

**PROJETO DE GRADUAÇÃO**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO  
DE UM FLUIDO MAGNÉTICO: UMA  
PROPOSTA DE ALGORITMO**

Por,

**Ciro Fraga Alegretti**

**Brasília, 6 de julho de 2016**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO  
DE UM FLUIDO MAGNÉTICO: UMA  
PROPOSTA DE ALGORITMO**

Por,  
**Ciro Fraga Alegretti**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

**Banca Examinadora**

Prof. Rafael Gabler Gontijo, DSc. (ENM-UnB) \_\_\_\_\_

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, PhD. (ENM-UnB) \_\_\_\_\_

Prof. Sara Malvar Mauá, MSc (UDF) \_\_\_\_\_

Brasília 6 de julho de 2016

# Resumo

Um programa em linguagem Python foi desenvolvido utilizando o Método das Diferenças Finitas. Este programa será implementado na simulação do escoamento de um fluido magnético sujeito a uma expansão abrupta. Um estudo teórico será conduzido visando a futura implementação de termos magnéticos às equações governantes. Neste problema clássico da Mecânica dos Fluidos postula-se que a presença de efeitos magnéticos possui o potencial de prover grandes alterações nos padrões do escoamento recirculante, inclusive com possibilidade de controle desta região. Esta possibilidade de controle de descolamento de camada limite forçado por uma expansão abrupta para um escoamento em baixo número de Reynolds de um fluido magnético será explorada em um estudo futuro. Foi conduzido um estudo acerca da efetividade e custo computacional associado à implementação do problema em estudo. Estratégias numéricas são propostas para otimização da solução deste problemas.

**Palavras-chave:** Ferrohidrodinâmica, Fluidos magnéticos, Expansão abrupta, Gradiente adverso de pressão, tensor de Maxwell, Métodos das Diferenças Finitas, Descolamento de camada limite.

# Abstract

A code in Python was be written using the Finite Differences Method differencing method. The code will be implemented on a ferrofluid flow subjected to a one-way sudden expansion simulation. A study was be conduced regarding the magnetic effects to be implemented to the governing equations. The potential of the magnetic effects to promote strong impacts on the recirculating flow patterns, including its controll, is postulated. The geometry-driven boundary layer detachment controll at low Reynolds numbers in a ferrofluid flow will be investigated in a future study. The effectiveness and computational cost of the developed code will be investigated and new numeric approaches will be proposed, aiming code optimization.

**Key-words:** Ferrohydrodynamics, Ferrofluids, Abrupt expansion, Sudden expansion, Adverse pressure gradient, Maxwell stress tensor, Finite Differences Method, Boundary layer detachment.

# Lista de Figuras

Figura 1.1 – Esquema representativo da colisão elástica entre duas partículas revestidas com uma camada molecular de um dispersante . . . . .	1
Figura 1.2 – Ilustração do descolamento de camada limite provocado pela geometria, e neste caso pelo alto número de Reynolds ( $Re_L \approx 10000$ ), em um escoamento axisimétrico (Dyke (1982)) . . . . .	3
Figura 1.3 – Descrição do problema - Controle de intensidade das zonas de recirculação após a expansão do canal por meio da aplicação de campos magnéticos $H_y$ . . . . .	3
Figura 3.1 – A magnetização gradual de uma suspensão magnética - A figura 3.1a representa a ausência de campo magnético aplicado e de magnetização líquida da suspensão. A figura 3.1b representa um campo magnético aplicado de baixa intensidade e magnetização parcial da suspensão. A figura 3.1c denota o alinhamento total dos momentos magnéticos das partículas e a suspensão atinge sua magnetização de saturação . . . . .	9
Figura 3.2 – Esquema representativo da relação entre o tempo de relaxação magnética característico e a rotação do momento de dipolo magnético de uma partícula . . . . .	12
Figura 3.3 – Esquema representativo das interfaces entre os meios, em que $\mu_0$ é a permeabilidade magnética do ar (i.e. aproximadamente igual à permeabilidade magnética do vácuo), presente entre o ímã e o duto, $\mu_1$ e $\mu_2$ a permeabilidade magnética do canal e do fluido magnético, respectivamente. . . . .	13
Figura 3.4 – Análise da continuidade das condições de contorno em um volume infinitesimal $\delta V$ e uma curva fechada $L$ , ambos sobre a interface entre os meios em análise. . . . .	13
Figura 3.5 – Coordenadas referentes à solução do campo magnético gerado por um ímã retangular permanente de polaridade uniforme . . . . .	15
Figura 3.6 – Torque atuante em uma partícula magnética de magnetização $\mathbf{m}$ imersa em um campo magnético aplicado $\mathbf{H}$ . . . . .	23

Figura 3.7 – Comparativo entre possíveis direções para a aplicação do campo magnético externo e suas implicações . . . . .	23
Figura 3.8 – Esquema representativo do volume $\delta V$ da média volumétrica com posição $\mathbf{x}$ fixa e uma coordenada de varredura interna $\mathbf{y}$ em um volume infinitesimal $\delta V$ de uma suspensão de partículas magnéticas com um momento magnético $\mathbf{m}$ associado. . . . .	32
Figura 3.9 – Gontijo e Cunha (2015): A magnetização de equilíbrio em função de $\alpha$ para $\phi = 0.05$ e $\lambda = 1.0$ . A linha contínua representa o modelo de Langevin $\mathcal{O}(\phi)$ , a linha pontilhada e os quadrados representam os modelo $\mathcal{O}(\phi^2)$ e $\mathcal{O}(\phi^3)$ de Ivanov e Kuznetsova (2002), respectivamente. Por último, os pontos pretos representam os resultados numéricos, desconsiderando a periodicidade para interações magnéticas, de Gontijo e Cunha (2015). Em detalhe estão plotados os valores de magnetização de equilíbrio para pequenos valores de $\alpha$ , com a solução assintótica para $\alpha \ll 1$ : $M_0/\phi M_d = \alpha/3$ em um regime paramagnético . . . . .	36
Figura 3.10 – Determinação de uma expressão para equação evolutiva fenomenológica do campo de magnetização do escoamento de um fluido magnético, submetido à um campo aplicado, em termos do tempo de relaxação magnética equivalente . . . . .	39
Figura 4.1 – A figura 4.1a representa o domínio de cálculo neste exemplo da solução da equação do calor sem geração pelo método das diferenças finitas. A figura 4.1b mostra a discretização do domínio de cálculo em uma malha de 4096 nós. . . . .	42
Figura 4.2 – Ampliação de um nó interno em uma malha bidimensional . . . . .	42
Figura 4.3 – Malha de cálculo com dimensões representadas para especificação das condições de contorno, definição de escalas típicas e adimensionalização das condições de contorno. $H$ é a altura do canal após a expansão, $h$ é a altura do degrau, $i$ é a altura da seção de entrada do escoamento e $L$ é o comprimento do canal . . . . .	57
Figura 4.4 – Representação do domínio de cálculo. Nós de contorno estão representados pela linha tracejada e serão escritas as equações para as regiões 1 a 9, de acordo com o número e posição de nós vizinhos determinados pelas condições de contorno do problema. As regiões 1,2,3 e 4 são compostas por apenas um nó. . . . .	60
Figura 4.5 – Descrição do avanço das iterações em um esquema explícito de solução. . . . .	64
Figura 5.1 – Resultado da simulação: $Re = 50, dx = 0.01, dy = 0.02, dt = 1, 5 \times 10^{-4}$ . Plot das linhas de corrente e campo de vorticidade. Ponto de recolamento $Xr = 0.8$ . . . . .	68
Figura 5.2 – Resultado da simulação: $Re = 100, dx = 0.01, dy = 0.02, dt = 3, 0 \times 10^{-4}$ . Plot das linhas de corrente e campo de vorticidade. Ponto de recolamento $Xr = 2.0$ . . . . .	69

Figura 5.4 – Resultados obtidos por Iwai et al. (2000). $Xr/S$ representa a razão entre a coordenada do ponto de recolamento do escoamento após a expansão e o tamanho de degrau. . . . .	70
Figura 5.5 – Resultados obtidos por Kalita e Gupta (2010). $2X/L$ representa a razão entre duas vezes a coordenada do ponto de recolamento do escoamento após a expansão e a altura do duto após a expansão (i.e.: duas vezes a altura do degrau). . . . .	70
Figura 5.6 – Ampliação do canto inferior esquerdo da figura 5.2 - Detalhamento do ruído numérico presente no resultado obtido . . . . .	71
Figura 5.7 – Simulações feitas para diferentes comprimentos de malha. $Re = 100$ , $dx = dy = 0.02$ , erro = $10^{-4}$ e $dt = 1,2 \times 10^{-3}$ . . . . .	72
Figura 5.8 – Ilustração da interpolação de uma malha de cálculo homogênea, resultando em uma malha computacional localmente refinada para $y(x) \approx 0$ . . . . .	73

# Lista de símbolos

$\nabla$	Operador gradiente.
$\nabla \cdot$	Operador divergente.
$\nabla \times$	Operador rotacional.
$\nabla^2$	Operador Laplaciano.
$\mathbf{E}$	Campo elétrico.
$\mathbf{B}$	Campo magnético induzido, indução magnética.
$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial em relação ao tempo.
$\mathbf{H}$	Campo magnético aplicado.
$\mathbf{J}_f$	Densidade de corrente livre.
$\mathbf{D}$	Deslocamento elétrico.
$\rho_f$	Densidade de cargas elétricas livres.
$\mathbf{F}$	Densidade local de força aparente em uma nuvem de dipolos.
$\mu_0$	Permeabilidade magnética no vácuo.
$\mathbf{M}$	Magnetização do meio.
$K$	Constante de anisotropia material.
$\tau_B$	Tempo de relaxação de magnética Browniano.
$\tau_N$	Tempo de relaxação de magnética de Néel.
$k$	Constante de Boltzmann.
$\tau_{eq}$	Tempo de relaxação magnética equivalente
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões.
$\underline{\underline{\sigma}}^T$	Tensor de tensões transposto.



$\underline{\underline{\sigma}}^N$	Parcela Newtoniana do tensor de tensões.
$\underline{\underline{\sigma}}^M$	Parcela magnética do tensor de tensões.
$\rho_V$	Densidade de pólos magnéticos.
$\mathbf{F}$	Densidade local de força aparente magnética.
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	Matriz identidade.
$\mathbf{D}$	Tensor taxa de deformação.
$\delta$	Operador Delta de Kronecker.
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Operador de Levi-Civita.
$p$	Campo de pressão de origem mecânica.
$p_m$	Campo de pressão de origem magnética.
$\mathbf{u}$	Campo de velocidade euleriano.
$\rho$	Massa específica do fluido.
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material.
$\mathbf{g}$	Aceleração gravitacional.
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido.
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido.
$\underline{\underline{\sigma}}_{BH}^M$	Tensor de tensões magnético obtido pela formulação <b>BH</b> .
$\underline{\underline{\sigma}}_{HB}^M$	Tensor de tensões magnético obtido pela formulação <b>HB</b> .
$\mathbf{m}$	Momento de dipolo magnético de uma partícula.
$\boldsymbol{\tau}_m$	Torque magnético.
$\mathbf{L}$	Momento angular.
$\Sigma$	Somatório.
$\mathbf{T}$	Torque.
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor unitário normal à uma superfície arbitrária S.
$\hat{\mathbf{t}}$	Vetor unitário tangencial à um contorno arbitrária L.
$\boldsymbol{\xi}$	Campo de vorticidade.
$\psi$	Função de corrente.

$\langle \mathbf{m} \rangle$	Média volumétrica dos momentos de dipolo magnético distribuídos em um volume $\delta V$ .
$v_p$	Volume de uma partícula sólida magnética.
$\bar{\mathbf{m}}$	Média dos momentos de dipolo magnético.
$\phi$	Fração volumétrica de partículas suspensas.
$\mathbf{M}_0$	Magnetização de equilíbrio de uma suspensão de partículas magnéticas sujeita a um campo magnético aplicado.
$\mathbf{M}_s$	Magnetização de saturação de uma suspensão de partículas magnéticas sujeita a um campo magnético aplicado.
$\mathbf{M}_d$	Magnetização do material sólido que constitui as partículas suspensas em um fluido magnético.
$P_\theta$	Função densidade angular de probabilidade normalizada.
$\alpha$	Razão entre forças magnéticas e brownianas no modelo de Langevin de magnetização.
$\mathcal{L}(\alpha)$	Função Langevin.
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_m$	Tensor suscetibilidade magnética.
$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_m$	Tensor permeabilidade magnética.
$\chi_m$	Propriedade escalar suscetibilidade magnética.
$\lambda$	Razão entre forças magnéticas induzidas devido interação dipolo-dipolo e forças brownianas.
$\omega$	Velocidade de rotação do momento de dipolo magnético interno à partícula.
$Re$	Parâmetro físico adimensional Reynolds.
$Re_m$	Parâmetro físico adimensional Reynolds magnético.

# Sumário

	<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Fluidos Magnéticos</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Escoamento laminar sujeito a uma expansão abrupta</b>	<b>2</b>
	<b>2 OBJETIVOS</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>Objetivos Gerais</b>	<b>4</b>
<b>2.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>5</b>
	<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>6</b>
<b>3.1</b>	<b>Equações de Maxwell e limite magnetostático</b>	<b>6</b>
<b>3.2</b>	<b>Estudo do sistema de equações da FHD</b>	<b>7</b>
3.2.1	Conceitos Ferromagnéticos	7
3.2.2	Superparamagnetismo	8
3.2.3	Potencial Magnético	9
3.2.4	Relaxação Magnética	10
3.2.5	Condições de contorno magnéticas	12
3.2.5.1	Condição de contorno para B	13
3.2.5.2	Condição de contorno para H	14
<b>3.3</b>	<b>Tensor de tensões de Maxwell</b>	<b>16</b>
3.3.1	Objetividade das Equações Constitutivas	18
<b>3.4</b>	<b>Equação do Movimento para um Fluido Magnético</b>	<b>19</b>
3.4.1	Formulação BH	20
3.4.2	Formulação HB	21
3.4.3	Comparação entre formulações	21
<b>3.5</b>	<b>Estudo de efeitos de assimetria em Fluidos Polares</b>	<b>22</b>
<b>3.6</b>	<b>Equação da Vorticidade para um Fluido Magnético</b>	<b>26</b>
<b>3.7</b>	<b>Limite superparamagnético</b>	<b>28</b>
<b>3.8</b>	<b>Modelos de magnetização de equilíbrio de suspensões magnéticas</b>	<b>31</b>
<b>3.9</b>	<b>Desenvolvimento de uma equação evolutiva para a magnetização do meio</b>	<b>37</b>

<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA</b>	<b>41</b>
4.1	Método das diferenças finitas	41
4.2	Comparação entre formulações	45
4.3	Formulação Vorticidade-Função de corrente	46
4.4	Sumário do Sistema de equações	48
4.5	Parâmetros físicos da Ferrohodinâmica	49
4.6	Discretização das Equações Governantes pelo Método das Diferenças Finitas	53
4.7	Condições de contorno	57
4.7.1	Proposição de um perfil de velocidades na entrada do domínio de cálculo	58
4.7.2	Construção das matrizes	60
4.8	Proposta de algoritmo sequencial para solução do problema	64
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>68</b>
5.1	Regime puramente hidrodinâmico	68
5.1.1	Proposição de um perfil de velocidades parabólico	68
5.1.2	Comprimento da malha computacional	71
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>74</b>
<b>7</b>	<b>TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>77</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>82</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>91</b>
	<b>ANEXO A – IDENTIDADES VETORIAIS</b>	<b>92</b>
	<b>ANEXO B – IDENTIDADES TENSORIAIS</b>	<b>93</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Fluidos Magnéticos

Um fluido magnético consiste em uma suspensão coloidal estável de subdomínios de partículas magnéticas de escala nanométrica (3 - 15 nm) em um líquido carreador. As propriedades de tal solução são fortemente afetadas, tanto pelo movimento Browniano que mantém as partículas suspensas, quanto pela magnetização permanente de cada partícula subdomínio. Para que tal suspensão seja estável é necessária a adição de um anti-aglomerante à superfície das partículas, garantindo que as colisões partícula-partícula sejam elásticas, evitando a aglomeração e, conseqüentemente, sedimentação das mesmas.

A estabilidade de uma suspensão coloidal de subdomínios magnéticos deve ser garantida a fim de proporcionar ao material propriedades bem definidas, conferindo aplicabilidade e confiabilidade em âmbito industrial e em estudos científicos. Um fluido magnético é estável se tanto suas interações entre partículas, tais quais a magnética e as forças atrativas de van de Waals, quanto as influências externas, como campo magnético e gravitacional, forem consideradas na seleção de parâmetros da solução, como concentração e dimensão das partículas magnéticas, atendendo às condições de estabilidade e balanço energético da solução.

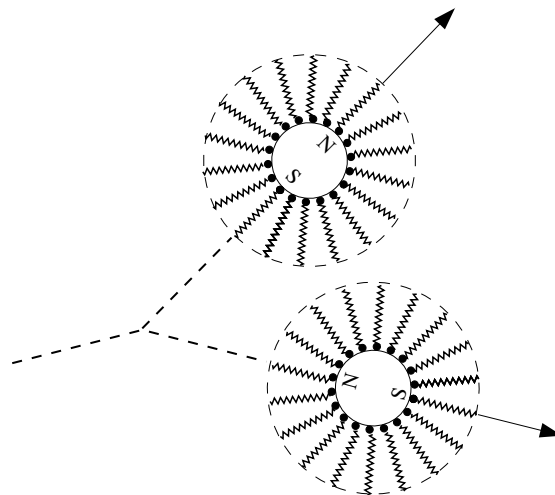


Figura 1.1 – Esquema representativo da colisão elástica entre duas partículas revestidas com uma camada molecular de um dispersante

A ferrohidrodinâmica é a área do estudo de fluidos não Newtonianos que tem como

base o estudo de escoamentos de fluidos magnéticos na presença de um campo magnético. Dessa forma, as equações fundamentais que governam a hidrodinâmica de fluidos magnéticos provém da combinação entre as equações de Maxwell do eletromagnetismo, simplificadas na ausência de cargas elétricas livres e condução de corrente elétrica, e as equações da dinâmica dos fluidos. Tal combinação resulta no acoplamento entre o movimento do fluido e sua interação com o campo magnético aplicado e será a base para análise proposta neste trabalho.

Fluidos magnéticos, atualmente, são amplamente utilizados em vedações de eixos rotativos (Raj (1982)), sistemas de amortecimento inteligentes (Iglesias et al. (2014), Raj e Moskowitz (1980)), em sistemas de resfriamento de usinas nucleares (Rosensweig et al. (1965)), entre outros. Sendo um material inteligente, com propriedades controláveis, há uma variedade de aplicações em desenvolvimento, incluindo aplicações médicas como a concepção de uma válvula implantável para o alívio de glaucomas baseada em nanopartículas ferromagnéticas (Paschalis et al. (2013)) e a simulação do direcionamento magnético de medicamentos por via sanguínea (Gitter e Odenbach (2013)).

## 1.2 Escoamento laminar sujeito a uma expansão abrupta

Escoamentos sujeitos à expansões abruptas e outras mudanças repentinas de geometria descrevem muitos problemas em aplicações industriais (e.g. trocadores de calor, resfriadores de dispositivos eletrônicos e reatores nucleares) e tem sido objetivo de estudo para o desenvolvimento de técnicas de solução versáteis e determinação das relações entre os vários parâmetros que caracterizam a formação de áreas de recirculação para diferentes taxas de escoamento e coeficientes de expansão do canal.

Como uma alternativa à abordagem de solução do problema pelo método do acoplamento entre o campo de pressão e o campo de velocidade, será adotada a formulação vorticidade-função de corrente, implementada na simulação do escoamento de um fluido Newtoniano sujeito a uma expansão abrupta por Fletcher et al. (1985), Dağtekin e Ünsal (2011), utilizando o método das diferenças finitas para a solução das equações diferenciais parciais que governam o problema.

O escoamento laminar de fluidos Newtonianos sujeitos a mudanças abruptas de geometria são estudados de forma abrangente há décadas, tanto numericamente (Macagno e Hung (1967), Habib e Whitelaw (1982)), quanto experimentalmente (Khezzar et al. (1985), Back e Roschke (1972)), na determinação da perda de carga em tais escoamentos, e metodologias para minimizar perdas energéticas.

Simulações numéricas de controle da instabilidade, provocada por mudanças abruptas na geometria de um escoamento, foram realizadas por meio da injeção e sucção de fluido após a expansão Kaiktsis e Monkewitz (2003), e pela aplicação de campos magnéticos em escoamentos de fluidos magnéticos sujeitos a forças de Lorentz Mramor et al.

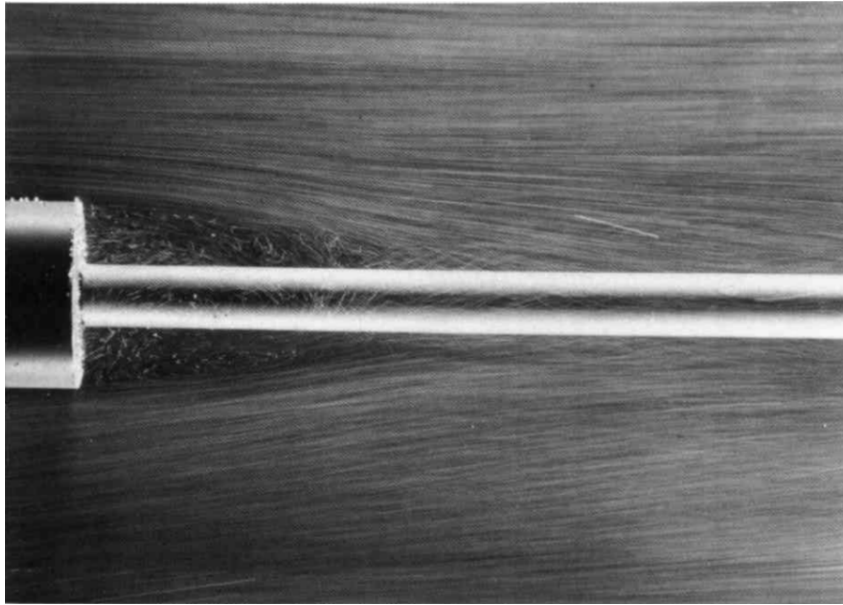


Figura 1.2 – Ilustração do descolamento de camada limite provocado pela geometria, e neste caso pelo alto número de Reynolds ( $Re_L \approx 10000$ ), em um escoamento axisimétrico (Dyke (1982))

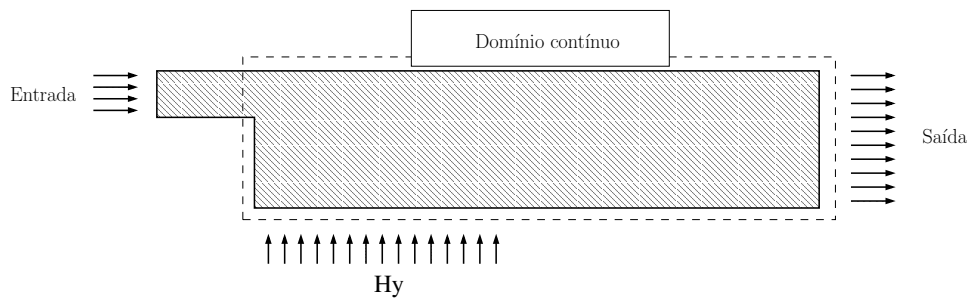


Figura 1.3 – Descrição do problema - Controle de intensidade das zonas de recirculação após a expansão do canal por meio da aplicação de campos magnéticos  $H_y$

(2014). Analogamente, a proposta deste trabalho é a simulação numérica do controle de intensidade das zonas de recirculação, geradas pela expansão abrupta no escoamento de um fluido magnético não condutor de corrente elétrica, por meio da aplicação de campos magnéticos após a expansão como exemplificado na figura 1.3.

O código a ser desenvolvido em Python será implementado no domínio contínuo, mostrado na figura 1.3, com discretização e condições de contorno que serão desenvolvidas no capítulo 4.

## 2 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho serão descritos inicialmente de forma sucinta na primeira seção deste capítulo, citando o ordenamento de análises e discussões necessárias a serem desenvolvidas, e na seção seguinte serão comentadas suas restrições e peculiaridades, para que seja obtida uma formulações bem posta e consiste do estudo numérico a ser conduzido na segunda etapa deste trabalho.

### 2.1 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo principal a investigação numérica do escoamento bidimensional de um fluido magnético sujeito a uma expansão abrupta unidirecional. Uma investigação teórica será conduzida visando a formulação de um escoamento de um fluido magnético sujeito a uma expansão abrupta, submetido a um campo magnético aplicado, e do consequente potencial teórico de controle da intensidade das zonas de recirculação provocadas pela geometria do escoamento. Para conduzir esta análise, serão discutidas, comparadas e interpretadas as diferentes formulações das condições de contorno dos campos escalares e vetoriais a serem determinados, os modelos de equações constitutivas existentes para um fluido magnético a partir das equações de Maxwell no limite magnetostático e as equações evolutivas de movimento e vorticidade resultantes. Serão estabelecidas também análises teóricas acerca dos modelos de magnetização de equilíbrio de uma suspensão coloidal de partículas magnéticas e das formulações para a equação evolutiva fenomenológica do campo de magnetização existentes. A formulação vorticidade-função corrente será desenvolvida e irá compor o sistema de equações a ser solucionado numericamente como alternativa ao método do acoplamento pressão-velocidade das equações governantes. Ao fim da discussão e determinação do conjunto de formulações a ser utilizado, um algoritmo sequencial será proposto para implementação e solução das equações governantes de uma análise Ferrohodinâmica, juntamente com as equações obtidas a partir da formulação vorticidade-função corrente de um meio magnetizável.



## 2.2 Objetivos Específicos

- **Definição das condições de contorno:** Escolha apropriada da formulação das condições de contorno para o campo indução magnética  $\mathbf{B}$  e campo aplicado  $\mathbf{H}$  a partir da solenoidade e irrotacionalidade dos campos, respectivamente, nas interfaces entre os meio que compõem o sistema físico em estudo e aplicação da solução do campo magnético gerado por um ímã permanente retangular obtida por MacCaig (1987);
- **Determinação do modelo de magnetização de equilíbrio que será adotado:** Estabelecer uma análise acerca da relevância da utilização neste estudo de correções de  $\mathcal{O}(\phi^2)$  e  $\mathcal{O}(\phi^3)$  propostas por Ivanov e Kuznetsova (2001) para modelo de Langevin, que negligencia interações magnéticas e hidrodinâmicas entre partículas, para a concentração  $\phi$  da solução magnética e razão de forças magnéticas e Brownianas  $\alpha$  características neste problema;
- **Escolha da formulação da equação evolutiva fenomenológica da magnetização do meio a ser utilizada:** Visando a concepção de uma investigação numérica consistente, serão comparadas as formulações propostas por Felderhof e Kroh (1999), Shliomis (2001) e Müller e Liu (2001), e determinada a proposição de equação fenomenológica que contabilize de forma mais completa os fenômenos investigados na escala de tempo de relaxação magnética característica do problema;
- **Desenvolvimento da formulação vorticidade-função corrente:** Visando a simplificação da solução numérica a ser desenvolvida neste trabalho, será desenvolvida e utilizada a formulação vorticidade-função corrente para o escoamento de um fluido magnético, e descritas as vantagens na sua utilização em comparação ao método do acoplamento de campo de pressão e velocidade (acoplamento  $P - v$ );
- **Proposição de um algoritmo sequencial de solução:** Determinada a formulação a ser utilizada na solução e obtido o sistema de equações adimensionais governantes do problema em estudo, será proposto um algoritmo que será implementado em Python, após a discretização do meio contínuo pelo Método das Diferenças Finitas, para a solução iterativa do problema a partir das condições de contorno e inicial pré-determinadas.

# 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 3.1 Equações de Maxwell e limite magnetostático

As equações de Maxwell são um conjunto de quatro equações que descrevem completamente os fenômenos eletromagnéticos. Por meio de um rigoroso formalismo matemático, Maxwell foi capaz de unificar leis experimentais do eletromagnetismo, resultando nas seguintes equações apresentadas em formulação diferencial:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{Lei de Faraday} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{Lei de Ampère-Maxwell} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f && 1^{\text{a}} \text{ Lei de Gauss} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && 2^{\text{a}} \text{ Lei de Gauss}\end{aligned}$$

sendo  $\mathbf{E}$  o campo elétrico,  $\mathbf{H}$  o campo magnético aplicado,  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente elétrica e  $\rho_f$  a densidade de cargas elétricas livres,  $\mathbf{B}$  campo indução magnética ou campo induzido, e a densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$ .

A Eletrohidrodinâmica e a Magnetohidrodinâmica são as áreas do estudo de fluidos não-Newtonianos que analisam os efeitos gerados pela existência de cargas elétricas livres e as interações entre campos magnéticos e fluidos condutores de corrente, respectivamente. Em uma análise Ferrohodinâmica (FHD), descarta-se a existência de cargas elétricas livres e a presença de forças de Lorentz, geradas pela condução de corrente elétrica através de um fluido submetido a um campo magnético externo. Dessa forma, em nossa análise serão descartadas a densidade de carga livre  $\rho_f$ , a densidade de corrente livre  $\mathbf{J}$ , o deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  e o campo elétrico aplicado  $\mathbf{E}$ , inexistente no problema proposto.

