

# **TRABALHO DE GRADUAÇÃO**

## **PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO CONSIDERANDO A INCERTEZA DA DEMANDA**

**Gabriel Tartuce Gondim**

**Brasília, 01 de Julho de 2016**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
ENE – Departamento de Engenharia Elétrica

## TRABALHO DE GRADUAÇÃO

# PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO CONSIDERANDO A INCERTEZA DA DEMANDA

**Gabriel Tartuce Gondim**

RELATÓRIO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE  
TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO REQUISITO PARCIAL PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE ENGENHEIRO ELETRICISTA

**Aprovada por**

---

Prof. D. Sc. Pablo Eduardo Cuervo Franco, UnB/ENE  
*Orientador*

---

Prof. D. Sc. Francisco Damasceno Freitas, UnB/ ENE  
*Examinador interno*

---

Prof. D. Sc. Marco Antonio Freitas do Egito Coelho, UnB/ ENE  
*Examinador interno*

Brasília, 01 de Julho de 2016

## FICHA CATALOGRÁFICA

GONDIM, GABRIEL

Planejamento de expansão de redes de transmissão considerando a incerteza da demanda [Distrito Federal] 2016

X, 61, 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Engenharia Elétrica).

Monografia de Graduação – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia Departamento de Engenharia Elétrica

1. – Planejamento de Expansão de redes de transmissão
2. – Incerteza da demanda

I. ENE/FT/UNB

II. Título (Série)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GONDIM, G. T. (2016). Planejamento de expansão de redes de transmissão considerando a incerteza da demanda, Relatório de Graduação em Engenharia Elétrica, publicação **XXXXXX**, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, DF, 61.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gabriel Tartuce Gondim

TÍTULO: Planejamento de expansão de redes de transmissão considerando a incerteza da demanda

GRAU: Engenheiro Eletricista

ANO: 2016

É permitida à Universidade de Brasília a reprodução desta monografia de graduação e o empréstimo ou venda de tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia pode ser reproduzida sem autorização escrita de autor.

---

Gabriel Tartuce Gondim

UnB – Universidade de Brasília  
Campus Universitário Darcy Ribeiro  
FT – Faculdade de Tecnologia  
ENE – Departamento de Engenharia Elétrica  
Brasília – DF – 70919-970  
Brasil

## **Dedicatória**

*Dedico este trabalho ao meu pai João e à  
minha mãe Marise, meus grandes  
conselheiros.*

*Gabriel Tartuce Gondim*

## **Agradecimentos**

Meus sinceros agradecimentos:

Aos meus pais, João e Marise, por me darem força e condições necessárias para alcançar meus sonhos. Também agradeço aos demais familiares por todo o apoio.

À minha namorada Gabriela pelo apoio, compreensão, amor e companheirismo em todos os momentos;

Ao Professor Pablo Cuervo pela confiança, paciência, ideias e todas as reuniões;

Aos meus amigos os quais compartilho momentos importantes e estão sempre ao meu lado;

Ao Departamento de Engenharia Elétrica e seus funcionários sempre dispostos a ajudar.

Gabriel Tartuce Gondim

---

## RESUMO

O planejamento de expansão de redes de transmissão é muito importante para garantir o fornecimento contínuo de energia elétrica para os consumidores. Nesse sentido, ferramentas que auxiliem a tomada de decisão podem ser muito úteis. Esse trabalho apresenta modelos de planejamento de expansão de redes de transmissão utilizando otimização. São apresentados os modelos determinístico e estocástico do problema e, utilizando a ferramenta computacional *GAMS*, são apresentados os resultados dos testes realizados tomando por base o sistema Garver. Além disso, foi analisado o efeito da estratégia temporal de execução do orçamento disponível no planejamento. Adicionalmente, foi proposto um modelo inicial utilizando otimização robusta que tem a possibilidade de continuidade em trabalhos futuros.

Palavras chave: Transmissão, expansão, planejamento, otimização, determinístico, estocástico, multiestágio, programação linear.

---

## ABSTRACT

Transmission network expansion planning is very important to guarantee continuous electrical power for consumers. To that end, decision support tools can be useful. This work presents deterministic and stochastic models for that problem. Using software GAMS, test results are presented for Garver system simulations. Besides, the effects of budget execution temporal strategy were also considered. Additionally, an initial model using robust optimization was proposed.

Keywords: Transmission, expansion, planning, optimization, deterministic, stochastic, multistage, linear programming.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO .....	1
1.2 MOTIVAÇÃO .....	2
1.3 OBJETIVOS .....	3
1.4 JUSTIFICATIVA .....	3
1.5 CONTRIBUIÇÕES .....	4
1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	4
<b>2. REVISÃO CONCEITUAL</b> .....	<b>5</b>
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	6
2.1.1 MODELO SIMPLIFICADO OU CC .....	7
2.1.2 MODELO LINEAR DISJUNTIVO .....	8
2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO .....	9
2.2.1 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS .....	10
2.3 FERRAMENTA COMPUTACIONAL GAMS .....	12
<b>3. MODELOS DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO</b> .....	<b>13</b>
3.1 MODELO DETERMINÍSTICO DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO MULTIESTÁGIO .....	13
3.1.1 SISTEMA GARVER .....	16
3.1.1.1 TESTES E RESULTADOS .....	17
3.2 MODELO ESTOCÁSTICO DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO MULTIESTÁGIO .....	20
3.2.1 TESTES E RESULTADOS DO SISTEMA GARVER .....	23
3.2.1.1 RESULTADOS DO CASO 1 .....	24
3.2.1.2 RESULTADOS DO CASO 2 .....	25
<b>4. ABORDAGEM PELA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA</b> .....	<b>29</b>
4.1 IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES DO MODELO GERAL .....	29
4.2 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E O TRATAMENTO DA INCERTEZA .....	32
4.3 IMPLEMENTAÇÃO DO EQUIVALENTE LINEAR .....	34
4.4 FORMULAÇÃO LINEAR DA INCERTEZA NA DEMANDA .....	35
4.5 MODELO DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E A DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS .....	36
4.6 TESTES E RESULTADOS .....	37
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>40</b>
5.1 CONCLUSÃO .....	40
5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	41
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>42</b>
<b>APÊNDICES</b> .....	<b>45</b>
APÊNDICE A. DADOS DO SISTEMA GARVER .....	45
APÊNDICE A.1 DADOS SISTÊMICOS PARA O CASO DETERMINÍSTICO .....	45
APÊNDICE A.2 DADOS SISTÊMICOS PARA O CASO ESTOCÁSTICO .....	46
APÊNDICE B. IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES .....	46



# LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Algoritmo da decomposição de Benders .....	11
Figura 3.1 - Ilustração do sistema Garver. ....	16
Figura 3.2 - Solução do sistema Garver determinístico sem restrição de orçamento. ....	18
Figura 3.3 - Ilustração de cenários de demanda. ....	21
Figura 3.4 - Estrutura da solução do modelo de planejamento considerando cenários. ....	23
Figura 3.5 - Solução do sistema Garver estocástico sem restrição de orçamento.....	26
Figura 4.1 - Sistema composto por três barras. ....	30

# LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1- Circuitos adicionados no caso determinístico sem restrição de orçamento. ....	17
Tabela 3.2 - Orçamentos disponíveis para as duas restrições no caso determinístico. ....	19
Tabela 3.3 - Circuitos adicionados no caso determinístico com restrições de orçamento. ....	19
Tabela 3.4 - Probabilidade de ocorrência do cenário em cada caso. ....	24
Tabela 3.5 - Circuitos adicionados por ramo no caso estocástico com único cenário. ....	24
Tabela 3.6 - Circuitos adicionados por ramo no caso estocástico sem restrição de orçamento. .	25
Tabela 3.7 - Orçamentos disponíveis para as duas restrições no caso estocástico. ....	26
Tabela 3.8 - Circuitos adicionados no caso estocástico com restrições de orçamento. ....	27
Tabela 4.1 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema de três barras. ....	37
Tabela 4.2 - Parâmetros referentes às barras do sistema. ....	38
Tabela 4.3 - Frações utilizadas para discretização. ....	38
Tabela 4.4 - Resultados referentes ao subproblema. ....	39
Tabela A.1 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema. ....	45
Tabela A.2 - Parâmetros referentes às barras do sistema no caso determinístico. ....	45
Tabela A.3 - Parâmetros referentes às barras do sistema no caso estocástico. ....	46

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Conjuntos

$T$	Conjunto de todos os estágios;
$\Omega_B$	Conjunto de todas as barras;
$\Omega_R$	Conjunto de todos os ramos;
$\Omega_y$	Conjunto de todos os circuitos de cada ramo;
$\Phi$	Conjunto de todos os cenários.

## Parâmetros

$S_0$	Matriz de incidência no caso base;
$S$	Matriz de incidência das linhas candidatas;
$n_{0km}^t$	Número de circuitos por ramo no caso base;
$\overline{n}_{km}^t$	Número máximo de circuitos que podem ser adicionados por ramo em cada tempo;
$b_{0km}$	Susceptância da linha do ramo km no caso base;
$b_{km,y}$	Susceptância do circuito y do ramo km;
$Ci_{km}^t$	Custo de investimento para construção da linha do ramo km no tempo t;
$\overline{f}_{0km}$	Fluxo de potência máximo na linha do ramo km no caso base;
$\overline{f}_{km}$	Fluxo de potência máximo na linha candidata do ramo km;
$\overline{G}_k$	Máxima geração na barra k;
$\overline{\theta}_k$	Máximo ângulo de tensão na barra k;
$\overline{R}_k$	Máximo corte de carga na barra k;
$c^T$	Vetor de parâmetros referente às variáveis binárias;
$b^T$	Vetor de parâmetros referente às variáveis contínuas;
$\Delta^t$	Máximo desvio permitido no estágio de tempo t;
$\delta_{j,k}$	Fração j de discretização da demanda da barra k;
$d_k^{max}$	Demanda máxima de discretização na barra k;

$\bar{d}_k$	Valor de demanda nominal na barra k;
$\hat{d}_k$	Valor de desvio de demanda na barra k;

### Variáveis Contínuas

$f_{0,km}^t$	Fluxo de potência no caso base do ramo km no tempo t;
$f_{km,y}^t$	Fluxo de potência do circuito y do ramo km no tempo t das linhas candidatas;
$\theta_k^t$	Ângulo de tensão da barra k no tempo t;
$f_{0,km,s}^t$	Fluxo de potência no caso base do ramo km no tempo t do cenário s;
$f_{km,y,s}^t$	Fluxo de potência do circuito y do ramo km no tempo t do cenário s das linhas candidatas;
$\theta_{k,s}^t$	Ângulo de tensão da barra k no tempo t do cenário s;
$n_{km}^t$	Número de circuitos adicionados em cada ramo no tempo t;
$G_k^t$	Geração na barra k no tempo t;
$R_k^t$	Corte de carga na barra k no tempo t;
$G_{k,s}^t$	Geração na barra k no tempo t do cenário s;
$R_{k,s}^t$	Corte de carga na barra k no tempo t do cenário s;
$z$	Vetor composto pelas variáveis contínuas;
$\alpha$	Variável de corte do modelo de otimização robusta;
$\varphi^T$	Variável dual referente às restrições compostas apenas por variáveis contínuas;
$\lambda^T$	Variável dual referente às restrições compostas apenas por variáveis contínuas e binárias;
$\eta^T$	Variável dual referente à restrição que apresenta o termo incerto

### Variáveis binárias

$w_{km,y}^t$	Variável binária de instalação do circuito y da linha de transmissão no ramo km no tempo t;
$u_{km,y}^t$	Variável binária de utilização do circuito y da linha do ramo km no tempo t;
$x$	Vetor composto pelas variáveis binárias;
$b_{j,k}$	Variável binária de discretização da demanda na barra k.



# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A energia elétrica é um recurso fundamental para a sociedade e o seu consumo está diretamente ligado ao desenvolvimento do país. A grande quantidade de equipamentos elétricos de diversas funcionalidades presentes no cotidiano e a demanda das fábricas, por exemplo, mostram a necessidade de ter um fornecimento constante e expansível de energia elétrica. Essa continuidade no atendimento é feita pelos Sistemas Elétricos de Potência (SEP), compostos pelos sistemas de geração, transmissão e distribuição, que atuando de forma coordenada, são responsáveis por suprir a demanda por energia elétrica dos consumidores.

Para atender o aumento da demanda por energia elétrica que ocorre naturalmente com o desenvolvimento social e tecnológico, é necessário planejar a expansão do SEP de forma que os consumidores continuem com suas necessidades energéticas atendidas. Cabe às instituições que compõem o setor elétrico, como o Ministério de Minas e Energia, definir as diretrizes de expansão da geração e da transmissão e às próprias distribuidoras a expansão da distribuição.

A expansão do sistema de transmissão tem sua solução definida pelo Ministério de Minas e Energia a partir da compatibilização conjunta do Programa de Expansão da Transmissão (PET) elaborado pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE), que apresenta visão do ambiente de planejamento com horizonte de até 5 anos, e do Plano de Ampliação e Reforços da Rede Básica (PAR), elaborado pelo ONS, que aborda a visão operativa, com horizonte de 3 anos (Gomes, 2012).

De acordo com Frontin (2010):

Um projeto de linha de transmissão busca atender aos requisitos de planejamento de sistema, ou seja, transmitir uma determinada potência em regime normal de operação e em emergência a um determinado nível de tensão, ao menor custo total, qual seja o custo de investimento acrescido do custo de perdas, com baixo impacto ambiental e social, altos índices de confiabilidade e disponibilidade, atendendo a requisitos técnicos mínimos tanto do ponto de vista elétrico como mecânico.

O sistema de distribuição tem sua expansão planejada pelas próprias empresas distribuidoras, sendo regidas pelo normativo da ANEEL, presente no Módulo 2 dos Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Interligado Nacional – PRODIST. É também de responsabilidade das distribuidoras o planejamento da expansão dos sistemas de alta tensão não pertencentes à Rede Básica, conhecidos como subtransmissão.

Definida na Resolução Normativa ANEEL nº 67 de 2004, a Rede Básica é composta por instalações de propriedade de empresas transmissoras com tensão igual ou superior a 230 kV.

Para o planejamento da expansão, a minimização dos custos é um dos fatores prioritários. Além disso, fatores como a demanda são estimados baseados em estudos, porém, caso não sejam considerados, diferentes cenários podem ocorrer e surpreender no futuro. Esse tipo de situação aumenta ainda mais a complexidade do problema. Para isso, ferramentas que auxiliam na tomada de decisão da expansão são muito úteis no planejamento.

Nesse sentido, modelagens matemáticas de solução computacional podem auxiliar no planejamento, visando minimizar o custo da expansão e, simultaneamente, garantir a confiabilidade do sistema.

## **1.2 MOTIVAÇÃO**

Há um grande interesse no estudo de modelos e técnicas para solucionar problemas de expansão de sistemas elétricos de potência. Esse tipo de solução visa à eficiência no planejamento baseado no fluxo de potência e parâmetros de interesse.

No modelo do setor elétrico brasileiro, existem três objetivos principais, conforme apresentado pelo ONS: garantir a segurança do suprimento de energia elétrica, promover a modicidade tarifária e promover a inserção social no Setor Elétrico Brasileiro, em particular pelos programas de universalização de atendimento.

Dessa forma, é necessário que o plano de expansão seja capaz de garantir os princípios do setor elétrico e, simultaneamente, optar pelos melhores investimentos em termos de custo, ou seja minimizar os gastos.

A partir de modelos matemáticos, é possível mensurar os custos de investimentos a serem feitos e a forma como serão feitos no sistema de transmissão. Além disso, podem ser considerados outros sistemas paralelamente, como por exemplo, a geração e o seu custo operativo.

No estudo do planejamento de expansão das redes de transmissão, as abordagens podem priorizar alguns aspectos como a incerteza da demanda no futuro, a divisão do investimento em estágios de tempo, questões relacionadas à contingência, perdas na transmissão. Assim, é possível concluir que há um grande leque de opções de estudo neste tema.

