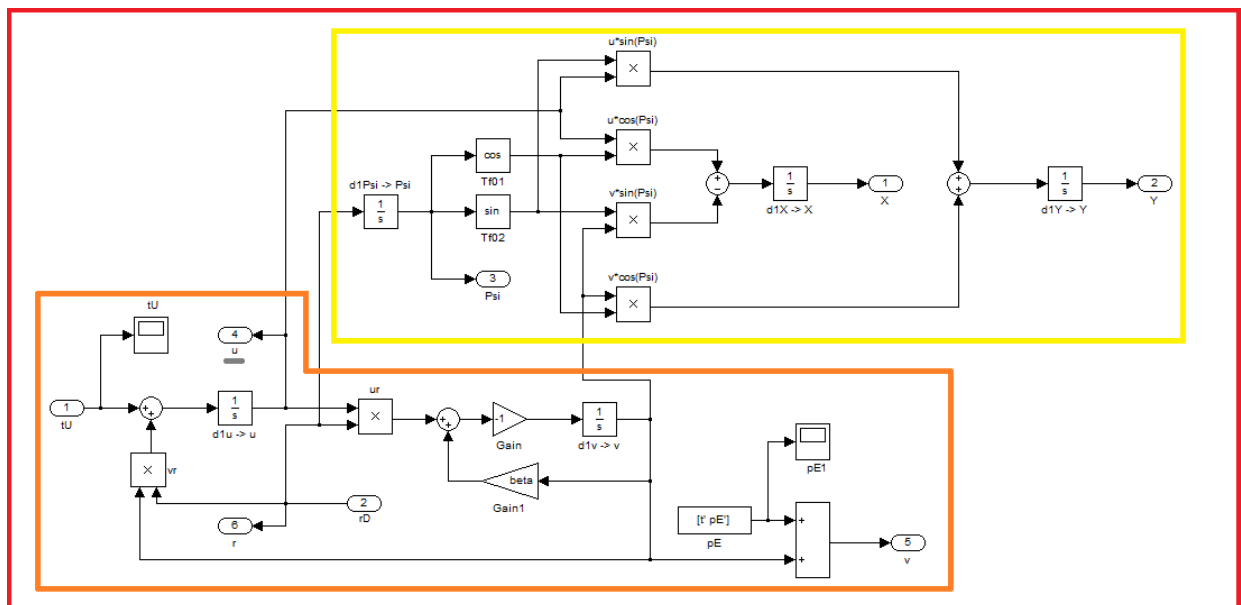


Figura II.2: Implementação do modelo linear SISO do *Hovercraft* no *Simulink*

## II.2 Transformação Homogênea

A Figura II.3 apresenta a implementação da Transformação Homogênea de Sistemas de Coordenadas no ambiente *Simulink*, a qual foi baseada de acordo com o sistema de equações 3.1. As variáveis de entrada correspondem a posição e a orientação do *Hovercraft* no Sistema  $E$ , enquanto que as variáveis de saída ( $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ ) correspondem a posição e a orientação em um outro sistemas de coordenadas, cuja principal característica é a ausência de funções trigonométricas.

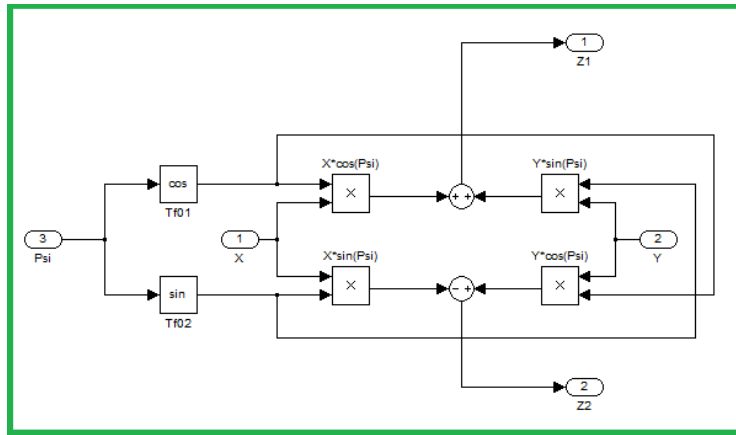


Figura II.3: Implementação da transformação homogênea de sistemas de coordenadas no *Simulink*

## II.3 Geração da Lei de Controle

A Figura II.4 apresenta a implementação do controlador desenvolvido nesse trabalho no ambiente *Simulink*, a qual foi baseada de acordo com a equação 3.20. Até chegar na expressão final do controlador, quatro etapas são necessárias, logo cada uma foi representada por um submódulo.