Sabendo que qualquer campo magnético deve satisfazer as Equações de Maxwell, como mostrado por Grant e Phillips (2013), Landau et al. (1984), aplicando o limite magnetostático às Equações de Maxwell obtemos as equações de campo empregadas em uma análise Ferrohodinâmica livre de interações eletrostáticas, como mostrado por

Cunha e Couto (2008):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (3.2)$$

## 3.2 Estudo do sistema de equações da FHD

### 3.2.1 Conceitos Ferromagnéticos

Charles Coulomb determinou em 1785, com base em observações experimentais, que polos de mesma polaridade se repelem, e polos de polaridades diferentes se atraem como uma força proporcional ao produto de suas intensidades de polo, e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Segundo o desenvolvimento de Rosensweig (2013), dados dois polos pontuais de intensidades  $p$  e  $p'$  imersos em vácuo e separados por uma distância  $r$ , a magnitude da força atuante sobre eles é dada por

$$F = \frac{pp'}{4\pi\mu_0 r^2} \quad (3.3)$$

direcionada ao longo das linhas de campo ligadas aos pólos. Seja uma partícula de prova esférica,  $p'$  negativa, o campo magnético  $\mathbf{H}$  na vizinhança de um pólo pontual  $p$  de área dada por  $a = 4\pi r^2$  é

$$\mathbf{H} = \frac{p\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{p}{\mu_0 a} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_s}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.4)$$

sendo  $\mathbf{r}$  o vetor posição orientado de  $p$  a  $p'$ ,  $\hat{\mathbf{r}}$  o vetor unitário de  $\mathbf{r}$  e  $\rho_s$  a densidade superficial de pólos magnéticos.

O campo magnético  $\mathbf{H}$  tem a unidade de Ampère por metro [A/m], o parâmetro  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo e tem o valor de  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \times \text{m}^{-1}$ .

No SI, um campo induzido é definido da forma que, no vácuo,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , e da equação (3.4) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{B} = \frac{p}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} = \rho_s \hat{\mathbf{r}} \quad (3.5)$$

O campo  $\mathbf{B}$  pode ser interpretado como linhas de indução ao redor de um pólo de intensidade  $p$  e tem unidade de Weber por metro quadrado, ou Tesla [T].

A magnetização do meio  $\mathbf{M}$ , ou intensidade de magnetização, denota o estado de polarização da matéria magnetizada e tem unidade de Ampères por metro [A/m]. Considerando um pólo de intensidade uniforme  $p$  com uma área  $a$ , sua magnetização é dada por

$$\mathbf{M} = \frac{p}{\mu_0 a} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_s}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.6)$$

sendo  $\rho_s$  a densidade superficial de pólos magnéticos.

Considerando que uma esfera uniformemente magnetizada produz um campo externo equivalente ao campo gerado por um dipolo, posicionado no centro da esfera, com o mesmo momento magnético total, serão analisadas agora as contribuições dos campos  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  na composição do campo indução magnética  $\mathbf{B}$ . Comparando as equações (3.4) e (3.6), podemos inferir que o campo externo aplicado  $\mathbf{H}$  contribui com  $\mu_0 H$  linhas de indução, enquanto a magnetização do meio  $\mathbf{M}$  fornece uma contribuição de  $\mu_0 M$  linhas no campo induzido total  $\mathbf{B}$ . Consequentemente, a partir da densidade superficial podemos concluir que o campo indução magnética é dado por

$$\mathbf{B} = \mu_0[\mathbf{H} + \mathbf{M}] \quad (3.7)$$

Dessa forma, está estabelecida a relação entre o campo indução magnético  $\mathbf{B}$  e os campos magnético aplicado  $\mathbf{H}$  e magnetização do meio  $\mathbf{M}$ .

### 3.2.2 Superparamagnetismo

Considerando uma suspensão sem magnetização líquida, com partículas magnéticas orientadas randomicamente, observa-se que a aplicação de um campo magnético resulta gradualmente na orientação das partículas subdomínio suspensas em direção ao campo aplicado. Para campos magnéticos de baixa intensidade aplicados, o surgimento de torques magnéticos causado pelo desalinhamento dos campos  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  provoca o alinhamento parcial das partículas, superando parcialmente a agitação térmica da suspensão. O aumento da intensidade do campo magnético aplicado resulta no aumento do estado de magnetização da suspensão, e para campos intensos as partículas podem se orientar completamente e a magnetização da suspensão atinge seu valor máximo, denominado magnetização de saturação. Tal fenômeno está representado pela figura 3.1.

Superparamagnetismo é o estado físico de um material onde o campo de magnetização global da suspensão e o campo magnético aplicado são colineares, e sua magnitude corresponde à soma dos momentos magnéticos das partículas suspensas. De forma geral, para um material contínuo e anisotrópico, tem-se:

$$\mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_m \cdot \mathbf{H} \quad (3.8)$$

em que  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}_m$  é um tensor de segunda ordem denominado suscetibilidade magnética e representa a tendência de um meio contínuo a se magnetizar, dado um campo aplicado.

Dessa forma, substituindo (3.8) em (3.7):

$$\mathbf{B} = \mu_0(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_m + \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \cdot \mathbf{H} \quad (3.9)$$

Define-se então  $\mu_0(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_m + \underline{\underline{\mathbf{I}}})$  como o tensor permeabilidade magnética  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_m$  no caso mais geral de um meio contínuo anisotrópico. Para meios contínuos e isotrópicos, tem-se:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_m = \chi_m \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (3.10)$$

$$\implies \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3.11)$$

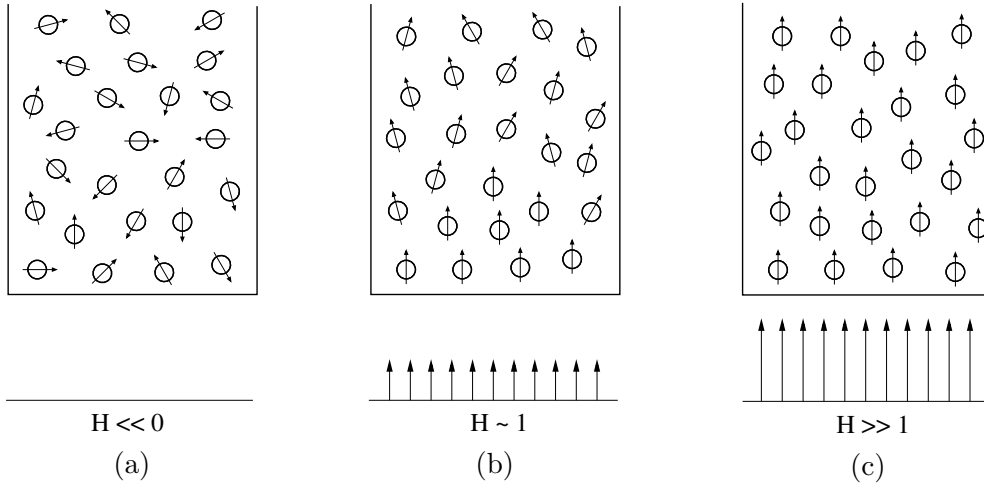


Figura 3.1 – A magnetização gradual de uma suspensão magnética - A figura 3.1a representa a ausência de campo magnético aplicado e de magnetização líquida da suspensão. A figura 3.1b representa um campo magnético aplicado de baixa intensidade e magnetização parcial da suspensão. A figura 3.1c denota o alinhamento total dos momentos magnéticos das partículas e a suspensão atinge sua magnetização de saturação

em que  $\chi_m$  é a propriedade escalar denominada suscetibilidade magnética do meio, função da intensidade do campo aplicado  $\mathbf{H}$  e da temperatura  $T$  do meio. Dessa forma, substituindo (3.10) em (3.9):

$$\mathbf{B} = \mu_0(\chi_m(H, T)\mathbf{I} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{H} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\chi_m(H, T) + 1)\mathbf{H} \quad (3.13)$$

sendo  $\mu(H, T) = \chi_m(H, T) + 1$  a função permeabilidade magnética do meio. Observe que, como  $\mu_0$  é uma constante, o produto  $\mu_0\mu(H, T) = \mu(H, T)$ . Dessa forma:

$$\mathbf{B} = \mu(H, T)\mathbf{H} \quad (3.14)$$

### 3.2.3 Potencial Magnético

Matematicamente, qualquer campo vetorial irrotacional pode ser escrito em função do gradiente de uma função escalar Aris (2012). Dessa forma, sendo o campo aplicado  $\mathbf{H}$  irrotacional no limite magnetostático, é possível definir  $\mathbf{H}$  em função de uma função escalar na forma:

$$\mathbf{H} = \nabla\phi_m \quad (3.15)$$

em que  $\phi_m$  corresponde ao campo escalar potencial magnético. Inserindo o campo magnético induzido, definido na equação (3.7) na equação (3.1):

$$\nabla \cdot [\mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})] = 0 \quad (3.16)$$

$$\implies \nabla \cdot \mathbf{M} = -\nabla \cdot \mathbf{H} \quad (3.17)$$

e substituindo (3.15) em (3.17), tem-se uma equação de Laplace para o potencial magnético  $\nabla\phi_m$ :

$$\nabla^2\phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3.18)$$

Conclui-se que, a partir da equação (3.18), é possível determinar o campo aplicado através de um campo potencial magnético  $\phi_m$ , porém a determinação de condições de contorno em termos de  $\phi_m$  que resultem em um campo  $\mathbf{H}$  fisicamente consistente é uma tarefa numérica complicada. Estas condições são frequentemente expressas por meio de condições de contorno de Neumann e devem resultar em um campo magnético aplicado irrotacional, para que a Lei de Ampère em regime magnetostático seja satisfeita. Uma alternativa na determinação destas condições de contorno será descrita futuramente na seção Condições de contorno magnéticas.

Sabendo que no vácuo a magnetização do meio é nula, a partir da equação (3.7), tem-se:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad (3.19)$$

e substituindo as equações (3.19) e (3.15) em (3.1):

$$\nabla \cdot (\mu_0\nabla\phi_m) = 0 \quad (3.20)$$

$$\mu_0(\nabla^2\phi_m) = 0 \quad (3.21)$$

$$\implies \nabla^2\phi_m = 0 \quad (3.22)$$

e portando, no limite superparamagnético o potencial magnético  $\phi_m$  é uma solução da Equação de Laplace.

### 3.2.4 Relaxação Magnética

A relaxação magnética é o fenômeno de resposta, associado à direção de magnetização das partículas  $\mathbf{M}$ , após uma mudança na direção do campo aplicado  $\mathbf{H}$ . Tal fenômeno é regido por dois mecanismos: a rotação das partículas magnéticas da suspensão e pela rotação do vetor magnetização interno à partícula. O mecanismo de rotação das partículas, ausente em meios sólidos, é associado à um tempo de difusão rotacional Browniano  $\tau_B$ , de origem hidrodinâmica, dado por

$$\tau_B = \frac{3V\eta_0}{kT} \quad (3.23)$$

em que  $V$  é o volume da partícula e  $\eta_0$  é a viscosidade do fluido base. Em contrapartida, o mecanismo de rotação do vetor magnetização interno à partícula está associado à flutuações da magnetização interna da mesma. Tais flutuações são induzidas em situações onde a energia térmica  $kT$ , em que  $k$  é a Constante do Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta do fluido associada à partícula, supera um limite energético dado por  $KV$ , em que  $K$  é a constante de anisotropia do material e  $V$  é o volume da partícula. Considerando uma partícula subdomínio uniaxial ferromagnética e livre de um campo magnético aplicado,

sua magnetização se dará em uma das direções opostas entre si, sobre o eixo preferencial de magnetização, que consiste em uma direção energeticamente favorável de magnetização interna à partícula. Neste caso, em que  $KV \ll kT$ , o tempo característico  $\tau_N$  referente às flutuações da direção de magnetização interna à partícula é, como mostrado por Leliaert et al. (2014), dado por:

$$\tau_N = \frac{1}{f_0} \exp\left(\frac{KV}{kT}\right) \quad (3.24)$$

em que  $f_0$  é uma frequência característica do material magnético de aproximadamente  $10^9$  Hz. Dessa forma, o tempo equivalente de relaxação magnética, frequentemente usado devido à ocorrência simultânea dos mecanismos Brownianos e de Néel e adotado por Rinaldi e Zahn (2002), Rosensweig et al. (1965), é dado por:

$$\frac{1}{\tau_{eq}} = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_N} \quad (3.25)$$

$$\implies \tau_{eq} = \frac{\tau_N \tau_B}{\tau_N + \tau_B} \quad (3.26)$$

A partir da equação (3.26), pode-se inferir que se  $\tau_N \ll \tau_B$ , então  $\tau_{eq} \rightarrow \tau_N$  e a relaxação magnética é dominada pelo mecanismo de Néel, enquanto se  $\tau_B \ll \tau_N$  temos que  $\tau_{eq} \rightarrow \tau_B$  e o mecanismo Browniano rege a relaxação magnética. A partir de uma análise de escala das equações (3.23) e (3.24) é possível estabelecer uma relação entre escalas de tempo de relaxação e o volume de uma partícula suspensa. Considerando uma partícula esférica, pode ser inferido que  $\tau_N \sim \exp(d^3)$  e  $\tau_B \sim d^3$ . Observe que, devido à exponencial do cubo do diâmetro da partícula, o tempo característico de Néel  $\tau_N$  exibe uma forte dependência ao volume da partícula, quando comparado ao tempo característico Browniano  $\tau_B$ . Dessa forma, pode-se verificar o mecanismo de relaxação magnética dominante, e seu respectivo tempo característico equivalente, a partir do diâmetro das partículas ferromagnéticas suspensas no líquido base.

É possível estabelecer uma comparação entre os tempos característicos de relaxação magnética, e suas ordens de grandeza, e uma relação entre suas escalas e perturbações provenientes do escoamento, a partir da representação do comportamento de uma partícula magnética e do seu momento de dipolo em um escoamento, como mostrado na figura 3.2.

No caso em que o tempo de relaxação magnética equivalente é o tempo de relaxação Browniano, descrito na figura 3.2a, perturbações sobre a orientação do momento de dipolo magnético ocorrem unicamente por mecanismos Brownianos, e tal orientação está acoplada à orientação da própria partícula. Na situação em que a barreira energética, associada à partícula, dada por  $KV$  seja superada pela energia térmica  $kT$ , o tempo de relaxação de Néel adquire relevância na relaxação magnética do meio e são induzidas flutuações internas na orientação do momento de dipolo da partícula, como mostrado por Fannin e Charles (1994). Sendo o tempo de Néel  $\tau_N$  muito menor que o tempo de relaxação Browniano  $\tau_B$ , o tempo de relaxação equivalente  $\tau_{eq}$  será dominado por  $\tau_N$  de forma que  $\tau_{eq} \approx \tau_N$ . Neste limite, o tempo de resposta do meio à perturbações induzidas

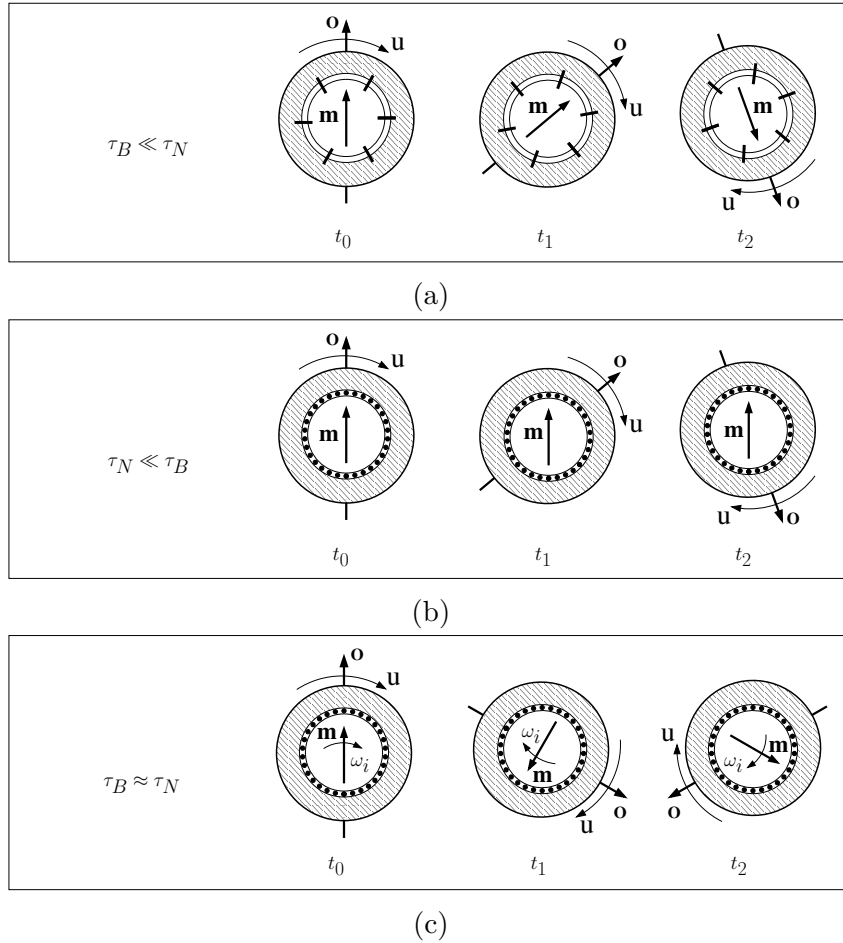


Figura 3.2 – Esquema representativo da relação entre o tempo de relaxação magnética característico e a rotação do momento de dipolo magnético de uma partícula

pelo escoamento serão infinitesimais e a magnetização global será dada pela magnetização de equilíbrio  $\mathbf{M}_0$ , e portanto o escoamento, com número de Reynolds associado de ordem moderada, não é capaz de perturbar a orientação do dipolo magnético e induzir o surgimento de torques internos aos meios, como mostrado na figura 3.2b. Caso os tempos de relaxação de Néel e Browniano sejam de mesma ordem de magnitude e dado pela equação (3.26), o momento de dipolo magnético adquire uma velocidade angular  $\omega_i$ , independente da rotação da partícula, que deverá ser contabilizada na determinação do campo de magnetização do meio, como representado na figura 3.2c.

### 3.2.5 Condições de contorno magnéticas

Nesta seção serão definidas as condições restritivas dos vetores  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  nos contornos entre meios contínuos distintos, que serão utilizadas futuramente na solução numérica do problema abordado neste trabalho. As condições de contorno magnéticas serão especificadas para as interfaces descritas pela figura 3.3.

O objetivo desta seção é a definição das condições de contorno magnéticas, determinando a contribuição da magnetização do material que constitui o canal de escoamento



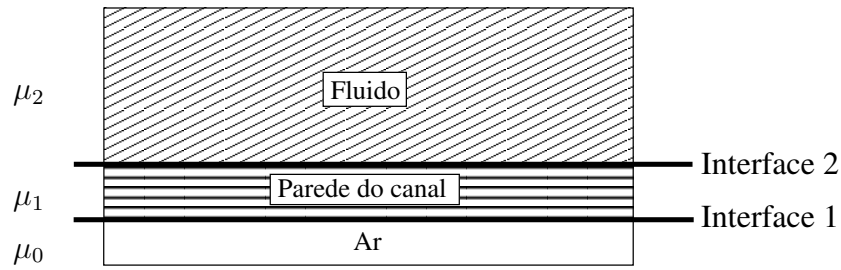


Figura 3.3 – Esquema representativo das interfaces entre os meios, em que  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do ar (i.e. aproximadamente igual à permeabilidade magnética do vácuo), presente entre o ímã e o duto,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  a permeabilidade magnética do canal e do fluido magnético, respectivamente.

sobre o campo indução magnética total no domínio do escoamento. Tal determinação será feita a seguir para os campos magnético aplicado  $\mathbf{H}$  e indução magnética  $\mathbf{B}$  a partir de uma análise do fluxo de tais campos nos domínios na interface mostrados nas figuras 3.4a e 3.4b.

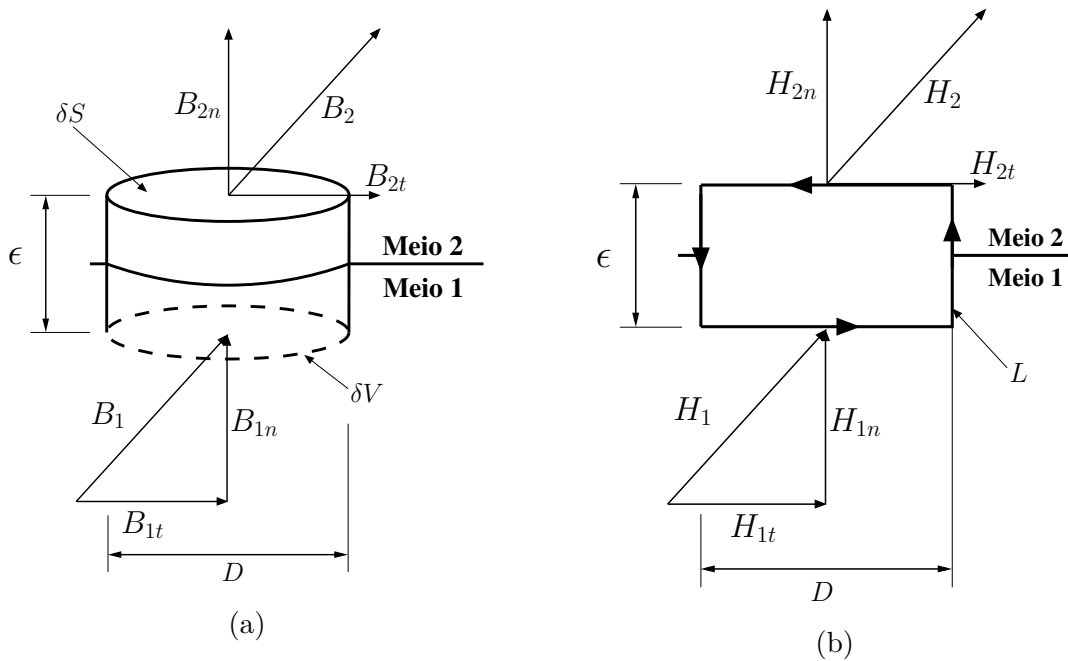


Figura 3.4 – Análise da continuidade das condições de contorno em um volume infinitesimal  $\delta V$  e uma curva fechada  $L$ , ambos sobre a interface entre os meios em análise.

### 3.2.5.1 Condição de contorno para $\mathbf{B}$

Considere a superfície fechada  $\delta S$  mostrada na figura 3.4a, representando um disco de volume  $\delta V$ , diâmetro  $D$  e altura  $\epsilon$ , e situado entre dois meios contínuos 1 e 2. A condição de contorno para o campo indução magnética  $\mathbf{B}$  a ser determinada é consequência direta da equação de Gauss para o magnetismo (3.1) no limite magnetostático, em formulação

integral dada por:

$$\iiint_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oiint_{\delta S} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (3.27)$$

No limite em que a altura  $\epsilon$  tende a zero (i.e.  $\epsilon \ll D$ ), o fluxo total de linhas de indução sobre a superfície  $\delta S$  do disco tem contribuições somente nas áreas superior  $A_2$  e inferior  $A_1$ , contidas nos meios 2 e 1, respectivamente. Como  $\epsilon \ll a$ , sendo  $a = D/2$  o raio do disco,  $|\mathbf{B}| \pi a^2 \gg |\mathbf{B}| 2\pi a \epsilon$ , e portanto a contribuição do fluxo de indução magnética na superfície lateral do disco pode ser desprezada. Neste caso a integral de superfície na equação (3.27) se reduz a:

$$\int_{A_1} B_{1n} dS = \int_{A_2} B_{2n} dS, \quad (3.28)$$

independente do tamanho das áreas  $A_1$  e  $A_2$ . Como  $A_1 = A_2$  a equação (3.28) só é satisfeita se a componente normal de  $\mathbf{B}$  for contínua através da interface entre os meios 1 e 2. Neste caso, tem-se:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (3.29)$$

ou

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.30)$$

Tal condição deve ser válida em ambas interfaces mostradas na figura 3.3.

### 3.2.5.2 Condição de contorno para $\mathbf{H}$

As condições de contorno para o campo magnético  $\mathbf{H}$  podem ser determinadas a partir da condição magnetostática  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  seguindo o esquema mostrado na figura 3.4b e partindo da integração da condição de irrotacionalidade de  $\mathbf{H}$  na superfície limitada pelo contorno  $L$ , como conduzido por Cunha (2012):

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_L \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dL = 0, \quad (3.31)$$

em que  $\hat{\mathbf{t}}$  é o vetor tangente unitário ao caminho  $L$ . No caminho descrito na figura 3.4b, tem-se que  $D \gg \epsilon$ , e portanto as integrais de linha de primeira espécie em  $D$  do caminho  $L$  são muito maiores que as integrais de linha em  $D$ . Desta forma, a integral ao longo do caminho fechado  $L$  da equação (4.81), reduz-se a:

$$\oint_{D_1} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dL = \oint_{D_2} \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}} dL, \quad (3.32)$$

que resulta em:

$$\mathbf{H}_y \cdot \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{H}_x \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0 \quad \text{ou} \quad H_{1t} = H_{2t}, \quad (3.33)$$

ou ainda a partir do Teorema de Stokes:

$$\nabla \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (3.34)$$

e portanto é possível concluir que a componente tangencial do vetor  $\mathbf{H}$  é contínua entre os meios analisados. Note que é possível reescrever a equação (3.33) em termos do potencial magnético, sendo  $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$ , tem-se:

$$\nabla\phi_m^1 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \nabla\phi_m^2 \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (3.35)$$

$$\implies \frac{\partial\phi_m^1}{\partial t} = \frac{\partial\phi_m^2}{\partial t}, \quad (3.36)$$

em que  $t$ , neste caso, representa a direção tangencial ao caminho  $L$ , e não um parâmetro de tempo.

Como argumentado por Campos et al. (2015), a imposição de condições de contorno em termos do potencial magnético  $\phi_m$  não é uma tarefa trivial, por serem expressas em termos de condições de contorno de Neumann e a condição restrita de que o campo  $\mathbf{H}$  calculado deva ser irrotacional. Desta forma, a imposição das condições de contorno de Neumann será utilizada na transição entre as interfaces mostradas na figura 3.3, enquanto uma formulação alternativa para determinação das condições de contorno para a solução do campo magnético  $\mathbf{H}$  será utilizada para solucionar tal campo gerado por um ímã retangular de polaridade uniforme, representado na figura 3.5, e determinar suas componentes na interface com o duto de escoamento.

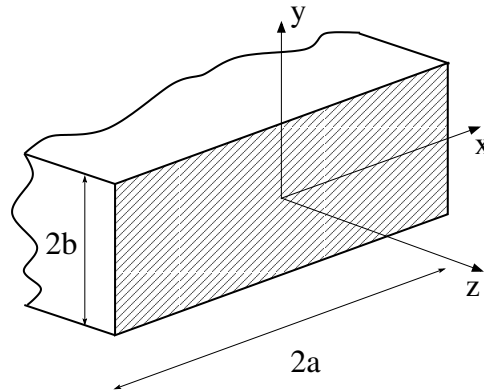


Figura 3.5 – Coordenadas referentes à solução do campo magnético gerado por um ímã retangular permanente de polaridade uniforme

A investigação da influência da intensidade do campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$  sobre o campo de vorticidade é o foco deste trabalho, e portanto o campo aplicado considerado nas futuras simulações será dado por um ímã permanente retangular situado sob o domínio de escoamento, como mostrado na figura 1.3 e cuja solução foi determinada por MacCaig (1987), dada em forma adimensional por:

$$H_x = \frac{J}{4\phi\mu_0} \ln \left[ \frac{y+b + \{(y+b)^2(x-a)^2\}^{1/2}}{y-b + \{(y-b)^2(x-a)^2\}^{1/2}} \times \frac{y-b + \{(y-b)^2(x+a)^2\}^{1/2}}{y+b + \{(y+b)^2(x+a)^2\}^{1/2}} \right] \quad (3.37)$$

$$H_y = \frac{J}{4\phi\mu_0} \ln \left[ \frac{y+a + \{(y-b)^2(x+a)^2\}^{1/2}}{y-a + \{(y-b)^2(x-a)^2\}^{1/2}} \times \frac{y-a + \{(y+b)^2(x-a)^2\}^{1/2}}{y+a + \{(y+b)^2(x+a)^2\}^{1/2}} \right], \quad (3.38)$$

em que  $H_x$  e  $H_y$  são as componentes do campo  $\mathbf{H}$  nas direções tangenciais  $x$  e  $y$  na superfície do ímã e  $x$  e  $y$  representam a coordenada de um ponto arbitrário no domínio de cálculo onde se deseja avaliar tais componentes, como usado por Campos et al. (2015) no estudo numérico do escoamento de um fluido magnético sobre uma placa plana.

Por meio das equações (3.37) e (3.38) será possível estabelecer condições de contorno consistentes para a O estudo consiste na investigação da influência de um campo magnético aplicado, já determinado, sobre o campo de vorticidade do escoamento de um fluido magnético sujeito à uma expansão abrupta. Por meio das equações, (3.37) e (3.38), será possível estabelecer condições de contorno consistentes para a solução do problema.

### 3.3 Tensor de tensões de Maxwell

O Tensor de Maxwell - tensor de tensões magnético - fornece uma útil ferramenta na descrição quantitativa de forças e suas distribuições. Além disso, o Tensor de Maxwell incorpora não somente as forças de campo, mas também a densidade de forças de superfície presentes em fluidos magnéticos. Um fluido magnético consiste em uma suspensão coloidal de nanopartículas magnéticas (domínios magnéticos) em um fluido base. O comportamento resultante da suspensão pode ser quantificado em uma combinação entre o regime Newtoniano e o regime Magnético de tal suspensão da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^N + \underline{\underline{\sigma}}^M \quad (3.39)$$

em que  $\underline{\underline{\sigma}}^N$  é o tensor que incorpora o comportamento Newtoniano do fluido base e  $\underline{\underline{\sigma}}^M$  é o tensor de Maxwell, que incorpora o comportamento magnético das nanopartículas presentes em tal suspensão coloidal.