Assim, confirmada a necessidade contínua de expansão das redes de transmissão e verificada a gama de possibilidade de enfoques no estudo, surge a motivação para desenvolver uma modelagem matemática na área de planejamento de expansão de redes de transmissão, considerando a incerteza da demanda no futuro e a divisão do investimento em estágios de tempo.

### **1.3 OBJETIVOS**

Os objetivos deste trabalho são:

1. Propor um modelo determinístico de planejamento de expansão da transmissão multiestágio que considera os custos de operação da geração na função objetivo e, conseqüentemente, os minimiza;
2. Propor, a partir do modelo determinístico apresentado, a modelagem estocástica do problema, considerando cenários diferentes de demanda;
3. Realizar testes e obter resultados dos dois modelos determinístico e estocástico para o sistema Garver composto por seis barras, realizando variações no orçamento disponível para investimento;
4. Propor um modelo inicial para o problema de expansão utilizando otimização robusta, realizando testes iniciais das etapas formuladas e sugerindo continuidade em trabalhos futuros.

### **1.4 JUSTIFICATIVA**

Há grande variedade de estudos na área de planejamento de expansão da transmissão, envolvendo diversas modelagens matemáticas e diferentes métodos de solução, alguns com elevado grau de complexidade inclusive.

As pesquisas sobre o tema, entretanto, nem sempre levam em consideração fatores como a incerteza na demanda e a modelagem estocástica que envolve esse tipo de abordagem. Entretanto, essa abordagem é de grande relevância para o desenvolvimento de estudos na área de expansão da transmissão.

A utilização de um modelo estocástico para solucionar os cenários de demandas causa, entretanto, um efeito de “explosão” na quantidade de variáveis do programa e, dessa forma, gera grande esforço computacional para obtenção da solução do problema. Esse aumento na quantidade de variáveis é diretamente proporcional ao tamanho do sistema e à quantidade de cenários de demanda considerados.

Além das oportunidades já mencionadas para solucionar a incerteza da demanda pela programação estocástica, há também espaço para a pesquisa de novos modelos e métodos de solução que resolvam o problema focando em menor esforço computacional. A utilização da otimização robusta em modelos de expansão e métodos de solução, como a decomposição de Benders (1962), por exemplo, são uma alternativa para o problema de expansão.



## **1.5 CONTRIBUIÇÕES**

Este trabalho contribui para o estudo sobre o planejamento de expansão de redes de transmissão multiestágio. São apresentados modelos que auxiliam na tomada de decisão em que o objetivo principal é a minimização tanto do custo de investimento quanto do operativo.

São apresentados modelos determinísticos e estocásticos que consideram na função objetivo a parte de geração do sistema, trazendo a possibilidade de estudos que associem o planejamento da expansão com diferentes fontes de geração, por exemplo. Além disso, foram realizados testes considerando diferentes disponibilidades de orçamento, simulando possíveis situações em um planejamento.

Também foi desenvolvida uma proposta inicial para o problema de expansão utilizando otimização robusta e solução em dois níveis por decomposição de Benders. Apesar de inicial, a formulação sugerida tem como objetivo abordar o problema de forma alternativa, diminuindo o esforço computacional. Há a possibilidade de continuação deste tema, implementando o modelo por completo e utilizando o algoritmo de Benders.

## **1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica do planejamento de expansão de redes de transmissão, trazendo modelos que são utilizados e diferentes tipos de abordagens que podem ser consideradas.

No capítulo 3 apresentam-se os modelos de planejamento multiestágio determinístico e estocástico e seus respectivos resultados de plano de expansão considerando o sistema Garver de seis barras e variando a disponibilidade de orçamento. As soluções foram obtidas utilizando a ferramenta computacional GAMS.

No capítulo 4 é apresentada uma abordagem alternativa para o problema de expansão utilizando otimização robusta. Foi realizado o desenvolvimento inicial, mapeando-se as matrizes de parâmetros, o desenvolvimento do modelo, o tratamento da incerteza no modelo e a formulação da estratégia de solução em dois níveis utilizando decomposição de Benders. Os resultados foram obtidos de forma separada para cada etapa a partir de testes iniciais.

No capítulo 5 são feitas as conclusões do trabalho desenvolvido e sugeridos temas para continuidade em trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO CONCEITUAL

O planejamento de expansão de redes de transmissão é um problema clássico do setor elétrico e amplamente estudado. O seu principal objetivo é definir um plano de expansão ótimo em horizonte de tempo pré-definido, indicando quais equipamentos devem ser instalados para garantir o fornecimento contínuo e energia elétrica para os consumidores. Para isso, a solução ótima deve indicar o local, a quantidade e em qual período devem ser instalados novos equipamentos, satisfazendo as condições pré-estabelecidas.

O principal critério para a decisão do plano ótimo de expansão é a minimização do custo de investimento. Todavia, outros critérios podem ser exigidos simultaneamente, como a confiabilidade do sistema, o custo de operação ou limitações de orçamento. Em geral, os dados definidos para o problema são: a topologia inicial do sistema (ano base), os circuitos dos corredores possíveis de instalação (circuitos candidatos), o horizonte de investimento, a geração, a demanda no horizonte definido e suas incertezas, a possibilidade de geração de fontes renováveis, as limitações de investimento, as restrições técnicas (limite de fluxo de potência, de geração, diferença angular).

Quanto ao período, o plano de expansão pode ser realizado em apenas um estágio, modelos denominados estáticos, ou há a possibilidade de realizar um planejamento dinâmico, dividindo os investimentos em vários estágios (multiestágios), o qual é frequentemente utilizado no horizonte a longo prazo e favorece a utilização dos recursos financeiros. Com isso, em uma situação em que o orçamento é limitado ao longo do tempo, é possível utilizar os valores disponíveis da melhor forma para atender os requisitos do problema. Entretanto, considerar as possibilidades de estágios de investimento resulta não só no aumento no número de variáveis contínuas e binárias, mas também na quantidade de restrições do modelo.

No planejamento multiestágio de expansão da rede de transmissão, surgem incertezas em relação ao futuro no horizonte a longo prazo e algumas delas podem ser levadas em consideração para que a solução obtida seja mais abrangente em relação às variáveis possíveis e mais próxima da realidade. Portanto, é importante que surjam estudos de planejamento que levem em consideração incertezas de investimento, na demanda, na geração, na instalação dos equipamentos.

As programações determinísticas consideram os parâmetros de entrada para o modelo como valores conhecidos em que não há a possibilidade de surgirem outros cenários com valores diferentes. Entretanto, na realidade, não é possível afirmar com certeza o valor da demanda daqui a três anos, por exemplo, e, portanto, pode haver a necessidade de obter a solução considerando diferentes cenários.

As incertezas na demanda e geração podem ser representadas pela programação estocástica dividindo-as em cenários com probabilidades de ocorrência distintas. Dessa forma, com um estudo prévio de projeções futuras desses parâmetros, é possível obter projeções futuras que devem ser consideradas no modelo matemático e, conseqüentemente, alteram a solução a ser obtida.

## 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Rider (2006):

A resolução de todo problema de engenharia compreende a implementação de dois processos consecutivos: a modelagem matemática e a técnica de solução escolhida para resolver esse modelo matemático. A modelagem matemática, além de representar adequadamente o problema real, deve permitir sua resolução por meio de técnicas de solução disponíveis. Normalmente, à medida que se implementam melhorias no modelo matemático do problema real, a técnica de solução se torna mais complexa. Assim, deve existir um compromisso entre a modelagem matemática adotada e a técnica de solução escolhida para que se possam utilizar recursos computacionais aceitáveis, isto é, dentro dos limites do computador.

Os sistemas de transmissão são de grande porte e devem ser robustos. Por isso, é grande a complexidade e o esforço computacional necessário para solucionar os problemas deste tema. Há diversos estudos abrangendo diferentes modelos matemáticos e metodologias de solução que detalham diferentes perspectivas para este campo de estudo.

Ao longo do tempo, houve uma evolução no desenvolvimento dos modelos matemáticos de acordo com o avanço de novas descobertas de técnicas de otimização. Um modelo fundamental no estudo de expansão de redes de transmissão foi proposto por Garver (1970), um problema de programação linear inteiro misto (*Mixed Integer Linear Programming – MILP*), que leva em consideração apenas o princípio de conservação de energia e a capacidade de operação das linhas de transmissão e geradores.

O modelo de Corrente Alternada (CA) é a abordagem que descreve o problema real, utilizando o fluxo de potência em corrente alternada. Os estudos utilizando esse modelo vêm ganhando espaço, principalmente com o avanço tecnológico, e pela sua precisão em relação à realidade, entretanto, ainda há limitações em relação às técnicas de solução conhecidas para o problema. No caso de sistemas em que há barras isoladas que necessitam de interligação, por exemplo, há dificuldades de obter a solução do problema devido a sua complexidade. É um

problema de programação não linear com técnicas de modelagem propostas por Rider *et al* (2007); Rahmani *et al.* (2010).

O modelo simplificado ou modelo CC é um dos mais utilizados nos estudos de planejamento expansão de redes de transmissão, pois traz a modelagem do problema de expansão de rede de transmissão com aproximações aceitáveis e, por ser composto por simplificações do modelo CA, pode ser resolvido com maior facilidade. Além disso, há diversas técnicas de otimização utilizando essa modelagem (Latorre *et al.*, 2003; Lee *et al.*, 2006). Esse modelo é um problema de programação não linear inteiro misto (*Mixed Integer Nonlinear Programming – MINLP*).

O modelo linear disjuntivo é uma alternativa ao modelo CC em que o problema é adaptado para um caso linear equivalente por meio de variáveis binárias. Assim, apesar do aumento no número de variáveis devido ao acréscimo das variáveis binárias, há vantagens relacionadas às técnicas de solução do problema. Além disso, há estudos que indicam a mesma solução ótima para os modelos CC e linear disjuntivo (Bahense *et al.*, 2001).

### 2.1.1 MODELO SIMPLIFICADO OU CC

O modelo simplificado ou modelo CC, conforme já mencionado, é um dos mais utilizados no planejamento de expansão de sistemas de transmissão. Ele surge da generalização do modelo de fluxo de carga e é um problema de programação não linear inteiro misto. Há muitos estudos envolvendo esse modelo, principalmente na área de técnicas de solução. Sua estrutura, apresentada em Silva (2013) está exposta a seguir.

$$\min_n \sum_{km \in \Omega_R} C_{i_{km}} n_{km} \quad (1a)$$

s.a:

$$\sum_{km \in \Omega_R} f_{km} - \sum_{mj \in \Omega_R} f_{mj} + G_k = D_k \quad \forall km \in \Omega_R, \forall k \in \Omega_B \quad (1b)$$

$$f_{km} = (n_{km} + n_{0_{km}}) \frac{(\theta_k - \theta_m)}{x_{km}} \quad \forall km \in \Omega_R, \forall k \in \Omega_B \quad (1c)$$

$$|f_{km}| \leq (n_{km} + n_{0_{km}}) \overline{f_{km}} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (1d)$$

$$0 \leq G_k \leq \overline{G}_k \quad \forall k \in \Omega_B \quad (1e)$$

$$0 \leq n_{km} \leq \overline{n}_{km} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (1f)$$

$$\begin{aligned} n_{km} & \text{ variável binária inteira} \\ f_{km}, G_k, \theta_k & \text{ variáveis contínuas} \end{aligned} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (1g)$$

Como todo problema de expansão de sistemas de transmissão, a função objetivo (1a) do modelo traz a minimização do custo de investimento do planejamento. A restrição (1b) representa a equação de conservação de energia. A restrição (1c) representa a equação de

fluxo de potência simplificada e é o termo que apresenta a não linearidade deste modelo. As inequações (1d), (1e) e (1f) são restrições sobre o valor máximo de fluxo de potência, a geração e o número de circuitos que podem ser adicionados, respectivamente. Por fim, a variável  $n_{km}$  apresentada em (1g) deve ser inteira e as variáveis  $f_{km}$ ,  $G_k$  e  $\theta_k$  são contínuas.

### 2.1.2 MODELO LINEAR DISJUNTIVO

O modelo linear disjuntivo é um dos mais populares dentre as programações lineares. Como já mencionado, a partir do modelo linear, utilizam-se equivalentes lineares por meio de variáveis binárias na restrição (1c) para tornar o problema, de fato, linear. Dessa forma, o modelo tem a seguinte formulação (Silva, 2013):

$$\min_w \sum_{km \in \Omega_R} C_{i_{km}} \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y} \quad (2a)$$

s.a:

$$\sum_{km \in \Omega_R} \left( \sum_{y \in \Omega_y} f_{km,y} + f_{0_{km}} \right) - \sum_{mj \in \Omega_R} \left( \sum_{y \in \Omega_y} f_{mj,y} + f_{0_{km}} \right) + G_k = D_k \quad \forall k \in \Omega_B \quad (2b)$$

$$f_{0_{km}} = n_{0_{km}} \frac{(\theta_k - \theta_m)}{x_{km}} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (2c)$$

$$-n_{0_{km}} \bar{f}_{0_{km}} \leq f_{0_{km}} \leq n_{0_{km}} \bar{f}_{0_{km}} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (2d)$$

$$-M(1 - w_{km,y}) \leq x_{km} f_{km,y} - (\theta_k - \theta_m) \leq M(1 - w_{km,y}) \quad \begin{matrix} \forall k \in \Omega_B, \\ \forall km \in \Omega_R \end{matrix} \quad (2e)$$

$$-w_{km,y} \bar{f}_{km} \leq f_{km,y} \leq w_{km,y} \bar{f}_{km} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (2f)$$

$$0 \leq G_k \leq \bar{G}_k \quad \forall k \in \Omega_B \quad (2g)$$

$$\sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y} \leq \bar{n}_{km} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (2h)$$

$$w_{km,y} \leq w_{km,y-1} \quad \forall km \in \Omega_R \quad (2i)$$

$$\begin{matrix} w_{km,y} \text{ variável binária} \\ f_{0_{km}}, f_{km}, G_k, \theta_k \text{ variáveis contínuas} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \forall k \in \Omega_B, \\ \forall km \in \Omega_R \end{matrix} \quad (2j)$$

Em relação ao modelo linear apresentado anteriormente, a formulação disjuntiva traz algumas mudanças em relação à estrutura. Há uma variável binária de adição  $w_{km,y}$  para cada circuito  $y$ , substituindo a variável inteira  $n_{km}$  do modelo apresentado anteriormente. Dessa forma, a restrição referente à conservação de energia (2b) considera agora o balanço de fluxo de potência do caso base e de cada circuito candidato que foi adicionado.

No modelo anterior, na restrição (1c) em que ocorre a não linearidade, eram considerados todos os fluxos do sistema. Enquanto no modelo linear disjuntivo, tem-se a separação da restrição referente ao fluxo no caso base (2c) e ao fluxo dos circuitos candidatos (2e). Nesta

ultima restrição (2e), está presente a formulação linear equivalente utilizando a variável binária  $w_{km,y}$ , em que M é um valor grande suficiente para satisfazer a condição. O funcionamento desta restrição e o valor adequado de M serão apresentados posteriormente neste trabalho.

As restrições (2d) e (2f) tem a função de limitar o fluxo máximo nas linhas de transmissão. Em relação ao modelo linear, nota-se que a formulação utilizando o módulo da variável foi substituída por duas restrições simultâneas que não alteram o significado da restrição, mas tornam o problema linear. As restrições dos modelos deste trabalho foram utilizadas desta forma e, por isso, o modelo disjuntivo traz essa formulação.

A restrição (2h) limita o número máximo de circuitos que podem ser adicionados por ramo e faz a mesma função da restrição (1f) no modelo linear. Por fim, a restrição (2i) está presente para estabelecer ordem na adição dos circuitos de cada ramo, em que o segundo circuito só poderá ser adicionado se o primeiro já tiver a indicação de adição.

Nota-se que na formulação apresentada (2) não há a presença de estágios de tempo para investimento, ou seja, o plano de expansão só contempla um período para adição de circuitos no horizonte de planejamento. Neste trabalho, foi utilizado o modelo linear disjuntivo para desenvolver abordagens de planejamento de expansão de redes de transmissão, entretanto, foi considerada a divisão do horizonte de tempo em estágios. Para isso, é necessário diferenciar as duas possibilidades de plano de expansão.