1. Construção da Saída Planejável e suas derivadas temporais
2. Geração da Saída Planejável e suas derivadas temporais nominais
3. Construção do termo de correção correspondente ao comando em malha fechada
4. Adição do termo de correção ao comando em malha aberta

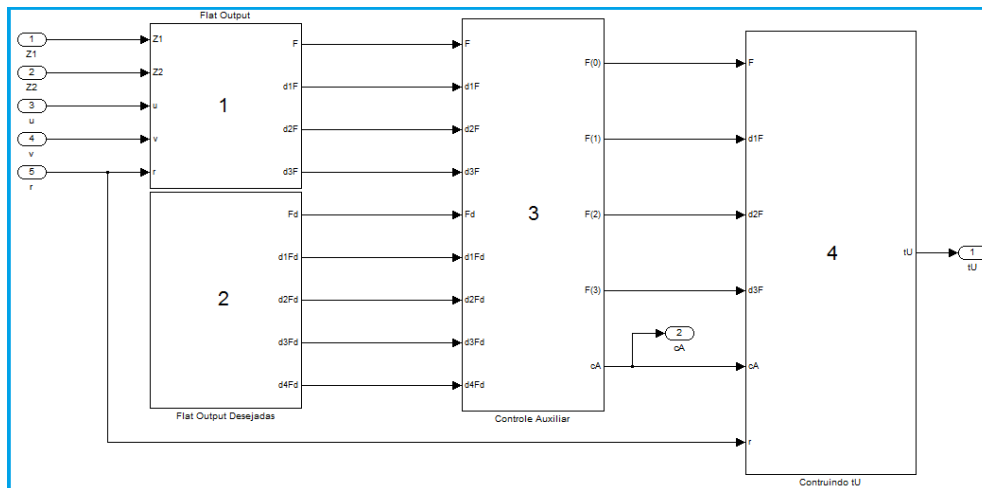


Figura II.4: Implementação do controlador desenvolvido no *Simulink*

A primeira etapa consiste na construção da saída planejável e suas derivadas temporais em um determinado instante  $t$  a partir das variáveis de entrada  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $u$ ,  $v$  e  $r$ , conforme descrito nas equações 3.8, 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15. A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura II.5.

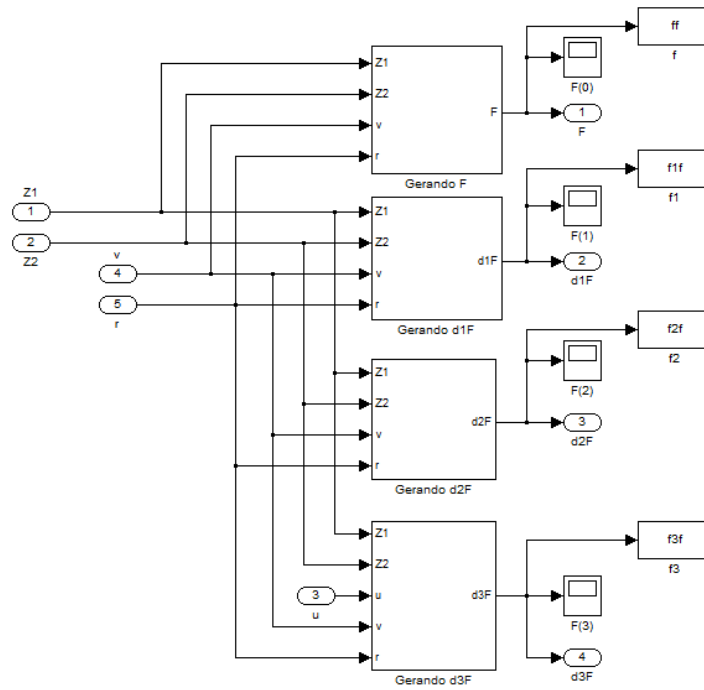


Figura II.5: Implementação da etapa de geração da saída planejável e suas derivadas temporais no *Simulink*

A segunda etapa consiste no planejamento das trajetória nominais para a saída planejável e suas derivadas temporais a partidas nominais para as variáveis do sistema. Esse procedimento é realizado separadamente no arquivo *flatness\_mf\_circular\_zeh.m*. A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura II.6.

