

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**DINÂMICA DE BOLHAS EM MEIO MAGNÉTICO:
FORMULAÇÃO, MODELAGEM E CONTROLE**

Sara Malvar Mauá

Brasília, julho de 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
**DINÂMICA DE BOLHAS EM MEIO MAGNÉTICO:
FORMULAÇÃO, MODELAGEM E CONTROLE**

Sara Malvar Mauá

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Elétrica como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheira Eletricista*

Banca Examinadora

Professor Francisco Ricardo da Cunha, PhD _____
(ENM-UnB)
Orientador

Professor José Camargo da Costa, Docteur _____
(ENE-UnB)
Examinador Interno

Professor Carlos Llanos, Doutor (ENM-UnB) _____
Examinador Interno

AGRADECIMENTOS

O ser humano nunca trilha seu caminho sozinho e comigo isso não seria diferente. Diversas pessoas me inspiraram, ajudaram, acompanharam e até mesmo admiraram o meu caminho até aqui. Apesar de parecer o fim, esse é mais um começo e ele não seria possível sem a ajuda de diversas pessoas que estiveram presentes nestes meus 21 anos de vida. Ricard Dawkins disse que poderíamos dar aulas particulares à Aristóteles e deixá-lo pasmado, tal era o privilégio de nascer depois de Newton, Darwin, Einstein, Planck, Watson, Crick e seus colegas. Eu posso lhe parafrasear (apesar de também concordar plenamente com sua afirmação), dizendo tal era o privilégio de nascer depois de todos que me ajudaram até aqui.

Obrigada, mamãe Helena e papai Roberto. Não houve nenhum dia em que vocês não apoiassem meus estudos, meus trabalhos e não me levantassem quando eu ficava muito cansada. Vocês me ajudaram a carregar o fardo, às vezes pesado, que eu me propus a desafiar. Obrigada, mãe, pelas conversas, pelos conselhos, pela amizade, pelo amor e carinho e por tudo o mais que você me proporcionou. Crescer é algo extremamente difícil e, às vezes, doloroso, mas você fez desse caminho um mar de flores para mim. Acordar todos os dias com o seu sorriso, suas musiquinhas e o café da manhã mais gostoso do mundo me deu forças para sempre continuar em frente. Obrigada, pai, pelos treinos, pelas conversas, pelas viagens, pelo carinho e pelo companherismo nas minhas eternas brincadeiras de criança. Receber de você várias lembrancinhas, mostrando o quanto você se importava, alegrava o meu dia. Obrigada pelas caronas eternas e por estar sempre disponível para me ajudar. Eu poderia escrever um livro agradecendo por tudo que vocês fizeram por mim que me tornou quem eu sou hoje. Eu poderia agradecer pelos lanchinhos da época escola à faculdade, pelas caronas, pelos presentes, pelos livros e por tudo mais que vocês disponibilizaram para que eu pudesse ser quem eu sou. Entretanto, acho que basta eu dizer que vocês fizeram muito mais do que era a obrigação de vocês como pais e eu sei que não poderia ter nascido em uma família melhor. E mais que isso, saibam que tudo que eu faço tem como primeiro objetivo deixar vocês orgulhosos de sua única filha. Peço desculpas pelas vezes em que não consegui esse objetivo. Amor não é o suficiente para descrever o que eu sinto por vocês.

Obrigada, Rafael, meu namorado, companheiro, amigo, parceiro e professor. Sem você esse trabalho não teria 10% da qualidade que tem. Obrigada pelo apoio, pelos ensinamentos, pelas críticas, pelas discussões de ciência e pelo amor e carinho. Você entrou na minha vida como professor, passando seus conhecimentos de física. Hoje, você continua tendo este papel de mestre, mas me ensina coisas muito mais profundas. Nós passamos por vários momentos juntos, bons, ruins, difíceis e eu posso dizer que todos eles fizeram o meu amor por você mais forte. Juntamente disso, agradeço aos meus sogros e cunhadas que me acolheram na família com alegria.

Obrigada a minha família paulista: minha querida avó Thereza, tia Filó e tio Jorge. Vocês cuidaram de mim como segunda família. Minhas férias sempre foram melhores quando estávamos juntos. Rê, você sabe que é minha irmã, obrigada pelas conversas e conselhos, seriados, passeios. Aninha, vou lembrar sempre das nossas invasões à casa do vizinho, pulando o muro e fingindo que éramos espãs; das nossas brincadeiras de infância. Muito obrigada por me acolherem e darem

todo o carinho.

Gostaria também de agradecer a minha “família americana”, meu tio Henrique, tia Regina e os primos Ana e Riquinho. Dinho, você tem sido uma fonte de inspiração desde que eu tenho 5 anos de idade. Você, sem saber, encaminhou-me ao mundo da Engenharia Elétrica e me fez querer ser a melhor. Fui comparada com você desde o primeiro semestre, com a pergunta “Você é parente do Malvar?”. Espero que, agora, neste início de carreira acadêmica e profissional, eu tenha feito jus ao sobrenome. Aos meus avós Henrique e Gilséa que não estão mais aqui para ver este momento, mas que, como cientistas, inspiraram-me desde pequena a fazer ciência. Tenho certeza que vocês estariam felizes!

E obrigada a minha pequena família brasiliense, que nos acompanha nos jantares, almoços e conquistas, Tia Bete e Tio Eliézio. Muito obrigada por sempre estarem presentes nas minhas conquistas e torcerem por mim. Alessandrinha e Nice, que cuidou de mim como uma filha, vocês não são família de sangue, mas cuidaram de mim desde pequena e torceram sempre pelo meu futuro. São família de coração. Obrigada!

Agradeço também aos meus amigos: os que me acompanharam desde o ensino fundamental e estão até hoje do meu lado. Eu me diverti muito com vocês, desde os amigos de CEUB aos veteranos e calouros da UnB. Agradeço, em especial, a Marina. Nos encontramos no meio do curso e seguimos juntas, firmes, até o final, mesmo quando ficamos separadas por todo um oceano atlântico! Eu e você não temos irmãs de sangue, mas você é minha irmã de coração.

Agradeço a minha família japonesa, sensei Serizawa e Keiko-san, que há 10 anos me acolheram como filha no Japão e me passaram todo o espírito de samurai além do karatê. Juntamente, gostaria de agradecer ao sensei Sasaki e a sua esposa Ruth, que me trataram como neta durante toda a minha infância. Aprendi muito mais do que karatê, aprendi a ser uma pessoa melhor e buscar meus objetivos com força, sempre.

どうもありがとうございます!

Agradeço ao professor Francisco Ricardo, que abriu meus olhos para o mundo acadêmico. Meu crescimento e amadurecimento neste período em que trabalhamos juntos foi imenso. Obrigada por ter me aceitado como aluna mesmo não me conhecendo academicamente, obrigada por ter continuado seu trabalho com e-mails enormes e cansativos enquanto estava em Santa Bárbara, obrigada pela amizade quando viajamos por São Francisco com o Rafa. Você é uma grande inspiração para mim e eu tenho sorte de ter lhe encontrado na UnB. Como disse Sir Isaac Newton, "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

Obrigada a todos os professores da Universidade de Brasília que me ensinaram, aconselharam e ajudaram nos momentos difíceis. A arte de ensinar é uma tarefa difícil demais para que alguém se envolva nela por comodismo, então eu sei que todos vocês a fazem com muito amor. Obrigada em especial aos membros e professores do grupo VORTEX, minha casa de formação na UnB.

Como paulista ferrenha, sempre tive muitas críticas à Brasília e à Universidade de Brasília, mas agradeço a todo o conhecimento que obtive neste lugar e a todas as boas lembranças das madrugadas estudando. Obrigada aos Professores José Camargo e Carlos Llanos que se propuseram

a ler este trabalho e deram sugestões excelentes.

Por fim, mas não menos importante, preciso agradecer aos animaizinhos que me apoiaram sempre. Eles provam sua dedicação e carinho sem palavras. Bara, minha primeira grande surpresa, foi minha companheira de infância e protetora e me fez aprender o significado de saudade. Fifizinha, meu amorzinho colorido, foi minha alegria durante tanto tempo. Era a melhor companheira, protetora e também o poodle mais estiloso de todo este Brasil: um dia era rosa, no outro vermelha. A maior injustiça deste mundo é eu não poder te trazer de volta. Eu não pude te segurar em terra, apenas no meu coração. Flickinha, o cachorrinho mais carinhoso deste mundo e, apesar das controvérsias, o mais louco! Deitou do meu lado enquanto eu estudava, no sábado à noite, em seu primeiro dia em nossa casa e nunca mais saiu da minha companhia. E a mais nova da turma, Fumacinha, sagaz, inteligente, brincalhosa e a minha alegria ao chegar em casa após um dia cansativo e receber seus miados e lambidas.

Finalizando, agradeço ao Karatê: minha fonte de inspiração. Já me salvou várias vezes de todos os males deste mundo e continua salvando. São 18 anos de dedicação intensa e os únicos momentos dos quais eu me arrependo são aqueles que não passei treinando. Oss!

訓

一人格完成に努力すること

一誠の道を守ること

一努力精神を養うこと

一礼儀を重んずること

一血気の勇を戒むこと

中山王政

DOJO KUN

Primeiro, dedicar-se na formação do caráter

Primeiro, proteger o caminho da verdade

Primeiro, alimentar o espírito de esforço

Primeiro, ser cortês e respeitoso

Primeiro, conter a coragem impetuosa

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo principal investigar o comportamento não-linear de uma bolha imersa em um fluido não-Newtoniano, sujeito a um campo de pressão acústico. Uma nova versão da equação de Rayleigh-Plesset é proposta com o tensor magnético. Esta equação para dinâmica de bolhas é resolvida computacionalmente pelo método Runge-Kutta de quinta ordem com passo de tempo adaptativo, visando diminuir o custo computacional. A influência de parâmetros adimensionais é investigada, como o número de Reynolds e Weber e dos parâmetros magnéticos, como Reynolds Magnético e Susceptibilidade Magnética. A excitação externa aplicada foi variada, aplicando-se pulsos periódicos, não-periódicos, excitação senoidal e excitação não-linear ao modelo Newtoniano. Soluções assintóticas para o raio mínimo de colapso são apresentadas, as condições para sensibilidade às condições iniciais e a análise assintótica, resultando em uma linearização da função. Isto permite uma análise utilizando tanto as teorias de controle Linear - baseadas em espaço de estados linear - quanto as teorias não-lineares - como os coeficientes de Lyapunov. Por fim, aplica-se uma rede neural para a caracterização dos padrões vibracionais do movimento oscilatório, baseada no diagrama de bifurcação construído. Esse diagrama é comparado com o que foi produzido por meio da teoria magnética. Além disso, tempo de colapso e amplitude em regime permanente são analisados. Para finalizar, um novo método baseado nas ferramentas de diagrama de fase e FFT é proposto para analisar o comportamento da bolha oscilando em diferentes números de Reynolds Magnético e Suscetibilidade Magnética.

Palavras-Chave: Equações de Maxwell, Fluidos magnéticos, Equação de Rayleigh-Plesset, Dinâmica de Bolhas, Controle não-Linear.

ABSTRACT

The main purpose of the present work is to investigate the non-linear behaviour of a bubble immersed in a non-Newtonian fluid, subjected to an acoustic pressure field. A new version of the Rayleigh-Plesset equation is proposed with the magnetic tensor. That equation is numerically solved using a fifth order Runge-Kutta scheme with an adaptive time step, in order to lower the computational cost. The influence of the main Newtonian dimensionless physical parameters, such as the Reynolds and Weber numbers and the non-Newtonian parameters, as Magnetic Reynolds and Magnetic Susceptibility is investigated. Different types of external excitation are applied to the Newtonian model: periodic pulses, non-periodic pulses, sinusoidal and non-linear excitation. Analytical solutions for the bubble minimum radius of collapse are proposed and the initial conditions sensibility is investigated. An asymptotic solution is performed, in order to linearize the system. Using that, both control theories: linear and non-linear were used, including space state and Lyapunov coefficients. Finally, a neural network is trained to characterize the vibrational parameters of the bubble oscillatory motion, based on the bifurcation diagram. This diagram is compared with the one produced with the magnetic theory. Time of collapse and steady state amplitude are analysed also. To sum up, a new method is proposed to analyse the behaviour of the bubble oscillating with different Magnetic Reynolds and Magnetic Susceptibility, based on FFT and phase diagram.

Key- Words: Maxwell Equations, Magnetic Fluids, Rayleigh-Plesset Equation, Bubble Dynamics, Non-linear Control.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | GENERALIDADES | 1 |
| 1.2 | SONOLUMINESCÊNCIA | 5 |
| 1.3 | CAVITAÇÃO ACÚSTICA | 7 |
| 1.4 | OBJETIVOS | 9 |
| 1.4.1 | OBJETIVO GERAL | 9 |
| 1.4.2 | OBJETIVOS ESPECÍFICOS | 9 |
| 2 | FORMULAÇÃO MATEMÁTICA | 11 |
| 2.1 | EQUAÇÕES GOVERNANTES | 11 |
| 2.1.1 | EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE | 12 |
| 2.1.2 | EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO | 14 |
| 2.1.3 | MODELO DE FLUIDO NEWTONIANO | 14 |
| 2.1.4 | MODELO DE FLUIDO NÃO-NEWTONIANO | 17 |
| 2.1.5 | CONDIÇÕES DE CONTORNO NA INTERFACE DA BOLHA | 22 |
| 2.1.6 | EQUAÇÃO DA DINÂMICA DE BOLHAS GENERALIZADA | 27 |
| 2.1.7 | ADIMENSIONALIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE | 28 |
| 2.1.8 | VERSÃO FINAL DA EQUAÇÃO DE RAYLEIGH-PLESSET MAGNÉTICA | 32 |
| 2.1.9 | DISCUSSÃO SOBRE AS ESCALAS DE TEMPO | 34 |
| 2.1.10 | SIMILARIDADE DINÂMICA COM CIRCUITO RESSONANTE | 36 |
| 2.1.11 | CÁLCULO DA EQUIVALÊNCIA DINÂMICA | 37 |
| 3 | SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS, ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DINÂMICA DO SISTEMA BOLHA-FLUIDO | 38 |
| 3.1 | SOLUÇÃO ASSINTÓTICA | 38 |
| 3.2 | ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR | 44 |
| 3.2.1 | CONTROLABILIDADE | 51 |
| 3.2.2 | OBSERVABILIDADE | 52 |
| 4 | SOLUÇÃO NUMÉRICA | 54 |
| 4.1 | INTRODUÇÃO | 54 |
| 4.2 | RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM | 55 |
| 4.2.1 | SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A CAVIDADE DE RAYLEIGH | 58 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.3 | PASSO DE TEMPO ADAPTATIVO | 59 |
| 5 | RESULTADOS - BOLHA EM FLUIDO NEWTONIANO | 65 |
| 5.1 | TEORIA ASSINTÓTICA DO RAIO DE COLAPSO | 65 |
| 5.2 | EXCITAÇÃO SENOIDAL | 68 |
| 5.3 | SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS | 69 |
| 5.3.1 | PRIMEIRA PARTE - MODELAGEM MATEMÁTICA EM SISTEMAS DINÂMICOS..... | 70 |
| 5.3.2 | SEGUNDA PARTE - MODELAGEM FÍSICA | 72 |
| 5.4 | EXCITAÇÃO EM PULSOS NÃO PERIÓDICOS..... | 76 |
| 5.5 | EXCITAÇÃO EM PULSOS PERIÓDICOS..... | 77 |
| 5.6 | EXCITAÇÃO NÃO-LINEAR | 80 |
| 5.7 | PADRÕES VIBRACIONAIS..... | 83 |
| 5.7.1 | DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO E EXPOENTES DE LYAPUNOV..... | 88 |
| 5.8 | REDES NEURAIS..... | 89 |
| 6 | RESULTADOS - BOLHA EM MEIO MAGNÉTICO | 95 |
| 6.1 | EXCITAÇÃO SENOIDAL | 95 |
| 6.2 | VARIAÇÕES DE AMPLITUDE EM FUNÇÃO DO CAMPO..... | 99 |
| 6.3 | DIAGRAMA DE COLAPSO | 101 |
| 6.4 | TEMPO DE COLAPSO | 103 |
| 6.5 | PADRÕES VIBRACIONAIS..... | 106 |
| 6.6 | INFLUÊNCIA DA SUSCEPTIBILIDADE MAGNÉTICA..... | 111 |
| 6.7 | PRESSÃO NO INTERIOR DA BOLHA | 115 |
| 7 | CONCLUSÃO | 118 |
| 7.0.1 | TRABALHOS FUTUROS | 120 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 121 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|-----|---|----|
| 5.1 | Parâmetros utilizados nas simulações para obtenção dos parâmetros vibracionais e como entrada dos dados de treinamento da rede neural | 94 |
|-----|---|----|