## 2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Após a etapa de modelagem, para resolver o problema de planejamento de expansão de redes de transmissão é necessária a escolha da técnica de solução adequada. Essas duas etapas estão associadas e para que o resultado seja satisfatório devem ser definidas conjuntamente.

As técnicas de solução podem ser separadas em três grandes grupos: métodos de otimização clássica, métodos heurísticos ou aproximados e métodos meta-heurísticos. No primeiro grupo são considerados algoritmos exatos e conseguem obter a solução ótima para sistemas de pequeno e médio porte, entretanto, quando a dimensão do problema começa a crescer, o esforço computacional necessário para a solução do problema pode se tornar um problema. Dentre os mais conhecidos estão o algoritmo de *Branch and Bound* (Oliveira *et al.* 2004; Rider, 2006) e a decomposição de Benders (Binato, 2000).

Os métodos heurísticos são algoritmos de aproximação que fornecem solução de boa qualidade com menor esforço computacional, entretanto, dificilmente trazem a solução ótima

do problema (Garcés Negrete, 2010). Por ser um dos primeiros no planejamento de expansão da transmissão, o algoritmo de solução heurístico proposto por Garver (1970) é um dos mais conhecidos na área. É um campo de pesquisa interessante, devido à facilidade, simplicidade de entendimento e robustez deste tipo de algoritmo, além disso, a solução pode ser utilizada como base para encontrar soluções melhores utilizando algoritmos que exigem maior esforço computacional (Silva, 2013).

Os métodos meta-heurísticos são uma adaptação dos algoritmos heurísticos com maior eficiência e são considerados a melhor opção em relação à qualidade da solução para sistemas complexos. As principais vantagens estão relacionadas à facilidade de implementação e ao bom desempenho para todo tipo de sistema elétrico avaliado. Entretanto, para obter uma solução de boa qualidade é necessário muito tempo de processamento (Rider, 2006). Pertencem a esse tipo de algoritmo técnicas de otimização como: algoritmos genéticos e evolutivos em geral, *annealing*, *tabu search*, *Greedy Randomized adaptive Search Procedure* – GRASP, entre outros. Este último foi utilizado por Rahmani *et al.* (2013) como estratégia para reduzir o número de variáveis e o espaço combinatório do modelo linear disjuntivo de planejamento de expansão da transmissão multiestágio.

Portanto, nota-se há um leque de opções de estudo que pode ser explorado tanto para a modelagem matemática quanto para as técnicas de solução, em que se opta dentre as opções de acordo com a abordagem do problema e a ênfase do estudo.

### 2.2.1 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

Dentre as técnicas de solução clássicas apresentadas, será dada ênfase na decomposição de Benders (1962), em que, basicamente, se divide o problema em dois níveis: o problema mestre e o subproblema. Dessa forma, a partir de um valor inicial factível o programa realiza iterações entre os dois estágios, atualizando os limites de solução (limite superior – *Upper Bound*, UB e limite inferior – *Lower Bound*, LB) e adicionando cortes.

A formulação do algoritmo da decomposição de Benders será mostrada a partir do modelo genérico de programação inteira mista (*Mixed Integer Programming* – MIP):

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + b^T y & (3a) \\ \text{s.a:} \quad & Ax + By \geq b & (3b) \\ & y \in \Omega_y & (3c) \\ & x \geq 0 & (3d) \end{aligned}$$

Do modelo apresentado (3), será obtida a sua formulação dual e, a partir disso, a formulação em dois níveis. A formulação final da decomposição de Benders para o problema mestre é a seguinte (Kalvelagen, 2005):

$$\min_y z \quad (4a)$$

$$\text{s.a: } z \geq b^T y + (b - By)^T u_l, \quad l = 1, \dots, L \quad (4b)$$

$$(b - By)^T u_l \leq 0, \quad l = 1, \dots, L \quad (4c)$$

$$y \in \Omega_y \quad (4d)$$

Em que, a partir de um valor fixado  $u_l$ , o problema mestre impõe o corte ao limitante superior pela minimização de  $z$ . Adicionalmente, são obtidos os valores da variável  $y$  que será utilizada como entrada no subproblema.

A formulação do subproblema é:

$$\max_u b^T y_l + (b - By_l)^T u \quad (5a)$$

$$\text{s.a: } A^T u \leq c \quad (5b)$$

$$u \geq 0 \quad (5d)$$

O subproblema, por sua vez, obtém valores de  $u$  pela maximização da função objetivo (5a). Com isso, o valor do limitante inferior é atualizado.

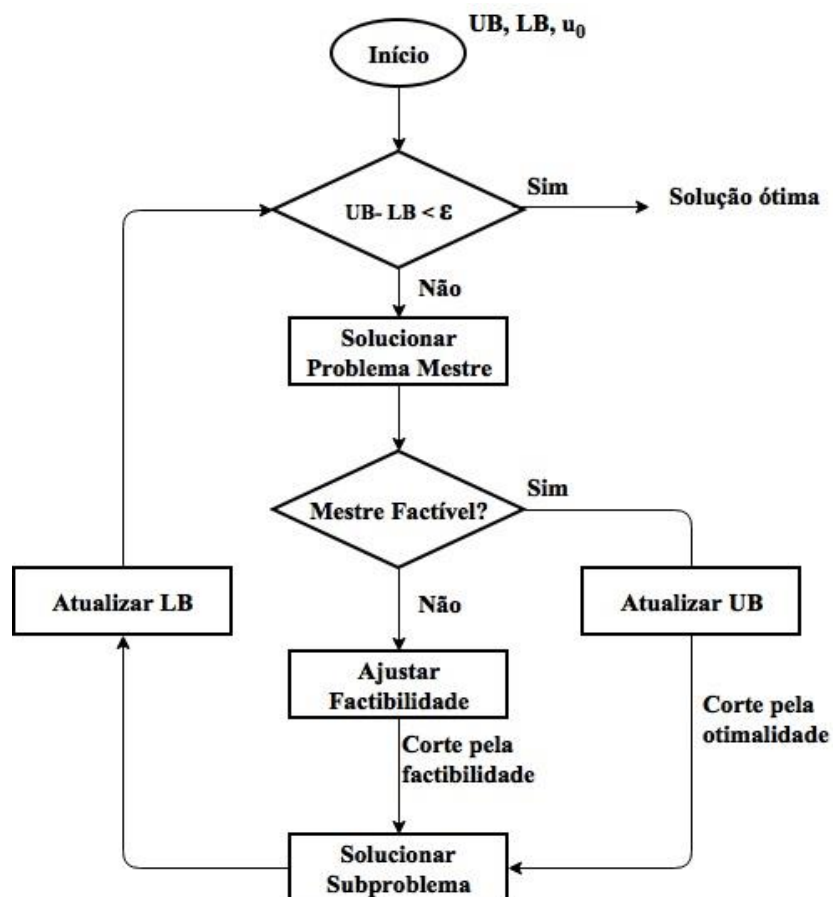


Figura 2.1 - Algoritmo da decomposição de Benders (Zhao, 2015; Adaptado).



A Figura traz o fluxograma do algoritmo da decomposição de Benders. O problema inicializa com valores de entrada da variável  $u$  e dos limitantes superior e inferior. A partir disso, o problema mestre é resolvido e é feita a verificação de factibilidade: se for factível, o valor de limitante superior é atualizado, ou seja, realiza-se o corte pela otimalidade; caso contrário, ajusta-se a factibilidade do problema e o corte é realizado. O próximo passo é solucionar o subproblema e, após isso, o limitante inferior é atualizado. Por fim, a solução ótima é obtida quando a diferença entre os limitantes superior e inferior é menor que um valor  $\varepsilon$  aceitável.

### 2.3 FERRAMENTA COMPUTACIONAL GAMS

Neste trabalho foram desenvolvidos modelos que utilizam a programação linear inteira mista (MILP) e, para realizar testes a partir de sistemas de transmissão, foi utilizada a ferramenta computacional *General Algebraic Modelling System - GAMS/CPLEX* (© 2008, GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA).

Essa ferramenta tem a capacidade de modelar problemas de otimização lineares (*Linear Programming – LP*), não lineares (*Non Linear Programming – NLP*) e inteiro misto (*Mixed Integer Programming – MIP*); tendo a capacidade de solucionar problemas complexos e versões disponíveis para computadores com configurações modestas.

Como entrada, definem-se os conjuntos, parâmetros, variáveis e equações em forma de listas ou tabelas. Com isso, basta definir a minimização ou maximização da função objetivo e o método de solução que será utilizado. Dessa forma, o usuário deve apenas se preocupar com a modelagem do problema.

Para problemas em que há grande quantidade de parâmetros, o *GAMS* tem a opção de importar dados de planilhas em Excel com facilidade. Também é possível exportar diretamente para o Excel as variáveis de interesse da solução do problema.

Essa ferramenta, portanto, atende plenamente os objetivos do trabalho e foi utilizada em todos os testes que serão apresentados nas próximas sessões.

### 3. MODELOS DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO

O planejamento multiestágio de expansão de redes de transmissão é uma estratégia de investimento a longo prazo, em que o modelo matemático deve levar em consideração o conjunto de estágios no tempo em que poderão ser realizados investimentos de construção de novas linhas de transmissão. Dessa forma, a solução do problema indica quais linhas devem ser construídas e qual o melhor momento para realizar cada investimento. Assim, o recurso financeiro disponível é utilizado de forma eficiente. Caso o investimento seja feito tardiamente, possivelmente haverá problemas operativos, resultando em corte de carga; por outro lado, o investimento antecipado não resulta na melhor forma de utilizar os recursos financeiros.

Este capítulo apresenta dois modelos de planejamento de expansão: determinístico e estocástico. A principal diferença entre eles está relacionada à demanda. No primeiro, a demanda é considerada conhecida e seus valores são apresentados como parâmetros de entrada. O segundo modelo, considera cenários de demanda, ou seja, não há um valor certo, apenas cenários possíveis com valores diferentes e probabilidades de ocorrência distintas.

#### 3.1 MODELO DETERMINÍSTICO DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO MULTIESTÁGIO

O planejamento determinístico de expansão de redes de transmissão considera o problema com apenas um cenário de demanda, ou seja, o valor da carga é conhecido no horizonte de tempo do estudo. No caso do planejamento multiestágio, o valor da demanda é um parâmetro de entrada que é determinado para cada estágio de tempo. Assim, a decisão de investimento é baseada nos valores de demanda conhecidos para cada estágio de tempo.

O modelo disjuntivo de planejamento multiestágio é um modelo que surge de adaptações feitas no modelo CC, que usa programação não linear, inteira e mista, e foi adaptado para a programação linear, binária e mista. A estratégia proposta por Vinasco *et al.* (2011) traz um plano de solução em que na função objetivo a variável binária de instalação tem seu valor subtraído do período anterior, para que não se repita o custo de instalação já considerado. Além disso, os custos operativos não foram considerados na função objetivo do modelo e, conseqüentemente, não foram minimizados no programa.

A partir do modelo de Vinasco *et al.* (2011), foram feitas adaptações para adequar a modelagem à abordagem e aos objetivos do trabalho. Dessa forma, é proposto o modelo determinístico de planejamento de expansão multiestágio apresentado em (6).

$$\min_{w,G,R} \sum_{t \in T} \left[ \lambda i^t \sum_{km \in \Omega_R} Ci_{km}^t \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t + \lambda v^t \sum_{k \in \Omega_B} (Cg_k G_k^t + Cls_k R_k^t) \right] \quad (6a)$$

s.a:

$$\sum_{t \in T} \sum_{km \in \Omega} Ci_{km}^t \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t \leq C_{total} \quad \forall km \in \Omega_R, \forall t \in T, \quad (6b)$$

$$\forall y \in \Omega_y$$

$$\sum_{km \in \Omega_R} S_0 f_{0km,y}^t + \sum_{k \in \Omega_B} S \sum_{y=1}^{\bar{n}_{km}^t} f_{km,y}^t = G_k^t + R_k^t - D_k^t \quad \forall km \in \Omega_R, \forall k \in \Omega_B, \quad (6c)$$

$$\forall t \in T, \forall y \in \Omega_y$$

$$f_{0km,y}^t = -b_{0km} n_{0km,y} (\theta_k^t - \theta_m^t) \quad \forall km \in \Omega_R, \forall t \in T \quad (6d)$$

$$-M (1 - u_{km,y}^t) \leq \frac{f_{km,y}^t}{b_{km,y}} + (\theta_k^t - \theta_m^t) \leq M (1 - u_{km,y}^t) \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (6e)$$

$$-n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \leq f_{0km,y}^t \leq n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \quad \forall km \in \Omega_R, \forall t \in T \quad (6f)$$

$$-u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \leq f_{km,y}^t \leq u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (6g)$$

$$-\bar{\theta} \leq \theta_k^t \leq \bar{\theta} \quad \forall k \in \Omega_B, \forall t \in T \quad (6h)$$

$$0 \leq G_k^t \leq \bar{G} \quad \forall k \in \Omega_B, \forall t \in T \quad (6i)$$

$$0 \leq R_k^t \leq \bar{R} \quad \forall k \in \Omega_B, \forall t \in T \quad (6j)$$

$$u_{km,y}^t = w_{km,y}^t + w_{km,y}^{t-1} + w_{km,y}^{t-2} + \dots + w_{km,y}^{t-m} \quad \forall km \in \Omega_R, m \in (T-1), \quad (6k)$$

$$\forall t \in T, \forall y \in \Omega_y$$

$$u_{km,y}^t \leq u_{km,y}^{t+1} \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (6l)$$

$$\sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t \leq \bar{n}_{km}^t \quad \forall km \in \Omega_R, t \in T, \forall y \in \Omega_y \quad (6m)$$

$$\theta_k^t = 0 \quad \forall k \in \Omega_B | k = ref, t \in T \quad (6n)$$

$$u_{km,y}^t, w_{km,y}^t \text{ variáveis binárias} \quad \forall km \in \Omega_R, \forall k \in \Omega_B, \quad (6o)$$

$$G_k^t, R_k^t, \theta_k^t, f_{0km,y}^t, f_{km,y}^t \text{ variáveis contínuas} \quad \forall t \in T, \forall y \in \Omega_y$$

Em que:

T é o conjunto de todos os estágios de tempo;

$\Omega_B$  é o conjunto de todas as barras do sistema;

$\Omega_R$  é o conjunto de todos os ramos do sistema;

$\Omega_y$  é o conjunto de todos os circuitos de cada ramo.

No modelo proposto, a função objetivo (6a) pode ser separada em duas partes. A primeira refere-se ao custo de investimento, parte que está diretamente ligada à construção de novas linhas, em que  $Ci_{km}^t$  é o custo de investimento para construir a linha do ramo km no estágio de tem t, e  $w_{km,y}^t$  é a variável binária de instalação das linhas candidatas. Ou seja, se  $w_{km,y}^t = 1$ , a solução do plano indica que o circuito y do ramo km deve ser construído no estágio de tempo t; caso contrário,  $w_{km,y}^t = 0$ . A segunda parte da função objetivo refere-se ao custo de operação do sistema, relacionados ao custo de geração ( $Cg_k$ ) e uma possível penalização por corte de carga ( $Cl_s_k$ ). Todos estes componentes da equação são minimizados na solução, pois são diretamente ligados aos gastos. Os dois termos são multiplicados por índices de correção

de custos ( $\lambda i^t$  e  $\lambda v^t$ ), trazendo os valores dos custos no futuro para valor presente, pois o planejamento multiestágio considera o horizonte de investimento a longo prazo. Esse fator de correção do valor futuro, segundo Escobar *et al.* (2008) é calculado com base na taxa de juros.

Em seguida, no bloco de equações que compõem as restrições do modelo, apresenta-se a restrição (6b) que traz a limitação do orçamento total, ou seja, do montante disponível para realizar os investimentos durante o plano. Todavia, essa restrição pode ser modificada para limitar o orçamento em cada estágio de tempo ou, até mesmo, pode ser desconsiderada. Dessa forma, esta é a restrição que varia de acordo a disponibilidade do recurso financeiro.