#### Desenvolvimento de uma expressão matemática para o Tensor de Maxwell

Partindo de uma nuvem teste de dipolos magnéticos ao redor de um ponto no espaço, pelo Teorema de Brown, a nuvem de dipolos é equivalente a uma distribuição de densidade de pólos  $\rho_V$ . Sabendo que  $\mathbf{H}$  é a força por unidade de pólo, a densidade local de força aparente  $\mathbf{F}$  é:

$$\mathbf{F} = \rho_V \mathbf{H} \quad (3.40)$$

$$\rho_V = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad \text{Teorema de Brown}$$

Agora, é necessário manipular o lado direito da equação (3.40) para que ele possa ser escrito como o divergente de um tensor, mantendo assim a homogeneidade de ordem tensorial da equação.

retomando e substituindo (3.17) no Teorema de Brown, é obtida uma nova expressão para a densidade de pólos:

$$\rho_V = -\mu_0(-\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (3.41)$$

$$\rho_V = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} \quad (3.42)$$

Assim, substituindo (3.41) em (3.40) podemos escrever uma expressão para a densidade de força local aparente em termos do campo magnetizante  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{F} = \mu_0 \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (3.43)$$

Dada a identidade (A.17) em apêndice:

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (3.44)$$

$$\implies \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.45)$$

podemos reescrever (3.43) na forma:

$$\mathbf{F} = \mu_0 [\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}] \quad (3.46)$$

e utilizando a identidade (A.13) em apêndice:

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \frac{1}{2} \nabla H^2 - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (3.47)$$

inserindo a equação (3.2) na equação (3.47):

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \frac{1}{2} \nabla H^2 \quad (3.48)$$

$$\implies \mathbf{F} = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}) - \nabla \left( \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) \quad (3.49)$$

Dada a identidade (A.20) em apêndice, reescrevemos a equação (3.49):

$$\mathbf{F} = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \underline{\mathbf{I}} \right) \quad (3.50)$$

$$\implies \mathbf{F} = \nabla \cdot \left( \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \underline{\mathbf{I}} \right) \quad (3.51)$$

Portanto temos que

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M = \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \underbrace{\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \underline{\mathbf{I}}}_{p_m} \quad \text{Tensor de Maxwell}$$

e incorporando os efeitos magnéticos, obtemos o tensor de tensões do fluido magnético em estudo :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^N + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M \quad (3.52)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underbrace{-p \underline{\mathbf{I}} + 2\mu \mathbf{D}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^N} + \underbrace{\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - p_m \underline{\mathbf{I}}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M} \quad (3.53)$$

em que  $p_m$  denota uma pressão magnética e  $\mathbf{D}$  é o Tensor Taxa de Deformação definido por:

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad (3.54)$$

Observe que o termo  $\mu_0 \mathbf{H}$  na equação (3.53) corresponde ao campo indução magnética  $\mathbf{B}$  em um meio não polarizável. A fim de generalizar a equação (3.53), tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} && \text{(Meio não polarizável)} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M &= -p_m \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \mathbf{B}\mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Observe que como  $\mu_0$  é um escalar, o seguinte termo na equação (3.53) pode ser manipulado, de forma que:

$$\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mu_0 \mathbf{H} \quad (3.56)$$

$$\implies \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{B}, \quad (3.57)$$

como descrito por Campos et al. (2015) na análise numérica do comportamento da camada limite no escoamento de um fluido magnético, submetido à um campo magnético aplicado, sobre uma placa plana.

Na próxima seção será demonstrada a objetividade das equações constitutivas propostas e, em seguida, serão analisadas as implicações resultantes da escolha de formulação, entre  $\mathbf{B}\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}\mathbf{B}$ , do termo não isotrópico do tensor de tensões magnético na obtenção de uma equação do movimento para um fluido magnético.

### 3.3.1 Objetividade das Equações Constitutivas

O objetivo desta seção é demonstrar, analiticamente, a objetividade do termo não isotrópico do tensor de tensões das equações constitutivas propostas na seção anterior para as formulações  $\mathbf{B}\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}\mathbf{B}$ , garantindo posteriormente uma simulação numérica teoricamente bem fundamentada e devidamente demonstrada.

Na proposição de uma equação constitutiva, além de buscar uma completa descrição das propriedades físicas e termodinâmicas de um material, e suas respectivas relações, é necessário que a descrição proposta seja absoluta e invariante. Dessa forma a resposta do material é observada da mesma forma para qualquer observador, e portanto obedece o Princípio da indiferença material (*Material Frame Indifference - MFI*) postulado por Truesdell e Toupin (1960). As propriedades descritas por uma equação constitutiva são assumidamente intrínsecas ao material e, portanto, devem ser invariantes à diferentes observadores em diferentes sistemas de referência.

Aris (2012) define um tensor cartesiano de segunda ordem como uma entidade com nove componentes no sistema de coordenadas cartesiano 0123 ( $A_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ ) que,

com a rotação do sistema de coordenadas para  $0\overline{1}2\overline{3}$  se torna:

$$\overline{A}_{pq} = Q_{ip}Q_{jq}A_{ij}, \quad (3.58)$$

em que as componentes do tensor ortogonal  $Q_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_j$  são dadas por  $Q_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ , sendo  $\hat{\mathbf{e}}'_i$  e  $\hat{\mathbf{e}}_j$  os vetores unitários que compõem as bases canônicas dos sistemas ortogonais  $0\overline{1}2\overline{3}$  e  $0123$ , respectivamente. Desta forma, as componentes  $Q_{ij}$  são dadas por cossenos de ângulos relativos a uma transformação de rotação de um observador do sistema  $0123$  para o sistema  $0\overline{1}2\overline{3}$  arbitrário.

Pela relação de ortogonalidade dada por  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$ , tem-se que

$$A_{ij} = Q_{ip}Q_{jq}\overline{A}_{pq} \quad (3.59)$$

Dessa forma, sendo  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  dois vetores, o conjunto de nove produtos dados por  $H_iB_j$  é um tensor de segunda ordem e obedece a transformação dada pela equação (3.58). Sendo  $A_{ij} = H_iB_j$ :

$$\overline{A}_{pq} = \overline{H}_p\overline{B}_q \quad (3.60)$$

$$= Q_{ip}H_iQ_{jq}B_j \quad (3.61)$$

$$= Q_{ip}Q_{jq}(H_iB_j) \quad (3.62)$$

$$\implies \overline{A}_{pq} = Q_{ip}Q_{jq}A_{ij} \quad (3.63)$$

Pode-se observar que a demonstração da objetividade do tensor  $\mathbf{BH}$  é análoga à demonstração feita para o tensor  $\mathbf{HB}$ .

### 3.4 Equação do Movimento para um Fluido Magnético

Nesta seção, será deduzida uma Equação do Movimento para o fluido em estudo (incompressível, barotrópico e magnético) a partir da Equação de Cauchy:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \mathbf{g} \quad (3.64)$$

substituindo (3.39) em (3.64), tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^N + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M) + \rho \mathbf{g} \quad (3.65)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^N + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^M + \rho \mathbf{g} \quad (3.66)$$

Desenvolvendo o termo  $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^N$ :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^N = \nabla \cdot (-p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\mu\underline{\underline{\mathbf{D}}}) \quad (3.67)$$

$$= -\nabla \cdot (p\underline{\underline{\mathbf{I}}}) + 2\mu\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (3.68)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \cdot (p\delta_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \hat{e}_j \hat{e}_k + \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \hat{e}_k \hat{e}_j \right) \quad (3.69)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} p \hat{e}_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \hat{e}_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \hat{e}_j \right) \quad (3.70)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} p \hat{e}_i + \mu \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} \hat{e}_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \hat{e}_j \right) \quad (3.71)$$

$$\implies \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^N = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.72)$$

### 3.4.1 Formulação BH

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^M = \nabla \cdot (-p_m \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \mathbf{BH}) \quad (3.73)$$

$$= \nabla \cdot \left( -\frac{\mu_0 H^2}{2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} + [\mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \mathbf{H}] \right) \quad (3.74)$$

$$= \mu_0 \left[ -\nabla \cdot \left( \frac{H^2}{2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{MH}) + \nabla \cdot (\mathbf{HH}) \right] \quad (3.75)$$

$$\implies \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^M = \mu_0 \left[ -\nabla \cdot \left( \frac{H^2}{2} \right) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) \right] \quad (3.76)$$

Inserindo (3.17) e utilizando a equação (3.48) em (3.76):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^M = \mu_0 \left[ -\nabla \cdot \left( \frac{H^2}{2} \right) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \nabla \cdot \frac{H^2}{2} - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) \right] \quad (3.77)$$

Assim, simplificando os termos temos:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{BH}^M = \mu_0 [\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}] \quad (3.78)$$

Substituindo (3.72) e (3.78) em (3.66), tem-se a equação do movimento de um fluido magnético utilizando a formulação **BH** do termo não isotrópico do tensor de tensões magnético:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.79)$$



### 3.4.2 Formulação HB

Desenvolvendo o termo  $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^M$ :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^M = \nabla \cdot (-p_m \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \mathbf{HB}) \quad (3.80)$$

$$= \nabla \cdot \left( -\frac{\mu_0 H^2}{2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \mathbf{H}(\mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})) \right) \quad (3.81)$$

$$= \mu_0 \left[ -\nabla \cdot \left( \frac{H^2}{2} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{HM}) + \nabla \cdot (\mathbf{HH}) \right] \quad (3.82)$$

$$= \mu_0 \left[ -\nabla \left( \frac{H^2}{2} \right) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} + \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) \right] \quad (3.83)$$

Substituindo (3.48) em (3.83) e simplificando os termos:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^M = \mu_0 [\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} + \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H})] \quad (3.84)$$

Utilizando a identidade (A.11) em apêndice:

$$\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) = \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.85)$$

$$\implies \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.86)$$

Substituindo (3.17) em (3.86), tem-se:

$$\mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.87)$$

E inserindo (3.87) em (3.84) temos:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^M = \mu_0 [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H})] \quad (3.88)$$

$$\implies \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{HB}^M = \mu_0 [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}] \quad (3.89)$$

Substituindo (3.72) e (3.89) em (3.66), tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.90)$$

e dividindo a equação (3.90) por  $\rho$ , é obtida a equação do movimento de um fluido magnético, através da formulação HB:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.91)$$

### 3.4.3 Comparação entre formulações

Dadas as expressões obtidas para a Equação do Movimento de um fluido magnético:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (\text{Formulação BH})$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) + \frac{\mu_0}{\rho} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (\text{Formulação HB})$$

Pode-se inferir que em casos onde o campo aplicado  $\mathbf{H}$  é constante (em pequenos gaps de escoamento) e portanto  $\nabla\mathbf{H}$  é zero, a influência dos efeitos magnéticos observados experimentalmente não são computados analiticamente na formulação  $\mathbf{BH}$ . Sendo assim, neste trabalho será adotada a formulação  $\mathbf{HB}$ , por ser uma formulação mais completa, na tentativa de obter uma descrição mais precisa dos fenômenos a serem estudados.

### 3.5 Estudo de efeitos de assimetria em Fluidos Polares

A colinearidade, entre os campos Magnetização do meio  $\mathbf{M}$  e Campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$ , proporciona uma simplificação considerável na análise de escoamentos de fluidos magnéticos. Em suspensões de partículas subdomínio de tamanho suficientemente reduzido, a direção de  $\mathbf{M}$  rotaciona livremente no interior da partícula sólida em suspensão, seja qual for a orientação da partícula, estabelecendo um caso de equilíbrio estático. Entretanto, no caso de partículas de maior escala, o momento magnético  $\mathbf{m}$  acoplado à direção da partícula  $\mathbf{d}$  é dado por

$$\mathbf{m} = \rho_s a_d \mathbf{d} = \mu_0 \mathbf{M} a_d d, \quad (3.92)$$

sendo  $\rho_s$  a densidade superficial de pólos,  $a_d$  a área superficial da partícula e  $\mu_0$  a permeabilidade magnética no vácuo. Nesse caso, uma variação na direção do campo aplicado  $\mathbf{H}$  perturba a magnetização  $\mathbf{M}$  da partícula que, devido a torques viscosos reativos, rotaciona em uma escala de tempo característico superior à de partículas subdomínio. Dessa forma, o desalinhamento entre os campos resulta em um torque magnético  $\boldsymbol{\tau}_m$  por unidade de volume de valor finito

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} \quad (3.93)$$

De forma análoga, o torque associado à cada partícula magnética  $\boldsymbol{\tau}_m^i$  submetida a um campo aplicado, esquematizado na figura 3.6, é dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_m^i = \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{H}, \quad (3.94)$$

em que  $\mathbf{m}$  é o momento magnético da partícula e  $\mathbf{H}$  o campo magnético aplicado.

Localmente, o desalinhamento entre os campos  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{H}$  é causado pela ação hidrodinâmica do escoamento sobre as partículas magnéticas. Tanto a rotacionalidade do escoamento, quanto a aplicação de um campo magnético em uma direção não colinear com a vorticidade (i.e. a velocidade angular da partícula), provocam o desalinhamento global entre os campos  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$ . Tal fenômeno ocorre em escoamentos com um tempo característico de relaxação magnética equivalente ao tempo de relação Browniano  $\tau_B$  e, portanto, o momento de dipolo magnético  $\mathbf{m}$  de cada partícula possui direção fixa.

Escoamentos com tempo de relaxação magnética equivalente ao tempo característico de Néel, com momentos magnéticos de velocidade angular relativa à partícula, serão discutidos na seção 3.9.

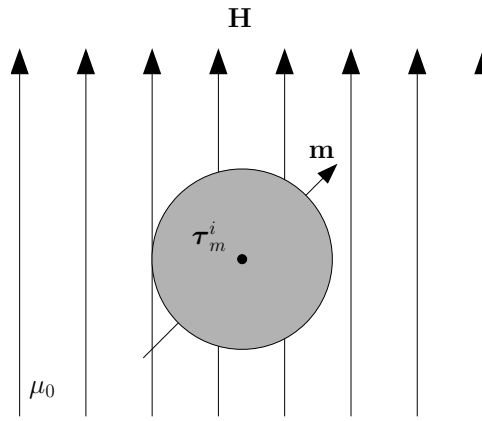


Figura 3.6 – Torque atuante em uma partícula magnética de magnetização  $\mathbf{m}$  imersa em um campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$ .

Observe a figura 3.7. É possível observar na figura 3.7a o surgimento de um torque magnético na partícula, causado pelo desalinhamento dos vetores  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{H}$  devido à vorticidade do escoamento. Entretanto, a aplicação do campo magnético na direção do campo de vorticidade do escoamento não provoca perturbação na orientação do momento de dipolo  $\mathbf{m}$  da partícula pela ação da vorticidade, como representado na figura 3.7b, e a partícula rotaciona livremente em torno do eixo  $z$ . Feita esta análise a respeito da influência da direção de aplicação do campo magnético  $\mathbf{H}$ , é possível concluir que, com o objetivo de se realizar um controle da vorticidade das partículas após uma expansão abrupta no escoamento de um fluido magnético, a direção de aplicação do campo  $\mathbf{H}$  deverá ser a representada na figura 3.7a, como havia sido representada inicialmente na figura 1.3. Como mostrado por Rosensweig et al. (1969), a aplicação de um campo magnético externo no escoamento uniforme viscométrico cisalhante de um fluido magnético resulta em um aumento da viscosidade aparente de até quatro vezes, para campos de alta intensidade.

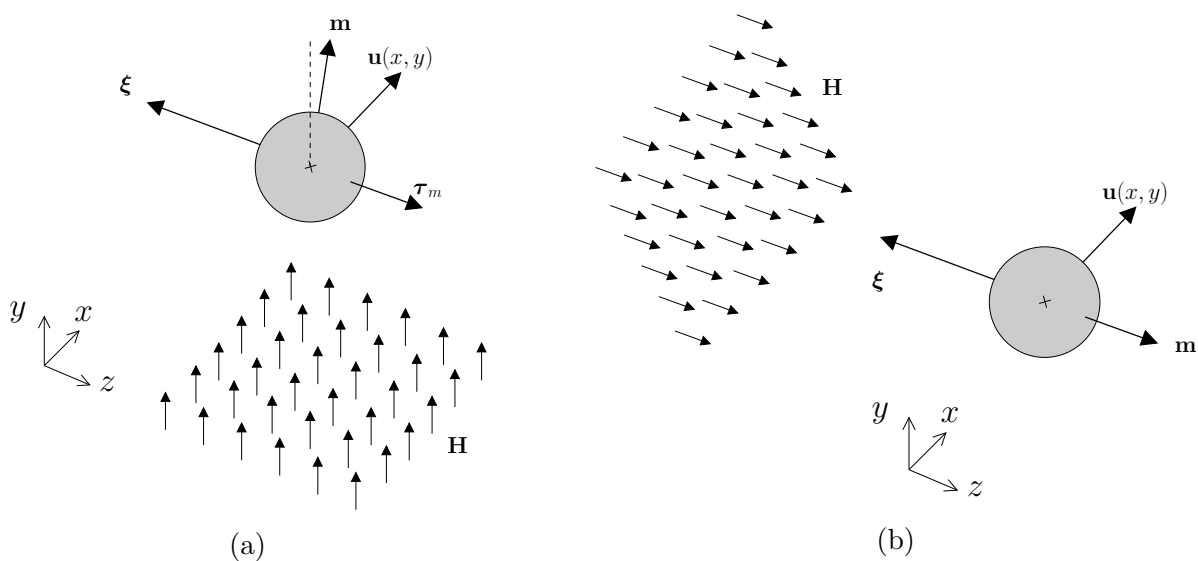


Figura 3.7 – Comparativo entre possíveis direções para a aplicação do campo magnético externo e suas implicações

Será deduzida a influência de torques internos na quebra de simetria do tensor de

tensões, e as consequências de um estado de tensão assimétrico do material.

Analisando o balanço de momento angular  $\mathbf{L}$  de uma partícula:

$$\frac{D\mathbf{L}}{Dt} = \Sigma\mathbf{T} \quad (3.95)$$

sendo  $\Sigma\mathbf{T}$  os torques atuantes em um volume infinitesimal fluido, tem-se:

$$d\mathbf{L} = (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{u})dV \quad (3.96)$$

$$\implies \mathbf{L} = \int_V (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{u})dV \quad (3.97)$$

e substituindo (3.97) em (3.95) tem-se:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{u})dV = \Sigma\mathbf{T} \quad (3.98)$$

Observe que, como consequência do Teorema Transporte de Reynolds e da Equação da Continuidade, sendo  $\mathbf{G} = (\mathbf{x} \times \mathbf{u})$  é possível manipular o termo à esquerda de (3.98):

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho\mathbf{G}dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{G}}{Dt} dV \quad (3.99)$$

$$\implies \int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u})dV = \Sigma\mathbf{T}. \quad (3.100)$$

Considerando que o torque  $\mathbf{T}$  tem componentes associadas às forças de campo e de superfície, é possível explicitar tais componentes para desenvolver uma análise profunda sobre a origem de tais torques:

$$\Sigma\mathbf{T} = \underbrace{\Sigma\mathbf{T}_s}_{\text{superfície}} + \underbrace{\Sigma\mathbf{T}_v}_{\text{volume}} \quad (3.101)$$

$$\implies \int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u})dV = \Sigma\mathbf{T}_s + \Sigma\mathbf{T}_v \quad (3.102)$$

desenvolvemos os termos, tem-se:

$$\Sigma\mathbf{T}_s = \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t})ds \quad ; \quad \mathbf{t} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.103)$$

$$\Sigma\mathbf{T}_v = \int_V (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{g} + \rho\boldsymbol{\tau}_m)dV \quad (3.104)$$

Observe que em (3.104) o termo  $\mathbf{x} \times \rho\mathbf{g}$  é o torque associado à força gravitacional, e o termo  $\rho\boldsymbol{\tau}_m$  corresponde aos torques internos presentes em um fluido magnético submetido a um campo magnético externo, ambos por unidade de volume. Dessa forma, substituindo (3.103) e (3.104) em (3.102) tem-se:

$$\underbrace{\int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u})dV}_1 = \underbrace{\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}ds}_2 + \underbrace{\int_V (\mathbf{x} \times \rho\mathbf{g} + \rho\boldsymbol{\tau}_m)dV}_3 \quad (3.105)$$

Desenvolvendo a integral 2 em notação indicial:

$$\int_S \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) ds = \int_S x_i \hat{e}_i \times (n_j \hat{e}_j \cdot \sigma_{kp} \hat{e}_k \hat{e}_p) ds \quad (3.106)$$

$$= \int_S x_i \hat{e}_i \times (n_j \sigma_{jp} \hat{e}_p) ds \quad (3.107)$$

$$= \int_S \epsilon_{ipm} x_i n_j \sigma_{jp} \hat{e}_m ds \quad (3.108)$$

Observe que  $\epsilon_{ipm} x_i \sigma_{jp} = A_{mj}$ , sendo  $\underline{\underline{A}}$  um tensor de segunda ordem. Dessa forma, utilizando o Teorema da Divergência:

$$\int_S A_{mj} n_j ds = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} A_{mj} dV \quad (3.109)$$

Inserindo  $A_{mj}$  e continuando com o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \int_S \epsilon_{ipm} x_i \sigma_{jp} n_j ds &= \int_V \epsilon_{ipm} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i \sigma_{jp}) dV \\ &= \int_V \epsilon_{ipm} \left[ \sigma_{jp} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial \sigma_{jp}}{\partial x_j} \right] dV \end{aligned} \quad (3.110)$$

Lembrando que  $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ , tem-se:

$$\int_S \epsilon_{ipm} x_i \sigma_{jp} n_j ds = \int_V \left[ \epsilon_{ipm} \sigma_{ip} + \epsilon_{ipm} x_i \frac{\partial \sigma_{jp}}{\partial x_j} \right] dV \quad (3.111)$$

$$\implies \int_S \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) ds = \int_V [\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}})] dV \quad (3.112)$$

A equação (3.112) é uma variação do Teorema da Divergência, inicialmente proposto por Aris (2012). Substituindo (3.112) em (3.105) tem-se:

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_V [\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}})] dV + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} + \rho \boldsymbol{\tau}_m) dV \quad (3.113)$$

$$\implies \int_V \left[ \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) - \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) - \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} - \rho \boldsymbol{\tau}_m \right] dV = 0 \quad (3.114)$$

Pelo Teorema da Localização e expandindo o termo  $\rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{u})$ :

$$\rho \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \rho \underbrace{\mathbf{u} \times \frac{D\mathbf{x}}{Dt}}_{\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0} - \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) - \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} - \rho \boldsymbol{\tau}_m = 0 \quad (3.115)$$

$$\mathbf{x} \times \left[ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \rho \mathbf{g} \right] - \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \rho \boldsymbol{\tau}_m \quad (3.116)$$

Observe que manipulando a Equação de Cauchy (3.64), tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \rho \mathbf{g} = 0, \quad (3.117)$$

que corresponde ao termo entre colchetes em (3.116), que portanto é igual a zero. Dessa forma:

$$-\underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \rho \boldsymbol{\tau}_m \quad (3.118)$$

Expandindo o termo  $\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\sigma}}$ :

$$\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \hat{e}_i \quad (3.119)$$

$$= \epsilon_{123} \sigma_{23} \hat{e}_1 + \epsilon_{312} \sigma_{12} \hat{e}_3 + \epsilon_{231} \sigma_{31} \hat{e}_2 + \epsilon_{321} \sigma_{21} \hat{e}_3 + \epsilon_{213} \sigma_{13} \hat{e}_2 + \epsilon_{132} \sigma_{32} \hat{e}_1 \quad (3.120)$$

$$= (\sigma_{23} - \sigma_{32}) \hat{e}_1 + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) \hat{e}_2 + (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \hat{e}_3 \quad (3.121)$$

Se  $\tau_m = 0$  então a partir de (3.118), tem-se:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (3.122)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (3.123)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (3.124)$$

$$\implies \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.125)$$

e assim:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (3.126)$$

Se  $\tau_m \neq 0$  então a partir de (3.118), tem-se:

$$\underline{\underline{\sigma}} \neq \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (3.127)$$

Provamos assim como a existência de torques internos magnéticos, gerados pela aplicação de um campo magnético externo, provoca a quebra de simetria do tensor de tensões de um fluido magnético.

### 3.6 Equação da Vorticidade para um Fluido Magnético

Nesta etapa será deduzida uma equação para a vorticidade do escoamento de um fluido magnético. Primeiramente será aplicado o rotacional na equação (3.91):

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) &= \nabla \times \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) + \nabla \times \mathbf{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})) + \\ &+ \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (3.128)$$

Considerando que o campo gravitacional é constante no problema, tem-se que  $\nabla \times \mathbf{g} = 0$

$$\nabla \times \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) = \nabla \times \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})) + \frac{\mu_0}{\rho} \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) \quad (3.129)$$

Sendo o fluido barotrópico, situação na qual não há estratificação de massa específica devido à gradientes de temperatura e o campo de massa específica é função unicamente

do campo de pressão ( $\rho = \rho(p)$ ). Além do mais, é comum considerar que tal fluido magnético seja incompressível e que o campo de massa específica do meio permanece constante e homogêneo ( $\rho$  constante). Desta forma, a partir da equação da continuidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.130)$$

tem-se que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  para escoamentos incompressíveis e o campo de velocidades  $\mathbf{u}$  é um campo solenoidal. Desta forma a partir de (3.129) tem-se:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})) + \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})] \quad (3.131)$$

Dada a identidade vetorial:

$$\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) = \mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (3.132)$$

Inserindo (3.132) em (3.131), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{D\xi}{Dt} &= \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \\ &\quad + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})] \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$= \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{M}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{M})] \quad (3.134)$$

inserindo (3.17) e (3.45) em (3.134):

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}))] \quad (3.135)$$

$$= \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M}) + \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H})] \quad (3.136)$$

e substituindo (3.47) em (3.136) tem-se:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M}) + \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) - \frac{1}{2} \nabla H^2 + \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}))] \quad (3.137)$$

Sabendo que  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  e que  $\nabla \times \nabla H^2 = 0$ , sendo  $H$  o módulo de  $\mathbf{H}$ , tem-se uma expressão para a vorticidade do escoamento de um fluido magnético, barotrópico no caso tridimensional:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M}) + \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}))] \quad (3.138)$$

$$\implies \frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M} + \mathbf{H}\mathbf{H}))] \quad (3.139)$$

A equação (3.139) representa a forma mais compacta da equação da vorticidade obtida para o escoamento de um fluido magnético. No caso de um escoamento bidimensional, o termo  $\xi \cdot \nabla \mathbf{u}$  é zero:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{M} + \mathbf{H}\mathbf{H}))] \quad (3.140)$$

Apesar de expressar a forma mais compacta da equação da vorticidade associada ao escoamento de um fluido magnético barotrópico no caso bidimensional, a equação (3.140) não é a forma mais simplificada a ser discretizada, e portanto será manipulada. A partir da identidade vetorial (A.12), será feita outra manipulação dos termos magnéticos da equação da vorticidade (3.131). Dada a equação (3.131)

$$\frac{D\xi}{Dt} = \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})) + \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H})] \quad (3.141)$$

e a identidade vetorial (A.12), tem-se:

$$\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] = \nabla [\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (3.142)$$

Desenvolvendo o termo entre colchetes do primeiro termo à direita da equação (3.142) em notação indicial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (M_j H_k) \epsilon_{j k p} \hat{\mathbf{e}}_p = \frac{\partial}{\partial x_i} (M_j H_k) \epsilon_{i j k} \quad (3.143)$$

$$= \left[ M_j \frac{\partial H_k}{\partial x_i} + H_k \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right] \epsilon_{i j k} \quad (3.144)$$

$$= -\mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) \quad (3.145)$$

Como  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , consequência da Lei de Ampère-Maxwell no limite magnetostático, o primeiro termo se anula. Expandindo o segundo termo em notação indicial, tem-se:

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = H_k \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \epsilon_{i j k} \quad (3.146)$$

$$= H_1 \frac{\partial M_3}{\partial x_2} + H_2 \frac{\partial M_1}{\partial x_3} + H_3 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} - H_1 \frac{\partial M_2}{\partial x_3} - H_2 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} + H_3 \frac{\partial M_1}{\partial x_2} \quad (3.147)$$

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = 0, \quad (3.148)$$

pois  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$  e  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$  no caso bidimensional. Dessa forma tem-se que

$$\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] = -\nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \quad (3.149)$$

e a equação da vorticidade do escoamento de um fluido magnético no caso bidimensional é dada por

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi = \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] \quad (3.150)$$

Posteriormente, a equação (3.150) será adimensionalizada e discretizada para que possa ser resolvida numericamente.