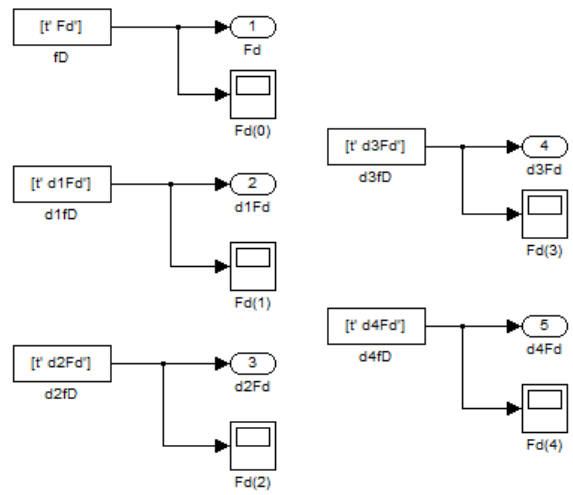


Figura II.6: Implementação da etapa de geração da saída planejável e suas derivadas temporais no *Simulink*

A terceira etapa consiste na construção do termo de correção correspondente ao comando em malha fechada, o qual foi baseado de acordo com a equação 3.19. A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura II.7.

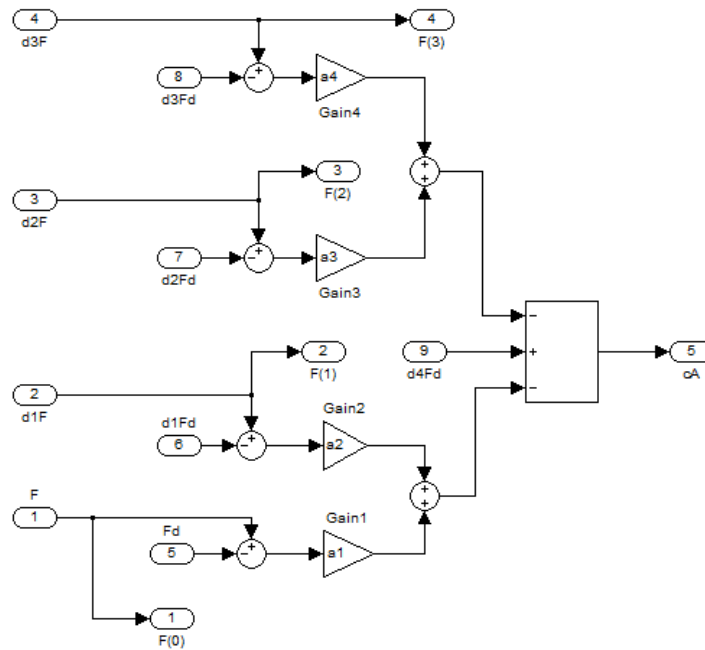


Figura II.7: Implementação da etapa de construção do comando em malha fechada no *Simulink*

A quarta etapa consiste na adição do termo de correção ( $cA$ ) ao comando em malha aberta, chegando assim ao sinal de controle  $tU$  correspondente a equação 3.20. A implementação do submódulo referente a essa etapa pode ser visualizado na Figura II.8.