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|---|
| 1.1 | Demonstração de fotografias em alta velocidade de uma bolha em colapso perto de uma parede (Lauterborn & Ohl 1997) seguida de simulação numérica abaixo (Popinet, 2001). | 2 |
| 1.2 | Colapso de bolhas perto de superfícies pode se dar de três maneiras: (a) Colapso esférico perto de uma superfície emite uma onda de choque; (b) Impacto de micro-jatos emitem ondas de choque mais fortes. O micro-jato, que possui um raio de aproximadamente $\frac{1}{10}$ do diâmetro máximo da bolha, gera um impacto na superfície sem penetração; (c) Micro-jatos mais fortes penetram na superfície..... | 3 |
| 1.3 | Uma bolha se movimenta em água e entra em contato com um prato de vidro (imagem de baixo). Esse impacto gera um padrão de interferência a partir de um feixe de laser que brilha sobre a superfície da água. - Fonte: Hendrix et al, 2012 | 3 |
| 1.4 | Quatro bolhas sofrem a interferências de suas ondas de choque devido ao rápido aumento de seu raio. - Fonte: P.A. Quinto-Sul/ICN-UNAM..... | 4 |
| 1.5 | Duas bolhas, separadas a diferentes distâncias, sofrem uma rápida expansão de seu raio e permitem a observação das ondas de choque. - Fonte: P.A. Quinto-Sul/ICN-UNAM..... | 4 |
| 1.6 | Simulação numérica para o problema das duas bolhas em expansão, demonstrando a deformação das bolhas. - Fonte: P.A. Quinto-Sul/ICN-UNAM | 5 |
| 1.7 | Ressonador acústico com dois transdutores separados por um cilindro de vidro. Ondas estacionárias de 20 kHz a 100 kHz e campos de pressão de até 3 bars são gerados no líquido. Se a pressão acústica for grande o suficiente, várias bolhas serão geradas. Se a pressão não for tão alta, é possível uma “levitação acústica” de uma bolha de gás, que pode gerar luz a cada ciclo acústico. Na foto, Sean Cordry observa a sonoluminescência azul. - Fonte: L. A. Crum/Sonoluminescence. | 6 |
| 1.8 | Observação do efeito da sonoluminescência a partir de um ressonador acústico. Fonte: L. A. Crum/Sonoluminescence. | 7 |
| 1.9 | Imagem mostrando o jato resultante do colapso de uma bolha perto de superfícies. Esse impacto é utilizado para a limpeza dos mais diversos materiais, afastando as impurezas da fronteira sólida. - Vide Ohl, 2006 | 7 |
| 1.10 | Imagem de uma seção do pâncreas. As imagens superiores mostram o pâncreas não tratado. O filtro amarelo mostra a quantidade de anti-insulina. No caso das imagens inferiores, tratadas, não existe anti-insulina, mostrando apenas as células beta - Vide Chen, 2006 | 9 |

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Esquema ilustrativo do balanço de massa em torno da bolha devido a migração de líquido do meio externo para o interior da bolha, gerando uma vazão mássica associada à evaporação no interior desta. | 13 |
| 2.2 | Interface de análise da superfície esférica da bolha | 23 |
| 2.3 | Campo magnético H em função da distância da bolha | 33 |
| 2.4 | Campo magnético H em função da distância r até a bolha | 34 |
| 3.1 | Diferença entre as respostas, para o raio da bolha em função do tempo, linearizada e não-linear com $Re = 1$, $We = 1$ e variação da amplitude de oscilação: (a) $\varepsilon = 0,05$; (b) $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,2$ e $\varepsilon = 1$. Os encartes representam um <i>zoom</i> nas curvas, demonstrando como o aumento da amplitude diferencia as respostas linearizada e não-linear. | 42 |
| 3.2 | Raio máximo da bolha em função do tempo obtido em regime permanente, em função da amplitude - variando de 0,05 a 2 - da oscilação senoidal aplicada para $Re = 1$, $We = 1$. A linha tracejada representa a solução assintótica de ordem ε para a condição 1, enquanto a linha cheia representa a solução numérica e a linha pontilhada, por sua vez, representa a correção $O(\varepsilon^2)$ | 43 |
| 3.3 | Diagrama de blocos da dinâmica de um sistema linear descrito por espaço de estados | 45 |
| 3.4 | Gráfico demonstra a amplitude da oscilação em função do número de Weber para uma excitação de entrada com frequência $\omega = 2,236$. Esta é a frequência natural do sistema para $We = 2$. Neste caso, $Re = 1$ e $\varepsilon = 0,3$ | 50 |
| 3.5 | Diagrama de um oscilador harmônico: massa, mola e amortecedor..... | 51 |
| 4.1 | (a) Convergência da solução numérica, observando o raio médio em função do passo de tempo utilizado; (b) Encarte explicita um zoom da zona de início de instabilidade do raio médio, devido ao baixo passo de tempo utilizado | 56 |
| 4.2 | Apresentação do tempo de colapso proposto no problema da cavidade de Rayleigh, obtida por meio de simulação computacional. O encarte apresenta um detalhamento do movimento da bolha na iminência do colapso. | 59 |
| 4.3 | Fluxograma representativo do método de Fehlbergl utilizado no presente trabalho para a implementação do passo de tempo adaptativo. | 61 |
| 4.4 | Fluxograma da subrotina de implementação e resolução numérica da equação de Rayleigh-Plesset com Runge-Kutta com passo de tempo adaptativo..... | 62 |
| 5.1 | Demonstração no espaço de fase de um oscilador com diferentes níveis de energia..... | 68 |
| 5.2 | Comparação da sensibilidade da bolha sem excitação externa: na primeira imagem identifica-se a oscilação quando $R(0) = 0,5$ e varia-se $G(0)$ com $Re = 5$ e $We = 5$. Na segunda, observa-se $R(0) = 1,5$ e $G(0) = 0,5$ com $Re = 15$ e $We = 15$ | 70 |
| 5.3 | Comparação da sensibilidade da bolha com excitação externa $Re = 50$, $We = 50$, $\varepsilon = 0,5$ e $R(0) = 1$, $G(0) = 0$. Tem-se a comparação do espaço de fase que leva a um sistema caótico. | 71 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.4 | Comparação da sensibilidade da bolha com excitação externa $Re = 50$, $We = 50$, $\varepsilon = 0,5$ e $R(0) = 1,5$, $G(0) = 0,5$. Tem-se a comparação do espaço de fase que leva a um sistema caótico..... | 71 |
| 5.5 | Comparação da sensibilidade da bolha à variação do raio inicial: na primeira imagem é possível comparar a diferença entre $R(0) = 1,1$ e $G(0) = 0,5$ e, em linha pontilhada, $R(0) = 1$ e $G(0) = 0$. Na segunda, observa-se $R(0) = 1,2$ e $G(0) = 0,5$ e, novamente, em linha pontilhada, $R(0) = 1$ e $G(0) = 0$. Simulação efetuada com $Re = 8$, $We = 3$ | 72 |
| 5.6 | Comparação do tempo de relaxação da bolha, ou seja, tempo para o fim do transiente para diferentes condições iniciais de velocidade. Existe uma translação no tempo quando se relaciona as duas velocidades. Desta forma, pode-se estimar $t_0 = 25$ em termos adimensionais. | 73 |
| 5.7 | Comparação do tempo de colapso em função da amplitude da excitação senoidal aproximada por uma lei de potência descrita como: $t_c = 2,15\varepsilon^{-0,18}$ | 74 |
| 5.8 | Diagrama de colapso em função dos números de Reynolds e Weber..... | 75 |
| 5.9 | Comparação da sensibilidade da bolha em resposta a excitações (pulsos não-periódicos) de amplitude (a) 1 e (b) 10. Para $Re = 10$ e $We = 6$ | 76 |
| 5.10 | (a) Variação do raio da bolha com relação ao tempo para uma excitação não periódica, na qual os parâmetros físicos valem (a) $Re = 10$ e $We = 3$; (b) $Re = 20$ e $We = 9$; (c) $Re = 70$ e $We = 2$ | 77 |
| 5.11 | Variação do raio da bolha excitada periodicamente com parâmetros físicos valendo $Re = 10$ e $We = 6$. (a) Excitação com amplitude 5; (b) Excitação com amplitude 10 | 78 |
| 5.12 | Variação do raio da bolha excitada periodicamente com parâmetros físicos valendo $Re = 30$ e $We = 10$. A variação da frequência gera modificações na amplitude de oscilação e em seu padrão de vibração. | 79 |
| 5.13 | Excitação não-linear aplicada à bolha. Nas imagens, têm-se: (a) (a) $\varepsilon = 0,1$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1,0$; e (d) $\varepsilon = 2,0$. Para $Re = 1$ e $We = 1$ | 80 |
| 5.14 | Resposta do raio da bolha em função do tempo para os parâmetros $Re = 10$, $We = 5$ variando: (a) $\varepsilon = 0,2$; (b) $\varepsilon = 0,4$; (c) $\varepsilon = 0,6$; e (d) $\varepsilon = 0,8$ com excitação não-linear. | 81 |
| 5.15 | Resposta do raio da bolha em função do tempo para os parâmetros $\varepsilon = 0,5$, $We = 5$ variando: (a) $Re = 10$; (b) $Re = 20$; (c) $Re = 30$; e (d) $Re = 40$ com excitação não-linear. | 82 |
| 5.16 | Resposta do raio da bolha em função do tempo para os parâmetros $\varepsilon = 0,5$, $Re = 10$ variando: (a) $We = 5$; e (b) $We = 10$ | 82 |
| 5.17 | Diagrama de colapso para a excitação $f(t) = \text{sen}[1 + \varepsilon \text{sen}(\omega t)]$ | 83 |
| 5.18 | Diagrama de bifurcação: Os quatro padrões principais identificáveis baseando-se nos padrões adimensionais número de Reynolds e amplitude da excitação senoidal para $We = 6$ | 84 |
| 5.19 | Identificação do padrão de deformabilidade..... | 85 |
| 5.20 | Padrão 1 e 2 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. A linha pontilhada em (a) demonstra a variação da velocidade no tempo. | 86 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.21 | Padrão 3 e 4 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. A linha pontilhada em (a) demonstra a variação da velocidade no tempo. | 87 |
| 5.22 | Padrão 5 e 6 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. | 87 |
| 5.23 | Padrão 7 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. ... | 87 |
| 5.24 | Comparação da sensibilidade da bolha com excitação externa $Re = 2$, $We = 2$, $\epsilon = 0,3$ e $R(0) = 1,5$, $G(0) = 0,5$. Tendência de diminuição dos expoentes de Lyapunov, diminuindo também a sensibilidade às condições iniciais. | 89 |
| 5.25 | (a) Camada de entrada; (b) camada oculta; e (c) camada de saída em esquema de rede neural | 90 |
| 5.26 | Imagem obtida do Matlab a partir da <i>toolbox</i> do Matlab. | 91 |
| 5.27 | Erro percentual obtido para os diferentes padrões vibracionais no conjunto de teste. . | 92 |
| 5.28 | Fluxograma representativo da subrotina utilizada para o treinamento da rede neural no Matlab. | 93 |
| 6.1 | Comparação do comportamento do raio da bolha no tempo para diferentes valores de Reynolds Magnético, considerando $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,3$ e $\chi = 1$ | 96 |
| 6.2 | Comparação do comportamento do raio da bolha no espaço de fase para diferentes valores de Reynolds Magnético, considerando $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,3$ e $\chi = 1$ | 97 |
| 6.3 | Comparação do comportamento do raio da bolha a partir da FFT para diferentes valores de Reynolds Magnético, considerando $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,3$ e $\chi = 1$ | 98 |
| 6.4 | Comportamento oscilatório do raio da bolha imersa em fluido Newtoniano com $Re =$ 10 , $We = 5$ e $\epsilon = 0,3$ | 99 |
| 6.5 | Amplitude de oscilação do raio da bolha em função de $\frac{1}{Re_{mag}}$, parâmetro proporci- onal ao campo externo aplicado. | 100 |
| 6.6 | Comparação do diagrama de colapso, para diferentes valores de Re e We , para o caso magnético forte e unitário em comparação ao caso não magnético com $\epsilon = 0,5$ | 101 |
| 6.7 | Demonstração do momento de colapso de uma bolha de sabão. (<i>Foto extraída de:</i> <i>http://www.makeuponyourmind.com/capturing-the-moment-a-soap-bubble-bursts/</i>) ... | 102 |
| 6.8 | Tempo de colapso em função de $\frac{1}{Re_{mag}}$ com a componente H_θ | 104 |
| 6.9 | Tempo de colapso em função de $\frac{1}{Re_{mag}}$ sem a componente H_θ | 105 |
| 6.10 | Padrões vibracionais identificados em função do número de Reynolds Magnético e Susceptibilidade Magnética. Para os testes $Re = 10$, $We = 5$ e $\epsilon = 0,5$ | 106 |
| 6.11 | Ampliação nas regiões de baixo Reynolds Magnético. Para os testes $Re = 10$, $We = 5$ e $\epsilon = 0,5$ | 107 |
| 6.12 | Padrão 1 e 2 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. | 108 |
| 6.13 | Padrão 3 e 4 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. | 108 |
| 6.14 | Padrão 5 e 6 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. | 109 |
| 6.15 | Padrão 7 e 8 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. | 110 |
| 6.16 | (a) Material com comportamento superparamagnético e baixa susceptibilidade; (b) Material com comportamento superparamagnético e alta susceptibilidade; e (c) ma- terial com magnetização diferente da superparamagnética - neste caso, não existe alinhamento de \mathbf{H} e \mathbf{M} | 112 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.17 | Comportamento do raio da bolha em função da variação do χ para $Re_{mag} = 1$ | 113 |
| 6.18 | Comportamento do raio da bolha no diagrama de fase em função da variação do χ para $Re_{mag} = 1$ | 113 |
| 6.19 | Comportamento do raio da bolha em função da variação do χ para $Re_{mag} = 0, 1$ | 114 |
| 6.20 | Comportamento do raio da bolha no diagrama de fase em função da variação do χ para $Re_{mag} = 0, 1$ | 114 |
| 6.21 | Comportamento da pressão dentro da bolha representado no tempo, no diagrama de fase e na frequência para diferentes combinações de parâmetros adimensionais. | 116 |
| 6.22 | Comportamento da pressão dentro da bolha representado no tempo, no diagrama de fase e na frequência para diferentes combinações de parâmetros adimensionais. | 117 |
| 7.1 | Objetivos propostos para a formulação com fluido newtoniano em diagrama de blocos. | 132 |
| 7.2 | Objetivos propostos para a formulação com fluido magnético em diagrama de blocos. | 132 |
| 7.3 | Conclusões obtidas para a formulação com fluido newtoniano em diagrama de blocos. | 133 |
| 7.4 | Conclusões obtidas para a formulação com fluido magnético em diagrama de blocos. | 134 |