### 3.7 Limite superparamagnético

Na condição de superparamagnetismo, como representado na figura 3.1c, a magnetização do meio se orienta completamente na direção do campo aplicado e que, como



citado na equação (3.8), tal grau de magnetização está associada à suscetibilidade magnética do meio  $\chi_m$ , de forma que:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 = \chi_m \mathbf{H} \quad (3.151)$$

Será deduzida a Equação da vorticidade de um fluido superparamagnético, no caso mais geral de um meio com suscetibilidade magnética variável. Neste caso, inserindo (3.151) em (3.131), tem-se:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{\rho} \{ \nabla \times [ \nabla \times (\chi_m \mathbf{H} \times \mathbf{H}) ] + \nabla \times [ \chi_m \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} ] \} \quad (3.152)$$

Como  $\mathbf{H} \times \mathbf{H} = 0$ , substituindo a equação (3.48) em (3.152) tem-se:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{2\rho} \nabla \times [ \chi_m \nabla H^2 ] \quad (3.153)$$

Desenvolvendo o último termo à direita da equação (3.153) em notação indicial, tem-se:

$$\nabla \times [ \chi_m \nabla H^2 ] = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \times \left( \chi_m \frac{\partial H_j^2}{\partial x_k} \hat{e}_k \right) \quad (3.154)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \chi_m \frac{\partial H_j^2}{\partial x_k} \right) \epsilon_{ikp} \hat{e}_p \quad (3.155)$$

$$= \left( \frac{\partial H_j^2}{\partial x_k} \frac{\partial \chi_m}{\partial x_i} + \chi_m \frac{\partial^2 H_j^2}{\partial x_i \partial x_k} \right) \epsilon_{ikp} \hat{e}_p \quad (3.156)$$

$$= \nabla \chi_m \times \nabla H^2 + \chi_m \nabla \times \nabla H^2 \quad (3.157)$$

$$\implies \nabla \times [ \chi_m \nabla H^2 ] = \nabla \chi_m \times \nabla H^2, \quad (3.158)$$

pois o rotacional do gradiente do escalar  $H^2$  é igual a zero. Substituindo (3.158) em (3.153), tem-se a equação da vorticidade de um meio magnético com suscetibilidade magnética variável:

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi + \frac{\mu_0}{2\rho} \nabla \chi_m \times \nabla H^2 \quad (3.159)$$

Assim, pode-se concluir que até mesmo no limite superparamagnético (i.e. magnetização do meio  $\mathbf{M}$  tem a mesma direção do campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$ ), gradientes de suscetibilidade magnética (e.g. devido à gradientes de temperatura) são mecanismos geradores de vorticidade. Tal fenômeno foi estudado por Gontijo e Cunha (2012), que conduziram experimentalmente estudos sobre convecção termo-magnética em cavidades, com medição dos campos de temperatura e das taxas de transferência de calor, e com determinação de padrões de escoamento e de instabilidades por meio da visualização direta do escoamento. Observou-se a formação de correntes convectivas secundárias, provenientes da estratificação do campo suscetibilidade magnética induzido, tanto pelos gradientes de temperatura na cavidade, quanto pela aplicação de um campo magnético externo. Siqueira et al. (2013) também conduziu estudos teóricos acerca a influência de campos magnéticos

rotativos sobre fluidos magnéticos e observou taxas de aquecimento e resfriamento com perfis simétricos e sua correlação com o campo de vorticidade associada ao escoamento induzido do fluido.

Em meios com suscetibilidade magnética constante ( $\nabla\chi_m = 0$ ), tem-se que

$$\frac{D\xi}{Dt} = \xi \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \xi \quad (3.160)$$

e, conseqüentemente, não há nenhuma contribuição de fatores magnéticos como mecanismos geradores de vorticidade. De fato o limite superparamagnético com suscetibilidade constante resulta em uma expressiva simplificação matemática da equação da vorticidade para um fluido magnético, diminuindo significativamente o custo computacional de simulações e facilitando o desenvolvimento analítico do problema, porém tal proposição pode resultar em uma descrição falha devido aos mecanismos negligenciados na formulação da equação (3.160). Serão abordados os casos do escoamento de um fluido magnético, tanto no limite superparamagnético com gradientes de suscetibilidade magnética, quanto o caso mais geral de um fluido barotrópico. Para isso será desenvolvida uma equação evolutiva da magnetização do meio, a fim de analisar profundamente a relação entre o campo de vorticidade  $\xi$  e a magnetização do fluido  $\mathbf{M}$ , com o intuito de obter uma simulação numérica que compute todos os mecanismos incorporados à equação evolutiva para a magnetização que será proposta posteriormente.

Considere a equação de Laplace para o potencial magnético (3.18):

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (3.161)$$

no limite superparamagnético, a magnetização do meio é dada pela equação (3.151):

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (3.162)$$

e com suscetibilidade variável de acordo com o campo aplicado  $\mathbf{H}$ :

$$\chi_m = \chi_m(\mathbf{H}). \quad (3.163)$$

Inserindo (3.15) em (3.162), tem-se:

$$\mathbf{M} = \chi_m \nabla \phi_m \quad (3.164)$$

e inserindo (3.164) em (3.161), tem-se:

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot (\chi_m \nabla \phi_m) \quad (3.165)$$

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m - \chi_m \nabla^2 \phi_m \quad (3.166)$$

$$(1 + \chi_m) \nabla^2 \phi_m = -\nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m \quad (3.167)$$

$$\nabla^2 \phi_m = -\left(\frac{1}{1 + \chi_m}\right) \nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m. \quad (3.168)$$

A equação (3.168) é a equação de Laplace para o potencial magnético com suscetibilidade magnética variável, e irá compor o sistema de equações governantes para este caso.

A seguir será desenvolvida uma formulação para a equação evolutiva da magnetização, que irá compor o sistema de equações governantes do caso mais geral do escoamento de um fluido magnético barotrópico.

### 3.8 Modelos de magnetização de equilíbrio de suspensões magnéticas

A magnetização é definida, macroscopicamente, como o estado de polarização de um meio contínuo magnetizado. Inicialmente será definida nesta seção o conceito de momento magnético, como propriedade molecular ou nano, e sua direta relação com a magnetização do meio, como propriedade macroscópica, para que seja obtida posteriormente uma descrição para a quantidade de magnetização.

Seguindo o desenvolvimento de Cunha (2012), a definição de momento de dipolo magnético pode ser feita, de forma simples, considerando um circuito fechado de pequena área  $\Delta A$  conduzindo uma corrente elétrica  $I$  constante. O momento de dipolo magnético associado a este circuito, medido em joules por tesla ou em ampère metro quadrado ( $JT^{-1} = Am^2$ ) é, por definição:

$$\mathbf{m} = I\Delta A\hat{\mathbf{n}} \quad (3.169)$$

sendo  $\hat{\mathbf{n}}$  o vetor unitário normal à pequena área  $\Delta A$ , definido pelo sentido da corrente elétrica.

Seja um elemento contínuo de volume  $\delta V$  formado por um número suficientemente grande de partículas magnéticas, ou momentos magnéticos, distribuídas de forma estatisticamente homogênea e que sejam independentes no volume material  $\delta V$ , pode-se calcular uma média dos momentos de dipolo contidos neste volume contínuo do meio  $\delta V$  de forma que o resultado desta média tenha variações muito pequenas na escala local  $\Delta V$ . Nestas condições, pela hipótese de ergodicidade, pode-se dizer que a média volumétrica dos momentos de dipolo em um período de tempo e a média da distribuição de probabilidade associada aos momentos de dipolo magnético das partículas contidas no volume material  $\delta V$  são equivalentes. Dessa forma, define-se a média volumétrica dos momentos magnéticos distribuídos em  $\delta V$  como sendo

$$\langle \mathbf{m} \rangle(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V' \rightarrow \delta V} \frac{1}{\delta V'} \int_{\delta V'} \mathbf{m}(\mathbf{y}, t) dV, \quad (3.170)$$

em que  $\mathbf{x}$  é uma posição fixa no interior do volume material  $\delta V$ , em torno da qual é calculado o momento de dipolo médio local, e  $\mathbf{y}$  percorre todo o volume  $\delta V$ , podendo estar no domínio das partículas magnéticas suspensas ou no domínio do fluido base contínuo

como mostrado na figura 3.8. Considerando que o sistema atingiu o estado de regime permanente, a dependência do tempo será desconsiderada nessa análise.

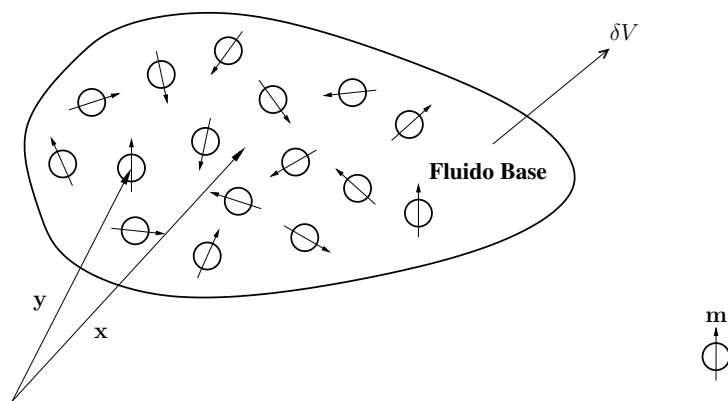


Figura 3.8 – Esquema representativo do volume  $\delta V$  da média volumétrica com posição  $\mathbf{x}$  fixa e uma coordenada de varredura interna  $\mathbf{y}$  em um volume infinitesimal  $\delta V$  de uma suspensão de partículas magnéticas com um momento magnético  $\mathbf{m}$  associado.

Para a suspensão em estudo, o volume total  $\delta V$  pode ser escrito em termos da soma do volume do meio mais o volume total das partículas magnéticas suspensas:

$$\delta V = \delta V_m + \sum_k^N v_p^k, \quad (3.171)$$

sendo  $\delta V_m$  o volume do meio,  $N$  o número total de partículas suspensas e  $v_p$  o volume de uma partícula. Dessa forma, pode-se escrever a equação (3.170) na forma

$$\langle \mathbf{m} \rangle(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V' \rightarrow \delta V} \frac{1}{\delta V'} \left[ \int_{\delta V_m} \mathbf{m}(\mathbf{y}) dV + \int_{\sum_k^N v_p^k} \mathbf{m}(\mathbf{y}) dV \right]. \quad (3.172)$$

Sabendo que o fluido base da suspensão não exibe comportamento magnético, a contribuição da integral no volume do meio base contínuo se anula, pois  $\mathbf{m}(\mathbf{y}) = 0$  para qualquer  $\mathbf{y}$  que não pertença ao domínio das partículas magnéticas suspensas. Tem-se então que

$$\langle \mathbf{m} \rangle(\mathbf{x}) = \lim_{\delta V' \rightarrow \delta V} \frac{1}{\delta V'} \int_{\sum_k^N v_p^k} \mathbf{m}(\mathbf{y}) dV. \quad (3.173)$$

Matematicamente, a equação (3.173) representa uma média volumétrica de todos os momentos de dipolo magnéticos orientados na direção do campo magnético aplicado. Na escala do contínuo, a magnetização representa o efeito médio das componentes dos momentos de dipolo magnéticos na direção do campo magnético aplicado. Para o fluido magnético em estudo, pode-se interpretar a magnetização  $\mathbf{M}$  como uma medida global do grau de alinhamento de momentos magnéticos com o campo magnético aplicado. Aproximando a equação (3.173) pela sua representação discreta, considerando uma suspensão com  $N$  partículas de mesmo volume  $v_p$  e multiplicando e dividindo a somatória por  $N$ , tem-se:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \left( \frac{1}{\delta V} \right) \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k v_p^k = v_p \left( \frac{N}{\delta V} \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k \right) \quad (3.174)$$

Definindo o número de densidade de partículas  $n$  e a média dos momentos de dipolo magnético  $\bar{\mathbf{m}}$ :

$$n = \frac{N}{\delta V} \quad (3.175)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{m}^k, \quad (3.176)$$

é obtida uma expressão equivalente para a média volumétrica dos momentos de dipolo magnético:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = v_p n \bar{\mathbf{m}} = \phi \bar{\mathbf{m}} \quad (3.177)$$

em que  $\phi = nv_p$  é a fração volumétrica de partículas em  $\delta V$ . Finalmente, a partir da equação (3.200) é possível definir a quantidade vetorial local média em  $\delta V$  denominada magnetização  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{v_p} = n \bar{\mathbf{m}} \quad (3.178)$$

Pode-se inferir da equação (3.178) que no caso onde todos os momentos magnéticos em  $\delta V$  estão alinhados com a direção do campo aplicado  $\mathbf{H}$  a média volumétrica corresponde ao valor máximo da magnetização, denominada magnetização de saturação do fluido  $\mathbf{M}_s$ , e permanece constante para intensidades superiores do campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$ . A magnetização  $\mathbf{M}$  é, portanto, uma média volumétrica de momentos magnéticos na direção do campo aplicado  $\mathbf{H}$  por unidade de volume da partícula. Definida a magnetização  $\mathbf{M}$  como propriedade global da suspensão, é conveniente definir possíveis valores que tal propriedade assume como função da intensidade de campo magnético aplicado e do escoamento ao qual o meio é submetido.

A magnetização de equilíbrio  $\mathbf{M}_0$  descreve o estado do meio magnetizável em repouso, onde todos os momentos de dipolo magnético das partículas suspensas se orientaram parcialmente na direção do campo aplicado e atingiram orientações estacionárias (i.e. o sistema está em regime permanente). No caso onde os momentos de dipolo magnético da suspensão estão completamente orientados na direção do campo magnético aplicado, a magnetização do meio atinge seu valor máximo, denominado magnetização de saturação  $\mathbf{M}_s$ . Dessa forma, a magnetização de equilíbrio é limitada pela magnetização de saturação, ou seja:

$$0 \leq \mathbf{M}_0 \leq \mathbf{M}_s \quad (3.179)$$

Sendo um fluido magnético uma suspensão de partículas magnéticas, é conveniente definir a magnetização de saturação do meio como uma função, tanto da magnetização do sólido  $\mathbf{M}_d$ , quanto da fração volumétrica  $\phi$  de partículas magnéticas suspensas. Dessa forma:

$$\mathbf{M}_s = \phi \mathbf{M}_d \quad (3.180)$$

e podemos inferir que a magnetização de saturação do meio líquido contínuo corresponde à uma porcentagem da magnetização do sólido magnético em suspensão.

A média dos momentos de dipolo magnético  $\langle \mathbf{m} \rangle$  pode ser calculada, teoricamente, a partir da função densidade angular de probabilidade  $P_\theta$ , tal que para uma coleção de  $N$  partículas com momentos de dipolo magnético independentes, o número de partículas na configuração entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é dado pela probabilidade  $P_\theta d\theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo que um determinado vetor momento magnético  $\mathbf{m}$  de uma partícula faz com o campo aplicado  $\mathbf{H}$ . Dessa forma, considerando que a média  $\overline{\mathbf{m}}$  satisfaz as condições anteriores e a partir da definição discreta de  $\overline{\mathbf{m}}$  expressa na equação (3.176), a média de probabilidade padrão na forma integral é dada por Rosensweig (2013):

$$\overline{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{e}}_H \int_0^\theta (m \cos \theta) P_\theta(\theta) d\theta \quad (3.181)$$

sendo  $\hat{\mathbf{e}}_H = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$ . Para momentos magnéticos com orientações independentes, uma função de densidade de probabilidade  $P(\theta)$  normalizada, com  $\int P(\theta) d\theta = 1$  em todo o intervalo  $\theta$ , é tipicamente uma distribuição dada por McQuarrie (1976) com fator exponencial de Boltzmann:

$$P(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right). \quad (3.182)$$

Neste contexto,  $\varepsilon$  corresponde à energia necessária para desalinhar o momento de dipolo magnético  $\mathbf{m}$  de seu alinhamento paralelo, ou preferencial, com o campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$ .

Sendo  $d\varepsilon = T_m d\theta$  e  $T_m = mH \sin \theta$  a intensidade do torque magnético por unidade de volume de partícula. Considera-se a intensidade dos momentos de dipolo magnético  $m$  igual para todas as partículas suspensas, porém, devido às variações de orientação de  $\mathbf{m}$  de cada partícula, é necessário que o cálculo da média de probabilidade dado pela equação (3.181) seja realizado para orientações  $\theta$  arbitrárias. A solução da integral dada em (3.181), para a densidade de probabilidade  $P(\theta)$  de momentos de dipolo magnéticos de orientações independentes, resulta em

$$\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \left( \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = \mathbf{m} \mathcal{L}(\alpha) \quad (3.183)$$

sendo a função Langevin  $\mathcal{L}(\alpha)$  o resultado médio, proveniente da condição de que os momentos magnéticos das partículas suspensas não estavam necessariamente orientados na direção do campo aplicado.

O parâmetro adimensional

$$\alpha = \frac{mH}{kT} \quad (3.184)$$

representa a razão entre as forças magnéticas  $F_m \sim mH/l$  e forças brownianas  $F_B \sim kT/l$ , sendo  $l$  uma escala característica de comprimento da suspensão como, por exemplo, o diâmetro das partículas suspensas. De forma global, a magnetização de equilíbrio de um fluido magnético é bem descrito pela equação de Langevin, como mostrado por Odenbach e Thurm (2002), Blums et al. (1997):

$$\frac{M_0}{M_s} = \left[ \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right] = \mathcal{L}(\alpha) \quad (3.185)$$

substituindo a equação (3.180) em (3.185), tem-se:

$$\frac{M_0}{M_d} = \phi \mathcal{L}(\alpha) \quad (3.186)$$

A partir de uma análise da equação (3.184) é possível inferir que  $\alpha \gg 1$  descreve o caso em que o campo externo domina o movimento das partículas, que não apresentam resposta relevante às flutuações térmicas do movimento Browniano e permanecem alinhadas na direção do campo aplicado. Caso  $\alpha \ll 1$ , a suspensão apresenta uma magnetização muito pequena devido ao domínio das forças brownianas e os momentos magnéticos possuem uma distribuição de orientações aleatórias. Em tais casos, é possível representar a função Langevin por uma série de Taylor em torno de  $\alpha$  na forma

$$\mathcal{L}(\alpha) \sim \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \frac{2\alpha^5}{945} + \dots \quad (3.187)$$

com o limite  $\mathcal{L}(\alpha) = \alpha/3$  representando a condição de paramagnetismo do fluido.

Pode-se observar que a magnetização de equilíbrio, descrita pela equação (3.186), é função da fração volumétrica de partículas magnéticas  $\phi$  e que o modelo de Langevin consiste um modelo de ordem  $\phi$ , desprezando interações magnéticas entre partículas. Segundo Gontijo (2014), o modelo de Langevin descreve muito bem o comportamento de suspensões magnéticas diluídas e, conseqüentemente, o problema estudado neste trabalho.

Correções de ordem superiores  $\mathcal{O}(\phi^2)$  e  $\mathcal{O}(\phi^3)$  foram propostas por Ivanov e Kuznetsova (2001), com correções do cálculo da magnetização de equilíbrio para interações magnéticas de, pelo menos, três partículas próximas na suspensão. Neste caso, a função Langevin corrigida pode ser estendida para suspensões magnéticas com frações volumétricas de aproximadamente 20%. No caso em que  $\alpha \gg 1$ , quando as forças magnéticas são muito superiores às forças Brownianas na suspensão (i.e. as interações campo-partícula dominam as interações partícula-partícula), todos os modelos de magnetização entram em colapso e convergem para o mesmo valor de magnetização de saturação  $M_s$ , como mostrado por Gontijo e Cunha (2015), independente do valor da fração volumétrica.

Em regiões onde  $\alpha \sim 1$ , a descrição do comportamento de suspensões magnéticas não diluídas demanda correções de ordem superiores a fim de contabilizar os efeitos de interação entre pares de partículas sobre a magnetização de equilíbrio da suspensão devido à discrepância obtida pela análise comparativa entre os modelos feita por Gontijo e Cunha (2015). O modelo proposto por Ivanov e Kuznetsova (2001) é expresso por:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_L(\alpha) \left[ 1 + \frac{4\pi}{3} \frac{d\mathbf{M}_L(\alpha)}{d\alpha} + \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^2 \mathbf{M}_L(\alpha) \frac{d^2\mathbf{M}_L(\alpha)}{d\alpha^2} + \frac{(4\pi)^2}{144} \left( \frac{d\mathbf{M}_L(\alpha)}{d\alpha} \right)^2 \right], \quad (3.188)$$

em que  $\mathbf{M}_L(\alpha)$  representa o modelo de Langevin  $\mathcal{O}(\phi)$ . A expressão (3.188) foi expandida por Gontijo (2014), e pode ser expressa por:

$$\mathbf{M}_0 = [\mathbf{M}_d L(\alpha)] \phi + \left[ \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}_d g(\alpha) \right] \phi^2 + \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^2 h(\alpha) + \frac{(4\pi)^2}{144} z(\alpha) \right] \mathbf{M}_d \right\} \phi^3, \quad (3.189)$$

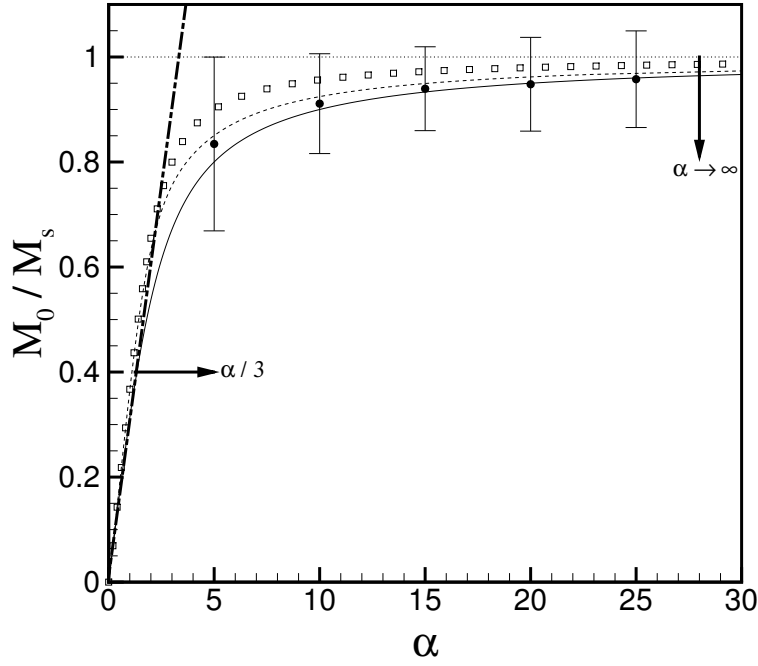


Figura 3.9 – Gontijo e Cunha (2015): A magnetização de equilíbrio em função de  $\alpha$  para  $\phi = 0.05$  e  $\lambda = 1.0$ . A linha contínua representa o modelo de Langevin  $\mathcal{O}(\phi)$ , a linha pontilhada e os quadrados representam os modelos  $\mathcal{O}(\phi^2)$  e  $\mathcal{O}(\phi^3)$  de Ivanov e Kuznetsova (2002), respectivamente. Por último, os pontos pretos representam os resultados numéricos, desconsiderando a periodicidade para interações magnéticas, de Gontijo e Cunha (2015). Em detalhe estão plotados os valores de magnetização de equilíbrio para pequenos valores de  $\alpha$ , com a solução assintótica para  $\alpha \ll 1$ :  $M_0/\phi M_d = \alpha/3$  em um regime paramagnético

em que as funções  $L(\alpha)$ ,  $g(\alpha)$ ,  $h(\alpha)$  e  $z(\alpha)$  são dadas por:

$$L(\alpha) = \coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha}; \quad (3.190)$$

$$g(\alpha) = L(\alpha) \left[ -\alpha \operatorname{cosech}^2(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \right]; \quad (3.191)$$

$$h(\alpha) = L^2(\alpha) \left[ 2\alpha^2 \coth(\alpha) \operatorname{cosech}^2(\alpha) - \frac{2}{\alpha} \right]; \quad (3.192)$$

$$z(\alpha) = \frac{g^2(\alpha)}{L(\alpha)}. \quad (3.193)$$

Observe que, apesar de a magnetização de equilíbrio  $\mathbf{M}_0$  ser definida para um fluido magnético em repouso, devido ao movimento Browniano tal suspensão sempre possuirá agitação a nível molecular e interações magnéticas de partículas suspensas. Tal fenômeno de interação de longo alcance microestrutural, negligenciado na determinação da magnetização de equilíbrio pelo modelo de Langevin, é o fator que demanda correções no cálculo da magnetização de ordem  $\mathcal{O}(\phi)$ , em especial para suspensões não diluídas.



### 3.9 Desenvolvimento de uma equação evolutiva para a magnetização do meio

Estabelecida uma formulação para a magnetização de equilíbrio  $\mathbf{M}_0$ , uma das propriedades mais determinantes da caracterização de um fluido magnético, deve-se obter uma equação evolutiva para que seja determinada a influência hidrodinâmica na determinação da magnetização de um fluido magnético em um escoamento.

Como discutido anteriormente, e mostrado na figura 3.7a, a vorticidade do escoamento de um fluido magnético submetido a um campo magnético provoca o desalinamento dos momentos de dipolo magnéticos das partículas e, conseqüentemente, o surgimento de torques internos. Sem uma formulação absoluta, equações evolutivas fenomenológicas para a magnetização de um fluido magnético tem sido propostas nas últimas décadas, e sua formulação será descrita a seguir.

Para baixas magnetizações ou para campos aplicados de baixa intensidade, a evolução da magnetização  $\mathbf{M}$  de um meio incompressível com vorticidade  $\boldsymbol{\xi}$ , dada por Felderhof e Kroh (1999), é dada por:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}] + \frac{1}{\tau_B}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}). \quad (3.194)$$

A equação (3.194) corresponde a um modelo de Debye com um tempo de relaxação magnética isotrópico  $\tau_B$  com interações hidrodinâmicas e magnéticas entre partículas negligenciadas.

O sistema convencional de equações referentes a uma análise ferrohídrodinâmica é composto pela equação do movimento de um fluido magnético dada pela equação (3.91), pela equação da continuidade (3.130), pelas equações de Maxwell no limite magnetostático (3.1) e (3.2) e pela equação de magnetização, deduzida por Shliomis (2001), dada por:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}) + \frac{1}{\tau}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \frac{\mu_0}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}, \quad (3.195)$$

em que o último termo à direita da equação (3.195) incorpora torques magnéticos viscosos à proposição de uma equação fenomenológica evolutiva descrita em (3.194) proposta por Felderhof e Kroh (1999). Considerando a dependência da magnetização de um fluido magnético em relação à parte simétrica  $\mathbf{D}$  do tensor gradiente de velocidade  $\nabla\mathbf{u}$ , foi demonstrada experimentalmente tal dependência Odenbach e Thurm (2002), cuja formulação foi proposta por Müller e Liu (2001):

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{M}) + \frac{1}{\tau}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \quad (3.196)$$

em que o último termo à direita da equação (3.196) reflete o acoplamento da magnetização do meio com alongamento do escoamento. A equação (3.196) foi proposta considerando

que o campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$  é de baixa intensidade e pode ser omitido. Incorporando os efeitos provenientes do campo aplicado, tem-se

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \left[ \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}, \quad (3.197)$$

que possui termos capazes de contabilizar a influência do campo aplicado no escoamento de um fluido magnético a ser investigado numericamente neste trabalho.

As proposições de equações evolutivas fenomenológicas para a magnetização descritas pelas equações (3.194) a (3.197) foram elaboradas baseadas em um tempo equivalente de relaxação magnética Browniana  $\tau_B$ . Caso este escoamento possua um tempo característico de relaxação magnética de Néel  $\tau_N$  (i.e. partículas cujo momento de dipolo magnético possui um grau de liberdade extra e rotaciona livremente dentro da partícula), a determinação de  $\mathbf{M}$  só poderá ser feita, de forma consistente, incorporando termos relativos à velocidade de rotação do momento de dipolo interno à partícula  $\boldsymbol{\omega}$ . Gontijo (2014) expressa a variação material da velocidade angular das partículas que compõem um fluido magnético, a partir de uma análise do balanço do momento angular de um volume contínuo, na forma:

$$\rho J \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mu' \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}, \quad (3.198)$$

em que  $\rho$  representa a massa específica do volume infinitesimal contínuo em análise,  $J$  seu momento de inércia polar,  $\mu'$  a magnetoviscosidade do meio,  $\mathbf{M}$  o campo de magnetização e  $\mathbf{H}$  o campo magnético aplicado. Note que a equação (3.198) só possui sentido físico para um fluido magnético com tensor de tensões assimétricos (i.e. com torques internos), cujas partículas magnéticas não giram livremente no sentido da vorticidade, como mostrado na figura 3.7b.

Ao fim desta análise acerca da influência do tempo de relaxação magnética característico sobre a formulação de uma equação evolutiva para a magnetização do meio, é possível generalizar a equação evolutiva de  $\mathbf{M}$  na forma:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \left[ \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A} \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}, \quad (3.199)$$

em que o parâmetro  $\mathbf{A}$  pode representar torques magnéticos viscosos, dados por  $\frac{1}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ , ou uma velocidade interna de spin  $\boldsymbol{\omega}$  das partículas magnéticas suspensas na solução. Um fluxograma de tomada de decisão sobre a formulação a ser utilizada a partir da determinação do tempo de relaxação magnética dominante está presente na figura 3.10.