A restrição (6c) representa a primeira lei de conservação de energia, balanceando os fluxos de potência, geração e demanda em cada barra do sistema, em que  $S_0$  e  $S$  são as matrizes de incidência ramo-nó do caso base e dos circuitos candidatos respectivamente. As restrições (6d) e (6e) referem-se às equações de fluxo de potência no caso base ( $f_{0_{km}}^t$ ) e linhas candidatas ( $f_{km,y}^t$ ), relacionando o fluxo com a susceptância ( $b_{km,y}$ ) e a diferença angular das barras.

Especificamente na restrição (6e), conforme modelo linear disjuntivo, utiliza-se das variáveis binárias para tornar o problema linear, onde  $M$  é um valor grande suficiente, porém, como mostrado por Vinasco *et al.* (2011), não deve maior que  $2\bar{\theta}$ . Quando  $w_{km,y}^t = 1$ , (6e) resume-se na equação de fluxo de potência semelhante à (6d). Quando  $w_{km,y}^t = 0$ , o fluxo  $f_{km,y}^t$  é igual à zero pela equação (6f) e a restrição (6e) fica relaxada, contendo apenas os termos referentes aos ângulos, de onde vem a limitação do valor de  $M$ .

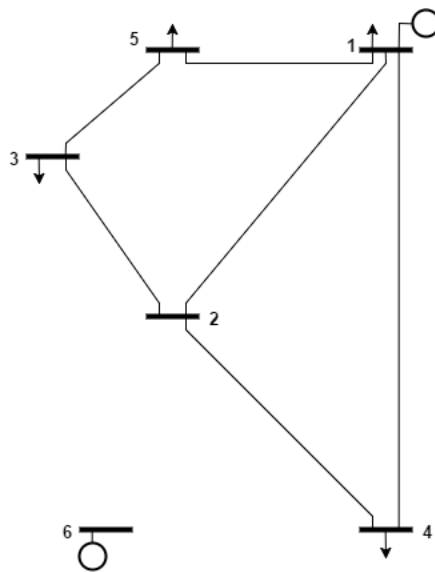
Em (6f) e (6g), definem-se os limites de fluxo de potência das linhas no caso base ( $f_{0_{km}}^t$ ) e linhas candidatas ( $f_{km,y}^t$ ) respectivamente. As restrições (6h), (6i) e (6j) definem os limites do ângulo de fase ( $\theta_k^t$ ), da geração ( $G_k^t$ ) e do corte de carga ( $R_k^t$ ) respectivamente. Evidentemente, o valor máximo de corte de carga em determinada barra é igual à demanda, pois este é o pior caso possível, onde a carga foi completamente cortada.

Em (6k) e (6l) foi definida uma variável binária de utilização dos circuitos instalados ( $u_{km,y}^t$ ), dessa forma, é forçada a utilização do circuito sempre que for instalado e, além disso, mantém-se  $u_{km,y}^t = 1$  em todos os estágios de tempo remanescentes após a instalação, enquanto  $w_{km,y}^t$  só assume valor igual a um no estágio de tempo em que há a instalação. Essa consideração foi feita para trazer uma separação entre a instalação e a utilização e, assim, organizar o que está relacionado à parte de investimento e à parte operativa. A restrição (6m) limita o número máximo de circuitos que podem ser instalados em cada ramo, em que esse valor é um parâmetro de entrada e pode ser diferente para cada corredor. Por fim, a restrição

(6n) determina o ângulo de fase de referência para uma determinada barra, necessário para basear os demais ângulos das barras do sistema.

### 3.1.1 SISTEMA GARVER

O sistema proposto por Garver (1970) contém 6 barras, 8 ramos e é amplamente utilizado em estudos de planejamento de expansão devido a sua topologia que tende a implementar novas linhas de transmissão. Esse sistema, apesar de simples, tem capacidade de verificar o comportamento do modelo de planejamento proposto.



**Figura 3.1 - Ilustração do sistema Garver.**

Conforme a Figura , há alguns ramos em que já há linhas de transmissão construídas, entretanto, há outros corredores em que existe a necessidade de interligar as barras. Além disso, há unidades geradoras nas barras 1 e 6 e demanda nas barras 1, 3, 4 e 5 do sistema. Esse sistema foi utilizado por (Cascalho, 2015) e os valores dos parâmetros definidos em seu estudo serviram como referência para o estudo realizado neste trabalho.

O sistema possui limitações quanto à quantidade de linhas que podem ser construídas em determinado corredor e capacidade máxima de fluxo de potência. Os custos de investimento de cada um dos ramos são diferentes, pois este é um parâmetro que depende de fatores como o comprimento da linha de transmissão. Outro fator que tem seu valor alterado de acordo com a distância do ramo é a reatância de cada linha e, conseqüentemente, o seu inverso, a susceptância. Os valores dos parâmetros do sistema estão expostos no Apêndice A deste trabalho.

Além dos fatores específicos referentes às linhas de transmissão, há os parâmetros sistêmicos referentes à operação que devem ser definidos: geração máxima em cada barra e demanda. Esses parâmetros também estão disponíveis no Apêndice A deste trabalho. Com os

valores de entrada definidos, é possível obter a solução do sistema utilizando o modelo escolhido, minimizando o custo e atendendo a demanda de forma ótima.

### 3.1.1.1 TESTES E RESULTADOS

Para analisar o funcionamento do modelo determinístico proposto em (6), foram realizados testes utilizando o sistema Garver de 6 barras como base. Os parâmetros de entrada do sistema estão apresentados no Apêndice A. Em cada estágio de tempo existe um número máximo de circuitos que podem ser construídos em cada corredor, ou seja, ao invés de existir um número máximo de circuitos que podem ser adicionados no tempo total do plano de expansão, em cada estágio existe a quantidade possível para construção. Além disso, foram considerados três estágios de tempo em que é possível realizar investimentos de expansão, em um horizonte de três anos. Inicialmente, foi desconsiderada a restrição de limite de orçamento (6b).

Os fatores de correção de custos ( $\lambda i^t$  e  $\lambda v^t$ ) foram considerados iguais para os valores de investimento e custos operativos. É importante que este fator seja considerado e esteja bem ajustado, pois sem ele a solução do programa consideraria adiantar a realização dos investimentos, prejudicando o plano a longo prazo. Os fatores foram calculados da seguinte forma:

$$\lambda i^t = \lambda v^t = \frac{1}{(1+I)^p}, \quad (7)$$

em que  $I$  é a taxa de juros anual utilizada na correção do valor futuro para o presente e  $p$  é o período em anos do estágio analisado em relação ao estágio inicial. Para os testes realizados neste trabalho, foi considerado  $I = 10\% a.a$  e, portanto,  $\lambda i^1 = 1$ ,  $\lambda i^2 = 0,9091$  e  $\lambda i^3 = 0,8264$ .

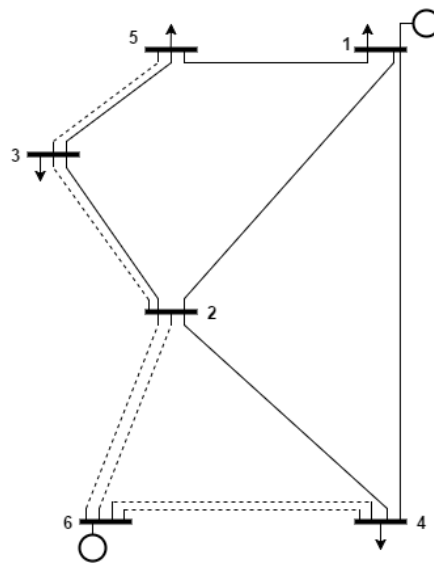
A solução do sistema Garver utilizando o modelo determinístico (6) indica o plano de expansão apresentado abaixo na Tabela, em que os circuitos de cada ramo indicados para construção estão separados por estágio de tempo. O custo de investimento está separado por estágio de tempo e sua soma total também é apresentada.

**Tabela 3.1- Circuitos adicionados no caso determinístico sem restrição de orçamento.**

Ramo (km)	Número de Circuitos Adicionados Por Corredor		
	t=1	t=2	t=3
2-3	1		
2-6	1		1
3-5		1	
4-6	1		1
Custo Por Estágio de Tempo ( $10^3 \times R\$$ )	10.100,00	2.850,00	7.650,00

Custo Total de Investimento ( $10^3 \times R\$$ )	20.600,00
---	-----------

A solução do problema indica um plano de investimento com a construção total de seis novas linhas de transmissão, sendo o planejamento dividido em: três linhas no primeiro estágio (ramos 2-3, 2-6 e 4-6) a um custo de R\$ 10.100.000,00; uma no segundo (ramo 3-5) com o investimento adicional de R\$ 2.850.000,00; e duas no terceiro período (ramos 2-6 e 4-6) a um custo de R\$ 7.650.000,00 totalizando investimento o custo total de investimento de R\$ 20.600.000,00. Dessa forma, devido à expansão e melhorias realizadas na rede de transmissão, a demanda em cada um dos estágios foi atendida, sem que houvesse corte de cargas no sistema.



**Figura 3.2 - Solução do sistema Garver determinístico sem restrição de orçamento.**

A solução do problema, a partir dos parâmetros de entrada especificados, indicou um plano com a construção de seis novas linhas de transmissão. A Figura ilustra o sistema ao final do plano de expansão, em que as linhas contínuas são as linhas do caso base e as linhas tracejadas as novas linhas construídas para atender a demanda ao menor custo de investimento possível.

É válido o questionamento em relação à restrição de limite de orçamento (6b) que foi desconsiderada para a solução apresentada acima. Em casos reais, dificilmente haverá disponibilidade de capital tão elevada a ponto de ser desconsiderada a sua limitação no planejamento. O sistema Garver é pequeno e são poucas as opções de linhas candidatas possíveis, uma pequena limitação orçamentária pode resultar na não construção de linhas essenciais para atender a demanda, ocasionando corte de carga e conseqüentemente, multa. Entretanto, é possível realizar a análise do comportamento deste sistema quando há limitações na parte orçamentária.

Para ilustrar os problemas que a restrição de orçamento pode trazer a um sistema pequeno como o proposto por Garver, foram consideradas, conforme Tabela a seguir, duas situações: limitação no orçamento total do plano de expansão e limitação a cada estágio.

**Tabela 3.2 - Orçamentos disponíveis para as duas restrições no caso determinístico.**

Restrição de Orçamento 1			Restrição de Orçamento 2		
Orçamento total ( $10^3 \times R\$$ )			Orçamento por estágio de tempo ( $10^3 \times R\$$ )		
t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
20.000,00	20.000,00	20.000,00	13.400,00	3.600,00	3.600,00
Total: 20.000,00			Total: 20.600,00		

Pela Tabela , nota-se que o orçamento total disponível no primeiro caso é menor que o valor gasto na solução apresentada na Tabela em que não há limites de gastos. Dessa forma, essa situação foi utilizada para verificar o comportamento do sistema e do plano de expansão em uma situação de pouco capital e espera-se que a restrição impeça a construção de alguma linha necessária para atender completamente a demanda e, portanto, que haja corte de carga. Para o caso 2, cada estágio de tempo tem um valor máximo que pode ser gasto e, baseado nos valores do resultado em que não há limite de orçamento, espera-se que a solução indique um plano de expansão diferente com possibilidade de corte de carga. Os planos de expansão indicados para os casos com restrição de orçamento estão apresentados a seguir:

**Tabela 3.3 - Circuitos adicionados no caso determinístico com restrições de orçamento.**

Ramo (km)	Número de Circuitos Adicionados Por Corredor					
	Restrição de Orçamento 1			Restrição de Orçamento 2		
	t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
1-4		1				
2-3	1			1		
2-6	1			2		
3-5				1		
4-6	1		1		1	1
Custo Por Estágio de Tempo ( $10^3 \times R\$$ )	10.100,00	6.300,00	3.600,00	13.100,00	3.550,00	3.600,00
Custo Total de Investimento ( $10^3 \times R\$$ )	20.000,00			20.250,00		

A Tabela traz a solução da expansão para os dois casos considerados. No caso em que há limitação no valor do orçamento total, como era esperado, a demanda não foi totalmente atendida resultando em corte de 0,3 MW da carga no terceiro estágio de tempo. A solução do plano indica a construção de cinco novas linhas de transmissão a um custo total de



R\$ 20.000.000,00 e, comparativamente ao plano sem restrições de orçamento, não houve apenas a exclusão de linhas que deveriam ser construídas, foi indicada a linha do corredor 1-4 que antes não fora para atender o plano sem restrição de investimento. Essa situação pode ser explicada pela minimização do corte de carga que, apesar de não ter sido evitado, o modelo busca o menor corte possível, como já era esperado devido à função objetivo (6a) apresentada no modelo.

A solução considerando a limitação do orçamento a cada estágio, alternativamente, atendeu completamente a demanda para a situação orçamentária proposta. Foi indicado um plano de expansão com a construção de seis linhas de transmissão, com custos de R\$ 13.100.000,00 no primeiro estágio, R\$ 3.550.000,00 no segundo e R\$ 3.600.000,00 no terceiro, totalizando um investimento de R\$ 20.250.000,00. Comparativamente, ao plano sem restrições de orçamento, a solução indicou a construção das mesmas linhas de transmissão, porém, em estágios de tempo diferentes. Essa situação ocorreu devido à disponibilidade de capital indicada e ao fator de correção de custo ( $\lambda^t$ ), que possibilitaram o adiantamento dos investimentos para atender à demanda que só ocorreria no terceiro estágio de tempo.

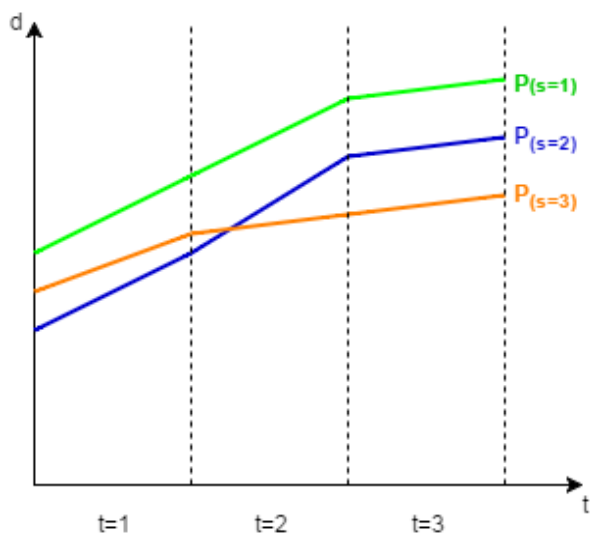
Apesar da solução do plano com a segunda restrição de orçamento apresentar valor total de investimento de R\$ 20.250.000,00 e o plano sem restrição orçamentária indicar o investimento total de R\$ 20.600.000,00; esses planos são equivalentes em relação ao custo total, pois as linhas de transmissão instaladas são as mesmas alterando apenas o estágio da construção, ou seja, a diferença de custo está ligada ao fator de correção e, portanto, é o mesmo custo em momentos diferentes, considerando a taxa de juros utilizada. Entretanto, os planos de expansão não são iguais, pois a construção das linhas em estágios de tempo diferentes precisam de planejamentos diferentes, mais linhas pode ser construídas em um estágio e isso requer planos de ações específicos, por exemplo.

### **3.2 MODELO ESTOCÁSTICO DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO MULTIESTÁGIO**

Diferentemente do modelo determinístico, no planejamento estocástico os valores da demanda no horizonte do plano de expansão não são conhecidos exatamente. São considerados cenários de demandas possíveis com probabilidades distintas de ocorrência para cada caso. A solução do plano de expansão deve indicar os investimentos considerando todos os cenários e suas probabilidades, sem que ocorra corte de carga. Evidentemente, a soma das probabilidades dos cenários deve ser igual a 100%.