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

| | |
|--------------------|--|
| a | Constante da solução assintótica |
| b | Constante da solução assintótica |
| B | Campo magnético induzido |
| E | Campo elétrico |
| H | Campo magnético aplicado |
| H_0 | Campo magnético de referência |
| J | Densidade de corrente elétrica |
| M | Vetor magnetização |
| n | Coefficiente politrópico |
| p | Campo de pressão |
| p_l | Pressão do líquido exterior à bolha |
| p_∞ | Pressão ambiente |
| \tilde{p}_∞ | Pressão ambiente de equilíbrio |
| p_b | Pressão interna da bolha |
| \tilde{p}_b | Pressão de equilíbrio interna da bolha |
| p_g | Pressão do gás |
| \tilde{p}_g | Pressão de equilíbrio do gás |
| p_m | Pressão mecânica |
| p_v | Pressão do vapor |
| r | Distância do centro da bolha a um ponto qualquer no fluido |
| R | Raio da bolha |
| \dot{R} | Derivada temporal do raio da bolha |
| \ddot{R} | Derivada temporal de segunda ordem do raio da bolha |
| $R_0, R(0)$ | Raio inicial da bolha |
| $\dot{R}_0, G(0)$ | Velocidade inicial da bolha |
| R_{min} | Raio mínimo da bolha |
| R_{min}^* | Raio mínimo da bolha adimensionalizado |
| R_E | Raio de equilíbrio |
| t | Tempo do escoamento |
| t_c | Escala de tempo característica do problema |
| T_b | Temperatura da bolha |
| u | Vetor velocidade |

| | |
|----------|--|
| u_ϕ | Componente polar angular da velocidade |
| u_v | Componente azimutal da velocidade |
| u_r | Componente radial da velocidade |
| U_c | Escala de velocidade característica |
| V | Volume da bolha |
| Y | Constante da solução assintótica |

Símbolos Gregos

| | |
|--|---|
| ε | Amplitude da excitação |
| ε^* | Amplitude da excitação adimensionalizada |
| ρ | Massa específica do fluido Newtoniano |
| ρ_b | Massa específica da mistura gás e vapor da bolha |
| ρ_v | Massa específica do vapor saturado |
| ϵ_0 | Permissividade elétrica no vácuo |
| μ | Viscosidade dinâmica do fluido Newtoniano |
| μ_r | Permeabilidade relativa do meio |
| ∇ | Operador nabla |
| ∇^s | Operador nabla superficial |
| σ_{rr} | Componente radial do tensor de tensões em coordenadas esféricas |
| $\sigma_{\kappa\kappa}, \sigma_{\phi\phi}$ | Componentes angulares do tensor de tensões em coordenadas esféricas |
| σ^N | Contribuição Newtoniana do tensor de tensões |
| σ_{nn} | Componente normal do tensor de tensões |
| σ_s | Coefficiente de tensão na interface da bolha |
| κ | Curvatura média da superfície da bolha |
| ω | Frequência de excitação do sistema |
| ω_n | Frequência natural do sistema |
| ξ | Fator de amortecimento do sistema |
| τ_c | Tempo de colapso da cavidade de Rayleigh |
| Σ | Tensor de tensões do escoamento |
| $\Delta\tilde{p}$ | Diferença de pressão ($\tilde{p}_\infty - p_v$) |
| Δt | Intervalo de tempo para método Runge-Kutta |
| Δ_{err} | Estimativa de erro para o controle de passo de tempo adaptativo |

Grupos Adimensionais

| | |
|------------|------------------------------|
| Re | Número de Reynolds |
| We | Número de Weber |
| Re_{mag} | Número de Reynolds Magnético |
| χ | Susceptibilidade Magnética |

Subscritos e Sobrescritos

| | |
|-------|---|
| min | Referente ao raio mínimo obtido pela solução assintótica |
| nn | Referente às tensões normais à superfície da bolha |
| Ray | Referente ao intervalo de tempo obtido na solução de Rayleigh |
| * | Referente à adimensionalização de um termo |

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, apresenta-se a dinâmica de bolhas, cavitação e suas aplicações práticas. Serão expostas as motivações, referências bibliográficas e os objetivos específicos.

1.1 Generalidades

O primeiro estudo realizado acerca de cavitação foi realizado por Newton, 1704. Cavitação é o termo utilizado para representar a formação, o comportamento e o colapso de bolhas (ou cavidades) em um líquido. O comportamento dinâmico de bolhas sob o efeito de campo de pressão variável em líquidos sempre foi de grande interesse em diversas áreas de relevância tecnológica e científica.

As bolhas podem ser compostas tanto por gases quanto por vapores. A difusão de gases dissolvidos em líquidos (desgaseificação) é uma das formas de criação de bolhas. Outra é pela redução de pressão ou aumento de temperatura (cavitação gasosa). Para as bolhas contendo vapor a formação é um pouco diferente: redução suficiente da pressão ambiente à temperatura constante (cavitação vaporosa) ou pela elevação da temperatura à pressão constante (ebulição).

A dinâmica de bolhas é um tema abrangente em nosso cotidiano, uma vez que o corpo humano utiliza cavitação. Um exemplo ocorre na câmara de admissão e descarga de fluxo sanguíneo no coração. As bruscas diferenças de pressão facilitam o aparecimento de bolhas nessa região. Além disso, Marmottant & Hilgenfeldt (2004), relacionam bolhas com o transporte microfluídico em células e no sangue, realizando uma função de bombeamento em micro-canais. A utilização de micro-bolhas deve produzir uma redução do arrasto, ou seja, da resistência do escoamento. Essa diminuição está diretamente associada com a deformação das bolhas na direção do escoamento. Essa anisotropia geométrica da bolha deformada produz uma tensão na direção das linhas de corrente que inibe as flutuações transversais no escoamento da circulação sanguínea, principalmente nas maiores artérias e veias.

A cavitação se tornou um problema prejudicial a partir da Revolução Industrial, na qual houve o surgimento de diversos sistemas de escoamento de líquidos nos quais efeitos hidrodinâmicos

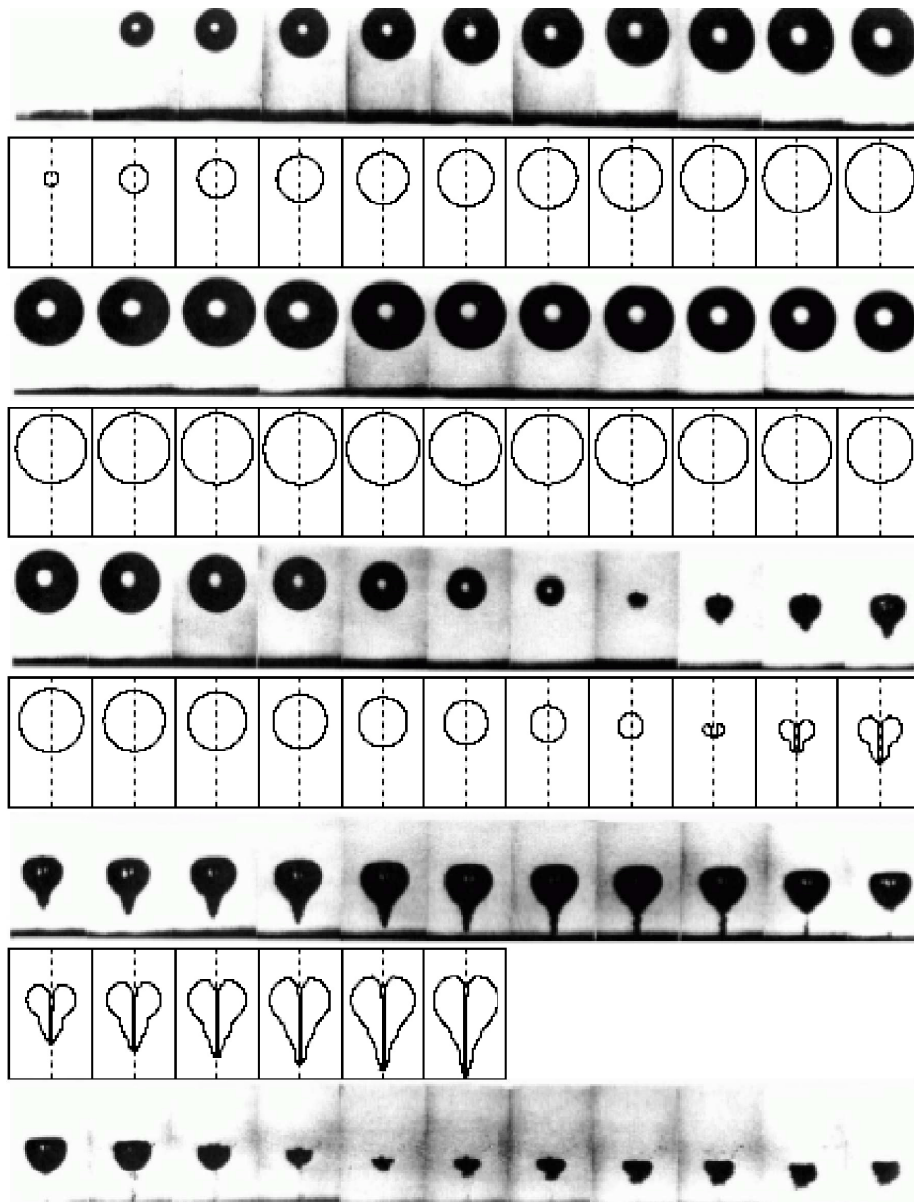


Figura 1.1: Demonstração de fotografias em alta velocidade de uma bolha em colapso perto de uma parede (Lauterborn & Ohl 1997) seguida de simulação numérica abaixo (Popinet, 2001).

resultam em regiões de escoamento em que a pressão assume valores inferiores ao da pressão de vapor, ou seja, quando ocorre a formação de bolhas ou bolsas de vapor. As turbinas em navios propiciaram um estudo aprofundado deste fenômeno, uma vez que uma nuvem de bolhas era formada no momento em que a água se encontrava em regiões de baixa pressão nos propulsores da turbina.

Quando o colapso de bolhas se dá perto de fronteiras sólidas, ele normalmente está associado a um jato de alta velocidade (Blake & Gibson, 1987), mostrado na figura 1.1. A formação destes jatos foi demonstrada experimentalmente por Naud & Ellis (1961). Apesar de algumas discussões referentes à importância destes jatos nos danos causados em propulsores e pás de turbinas de navios,

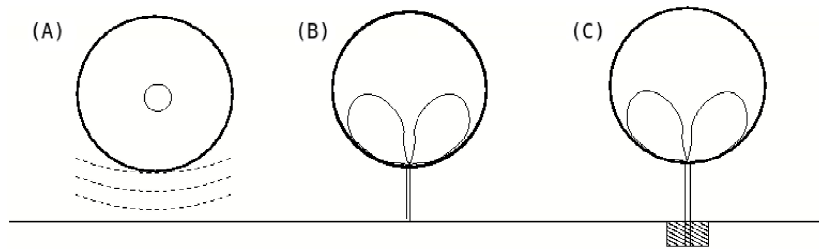


Figura 1.2: Colapso de bolhas perto de superfícies pode se dar de três maneiras: (a) Colapso esférico perto de uma superfície emite uma onda de choque; (b) Impacto de micro-jatos emitem ondas de choque mais fortes. O micro-jato, que possui um raio de aproximadamente $\frac{1}{10}$ do diâmetro máximo da bolha, gera um impacto na superfície sem penetração; (c) Micro-jatos mais fortes penetram na superfície.

por exemplo, Plesset & Chapman (1970) ressaltam que existe alta probabilidade que este dano nas superfícies sólidas dos materiais seja causado pelo colapso de bolhas de vapor; não somente pelo jato que pode ocorrer devido a um colapso não esférico, mas também a própria onda de choque gerada por vários colapsos.

Reynolds, 1873, investigou por meio de experimentos e teorias como esses problemas poderiam ser minimizados. O inventor da turbina a vapor, Parsons (1906), também se destacou por investigações da quantidade de energia dissipada na formação de cavidades em máquinas. Em todos estes casos, o estudo do colapso de bolhas se desenvolveu baseando-se em movimentos radiais, nos quais as bolhas colapsavam esféricamente. Naude & Ellis, 1961 e Benjamim & Ellis, 1966, realizaram um estudo de colapso de bolhas próximas à fronteiras esféricas. Nestas situações, a bolha era atraída pela fronteira no momento de colapso, deformando-se. Esse tipo de colapso gera uma onda de choque que pode ter efeitos devastadores em uma superfície, podendo causar erosão em metais, como o aço, diminuindo a vida útil do material, como mostrado nas figuras 1.1 e 1.2.

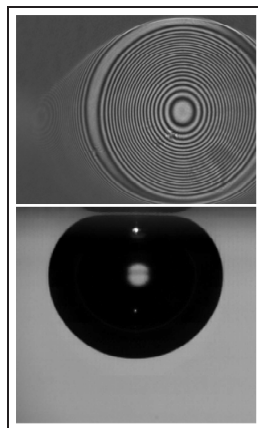


Figura 1.3: Uma bolha se movimentando em água e entra em contato com um prato de vidro (imagem de baixo). Esse impacto gera um padrão de interferência a partir de um feixe de laser que brilha sobre a superfície da água. - Fonte: Hendrix et al, 2012

As ondas de choque produzidas no colapso possuem papel fundamental até mesmo no colapso de outras bolhas. Na imagem 1.4, na esquerda, um pulso de laser é focado simultaneamente nos vértices do quadrado, resultando na emissão de ondas de choque e de bolhas se expandindo rapidamente. Na imagem da esquerda é possível observar quatro luminescências (pontos claros) e quatro bolhas após 4 nanossegundos de exposição do laser. Posteriormente a onda de choque atinge as bolhas e se reflete na tensão superficial das bolhas.

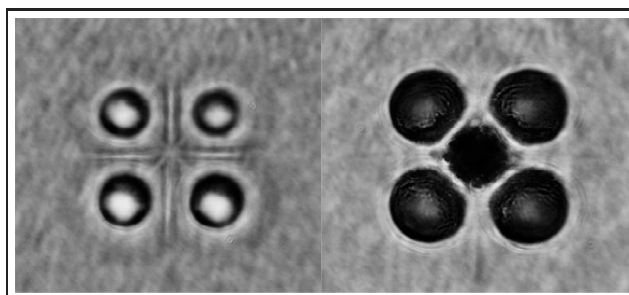


Figura 1.4: Quatro bolhas sofrem a interferências de suas ondas de choque devido ao rápido aumento de seu raio. - Fonte: P.A. Quinto-Sul/ICN-UNAM

A figura 1.5, por exemplo, demonstra duas bolhas sofrendo o impacto de suas ondas de choque, resultado de uma emissão de um pulso de laser em seus centros. Cada coluna mostra a evolução no tempo do sistema para uma separação em particular (da esquerda para a direita, 50.9, 66.5, 82.1 μm). As duas primeiras colunas mostram o encontro das ondas de choque. Estas, por sua vez, continuam se expandindo, entretanto com menor pressão.

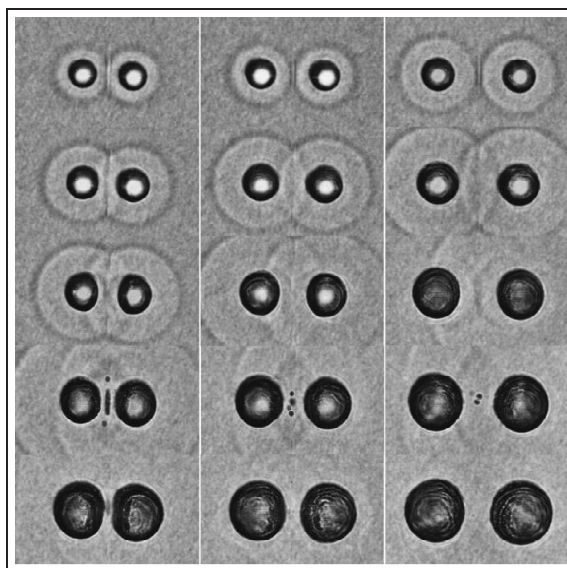


Figura 1.5: Duas bolhas, separadas a diferentes distâncias, sofrem uma rápida expansão de seu raio e permitem a observação das ondas de choque. - Fonte: P.A. Quinto-Sul/ICN-UNAM

Uma simulação numérica efetuada por Quinto-Sul & Ando (2013) mostra a diferença da forma das bolhas para o caso demonstrado acima. Nesta situação, as bolhas permanecem em distâncias

diferentes e são, também, excitadas de modo a provocar sua expansão, como demonstrado na figura 1.6.