Um dos objetivos deste trabalho consiste na visualização de alterações macroscópicas no escoamento de um fluido magnético, geradas pela presença de torques magnéticos internos à solução. O acoplamento entre a velocidade angular de spin das partículas magnéticas e variações no campo global de magnetização  $\mathbf{M}$  não perturba tal escoamento em escalas de relaxação magnéticas predominantemente Brownianas, e portanto a solução de

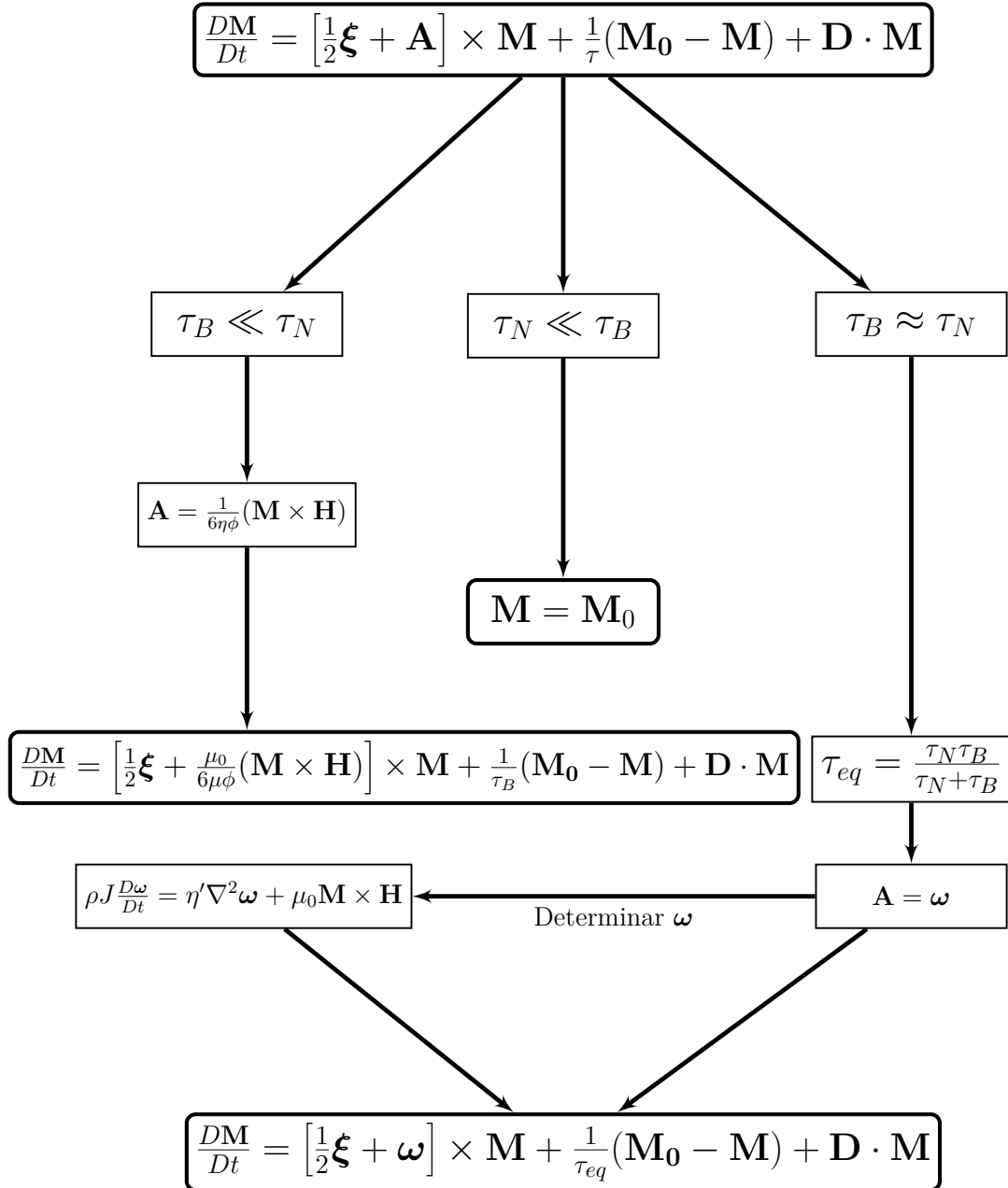


Figura 3.10 – Determinação de uma expressão para equação evolutiva fenomenológica do campo de magnetização do escoamento de um fluido magnético, submetido à um campo aplicado, em termos do tempo de relaxação magnética equivalente

tal equação não será abordada neste trabalho. Desta forma, a equação evolutiva para a magnetização do meio a ser utilizada na presente análise é dada por:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \left[ \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi}(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B}(\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \quad (3.200)$$

Posteriormente a formulação vorticidade-função corrente será desenvolvida, que possibilitará a solução para o problema evitando a necessidade de solução de variáveis primitivas.

# 4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

## 4.1 Método das diferenças finitas

Frequentemente a solução de situações práticas de engenharia é conduzida por meio da solução de problemas físicos relativamente complexos, com a finalidade de determinar o comportamento de campos associados entre si (e.g. pressão, velocidade, temperatura, campo magnético induzido). Os campos destas variáveis, funções de coordenadas espaciais e temporais, são expressos na forma de equações diferenciais deduzidas por meio da aplicação de um princípio físico maior, como o princípio da conservação da massa, segunda lei de Newton, primeira lei da termodinâmica, equações de Maxwell do eletromagnetismo, a um volume infinitesimal do meio a ser estudado.

Com o intuito de exemplificar o Método das Diferenças Finitas, será descrito a seguir o método de solução do problema clássico da equação transiente da difusão de calor, que na ausência de geração interna de energia pode ser expressa por:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T, \quad (4.1)$$

em que  $\rho$  é a massa específica do meio contínuo em estudo,  $C_p$  é a propriedade material calor específico à pressão constante,  $k$  é a condutividade térmica do meio,  $T$  o campo de temperatura,  $t$  a variável tempo e  $\nabla^2$  o operador escalar Laplaciano.

A solução da equação (4.1) resulta na determinação do campo de temperatura  $T = T(x, y, z, t)$ , em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as coordenadas do espaço cartesiano tridimensional e  $t$  a variável tempo. Por ser uma função de coordenadas espaciais, a equação (4.1) deve ser resolvida em um domínio de cálculo a partir da aplicação tanto das condições de contorno, quanto das condições iniciais associadas ao campo  $T$ . Entretanto, tal equação não possui solução analítica e demanda técnicas computacionais e numéricas de solução.

A solução por métodos numéricos e computacionais de equações sem solução analítica, em mecânica dos fluidos, é denominada *Computational Fluid Dynamics - CFD* e consiste na proposição de técnicas eficientes de solução das equações diferenciais parciais de forma aproximada através de códigos computacionais de simulação numérica, que é a metodologia adotada para solução do problema proposto neste trabalho. Outras metodologias permitem a solução de problemas similares, como o Método dos Volumes Fi-

nitos (*Finite Volume Method - FVM*) e o Método dos Elementos Finitos (*Finite Elements Method - FEM*), utilizadas por Ramos et al. (2005) e Lavrova et al. (2003) na na solução de escoamentos laminares de fluidos magnéticos em dutos e de problemas acoplados da Ferrohidrodinâmica, respectivamente.

Será introduzida a metodologia de solução de equações diferenciais parciais conhecida como Método das Diferenças Finitas na solução da equação (4.1). Um ponto comum entre os métodos citados anteriormente é a necessidade de discretizar o domínio de cálculo da solução. Dessa forma, ao invés da obtenção da solução de todo o domínio que seria obtida por meio de uma solução analítica, a solução será obtida para um número finito de pontos, que será então extrapolado para todo o domínio com erros numéricos associados. Um exemplo de discretização de um domínio de cálculo retangular é mostrado na figura 4.1.

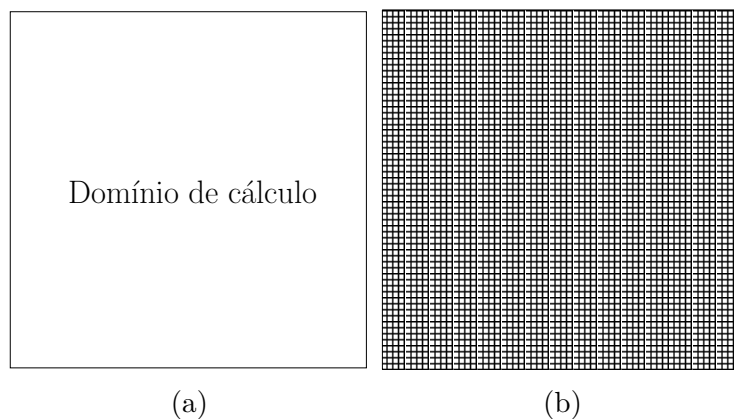


Figura 4.1 – A figura 4.1a representa o domínio de cálculo neste exemplo da solução da equação do calor sem geração pelo método das diferenças finitas. A figura 4.1b mostra a discretização do domínio de cálculo em uma malha de 4096 nós.

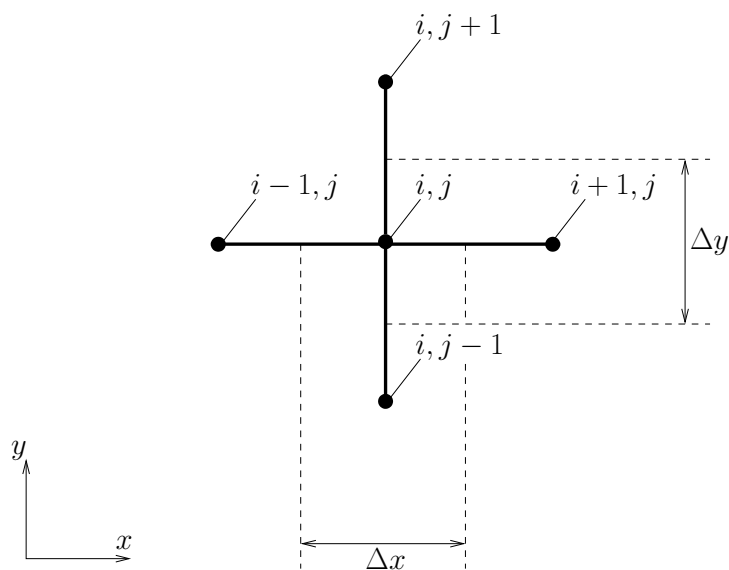


Figura 4.2 – Ampliação de um nó interno em uma malha bidimensional

Considerando uma malha de cálculo bidimensional, em que um nó interno arbitrário possui a numeração ilustrada na figura 4.2. Uma expansão em série de Taylor para determinar as temperaturas nos nós  $[i + 1, j]$ ,  $[i - 1, j]$ ,  $[i, j + 1]$  e  $[i, j - 1]$  em termos de seu valor no nó central  $[i, j]$  fornece:

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (4.2)$$

$$T_{i-1,j} = T_{i,j} - \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (4.3)$$

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta y^3) \quad (4.4)$$

$$T_{i,j-1} = T_{i,j} - \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta y^3) \quad (4.5)$$

Utilizando o argumento de que os termos ordem  $\Delta x^2$  e  $\Delta y^2$  são muito pequenos, dado que as dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$  já constituem grandezas de pequena ordem, é possível truncar a série finita expressa nas equações (4.2) a (4.5), considerando apenas termos ordem  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Note que este procedimento leva a uma solução aproximada da equação governante do problema. De fato, a medida que mais nós são adicionados à malha de cálculo, a tendência é a obtenção de uma solução aproximada mais próxima da realidade física que se pretende simular. Procedendo desta forma, tem-se

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad (4.6)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2,j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (4.7)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad (4.8)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-1/2} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (4.9)$$

A obtenção de termos envolvendo derivadas de segunda ordem depende das derivadas de primeira ordem expressas nas equações (4.6) a (4.9) e pode ser dada por:

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-1/2,j}}{\Delta x} \approx \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2} \quad (4.10)$$

e

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j+1/2} - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-1/2}}{\Delta y} \approx \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta y^2}. \quad (4.11)$$

A discretização de termos de derivada temporal segue o mesmo raciocínio, de modo que

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{i,j} \approx \frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^p}{\Delta t}. \quad (4.12)$$

Neste caso o índice superior  $p$  denota o instante de tempo anterior, enquanto o índice  $p + 1$  denota o valor da temperatura no instante atual. Determinadas as expressões para os termos associados às derivadas espaciais e temporais que surgem na equação da difusão de calor, é possível escrever esta equação diferencial parcial em sua forma discretizada. Explicitando a equação (4.1) em termos das suas componentes bidimensionais, tem-se:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (4.13)$$

em que  $\alpha$  é uma propriedade do meio, conhecida como difusividade térmica, dada por

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}. \quad (4.14)$$

Utilizando as derivadas expressas nas equações (4.10), (4.11) e (4.12), a equação (4.15) é descrita em sua forma discretizada como:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^p}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^r + T_{i-1,j}^r - 2T_{i,j}^r}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^r + T_{i,j-1}^r - 2T_{i,j}^r}{\Delta y^2} \quad (4.15)$$

Note que o índice superior, referente ao instante de tempo em que os termos do lado direito da equação são considerados, foi definido de forma arbitrária na equação (4.15) como  $r$ . Na verdade existem três opções para o instante de tempo em que se deseja avaliar estes termos. Na formulação a ser utilizada no presente contexto, o índice  $r$  será feito igual a  $p$ , isto implica que a solução do valor da temperatura em cada nó evoluirá no tempo de acordo com os valores das temperaturas dos nós vizinhos em um instante de tempo anterior. Desta forma, para simplificar a equação (4.15) antes de prosseguir, considera-se neste momento uma malha de cálculo na qual  $\Delta x = \Delta y$  e isolar o termo  $T_{i,j}^{p+1}$ . Procedendo desta maneira, ontém-se:

$$T_{i,j}^{p+1} = F_O(T_{i+1,j}^p + T_{i-1,j}^p + T_{i,j+1}^p + T_{i,j-1}^p) + (1 - 4F_O)T_{i,j}^p, \quad (4.16)$$

em que  $F_O$  é definido como número de Fourier, um parâmetro adimensional expresso por  $F_O = \alpha \Delta t / \Delta x^2$ . O valor do número de Fourier é conhecido a partir do momento em que a malha de cálculo é construída e o passo de tempo é imposto pelo usuário. A equação (4.16) traz a seguinte informação: o valor da temperatura de um nó interno arbitrário no instante de tempo atual em uma malha de cálculo, que possui como objetivo representar um domínio físico espacial onde se deseja conhecer informações sobre o campo de temperatura de um problema físico em que o meio encontra-se estacionário, pode ser determinado através dos valores das temperaturas dos nós vizinhos avaliados em um instante de tempo anterior e de seu próprio valor também avaliados em um instante de tempo anterior.

Desta forma, pode-se propor um algoritmo geral para a determinação dos campos de temperatura (em problemas de condução de calor, ou seja, meio estacionário) em superfícies de forma arbitrária da seguinte forma:



1. Constrói-se uma malha de cálculo que represente o domínio discretizado no qual deseja-se conhecer o campo de temperatura e como o mesmo evolui no tempo a partir de uma condição inicial;
2. Impõe-se uma condição de contorno para o problema, na qual as temperaturas dos nós de fronteira são conhecidas;
3. Impõe-se também uma condição inicial para o valor de todos os nós internos que compõem a malha de cálculo;
4. A partir da equação (4.16) os valores das temperaturas em todos os nós internos da malha de cálculo no instante de tempo atual são determinados;
5. O processo iterativo de evolução temporal da solução contínua até que a maior variação entre a temperatura de um nó interno arbitrário avaliada entre dois instantes consecutivos de tempo seja menor que uma tolerância pré-estabelecida pelo usuário;
6. Após a convergência da solução o processo termina.

## 4.2 Comparação entre formulações

A análise numérica do desenvolvimento de escoamentos consiste em, dado um campo de velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  em um dado tempo  $t$ , obter a dependência do campo de velocidade dada por  $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e então calcular  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  em um passo seguinte de tempo dado por  $t + \Delta t$ . Considere a equação do movimento, na sua forma adimensional, para um fluido Newtoniano incompressível:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.17)$$

Neste caso, dado  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  é possível avaliar as contribuições dos termos  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  e  $\frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}$  à variação temporal do campo de velocidade  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ . No caso bidimensional, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.20)$$

Dado o sistema de equações a ser solucionado numericamente, deve ser optada inicialmente o tipo de solução a ser obtida, acoplada ou segregada. A solução acoplada, ou direta, dos sistemas de equações algébricas gera uma matriz de coeficientes e soluciona todas as incógnitas simultaneamente, porém a matriz de coeficientes gerada é muito grande, esparsa e com poucos coeficientes não-nulos mesmo para discretizações moderadamente refinadas, como mostrado por Maliska (1994). Dessa forma, o custo computacional

associado à inversão desta matriz de coeficientes inviabiliza a solução direta do problema, a menos que um robusto método de tratamento de matrizes esparsas seja usado.

A solução segregada dos sistemas de equações através de métodos iterativos, que descartam as operações referentes aos elementos nulos na matriz de coeficientes, é a alternativa mais viável. Neste caso, o acoplamento pressão-velocidade em escoamentos incompressíveis, ou em escoamentos onde o campo de massa específica não é fortemente dependente do campo de pressão, se destaca e confere alta complexidade na solução do sistema de equações.

Entretanto, o método de solução segregada requer que todas variáveis tenham uma equação evolutiva para ser avançada no decorrer do cálculo. No caso de escoamentos incompressíveis isotérmicos, porém, não há uma equação evolutiva para o campo de pressão e sua influência é descrita somente em termos de seu gradiente nas equações do movimento (4.18) e (4.19). Dessa forma, a dificuldade do problema está associada à determinação do campo de pressão, expresso apenas em termos de seu gradiente nas equações do movimento para o caso bidimensional, de forma que as componentes do campo de velocidades obtidas satisfaçam a conservação da massa explicitada na equação (4.20), como feito por Zogheib e Barron (2011) na solução da equação do movimento pelo método das diferenças finitas em um domínio bidimensional. Caso o sistema de equações fosse resolvido de forma acoplada através da inversão da matriz dos coeficientes, o problema do acoplamento pressão-velocidade não existiria.

Outra alternativa é a formulação Vorticidade-Função de corrente, utilizada por Agouzal et al. (2014) na simulação numérica do escoamento de um fluido incompressível através de um meio poroso e por Tzirtzilakis (2015) na simulação do escoamento de um fluido biomagnético submetido a um campo magnético externo a fim de reduzir a fricção em aneurismas de diversas geometrias. Tal formulação possui vantagem em relação ao custo de simulação, quando comparado à metodologia do acoplamento do campo de pressão e velocidades, pois dispensa procedimentos iterativos de solução. Apesar de sua formulação ser restrita à problemas bidimensionais, essa formulação é atrativa devido ao seu baixo custo computacional e será a formulação utilizada na solução do problema proposto neste trabalho. Na seção seguinte será deduzida sua formulação.

### 4.3 Formulação Vorticidade-Função de corrente

Dada a equação (3.150) da vorticidade deduzida para um fluido magnético no caso bidimensional

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] \quad (4.21)$$

e a equação (3.200) evolutiva da magnetização

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}. \quad (4.22)$$

Sabendo que a Vorticidade de um escoamento é definida como sendo o rotacional do campo de velocidades:

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (4.23)$$

desenvolvendo (4.23) em notação indicial:

$$\xi_i \hat{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{e}_j \times u_k \hat{e}_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \quad (4.24)$$

e no caso bidimensional:

$$\implies \boldsymbol{\xi} = \xi_3 \hat{e}_3 \quad (4.25)$$

$$\xi_3 = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (4.26)$$

Sabendo que admitir que tal fluido seja incompressível é uma boa aproximação, pela Equação da Continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.27)$$

e portanto, se  $\mathbf{u}$  é um campo solenoidal, ele pode ser escrito como:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (4.28)$$

expandindo a derivada material das equações (4.21) e (4.22), é conveniente desenvolver os termos convectivos em termos da função corrente  $\boldsymbol{\psi}$  de forma que:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \mathbf{M} \quad (4.30)$$

substituindo (5.1) em (4.21), tem-se:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})]. \quad (4.31)$$

Analogamente, substituindo (5.2) em (4.22) e reescrevendo a equação evolutiva da magnetização do meio em termos da função corrente, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \mathbf{M} = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}. \quad (4.32)$$

Por fim, desenvolvendo (4.28) em notação indicial:

$$u_i \hat{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{e}_j \times \psi_k \hat{e}_k \quad (4.33)$$

$$= \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \quad (4.34)$$

para um escoamento bidimensional

$$u_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \quad (4.35a)$$

$$u_2 = - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \quad (4.35b)$$

e substituindo (4.35a) e (4.35b) em (4.26), tem-se:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \right) \right] \\ \xi_3 &= - \left( \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_2^2} \right)\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\implies \boldsymbol{\xi} = -\nabla^2 \boldsymbol{\psi} \quad (4.37)$$

Dadas as expressões obtidas na formulação vorticidade-função corrente, em adição com condições de contorno e iniciais consistentes, o problema a ser investigado está completamente formulado e bem posto.

## 4.4 Sumário do Sistema de equações

Os sistemas de equações a serem adimensionalizado e solucionados numericamente, obtidos a partir da formulação vorticidade-função corrente, são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi} \quad (4.38a) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{\rho} [\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] \quad (4.38b) \\ \nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (4.38c) \\ \mathbf{H} = \nabla \phi_m \quad (4.38d) \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \mathbf{M} = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{\tau_B} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \\ + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}, \quad (4.38e) \end{array} \right.$$

no caso mais geral do escoamento de um fluido magnético barotrópico com magnetização regida por uma equação evolutiva fenomenológica.

O caso do escoamento de um fluido magnético no limite superparamagnético com suscetibilidade variável ( $\chi_m = \chi_m(H)$ ) também será objetivo de estudo deste trabalho, afim de investigar a consistência da formulação **HB**, e o sistema de equações governantes que regem tal problema é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi} \quad (4.39a) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{\mu_0}{2\rho} \nabla \chi_m \times \nabla H^2 \quad (4.39b) \\ \nabla^2 \phi_m = - \left( \frac{1}{1 + \chi_m} \right) \nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m \quad (4.39c) \\ \mathbf{H} = \nabla \phi_m \quad (4.39d) \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_H \quad (4.39e) \\ \chi = \frac{M_0}{H} \quad (4.39f) \end{array} \right.$$

## 4.5 Parâmetros físicos da Ferrohodinâmica

Dados os sistemas de equações governantes (4.38) e (4.39), os parâmetros adimensionais associados podem ser obtidos diretamente a partir das equações diferenciais parciais contidas na seção anterior considerando as seguintes escalas típicas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^* &= \frac{l_0}{U_0} \boldsymbol{\xi}; \quad \boldsymbol{\psi}^* = \frac{1}{U_0 l_0} \boldsymbol{\psi}; \quad \mathbf{M}^* = \frac{\mathbf{M}}{H_0}; \quad \chi_m = \chi_m^* \\ \mathbf{H}^* &= \frac{\mathbf{H}}{H_0}; \quad t^* = \frac{U_0}{l_0} t; \quad \nabla^* = l_0 \nabla; \quad \nabla^{2*} = l_0^2 \nabla^2; \quad \phi_m^* = \frac{1}{H_0 l_0} \phi_m \end{aligned} \quad (4.40)$$

desta forma, inserindo (4.40) em (4.38a):

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = - \boldsymbol{\xi} \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{l_0^2} U_0 l_0 \nabla^{2*} \boldsymbol{\psi}^* = - \frac{U_0}{l_0} \boldsymbol{\xi}^* \quad (4.42)$$

$$\nabla^{2*} \boldsymbol{\psi}^* = - \boldsymbol{\xi}^*, \quad (4.43)$$

inserindo (4.40) em (4.38b):

$$\frac{U_0^2}{l_0^2} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^*}{\partial t^*} + \frac{U_0^2 l_0}{l_0^3} (\nabla^* \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \nabla^* \boldsymbol{\xi}^* = \nu \frac{U_0}{l_0^3} \nabla^{2*} \boldsymbol{\xi}^* + \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho l_0^2} \left\{ \nabla^* \times (\mathbf{M}^* \cdot \nabla^* \mathbf{H}^*) - \nabla^{2*} (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right\} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \nabla^* \boldsymbol{\xi}^* = \frac{\nu}{U_0 l_0} \nabla^{2*} \boldsymbol{\xi}^* + \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho U_0^2} \left\{ \nabla^* \times (\mathbf{M}^* \cdot \nabla^* \mathbf{H}^*) - \nabla^{2*} (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right\} \quad (4.45)$$

Definindo  $Re = \frac{U_0 l_0}{\nu}$  como o parâmetro adimensional da razão entre forças de inércia e forças viscosas no escoamento denominado Reynolds e  $Re_m = \frac{\rho U_0^2}{\mu_0 H_0^2}$  como o parâmetro adimensional Reynolds magnético, razão entre a pressão mecânica e a pressão magnética do escoamento, tem-se:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \nabla^* \boldsymbol{\xi}^* = \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{Re_m} \left\{ \nabla^* \times (\mathbf{M}^* \cdot \nabla^* \mathbf{H}^*) - \nabla^{2*} (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right\}, \quad (4.46)$$

inserindo (4.40) em (4.38c):

$$\frac{l_0 H_0}{l_0^2} \nabla^{2*} \phi_m^* = - \frac{H_0}{l_0} \nabla^* \cdot \mathbf{M}^* \quad (4.47)$$

$$\nabla^{2*} \phi_m^* = - \nabla^* \cdot \mathbf{M}^*, \quad (4.48)$$

substituindo (4.40) em (4.38d):

$$H_0 \mathbf{H}^* = \frac{l_0 H_0}{l_0} \nabla^* \phi_m^* \quad (4.49)$$

$$\mathbf{H}^* = \nabla^* \phi_m^* \quad (4.50)$$

e inserindo (4.40) em (4.38e), tem-se:

$$\frac{H_0 U_0}{l_0} \left[ \frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \nabla^* \mathbf{M}^* \right] = \left[ \frac{1}{2} \frac{H_0 U_0}{l_0} \boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{6\phi} \frac{\mu_0 H_0^3}{\mu} (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right] \times \mathbf{M}^* + \frac{H_0 U_0}{l_0} \left[ \frac{1}{\tau_B^*} (\mathbf{M}_0^* - \mathbf{M}^*) + \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{M}^* \right] \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \nabla^* \mathbf{M}^* = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{6\phi} \frac{\mu_0 H_0^2 l_0}{\mu U_0} (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right] \times \mathbf{M}^* + \frac{1}{\tau_B^*} (\mathbf{M}_0^* - \mathbf{M}^*) + \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{M}^* \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \nabla^* \mathbf{M}^* = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right] \times \mathbf{M}^* + \frac{1}{\tau_B^*} (\mathbf{M}_0^* - \mathbf{M}^*) + \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{M}^*, \quad (4.53)$$

observe que  $\tau_B^* = \frac{U_0}{l_0} \tau_B$ . Definindo  $\tau_B = \frac{l_0^2}{\mathcal{D}}$ , em que  $\mathcal{D}$  é o coeficiente de difusividade Browniano dado por:

$$\mathcal{D} = \frac{k_B T}{6\pi\mu a}, \quad (4.54)$$

tem-se:

$$\tau_B^* = \frac{U_0}{l_0} \tau_B \quad (4.55)$$

$$\tau_B^* = \frac{U_0}{l_0} \frac{l_0^2}{\mathcal{D}} \quad (4.56)$$

$$\tau_B^* = Pe, \quad (4.57)$$

em que  $Pe$  é o parâmetro adimensional Número de Péclet, razão das taxas de transporte de massa advectivas e difusivas de um escoamento. Desta forma, reescrevendo a equação (4.53):

$$\frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \times \boldsymbol{\psi}^*) \cdot \nabla^* \mathbf{M}^* = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \right] \times \mathbf{M}^* + \frac{1}{Pe} (\mathbf{M}_0^* - \mathbf{M}^*) + \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{M}^* \quad (4.58)$$

Assim, omitindo a notação “\*” de dimensionalidade, pode-se escrever o sistema de equações governantes na forma adimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi} \end{array} \right. \quad (4.59a)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{Re_m} \left\{ \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right\} \quad (4.59b)$$

$$\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (4.59c)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \phi_m \quad (4.59d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \mathbf{M} = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{Pe} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \quad (4.59e)$$

Procedendo com a adimensionalização do sistema (4.39), substituindo (4.40) em (4.39) e omitindo a notação “\*” de adimensionalidade, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi} \quad (4.60a) \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2Re_m} (\nabla \chi_m \times \nabla H^2) \quad (4.60b) \\ \nabla^2 \phi_m = - \left( \frac{1}{1 + \chi_m} \right) \nabla \chi_m \cdot \nabla \phi_m \quad (4.60c) \\ \mathbf{H} = \nabla \phi_m \quad (4.60d) \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_H \quad (4.60e) \\ \chi = \frac{M_0}{H} \quad (4.60f) \end{array} \right.$$

Adotando a notação (x,y) para o sistema de coordenadas, índices numéricos para determinação de componentes vetoriais e de vetores unitários e expandindo o sistema de equações governantes na forma adimensional em termos de suas componentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3 = -\xi_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (4.61a) \\ \left\{ \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \right\} \hat{\mathbf{e}}_3 = \left\{ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[ \frac{\partial \chi_m}{\partial x} \frac{\partial H^2}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial y} \frac{\partial H^2}{\partial x} \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (4.61b) \\ \left( \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} \right) = - \frac{1}{1 + \chi_m} \left[ \frac{\partial \chi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \chi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right] \quad (4.61c) \\ H_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (4.61d) \\ H_2 \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_2 \quad (4.61e) \\ M_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_{H,1} \quad (4.61f) \\ M_2 \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_{H,2} \quad (4.61g) \\ \chi = \frac{M_0}{H} \quad (4.61h) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3 = -\xi_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \tag{4.62a} \\
& \left\{ \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \right\} \hat{\mathbf{e}}_3 = \left\{ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[ \frac{\partial M_1}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial x} + M_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial y} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial y} + M_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - M_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} - M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial x} - M_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_3 \tag{4.62b} \\
& - \frac{\partial M_2}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial y} - M_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} + H_1 \frac{\partial^2 M_2}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} + H_1 \frac{\partial^2 M_2}{\partial x^2} - M_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} - H_2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial y^2} - M_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} - H_2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial y^2} \tag{4.62c} \\
& \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} \right) \tag{4.62d} \\
& H_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{4.62e} \\
& H_2 \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_2 \tag{4.62f} \\
& \left\{ \frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial M_1}{\partial y} \right\} \hat{\mathbf{e}}_1 = \left\{ -\frac{1}{2} \xi_3 M_2 + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (H_1 M_2^2 - M_1 H_2 M_2) + \frac{1}{Pe} (M_{0,1} - M_1) + \frac{1}{2} \left[ 2M_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - M_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{4.62g} \\
& \left\{ \frac{\partial M_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial M_2}{\partial y} \right\} \hat{\mathbf{e}}_2 = \left\{ \frac{1}{2} \xi_3 M_1 + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (H_2 M_1^2 - M_2 H_1 M_1) + \frac{1}{Pe} (M_{0,2} - M_2) + \frac{1}{2} \left[ M_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - M_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2M_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_2 \tag{4.63a} \\
& \left( \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3 = -\xi_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \tag{4.63b} \\
& \left\{ \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \right\} \hat{\mathbf{e}}_3 = \left\{ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[ \frac{\partial \chi_m}{\partial x} \frac{\partial H^2}{\partial x} \frac{\partial H^2}{\partial y} - \frac{\partial \chi_m}{\partial y} \frac{\partial H^2}{\partial x} \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_3 \tag{4.63c} \\
& \left( \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial y^2} \right) = - \frac{1}{1 + \chi_m} \left[ \frac{\partial \chi_m}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} + \frac{\partial \chi_m}{\partial y} \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right] \tag{4.63d} \\
& H_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_1 \tag{4.63e} \\
& H_2 \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_2 \tag{4.63f} \\
& M_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_{H,1} \tag{4.63f} \\
& M_2 \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathcal{L}(\alpha) \phi M_d \hat{\mathbf{e}}_{H,2} \tag{4.63g}
\end{aligned} \right.$$



## 4.6 Discretização das Equações Governantes pelo Método das Diferenças Finitas

O sistema de equações governantes dado por (4.62) será discretizado a partir da metodologia de discretização pelo Método das Diferenças Finitas exemplificado anteriormente. A aproximação das derivadas parciais será feita pela diferença centrada dos pontos de cálculo, pois o cálculo efetuado a partir da diferença centrada possui um erro menor ( $\mathcal{O}(\Delta x)^2$  e  $\mathcal{O}(\Delta y)^2$ ) quando comparado à diferenciação adiantada ou atrasada ( $\mathcal{O}(\Delta x)$  e  $\mathcal{O}(\Delta y)$ ), como demonstrado por Cunha (2003).