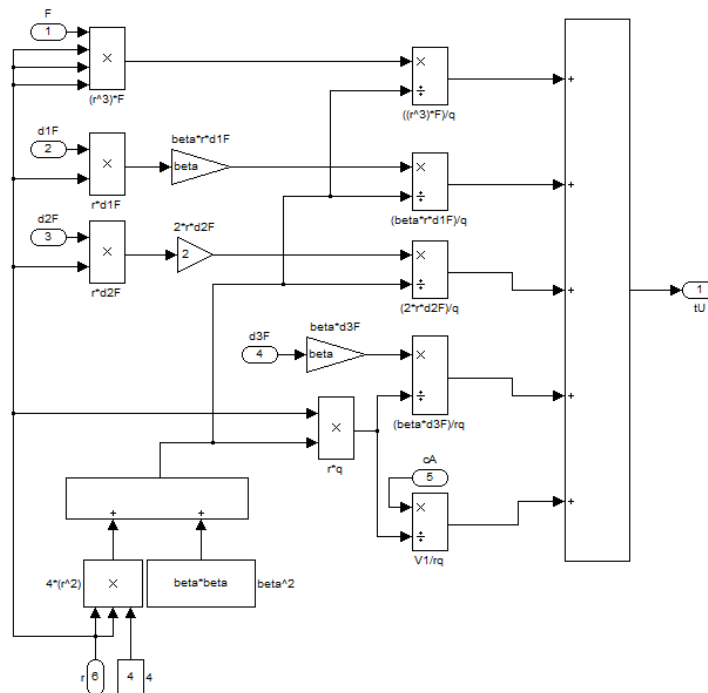


Figura II.8: Implementação da etapa de adição do termo de correção ao comando em malha aberta no *Simulink*

# III. EXPRESSÕES DA CINEMÁTICA E DINÂMICA PARA UM VEÍCULO MARÍTIMO

Este anexo tem como objetivo fornecer mais detalhes das expressões que descrevem o modelo geral de um veículo marítimo. Como ponto de partida, descreve-se o desenvolvimento das matrizes de transformação que relacionam os sistemas de coordenadas utilizados na modelagem. Em seguida, demonstra-se como obter a forma matricial que representa o comportamento dinâmico do sistema. Por fim, apresenta-se as matrizes que representam os esforços hidrodinâmicos.

Não é objetivo deste anexo realizar o desenvolvimento completo do modelo, mas fornecer um apoio ao leitor de forma que ele possa melhorar sua compreensão global das equações que representam o modelo. Para maiores detalhes, recomenda-se a leitura da tese de mestrado *Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados* de Eric Conrado de Souza [8], juntamente com o livro *Guidance and Control of Ocean Vehicles* de Fossen [12].

## III.1 Cinemática

É habitual descrever  $J_1(\boldsymbol{\eta}_2)$  através de três rotações elementares onde a ordem em que são realizadas não é necessariamente arbitrária. Essas rotações podem expressas matricialmente em relação aos ângulos de Euler, como podem ser visualizadas a seguir [12]:

$$C_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{III.1a})$$

$$C_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{III.1b})$$

$$C_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.1c})$$

A notação  $C_{i,\alpha}$  denota o ângulo de rotação  $\alpha$  em relação ao eixo  $i$ . Além disso, observa-se que todas as matrizes apresentam a propriedade de serem ortogonais, ou seja,  $C_{i,\alpha}^{-1} = C_{i,\alpha}^T$ .

A partir de III.1a, III.1b e III.5, têm-se que a sequencia de rotação dada pela matriz de transformação  $J_1(\boldsymbol{\eta}_2)$  é dada por:

$$J_1(\boldsymbol{\eta}_2) = C_{z,\psi}^T C_{y,\theta}^T C_{x,\phi}^T \quad (\text{III.2})$$

onde se pode expandir e finalmente obter a equação 2.2.

De acordo com Fossen [12], a matriz de transformação  $J_2(\boldsymbol{\eta}_2)$  é obtida inspecionando a expressão da orientação do Sistema  $B$  com respeito ao Sistema  $E$ , como pode ser vista na equação III.3.

$$\boldsymbol{\nu}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_{x,\phi} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_{x,\phi} C_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Além disso, a partir da equação 2.3, pode-se expressar  $\boldsymbol{\nu}_2$  como:

$$\boldsymbol{\nu}_2 = J_2^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2)\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \quad (\text{III.4})$$

Dessa forma, expandindo a equação III.3, facilmente pode se mostrar que:

$$J_2^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\phi) & \text{cos}(\theta)\text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \text{cos}(\theta)\text{cos}(\phi) \end{bmatrix} \Rightarrow J_2(\boldsymbol{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}(\phi)\tan(\theta) & \text{cos}(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi)/\text{cos}(\theta) & \text{cos}(\phi)/\text{cos}(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

## III.2 Dinâmica

As expressões que representam o comportamento dinâmico de um veículo marítimo, como visto nas equações 2.6 e 2.7, estão sob as seguintes hipóteses:

- A massa está distribuída uniformemente.
- A massa é constante e a posição do centro de massa é considerado invariante.
- A origem do Sistema  $B$  não coincide com o centro de gravidade do veículo, para o caso mais geral.