A Figura traz um exemplo de como pode ser o comportamento do problema em que a carga é incerta. Foram ilustrados três cenários em que a demanda varia ao longo do tempo de

forma diferente. Para cada uma dessas possibilidades existe uma probabilidade de ocorrência ( $P_s$ ) associada que influenciará na decisão de instalação das linhas de transmissão de acordo com a relevância de cada cenário.



**Figura 3.3 - Ilustração de cenários de demanda.**

O modelo estocástico é bem semelhante ao determinístico apresentado em (6), com a adição do conjunto dos cenários. Para cada cenário de demanda, haverá valores distintos de geração, corte de carga, fluxo de potência nas linhas e ângulo de fase. Entretanto, independentemente do número de cenários, a solução do problema indicará apenas um plano de expansão.

Pela semelhança dos modelos, as variáveis têm a mesma simbologia, e as restrições têm as mesmas funções do que foi apresentado na seção 3.1, adicionando o conjunto dos cenários. A grande diferença na função objetivo, (8a), está nos termos da segunda parte, referentes ao custo esperado de operação do sistema, onde são multiplicados pela probabilidade de cada cenário, ou seja, o custo da geração e o custo de corte de carga são considerados proporcionalmente à sua chance de ocorrência. Nota-se que na primeira parte da função objetivo, referente ao investimento em novas linhas de transmissão, não há influência dos cenários. Dessa forma, a solução do modelo deve indicar a decisão a ser tomada baseada em todos os cenários e nas suas probabilidades.

Em um cenário de demanda muito adverso, pode haver a necessidade de construir muitas linhas de transmissão. Entretanto, se a probabilidade de ocorrer este cenário for muito pequena, a solução do problema pode indicar o corte de carga ao invés do alto investimento. Essa decisão será tomada baseando-se na minimização do custo da escolha, em que o corte de carga acarreta em multa por não atender a demanda e a construção das linhas para atender a carga corretamente acarreta em um alto investimento financeiro.

$$\min_{w,G,R} \sum_{t \in T} \left[ \lambda i^t \sum_{km \in \Omega} C i_{km}^t \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t + \lambda v^t \sum_{s \in \Phi} p_s \left( \sum_{k \in B} (C g_k G_{k,s}^t + C l s_k R_{k,s}^t) \right) \right] \quad (8a)$$

s.a.:

$$\sum_{t \in T} \sum_{km \in \Omega} C i_{km}^t \sum_{y \in \Omega_y} w_{km,y}^t \leq C_{total} \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T \quad (8b)$$

$$\sum_{km \in \Omega} S_0 f_{0km,s}^t + \sum_k S \sum_y \overline{n_{km}^t} f_{km,y,s}^t = G_{k,s}^t + R_{k,s}^t - D_{k,s}^t \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (8c)$$

$$\forall s \in \Phi$$

$$f_{km,y,s}^t = -b_{0km} n_{0km,y} (\theta_{k,s}^t - \theta_{m,s}^t) \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (8d)$$

$$\forall s \in \Phi, \forall k \in B$$

$$-M (1 - u_{km,y}^t) \leq \frac{f_{km,y,s}^t}{b_{km,y}} + (\theta_{k,s}^t - \theta_{m,s}^t) \leq M (1 - u_{km,y}^t) \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (8e)$$

$$\forall s \in \Phi, \forall k \in B$$

$$-n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \leq f_{0km,s}^t \leq n_{0km,y} \bar{f}_{0km} \quad \forall km \in \Omega, \forall t \in T, \quad (8f)$$

$$\forall s \in \Phi$$

$$-u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \leq f_{km,y,s}^t \leq u_{km,y}^t \bar{f}_{km} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (8g)$$

$$\forall y \in Y$$

$$-\bar{\theta} \leq \theta_{k,s}^t \leq \bar{\theta} \quad \forall k \in B \forall t \in T \quad (8h)$$

$$0 \leq G_{k,s}^t \leq \bar{G} \quad \forall k \in B, \forall t \in T \quad (8i)$$

$$0 \leq R_{k,s}^t \leq \bar{R} \quad \forall k \in B, \forall t \in T \quad (8j)$$

$$u_{km,y}^t = w_{km,y}^t + w_{km,y}^{t-1} + w_{km,y}^{t-2} + \dots + w_{km,y}^{t-m} \quad \forall km \in \Omega, m \in T - 1, \quad (8k)$$

$$\forall t \in T, \forall y \in Y,$$

$$u_{km,y}^t \leq u_{km,y}^{t+1} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (8l)$$

$$\forall y \in Y$$

$$\sum_y w_{km,y}^t \leq \overline{n_{km}^t} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (8m)$$

$$\forall y \in Y$$

$$\theta_{k,s}^t = 0 \quad \forall k \in \Omega_B | k = ref, \quad (8n)$$

$$t \in T, \forall s \in \Phi$$

$$u_{km,y}^t, w_{km,y}^t \text{ variáveis binárias} \quad \forall km \in \Omega, t \in T, \quad (8o)$$

$$G_k^t, R_k^t, \theta_k^t, f_{0km,y}^t, f_{km,y}^t \text{ variáveis contínuas} \quad \forall y \in Y$$

Em que:

T é o conjunto de todos os estágios de tempo;

$\Omega_B$  é o conjunto de todas as barras do sistema;

$\Omega_R$  é o conjunto de todos os ramos do sistema;

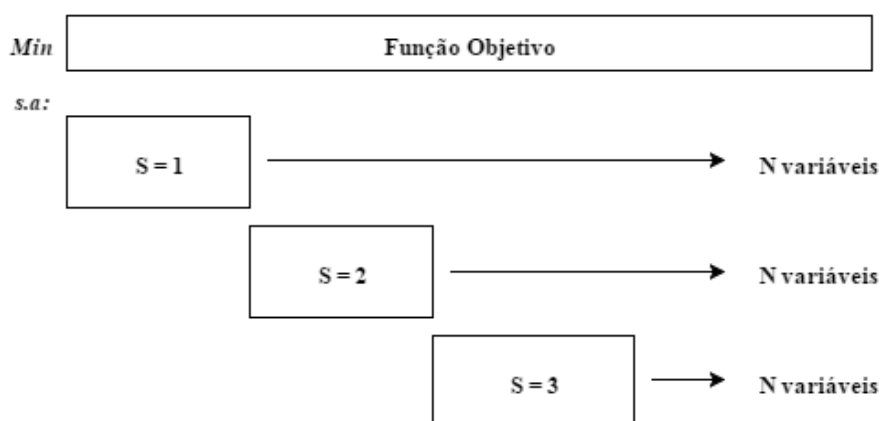
$\Omega_y$  é o conjunto de todos os circuitos de cada ramo;

$\Phi$  é o conjunto de todos os cenários.

Ao considerar diferentes cenários, surge um problema relacionado à quantidade de variáveis do modelo. A cada novo cenário considerado, o problema cresce o número de restrições e, conseqüentemente, o número de variáveis. Todas as restrições do modelo (8) que

possuem termos pertencentes aos conjuntos dos cenários devem ser consideradas para cada caso possível. Assim, ocorre no modelo de planejamento estocástico uma “explosão” no número de variáveis.

A complexidade computacional do problema cresce de forma proporcional ao aumento do número de cenários. A Figura mostra genericamente como é a estrutura do problema que deve ser solucionado para o caso em que há três cenários. Nele são consideradas as restrições com “N” variáveis para cada um dos casos. Com isso, a consideração de muitos cenários faz com que haja uma explosão na complexidade do problema e, conseqüentemente, um aumento no esforço computacional. Assim, é esperado que o esforço computacional para solucionar o problema aumente consideravelmente com a adição de novos cenários.



**Figura 3.4 - Estrutura da solução do modelo de planejamento considerando cenários.**

O problema de expansão pode crescer ainda mais, além dos cenários, dependendo do tamanho do sistema que está sendo avaliado, pois o número de barras, ramos, geração e demanda aumenta e, conseqüentemente, também o número de variáveis. Dessa forma, pode haver complicações na hora de solucionar o problema, pois os sistemas de transmissão reais são naturalmente grandes e complexos. Além disso, essa situação pode se agravar caso sejam considerados outros fatores no sistema, como por exemplo, questões relacionadas à contingência do sistema ou a possibilidade de investimento em equipamentos como transformadores.

### 3.2.1 TESTES E RESULTADOS DO SISTEMA GARVER

Para ilustrar o comportamento do modelo de planejamento de expansão estocástico, o sistema Garver contendo 6 barras será mantido como no caso determinístico adicionando-se dois cenários ao já existente, totalizando três perfis diferentes de demanda em cada estágio de tempo. Os valores de demanda de cada cenário estão apresentados no Apêndice A. Complementarmente, dois casos de probabilidades de ocorrência dos cenários serão analisados e estão apresentados a seguir.

**Tabela 3.4 - Probabilidade de ocorrência do cenário em cada caso.**

Cenário	Caso 1	Caso 2
	Probabilidade (Ps)	Probabilidade (Ps)
S=1	1	0,7
S=2	0	0,2
S=3	0	0,1

Nota-se pela Tabela que o primeiro caso, em que apenas o cenário 1 pode ocorrer com probabilidade 100%, é equivalente a realizar o modelo determinístico de expansão. Assim, a realização deste caso visa comparar os dois modelos apresentados nessa seção, esperando que a solução do plano de expansão em ambos seja a mesma. Os resultados para os dois casos estão apresentados na seção a seguir.

### 3.2.1.1 RESULTADOS DO CASO 1

Inicialmente, para verificar o funcionamento do modelo de expansão estocástico, foi realizado o caso 1, em que este é equivalente ao modelo determinístico. Essa etapa de teste é importante para assegurar que o modelo proposto traz em sua solução um plano de expansão que atenda aos objetivos desejados.

Os parâmetros do cenário 1 (S=1) e do modelo determinístico são os mesmos, inclusive o fator de correção de custos ( $\lambda i^t$  e  $\lambda v^t$ ), entretanto, a restrição de limitação do orçamento não foi considerada para esse caso. Dessa forma, é esperado que o plano de expansão seja o mesmo quando comparado ao resultado do modelo determinístico. Foi realizado o teste para o primeiro caso e o plano de expansão obtido está apresentado a seguir.

**Tabela 3.5 - Circuitos adicionados por ramo no caso estocástico com único cenário.**

Ramo (km)	Número de Circuitos Adicionados Por Corredor		
	t=1	t=2	t=3
2-3	1		
2-6	1		1
3-5		1	
4-6	1		1
Custo Por Estágio de Tempo (R\$)	10.100.000,00	2.850.000,00	7.650.000,00
Custo Total de Investimento (R\$)	20.600.000,00		

Como esperado, os resultados obtidos no plano de expansão são os mesmos obtidos no caso determinístico apresentados na seção 3.1.1.1 em que não há restrição orçamentária. As mesmas 6 linhas de transmissão, nos mesmos estágios de tempo foram indicadas para construção, resultando em um custo de investimento total de R\$ 20.600.000,00; igual ao resultado do modelo determinístico. Evidentemente, se fossem consideradas as restrições de

orçamento, os resultados deveriam ser iguais aos também apresentados no plano determinístico. Assim, o teste inicial considerando apenas o primeiro cenário (S=1) foi satisfatório e forneceu condições para a realização de outras verificações e testes considerando outros cenários que serão apresentados na sequência.

### 3.2.1.2 RESULTADOS DO CASO 2

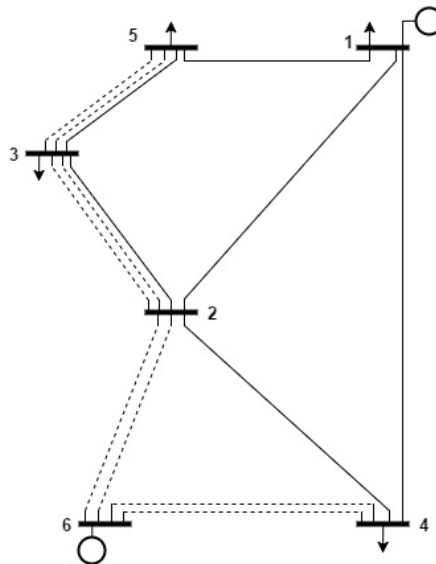
No segundo caso, são considerados três cenários de demanda possíveis e, em cada um deles, a demanda tem um comportamento crescente em relação aos estágios de tempo. Além disso, há cenários com valores de demanda elevados que exigem maiores investimentos de expansão da rede de transmissão para que o fornecimento de energia seja garantido de forma contínua.

Inicialmente, a restrição que limita o orçamento (8b) foi desconsiderada para que a solução problema indique o melhor plano de expansão sem que a parte financeira seja impeditiva. Espera-se que a solução, devido aos cenários com demandas elevadas, indique a construção de mais linhas de transmissão em relação ao número indicado plano de expansão determinístico ou do caso 1.

**Tabela 3.6 - Circuitos adicionados por ramo no caso estocástico sem restrição de orçamento.**

Ramo (km)	Número de Circuitos Adicionados Por Corredor		
	t=1	t=2	t=3
2-3	1	1	
2-6	2		
3-5	1		1
4-6		1	1
Custo Por Estágio de Tempo (R\$)	13.100.000,00	6.450.000,00	6.550.000,00
Custo Total de Investimento (R\$)	26.100.000,00		

No total, foi indicado um plano de investimento contendo oito novas linhas de transmissão, sendo construídas quatro no primeiro estágio (ramos 2-3, 2-6 e 3-5) a um custo de R\$ 13.100.000,00; duas no segundo (ramos 2-3 e 4-6) investindo R\$ 6.450.000,00 e duas no terceiro momento (ramos 3-5 e 4-6) custando R\$ 6.550.000,00; resultando em um custo de investimento total de R\$ 26.100.000,00. Comparativamente ao plano indicado no caso 1 da seção 3.2.1.2, houve a construção de mais linhas de transmissão e um custo de investimento total maior. Entretanto, esse comportamento já era esperado, pois há cenários considerados em que a demanda era elevada e o plano de expansão indicou uma solução que atendesse toda a demanda sem que houvesse corte de carga.



**Figura 3.5 - Solução do sistema Garver estocástico sem restrição de orçamento.**

A Figura mostra o sistema após a construção de todas as linhas de transmissão. Nota-se que o reforço feito se concentrou em 4 ramos (4-6, 2-6, 2-3 e 3-5), o que traz uma importância maior para esses ramos em termos sistêmicos, pois a geração da barra seis terá sua potência transmitida, principalmente, por esses novos circuitos.

Assim como no caso determinístico, as restrições de orçamento alteram a solução do plano de expansão e podem, inclusive, limitar a construção de alguma linha necessária para garantir o fornecimento de energia continuamente e, assim, resultar em corte de carga. Dessa forma, foram considerados dois planos de expansão com restrições orçamentárias: limite do orçamento total e limite do orçamento por estágios.

**Tabela 3.7 - Orçamentos disponíveis para as duas restrições no caso estocástico.**

Restrição de Orçamento 1			Restrição de Orçamento 2		
Orçamento total (R\$)			Orçamento por estágio de tempo (R\$)		
t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
25.000.000,00	25.000.000,00	25.000.000,00	13.100.000,00	10.000.000,00	3.000.000,00
Total:		25.000.000,00	Total:		26.100.000,00

As duas restrições interferem de forma diferente na solução do plano de expansão. A primeira limita a soma dos investimentos nos três estágios de tempo e, para esse caso, foi considerado o orçamento total de R\$ 25.000.000,00; ou seja, este é o valor máximo que pode ser investido durante o horizonte da expansão. Para a segunda restrição de orçamento, a cada estágio há um valor que pode ser utilizado para investimentos. Nesse caso do problema, foram disponibilizados R\$ 13.100.000,00 no primeiro estágio, R\$ 10.000.000,00 no segundo e R\$ 3.000.000,00 no terceiro período, resultando em R\$ 26.100.000,00 de orçamento disponível para investimentos na rede de transmissão.