Considere a primeira equação do sistema (4.62), no caso bidimensional dada por:

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi \quad (4.65)$$

Aproximando as derivadas de primeira e segunda ordem com diferença centrada por meio da expansão por séries de Taylor da função  $\psi$  nos pontos genéricos do domínio de cálculo, descritos na figura 4.2, tem-se:

$$\psi_{i+1,j} = \psi_{i,j} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2 + \dots \quad (4.66)$$

$$\psi_{i-1,j} = \psi_{i,j} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2 + \dots \quad (4.67)$$

$$\psi_{i,j+1} = \psi_{i,j} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j} \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y)^2 + \dots \quad (4.68)$$

$$\psi_{i,j-1} = \psi_{i,j} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j} \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y)^2 + \dots \quad (4.69)$$

Desprezando termos  $\mathcal{O}(\Delta x)^2$  e  $\mathcal{O}(\Delta y)^2$  e efetuando a subtração de (4.66) por (4.67) e (4.68) por (4.69), respectivamente, tem-se:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.70)$$

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (4.71)$$

Aproximando as derivadas de segunda ordem, também pela expansão em séries de Taylor, tem-se:

$$\psi_{i+1,j} = \psi_{i,j} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 + \dots \quad (4.72)$$

$$\psi_{i-1,j} = \psi_{i,j} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 + \dots \quad (4.73)$$

Efetuando a soma das equações (4.72) e (4.73), tem-se:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (4.74)$$

analogamente:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (4.75)$$

Substituindo (4.74) e (4.75) em (4.65), tem-se a expressão discretizada da equação governante (4.65):

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\xi \quad (4.76)$$

Utilizando a mesma metodologia explicitada na discretização da equação (4.65), as demais equações que compõem o sistema (4.63) foram discretizadas e o sistema obtido é dado pelas equações algébricas (4.78). Para facilitar a notação a suscetibilidade magnética  $\chi_m$  será representada apenas por  $\chi$ .

(4.77a)

$$\left\{ \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right\} = -\xi_{i,j}$$

$$\left\{ \frac{\xi_{i,j}^{p+1} - \xi_{i,j}^p}{\Delta t} + \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{Re} \left( \frac{\xi_{i+1,j} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \right. \right.$$

$$+ \left. \frac{\xi_{i,j+1} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[ \left( \frac{(M_1)_{i,j+1} - (M_1)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{(H_1)_{i+1,j} - (H_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + (M_1)_{i,j} \left( \frac{(H_1)_{i+1,j+1} - (H_1)_{i-1,j+1} + (H_1)_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) + \right.$$

$$+ \left. \left( \frac{(M_2)_{i,j+1} - (M_2)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{(H_1)_{i,j+1} - (H_1)_{i,j-1}}{2\Delta x} \right) + (M_2)_{i,j} \left( \frac{(H_1)_{i,j+1} + (H_1)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} - \left( \frac{(M_1)_{i+1,j} - (M_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{(H_2)_{i+1,j} - (H_2)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \right.$$

$$- \left. (M_1)_{i,j} \left( \frac{(H_2)_{i+1,j} - 2(H_2)_{i,j} + (H_2)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - \left( \frac{(M_2)_{i+1,j} - (M_2)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{(H_2)_{i,j+1} - (H_2)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) - \right.$$

$$- \left. (M_2)_{i,j} \left( \frac{(H_2)_{i+1,j+1} - (H_2)_{i+1,j-1} - (H_2)_{i-1,j+1} + H_2^2_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) + (H_1)_{i,j} \left( \frac{(M_2)_{i+1,j} - 2(M_2)_{i,j} + (M_2)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + \right.$$

$$+ \left. (M_2)_{i,j} \left( \frac{(H_1)_{i+1,j} - 2(H_1)_{i,j} + (H_1)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) + (H_1)_{i,j} \left( \frac{(M_2)_{i,j+1} - 2(M_2)_{i,j} + (M_2)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \right.$$

$$+ \left. (M_2)_{i,j} \left( \frac{(H_1)_{i,j+1} - 2(H_1)_{i,j} + (H_1)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - (M_1)_{i,j} \left( \frac{(H_2)_{i+1,j} - 2(H_2)_{i,j} + (H_2)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - (H_2)_{i,j} \left( \frac{(M_1)_{i+1,j} - 2(M_1)_{i,j} + (M_1)_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - \right.$$

$$- \left. (M_1)_{i,j} \left( \frac{(H_2)_{i,j+1} - 2(H_2)_{i,j} + (H_2)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - (H_2)_{i,j} \left( \frac{(M_1)_{i,j+1} - 2(M_1)_{i,j} + (M_1)_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right\}$$

(4.77b)

$$\left\{ \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right\} = - \left\{ \frac{(M_1)_{i+1,j} - (M_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{(M_2)_{i,j+1} - (M_2)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right\}$$

(4.77c)

$$(H_1)_{i,j} = \left( \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)$$

(4.77d)

$$(H_2)_{i,j} = \left( \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)$$

(4.77e)

$$\left\{ \frac{(M_1)_{i,j}^{p+1} - (M_1)_{i,j}^p}{\Delta t} + \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{(M_1)_{i+1,j} - (M_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{(M_1)_{i,j+1} - (M_1)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ -\frac{1}{2} \xi_{i,j}(M_2)_{i,j} + \right.$$

$$+ \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} \left( (H_1)_{i,j} (M_2)_{i,j}^2 - (M_1)_{i,j} (H_2)_{i,j} (M_2)_{i,j} \right) + \frac{1}{Pe} \left( (M_1^0)_{i,j} - (M_1)_{i,j} \right) + \left. \right.$$

$$+ \left. \left[ (M_1)_{i,j} \left( \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) - \frac{(M_2)_{i,j}}{2} \left( \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) \right] \right\}$$

(4.77f)

$$\left\{ \frac{(M_2)_{i,j}^{p+1} - (M_2)_{i,j}^p}{\Delta t} + \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{(M_2)_{i+1,j} - (M_2)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{(M_2)_{i,j+1} - (M_2)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \xi_{i,j}(M_1)_{i,j} + \right.$$

$$+ \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} \left( (H_2)_{i,j} (M_1)_{i,j}^2 - (M_2)_{i,j} (H_1)_{i,j} (M_1)_{i,j} \right) + \frac{1}{Pe} \left( (M_2^0)_{i,j} - (M_2)_{i,j} \right) + \left. \right.$$

$$+ \left. \left[ (M_1)_{i,j} \left( \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} - \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - (M_2)_{i,j} \left( \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) \right] \right\}$$

(4.77g)

$$\left\{ \frac{(M_1)_{i,j}^{p+1} - (M_1)_{i,j}^p}{\Delta t} + \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{(M_1)_{i+1,j} - (M_1)_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{(M_1)_{i,j+1} - (M_1)_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \xi_{i,j}(M_1)_{i,j} + \right.$$

$$+ \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} \left( (H_1)_{i,j} (M_1)_{i,j}^2 - (M_2)_{i,j} (H_1)_{i,j} (M_1)_{i,j} \right) + \frac{1}{Pe} \left( (M_1^0)_{i,j} - (M_1)_{i,j} \right) + \left. \right.$$

$$+ \left. \left[ (M_1)_{i,j} \left( \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} - \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right) - (M_2)_{i,j} \left( \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) \right] \right\}$$

(4.77g)

$$\left\{ \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right\} = -\xi_{i,j} \quad (4.78a)$$

$$\left\{ \frac{\xi_{i,j}^{p+1} - \xi_{i,j}^p}{\Delta t} + \left( \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{Re} \left( \frac{\xi_{i+1,j} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\xi_{i,j+1} - 2\xi_{i,j} + \xi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{1}{Re_m} \left[ \left( \frac{\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{H_{i,j+1}^2 - H_{i,j-1}^2}{2\Delta y} \right) - \left( \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{H_{i+1,j}^2 - H_{i-1,j}^2}{2\Delta x} \right) \right] \right\} \quad (4.78b)$$

$$\left\{ \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right\} = -\frac{1}{1 + \chi_{i,j}} \left[ \left( \frac{\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] \quad (4.78c)$$

$$(H_1)_{i,j} = \left( \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \quad (4.78d)$$

$$(H_2)_{i,j} = \left( \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \quad (4.78e)$$

$$(M_1)_{i,j} = [\mathcal{L}(\alpha)]_{i,j} \phi (M_d)_1 \quad (4.78f)$$

$$(M_2)_{i,j} = [\mathcal{L}(\alpha)]_{i,j} \phi (M_d)_2 \quad (4.78g)$$

## 4.7 Condições de contorno

A partir do sistema de equações governantes adimensionais discretizadas, dadas pelos sistemas (4.77) e (4.78), serão definidas malhas de cálculo para a solução numérica aproximada do sistema. O cálculo das variáveis a serem determinadas nos pontos discretizados do contínuo será expressa na forma de um sistema linear da forma  $Ax = b$  a partir da determinação das condições de contorno no domínio de cálculo ilustrado na figura 1.3. A figura 4.3 é uma representação da malha de cálculo computacional usada na discretização do domínios de calculo, e será usada para auxiliar a especificação das condições de contorno das interfaces dos domínios.

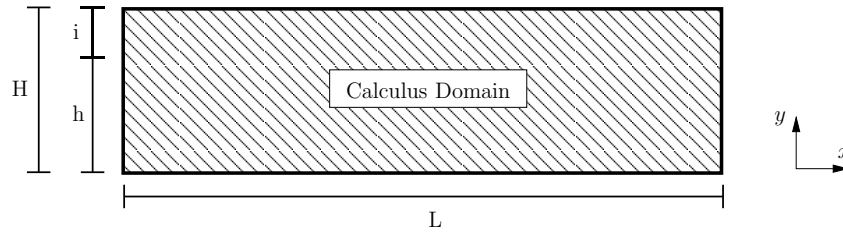


Figura 4.3 – Malha de cálculo com dimensões representadas para especificação das condições de contorno, definição de escalas típicas e adimensionalização das condições de contorno.  $H$  é a altura do canal após a expansão,  $h$  é a altura do degrau,  $i$  é a altura da seção de entrada do escoamento e  $L$  é o comprimento do canal

O domínio de cálculo representa a discretização espacial do domínio contínuo de escoamento após a expansão unidirecional. Estabelecendo uma análise a partir da parede inferior, a partir da condição de não-escorregamento do escoamento, tem-se que  $u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0} = 0$  e pode-se considerar que  $\psi|_{i,j} = 0$  representa o valor constante que descreve a linha de corrente adjacente à parede inferior e à face do degrau. A geração de vorticidade na parede é consequência direta da imposição da condição de não-escorregamento do escoamento, que por meio da difusão e da advecção a partir da parede é transportada ao resto do domínio. Este transporte pode ser analisado expandindo a função  $\psi_{i,j}$  em um nó adjacente à parede inferior  $\psi_{i,j+1}$  na forma:

$$\psi_{i,j+1} = \psi_{i,j_0} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j_0} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j_0} (\Delta y)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \Big|_{i,j_0} (\Delta y)^3 + \dots \quad (4.79)$$

em que, pela condição de não-escorregamento

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,j_0} = u_{i,j_0} = 0 \quad (4.80)$$

e

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j_0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j_0} \quad (4.81)$$

Sendo a vorticidade dada por

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.82)$$

e sabendo que ao longo da parede  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , pois  $v$  é constante e igual a zero, tem-se:

$$\xi_{i,j_0} = - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j_0}. \quad (4.83)$$

Substituindo 4.80, 4.81 e 4.83 em 4.79, tem-se:

$$\xi_{i,j_0} = \frac{2}{(\Delta y)^2} (\psi_{i,j_0} - \psi_{i,j_0+1}) \quad (4.84)$$

A equação 4.84 é conhecida como condição de contorno de Thom, abordada por Weinan e Liu (1996) na formulação de escoamentos viscosos em regime transiente usando a formulação vorticidade-função corrente, e foi obtida a partir da imposição da condição de não-escorregamento na parede inferior. Observe que neste problema  $\psi_{i,j_0} = 0$ , porém este termo será mantido na expressão visando futuras simulações com paredes não estacionárias.

Considerando a parede superior,  $\psi_{i,j}$  pode ser avaliado a partir da integração do perfil de velocidade na entrada do domínio. Considerando um escoamento senoidal ou parabólico  $U(y)$  na região de entrada do domínio, a função corrente terá suas condições de contorno dadas pela integração do campo de velocidades  $U(y)$  ao longo da entrada do canal. Com base na figura 4.3, a função corrente  $\psi$  nos nós intermediários será dada por:

$$\psi_{0,j} = \int_h^H U(y) dy \quad (4.85)$$

e de forma análoga à equação 4.84, a vorticidade na parede superior será dada por:

$$\xi_{i,j_{max}} = \frac{2}{(\Delta y)^2} (\psi_{i,j_{max}} - \psi_{i,j_{max}-1}) \quad (4.86)$$

#### 4.7.1 Proposição de um perfil de velocidades na entrada do domínio de cálculo

Para conduzir o estudo numérico proposto, supôs-se um perfil de velocidades totalmente desenvolvido na região de entrada do escoamento no domínio de cálculo. Perfis de velocidades parabólicos foram propostos, para escoamentos em dutos retangulares, por Purday (1949), validados experimentalmente por Holmes e Vermeulen (1968) e Muchnik et al. (1973):

$$\frac{u}{U_0} = \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^n \right] \left[ 1 - \left( \frac{z}{a} \right)^m \right], \quad (4.87)$$

em que  $2b$  e  $2a$  representam a altura e a largura, respectivamente, de uma seção de duto retangular, para um sistema de coordenadas centrado na área da seção do duto. Para um

escoamento bidimensional, pode-se considerar a largura da seção do duto tendendo ao infinito, dessa forma tem-se:

$$\lim_{2a \rightarrow \infty} \frac{u}{U_0} = \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^n \right] \quad (4.88)$$

Desta forma, sendo  $\alpha^* = 2b/2a$  a razão de aspecto do duto, que no limite quando  $a$  tende ao infinito, implica que  $n = 2$  (Hartnett et al. (1998)). Fazendo uma transformação de coordenadas, para o sistema de coordenadas descrito na figura 4.3, tem-se:

$$u = -16y^2 + 24y - 8, \quad (4.89)$$

que será o perfil de velocidades adimensional adotado como condição de contorno na região de entrada do escoamento no domínio de cálculo. A partir da equação 4.89, pode-se deduzir expressões analíticas para as condições de contorno para a função corrente e para a vorticidade, a partir das equações 4.80 e 4.83, tem-se as condições de contorno hidrodinâmicas na entrada:

$$u|_{inflow} = -16y^2 + 24y - 8 \quad (4.90)$$

$$\psi|_{inflow} = -\frac{16}{3}(y^3 - h^3) + 12(y^2 - h^2) - 8(y - h) \quad (4.91)$$

$$\xi|_{inflow} = 32y - 24 \quad (4.92)$$

Para a região de saída do domínio é desejável que as condições de contorno na saída promovam uma transição suave através da fronteira, evitando assim descontinuidades na interface de cálculo. Dessa forma, considerando um escoamento totalmente desenvolvido na região de saída do domínio, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (4.93)$$

A partir da consideração de escoamento totalmente desenvolvido para a vorticidade, tem-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (4.94)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.95)$$

e portanto o campo de vorticidade é constante ao longo da fronteira de saída.

Como desenvolvido por Thoman e Szewczyk (1966), sabendo que a partir da hipótese de escoamento totalmente desenvolvido  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  e que  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , tem-se que  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ . Para um passo  $\Delta x$  constante, na interface de saída do domínio ( $i = m$ ), tem-se:

$$\xi_{i_{max},j} = \xi_{i_{max}-1,j} \quad (4.96)$$

$$\psi_{i_{max},j} = 2\psi_{i_{max}-1,j} - \psi_{i_{max}-2,j} \quad (4.97)$$

### 4.7.2 Construção das matrizes

Considere o sistema de equações (4.78) no caso do escoamento de um fluido magnético no limite superparamagnético com suscetibilidade variável. Reescrevendo o sistema explicitando o termos das variáveis nos pontos de malha em regime permanente, tem-se o sistema de equações 4.98.

Aplicando as equações discretizadas descritas no sistema (4.98), é possível construir o sistema linear referente à um domínio representativo  $(nx, ny)$  para a equação da função corrente (4.98a). Contudo, um sistema linear equivalente, mesmo para uma malha reduzida, possui dimensões que dificultam sua representação gráfica. Desta forma, sua construção será exemplificada por meio da linguagem computacional Python.

Dado um domínio  $(nx, ny)$ , os valores das funções nos nós externos da malha serão dados pelas condições de contorno e, portanto, não serão incluídos na construção do sistema linear. Desta forma, a matriz dos coeficientes terá dimensão de  $(nx - 2, ny - 2)$ , como ilustrado na figura 4.4.

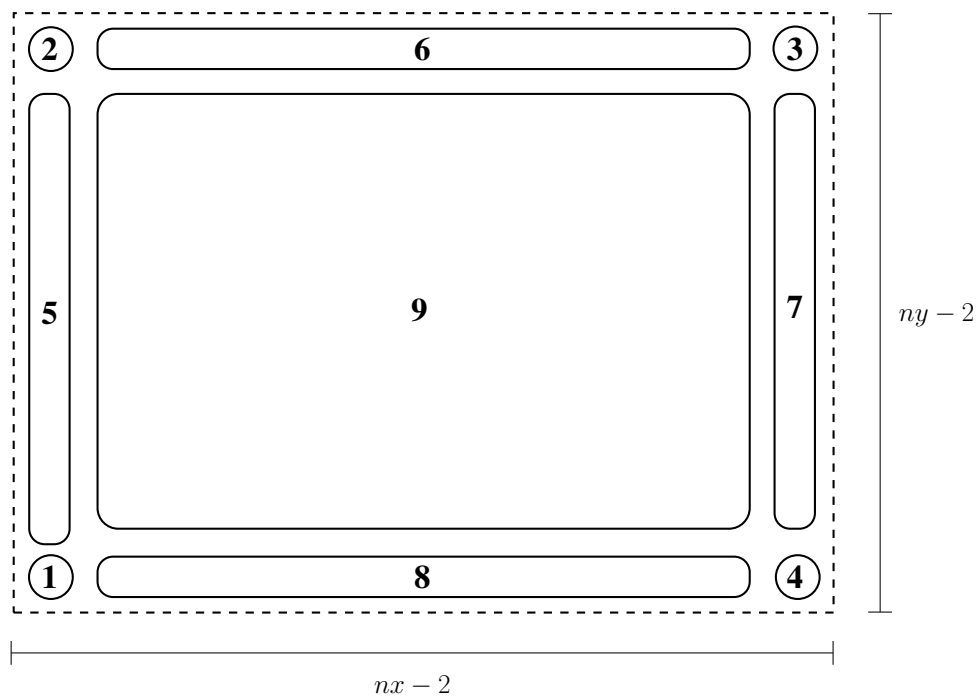


Figura 4.4 – Representação do domínio de cálculo. Nós de contorno estão representados pela linha tracejada e serão escritas as equações para as regiões 1 a 9, de acordo com o número e posição de nós vizinhos determinados pelas condições de contorno do problema. As regiões 1,2,3 e 4 são compostas por apenas um nó.



$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{2}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta y)^2} \right) \psi_{i,j} + \frac{\psi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{\psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\xi_{i,j} \tag{4.98a} \\
& \left[ \frac{1}{Re} \left( -\frac{2}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta y)^2} \right) \right] \xi_{i,j} + \left( \frac{1}{Re(\Delta x)^2} - \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) \xi_{i+1,j} + \left( \frac{1}{Re(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right) \xi_{i-1,j} + \left( \frac{1}{Re(\Delta y)^2} + \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{4\Delta x \Delta y} \right) \xi_{i,j+1} + \\
& \left( \frac{1}{Re(\Delta y)^2} - \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{4\Delta x \Delta y} \right) \xi_{i,j-1} = \frac{1}{Re_m} \left[ \left( \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \left( \frac{H_{i+1,j}^2 - H_{i-1,j}^2}{2\Delta x} \right) - \left( \frac{\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left( \frac{H_{i,j+1}^2 - H_{i,j-1}^2}{2\Delta y} \right) \right] \tag{4.98b} \\
& \left( -\frac{2}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta y)^2} \right) \phi_{i,j} + \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{1 + \chi_{i,j}} \left( \frac{\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}}{4(\Delta x)^2} \right) \right] \phi_{i+1,j} + \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{1 + \chi_{i,j}} \left( \frac{\chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j}}{4(\Delta x)^2} \right) \right] \phi_{i-1,j} + \\
& + \left[ \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{1 + \chi_{i,j}} \left( \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}}{4(\Delta y)^2} \right) \right] \phi_{i,j+1} + \left[ \frac{1}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{1 + \chi_{i,j}} \left( \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1}}{4(\Delta y)^2} \right) \right] \phi_{i,j-1} = 0 \tag{4.98c} \\
& \frac{\phi_{i+1,j}}{2\Delta x} - \frac{\phi_{i-1,j}}{2\Delta x} = H_{i,j}^1 \tag{4.98d} \\
& \frac{\phi_{i,j+1}}{2\Delta y} - \frac{\phi_{i,j-1}}{2\Delta y} = H_{i,j}^2 \tag{4.98e} \\
& M_{i,j}^1 = \chi_{i,j} H_{i,j}^1 \tag{4.98f} \\
& M_{i,j}^2 = \chi_{i,j} H_{i,j}^2 \tag{4.98g}
\end{aligned}$$

Representando a construção das matrizes em linguagem computacional, tem-se:

### Construção da matriz dos coeficientes A

```
1 def constructMatrix(nx, ny, dx, dy):
2
3     A = np.zeros(((nx-2)*(ny-2), (nx-2)*(ny-2)))
4
5     row_number = 0 # row counter
6
7     for j in range(1,ny-1):
8         for i in range(1,nx-1):
9
10            # Corners
11            if i==1 and j==1: # Bottom left corner
12                A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
13                A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2)
14                A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2)
15
16            elif i==nx-2 and j==1: # Bottom right corner
17                A[row_number, row_number] = -1.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
18                A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2)
19                A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2)
20
21            elif i==1 and j==ny-2: # Top left corner
22                A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
23                A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2)
24                A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2)
25
26            elif i==nx-2 and j==ny-2: # Top right corner
27                A[row_number, row_number] = -1.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
28                A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2)
29                A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2)
30
31            # Sides
32            elif i==1: # Left boundary
33                A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
34                A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2)
35                A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2)
36                A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2)
37
38            elif i==nx-2: # Right boundary
39                A[row_number, row_number] = -1.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
40                A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2)
41                A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2)
42                A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2)
43
44            elif j==1: # Bottom boundary
45                A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
46                A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2)
47                A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2)
48                A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2)
49
50            elif j==ny-2: # Top boundary
51                A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
52                A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2)
53                A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2)
54                A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2)
55
56            # Interior points
```

```

57     else :
58         A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2)
59         A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2)
60         A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2)
61         A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2)
62         A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2)
63
64         row_number += 1 # Jump to next row of the matrix
65
66
67     return A

```

## Construção da matriz RHS (Right Hand Side)

```

1 def constructRHS(w, psiBc, nx, ny, dx, dy):
2
3     RHS = np.zeros((nx-2)*(ny-2))
4
5     row_number = 0 # row counter
6     for j in range(1, ny-1):
7         for i in range(1, nx-1):
8
9             # Corners
10            if i==1 and j==1: # Bottom left corner
11                RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j-1, i]/(dy**2) - psiBc[j, i-1]/(dx**2)
12
13            elif i==nx-2 and j==1: # Bottom right corner
14                RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j-1, i]/(dy**2)
15
16            elif i==1 and j==ny-2: # Top left corner
17                RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j+1, i]/(dy**2) - psiBc[j, i-1]/(dx**2)
18
19            elif i==nx-2 and j==ny-2: # Top right corner
20                RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j+1, i]/(dy**2)
21
22            # Sides
23            elif i==1: # Left boundary
24                RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j, i-1]/(dx**2)
25
26            elif i==nx-2: # Right boundary
27                RHS[row_number] = - w[j, i]
28
29            elif j==1: # Bottom boundary
30                RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j-1, i]/(dy**2)
31
32            elif j==ny-2: # Top boundary
33                RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j+1, i]/(dy**2)
34
35            # Interior points
36            else :
37                RHS[row_number] = - w[j, i]
38
39            row_number += 1 # Jump to next row
40
41     return RHS

```

Nos códigos utilizados para ilustrar a construção da matriz referente à equação (4.98a), 'w' e 'psiBc' representam a vorticidade  $\xi$  e a condição de contorno para a função corrente, respectivamente. Para a solução da equação de Poisson para a função corrente,

escrita na forma de um sistema linear  $A \cdot x = RHS$ , será utilizado a rotina *spsolve* do pacote *scipy.sparse.linalg*, que resolve sistemas lineares com matrizes esparsas. A equação da vorticidade, também escrita na forma de um sistema linear  $A \cdot x = RHS$ , será resolvida explicitamente, utilizando um esquema semelhante ao descrito na equação 4.16, e o avanço da solução no espaço e no tempo pode ser esquematizada pela figura 4.5

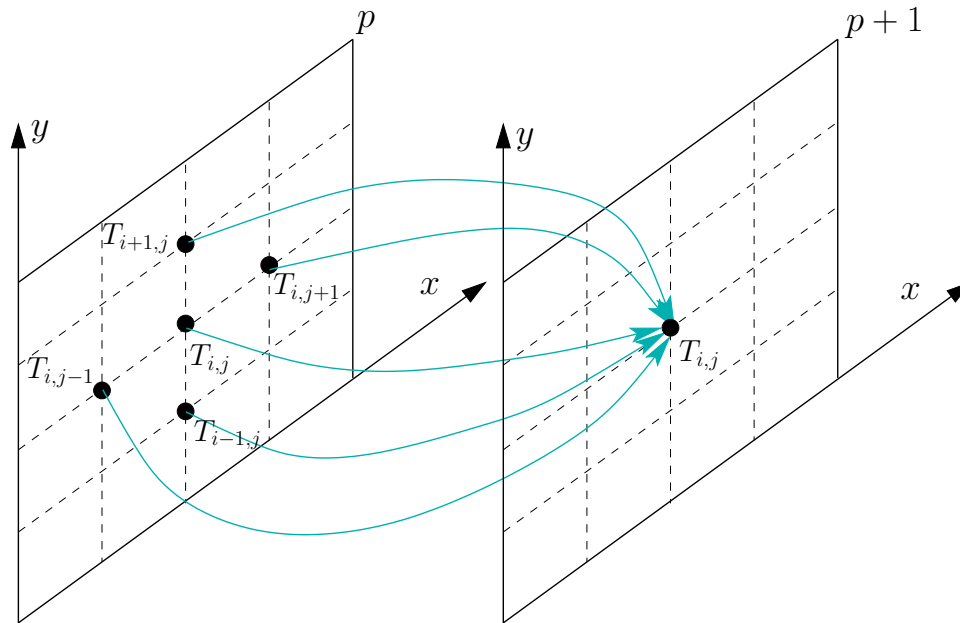


Figura 4.5 – Descrição do avanço das iterações em um esquema explícito de solução.