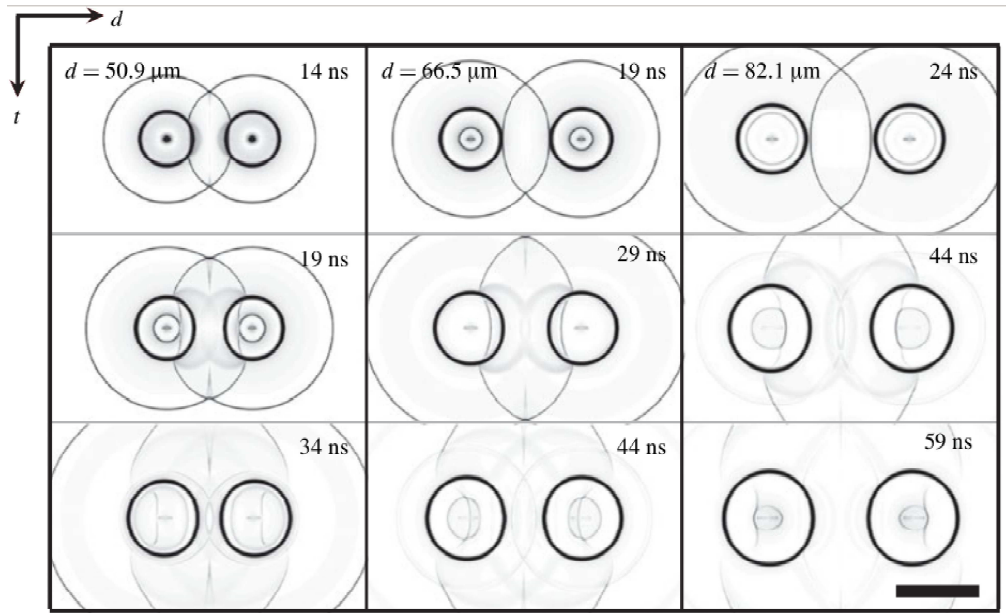


Figura 1.6: Simulação numérica para o problema das duas bolhas em expansão, demonstrando a deformação das bolhas. - Fonte: P.A. Quinto-Sul/ICN-UNAM

1.2 Sonoluminescência

A sonoluminescência, descoberta por Frenzel & Schultes (1934), é um fenômeno único na mecânica dos fluidos, uma vez que sua dinâmica é modelada a partir das equações e parâmetros clássicos, regidos pelas equações hidrodinâmicas de Navier Stokes (Landau & Lifshitz, 1987) ou no caso mais geral de bolhas em fluidos complexos pela equação de Cauchy, evoluindo para um processo de alta densidade de energia, que só pode ser descrito por um conjunto muito diferente de equações.

Basicamente, o que se chama de sonoluminescência, inclui a transformação de energia sonora em luminosa. Essa transformação de energia ocorre em situações específicas em um curto período de tempo, da ordem de nanossegundos. Essa transformação também gera uma grande dissipação de calor e, não somente, emite ondas em alta frequência, o que pode ser observado na figura 1.7.

O processo de sonoluminescência, que está diretamente ligado ao raio da bolha R , como função do tempo t para um bolha pulsando devido a um campo externo de ondas sonoras, pode ser dividido em dois tipos: a sonoluminescência emitida por várias bolhas (*Multiple Bubble Sonoluminescence*, MBSL) ou por apenas uma bolha (*Single Bubble Sonoluminescence*, SBSL).

O processo é encontrado na natureza. O pequeno camarão-estalo (família Alpheidae) compete com a baleia cachalote ou beluga como o “animal mais barulhento do mar”. A criatura vermelha

estala sua garra criando uma onda de cavitação gerando pressões acústicas de até 80kPa a uma distância de 4 centímetros. Medidas indicam níveis de até 190dB a um metro de distância. O clique dura menos de um milissegundo e é uma forma de defesa contra predadores.

Quando a pressão acústica local aplicada a um fluido excede o limiar da cavitação, uma zona interessante de bolhas é formada. Se a cavitação é suficientemente intensa, ocorre o processo de sonoluminescência. No MBSL, um número grande de bolhas cresce e colapsa na região de maior tensão acústica. Esse processo se encontra na ordem temporal de picossegundos e espacial de micrometros. Em motivo da natureza randômica e aleatória do processo, é difícil aplicar uma teoria física, uma vez que as escalas de tempo envolvidas estão fora do escopo da mecânica dos meios contínuos. Desta forma, um novo arcabouço matemático é exigido, diferenciando-se do tratamento clássico empregado no estudo das equações clássicas da hidrodinâmica.



Figura 1.7: Ressonador acústico com dois transdutores separados por um cilindro de vidro. Ondas estacionárias de 20 kHz a 100 kHz e campos de pressão de até 3 bars são gerados no líquido. Se a pressão acústica for grande o suficiente, várias bolhas serão geradas. Se a pressão não for tão alta, é possível uma “levitação acústica” de uma bolha de gás, que pode gerar luz a cada ciclo acústico. Na foto, Sean Cordry observa a sonoluminescência azul. - Fonte: L. A. Crum/Sonoluminescence.

O colapso de bolhas gerando sonoluminescência pode causar pontos com condições extremas de temperatura e pressão. No caso da chamada *multibubble cavitation*, o colapso produz pontos quentes com temperatura efetiva de 10000 K e pressões de 10000 atm. As taxas de aquecimento são superiores a $10^{10} \frac{K}{s}$. No processo de *single bubble cavitation*, essas condições podem ser ainda mais extremas (Crum, 1994a; Putterman, 1995)

Existe a possibilidade de que essa sonoluminescência provoque fusão termonuclear. Durante o pico do ciclo de colapso, a pressão e temperatura são tão extremas que podem induzir uma reação de fusão nas moléculas da bolha e em sua vizinhança. A figura 1.8, por exemplo, demonstra a quantidade de luz que pode ser produzida.

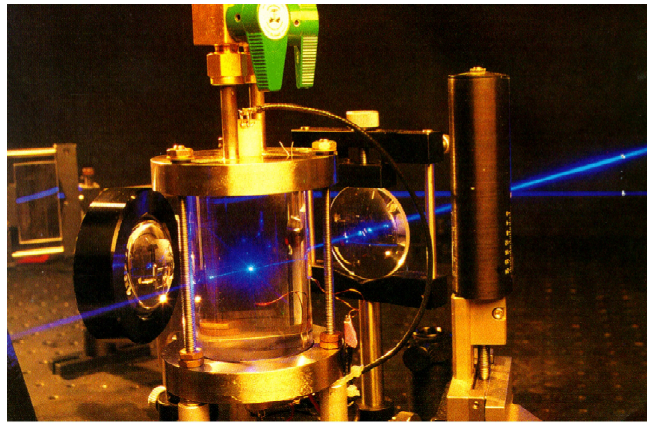


Figura 1.8: Observação do efeito da sonoluminescência a partir de um ressonador acústico. Fonte: L. A. Crum/Sonoluminescence.

1.3 Cavitação acústica

Um dos campos que podem ser aplicados a um fluido é o gerado pelas ondas de ultra-som. A utilização de ultra-som aplicado ao estudo de bolhas favorece o aumento de reações químicas, na área denominada sonoquímica (Mason, 1999). Essa utilização pode diminuir a utilização de catalisadores, a temperatura de reação e permitir a geração de espécies reativas úteis. O escoamento turbulento e as ondas de choque produzidas por ultra-som podem desencadear - quando em alta intensidade - o encontro de partículas metálicas com velocidade suficientemente grande para permitir a fusão no ponto de colisão (Doktycz & Suslick, 1990). Esse processo também é utilizado na purificação de água (Dahi, 1982).

O colapso de bolhas induzido pelo uso de ultra-som também é aplicado em limpeza. Esses processos são utilizados para a limpeza de jóias, lentes, instrumentos cirúrgicos, peças industriais etc (Ohl, 2006). O controle da frequência e intensidade do ultra-som é primordial para o controle do colapso da bolha, como será demonstrado posteriormente. A figura 1.9, por exemplo, demonstra como o colapso gera os jatos de alta pressão, que podem ser utilizados para limpeza.

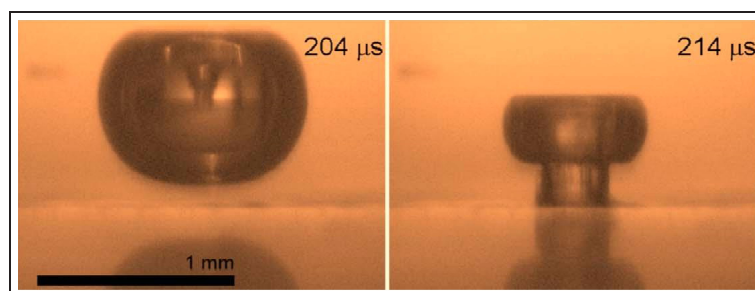


Figura 1.9: Imagem mostrando o jato resultante do colapso de uma bolha perto de superfícies. Esse impacto é utilizado para a limpeza dos mais diversos materiais, afastando as impurezas da fronteira sólida. - Vide Ohl, 2006

Entretanto, a aplicação mais atual para o controle de cavitações se dá no ramo da biomedicina. A ultra-sonografia com contraste é um exemplo da utilização da cavitação (Chang, 1999). As micro-bolhas são injetadas no corpo e assumem papel de contraste na imagem. Os pulsos do ultrassom são aplicados com frequência aproximada da frequência de ressonância das micro bolhas. Estas, por sua vez, respondem aos pulsos com aumento e diminuição de seu diâmetro, gerando ecos em sua vizinhança. A diferença entre estes ecos e os ecos apresentados pelo tecido gera um contraste. Além disso, é possível utilizar bolhas para o transporte de medicamentos (Marmottant, 2004).

A estabilidade destas micro-bolhas é garantida por meio da utilização de gases e películas de diferentes materiais que criam uma “casca” na bolha (Lindner, 2004). Desta forma, elas podem ser injetadas no corpo humano por meio de injeção intravenosa

Outra nova aplicação é a utilização de cavitação para aumentar a permeabilidade da membrana de células cancerígenas (Larina et al, 2005). O aumento da permeabilidade das células permite que macromoléculas sejam injetadas na mesma. Um dos fatores interessantes dessa tecnologia é que a radiação ultrasônica pode ser focada em quase qualquer parte do corpo, não apresenta perigos e não possui custo elevado.

O estudo de Chen (2006) descreve um método para entrega de genes e medicamentos ao pâncreas para pacientes diabéticos, como demonstrado na figura 1.10. As duas principais formas de diabetes envolvem a destruição ou disfunção nas células beta. Na diabetes tipo 1, que afeta cerca de 1 milhão de americanos (Winer, 2004) é uma condição de deficiência completa de insulina, devido a destruição das células beta. A diabetes tipo 2 aflige mais de 20 milhões de americanos e a hiperglicemia associada a esta doença se desenvolve quando a capacidade de secretar insulina não consegue mais compensar a resistência à mesma. Neste trabalho, genes são incorporados em microbolhas que são injetadas intravenosamente e destruídas no órgão em questão. O gene da insulina humana é, desta forma, incorporado no pâncreas de ratos, que, por sua vez, produzem insulina humana, diminuindo a glicose do sangue.

A técnica envolve a incorporação de plasmídeos - que são moléculas circulares duplas de DNA capazes de se reproduzir independentemente do DNA cromossômico - na membrana de microbolhas, que são inseridas em ratos e destruídas perto do pâncreas com ultrassom.

Os efeitos químicos do ultrassom (Suslick 1988; Mason & Lorimer 1988) não derivam diretamente de um campo acústico interagindo com agentes químicos. Na realidade, sonoluminescência e sonoquímica derivam principalmente da cavitação acústica: formação, aumento e colapso de bolhas em líquidos, irradiados com ultrassom de alta intensidade (Leighton, 1994). O colapso de bolhas durante o processo de cavitação significa que toda a energia difusa do som está concentrada, fazendo com que a compressão do gás da bolha gere calor. Quando essa compressão ocorre durante a cavitação, o aquecimento é mais rápido que o transporte térmico.

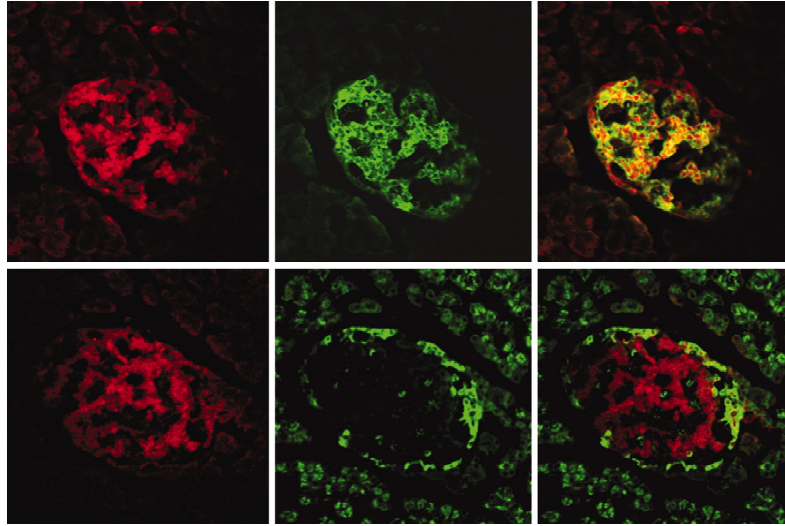


Figura 1.10: Imagem de uma seção do pâncreas. As imagens superiores mostram o pâncreas não tratado. O filtro amarelo mostra a quantidade de anti-insulina. No caso das imagens inferiores, tratadas, não existe anti-insulina, mostrando apenas as células beta - Vide Chen, 2006

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

No presente trabalho investiga-se o movimento oscilatório não-linear de uma bolha imersa em um fluido complexo, em que propriedades magnéticas são consideradas. A bolha está sujeita a um campo externo acústico de pressão que pode apresentar comportamentos diferentes, variando desde uma excitação senoidal a uma excitação não-linear. Desta forma, este trabalho se propõe a determinar uma extensão da equação de Rayleigh-Plesset para um fluido magnético, baseando-se no trabalho de Cunha et al (2002). A principal contribuição diz respeito ao estudo de uma bolha, imersa de uma suspensão coloidal com partículas permanentemente magnetizadas, sofrendo a influência de um campo de pressão externo e de um campo magnético, determinado por Rosensweig (1987). De forma secundária, este trabalho utiliza ferramentas de análise de sistemas dinâmicos linear e não-linear como Transformadas de Fourier, diagrama de fase, análise de controlabilidade e observabilidade e análise qualitativa dos coeficientes de Lyapunov.

1.4.2 Objetivos Específicos

De forma mais específica, os objetivos podem ser traçados separadamente. Estes também são expressos no formato de diagrama de blocos (fluxograma) no Apêndice 2.