Da primeira restrição, por ter um orçamento disponível menor do que foi gasto no plano sem restrições de orçamento (R\$ 26.100.000,00), espera-se que não haja condições financeiras suficientes para realizar todos os investimentos necessários para atender continuamente a carga e, com isso, haveria corte de carga em algum momento do plano. Da segunda restrição, os valores disponíveis por estágio são diferentes do que foi gasto, quando comparado com o plano de expansão sem restrições orçamentárias (t=1: R\$ 13.100.000,00; t=2: R\$ 6.450.000,00 e t=3: 3.000.000,00) e, assim, espera-se que resulte em um plano de expansão diferente em que pode haver, inclusive, corte de carga pelo não fornecimento de energia.

**Tabela 3.8 - Circuitos adicionados no caso estocástico com restrições de orçamento.**

Ramo (km)	Número de Circuitos Adicionados Por Corredor					
	Restrição de Orçamento 1			Restrição de Orçamento 2		
	t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
2-3	1	1		1	1	1
2-6	2			2	1	
3-5	1		1	1	1	
4-6		1				
Custo Por Estágio de Tempo (10 <sup>3</sup> x R\$)	13.100,00	6.450,00	2.950,00	13.100,00	9.700,00	2.950,00
Custo Total de Investimento (10 <sup>3</sup> x R\$)	22.500,00			25.750,00		

Conforme apresenta a Tabela , para o primeiro caso de restrição de orçamento, em que se limita o orçamento total, foi indicada a construção de sete novas linhas de transmissão divididas em: quatro no primeiro estágio (ramos 2-3, 2-6 e 3-5) investindo R\$ 13.100.000,00; duas no segundo (ramos 2-3 e 4-6) ao custo de R\$ 6.450.000,00 e uma no terceiro (ramo 3-5) por R\$ 2.950.000,00; sendo investidos R\$ 22.500.000,00 no total para realizar o plano. Comparando ao planejamento sem restrições orçamentárias, foram indicadas as mesmas linhas de transmissão, exceto o segundo circuito do ramo 4-6 que não pôde ser incluído devido à falta de orçamento disponível. Apesar de o valor gasto ser menor, a não construção desta linha que era necessária para atender a demanda dos cenários resultaria em corte de carga de 2,9 MW na barra 3, no terceiro estágio de tempo caso o cenário 3 ocorresse; ou seja, o plano de expansão indicado não garante que toda a carga será atendida em uma situação adversa, em que ocorram maiores valores de demanda.

Para a segunda restrição de orçamento, o plano de expansão indicou a construção de oito linhas de transmissão separadas em: quatro no primeiro estágio (ramos 2-3, 2-6 e 3-5) investindo R\$ 13.100.000,00; três no segundo (ramos 2-3, 2-6 e 3-5) ao custo de R\$ 9.700.000,00 e uma no terceiro (ramo 2-3) por R\$ 2.950.000,00; sendo investido o total de



R\$ 25.750.000,00. Apesar do mesmo número de linhas de transmissão indicadas para construção, quando comparado com o planejamento sem restrição de orçamento, os planos são diferentes e apontam diferentes circuitos para a solução. Devido à limitação financeira, o plano indicado não tem a capacidade de atender plenamente a demanda em todos os cenários considerados. Se o cenário 3 ocorresse, por ter elevados valores de demanda, o plano de expansão indicado não teria condições de atendê-lo completamente e haveria 2 MW de corte de carga na barra 1 no terceiro estágio. Assim, o orçamento disponibilizado a cada estágio não foi suficiente para garantir que todos os cenários fossem atendidos, caso ocorressem; pois as linhas indicadas não tinham capacidade suficiente para transmitir toda a potência necessária.

## 4. ABORDAGEM PELA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

A otimização robusta é uma alternativa ao problema estocástico de planejamento de expansão de redes de transmissão considerando incertezas. Sua formulação consiste em utilizar variáveis duais das restrições do problema de expansão para obter a solução e é crescente o número de estudos envolvendo esta abordagem. Essa abordagem é vantajosa por diminuir a quantidade de variáveis do problema e pela facilidade em tratar incerteza, sendo necessários apenas valores como a média e o desvio do termo incerto.

Para a formulação do modelo utilizando otimização robusta apresentado neste trabalho, foi utilizado como base o desenvolvimento proposto por Bertsimas *et al.* (2013). Foi também necessária a divisão em etapas para a formulação do modelo utilizando otimização robusta. Neste capítulo, as etapas foram divididas em sessões: em 4.1 apresenta-se a identificação das matrizes e vetores para um sistema contendo três barras, utilizando a formulação generalizada; em 4.2 apresenta-se o desenvolvimento até a formulação com otimização robusta e o tratamento da incerteza; em 4.3 apresenta-se o tratamento de uma das não linearidades do modelo relacionada à demanda pelo equivalente linear; em 4.4 apresenta-se a formulação linear da incerteza da demanda e em 4.5 apresenta-se a decomposição de Benders para o tratamento da outra não linearidade relacionada a uma variável dual e a variável binária.

### 4.1 IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES DO MODELO GERAL

Para desenvolver o modelo utilizando otimização robusta, o trabalho de Bertsimas *et al.* (2013) utiliza como base um modelo generalizado em que se encaixa na formulação planejamento de expansão de redes de transmissão considerando incerteza. A partir desse modelo, é feita a formulação como apresentado abaixo:

$$\min_{x,y} c^T x + b^T z \quad (9a)$$

$$\text{s.a: } Fx \leq f \quad (9b)$$

$$Hz \leq h \quad (9c)$$

$$Ax + Bz \leq g \quad (9d)$$

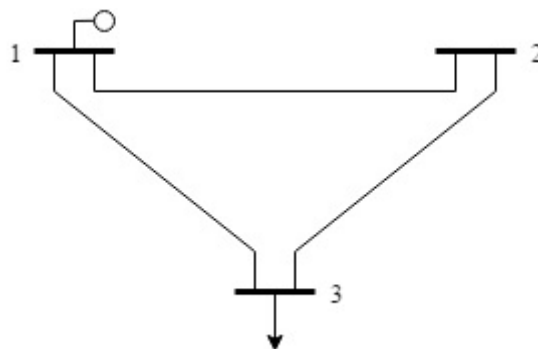
$$I_u z = \bar{d} \quad (9e)$$

$$x \text{ variável binária} \quad (9f)$$

$$z \text{ variável contínua}$$

Essa formulação generalizada agrupa os termos das equações comuns em matrizes ou vetores. A função objetivo (9a), em que  $c^T$  é o vetor com os termos que multiplicam as variáveis binárias, relacionado ao custo de investimento e  $b^T$  é o vetor referente às variáveis contínuas, relacionado aos custos operativos. Com relação às restrições, em (9b) foram agrupadas as equações compostas apenas por variáveis binárias e os respectivos parâmetros, como as restrições de utilização de circuitos adicionados e ordenação das instalações. Em (9c) foram agrupadas as equações compostas apenas por variáveis contínuas e seus parâmetros, como as restrições de limite de geração, corte de carga e ângulo de fase. Em (9d) foram agrupadas as equações que contenham variáveis binárias e contínuas e seus parâmetros, como as restrições de fluxo de potência. Em (9e) é considerada a restrição da primeira lei de conservação de energia, em que a demanda é considerada incerta. Dessa forma, a partir do modelo generalizado, é necessária a etapa de identificação de cada uma das matrizes e vetores.

Utilizando como base um sistema simplificado contendo três barras, três linhas de transmissão, demanda na barra 3 e geração na barra 1; será feita a identificação matricial de cada um dos termos apresentado no caso generalizado. O sistema com três barras está ilustrado a seguir:



**Figura 4.1 - Sistema composto por três barras.**

Será considerada a possibilidade de construção de até dois circuitos em cada um dos ramos: 1-2, 1-3 e 2-3. Além disso, nota-se na Figura que o caso base é composto por três linhas de transmissão, uma em cada corredor possível. Foi considerado o caso com apenas um estágio de tempo e apenas um cenário de demanda. A partir dessas informações, inicia-se a identificação dos termos pelas variáveis binárias e contínuas, que servirão como base para as dimensões das demais matrizes.

Como o sistema utilizado possui três ramos e a possibilidade de adição de dois circuitos, a variável binária do problema é indiciada pelos ramos e circuitos do problema, assim, para o caso contendo três barras, o vetor  $x$  do sistema foi identificado como:

$$x = [w_{km,y}] \rightarrow \begin{bmatrix} w_{12,1} \\ w_{13,1} \\ w_{23,1} \\ w_{12,2} \\ w_{13,2} \\ w_{23,2} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} G_k \\ R_k \\ \theta_k \\ f_{km,y} \\ f_{0_{km}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ f_{12,1} \\ f_{13,1} \\ f_{23,1} \\ f_{12,2} \\ f_{13,2} \\ f_{23,2} \\ f_{0_{12}} \\ f_{0_{13}} \\ f_{0_{23}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Os vetores das variáveis do sistema foram identificados como apresentado na equação (10), em que a dimensão de cada um é proporcional ao número de barras, ramos, circuitos candidatos, estágios de tempo, cenários. Para o caso do sistema de três barras, a dimensão do vetor  $x$  é dada por:  $(nr.nc)x1$ , em que  $nr$  é o número de ramos possíveis de instalação e  $nc$  é o número de circuitos de que podem ser adicionados. Analogamente, a dimensão do vetor das variáveis contínuas  $z$  é dada por  $(3.nb + nr.nc + nr)x1$ , em que  $nb$  é o número de barras do sistema. Conhecidos os termos variáveis do modelo, é necessária a identificação dos vetores de parâmetro da função objetivo que, por estarem multiplicando as variáveis, já têm suas dimensões conhecidas.

$$\begin{aligned} c^T &= [Ci_{km}] \rightarrow [Ci_{12} \quad Ci_{13} \quad Ci_{23} \quad Ci_{12} \quad Ci_{13} \quad Ci_{23}], \\ b^T &= [Cg_k \quad CIs_k] \\ b^T &= [Cg_1 \quad Cg_2 \quad Cg_3 \quad CIs_1 \quad CIs_2 \quad CIs_3 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \end{aligned} \quad (11)$$

Dessa forma, todos os termos da função objetivo foram identificados. O próximo passo é identificar as matrizes de parâmetros das restrições. As matrizes desta parte são muito grandes, devido à complexidade e quantidade de restrições do modelo. Além disso, para ajustar ao modelo generalizado, algumas restrições formuladas com igualdade foram transformadas em duas restrições de desigualdade, sem alterar o seu significado. Todas as matrizes das restrições estão apresentadas no Apêndice B.

## 4.2 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E O TRATAMENTO DA INCERTEZA

Para a formulação do modelo de otimização robusta, deve-se construir, inicialmente, o bloco contendo a incerteza avaliada. Na proposta de Bertsimas *et al.* (2013) cria-se um vetor com os valores de demanda incerta, como apresentado a seguir.

$$D^t(\bar{d}^t, \hat{d}^t, \Delta^t): \left\{ d^t \in \mathbb{R}^{N_b}: \sum_{i \in \Omega_b} \frac{|d_k^t - \bar{d}_k^t|}{\hat{d}_k^t} \leq \Delta^t \left| d_k^t \in [\bar{d}_k^t - \hat{d}_k^t; \bar{d}_k^t + \hat{d}_k^t], \forall k \in \Omega_b \right. \right\} \quad (12)$$

Em que:

$\Omega_b$  é o conjunto de barras em que a demanda é incerta;

$N_b$  é número de barras em que a demanda é incerta;

$d^t$  é o vetor de incerteza da demanda no período de tempo t;

$\bar{d}_k^t$  é o valor nominal da demanda na barra k, no estágio de tempo t;

$\hat{d}_k^t$  é o desvio da demanda em relação ao valor nominal na barra k, no estágio de tempo t.

O termo que trata a incerteza da demanda (12) é composto pelos valores nominais  $\bar{d}_k^t$  e de desvio da demanda  $\hat{d}_k^t$  e a formulação deve ser menor que um parâmetro de controle do desvio máximo aceitável  $\Delta^t$ . Esse valor controla diretamente a variável demanda  $d_k^t$  e, conseqüentemente, a incerteza. Na situação em que  $\Delta^t = 0$ , a demanda é restrita ao valor nominal, resultando em apenas uma possibilidade, ou seja, tornando o caso determinístico. Opostamente, quando  $\Delta^t \neq 0$ , quanto maior for o valor desse parâmetro, maior será o grau de incerteza; dentro do raio de possibilidades  $[\bar{d}_k^t - \hat{d}_k^t; \bar{d}_k^t + \hat{d}_k^t]$ .

O próximo passo apresenta o modelo generalizado em dois estágios:

$$\min_{x,y} \left( c^T x + \max_{d \in D} b^T y(d) \right) \quad (13a)$$

$$\text{s.a: } Fx \leq f \quad (13b)$$

$$Hy(d) \leq h(d) \quad (13c)$$

$$Ax + By(d) \leq g \quad (13d)$$

$$I_u y(d) = \bar{d} \quad (13e)$$

$$x \text{ binária} \quad (13f)$$

Nota-se que a função objetivo (13a) é separada em duas partes, de acordo com a natureza da decisão. A primeira é relacionada ao custo de investimento, enquanto a segunda é relacionada ao custo esperado de operação, considerando a incerteza da demanda. Essa formulação pode ser escrita de forma equivalente:

$$\min_x \left( c^T x + \max_{d \in D} \min_{z \in \Omega(x,b)} b^T z \right) \quad (14a)$$

$$\text{s.a: } Fx \leq f, x \text{ binária} \quad (14b)$$

$$\text{Em que: } \Omega_{(x,b)} = \{y: Hz \leq h, Ax + Bz \leq g, I_u z = \bar{d}\} \quad (14c)$$

A partir de cada uma das equações que compõem o conjunto  $\Omega_{(x,b)}$  em (14c) existe uma variável dual associada. Para a equação  $Hz \leq h$ , está associada a variável dual  $\varphi$ ; para a equação  $Ax + Bz$ , a variável dual  $\lambda$  é relacionada à equação  $I_u z = \bar{d}$ , a variável  $\eta$ . Assim, a formulação dual da parte operativa do modelo, é composta pelas variáveis duais citadas e a variável binária, como apresentado abaixo:

$$\max_{d,\varphi,\lambda,\eta} \lambda^T (Ax - g) - \varphi^T h + \eta^T d \quad (15a)$$

$$\text{s.a: } -\lambda^T B - \varphi^T H + \eta^T I_u = b^T \quad (15b)$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0 \quad (15c)$$

A formulação apresentada em (15) justifica a etapa de identificação das matrizes do modelo generalizado, em que estas são relacionadas às transpostas das variáveis duais. Associando a formulação em (15) com a parte de investimento do problema de expansão da transmissão, obtém-se o modelo utilizando a otimização robusta:

$$\min_{x,\alpha,d,\varphi,\lambda,\eta} c^T x + \alpha \quad (16a)$$

$$\text{s.a: } \alpha \geq \lambda^T (Ax - g) - \varphi^T h + \eta^T d \quad (16b)$$

$$Fx \leq f \quad (16c)$$

$$-\lambda^T B - \varphi^T H + \eta^T I_u = b^T \quad (16d)$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0 \quad (16e)$$

Este é o modelo inicial proposto para o planejamento de expansão de redes de transmissão utilizando otimização robusta (16), ainda sem a restrição referente à incerteza da demanda mostrada em (12).

Na função objetivo (16a), há a minimização dos termos, em que o primeiro refere-se ao custo de investimento, enquanto na segunda parte surge o termo  $\alpha$ , relacionado à parte dual apresentada anteriormente em (15), subtraindo o termo dependente da variável binária. Anteriormente em (15a), a função objetivo era dada pelas variáveis duais e matrizes identificadas. O termo  $\alpha$  em (16a) é utilizado para agrupar esses termos apresentados.

Ainda na restrição (16b), nota-se que é nesta equação que há a existência de duas não linearidades. A primeira está presente na multiplicação entre o vetor das variáveis binárias e a variável dual ( $\lambda^T Ax$ ) e a segunda está presente na multiplicação entre a demanda e outra variável dual ( $\eta^T d$ ). A restrição (16c), relacionada à variável binária, por estar associada à parte de investimento do modelo, se mantém igual em relação ao modelo generalizado de

planejamento (9). Já a restrição (16d) surge do modelo dual da parte operativa do problema, em que as variáveis duais estão associadas às restrições do modelo primal, como já mencionado. Por fim, em (16e) as variáveis  $\varphi$  e  $\lambda$  são definidas positivas, enquanto a variável  $\eta$  é livre.