Expandindo as equações 2.6 e 2.7, chega-se em 6 equações utilizando os vetores definidos na subseção 2.3.2:

$$\begin{aligned}
m[\dot{u} - vr + wq - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(pr + \dot{q})] &= X \\
m[\dot{v} - wp + ur - y_G(r^2 + p^2) + x_G(qr - \dot{p}) + x_G(qp + \dot{r})] &= Y \\
m[\dot{w} - uq + vp - z_G(p^2 + q^2) + z_G(rp - \dot{q}) + y_G(rq + \dot{p})] &= Z \\
I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} + (r^2 - q^2)I_{yz} + (pr - \dot{q})I_{xy} \\
+ m[y_G(\dot{w} - uq + vp) - z_G(\dot{v} - wp + ur)] &= K \\
I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp - (\dot{p} + qr)I_{xy} + (p^2 - r^2)I_{zx} + (qp - \dot{r})I_{yz} \\
+ m[z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)] &= M \\
I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq - (\dot{q} + rp)I_{yz} + (q^2 - p^2)I_{xy} + (rq - \dot{p})I_{zx} \\
+ m[x_G(\dot{v} - wp + ur) - y_G(\dot{r} - vr + wq)] &= N
\end{aligned} \tag{III.6}$$

As três primeiras equações representam o movimento translacional, enquanto que as três últimas representam o movimento rotacional. Agrupando estas equações em uma forma matricial, chega-se em uma forma mais compactar, como visto na equação 2.8. Dessa forma, sabendo que  $m$  corresponde a massa do veículo, pode-se obter a expressão para a matriz de inércia  $M_{RB}$ :

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_g & -my_g \\ 0 & m & 0 & -mz_g & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & my_g & -mx_g & 0 \\ 0 & -mz_g & my_g & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_g & 0 & -mx_g & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_g & mx_g & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \tag{III.7}$$

Em relação a matriz de forças centrípetas e de coriolis  $C_{RB}$ , a parametrização escolhida nesse trabalho é de tal forma a obter uma representação anti-simétrica:

$$C_{RB} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \vdots & \Lambda_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\Lambda_1^T & \vdots & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{III.8}$$

onde as matrizes  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são dadas por:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} m(y_g q + z_g r) & -m(x_g q - w) & -m(x_g r + v) \\ -m(y_g p + w) & m(z_g r + x_g p) & -m(y_g r - u) \\ -m(z_g p - v) & -m(z_g q + u) & m(x_g p + y_g q) \end{bmatrix} \tag{III.9a}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -I_{yz}q - I_{xz}p + I_z r & I_{yz}r + I_{xy}p - I_y q \\ I_{yz}q + I_{xz}p - I_z r & 0 & I_{xz}r + I_{xy}p - I_x p \\ I_{yz}r + I_{xy}p - I_y q & -I_{xz}r + I_{xy}q - I_x p & 0 \end{bmatrix} \tag{III.9b}$$

### III.3 Esforços Hidrodinâmicos

Como descrito na equação 2.10, os esforços hidrodinâmicos podem ser expressados através de um conjunto de matrizes. Os esforços devido a massa adicional são expressos em função da matriz de inércia  $M_A$  e da matriz de forças centrípetas e de coriolis da massa adicional:

$$M_A = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\dot{u}} & K_{\dot{v}} & K_{\dot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\dot{u}} & M_{\dot{v}} & M_{\dot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 & -b_3 & b_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{p}}p + X_{\dot{q}}q + X_{\dot{r}}r \\ a_2 &= Y_{\dot{u}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{p}}p + Y_{\dot{q}}q + Y_{\dot{r}}r \\ a_3 &= Z_{\dot{u}}u + Z_{\dot{v}}v + Z_{\dot{w}}w + Z_{\dot{p}}p + Z_{\dot{q}}q + Z_{\dot{r}}r \\ b_1 &= K_{\dot{u}}u + K_{\dot{v}}v + K_{\dot{w}}w + K_{\dot{p}}p + K_{\dot{q}}q + K_{\dot{r}}r \\ b_2 &= M_{\dot{u}}u + M_{\dot{v}}v + M_{\dot{w}}w + M_{\dot{p}}p + M_{\dot{q}}q + M_{\dot{r}}r \\ b_3 &= N_{\dot{u}}u + N_{\dot{v}}v + N_{\dot{w}}w + N_{\dot{p}}p + N_{\dot{q}}q + N_{\dot{r}}r \end{aligned} \quad (\text{III.12a})$$