- Desenvolvimento de uma análise dimensional da equação governante da dinâmica da bolha (Rayleigh-Plesset). Identificação das equações governantes, acoplamento e condições de contorno para um fluido Newtoniano. Posteriormente, aplica-se o tensor de tensões magnético, expandindo a equação de Rayleigh-Plesset para um fluido magnético;

- Adimensionalização da equação, baseando-se em grandezas típicas, buscando a utilização de parâmetros adimensionais conhecidos e propostos, como Reynolds Magnético;
- Determinação da solução assintótica da equação governante de dinâmicas de bolhas adimensionalizada utilizando o método de perturbação para pequenos valores de parâmetros estipulados;
- De forma secundária, faz-se a análise de controle linear, incluindo o estudo de controlabilidade, observabilidade e características que garantem a estabilidade do sistema por meio do espaço de estados , além da determinação da frequência de ressonância do sistema para a equação de Rayleigh-Plesset para fluidos Newtonianos;
- Elaboração e validação de um código computacional baseado no método de Runge-Kutta de quinta ordem com passo de tempo adaptativo;
- Estudo da teoria assintótica para o raio de colapso e utilização dos critérios de parada;
- Análise dos padrões vibracionais para a bolha imersa em fluido Newtoniano e magnético por meio de ferramentas típicas de análise de sistemas dinâmicos, como a Transformada de Fourier e o diagrama de fase, considerando as variações dos parâmetros adimensionais Newtonianos e magnéticos.
- Criação e treinamento de uma rede neural com algoritmo *backpropagation* para identificação de padrões vibracionais já determinados.
- Análise do diagrama de colapso - criado em função dos parâmetros adimensionais - efetuado com a bolha imersa em fluido Newtoniano e em fluido não-Newtoniano.
- Estudo numérico do comportamento da pressão dentro da bolha, baseando-se em metodologias de estudo de sistemas dinâmicos: diagrama de fase e transformada de Fourier.

Estes objetivos servem também para que se possa desenvolver no presente trabalho, de forma secundária, uma metodologia robusta de estudo de sistemas dinâmicos que apresentam comportamento não linear.

Capítulo 2

Formulação Matemática

Este capítulo tem por objetivo demonstrar a formulação matemática básica, expressando as equações regentes e modelando o comportamento da bolha a partir da Equação da Continuidade e da Equação de Cauchy. A fundamentação teórica permeia a linearização do sistema, análise de estabilidade, controlabilidade, observabilidade necessária para o controle do modelo. Para o modelo magnético, as equações de Maxwell são usadas, acoplando o magnetismo com a hidrodinâmica.

2.1 Equações Governantes

O estudo do movimento dinâmico oscilatório de uma bolha apresentado neste trabalho baseia-se na análise do movimento radial desta quando imersa em um fluido incompressível sujeita a uma excitação de um campo de pressão.

A modelagem matemática do movimento radial da bolha se baseia em uma combinação de hipóteses restritivas apropriadas combinadas com equações clássicas da hidrodinâmica de fluidos.

As principais hipóteses restritivas utilizadas nesta parte inicial do trabalho consistem em assumir que o fluido no qual a bolha encontra-se imersa é incompressível e isotrópico, livre de efeitos não lineares associados por exemplo à viscoelasticidade, tensões magnéticas, entre outros. Sendo assim a análise inicial será realizada para um fluido Newtoniano incompressível.

Na parte final do trabalho a metodologia desenvolvida para a análise dinâmica do movimento da bolha será estendida para um fluido magnético.

As principais equações governantes utilizadas para a modelagem matemática do problema são baseadas no princípio da conservação da massa (equação da continuidade) e na segunda lei de Newton (equação da quantidade de movimento), além de um modelo constitutivo apropriado para representar o salto de tensões na interface da bolha.

As seções seguintes descrevem em detalhes a modelagem matemática do problema que leva ao surgimento de uma equação diferencial ordinária não linear, conhecida como equação de Rayleigh-Plesset. Esta é uma equação clássica na linha de pesquisa popularmente conhecida como "dinâmica de bolha generalizada" e apesar de se basear em um modelo de movimento radial nos permite testar conceitos físicos associados à influência de diferentes mecanismos não lineares provenientes da interação entre a bolha e o líquido que a circunda.

2.1.1 Equação da Continuidade

A equação da conservação de massa é dada matematicamente por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

em que ρ é a massa específica do fluido, t representa o tempo e \mathbf{u} é o campo de velocidades Euleriano do escoamento. Entretanto, para um fluido incompressível, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

a equação acima mostra que em um escoamento incompressível o campo de velocidades é solenoidal, fazendo uma analogia com o eletromagnetismo, este é o mesmo comportamento esperado para o campo de indução magnética segundo a lei de Gauss do magnetismo. Fisicamente essas duas leis afirmam que o fluxo de determinada grandeza que cruza uma fronteira superficial fechada é nulo. No caso da equação da continuidade essa grandeza é a massa, enquanto que na lei de Gauss do magnetismo tem-se a densidade de fluxo magnético (tangentes às linhas de indução). Considerar-se-á que qualquer escoamento e perturbação serão puramente radiais. Neste caso, tanto as componentes de velocidade na direção θ quanto na direção ϕ serão nulas. Desta maneira, a equação pode ser expandida para coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right] = 0 \rightarrow \int \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) dr = 0 \quad (2.3)$$

Na equação acima, r representa a distância física do centro da bolha (esférica) até qualquer ponto localizado no fluido, u_r é a componente da velocidade radial. Portanto, integrando a equação 2.3, obtém-se:

$$r^2 u_r(r, t) = F(t) \rightarrow u_r(r, t) = \frac{F(t)}{r^2}. \quad (2.4)$$

Nesta situação, a variável que será diretamente perturbada será o próprio raio da bolha, $R(t)$; sendo necessário idealizar que não existe transporte de massa pela interface. Em suma, a condição cinemática de impenetrabilidade na interface da bolha é dada por:

$$u_r(R, t) = \frac{dR}{dt}, \quad (2.5)$$

substituindo a equação 2.5 em 2.4, considerando $r = R(t)$ resulta em

$$F(t) = R^2 \frac{dR}{dt}. \quad (2.6)$$

Caso se considere a existência de evaporação na interface da bolha com o fluido, nota-se que a taxa de produção volumétrica de vapor equivale à taxa de crescimento da bolha. A taxa de evaporação no interior da bolha é dada por:

$$\dot{m} = \rho_v 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \quad (2.7)$$

em que ρ_v é a massa específica do vapor saturado. Aplicando-se o princípio de conservação da massa, nota-se que essa taxa deve ser igual ao escoamento de massa do líquido para o interior da bolha. Por este motivo, a razão entre a velocidade interna do líquido relativo à interface será dada pela razão entre as massas específicas do vapor e do fluido. A figura 2.1 ilustra este princípio.

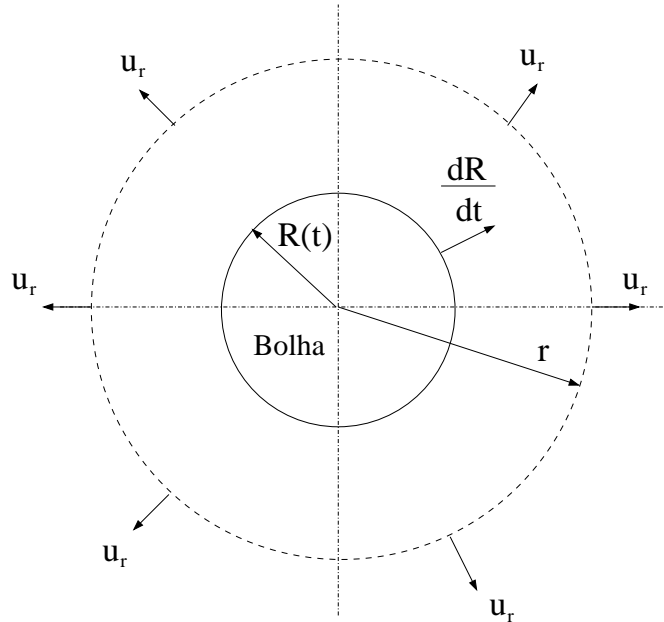


Figura 2.1: Esquema ilustrativo do balanço de massa em torno da bolha devido a migração de líquido do meio externo para o interior da bolha, gerando uma vazão mássica associada à evaporação no interior desta.

Desta maneira, pela equação da continuidade:

$$\underbrace{4\pi R^2 \frac{dR}{dt}}_1 - \underbrace{4\pi R^2 \frac{\rho_v}{\rho} \frac{dR}{dt}}_2 = \underbrace{4\pi r^2 u_r}_3, \quad (2.8)$$

Sendo 1 a vazão de líquido para dentro da bolha, 2 a vazão expansional do vapor e 3 a vazão mássica em uma superfície de controle no líquido longe da bolha.

Isolando $u_r(r, t)$ e fazendo $r = R$:

$$u_r(R, t) = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho}\right) \frac{dR}{dt} \quad (2.9)$$

substituindo em 2.4, tem-se:

$$F(t) = \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho}\right) R^2 \frac{dR}{dt} \quad (2.10)$$

Na maioria das aplicações práticas, as bolhas estão imersas em líquidos. Portanto, $\rho_v \ll \rho$. De outra forma $\frac{\rho_v}{\rho} \ll 1$, tal que o termo entre parênteses da equação 2.10 pode ser aproximado para 1. Portanto, a equação 2.6 se torna válida tanto para bolhas de vapor quanto de gás. Sendo assim, combinando a equação 2.4 com a equação 2.10, obtém-se:

$$u(r, t) = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} = \frac{R^2}{r^2} \dot{R} \quad (2.11)$$

Note que a equação 2.11 será fundamental nos cálculos que seguem e expressa fisicamente o balanço de massa na interface bolha-líquido externo.

2.1.2 Equação da Quantidade de Movimento

O balanço de quantidade de movimento linear, oriundo do postulado da segunda Lei de Newton aplicado à descrição do movimento de um meio contínuo em sua formulação diferencial é conhecido pela equação de Cauchy. Esta equação é resultado de um balanço entre as taxas líquidas de momento linear que atravessam um volume de controle infinitesimal pertencente à um meio contínuo com variações temporais de momento deste mesmo volume e forças externas que atuam sobre o mesmo. Esta equação é dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.12)$$

sendo \mathbf{g} a aceleração da gravidade, \mathbf{u} o campo de velocidades do escoamento e $\boldsymbol{\Sigma}$ o tensor de tensões do fluido. Na realidade, esta equação representa as variações temporais de quantidade de movimento em um volume de controle infinitesimal fluido com os fluxos de entrada e saída e a produção-dissipação de momento por ação de forças externas de acordo com o postulado da segunda lei de Newton. A equação 2.12 representa um balanço entre forças de superfície (devido às tensões), forças de campo e forças de inércia por unidade de volume atuando em um elemento de fluido contínuo infinitesimal.

2.1.3 Modelo de fluido Newtoniano

Como pode ser observado na equação 2.12, o fechamento do modelo dinâmico necessário à descrição do campo de velocidades de um escoamento precisa passar pela proposição de uma

expressão para modelagem do tensor $\boldsymbol{\sigma}$. Uma equação para este tensor basicamente descreve o meio e é chamada Equação Constitutiva. Estas não são deduzidas com base em princípios fundamentais, mas propostas utilizando intuição física, experimentos, analogias com casos mais simples (como a lei da viscosidade de Newton, por exemplo, que se baseia na lei da elasticidade linear de Hooke) ou uma mistura dessas técnicas. Entretanto uma equação constitutiva deve respeitar certos requisitos matemáticos associados ao formalismo constitutivo da Mecânica dos Meios Contínuos (Truesdell & Toupin, 1960).

O requisito mais fundamental para a proposição de uma equação constitutiva é que esta obedeça o princípio da Indiferença Material ou *Material Frame Indifference* (Chandrasekharaiah & Debnath, 1994). Este princípio exige que a forma de uma equação constitutiva não se altere quando esta é escrita em um novo referencial. Em outras palavras, dizemos que: *o material não pode depender da imaginação de um observador*. Equações constitutivas que obedecem a este princípio são chamadas de equações objetivas, exemplos destas são:

- Fluido Newtoniano Incompressível

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}. \quad (2.13)$$

- Fluido Newtoniano Compressível

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}. \quad (2.14)$$

em que p representa a pressão em um ponto material, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, dado por

$$\mathbf{D} = \frac{[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]}{2}, \quad (2.15)$$

\mathbf{I} é o tensor identidade e ∇ é o operador gradiente.

Para fluidos Newtonianos incompressíveis, podemos escrever a equação 2.28 como

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}^N \quad (2.16)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}^N = 2\mu\mathbf{D}$ representa a parcela deviatórica do tensor de tensões $\boldsymbol{\Sigma}$, já que o traço deste tensor é igual a $\mu\nabla \cdot \mathbf{u}$, que para um fluido incompressível, pela equação da continuidade, é nulo. Este será o tensor de tensões utilizado na primeira parte do trabalho, que analisa o comportamento dinâmico de uma bolha oscilante imersa em um líquido. A parte final deste trabalho pretende analisar o comportamento desta, quando imersa em um fluido magnético.

Ao contrário do trabalho de Khoo e Klaseboer (2006), o presente trabalho se utilizará apenas da componente radial do campo de velocidades, caracterizando qualquer movimento como unidimensional. Desta maneira, a equação proposta assume a forma abaixo para um líquido Newtoniano, em

coordenadas esféricas para a componente radial. Esta dedução seguirá os mesmos passos descritos em Santos (2002).

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2 \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} \right]. \quad (2.17)$$

Substituindo a equação em todos os termos da equação 2.17 encontram-se cinco componentes para a equação geral. Uma vez que o trabalho se dedica ao estudo das variações de movimento radial, esperar-se-á que as componentes cisalhantes se cancelem.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{R}R^2}{r^2} \right) = \frac{2\dot{R}^2 R + \ddot{R}R^2}{r^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{R^2 \dot{R}}{\partial r^2} \left(\frac{-2\dot{R}R^2}{r^3} \right) = \frac{2\ddot{R}R^4}{r^5} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{R}R^2}{r^2} \right) = \frac{6\dot{R}R^2}{r^4} \quad (2.20)$$

$$\frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{r} \left(\frac{-\dot{R}R^2}{r^3} \right) = \frac{-\dot{R}R^2}{r^4} \quad (2.21)$$

$$2 \frac{u}{r^2} = \frac{2\dot{R}R^2}{r^4} \quad (2.22)$$

Substituindo as equações 2.18 a 2.22 em 2.17, tem-se, finalmente:

$$\frac{2\dot{R}^2 R + \ddot{R}R^2}{r^2} - \frac{2\ddot{R}R^4}{r^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{6\dot{R}R^2}{r^4} - \frac{4\dot{R}R^2}{r^4} - \frac{2\dot{R}R^2}{r^4} \right] \quad (2.23)$$

$$\frac{2\dot{R}^2 R + \ddot{R}R^2}{r^2} - \frac{2\ddot{R}R^4}{r^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (2.24)$$

Como esperado, as tensões de cisalhamento para um movimento puramente radial se anulam e a equação final se resume a 2.24.

Mesmo após os estudos do Lord Rayleigh (1917) acerca do colapso de bolhas, houve muito refinamento na área. Especialmente com Plesset (1949), que adicionou uma variável externa de pressão, adicionando a característica de tensão superficial da bolha no sistema. Uma vez que o fluido se encontra em toda a extensão externa à bolha, é possível integrar a Equação de Navier-Stokes entre o raio da bolha e o infinito.

$$\int_R^\infty \frac{2\dot{R}^2 R + \ddot{R}R^2}{r^2} dr - \int_R^\infty \frac{2\ddot{R}R^4}{r^5} dr = -\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial p}{\partial r} dr \quad (2.25)$$

A partir da integral, tem-se:

$$\frac{2\dot{R}^2 R + \ddot{R}R^2}{R} - \frac{2\dot{R}^2 R^4}{4R^4} = \frac{p_l(R) - p_\infty}{\rho} \quad (2.26)$$

Na equação 2.26, observa-se que p_∞ corresponde a pressão ambiente, não dependente mais do raio da bolha e p_l corresponde à pressão do líquido avaliada na superfície da bolha, dependente do raio. Em suma, ambas podem ser reescritas de modo a considerarem a variação temporal: $p_\infty(t)$ e $p_l(R, t)$. Dada essas informações, a equação 2.26 pode ser resumida na equação abaixo, também chamada de equação de Rayleigh-Plesset

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_l(R) - p_\infty}{\rho} \quad (2.27)$$

2.1.4 Modelo de fluido não-Newtoniano

Reiterando a necessidade da equação constitutiva atender ao princípio da Indiferença Material (*Material Frame Indifference*), pode-se citar como exemplo o caso dos fluidos magnéticos, no qual o tensor de tensões é dado pela equação 2.28.