## 4.8 Proposta de algoritmo sequencial para solução do problema

O sistema de equações governantes, escalares e vetoriais, (4.38a) a (4.38e), deve ser solucionado numericamente por meio de técnicas de discretização espaciais e temporais, como o Método das Diferenças Finitas, a fim de analisar o comportamento das variáveis acopladas nesse sistema e obter uma completa descrição do escoamento de um fluido magnético sujeito à uma expansão abrupta, com erros de cálculo aceitáveis.

A metodologia de solução adotada tem como etapa inicial a definição dos parâmetros físicos que regem o escoamento em estudo e a imposição, tanto das condições de contorno do problema, quanto de uma condição inicial para os campos contidos nas equações governantes.

A segunda etapa da solução consiste na solução dos campos  $\psi$ ,  $\xi$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\phi_m$  de forma iterativa para sucessivos passos de discretização espacial determinados previamente.

Ao fim deste processo, todos os campos necessários para a descrição do escoamento já foram solucionados (i.e. os valores de  $\xi$ ,  $\psi$ ,  $\phi_m$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  após um passo de tempo numérico foram determinados) e o sistema de equações (4.38a) a (4.38e) deve ser resolvido de forma iterativa para sucessivos passos de tempo para que a solução do escoamento real evolua no tempo e atinja um regime convergente. Em seguida está um algoritmo proposto para

ser utilizado na simulação de escoamentos de fluidos magnéticos isotérmicos, assimétricos na presença de gradientes de campo magnético, que será implementada nos domínios I e II mostrados na figura 1.3.

**1. Input de dados**

- a) Parâmetros físicos:  $Re, Re_m, Pe$
- b) Condições de contorno para  $\mathbf{M}, \mathbf{H}, \phi_m, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi}$ ;
- c) Condições iniciais para  $\mathbf{H}, \phi_m, \boldsymbol{\psi}$  (campos constantes)
- d) Cálculo da condição inicial  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0(\alpha, \phi, \lambda)$

**2. Inicializando o cálculo**

- a) Solução da equação de Laplace da função corrente (sem vorticidade) e da Equação da vorticidade na ausência de efeitos magnéticos
  - i. Solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} \end{cases} \quad (4.99)$$

- ii. Está determinado  $\boldsymbol{\xi}$  sem os efeitos de magnetização;
  - iii. Determinar  $\boldsymbol{\psi}$ , com vorticidade associada, por meio de  $\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\xi}$ .
- b) Solução da equação de Laplace para o potencial magnético
  - i. Determinar  $\phi_m$  por meio de  $\nabla^2 \phi_m = 0$  utilizando as condições de contorno apropriadas (Neumann não homogênea para  $\phi_m$  baseada na conservação da componente tangencial de  $\mathbf{H}$  na interface);
  - ii. Determinar  $\mathbf{H}$  por meio de  $\mathbf{H} = \nabla \phi_m$ .
- c) Solução da magnetização  $\mathbf{M}$ 
  - i. Inicialmente  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ ;
  - ii. Solucionar a equação da vorticidade com efeitos magnéticos.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{Re_m} \left\{ \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) - \nabla^2 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right\} \quad (4.100)$$

- d) Início do processo iterativo de solução na discretização espacial
  - i. A partir de  $\boldsymbol{\xi}, \phi_m$  e  $\mathbf{H}$ , solucionar a equação evolutiva da magnetização e determinar  $\mathbf{M}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) \cdot \nabla \mathbf{M} = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{6\phi} \frac{Re}{Re_m} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right] \times \mathbf{M} + \frac{1}{Pe} (\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \quad (4.101)$$

- ii. Inserir  $\mathbf{M}$  calculado no passo anterior em  $\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ ;
  - iii. Calcular novo  $\phi_m$ ;

- iv. Calcular novo  $\mathbf{H}$ ;
  - v. Calcular novo  $\xi$ ;
  - vi. Retornar ao passo (d)-i até convergência.
- e) Fim
3. Para  $t=0 \rightarrow$  início do processo iterativo de solução na discretização temporal
4.  $t = \{\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t\}$
5. Fim
-

# 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

## 5.1 Regime puramente hidrodinâmico

### 5.1.1 Proposição de um perfil de velocidades parabólico

Visando a validação do código computacional escrito, foram conduzidas simulações numéricas para  $Re = 50$  e  $Re = 100$  para que sejam estabelecidas comparações com os resultados obtidos por Iwai et al. (2000) e Kalita e Gupta (2010). Simulações tridimensionais do escoamento de um fluido Newtoniano sujeito a uma expansão abrupta for conduzidas, afim de determinar os efeitos provocados por diferentes razões de aspecto sobre o escoamento, por Iwai et al. (2000). Resultados semelhantes foram obtidos por Kalita e Gupta (2010) em simulações numéricas bidimensionais baseadas em uma formulação velocidade-função corrente ( $u - \psi$ ).

Com o objetivo de estabelecer uma comparação com os trabalhos citados, no presente trabalho as simulações numéricas também foram feitas para uma altura de degrau  $h = 0.5$ . Os resultados obtidos estão ilustrados nas figuras 5.1 e 5.2, e a evolução dos respectivos erros ao longo do número de iterações está ilustrada nas figuras 5.3a e 5.3b:

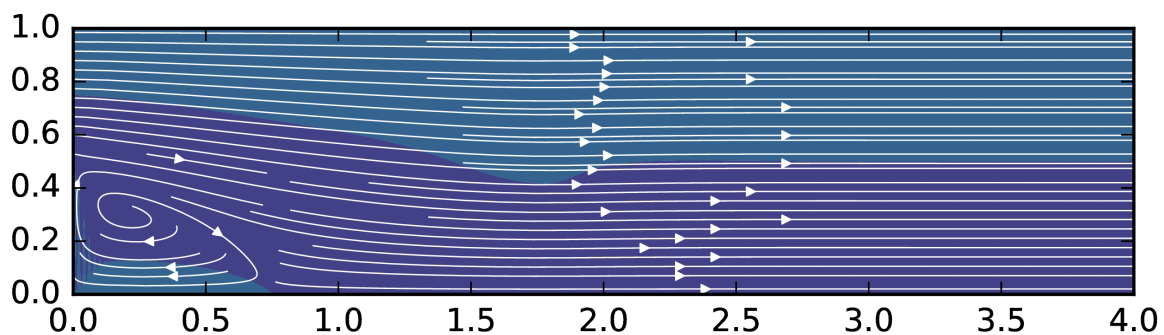


Figura 5.1 – Resultado da simulação:  $Re = 50$ ,  $dx = 0.01$ ,  $dy = 0.02$ ,  $dt = 1,5 \times 10^{-4}$ . Plot das linhas de corrente e campo de vorticidade. Ponto de recolamento  $Xr = 0.8$

Para os regimes simulados numericamente neste trabalho, os resultados obtidos não estão completamente em concordância com os resultados esperados. A partir dos resultados apresentados por Iwai et al. (2000), presentes na figura 5.4, observa-se que



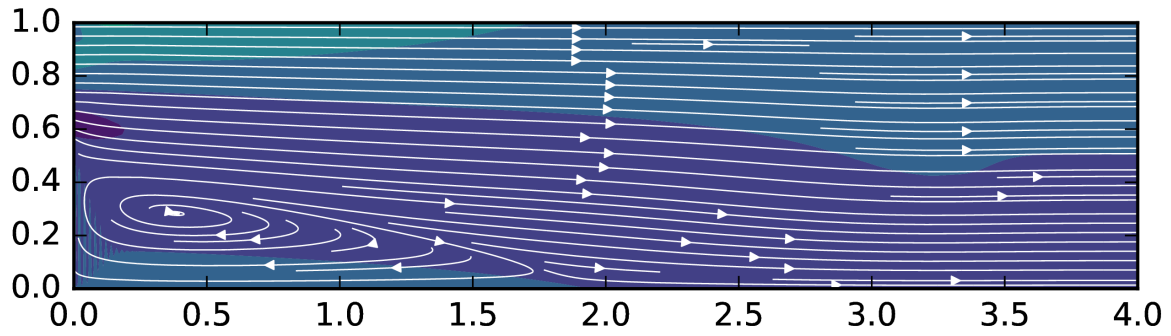
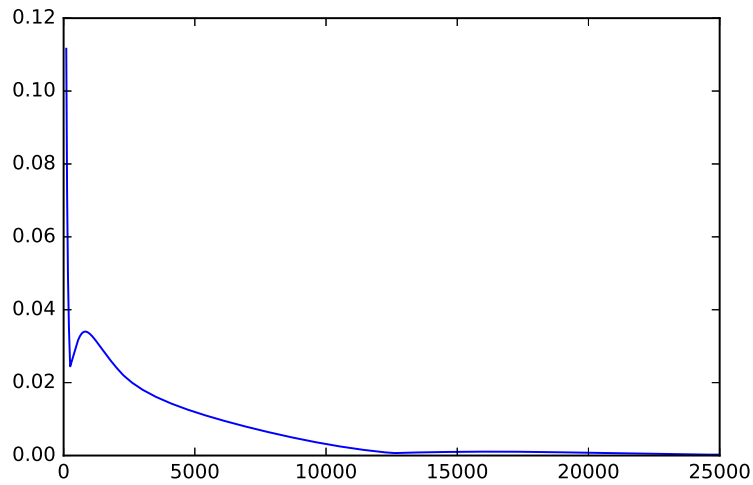
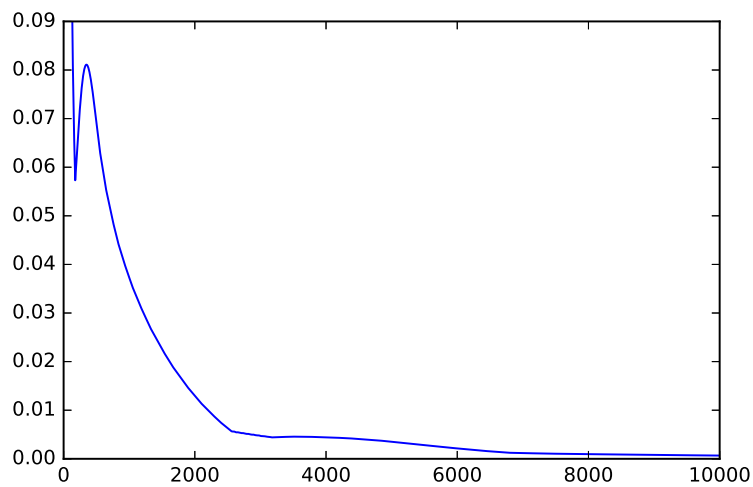


Figura 5.2 – Resultado da simulação:  $Re = 100$ ,  $dx = 0.01$ ,  $dy = 0.02$ ,  $dt = 3,0 \times 10^{-4}$ . Plot das linhas de corrente e campo de vorticidade. Ponto de recolamento  $Xr = 2.0$



(a) Evolução do erro associado ao campo de vorticidade em função do número de iterações na simulação ilustrada pela figura 5.1



(b) Evolução do erro associado ao campo de vorticidade em função do número de iterações na simulação ilustrada pela figura 5.2

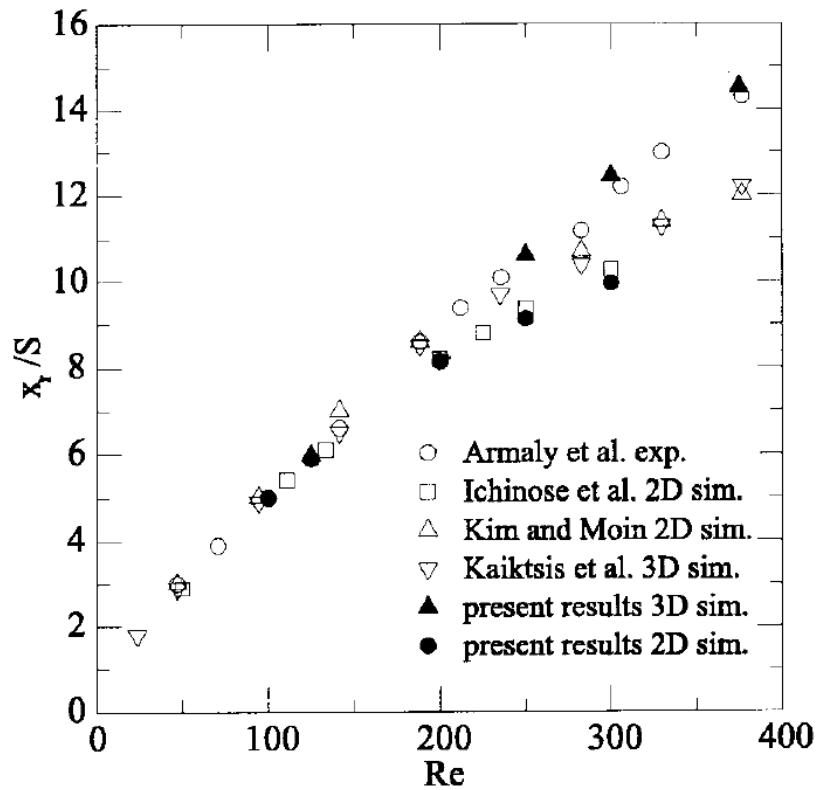


Figura 5.4 – Resultados obtidos por Iwai et al. (2000).  $Xr/S$  representa a razão entre a coordenada do ponto de recolamento do escoamento após a expansão e o tamanho de degrau.

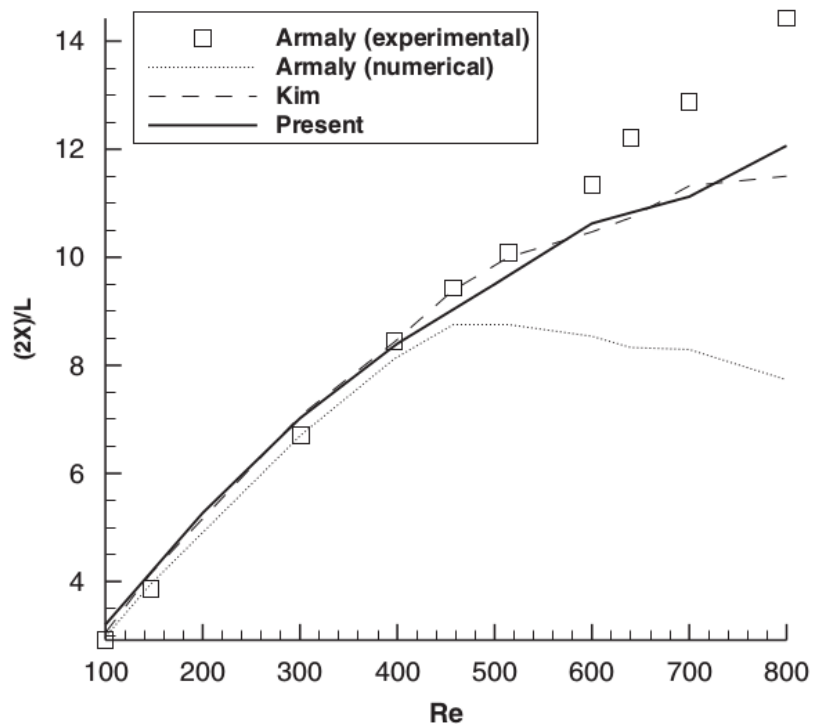


Figura 5.5 – Resultados obtidos por Kalita e Gupta (2010).  $2X/L$  representa a razão entre duas vezes a coordenada do ponto de recolamento do escoamento após a expansão e a altura do duto após a expansão (i.e.: duas vezes a altura do degrau).

para  $Re = 50$  e  $Re = 100$  a razão entre o ponto de recolamento da camada limite após a expansão e a altura do degrau é, aproximadamente, igual a 3 e 5, respectivamente. As simulações deste trabalho resultaram, para uma altura de degrau  $h = 0.5$ , em razões de 1,6 ( $Re = 50$ ) e 4,0 ( $Re = 100$ ).

Diferentemente da malha uniforme utilizada nos cálculos numéricos deste trabalho, as simulações conduzidas por Iwai et al. (2000) e Kalita e Gupta (2010) foram executadas em malhas com refinamento não-uniforme, com maior refinamento nas regiões de gradientes de velocidades mais intensos. O não refinamento da malha de cálculo deste trabalho resultou em ruídos numéricos, como apresentado na figura 5.6, e também limitou a dimensão  $L$  do domínio de cálculo, ilustrada na figura 4.3. No estudo conduzido por Iwai et al. (2000), a dimensão  $L$  do domínio de cálculo equivale a 20 unidades de comprimento adimensionais ( $L = 40h$ ), enquanto os resultados apresentados por Kalita e Gupta (2010) foram obtidos para  $L = 15$  unidades de comprimento adimensionais ( $L = 30h$ ). A imposição de um domínio extenso, para uma malha computacional uniforme, implica inevitavelmente em um número elevado de nós e, conseqüentemente, em alto custo computacional.

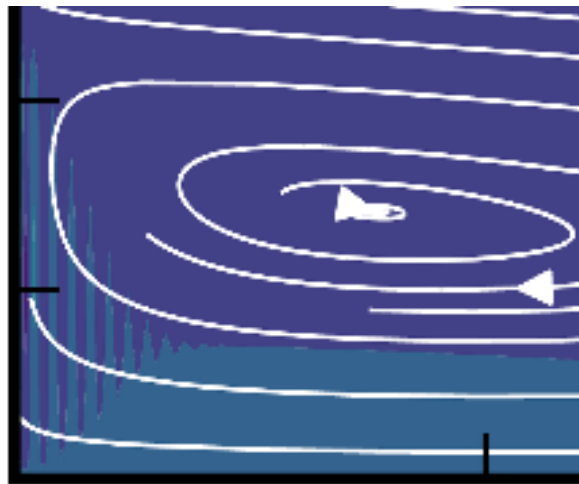
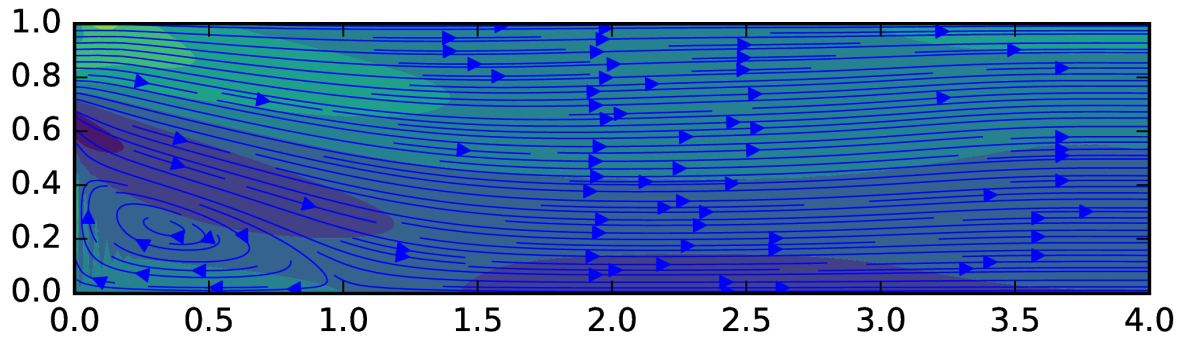


Figura 5.6 – Ampliação do canto inferior esquerdo da figura 5.2 - Detalhamento do ruído numérico presente no resultado obtido

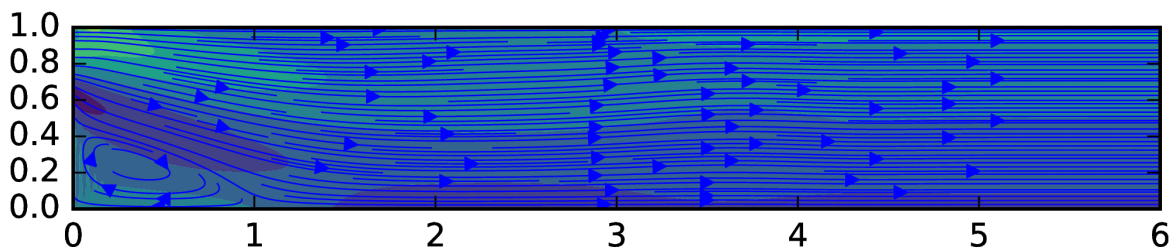
### 5.1.2 Comprimento da malha computacional

Simulações de escoamentos sujeitos a um expansão abrupta são frequentemente conduzidas em extensos domínios computacionais, frequentemente com comprimentos equivalentes a vinte alturas de degrau adimensionais. A extensão do comprimento do domínio confere ao código estabilidade para um maior intervalo de números de Reynolds a serem estudados, porém demanda um refinamento não uniforme do domínio de cálculo. (IWAI et al., 2000) conduziu simulações para  $100 \leq Re \leq 300$ , enquanto (KALITA; GUPTA, 2010) investigou o problema físico para  $100 \leq Re \leq 800$ . Neste trabalho, devido ao não refinamento do domínio de cálculo, foram realizadas simulações para  $Re = 100$

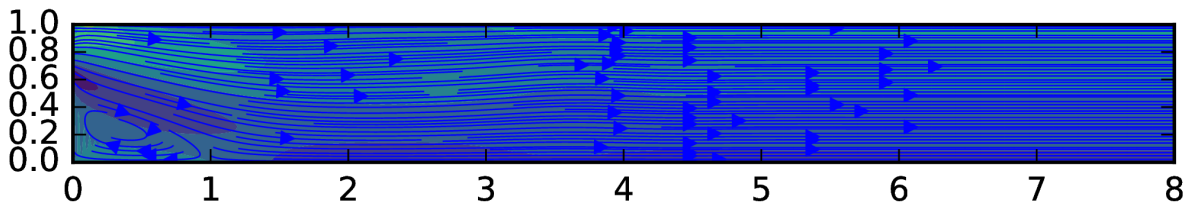
afim de determinar o comprimento mínimo do domínio computacional, garantido a não interferência das condições de contorno na saída do domínio sobre os resultados obtidos.



(a)  $L = 4$



(b)  $L = 6$



(c)  $L = 8$

Figura 5.7 – Simulações feitas para diferentes comprimentos de malha.  $Re = 100$ ,  $dx = dy = 0.02$ , erro =  $10^{-4}$  e  $dt = 1,2 \times 10^{-3}$

É possível observar que neste regime  $Re = 100$ , o menor domínio ( $L = 4$ ) não apresentou alterações de comportamento na zona de recirculação, quando comparado aos domínios maiores. As futuras simulações, sem refinamento de malha, serão feitas para um comprimento de domínio computacional de  $L = 4$ , visando utilizar o menor número de nós computacionais, sem implicar perturbação das condições de contorno de saída sobre o resultado obtido.

O refinamento local da malha de cálculo computacional poderá ser feita por meio da interpolação dos nós originais, como ilustrado na figura 5.8. Tal processo exemplifica a transformação de incrementos originais iguais a  $\Delta x = 0.1$  em  $0.001 \leq \Delta x \leq 0.271$ , por meio de uma função  $y(x) = aX^3$ , com  $a = 1$ . No refinamento a ser implementado, o fator  $A$  será ajustado para que a interpolação gere uma malha suficientemente refinada nos nós da entrada do domínio de cálculo (i.e.: incrementos menores no valores mais próximos de zero), garantindo que os fenômenos necessários à convergência da simulação sejam computados e evitando um alto custo computacional.

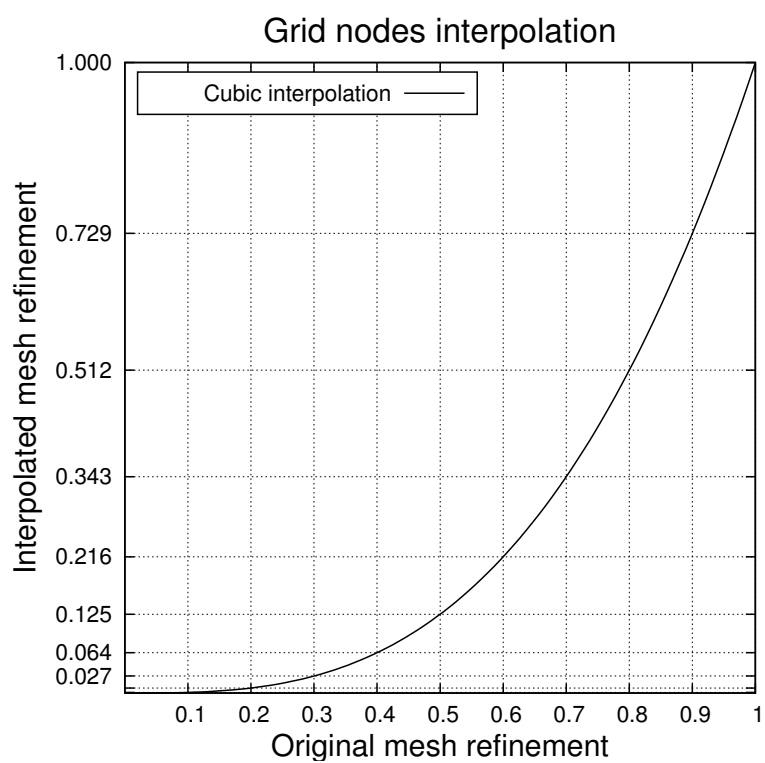


Figura 5.8 – Ilustração da interpolação de uma malha de cálculo homogênea, resultando em uma malha computacional localmente refinada para  $y(x) \approx 0$ .

## 6 CONCLUSÕES

A partir das discussões estabelecidas neste trabalho foi possível formular e fundamentar o problema a ser investigado de forma consistente na forma de um sistema de equações. A dedução da equação evolutiva da vorticidade feita a partir da formulação **HB** do tensor de Maxwell resulta em um termo extra de geração de vorticidade, proveniente de mecanismos magnéticos, e implicará em uma descrição mais completa dos fenômenos a serem estudados, quando comparada com a formulação **BH**. Determinou-se também a vantagem da utilização de uma equação evolutiva fenomenológica para a magnetização do meio **M**, a partir de modelos para a magnetização de equilíbrio **M**<sub>0</sub> sobre a formulação do problema baseado no limite superparamagnético. Desta forma, a partir da determinação da dependência da evolução da magnetização do meio em relação ao campo de vorticidade, da presença de torques viscosos, da existência de um tempo finito de relaxação magnética e da parte simétrica do tensor gradiente de velocidade (fenômenos negligenciados no limite superparamagnético) espera-se ser possível conduzir um estudo numérico consistente dos fenômenos ferrodinâmicos reais em análise.

Após a implementação do problema em estudo, livre de efeitos magnéticos, foi constatada a necessidade de conduzir as simulações numéricas propostas em malhas computacionais não uniformes. Foi possível concluir que a geometria do problema físico demanda refinamento de domínio em regiões muito pequenas, quando comparadas ao comprimento do domínio, onde os gradientes de velocidade são muito intensos, enquanto na região de saída do domínio tais gradientes são desprezíveis (hipótese de escoamento totalmente desenvolvido) e permite incrementos grosseiros de avanço no espaço.

A implementação de uma malha de cálculo não uniforme (e.g.: por meio de uma interpolação de variáveis) conferirá maior estabilidade e precisão ao código computacional desenvolvido, e permitirá simulações computacionais em um intervalo maior de números de Reynolds (em regime laminar). A obtenção de resultados para diferentes regimes de escoamento irá garantir a validação do código desenvolvido neste trabalho, a partir de resultados numéricos obtidos previamente Iwai et al. (2000), Kalita e Gupta (2010). A validação do código no regime não-magnético irá conferir confiabilidade aos resultados a serem obtidos a partir da implementação dos fenômenos magnéticos, extensivamente discutidos e estudados no presente trabalho.

## 7 TRABALHOS FUTUROS

A partir das discussões desenvolvidas e dos resultados preliminares obtidos, um estudo mais aprofundado será conduzido pelo autor deste trabalho como um tema de mestrado, objetivando a implementação dos efeitos magnéticos ao problema estudado após uma validação incontestável do comportamento do escoamento no caso puramente hidrodinâmico. Resultados coerentes com outros trabalhos validados e consolidados (Iwai et al. (2000) e Kalita e Gupta (2010)) são a prioridade para a continuação deste trabalho, pois a validação do código computacional desenvolvido no caso puramente hidrodinâmico será um aspecto que irá conferir credibilidade aos resultados observados após a implementação dos termos magnéticos, que consiste no objetivo final deste estudo. A continuação do presente estudo pode ser estruturada da seguinte forma:

- **Avaliar a necessidade de transcrever o código desenvolvido para uma linguagem compilável:** A transcrição e execução do código desenvolvido em um compilador de alta eficiência possibilitará a utilização de malhas mais refinadas, com um custo computacional associado menor. O desenvolvimento de métodos numéricos não compõe o escopo de objetivos deste trabalho, porém a utilização eficiente dos mesmos, juntamente com a implementação de malhas não-uniformemente refinadas irá otimizar a execução deste algoritmo;
- **Implementação dos efeitos magnéticos em regime superparamagnético:** A primeira formulação a ser investigada, incorporando efeitos magnéticos, será baseada na formulação deduzida na seção 3.7, em que resulta em gradientes de suscetibilidade magnética como mecanismos geradores de vorticidade em um regime superparamagnético. Tais gradientes serão implementados de modo forçado, baseados em gradientes de temperatura ou concentração no domínio de cálculo e no desalinhamento entre estes gradientes e o campo magnético aplicado  $\mathbf{H}$ ;
- **Implementação dos efeitos magnéticos a partir da solução de equações evolutivas para a magnetização:** Considerando escalas de relaxação magnética superiores à escala de Néel, compostas ou dominadas pelas escalas Brownianas, diferentes propostas de equações evolutivas para a magnetização serão investigadas. Tal investigação será conduzida partindo do caso mais simples, em que o termo de relaxação magnética é balanceado apenas pelo termo que computa a influência da

vorticidade na magnetização, seguida pela implementação de um termo de precessão e, por fim, incorporando efeitos provenientes gerados pela parte simétrica do tensor gradiente de velocidades sobre a magnetização global do sistema.