Nas equações III.10 e III.15, utilizou-se a notação definida por [38] para representar, por exemplo, a força hidrodinâmica  $Y_A$  ao longo do eixo Y devido a uma aceleração  $\dot{u}$  na direção X é dada por:

$$Y_A = -Y_{\dot{u}}\dot{u}, \quad Y_{\dot{u}} := \frac{\partial Y}{\partial \dot{u}} \quad (\text{III.13})$$

Como descrito na subsecção 2.3.2, os esforços devido ao arrasto hidrodinâmico são expressos



através de duas matrizes  $D$  e  $D_n(\boldsymbol{\nu})$ . A primeira é composta por elementos lineares:

$$D = \begin{bmatrix} X_u & X_v & X_w & X_p & X_q & X_r \\ Y_u & Y_v & Y_w & Y_p & Y_q & Y_r \\ Z_u & Z_v & Z_w & Z_p & Z_q & Z_r \\ K_u & K_v & K_w & K_p & K_q & K_r \\ M_u & M_v & M_w & M_p & M_q & M_r \\ N_u & N_v & N_w & N_p & N_q & N_r \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

A segunda é geralmente aproximada utilizando uma expansão de terceira ordem da série de Taylor ou através de funções modulares, o que resulta no aparecimento de termos não-lineares. Nesse trabalho, ignorou-se a influência desses termos no desenvolvimento do modelo.

Por último, os esforços devido as forças restauradoras são modelados através da matriz  $g(\boldsymbol{\eta})$ :

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} (W - B)\text{sen}(\theta) \\ -(W - B) \cos(\theta)\text{sen}(\phi) \\ -(W - B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -(y_g W - y_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) + (z_g W - z_b B) \cos(\theta)\text{sen}(\phi) \\ (z_g W - z_b B)\text{sen}(\theta) + (x_g W - x_b B) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -(x_g W - x_b B) \cos(\theta)\text{sen}(\phi) - (y_g W - y_b B)\text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

onde o empuxo hidrostático e o peso são dados respectivamente por:

$$W = mg \quad (\text{III.16})$$

$$B = \rho_a g \nabla \quad (\text{III.17})$$

Nas equações acima, o símbolo  $\nabla$  representa o volume de fluido deslocado pelo corpo,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $\rho_a$  é a densidade da água.

## IV. MODELO DO HOVERCRAFT COMO SISTEMA PLANEJÁVEL

Este anexo tem como objetivo demonstrar que o modelo não-linear MIMO do *Hovercraft* subatuado é planejável.

De acordo com Sira-Ramírez et al. [42], propõem-se duas saídas planejáveis para o modelo não-linear do *Hovercraft* subatuado descrito pela equação 2.22:  $x$  e  $y$ . Dessa forma, a parametrização de todas as variáveis do sistema em função das saídas planejáveis e suas derivadas temporais é dada por:

$$\psi = \arctan\left(\frac{\ddot{y} + \beta\dot{y}}{\ddot{x} + \beta\dot{x}}\right) \quad (\text{IV.1})$$

$$u = \frac{\dot{x}(\ddot{x} + \beta\dot{x}) + \dot{y}(\ddot{y} + \beta\dot{y})}{\sqrt{(\ddot{x} + \beta\dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta\dot{y})^2}} \quad (\text{IV.2})$$

$$v = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{(\ddot{x} + \beta\dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta\dot{y})^2}} \quad (\text{IV.3})$$

$$r = \frac{1}{(\ddot{x} + \beta\dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta\dot{y})^2} \left( y^{(3)}(\ddot{x} + \beta\dot{x}) - x^{(3)}(\ddot{y} + \beta\dot{y}) + \beta^2(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}) \right) \quad (\text{IV.4})$$