- Tensor de Tensões de Maxwell

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(-\frac{\mu_0 H^2}{2} \right) \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}, \quad (2.28)$$

Caso o fluido em questão não seja necessariamente Newtoniano, a equação 2.12 assume a forma mostrada na equação 2.29.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^N + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.29)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}^N$ representa a contribuição Newtoniana o tensor de tensões, enquanto $\boldsymbol{\sigma}$ é utilizado para denotar efeitos não Newtonianos do fluido. O traço do tensor de tensões, excluindo-se a componente de tensões normais uma vez que os efeitos do campo de pressão já estão incorporados nos gradientes radiais de pressão, para um fluido Newtoniano é nulo como uma consequência direta da incompressibilidade do líquido, uma vez que $tr(\boldsymbol{\sigma}^N) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Para o caso de um fluido não Newtoniano a hipótese de traço nulo continua sendo válida para certos tipos de fluidos, como por exemplo fluidos viscoelásticos (vide Albernaz, 2011). Entretanto para um fluido magnético essa hipótese não é verdadeira. Como o foco do presente trabalho é voltado para o caso em que a bolha encontra-se imersa em um fluido magnético não utilizaremos a hipótese de traço nulo para a componente que chamamos de "não Newtoniana" do tensor de tensões. Para o movimento radial, a equação em coordenadas esféricas é dada pela equação 2.30.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{rr}^N) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{rr}) - \frac{(\sigma_{\theta\theta}^N + \sigma_{\phi\phi}^N)}{r} - \frac{(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\phi\phi})}{r} \quad (2.30)$$

Sabendo que $\sigma_{rr}^N + \sigma_{\phi\phi}^N + \sigma_{\theta\theta}^N = 0$, pode-se reescrever a equação acima utilizando-se da igualdade $\sigma_{rr}^N = -\sigma_{\theta\theta}^N - \sigma_{\phi\phi}^N$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}^N}{r} \right] + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} - \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} \quad (2.31)$$

Nos próximos passos, serão considerados os efeitos da componente θ , mas desprezaremos os efeitos da componente ϕ . Ressaltando a equação 2.28, que representa a parte deviatórica do tensor de tensões para um fluido Newtoniano incompressível. Desta forma, o tensor taxa de deformação representado em componentes radiais é

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \hat{e}_r \hat{e}_r \quad (2.32)$$

Portanto, os termos associados à contribuição Newtoniana do tensor de tensões na direção radial resultam em:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}^N}{r} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.33)$$

A velocidade $u(R)$ é dada pela equação 2.1.3, que é a equação da continuidade para o caso de movimento puramente radial. Desta forma, alguns termos da equação acima são cancelados resultando em

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2R^2 \dot{R}}{r^3} \right) = \frac{6R^2 \dot{R}}{r^4} \quad (2.34)$$

$$\frac{3}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2R^2 \dot{R}}{r^3} \right) = \frac{6R^2 \dot{R}}{r^4} \quad (2.35)$$

substituindo a equação 2.33 em 2.31 tem-se:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{3\sigma_{rr}}{r} \quad (2.36)$$

Expressando por meio de 2.11, obtém-se os termos de inércia do lado esquerdo da equação referente à velocidade:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{r^2} \quad (2.37)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2\dot{R}^2 R^4}{r^5} \quad (2.38)$$

Agora, substituindo 2.37 e 2.38 em 2.36 e integrando a equação resultante no domínio de escoamento, isto é a região compreendida entre a superfície da bolha e o infinito, $R \leq r < \infty$ tem-se:

$$\int_R^\infty \frac{2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}}{r^2} dr - \int_R^\infty \frac{2\dot{R}^2 R^4}{r^5} dr = \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr + \frac{2}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (2.39)$$

Após a integração obtém-se uma equação que relaciona p_∞ que denota o campo de pressão ambiente - não perturbado pela bolha - com a pressão do líquido avaliada na interface bolha-líquido (i.e. em $r = R$).

$$\frac{2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}}{R} - \frac{2\dot{R}^2 R^4}{4R^4} = \frac{p_l(R) - p_\infty}{\rho} - \frac{1}{\rho} \sigma_{rr}|_{r=R} + \frac{2}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr. \quad (2.40)$$

Note que quando o termo da integral é nulo, isto é regime Newtoniano, a equação 2.77 recai para a equação 2.27, puramente diferencial.

É possível perceber agora um termo referente à anisotropia do fluido. Nesta condição, existe uma contribuição extra do efeito de σ_{rr} dado pela parcela da integral em que agora se soma a $\frac{-1}{\rho} \sigma_{rr}$. Observa-se o surgimento de um novo termo, expresso pela integral em , associado à não linearidade do fluido. Este termo está presente sempre que algum efeito não Newtoniano se manifesta na equação constitutiva do fluido, como elasticidade (Albernaz, 2011) ou a existência por exemplo de tensões magnéticas, que possivelmente serão explorados em etapas subsequentes do presente trabalho. Do ponto de vista matemático a equação resultante para um fluido não linear é mais complexa e apresenta novos desafios, visto que esta é agora uma equação íntegro-diferencial, cuja solução numérica exige mudanças de variáveis apropriadas que leve a uma descrição Langrangiana do movimento da superfície da bolha e a adoção de algoritmos mais sofisticados. (Albernaz e Cunha, 2011; Albernaz e Cunha, 2013¹; Albernaz e Cunha, 2013²)

2.1.4.1 Modelo de Fluido Magnético

A lei de Gauss do magnetismo estabelece que o fluxo de indução magnética que atravessa uma superfície fechada é nulo. As linhas de indução magnética que atravessam uma superfície gaussiana são fechadas, resultando na ausência de linhas criadas ou finalizadas no interior desta superfície.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.41)$$

Na qual \mathbf{B} é um campo vetorial definido pelo produto soma dos termos de \mathbf{H} e da magnetização \mathbf{M} pela permeabilidade do espaço livre, definida como $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.42)$$

Considerando a hipótese do fluido, constituído por nanopartículas, se superparamagnético, ou seja, apresenta magnetização apenas quando existe um campo externo aplicado, é possível dizer que $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (2.43)$$

A lei de Ampère-Maxwell, por sua vez, estabelece que um campo magnético pode ser gerado por uma corrente elétrica ou pela variação temporal local de um campo elétrico aplicado.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.44)$$

na qual \mathbf{J} representa densidade de corrente, medida em $\frac{A}{m^2}$ e ϵ_0 a permissividade elétrica no vácuo, sendo $8,8541878 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$.

Maxwell impõe, no caso do regime magnetostático, que os efeitos magnéticos relativos ao movimento das cargas elétricas são de pequena ordem, assim como os campos elétricos envolvidos. Desta maneira, estes podem ser desprezados:

$$\mathbf{E} = 0; \quad (2.45)$$

$$\mathbf{J} = 0; \quad (2.46)$$

Desta forma, utilizando as condições expressas em 2.47 e 2.49, as equações de Maxwell se reduzem para:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0; \quad (2.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0; \quad (2.49)$$

Para um fluido magnético, essa aproximação seria válida, caso as partículas estivessem envoltas em material isolante, de modo que não houvesse corrente sendo conduzida. Considerando, desta forma, que o tensor de tensões magnético é dado pela equação 2.28 pode-se reescrever a equação 2.30 como sendo:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{3\partial \sigma_{rr}^N}{r} + \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2r\sigma_{rr} \right) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (2.50)$$

Utilizando ainda, para o tensor Newtoniano, a condição de traço nulo, já explicitada anteriormente, é possível reescrever a equação como:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{3\partial \sigma_{rr}^N}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (2.51)$$

Ressaltando-se ainda que $\sigma^N = 2\mu\mathbf{D}$ representa o tensor associado a parte deviatórica do fluido Newtoniano incompressível. Desta forma, o tensor taxa de deformação na componente radial assume a forma já descrita:

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \hat{e}_r \hat{e}_r \quad (2.52)$$

Considerando ainda os termos expressos em 2.37 e 2.38 e integrado-se, novamente a equação resultante no domínio do escoamento, representado por $R \leq r \leq \infty$ chega-se a nova equação:

$$\int_R^\infty \frac{2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}}{r^2} dr - \int_R^\infty \frac{2\dot{R}^2 R^4}{r^5} dr = -\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{2\partial\sigma_{rr}}{r} dr + \int_R^\infty \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} dr - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (2.53)$$

Entende-se ainda que, utilizando o tensor de tensões magnéticas, suas componentes podem ser dadas por:

$$\sigma_{rr}^{mag} = \frac{-\mu_0}{2}(H_r^2 + H_\theta^2) + \mu(1 + \chi)H_r^2 \quad (2.54)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{mag} = \frac{-\mu_0}{2}(H_r^2 + H_\theta^2) + \mu(1 + \chi)H_\theta^2 \quad (2.55)$$

2.1.4.2 Determinação do Campo \mathbf{H}

Neste ponto, é imprescindível a determinação do campo \mathbf{H} . Em coordenadas esféricas com simetria de eixos, a equação de Laplace para o potencial tem a forma abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.56)$$

na qual r é a distância radial da origem e θ é o ângulo polar. Uma tentativa de solução plausível seria

$$\Psi(r, \theta) = R(r)\Psi(\theta) \quad (2.57)$$

levando a soluções em termos de polinômios de Legendre. Desta maneira, foi determinado por Rosensweig (1985).

$$\Psi = \begin{cases} \text{Arcos}\theta, & \text{para } r < R \\ -(C - \frac{2D}{r^3})\text{cos}\theta, & \text{para } r > R \end{cases} \quad (2.58)$$

na qual R é o raio da esfera. O campo magnético associado é, então, expresso por:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi = \frac{-\partial\Psi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta \quad (2.59)$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -A(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta), & \text{para } r < R \\ -(C - \frac{2D}{r^3})\cos\theta\hat{e}_r + (C + \frac{D}{r^3})\sin\theta\hat{e}_\theta, & \text{para } r > R \end{cases} \quad (2.60)$$

O campo magnético longe da esfera deve se aproximar do campo uniforme aplicado $H_0\mathbf{k}$ sendo \mathbf{k} o vetor unitário na direção z. Em coordenadas esféricas, $\mathbf{k} = \hat{e}_r\cos\theta - \hat{e}_\theta\sin\theta$, logo para $r \rightarrow \infty$, tem-se

$$C = -H_0 \quad (2.61)$$

Da mesma forma, a forma da solução para $r < R$ apresenta $\mathbf{H} = A\mathbf{k}$. Uma vez que a componente tangencial de \mathbf{H} e a componente normal de \mathbf{B} são contínuas entre a interface da esfera, mais duas relações podem ser obtidas para as constantes:

$$A = \frac{-3\mu_1 H_0}{\mu_r + 2\mu_1} \quad (2.62)$$

$$D = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} R^3 H_0 \quad (2.63)$$

na quais μ_1 é a permeabilidade do meio em torno da esfera e μ_2 é a permeabilidade da esfera.

Considerando este campo \mathbf{H} é possível demonstrar (vide apêndice I) que a equação de Rayleigh-Plesset torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{R}R + R^2\ddot{R}}{R} - \frac{2\dot{R}^2 R^4}{4R^4} &= \frac{p_l(R) - p_\infty}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left[\mu_0 \left(\frac{-3\mu_r^2 H_0^2}{8} \right) \right] \\ + \frac{1}{\rho} \mu_0 \chi &\left[\frac{-\mu_r H_0^2}{3} - \frac{17\mu_r H_0^2}{12} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R) \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

na qual μ_r representa $\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}$ e R_∞ é a distância da interface da bolha para a qual tem-se $\mathbf{H} = 0,99H_0$.

2.1.5 Condições de Contorno na Interface da Bolha

É intuitivo que qualquer variação da tensão superficial ao longo da interface irá criar forças cisalhantes - ou tangenciais - também chamadas de forças de Marangoni. Essas variações podem aparecer por diversos motivos, desde gradientes superficiais de tensão superficial devido à presença de surfactantes ou até mesmo devido à gradientes de temperatura. A tensão superficial normalmente diminui com o aumento da temperatura, o que é uma das razões pelas quais se utiliza água quente para a lavagem de roupas.

O peso da própria superfície da bolha, como no caso das bolhas de sabão, é um dos motivos pelo qual a tensão superficial não permanece constante. Consideremos, por exemplo, uma bolha caindo em velocidade constante em direção ao chão. Apenas a força gravitacional e as forças de arrasto do

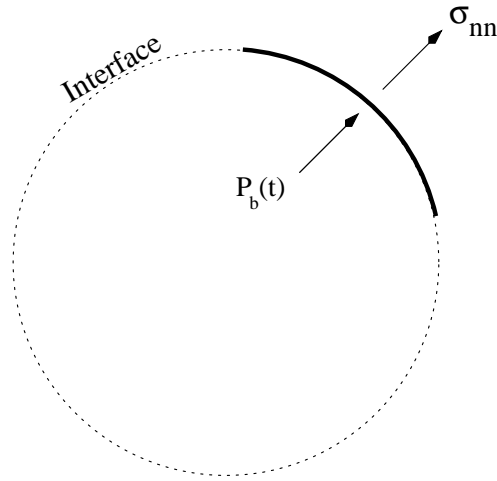


Figura 2.2: Interface de análise da superfície esférica da bolha

ar agem na mesma. Todas as forças externas devem se cancelar de modo a garantir o movimento uniforme, entretanto elas não se cancelam perfeitamente em toda a extensão da bolha. Apesar da gravidade agir em toda a superfície da bolha, a força é mais intensa em sua parte inferior, pois a distribuição de pressão hidrostática do fluido no qual a bolha encontra-se envolta é maior na parte inferior desta. Deste modo forças internas à bolha devem ser necessárias a fim de que se evite o colapso da mesma.

Para analisar da dinâmica da bolha, faz-se necessário o estudo do salto de tensões existente na interface da bolha. Considerando-se a inexistência de impurezas, obtém-se continuidade de tensões tangenciais e também da velocidade:

$$(\sigma_{tt})_l = (\sigma_{tt})_b \quad (2.65)$$

$$(u)_l = (u)_b, \quad (2.66)$$

em que, $(\sigma_{tt})_l$ representa a componente tangencial de tensão no lado do líquido, enquanto $(\sigma_{tt})_b$ representa a mesma componente de tensão no lado da bolha, da mesma forma $(u)_l$ e $(u)_b$ denotam as componentes radiais de velocidade no lado do líquido e da bolha respectivamente.

Na figura 2.2, observa-se σ_s como sendo o coeficiente de tensão superficial, de modo que seu vetor tangente é dado por $\sigma_{tt} = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{t}$.

As tensões normais, por outro lado, sofrem uma descontinuidade. Esse é um caso mais geral que a lei de Young (1805) e Pierre-Simon Laplace (1806), uma vez que esta envolve apenas saltos de pressão, relacionados à estática dos fluidos. A mesma expressa a descontinuidade de pressão em certo ponto da interface como um produto do valor da tensão superficial no local e do dobro da curvatura da interface. É importante ressaltar que ocorre neste caso uma descontinuidade nas tensões normais, majoritariamente causada pela tensão superficial, que assume a forma (Pozrikidis, 1992)

$$\sigma_{nn} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})_l - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})_b = \sigma_s \nabla^s \cdot \mathbf{n} \quad (2.67)$$

Na qual o termo l determina o vetor de tensões normais do lado do líquido da superfície e o b determina o vetor de tensões normais do lado do gás/vapor da interface. ∇^s é definido como gradiente superficial, no qual $\nabla^s = \nabla^s \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n})$.