# Referências

- AGOUZAL, A.; ALLALI, K.; BINNA, S. On the stream function-vorticity finite element formulation for incompressible flow in porous media. *Advances in Numerical Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014. Citado na página 46.
- ARIS, R. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. [S.l.]: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486134895. Citado 3 vezes nas páginas 9, 18 e 25.
- BACK, L.; ROSCHKE, E. Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 39, n. 3, p. 677–681, 1972. Citado na página 2.
- BLUMS, E.; CEBERS, A.; MAIOROV, M. M. *Magnetic fluids*. [S.l.]: Walter de Gruyter, 1997. Citado na página 34.
- CAMPOS, A. A.; GONTIJO, R. G.; CUNHA, F. R. Numerical investigation of a ferrofluid boundary layer on a flat plate. 2015. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 18.
- CUNHA, F. *Fundamentals of Magnetic Fluid Hydrodynamics, in Turbulence (Book Chapter)*. [S.l.]: Poli-USP-ABCM, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 31.
- CUNHA, F.; COUTO, H. A new boundary integral formulation to describe three-dimensional motions of interfaces between magnetic fluids. *Applied mathematics and computation*, Elsevier, v. 199, n. 1, p. 70–83, 2008. Citado na página 7.
- CUNHA, M. C. C. *Métodos numéricos*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2003. Citado na página 53.
- DAĞTEKIN, İ.; ÜNSAL, M. Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 65, n. 9, p. 1133–1144, 2011. Citado na página 2.
- DYKE, M. V. An album of fluid motion. Parabolic Press Stanford, 1982. Citado 2 vezes nas páginas iv e 3.
- FANNIN, P.; CHARLES, S. On the calculation of the neel relaxation time in uniaxial single-domain ferromagnetic particles. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 27, n. 2, p. 185, 1994. Citado na página 11.
- FELDERHOF, B.; KROH, H. Hydrodynamics of magnetic and dielectric fluids in interaction with the electromagnetic field. *The Journal of chemical physics*, AIP Publishing, v. 110, n. 15, p. 7403–7411, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 37.

- FLETCHER, D.; MASKELL, S.; PATRICK, M. Heat and mass transfer computations for laminar flow in an axisymmetric sudden expansion. *Computers & fluids*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 207–221, 1985. Citado na página 2.
- GITTER, K.; ODENBACH, S. Investigations on a branched tube model in magnetic drug targeting—systematic measurements and simulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 49, n. 1, p. 343–348, 2013. Citado na página 2.
- GONTIJO, R.; CUNHA, F. Experimental investigation on thermo-magnetic convection inside cavities. *Journal of nanoscience and nanotechnology*, American Scientific Publishers, v. 12, n. 12, p. 9198–9207, 2012. Citado na página 29.
- GONTIJO, R.; CUNHA, F. Dynamic numerical simulations of magnetically interacting suspensions in creeping flow. *Powder Technology*, Elsevier, v. 279, p. 146–165, 2015. Citado 3 vezes nas páginas v, 35 e 36.
- GONTIJO, R. G. Micromecânica e microhidrodinâmica de suspensões magnéticas. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.
- GRANT, I. S.; PHILLIPS, W. R. *Electromagnetism*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 6.
- HABIB, M.; WHITELAW, J. The calculation of turbulent flow in wide-angle diffusers. *Numerical heat transfer*, v. 5, p. 145–164, 1982. Citado na página 2.
- HARTNETT, J. P. et al. *Advances in heat transfer*. [S.l.]: Academic Press, 1998. Citado na página 59.
- HOLMES, D.; VERMEULEN, J. Velocity profiles in ducts with rectangular cross sections. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 23, n. 7, p. 717–722, 1968. Citado na página 58.
- IGLESIAS, G. et al. Theoretical and experimental evaluation of the flow behavior of a magnetorheological damper using an extremely bimodal magnetic fluid. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 23, n. 8, p. 085028, 2014. Citado na página 2.
- IVANOV, A.; KUZNETSOVA, O. Interparticle correlations and magnetic properties of concentrated ferrocolloids. *Colloid Journal*, Springer, v. 63, n. 1, p. 60–67, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 35.
- IVANOV, A. O.; KUZNETSOVA, O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 252, p. 135–137, 2002. Citado 2 vezes nas páginas v e 36.
- IWAI, H.; NAKABE, K.; SUZUKI, K. Flow and heat transfer characteristics of backward-facing step laminar flow in a rectangular duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 457–471, 2000. Citado 6 vezes nas páginas vi, 68, 70, 71, 74 e 75.
- KAIKTSIS, L.; MONKEWITZ, P. A. Global destabilization of flow over a backward-facing step. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 15, n. 12, p. 3647–3658, 2003. Citado na página 2.
- KALITA, J. C.; GUPTA, M. M. A streamfunction–velocity approach for 2d transient incompressible viscous flows. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 62, n. 3, p. 237–266, 2010. Citado 6 vezes nas páginas vi, 68, 70, 71, 74 e 75.

- KHEZZAR, L.; WHITELOW, J.; YIANNESKIS, M. An experimental study of round sudden-expansion flows. In: *5th Symposium on Turbulent Shear Flows*. [S.l.: s.n.], 1985. v. 1, p. 5. Citado na página 2.
- LANDAU, L. D. et al. *Electrodynamics of continuous media*. [S.l.]: elsevier, 1984. Citado na página 6.
- LAVROVA, O. et al. Finite element methods for coupled problems in ferrohydrodynamics. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer, v. 35, p. 160–183, 2003. Citado na página 42.
- LELIAERT, J. et al. Regarding the néel relaxation time constant in magnetorelaxometry. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 116, n. 16, p. 163914, 2014. Citado na página 11.
- MACAGNO, E. O.; HUNG, T.-K. Computational and experimental study of a captive annular eddy. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 28, n. 01, p. 43–64, 1967. Citado na página 2.
- MACCAIG, M. *Permanent magnets in theory and practice*. [S.l.]: Pentech Press, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 15.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1994. Citado na página 45.
- MCQUARRIE, D. *Statistical mechanics*, harper &. *New York*, 1976. Citado na página 34.
- MRAMOR, K.; VERTNIK, R.; ŠARLER, B. Simulation of laminar backward facing step flow under magnetic field with explicit local radial basis function collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 49, p. 37–47, 2014. Citado na página 3.
- MUCHNIK, G.; SOLOMONOV, S.; GORDON, A. Hydrodynamic development of a laminar velocity field in rectangular channels. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Springer, v. 25, n. 4, p. 1268–1271, 1973. Citado na página 58.
- MÜLLER, H. W.; LIU, M. Structure of ferrofluid dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 6, p. 061405, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 37.
- ODENBACH, S.; THURM, S. *Magnetoviscous effects in ferrofluids*. [S.l.]: Springer, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 37.
- PASCHALIS, E. I. et al. A novel implantable glaucoma valve using ferrofluid. *PloS one*, Public Library of Science, v. 8, n. 6, 2013. Citado na página 2.
- PURDAY, H. An introduction to the mechanics of viscous flow. *of a given stream of melt by an amount AP. The useful power is, therefore, equal to QAP. This is really the heart of the processing job, although other factors, such as product quality, usually must be considered. The efficiency of the screw is this useful power divided by the total power-that is*, 1949. Citado na página 58.
- RAJ, K. *Ferrofluid rotary-shaft seal apparatus and method*. [S.l.]: Google Patents, 1982. US Patent 4,357,024. Citado na página 2.

- RAJ, K.; MOSKOWITZ, R. A review of damping applications of ferrofluids. *Magnetics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 16, n. 2, p. 358–363, 1980. Citado na página 2.
- RAMOS, D. et al. Computer simulations of magnetic fluids in laminar pipe flows. *Journal of magnetism and magnetic materials*, Elsevier, v. 289, p. 238–241, 2005. Citado na página 42.
- RINALDI, C.; ZAHN, M. Effects of spin viscosity on ferrofluid flow profiles in alternating and rotating magnetic fields. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 14, n. 8, p. 2847–2870, 2002. Citado na página 11.
- ROSENSWEIG, R.; KAISER, R.; MISKOLCZY, G. Viscosity of magnetic fluid in a magnetic field. *Journal of Colloid and Interface Science*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 680–686, 1969. Citado na página 23.
- ROSENSWEIG, R.; NESTOR, J.; TIMMINS, R. Ferrohydrodynamic fluids for direct conversion of heat energy. In: *Materials associated with direct energy conversion*. [S.l.: s.n.], 1965. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 11.
- ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 34.
- SHLIOMIS, M. I. Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation. *Physical Review E*, APS, v. 64, n. 6, p. 060501, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 37.
- SIQUEIRA, E.; SERIDONIO, A.; FACHINI, F. Heat transfer and magnetovortical antiresonance of a ferrofluid with a rotating magnetic field. *Journal of superconductivity and novel magnetism*, Springer, v. 26, n. 6, p. 2333–2335, 2013. Citado na página 29.
- THOMAN, D. C.; SZEWCZYK, A. A. *Numerical solutions of time dependent two dimensional flow of a viscous, incompressible fluid over stationary and rotating cylinders*. [S.l.]: Heat Transfer and Fluid Mechanics Laboratory, Department of Mechanical Engineering, University of Notre Dame, 1966. Citado na página 59.
- TRUESDELL, C.; TOUPIN, R. *The classical field theories*. [S.l.]: Springer, 1960. Citado na página 18.
- TZIRTZILAKIS, E. Biomagnetic fluid flow in an aneurysm using ferrohydrodynamics principles. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 27, n. 6, p. 061902, 2015. Citado na página 46.
- WEINAN, E.; LIU, J.-G. Vorticity boundary condition and related issues for finite difference schemes. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 124, n. 2, p. 368–382, 1996. Citado na página 58.
- ZOGHEIB, B.; BARRON, R. Velocity–pressure coupling in finite difference formulations for the navier–stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 65, n. 9, p. 1096–1114, 2011. Citado na página 46.

# Apêndices

# A Códigos computacionais

## MAIN

```
1 import numpy as np
2 from vorticity import ftcs
3 from vorticity import calculateU
4 from vorticity import calculateV
5 from streamFunction import solveStream
6 from streamFunction import constructBc
7 import time
8
9 time0 = time.time()
10
11 # Grid
12
13 L = 4.0
14 H = 1.0
15 h = 0.5
16
17 nx = 401
18 ny = 51
19
20 dx = L/(nx-1)
21 dy = H/(ny-1)
22
23 x = np.linspace(0,L,nx)
24 y = np.linspace(0,H,ny)
25
26 # Physical Parameters
27 Re = 100.0
28
29 # VALIDACAO - Flow and heat transfer characteristics of backward-facing
30 #           step laminar flow in a rectangular duct
31 #
32 #   Re = 100; Xr/S ~ 5.0
33
34 # Boundary Conditions
35 w = np.zeros((ny,nx))
36 psiBc = constructBc.constructBc(nx, ny, h, y, dy)
37 psi = psiBc
38
39 # Time Step
40 dt = (Re)*0.03*min(dx,dy)**2
41
42 erro = 1.0
43 erroList = []
44 count = 0
45 countList = []
```

```

46
47 while erro > 10E-5:
48     wDummy = w.copy()    # Copy current w values before iteration
49
50     psi = solveStream.solveStream(w, psiBc, nx, ny, dx, dy)
51     u = calculateU.calculateU(psi, dy, nx, ny, h, y)
52     v = calculateV.calculateV(psi, dy, nx, ny)
53     w = ftcs.ftcs(w, u, v, psi, Re, dt, dx, dy, h, y)
54
55     erro = np.max(np.abs(w-wDummy))
56     erroList.append(erro)
57
58     count += 1
59     countList.append(count)
60
61     print erro
62
63 # Print simulation time
64 print "Total Simulation time:"
65 print ((time.time() - time0)/3600)
66 # Print reattachment point
67 Xr = np.where(np.abs(np.gradient(u[1, :], dx)) < 0.00001)
68 print "Flow reattachment point:"
69 print Xr[0]*dx
70
71 import matplotlib.pyplot as plt
72 from matplotlib import cm
73
74 X, Y = np.meshgrid(x, y)
75 u = calculateU.calculateU(psi, dy, nx, ny, h, y)
76 v = calculateV.calculateV(psi, dy, nx, ny)
77
78 plt.axes().set_aspect('equal')
79 plt.contourf(X, Y, w, cmap = cm.viridis)
80 plt.streamplot(X, Y, u, v, color = 'w', arrowsize = 0.7, density = 1.0, linewidth = 0.4)
81 plt.savefig('INSERIR', format='eps', dpi=1000)
82 plt.xlim(0.0, L)
83 plt.ylim(0.0, H)
84
85 # Plotting error
86 plt.axes().set_aspect('auto')
87 plt.plot(countList[100:], erroList[100:])
88 plt.savefig('INSERIR.eps', format='eps', dpi=1000)

```

## streamFunction/constructMatrix

```

1 import numpy as np
2 from numba import jit
3
4 @jit(nopython=True)
5 def constructMatrix(nx, ny, dx, dy):
6
7     A = np.zeros(((nx-2)*(ny-2), (nx-2)*(ny-2)))
8
9     row_number = 0 # row counter
10
11     for j in range(1, ny-1):
12         for i in range(1, nx-1):
13
14             # Corners

```

```

15     if i==1 and j==1: # Bottom left corner
16         A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
17         A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2) # fetch i+1
18         A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2) # fetch j+1
19
20     elif i==nx-2 and j==1: # Bottom right corner
21         A[row_number, row_number] = -1.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
22         A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2) # Fetch i-1
23         A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2) # fetch j+1
24
25     elif i==1 and j==ny-2: # Top left corner
26         A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
27         A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2) # fetch i+1
28         A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2) # fetch j-1
29
30     elif i==nx-2 and j==ny-2: # Top right corner
31         A[row_number, row_number] = -1.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
32         A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2) # Fetch i-1
33         A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2) # fetch j-1
34
35     # Sides
36     elif i==1: # Left boundary
37         A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
38         A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2) # fetch i+1
39         A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2) # fetch j+1
40         A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2) # fetch j-1
41
42     elif i==nx-2: # Right boundary
43         A[row_number, row_number] = -1.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
44         A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2) # Fetch i-1
45         A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2) # fetch j+1
46         A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2) # fetch j-1
47
48     elif j==1: # Bottom boundary
49         A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
50         A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2) # fetch i+1
51         A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2) # fetch i-1
52         A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2) # fetch j+1
53
54     elif j==ny-2: # Top boundary
55         A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
56         A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2) # fetch i+1
57         A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2) # fetch i-1
58         A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2) # fetch j-1
59
60     # Interior points
61     else:
62         A[row_number, row_number] = -2.0/(dx**2) -2.0/(dy**2) # Set diagonal
63         A[row_number, row_number+1] = 1.0/(dx**2) # fetch i+1
64         A[row_number, row_number-1] = 1.0/(dx**2) # fetch i-1
65         A[row_number, row_number+nx-2] = 1.0/(dy**2) # fetch j+1
66         A[row_number, row_number-(nx-2)] = 1.0/(dy**2) # fetch j-1
67
68     row_number += 1 # Jump to next row of the matrix!
69
70
71     return A

```

streamFunction/constructRHS



```

1 import numpy as np
2
3 def constructRHS(w, psiBc, nx, ny, dx, dy):
4
5     RHS = np.zeros((nx-2)*(ny-2))
6
7     row_number = 0 # row counter
8     for j in range(1,ny-1):
9         for i in range(1,nx-1):
10
11             # Corners
12             if i==1 and j==1:          # Bottom left corner
13                 RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j-1,i]/(dy**2) - psiBc[j, i-1]/(dx**2)
14
15             elif i==nx-2 and j==1:    # Bottom right corner
16                 RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j-1,i]/(dy**2)
17
18             elif i==1 and j==ny-2:    # Top left corner
19                 RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j+1,i]/(dy**2) - psiBc[j, i-1]/(dx**2)
20
21             elif i==nx-2 and j==ny-2: # Top right corner
22                 RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j+1,i]/(dy**2)
23
24             # Sides
25             elif i==1:                # Left boundary
26                 RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j, i-1]/(dx**2)
27
28             elif i==nx-2:             # Right boundary
29                 RHS[row_number] = - w[j, i]
30
31             elif j==1:                # Bottom boundary
32                 RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j-1,i]/(dy**2)
33
34             elif j==ny-2:             # Top boundary
35                 RHS[row_number] = - w[j, i] - psiBc[j+1,i]/(dy**2)
36
37             # Interior points
38             else:
39                 RHS[row_number] = - w[j, i]
40
41             row_number += 1 # Jump to next row!
42
43     return RHS

```

## streamFunction/constructBc

```

1 import numpy as np
2
3 def constructBc(nx, ny, h, y, dy):
4     psiBc = np.zeros((ny,nx))
5     psiBc[0,:] = 0.0
6     lbound = np.where(y <= h)
7     ubound = np.where(y > h)
8     psiBc[lbound,0] = 0.0
9     for j in ubound[0]:
10         psiBc[j,0] = parProf(h,y[j])          # parabolic Profile
11     psiBc[-1,:] = psiBc[-1,0]
12     psiBc[:, -1] = psiBc[:, -2]
13     return psiBc
14

```

```

15 def parProf(h,y):
16     return - (16.0/3.0)*(y**3 - h**3) + 12.0*(y**2 - h**2) - 8.0*(y - h)

```

## streamFunction/map1Dto2D

```

1 import numpy as np
2
3 def map1Dto2D(psi1D, psiBc, nx, ny):
4     psi = np.zeros((ny,nx))
5
6     row_number = 0
7     for j in range(1,ny-1):
8         for i in range(1,nx-1):
9             psi[j,i] = psi1D[row_number]
10            row_number += 1
11
12     # Dirichlet BC
13     psi[0,:] = psiBc[0,:]
14     psi[:,0] = psiBc[:,0]
15     psi[-1,:] = psiBc[-1,:]
16
17     # Neumann BC
18
19     psi[:, -1] = 2*psi[:, -2] - psi[:, -3]
20
21     return psi

```

## streamFunction/solveStream

```

1 import scipy as sp
2 from scipy.sparse.linalg import spsolve
3 import constructMatrix
4 import constructRHS
5 import map1Dto2D
6
7 def solveStream(w, psiBc, nx, ny, dx, dy):
8     A = constructMatrix.constructMatrix(nx, ny, dx, dy)
9     A = sp.sparse.csc_matrix(A)
10    RHS = constructRHS.constructRHS(w, psiBc, nx, ny, dx, dy)
11    psi1D = spsolve(A,RHS)
12    psi = map1Dto2D.map1Dto2D(psi1D, psiBc, nx, ny)
13    return psi

```

## vorticity/calculateU

```

1 import numpy as np
2
3 def calculateU(psi, dy, nx, ny, h, y):
4     U = np.zeros((ny,nx))
5     lbound = np.where(y <= h)
6     ubound = np.where(y > h)
7     for i in range(nx):
8 # INTERIOR POINTS
9         U[:, i] = np.gradient(psi[:, i], dy)
10 # BOTTOM BC
11         U[0, :] = 0.0

```

```

12 # TOP BC
13     U[-1,:] = 0.0
14 # RIGHT BC
15     U[:, -1] = U[:, -2]
16 # BACKWARD FACE BC
17     for j in lbound[0]:
18         U[j,0] = 0.0
19 # INFLOW BC
20     for j in ubound[0]:
21         U[j,0] = - 16.0*y[j]**2 + 24.0*y[j] - 8.0
22     return U

```

## vorticity/calculateV

```

1 import numpy as np
2
3 def calculateV(psi ,dx,nx,ny):
4     V = np.zeros((ny,nx))
5     for j in range(ny):
6 # INTERIOR POINTS
7         V[j,:] = - np.gradient(psi[j,:],dx)
8 # LEFT BC
9         V[:,0] = 0.0
10 # TOP BC
11         V[-1,:] = 0.0
12 # BOTTOM BC
13         V[0,:] = 0.0
14 # RIGHT BC
15         V[:, -1] = V[:, -2]
16     return V

```

## vorticity/constructMatrix

```

1 import numpy as np
2
3 def constructMatrix(u, v, Re, nx, ny, dx, dy, dt):
4
5     A = np.zeros(((nx-2)*(ny-2), (nx-2)*(ny-2)))
6
7     row_number = 0 # row counter
8
9     for j in range(1,ny-1):
10         for i in range(1,nx-1):
11
12             # Corners
13             if i==1 and j==1: # Bottom left corner
14                 A[row_number,row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
15                 A[row_number,row_number+1] = ( u[j,i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
16                 A[row_number,row_number+nx-2] = ( v[j,i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2) )
17
18             elif i==nx-2 and j==1: # Bottom right corner
19                 A[row_number,row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
20                 A[row_number,row_number-1] = ( - u[j,i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
21                 A[row_number,row_number+nx-2] = ( v[j,i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2) )
22
23             elif i==1 and j==ny-2: # Top left corner
24                 A[row_number,row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
25                 A[row_number,row_number+1] = ( u[j,i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))

```

```

26     A[row_number, row_number-(nx-2)] = ( - v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))
27
28     elif i==nx-2 and j==ny-2: # Top right corner
29         A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
30         A[row_number, row_number-1] = ( - u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
31         A[row_number, row_number-(nx-2)] = ( - v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))
32
33     # Sides
34     elif i==1: # Left boundary
35         A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
36         A[row_number, row_number+1] = ( u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
37         A[row_number, row_number+nx-2] = ( v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2) )
38         A[row_number, row_number-(nx-2)] = (-v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))
39
40     elif i==nx-2: # Right boundary
41         A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
42         A[row_number, row_number-1] = ( - u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
43         A[row_number, row_number+nx-2] = ( v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2) )
44         A[row_number, row_number-(nx-2)] = (-v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))
45
46     elif j==1: # Bottom boundary
47         A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
48         A[row_number, row_number+1] = ( u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
49         A[row_number, row_number-1] = ( - u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
50         A[row_number, row_number+nx-2] = ( v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2) )
51
52     elif j==ny-2: # Top boundary
53         A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2))
54         A[row_number, row_number+1] = ( u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
55         A[row_number, row_number-1] = ( - u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
56         A[row_number, row_number-(nx-2)] = (-v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))
57
58     # Interior points
59     else:
60     #####
61         # Upwind scheme for u and v differencing
62     #####
63         if u[j, i] > 0.0:
64             if v[j, i] > 0.0:
65                 A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2) +\
66                     u[j, i]/dx + v[j, i]/dy)
67                 A[row_number, row_number+1] = ( - 1.0/(Re*dx**2))
68                 A[row_number, row_number-1] = ( - u[j, i]/(dx) - 1.0/(Re*dx**2))
69                 A[row_number, row_number+nx-2] = ( - 1.0/(Re*dy**2) )
70                 A[row_number, row_number-(nx-2)] = (-v[j, i]/(dy) - 1.0/(Re*dy**2))
71
72             elif v[j, i] <= 0.0:
73                 A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2) +\
74                     u[j, i]/dx - v[j, i]/dy)
75                 A[row_number, row_number+1] = ( - 1.0/(Re*dx**2))
76                 A[row_number, row_number-1] = ( - u[j, i]/(dx) - 1.0/(Re*dx**2))
77                 A[row_number, row_number+nx-2] = ( v[j, i]/dy - 1.0/(Re*dy**2) )
78                 A[row_number, row_number-(nx-2)] = ( - 1.0/(Re*dy**2))
79
80             elif u[j, i] <= 0.0:
81                 if v[j, i] > 0.0:
82                     A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2) -\
83                         u[j, i]/dx + v[j, i]/dy)
84                     A[row_number, row_number+1] = ( u[j, i]/dx - 1.0/(Re*dx**2))
85                     A[row_number, row_number-1] = ( - 1.0/(Re*dx**2))
86                     A[row_number, row_number+nx-2] = ( - 1.0/(Re*dy**2) )
87                     A[row_number, row_number-(nx-2)] = (-v[j, i]/(dy) - 1.0/(Re*dy**2))

```

```

88
89         elif v[j, i] <= 0.0:
90             A[row_number, row_number] = (1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2) - \
91                 u[j, i]/dx - v[j, i]/dy)
92             A[row_number, row_number+1] = ( u[j, i]/dx - 1.0/(Re*dx**2))
93             A[row_number, row_number-1] = ( - 1.0/(Re*dx**2))
94             A[row_number, row_number+nx-2] = ( v[j, i]/dy - 1.0/(Re*dy**2) )
95             A[row_number, row_number-(nx-2)] = ( -1.0/(Re*dy**2))
96 #####
97             # Normal scheme
98 #####
99
100#             A[row_number, row_number] = 1.0/dt + (2.0/Re)*(1.0/dx**2 + 1.0/dy**2)
101#             A[row_number, row_number+1] = ( u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
102#             A[row_number, row_number-1] = ( - u[j, i]/(2*dx) - 1.0/(Re*dx**2))
103#             A[row_number, row_number+nx-2] = ( v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2) )
104#             A[row_number, row_number-(nx-2)] = ( - v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))
105
106         row_number += 1 # Jump to next row of the matrix!
107
108
109     return A

```

## vorticity/constructRHS

```

1 import numpy as np
2
3 def constructRHS(u, v, Re, w, nx, ny, dx, dy, dt):
4
5     RHS = np.zeros((nx-2)*(ny-2))
6
7     row_number = 0 # row counter
8     for j in range(1, ny-1):
9         for i in range(1, nx-1):
10
11             # Corners
12             if i==1 and j==1: # Bottom left corner
13                 RHS[row_number] = w[j, i]/dt - ( - u[j, i]/(2.0*dx) - 1.0/(Re*dx**2))*w[j, i-1] - \
14                     ( - v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))*w[j-1, i]
15
16             elif i==nx-2 and j==1: # Bottom right corner
17                 RHS[row_number] = w[j, i]/dt - ( u[j, i]/(2.0*dx) - 1.0/(Re*dx**2))*w[j, i+1] - \
18                     ( - v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))*w[j-1, i]
19
20             elif i==1 and j==ny-2: # Top left corner
21                 RHS[row_number] = w[j, i]/dt - ( - u[j, i]/(2.0*dx) - 1.0/(Re*dx**2))*w[j, i-1] - \
22                     ( v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))*w[j+1, i]
23
24             elif i==nx-2 and j==ny-2: # Top right corner
25                 RHS[row_number] = w[j, i]/dt - ( u[j, i]/(2.0*dx) - 1.0/(Re*dx**2))*w[j, i+1] - \
26                     ( v[j, i]/(2*dy) - 1.0/(Re*dy**2))*w[j+1, i]
27
28             # Sides
29             elif i==1: # Left boundary
30                 RHS[row_number] = w[j, i]/dt - ( - u[j, i]/(2.0*dx) - 1.0/(Re*dx**2))*w[j, i-1]
31
32             elif i==nx-2: # Right boundary
33                 RHS[row_number] = w[j, i]/dt - ( u[j, i]/(2.0*dx) - 1.0/(Re*dx**2))*w[j, i+1]
34
35             elif j==1: # Bottom boundary

```

```

36         RHS[row_number] = w[j, i]/dt -(-v[j, i]/(2.0*dy) - 1.0/(Re*dy**2))*w[j-1, i]
37
38     elif j==ny-2:           # Top boundary
39         RHS[row_number] = w[j, i]/dt - ( v[j, i]/(2.0*dy) - 1.0/(Re*dy**2) )*w[j+1, i]
40
41     # Interior points
42     else:
43         RHS[row_number] = w[j, i]/dt
44
45     row_number += 1 # Jump to next row!
46
47     return RHS

```

## vorticity/ftcs

```

1 from numba import jit
2 import numpy as np
3
4 @jit(nopython=True)
5
6 def inletVorticity(h, y):
7     return 32.0*y - 24
8
9 def ftcs(W, U, V, psi, re, dt, dx, dy, h, y):
10    Wn = W.copy()
11
12    W[1:-1, 1:-1] = Wn[1:-1, 1:-1] + (1./re)*\
13        (dt/dy**2 * (Wn[2:, 1:-1] - 2*Wn[1:-1, 1:-1] + Wn[:-2, 1:-1])) -\
14        U[1:-1, 1:-1]*(Wn[1:-1, 2:] - Wn[1:-1, :-2])*(dt/(2*dx)) -\
15        V[1:-1, 1:-1]*(Wn[2:, 1:-1] - Wn[:-2, 1:-1])*(dt/(2*dy))
16
17    hnode = max( np.where(y<h) )
18    inlet = max( np.where(y>=h) )
19
20    # Step face BC
21    W[0:(hnode[-1]), 0] = (2.0/dx**2)*(psi[0:(hnode[-1]), 0] - psi[0:(hnode[-1]), 1])
22
23    # Top BC
24    W[-1, :] = 2*(psi[-1, :] - psi[-2, :])/(dy**2)
25
26    # Bottom BC
27    W[0, :] = 2*(psi[0, :] - psi[1, :])/(dy**2)
28
29    # Inlet BC
30    for j in inlet:
31        W[j, 0] = inletVorticity(h, y[j])
32
33    # Outlet BC
34    W[:, -1] = W[:, -2]
35
36    return W

```

# Anexos

## A Identidades vetoriais

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.2})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla(\phi_1 \phi_2) = \phi_1 \nabla \phi_2 + \phi_2 \nabla \phi_1 \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi_1 \times \nabla \phi_2) = 0 \quad (\text{A.14})$$



## B Identidades tensoriais

$$\mathbf{A}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \nabla\mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.18})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \mathbf{A} \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \cdot (\phi \underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \nabla\phi \quad (\text{A.20})$$