$$\tau_u = \frac{\ddot{x}(\ddot{x} + \beta\dot{x}) + \ddot{y}(\ddot{y} + \beta\dot{y})}{\sqrt{(\ddot{x} + \beta\dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta\dot{y})^2}} \quad (\text{IV.5})$$

$$\begin{aligned} \tau_r = & \frac{1}{(\ddot{x} + \beta\dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta\dot{y})^2} \left[ y^{(4)}(\ddot{x} + \beta\dot{x}) - x^{(4)}(\ddot{y} + \beta\dot{y}) + \beta(y^{(3)}\ddot{x} - x^{(3)}\ddot{y}) \right. \\ & \left. - \beta^2(x^{(3)}\dot{y} - y^{(3)}\dot{x}) \right] - \frac{2}{[(\ddot{x} + \beta\dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta\dot{y})^2]^2} \left\{ \left[ y^{(3)}(\ddot{x} + \beta\dot{x}) - x^{(3)}(\ddot{y} + \beta\dot{y}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta^2(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}) \right] \left[ (\ddot{x} + \beta\dot{x})(x^{(3)} + \beta\ddot{x}) + (\ddot{y} + \beta\dot{y})(y^{(3)} + \beta\ddot{y}) \right] \right\} \quad (\text{IV.6}) \end{aligned}$$

### Demonstração

A partir das duas primeiras equações em 2.22, observa-se facilmente que:

$$v = \dot{y} \cos(\psi) - \dot{x} \sin(\psi) \quad (\text{IV.7a})$$

$$u = \dot{x} \cos(\psi) + \dot{y} \sin(\psi) \quad (\text{IV.7b})$$

Agora, diferencia-se as duas primeiras equações em 2.22 com respeito ao tempo. Usando as equações IV.7a e IV.7b, encontram-se que:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{u} \cos(\psi) - u \dot{\psi} \sin(\psi) - \dot{v} \sin(\psi) - v \dot{\psi} \cos(\psi) \\ &= \tau_u \cos(\psi) + \beta v \sin(\psi)\end{aligned}\tag{IV.8a}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \dot{u} \sin(\psi) + u \dot{\psi} \cos(\psi) + \dot{v} \cos(\psi) - v \dot{\psi} \sin(\psi) \\ &= \tau_u \sin(\psi) - \beta v \cos(\psi)\end{aligned}\tag{IV.8b}$$

Multiplicando a equação IV.8a por  $\sin(\psi)$  e a equação IV.8b por  $\cos(\psi)$ , e subtraindo uma da outra, obtém-se que:

$$\ddot{x} \sin(\psi) - \ddot{y} \cos(\psi) = \beta v\tag{IV.9}$$

Similarmente, multiplicando a equação IV.8a por  $\cos(\psi)$  e a equação IV.8b por  $\sin(\psi)$ , e somando uma com a outra, obtém-se que:

$$\tau_u = \ddot{x} \cos(\psi) + \ddot{y} \sin(\psi)\tag{IV.10}$$

Em seguida, substituindo a equação IV.7a em IV.9, encontra-se, após algumas manipulações algébricas, que:

$$\tan(\psi) = \frac{\ddot{y} + \beta \dot{y}}{\ddot{x} + \beta \dot{x}} \rightarrow \psi = \arctan\left(\frac{\ddot{y} + \beta \dot{y}}{\ddot{x} + \beta \dot{x}}\right)\tag{IV.11}$$

Usando a equação IV.11 nas equações IV.7a e IV.7b, obtém-se que:

$$v = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{(\ddot{x} + \beta \dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta \dot{y})^2}}\tag{IV.12}$$

$$u = \frac{\dot{x}(\ddot{x} + \beta \dot{x}) + \dot{y}(\ddot{y} + \beta \dot{y})}{\sqrt{(\ddot{x} + \beta \dot{x})^2 + (\ddot{y} + \beta \dot{y})^2}}\tag{IV.13}$$

Por último, substituindo-se o valor de  $\psi$  na equação IV.10, chega-se a parametrização de  $\tau_u$ . Além disso, pode-se usar o fato que  $r = \dot{\psi}$  e  $\tau_r = \ddot{\psi}$  para chegar as equações IV.4 e IV.6. Assim, mostra-se que todas as variáveis do sistema são parametrizadas como funções diferenciais das saídas planejáveis  $x$  e  $y$ .