• **Determinação da equação para pressão no interior da bolha**

Retornando-se à equação 2.67, pode-se igualar:

$$\nabla^s \cdot \mathbf{n} = 2\kappa \rightarrow \kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.68)$$

Como em nosso caso, $R_1 = R_2$, tem-se $\kappa = \frac{1}{R}$. Sendo assim, o interior da bolha fica definido:

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})_b = -p_b(t) = -[p_v(T_b) + p_g(t)] \quad (2.69)$$

em que, $p_v(T_b)$ é referente à pressão de vapor do líquido contida na bolha, em temperatura T_b , invariante no presente trabalho e $p_g(t)$ é a pressão do gás assumido como perfeito e sujeito ao processo politrópico, $p_g V^n = \text{constante}$.

O volume dos gases é dado por $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3$ e utilizando-se de uma pressão de equilíbrio correspondente a condição da bolha no raio de equilíbrio R_E , tem-se pela lei politrópica assumida que:

$$p_g(t) \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^n = \tilde{p}_g(t) \left(\frac{4}{3}\pi R_E^3\right)^n \quad (2.70)$$

após simplificação resulta em:

$$p_g(t) = \tilde{p}_g(t) \left(\frac{R_E}{R}\right)^{3n} \quad (2.71)$$

Agora, substituindo a equação 2.70 na equação 2.69, a pressão interna na bolha resulta em:

$$p_b(t) = p_v + \tilde{p}_g \left(\frac{R_E}{R}\right)^{3n} \quad (2.72)$$

Assumindo o instante inicial de estudo da bolha e considerando que em $t = 0$ o raio apresenta-se em condição de equilíbrio R_E , a descontinuidade de tensões normais assume a forma abaixo, na qual \tilde{p}_∞ denota a pressão estática de equilíbrio imprimida pelo líquido no instante inicial $p_\infty(0)$ e \tilde{p}_b representa a pressão interna de equilíbrio. Para este instante $t = 0$, não existe parte deviatórica no tensor de tensões. Note abaixo a simples condição de Young-Laplace:

$$\tilde{p}_{b(t)} = \tilde{p}_\infty + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \quad (2.73)$$

e considerando-se que:

$$p_b(t) = \tilde{p}_g + p_v \quad (2.74)$$

também pode-se utilizar a equação 2.69 para a pressão interna de equilíbrio da bolha. Sendo assim, substituindo a equação, dada para a pressão interna de equilíbrio, na equação 2.72 na equação 2.74 é possível chegar à equação

$$\tilde{p}_g = (\tilde{p}_\infty - p_v) + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \quad (2.75)$$

Retornando o termo \tilde{p}_g ao seu formato original, obtemos:

$$p_b = p_v + \left[(\tilde{p}_\infty - p_v) + \left(\frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right) \right]^{3n} \quad (2.76)$$

Definindo $\tilde{p}_\infty - p_v$ como $\Delta\tilde{p}$, tem-se a contribuição da tensão na interface do lado da bolha como sendo:

$$\Sigma_{rr,l} + p_v + \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} = \frac{2\tilde{\sigma}}{R} \quad (2.77)$$

• Determinação da equação para pressão no líquido

Para o lado do líquido, a componente de tensões se torna:

$$\sigma_{nn} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})_l = -\mathbf{n} \cdot p_l(R, t) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot [2\mu \mathbf{D} + 2\boldsymbol{\Sigma}^f] \cdot \mathbf{n}, \quad (2.78)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}^f$ representa a contribuição tensorial ao tensor de tensões efetivo do líquido devido o efeito não-Newtoniano no líquido.

Resta, para finalizar este estudo, identificar a componente de tensão do lado do líquido, $\Sigma_{rr,l}$. De acordo com o tensor de tensões abaixo, obtém-se diferentes condições de tensão. Admitindo isso, a análise da descontinuidade de tensões referentes ao lado do líquido assume a seguinte forma

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^N + \boldsymbol{\sigma} \quad (2.79)$$

$$\Sigma_{rr,l} = -\hat{e}_r \cdot p_l \mathbf{I} \cdot \hat{e}_r + \hat{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}^N \cdot \hat{e}_r + \hat{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{e}_r \quad (2.80)$$

Sendo 2.79 o tensor de tensões, que descreve o comportamento do líquido. Da mesma forma, quando $\boldsymbol{\sigma}^N$ é conhecido, pode-se reescrever a descontinuidade de tensões referentes ao lado do líquido como:

$$\Sigma_{rr,l} = -p_l + 2\mu \mathbf{D}_{rr}|_{r=R} + \sigma_{rr}|_{r=R} \quad (2.81)$$

Lembrando que essa tensão é avaliada na superfície da bolha, ou seja, exatamente sobre o raio da mesma. Ressalta-se também que $u_r = R^2 \frac{\dot{R}}{r^2}$. Desta forma, substituindo o tensor \mathbf{D} , na direção radial, obtém-se:

$$\Sigma_{rr,l} = -p_l + 4\mu \frac{\dot{R}}{R} + \sigma_{rr}|_{r=R}. \quad (2.82)$$

Finalmente, utilizando a equação 2.81 em 2.77 é possível determinar a condição de contorno da equação, em que

$$-p_l - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} + \sigma_{rr}|_{r=R} + p_v + \left(\Delta \tilde{p} + \frac{1\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} = \frac{2\tilde{\sigma}}{R}. \quad (2.83)$$

No próximo passo, ao reescrever os termos da pressão no líquido, p_l como uma pressão interna da bolha p_b , a equação assume uma forma simplificada. É possível verificar que essa pressão exterior à bolha encontra-se em função dos efeitos não-Newtonianos, da tensão superficial e da pressão interna da bolha.

$$p_l = 4\mu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{R} + p_b + \sigma_{rr}|_{r=R}. \quad (2.84)$$

2.1.5.1 Salto de Tensões para um Fluido Magnético

A condição de salto de tensões na interface da bolha dada pela equação de Young-Laplace (equação 2.67) se mantém. No entanto, a avaliação do tensor de tensões no lado referente ao líquido é modificada pela existência de tensões magnéticas extras. Nessa seção, pretende-se avaliar a condição de salto de tensões para um fluido magnético, afim de que esta possa ser acoplada com a equação que governa o movimento radial da bolha (Rayleigh-Plesset Magnética). No instante $t = 0$, pode-se considerar a existência de um campo magnético externo aplicado, de modo que a equação 2.1.5 se torna:

$$\tilde{p}_b(t) = \tilde{p}_\infty + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \quad (2.85)$$

Desta forma, considerando ainda que a pressão de equilíbrio dentro da bolha permanece sendo

$$\tilde{p}_b(t) = \tilde{p}_g + p_v \quad (2.86)$$

substituindo a equação 2.85 e 2.86 obtém-se a nova versão da equação 2.75, representada por:

$$\tilde{p}_g = (\tilde{p}_\infty - p_v) + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \quad (2.87)$$

Retornando o termo \tilde{p}_g ao seu formato original, obtemos:

$$p_b = p_v + \left[(\tilde{p}_\infty - p_v) + \left(\frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right) \right]^{3n} \quad (2.88)$$

Uma vez que $(\tilde{p}_\infty - \tilde{p}_v) = \Delta\tilde{p}$ e $\sigma_{rr}|_b = -p_b$ tem-se:

$$\sigma_{rr}|_b = -p_b - \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} \quad (2.89)$$

Da mesma maneira, é possível determinar qual a tensão referente ao lado do líquido:

$$\sigma_{rr}|_l + p_v + \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} = \frac{2\tilde{\sigma}}{R} \quad (2.90)$$

substituindo a equação 2.90 na equação 2.82 obtém-se:

$$-p_l - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} + \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left[1 - \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} \right] + p_v + \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} = \frac{2\tilde{\sigma}}{R} \quad (2.91)$$

2.1.6 Equação da Dinâmica de Bolhas Generalizada

De modo a encontrar a equação governante da dinâmica de bolhas, utiliza-se a equação de Rayleigh-Plesset generalizada, equação 2.77, obtida a partir do desenvolvimento da equação da quantidade de movimento (Equação de Cauchy). O termo referente à diferença de pressões foi modificado e definido pela equação 2.84. Desta forma, a equação 2.77 é obtida como sendo

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -4\frac{\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R} + \frac{p_b - p_\infty}{\rho} + \frac{3}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr. \quad (2.92)$$

A equação 2.92 representa a equação da dinâmica de bolhas generalizada para escoamentos unidimensionais radiais, podendo ser aplicada para qualquer tensão extra considerada (Fogler & Goddard, 1970). Na condição de líquido Newtoniano, cuja contribuição integral em 2.92 se anula, tem-se:

$$\frac{p_b - p_\infty}{\rho} = \ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + 4\frac{\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R}. \quad (2.93)$$

Nesta condição, vale notar que a equação governante da Dinâmica de Bolhas perde seu caráter integro-diferencial.

Neste trabalho, diferentes fontes de pressão externa ou ambiente serão aplicadas para a excitação de uma bolha. Sendo estes: campo de pressão acústico senoidal, campo de pulsos periódicos, pulsos não-periódicos e campo não linear $\varepsilon sen[1 + sen(\omega t) + 1]$. O campo de pressão harmônico de excitação da bolha é expresso por:

$$p_\infty(t) = \tilde{p}_\infty(1 + \varepsilon sen(\omega t)), \quad (2.94)$$

em que ε representa a amplitude de pressão e ω denota a frequência de excitação da pressão. Para este tipo particular de excitação a equação da dinâmica de bolhas generalizada é dada por

$$\begin{aligned} \ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = & -\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} \\ & -4\frac{\mu}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} - \frac{p_\infty}{\rho} \varepsilon \sin(\omega t) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R} + \frac{3}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Esta equação consiste na equação governante da dinâmica de bolhas. Entretanto seu desenvolvimento ainda não se encontra completo. É necessário que haja uma adimensionalização da mesma, possibilitando a identificação de parâmetros físicos que regem o movimento da bolha.

2.1.6.1 Componente Magnética da Equação de Rayleigh-Plesset

O estudo do salto de tensões e da própria mudança no tensor de tensões a ser estudado modifica de forma expressiva a equação 2.92

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -4\frac{\mu}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R} + \frac{p_b - p_\infty}{\rho} + \frac{2}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr + \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} dr \quad (2.96)$$

Admitindo o novo modelo para o salto de tensões, referente a bolha imersa em um fluido magnético, é possível reescrever a equação. Sabendo ainda que uma fonte de pressão externa senoidal será aplicada, referente ao campo representado pela equação 2.94 é possível redefinir a equação de Rayleigh-Plesset para o caso magnético:

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -4\frac{\mu}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R} + \frac{p_b - p_\infty}{\rho} + \frac{2}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr + \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} dr \quad (2.97)$$

É possível observar que, neste caso, existe uma condição de pressões magnéticas, expressa pelo tensor de tensões magnético avaliado na interface da bolha. Da mesma maneira, a integral não-Newtoniana que, anteriormente poderia ser descartada passa, agora, a ser considerada e a contabilizar componentes em r e em θ .

$$\begin{aligned} \ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = & -\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} \\ & -\frac{4\mu}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} - \frac{p_\infty}{\rho} \varepsilon \sin(\omega t) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R} + \frac{2}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}}{r} dr - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr + \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} dr \end{aligned} \quad (2.98)$$

2.1.7 Adimensionalização da Equação Governante

Para a adimensionalização, uma análise de escalas é utilizada. Variáveis adimensionais são indicadas por asteriscos

$$R^* = \frac{R}{R_E} \quad t^* = \frac{t}{t_c} \quad (2.99)$$

sendo as típicas escalas de velocidade representadas por $U_c = \left(\frac{|\Delta\tilde{p}|}{\rho}\right)^{1/2}$ e $t_c = \frac{R_E}{U_c}$, respectivamente. Assim, a velocidade e a aceleração da superfície da bolha, referentes ao seu raio, assumem a seguinte forma adimensional:

$$\dot{R}^* = \frac{\dot{R}}{U_c} \quad \ddot{R}^* = \ddot{R} \frac{R_E}{U_c^2} \quad (2.100)$$

Relembra-se que é necessário também definir o parâmetro ε em termos adimensionais.

$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(\frac{\tilde{p}_\infty}{\Delta\tilde{p}} \right) \quad (2.101)$$

Por outro lado, a adimensionalização da tensão σ_{rr} é dada por

$$\sigma_{rr}^* = \frac{\sigma_{rr}}{\rho U_c^2} \quad (2.102)$$

Considerando a nova notação para as variáveis adimensionais e utilizando as escalas típicas, a equação governante assume a forma:

$$U_c^2 R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} U_c^2 (\dot{R}^*)^2 = -U_c^2 + \frac{1}{\rho R_E} \left[\left(\frac{R_E}{R_E R^*} \right)^{3n} - \frac{1}{R^*} \right] \frac{U_c^2}{U_c^2} + \left(\frac{R_E}{R_E R^*} \right)^{3n} U_c^2 - U_c^2 \varepsilon (\omega^* t^*) - \frac{4\mu}{\rho} \frac{U_c^*}{R_E} \frac{U_c}{U_c} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + 2U_c^2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr - U_c^2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r} dr + U_c^2 \sigma_{rr}^*, \quad (2.103)$$

sendo que a frequência pode ser adimensionalizada na forma $\omega^* = \omega t_c$. Dividindo a equação 2.103 por U_c^2 e realizando manipulações algébricas simples, chega-se a:

$$R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} (\dot{R}^*)^2 = -1 + \frac{1}{\rho R_E U_c^2} \left[\left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} - \frac{1}{R^*} \right] + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} - \varepsilon (\omega^* t^*) - \frac{4\mu}{\rho} \frac{1}{R_E U_c} \frac{U_c}{U_c} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r} dr + \sigma_{rr}^*, \quad (2.104)$$

Na equação 2.104 é possível identificar os números de Reynolds e Weber, definidos como

$$Re = \frac{\rho U_c R_E}{\mu} \quad (2.105)$$

$$We = \frac{\rho U_c^2 R_E}{\sigma_s} \quad (2.106)$$

O número de Reynolds mede a importância relativa entre forças de inércia e forças viscosas do escoamento. O significado fundamental do número de Reynolds é que o mesmo permite caracterizar

o tipo do escoamento, se o mesmo é laminar ou turbulento. Além disso, o número de Reynolds pode indicar também níveis de instabilidade e bifurcações em um escoamento até a transição para um escoamento totalmente turbulento.

O número de Weber denota a razão entre as forças de inércia e as forças associadas à tensão superficial. Quanto maior o número de Weber, maior a resistência da tensão superficial às oscilações da bolha.

A partir destes parâmetros dinâmicos adimensionais, pode-se reescrever a equação 2.104 como:

$$R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2}(\dot{R}^*)^2 = \frac{2}{We} \left[\frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{1}{R^*} \right] - 1 - \varepsilon^* \sin(\omega^* t^*) + \frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{4}{Re} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + 2 \int_R^\infty \frac{\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}^*}{r} dr + \sigma_{rr}^*. \quad (2.107)$$

Em suma, obteve-se a equação governante adimensional generalizada. Salienta-se que a pressão de vapor no interior da bolha também foi adimensionalizada, de modo que:

$$p_b^* = p_v^* + \left(1 + \frac{2}{We}\right) \left(\frac{1}{R^*}\right)^{3n} \rightarrow p_g^* = \left(1 + \frac{2}{We}\right) \left(\frac{1}{R^*}\right)^{3n} \quad (2.108)$$

2.1.7.1 Adimensionalização da Componente Magnética

Para a adimensionalização da equação de Rayleigh-Plesset magnética, faz-se uso das mesmas variáveis adimensionais antes explicitadas.

$$R^* = \frac{R}{R_E} \quad (2.109)$$

$$t^* = \frac{t}{t_c} \quad (2.110)$$

sendo as típicas escalas de velocidade representadas por $U_c = \left(\frac{|\Delta\bar{p}|}{\rho}\right)^{1/2}$ e $t_c = \frac{R_E}{U_c}$, respectivamente. Por este motivo, considerando a nova equação de Rayleigh-Plesset magnética (equação 2.98), é possível, utilizando as escalas típicas acima, adimensionalizá-la.

$$U_c^2 R_E \ddot{R}^* R^* + \frac{3}{2} U_c^2 \dot{R}^{2*} = \frac{-4\mu}{\rho} \frac{U_c}{R_E} \frac{\dot{R}^*}{R^*} - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R_E R^*} + U_c^2 \left(U_c^2 + \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho R_E} - \frac{\sigma_{rr}^{mag} \rho U_c^2}{\rho} \right) \left(\frac{R_E}{R^* R_E} \right)^{3n} - U_c^2 \varepsilon^* \sin(\omega^* t^*) + \sigma_{rr}^* U_c^2 + U_c^2 \int \frac{2\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int \frac{2\sigma_{\theta\theta}^*}{r} dr - U_c^2 \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left(\frac{R_E}{R_E R^*} \right)^{3n} \quad (2.111)$$

na qual σ_{rr}^{mag} representa o tensor de tensões magnético advindo do ensaio sobre o salto de tensões na interface da bolha. Enquanto σ_{rr} representa o tensor de tensões não-Newtoniano representado pelo estudo das equações de Cauchy e da continuidade.