As não linearidades apresentadas serão tratadas nas próximas sessões separadamente, com a implementação da estratégia de solução utilizando decomposição de Benders para a primeira não linearidade ( $\lambda^T Ax$ ) e com a implementação de um equivalente linear para a segunda ( $\eta^T d$ ).

### 4.3 IMPLEMENTAÇÃO DO EQUIVALENTE LINEAR

No modelo de otimização robusta, é necessário substituir o termo não linear ( $\eta^T d$ ) por uma forma equivalente linear. Em geral, é possível substituir esse tipo de não linearidade por termos equivalentes e, para isso, utilizam-se variáveis binárias para “separar” os termos. Para isso, o primeiro passo é realizar uma discretização da demanda.

$$\eta_k d_k = \eta_k \sum_j b_{j,k} \delta_{j,k} d_k^{max} \quad (17)$$

Em (17), o termo  $\eta_k$  passa a multiplicar a demanda discretizada a partir de variáveis binárias, onde  $k$  é o conjunto de barras do sistema,  $j$  é o número de amostras que é considerado e  $\delta_{j,k}$  é uma fração da demanda máxima ( $d_k^{max}$ ) que será somada caso a variável binária ( $b_{j,k}$ ) tenha valor igual a um; caso contrário, o termo para determinada amostra  $j$  será igual à zero. Entretanto, ainda assim, a não linearidade está presente na multiplicação da variável binária  $b_{j,k}$  e a variável dual  $\eta_k$ . Cria-se, então, uma variável alternativa que representa essa multiplicação e adicionam-se duas restrições lineares para o termo.

$$\varepsilon_{j,k} = b_{j,k} \eta_k \quad (18a)$$

$$\eta_k d_k = \sum_j \varepsilon_{j,k} \delta_{j,k} d_k^{max} \quad (18b)$$

$$-M_d(1 - b_{j,k}) \leq \varepsilon_{j,k} - \eta_k \leq M_d(1 - b_{j,k}) \quad (18c)$$

$$-M_d b_{j,k} \leq \varepsilon_{j,k} \leq M_d b_{j,k} \quad (18d)$$

Com a formulação proposta em (18), a não linearidade foi substituída pelo equivalente linear apresentado nas duas restrições mostradas (18c e 18d), em que  $M_d$  é um valor grande suficiente para satisfazer a condição. Além disso, é importante ressaltar que para cada  $d_k$ , haverá um par de restrições (18c) e (18d) associado. No caso em que  $b_{j,k} = 1$ , pela restrição (18c) o valor de  $\varepsilon_{j,k}$  será igual a  $\eta_k$  e a restrição (18d) fica relaxada devido à  $M_d$  ser muito grande; caso contrário, a restrição (18c) fica relaxada e pela equação (18d) o valor de  $\varepsilon_{j,k}$  é igual à zero.

Para ilustrar o funcionamento do equivalente linear, é mostrado o exemplo abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Dados: } k = 1 \text{ e } j = 1, \dots, 5 \rightarrow \bar{d}_1 = 100; \delta_{1,1} = \delta_{2,1} = \dots = \delta_{5,1} = 0,1 \quad (19a) \\ \text{Se } d_1 = 30, \text{ pela formulação não linear, a solução é:} \end{aligned}$$

$$\eta_1 d_1 = 30\eta_1 \quad (19b)$$

No caso da formulação linear, suponha a combinação de binárias abaixo:

$$b_{1,1} = b_{2,1} = b_{3,1} = 1 \text{ e } b_{4,1} = b_{5,1} = 0 \quad (19c)$$

Então as restrições (15c) e (15d) ficam:

$$j = 1 \quad 0 \leq \varepsilon_{1,1} - \eta_1 \leq 0 \quad \rightarrow \varepsilon_{1,1} = \eta_1 \quad (19d)$$

$$-M_d \leq \varepsilon_{1,1} \leq M_d \quad (19e)$$

$$j = 2 \quad 0 \leq \varepsilon_{2,1} - \eta_1 \leq 0 \quad \rightarrow \varepsilon_{2,1} = \eta_1 \quad (19f)$$

$$-M_d \leq \varepsilon_{2,1} \leq M_d \quad (19g)$$

$$j = 3 \quad 0 \leq \varepsilon_{3,1} - \eta_1 \leq 0 \quad \rightarrow \varepsilon_{3,1} = \eta_1 \quad (19h)$$

$$-M_d \leq \varepsilon_{3,1} \leq M_d \quad (19i)$$

$$j = 4 \quad -M_d \leq \varepsilon_{4,1} - \eta_1 \leq M_d \quad (19j)$$

$$0 \leq \varepsilon_{4,1} \leq 0 \quad \rightarrow \varepsilon_{4,1} = 0 \quad (19k)$$

$$j = 5 \quad -M_d \leq \varepsilon_{5,1} - \eta_1 \leq M_d \quad (19l)$$

$$0 \leq \varepsilon_{5,1} \leq 0 \quad \rightarrow \varepsilon_{5,1} = 0 \quad (19m)$$

Da restrição (18b), obtém-se então:

$$\sum_j \varepsilon_{j,k} \delta_{j,k} \bar{d}_k = 10\eta_1 + 10\eta_1 + 10\eta_1 = 30\eta_1 \quad (19n)$$

Dessa forma, a não linearidade referente ao termo da demanda foi resolvida com a implementação das restrições que compõem o equivalente linear. Assim, o modelo de expansão utilizando otimização robusta tem em sua formulação acrescentando essas restrições e utilizando a discretização da demanda. O problema, porém, ainda contém outro termo não linear, composto pela variável binária  $x$ . Para resolver essa situação, será utilizado o método de solução chamado decomposição de Benders em 4.5.

Antes de apresentar a estratégia de solução do modelo utilizando otimização robusta, é preciso ajustar para a programação linear o tratamento à incerteza para possibilitar a entrada da equação na ferramenta computacional.

#### 4.4 FORMULAÇÃO LINEAR DA INCERTEZA NA DEMANDA

Como apresentado anteriormente, o bloco que apresenta a avaliação da incerteza é composto pelos parâmetros: desvio da demanda, valor nominal e valor de desvio máximo aceitável. A formulação está apresentada a seguir:

$$\sum_{k \in \Omega_b} \frac{|d_k^t - \bar{d}_k^t|}{\hat{d}_k^t} \leq \Delta^t \quad (20)$$



Dessa forma, é necessário calcular o valor absoluto da diferença entre a variável demanda  $d_k^t$  e o valor nominal  $\bar{d}_k^t$ . Entretanto, é necessário representar este termo em uma formulação equivalente para ser possível a implementação desta restrição como programação linear. Esse tipo de formulação não é tão simples, pois é necessário avaliar de acordo com a característica do problema. Assim, para o módulo presente no numerador em (20), é considerada a seguinte substituição equivalente desconsiderando o conjunto dos estágios de tempo:

$$\xi_k = d_k - \bar{d}_k \quad (21a)$$

Onde a diferença entre a variável e o valor nominal é substituída pela variável positiva  $\xi_k$ .

Assim, a formulação equivalente é dada:

$$\sum_{k \in \Omega_b} \frac{\xi_k^+ + \xi_k^-}{\hat{d}_k} \leq \Delta \quad (21b)$$

$$\xi_k = d_k - \bar{d}_k \quad (21c)$$

$$\xi_k = \xi_k^+ - \xi_k^- \quad (21d)$$

$$\bar{d}_k - \hat{d}_k \leq d_k \leq \bar{d}_k + \hat{d}_k \quad (21e)$$

$$\xi_k^+ \geq 0, \xi_k^- \geq 0 \quad (21f)$$

As restrições equivalentes do valor absoluto devem ser acrescentadas ao modelo de otimização robusta apresentado anteriormente. A formulação do problema, entretanto, ainda apresenta uma não linearidade, sendo sugerido o algoritmo da decomposição de Benders para tratar essa situação.

#### 4.5 MODELO DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA E A DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

A decomposição de Benders, como já apresentado, divide o problema de otimização em dois níveis: mestre e subproblema. Dessa forma, a solução obtida em um nível é passada para o outro até que seja obtido um valor aceitável entre a diferença dos limitantes. Com isso, a formulação utilizando otimização robusta apresentada, pode ser dividida nestes dois estágios, em que o mestre tem a seguinte formulação:

$$\min_{x, \alpha} c^T x + \alpha \quad (22a)$$

$$\text{s.a: } \alpha \geq \lambda_l^T (Ax - g) - \varphi_l^T h + \eta^T d_l, \quad \forall l \leq L \quad (22b)$$

$$Fx \leq f \quad (22c)$$

Nota-se que os valores de  $\lambda_l^T$ ,  $\varphi_l^T$ ,  $d_l$  estão fixos para cada iteração  $l$ . Estes valores são obtidos do subproblema ou, para o caso da inicialização, valores de entrada.

A formulação do subproblema, considerando os equivalentes lineares apresentados nas sessões anteriores, é a seguinte:

$$R(x_k) = \max_{d, \varphi, \lambda, \eta} \lambda^T (Ax_k - g) - \varphi^T h + \sum_k \sum_j \varepsilon_{j,k} \delta_{j,k} d_k^{max} \quad (23a)$$

$$\text{s.a: } -\lambda^T B - \varphi^T H + \eta^T I_u = b^T \quad (23b)$$

$$d_k = \sum_j b_{j,k} \delta_{j,k} d_k^{max} \quad (23c)$$

$$\sum_{k \in \Omega_b} \frac{\xi_k^+ + \xi_k^-}{\hat{d}_k} \leq \Delta \quad (23d)$$

$$\xi_k = d_k - \bar{d}_k \quad (23e)$$

$$\xi_k = \xi_k^+ - \xi_k^- \quad (23f)$$

$$\bar{d}_k - \hat{d}_k \leq d_k \leq \bar{d}_k + \hat{d}_k \quad (23g)$$

$$-M_d(1 - b_{j,k}) \leq \varepsilon_{j,k} - \eta_k \leq M_d(1 - b_{j,k}) \quad (23h)$$

$$-M_d b_{j,k} \leq \varepsilon_{j,k} \leq M_d b_{j,k} \quad (23i)$$

$$\varphi \geq 0, \lambda \geq 0, \xi_k^+ \geq 0, \xi_k^- \geq 0 \quad (23j)$$

Em que o valor de  $x_k$  é fixo para cada iteração  $k$  do problema.

O conjunto da formulação do problema mestre (22) e do subproblema (23) forma o modelo sugerido de otimização robusta utilizando a decomposição de Benders como estratégia de solução.

Este modelo inicial não foi completamente implementado neste trabalho. Para verificar o seu comportamento, foram realizados testes separados nas etapas de desenvolvimento utilizando o sistema de três barras apresentado na seção 4.1.

#### 4.6 TESTES E RESULTADOS

Este modelo inicial utilizando otimização robusta não foi completamente implementado neste trabalho. Por isso, para verificar o seu funcionamento, foram realizados testes em parte da formulação utilizando o sistema de três barras apresentado na seção 4.1. Para isso, foram definidos os parâmetros:

**Tabela 4.1 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema de três barras.**

Ramo (km)	$n_{0_{km}}^t$	$\bar{f}_{km}$ (MW)	$re_{km}$ (pu)	$\bar{n}_{km}^t$	$Ci_{km}^t$ ( $10^3$ x R\$)
1-2	1	10	0,4	2	5.000,00
1-3	1	8	0,6	2	6.000,00
2-3	1	10	0,2	2	3.000,00

Nota-se, pela Tabela , que há a possibilidade de construção de dois circuitos por ramo do sistema, cujo custo da linha no ramo 1-2 é de R\$ 5.000.000,00; no ramo 1-3 é R\$ 6.000.000,00 e no ramo 2-3 é de R\$ 3.000.000,00. Além disso, foi considerado apenas um estágio de tempo para investimento.

Também é necessário definir os valores do sistema de geração, demanda nominal e desvio da demanda, já que se trata do modelo utilizando otimização robusta.

**Tabela 4.2 - Parâmetros referentes às barras do sistema.**

Barra (k)	Demanda Nominal $\bar{d}_k$ (MW)	Desvio $\hat{d}_k$ (MW)	Geração Máxima (MW)
1	-	-	30
2	-	-	-
3	25	2,5	-

Assim, com os parâmetros sistêmicos definidos, foi realizado o teste na formulação do subproblema isoladamente para avaliar as formulações equivalentes propostas e o comportamento da função objetivo. Para isso, o valor inicial da variável binária  $x$  de instalação do sistema foi definido como  $w_{km,y} = 1$ , para todos os circuitos de cada ramo do sistema. Todas as avaliações foram realizadas a partir de sucessivas simulações em que o valor do máximo desvio permitido  $\Delta$  foi alterado de forma crescente.

**Tabela 4.3 - Frações utilizadas para discretização.**

Frações para discretização ( $\delta_{j,k}$ )			
$j = 1, \dots 8$	$j = 9, \dots 14$	$j = 15, \dots 18$	$j = 19 \text{ e } 20$
0,1	0,05	0,01	0,001

Para a discretização da demanda, foi criado um conjunto  $j$  composto por vinte elementos e, definidos os parâmetros:  $\delta_{j,k}$  composto por frações (apresentado na Tabela ) que multiplicarão a demanda máxima ( $d_k^{max}$ ) definida como 25MW. É esperado que as variáveis binárias ( $b_{j,k}$ ) alterem os seus valores para obter a demanda definida a cada caso (de acordo com o máximo desvio  $\Delta$  permitido).

Do tratamento da incerteza da demanda, o qual também passou por um processo de linearização, espera-se que o valor da demanda seja ajustado também de acordo com o valor de  $\Delta$ . Pela maximização do problema, quanto maior o valor do desvio máximo permitido, maior será o valor da demanda, até que atinja seu limite ( $d_k \leq \hat{d}_k + \bar{d}_k$ ).

Por fim, a avaliação da formulação do subproblema de uma forma geral, espera-se que o valor da função objetivo aumente à medida que o máximo desvio permitido permita uma maior folga ao sistema, ou seja, quando  $\Delta$  tiver valores maiores.

Assim, foram obtidos os seguintes resultados a partir dos testes realizados:

**Tabela 4.4 - Resultados referentes ao subproblema.**

Máximo Desvio Permitido ( $\Delta$ )	Função Objetivo do Subproblema R(x)	Demanda $d_3$ (MW)
0	39,91	25,0
0,20	39,94	25,5
0,40	39,96	26,0
0,50	39,97	26,1
0,75	39,99	26,6
1,00	40,02	27,5

Como esperado, o aumento do valor do desvio permitido resulta na função objetivo com valores crescentes. Isso ocorre devido à condição de folga que o  $\Delta$  permite ao sistema associada à maximização dos termos do problema. Além disso, a demanda verificada (apenas na barra 3 devido ao sistema) também aumenta gradativamente, até que, para  $\Delta = 1$ , atinge o seu valor máximo, definido pela soma do valor nominal e desvio da demanda.

As restrições de discretização da demanda também foram verificadas e, para ilustrar, apresentam-se os valores indicados no programa para o caso em que  $\Delta = 1$ :

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_{11} = b_{12} = b_{13} = 1 \quad (24a)$$

Pela Tabela , é calculado o seguinte valor para a demanda:

$$d_k = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2,5 = 27,5 \text{ MW} \quad (24b)$$

Os testes realizados, apesar de iniciais, mostram características importantes do modelo utilizando otimização robusta. Essas verificações fundamentam alguns aspectos base desta modelagem e, após aperfeiçoamento, podem trazer resultados positivos para a área de estudo de planejamento de expansão da transmissão.

Neste trabalho também foi implementado o algoritmo da decomposição de Benders no GAMS. Entretanto, para que todo o modelo possa ser implementado completamente, são necessários ajustes nos parâmetros e esta etapa não pôde ser realizada.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 CONCLUSÃO

Os modelos de planejamento de expansão de sistemas de transmissão são ferramentas que auxiliam na tomada de decisão sobre investimentos a serem realizados. Para isso, consideram atender às condições sistêmicas de forma contínua ao menor custo de investimento e operativo possível.

Há muitos estudos na área, utilizando diferentes modelos e técnicas de solução de acordo com a abordagem definida. Dentre as formulações, o modelo linear disjuntivo se destaca por utilizar a programação linear, simplificando na parte da solução. Entretanto, por essa simplificação, o número de variáveis do problema aumenta significativamente e, conseqüentemente, o esforço computacional necessário para obter a solução é significativo.

Neste trabalho, foi apresentado um modelo determinístico de planejamento de expansão da transmissão multiestágio, em que é considerada a minimização dos custos de investimento e de operação. Dessa forma, foram apresentados resultados utilizando o sistema Garver de 6 barras em três situações de orçamento: sem limitação orçamentária, limitando o orçamento total e limitando o orçamento a cada estágio. Com isso, foi verificado que o modelo visa sempre atender a demanda por completo, minimizando o custo, porém, quando não há orçamento suficiente, a solução indicará, a partir da realidade financeira estabelecida, a construção das linhas visando minimizar o corte de carga.

Em seguida, baseado no modelo determinístico, foi apresentado o modelo estocástico, em que três cenários de demanda foram considerados com suas respectivas probabilidades de ocorrência. Também foram consideradas variações no orçamento disponível semelhantes ao caso determinístico. A principal diferença é que, para o caso estocástico, todos os cenários são considerados e, portanto, a minimização do corte de carga considera cada possibilidade e o investimento é feito visando atender de forma ótima as demandas possíveis.

Como todos os cenários são levados em consideração na solução do plano, o número de variáveis existentes no modelo estocástico aumenta drasticamente. Este é um problema que essa abordagem apresenta, pois ao considerar diferentes possibilidades, o esforço computacional exigido é muito maior e, à medida que o número de cenários ou o sistema considerado crescem, mais será exigido na hora de solucionar o problema.

Visando diminuir o esforço computacional necessário para a solução do problema, foi sugerido um modelo inicial utilizando otimização robusta. Esse modelo, entretanto, possui

não linearidades que precisam ser tratadas antes que possa ser utilizado. Com isso, neste trabalho foram desenvolvidas formulações lineares equivalentes. Também foi proposta a estratégia de solução utilizando decomposição de Benders.

A formulação proposta, não pôde ser verificada em relação à quantidade de variáveis e restrições necessárias para solução do sistema. Entretanto, é esperado que a formulação utilizando otimização robusta não cresça “explosivamente” quando considerada a incerteza, pois não são acrescentados cenários a cada restrição do problema.

Os testes no modelo de otimização robusta não utilizaram a formulação completa devido à necessidade de ajustes nos parâmetros. Entretanto, foram feitas verificações nas formulações propostas para as não linearidades e na formulação do subproblema da decomposição de Benders. Assim, foram realizados avanços para que essa abordagem seja utilizada no estudo do planejamento de expansão de redes de transmissão.

## **5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Como apresentado na conclusão, há a possibilidade de continuidade e aprofundamento nos temas desenvolvidos neste trabalho. Em especial:

- Dar continuidade a formulação proposta de planejamento utilizando otimização robusta. Realizando testes com o modelo completo em sistemas de maior porte e verificando o esforço computacional necessário para obter a solução;
- Aplicação dos modelos determinístico e estocástico para sistemas de médio e grande porte, verificando a necessidade de técnicas de solução diferentes;
- Considerar a entrada de novas fontes de geração de energia e suas variações de acordo ao longo do tempo para a tomada de decisão;
- Aplicação dos modelos propostos para sistemas que envolvam o acoplamento entre a transmissão e distribuição.
- Acrescentar a possibilidade de substituição de equipamentos no modelo estocástico.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEEL, Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Interligado Nacional – PRODIST, Módulo 2, Planejamento da Expansão dos Sistemas de Distribuição, Disponível em [www.aneel.gov.br/prodist](http://www.aneel.gov.br/prodist), 2015.

Bahiense, L., Oliveira, G. C., Pereira, M., & Granville, S. A mixed integer disjunctive model for transmission network expansion. *IEEE Transactions on Power Systems*, pp. 560-565, Agosto 2001.

Benders, J. F. Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems. *Numerische Mathematik*, pp. 238-252, 1962.

Bertsimas, D., Litvinov, E., Sun, X. A., Zhao, J., & Zheng, T. Adaptive robust optimization for the security constrained unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, pp. 52-63, Fevereiro 2013.

Binato, S. Expansão ótima de sistemas de transmissão através de decomposição de benders e técnicas de planos cortantes. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia - COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

Cascalho, J. D. Modelo de Planejamento da expansão das redes de alta e média tensão de distribuição de energia elétrica considerando critérios econômicos de desempenho. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, 2015.

Escobar, A. H., Romero, R., & Gallego, R. A. Transmission network expansion planning considering multiple generation scenarios. *IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition*, 2008.

Frontin, S. O. (Coordenador). Prospecção e hierarquização de inovações tecnológicas aplicadas a linhas de transmissão. Goya, 2010.

Garcés Negrete, L. P. Planejamento da expansão de sistemas de transmissão considerando análise de confiabilidade e incertezas na demanda futura. Universidade Estadual Paulista, 2010.

Garver, L. L. Transmission network estimation using linear programming. IEEE Transactions on Power Applications and Systems, Outubro 1970.

Gomes, R. (Organizador). A Gestão do Sistema de Transmissão do Brasil. FGV, 2012.

Kalvelagen, E. Benders decomposition with GAMS. Disponível em: <http://amsterdamoptimization.com/pdf/benders.pdf>, 2005.

Latorre, G., Cruz, R., Areiza, J., & Villegas, A. Classification of publications and models on transmission expansion planning. IEEE Transactions on Power Systems, 938-946, 2003.

Lee, C., NG, S., Zhong, J., & Wu, F. Transmission expansion planning from past to future. IEEE PES Power Systems Conference and Exposition, 2006.

Oliveira, G. C., Binato, S., Pereira, M. V., & Thomé, L. M. Multi-stage transmission expansion planning considering multiple dispatches and contingency criterion. Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2004), Setembro 2004.

ONS, Institucional. “O Setor Elétrico”. Disponível em [www.ons.org.br](http://www.ons.org.br).

Rahmani, M., Romero, R., & Rider, M. Strategies to reduce the number of variables and the combinatorial search of multistage transmission expansion planning problem. IEEE Transactions on Power Systems, Agosto 2013.

Rahmani, M., Romero, R., & Rider, M. J. Efficient method for AC transmission network expansion planning. Elect. Power Syst Res., 1056-1064, 2010.

Rider, M. J. Planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando os modelos CC – CA e técnicas de programação não-linear. Universidade Estadual de Campinas, 2006.

Rider, M. J., Garcia, A. V., & Romero, R. Power system transmission network expansion planning using AC model. IET Gen., Transm., Distrib., 731-742, 2007.

Romero, R. A. Planejamento a longo prazo da expansão de sistemas de transmissão de energia elétrica. Ilha Solteira: Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 1999.

Silva, E. F. Planejamento estocástico da expansão da rede de transmissão de energia elétrica multiestágio considerando restrições de segurança. Universidade Estadual de São Paulo, 2013.



Vinasco, G., Rider, M. J., & Romero, R. A strategy to solve the multistage transmission expansion planning problem. IEEE Transactions on Power Systems, Novembro, 2011.

Zhao, Y. Generalized Benders decomposition (GBD). Disponível em: [https://optimization.mccormick.northwestern.edu/index.php/Generalized\\_Benders\\_decomposition\\_\(GBD\)](https://optimization.mccormick.northwestern.edu/index.php/Generalized_Benders_decomposition_(GBD)), 2015.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A. DADOS DO SISTEMA GARVER

Apresenta-se na Tabela os dados gerais de entrada do sistema Garver utilizados para os modelos determinístico e estocástico.

**Tabela A.1 - Parâmetros referentes aos ramos do sistema.**

Ramo (km)	$n_{0_{km}}^t$	$\bar{f}_{km}$ (MW)	$re_{km}$ (pu)	$\bar{n}_{km}^t$			$Ci_{km}^t$ (\$ x 10 <sup>6</sup> )		
				t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
1-2	1	10	0,4	1	1	1	5,00	5,10	5,22
1-4	1	8	0,6	1	1	1	6,00	6,30	6,62
1-5	1	10	0,2	1	1	1	3,00	3,15	3,31
2-3	1	10	0,2	1	1	1	2,80	2,90	2,95
2-4	1	10	0,4	1	1	1	4,00	4,20	4,41
2-6	0	10	0,3	2	1	1	3,80	3,95	4,05
3-5	1	10	0,2	1	1	1	2,70	2,85	2,95
4-6	0	10	0,3	1	1	1	3,50	3,55	3,60

Esses valores são parâmetros de entrada referentes às informações do sistema e foram utilizados tanto para o caso determinístico quanto para o caso estocástico.

## APÊNDICE A.1 DADOS SISTÊMICOS PARA O CASO DETERMINÍSTICO

Para os testes realizados no modelo determinístico, foram utilizados os seguintes valores de demanda e geração:

**Tabela A.2 - Parâmetros referentes às barras do sistema no caso determinístico**

Barra (k)	Demanda (MW)			Geração Máxima (MW)		
	t = 1	t = 2	t = 3	t = 1	t = 2	t = 3
1	4	4,2	4,4	10	12	12,1
2	-	-	-	-	-	-
3	2	2,1	5	-	-	-
4	8	8,4	10	-	-	-
5	12	15,4	20	-	-	-
6	-	-	-	40	42	46
Por Período	26	30,1	39,4	50	54	58,1
Total	95,5			162,1		

Nota-se que, como foi mencionado no trabalho, os valores da demanda são conhecidos e seguem uma crescente em relação aos estágios de tempo.

## APÊNDICE A.2 DADOS SISTÊMICOS PARA O CASO ESTOCÁSTICO

Para os testes realizados no modelo estocástico, foram utilizados os seguintes valores de demanda nos cenários e geração:

**Tabela A.3 - Parâmetros referentes às barras do sistema no caso estocástico**

Barra (k)	Demanda (MW)									Geração Máxima (MW)		
	S = 1			S = 2			S = 3			t = 1	t = 2	t = 3
	t = 1	t = 2	t = 3	t = 1	t = 2	t = 3	t = 1	t = 2	t = 3			
1	4	4,2	4,4	3	3,2	3,4	7	7,2	7,4	10	12	12,1
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	2	2,1	5	1,5	2,1	3,5	3	3,1	4	-	-	-
4	8	8,4	10	9	11	12	2	2,4	2,8	-	-	-
5	12	15,4	20	10	12,4	13	10	22	30	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	40	42	46
Por Período	26	30,1	39,4	23,5	28,7	31,9	22	34,7	44,2	50	54	58,1
Total	95,5			84,1			100,9			162,1		

Nota-se que, para esse caso, há três cenários distintos com valores de demanda diferentes. O cenário 2 é o que possui valores menores de demanda e, em oposição, o cenário 3 apresenta uma situação com valores críticos.

## APÊNDICE B. IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES

Serão apresentadas as matrizes identificadas pela ordem das restrições apresentadas em (9). As matrizes da restrição  $Fx \leq f$  (9b) são as seguintes:

$$F = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \\ 1 & & & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Nota-se que, por F estar associado a variável x que já tem sua dimensão, essa matriz identificada também terá ( $nr.nc$ ) colunas, enquanto o número de linhas está associado à quantidade de restrições do problema que, nesse caso, pode ser representado por ( $nr + nb$ ). Assim, F tem dimensão ( $nr + nb$ ) $\times$ ( $nr.nc$ ), em que  $nr$  é o número de ramos do sistema,  $nb$  é o número de barras e  $nc$  o número de circuitos.



A matriz  $H$  apresentada tem dimensão multiplica diretamente a variável  $z$  e por isso, sua dimensão é  $(8.nb + nr.nc) \times (3.nb + nr.nc + nr)$ .

A matriz  $h$ , tem dimensão  $(8.nb + nr) \times 1$  :

$$h = \begin{array}{|c} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \bar{G}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \\ n_{012} \bar{f}_{012} \\ n_{013} \bar{f}_{013} \\ n_{023} \bar{f}_{023} \\ n_{012} \bar{f}_{012} \\ n_{013} \bar{f}_{013} \\ n_{023} \bar{f}_{023} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Essas matrizes identificadas são referentes às restrições de limite de geração, limite de corte de carga, máximo ângulo de fase e limite de fluxo de potência no caso base. Todas só possuem variáveis contínuas.

Seguindo o mesmo padrão de identificação, as matrizes da restrição  $Ax + Bz \leq g$  estão apresentadas a seguir:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline b_{12}M & & & & & \\ \hline & b_{13}M & & & & \\ \hline & & b_{23}M & & & \\ \hline & & & b_{12}M & & \\ \hline & & & & b_{13}M & \\ \hline & & & & & b_{23}M \\ \hline b_{12}M & & & & & \\ \hline & b_{13}M & & & & \\ \hline & & b_{23}M & & & \\ \hline & & & b_{12}M & & \\ \hline & & & & b_{13}M & \\ \hline & & & & & b_{23}M \\ \hline -\bar{f}_{12} & & & & & \\ \hline & -\bar{f}_{13} & & & & \\ \hline & & -\bar{f}_{23} & & & \\ \hline & & & -\bar{f}_{12} & & \\ \hline & & & & -\bar{f}_{13} & \\ \hline & & & & & -\bar{f}_{23} \\ \hline \bar{f}_{12} & & & & & \\ \hline & \bar{f}_{13} & & & & \\ \hline & & \bar{f}_{23} & & & \\ \hline & & & \bar{f}_{12} & & \\ \hline & & & & \bar{f}_{13} & \\ \hline & & & & & \bar{f}_{23} \\ \hline \end{array}$$

A matriz A tem dimensão  $(4.nr.nc) \times (nr.nc)$  e é referente à parte que contém variáveis binárias das restrição.

$B =$

				$b_{12}$	$-b_{12}$		1								
				$b_{13}$		$-b_{13}$		1							
					$b_{23}$	$-b_{23}$			1						
				$b_{12}$	$-b_{12}$					1					
				$b_{13}$		$-b_{13}$					1				
					$b_{23}$	$-b_{23}$						1			
				$b_{12}$	$-b_{12}$		-1								
				$b_{13}$		$-b_{13}$		-1							
					$b_{23}$	$-b_{23}$			-1						
				$b_{12}$	$-b_{12}$					-1					
				$b_{13}$		$-b_{13}$					-1				
					$b_{23}$	$-b_{23}$						-1			
							1								
								1							
									1						
										1					
											1				
												1			
								-1							
									-1						
										-1					
											-1				
												-1			
													-1		
														-1	

A matriz  $B$  tem dimensão  $(4.nr.nc) \times (3.nb + nr.nc + nr)$  e é referente às variáveis contínuas da restrição.

$$g = \begin{array}{|c|} \hline b_{12}M \\ \hline b_{13}M \\ \hline b_{23}M \\ \hline b_{12}M \\ \hline b_{13}M \\ \hline b_{23}M \\ \hline b_{12}M \\ \hline b_{13}M \\ \hline b_{23}M \\ \hline b_{12}M \\ \hline b_{13}M \\ \hline b_{23}M \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

A matriz de parâmetros  $g$ , tem a dimensão dada por  $(4.nr.nc) \times 1$ .

Por fim, a identificação da matriz  $I_u$  referente à restrição  $I_u z = \bar{d}$ :

$$I_u = \begin{array}{|cccccccccccccccc|} \hline 1 & & & & 1 & & & & & & -1 & -1 & & & -1 & -1 & & & -1 & -1 & & & \\ \hline & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & -1 & 1 & & & -1 & 1 & & & -1 & & & \\ \hline & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Essa matriz é referente à restrição que contém o termo incerto e tem dimensão  $(3.nb) \times (3.nb + nr.nc + nr)$ .