Reorganizando os termos e deixando todos em função de U_c , tem-se:

$$\begin{aligned}
U_c^2 R_E \ddot{R}^* R^* + \frac{3}{2} U_c^2 \dot{R}^{2*} &= \frac{1}{\rho} \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \left[-\frac{1}{R^*} + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} \right] \frac{U_c^2}{U_c^2} + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} U_c^2 + \\
&- U_c^2 \epsilon^* \sin(\omega^* t^*) - U_c^2 - \frac{4\mu}{\rho} \frac{U_c}{R_E} \frac{\dot{R}^*}{R^*} \frac{U_c}{U_c} + \sigma_{rr}^* U_c^2 + U_c^2 \int \frac{2\sigma_{rr}^*}{r} dr + \\
&- U_c^2 \int \frac{2\sigma_{\theta\theta}^*}{r} dr - U_c^2 \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n}
\end{aligned} \tag{2.112}$$

dividindo a equação por U_c^2 , tem-se:

$$\begin{aligned}
R_E \ddot{R}^* R^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{2*} &= \frac{1}{\rho} \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E U_c} \left[-\frac{1}{R^*} + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} \right] + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} - \epsilon^* \sin(\omega^* t^*) \\
&- 1 - \frac{4\mu}{\rho} \frac{U_c}{R_E} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + \sigma_{rr}^* + \int \frac{2\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int \frac{2\sigma_{\theta\theta}^*}{r} dr - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n}
\end{aligned} \tag{2.113}$$

sabendo que os números de Reynolds e Weber são dados por:

$$Re = \frac{\rho U_c R_E}{\mu} \tag{2.114}$$

$$We = \frac{\rho U_c^2 R_E}{\sigma_s} \tag{2.115}$$

é possível reescrever a equação 2.113 como

$$\begin{aligned}
R_E \ddot{R}^* R^* + \frac{3}{2} \dot{R}^{2*} &= \frac{1}{\rho} \frac{2}{We} \left[-\frac{1}{R^*} + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} \right] + \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} - \epsilon^* \sin(\omega^* t^*) \\
&- 1 - \frac{4}{Re} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + \sigma_{rr}^* + \int \frac{2\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int \frac{2\sigma_{\theta\theta}^*}{r} dr - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Neste ponto, faz-se necessário adimensionalizar a integral não-Newtoniana, que determina a pressão extra nas direções r e θ . Nota-se que $\sigma_{rr}^* = \frac{\sigma_{rr}}{\rho U_c^2}$, logo observando a equação 2.64, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} = \\
&= \frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu_0 \left(\frac{-3\mu_r^2 H_0^2}{8} \right) + \mu_0 \chi \left(-\frac{\mu_r H_0^2}{3} - \frac{17\mu_r^2 H_0^2}{12} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R) \right) \right] \\
&- \frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu_0 \left(-\frac{3\mu_r H_0^2}{2} - \frac{3\mu_r^2 H_0^2}{4} \right) + \mu_0 \chi \left(-\frac{4\mu_r H_0^2}{2} - \frac{4\mu_r^2 H_0^2}{2} \right) \right] \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

substituindo $\mu_r = -\frac{1}{2}$, uma vez que não existe campo aplicado dentro da bolha, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{2\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} = \\
& = \frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu_0 \left(\frac{-3H_0^2}{32} \right) + \mu_0 \chi \left(\frac{H_0^2}{6} - \frac{17H_0^2}{48} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R) \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu_0 \left(\frac{3H_0^2}{4} - \frac{3H_0^2}{16} \right) + \mu_0 \chi \left(\frac{4H_0^2}{4} - \frac{4H_0^2}{8} \right) \right] \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} \quad (2.118)
\end{aligned}$$

Após certa manipulação algébrica e substituindo as condições de adimensionalização, resulta-se em

$$\begin{aligned}
& \int \frac{2\sigma_{rr}^*}{r} dr - \int \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr - \sigma_{rr}^{mag}|_{r=R} \left(\frac{1}{R^*} \right)^{3n} = \\
& = \frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu_0 \left(\frac{-3H_0^2}{32} \right) + \mu_0 \chi \left(-\frac{9H_0^2}{48} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty R_E) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R^* R_E) \right) \right] \\
& \quad - \frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu_0 \left(\frac{9H_0^2}{16} \right) + \mu_0 \chi \left(\frac{H_0^2}{2} \right) \right] \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} \quad (2.119)
\end{aligned}$$

Por fim, chega-se a

$$\frac{1}{Re^{mag}} \left\{ \frac{\chi}{2} \left[\ln \left(\frac{R_\infty^*}{R^*} \right) - \frac{C_1}{2} \right] - \left[\frac{C_1}{8} + \frac{1}{(R^*)^{3n}} \left(C_1^2 - \frac{\chi}{2} \right) \right] \right\} \quad (2.120)$$

na qual

$$C_1 = \frac{3}{4} \quad (2.121)$$

$$Re^{mag} = \frac{\rho U_c^2}{\mu_0 H_0^2} \quad (2.122)$$

A equação 2.122 representa o que vamos definir como o número de Reynolds magnético. O número de Reynolds hidrodinâmico, por definição, compara a ação das forças de inércia e viscosa. Desta forma, a relação entre as forças de inércia e magnética podem ser consideradas como um número de Reynolds magnético.

2.1.8 Versão Final da Equação de Rayleigh-Plesset Magnética

Nesta formulação, considerou-se para o salto de tensões magnético a existência de um campo magnético aplicado em $t = 0$. Apesar de plausível, essa consideração leva em conta que o campo aplicado está em R_∞ e vai decaindo a medida que se aproxima da bolha. Matematicamente, utilizando esta formulação, o campo na superfície da bolha é nulo. Entretanto, não é possível garantir em uma aplicação prática que isso é verdade: o decaimento da aplicação de um campo externo depende de muitos fatores. Por este motivo, a formulação completa foi feita até aqui. Neste ponto, considerar-se-á essa simplificação e a equação 2.120 pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{Re^{mag}} \left\{ \frac{\chi}{2} \left[\ln \left(\frac{R_{\infty}^*}{R^*} \right) - \frac{5C_1}{8} \right] \right\} \quad (2.123)$$

para todas as seções seguintes, essa será considerada a forma final da parte magnética adicionada a equação de Rayleigh-Plesset. Maiores informações podem ser obtidas no apêndice. Desta forma, a equação completa, com o tensor de tensões magnético é:

$$R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} (\dot{R}^*)^2 = \frac{2}{We} \left[\frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{1}{R^*} \right] - 1 - \varepsilon^* \text{sen}(\omega^* t^*) + \frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{4}{Re} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + \frac{1}{Re^{mag}} \left\{ \frac{\chi}{2} \left[\ln \left(\frac{R_{\infty}^*}{R^*} \right) - \frac{5C_1}{8} \right] \right\}. \quad (2.124)$$

Para que possamos escrever um código que resolva a equação de Rayleigh-Plesset, é preciso definir o que será considerado R_{∞} . Para isso, o campo descrito por Rosensweig (1985) foi plotado e definiu-se que a uma distância suficientemente grande da bolha, o campo valeria $0,99H_0$.

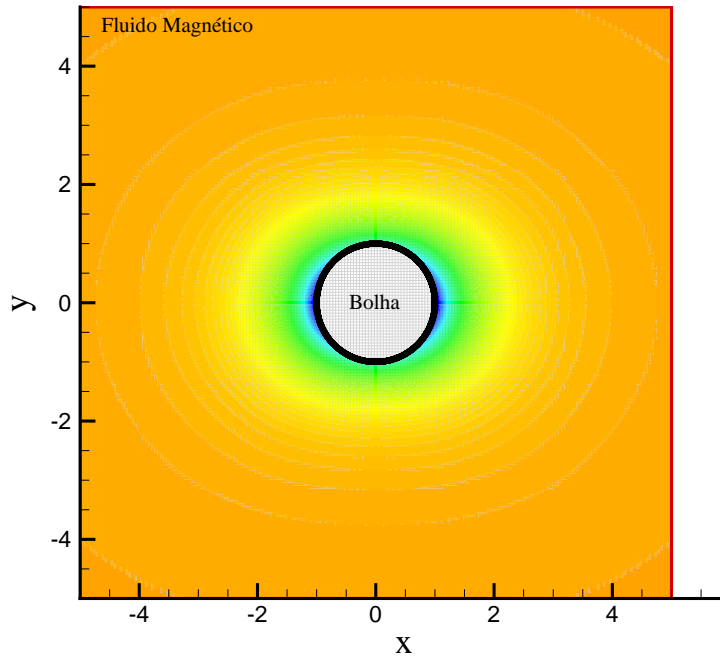


Figura 2.3: Campo magnético H em função da distância da bolha

Percebe-se da figura 2.3 que o campo vai decaindo a medida que se aproxima da bolha. Essa característica pode ser observada pela mudança de coloração: indo do laranja ao azul. Uma vez que este decaimento é rápido, espera-se obter um valor não muito alto para R_{∞} , que pode ser comprovado pela figura 2.4.

Na figura 2.4, observa-se que a partir de $r \sim 2,3$ o valor do campo começa a cair de forma expressiva. Entretanto, como pode ser visto no encarte, $H_0 = 0,99$ é obtido com $r = 4,658$.

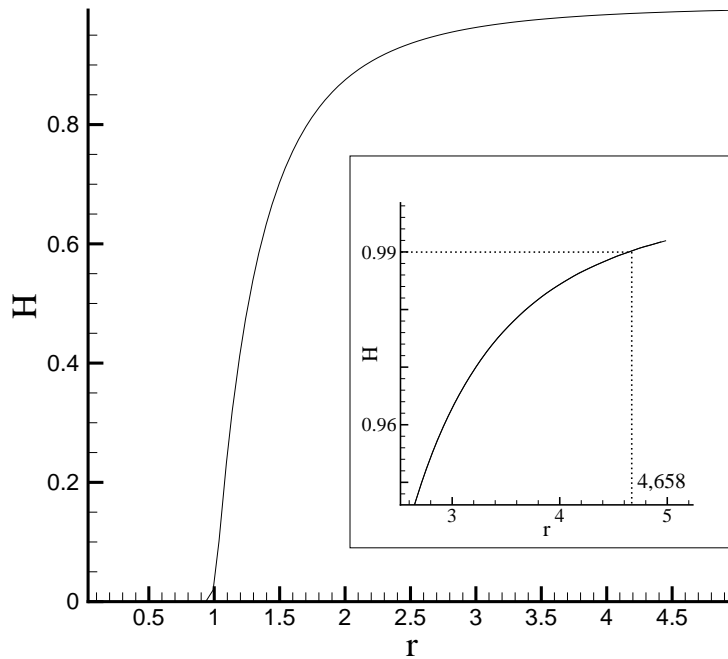


Figura 2.4: Campo magnético H em função da distância r até a bolha

Desta forma, qualquer valor acima deste já pode ser considerado R_∞ . Com estes dados, utilizar-se-á $R_\infty = 5$ para as próximas etapas deste trabalho, inclusive no que diz respeito a formulação numérica.

2.1.9 Discussão Sobre as Escalas de Tempo

A modelagem apresentada neste trabalho envolve uma série de escalas de tempo características associadas aos diferentes mecanismos físicos presentes no estudo de uma bolha oscilante em meio magnético. As principais escalas associadas, desta forma, são: a escala de tempo associada ao mecanismo de difusão viscosa, uma vez que a quantidade de movimento depende da viscosidade cinemática do fluido - denotada por t_μ ; uma escala de tempo relacionada à relaxação a tensão superficial - expressa por t_σ ; uma relacionada ao tempo de excitação do sistema, devido ao campo de pressão oscilante aplicado - chamada de t_ω , neste contexto; e, por fim, uma escala de tempo associada aos efeitos magnéticos - definida por t_m .

Esta última escala, t_m , representa o tempo de relaxação da magnetização do fluido, ou seja, o tempo que o fluido demora para se magnetizar na presença de um campo externo. Além de representar a inovação no presente trabalho, pode-se interpretar esta escala de tempo como uma interação dos dipolos magnéticos com o campo externo. As forças e torques em cada nanopartícula magnética que constitui o fluido interage com o campo externo, gerando movimentos rotacionais e translacionais.

Não somente, podemos ainda definir uma escala de tempo macroscópica típica do problema, que será chamada de escala inercial (ou convectiva) e representada pelo símbolo t_i . Esta escala representa o tempo que um volume infinitesimal de fluido demora para percorrer uma distância radial equivalente ao raio de equilíbrio, R_E , da bolha com certa velocidade típica U_c . Desta forma, tem-se: $t_i = \frac{R_E}{U_c}$. Desta forma, lembrando de Bernoulli, é possível escrever U_c como $\sqrt{|\Delta\tilde{p}|/\rho}$, em que $\Delta\tilde{p} = \tilde{p}_\infty - p_v$. Neste caso, \tilde{p}_∞ representa a pressão estática do líquido avaliada longe da bolha no instante de equilíbrio ($t = 0$) e p_v denota a pressão de vapor no interior da bolha.

Como o problema estudado é regido por uma equação não linear que envolve múltiplas escalas de tempo, a interpretação física dos resultados passa necessariamente por uma interpretação do significado das relações entre essas escalas. Através do processo de adimensionalização da equação de Rayleigh-Plesset generalizada para um fluido magnético os parâmetros físicos adimensionais que relacionam estas escalas de tempo aparecem de forma espontânea. Desta forma, é preciso interpretar o significado de cada um destes parâmetros em termos das escalas de tempo envolvidas.

Para tanto, considerar-se-á que as escalas t_ω , t_μ , t_σ e t_m são dadas por:

$$t_\omega = \frac{1}{\omega}, \quad t_\mu = \frac{R_E^2}{\nu}, \quad t_\sigma = \sqrt{\frac{\rho R_E^3}{\sigma}}, \quad t_m = R_E \times \left(\frac{\mu_0 H_0^2}{\rho} \right)^{-1/2}, \quad (2.125)$$

em que ν representa a viscosidade cinemática do fluido dada por μ/ρ , σ é o coeficiente de tensão superficial deste e ω a frequência de excitação do campo de pressão aplicado. Quando adimensionalizamos as quatro escalas de tempo descritas em (2.125) pela escala de tempo inercial t_i do problema, obtemos

$$t_\omega^* = \frac{t_\omega}{t_i} = \frac{1}{\omega \times (R_E/U_c)} = \frac{1}{\omega^*} \quad (2.126)$$

$$t_\nu^* = \frac{t_\nu}{t_i} = \frac{R_E^2 U_c}{\nu R_E} = \frac{U_c R_E}{\nu} = Re \quad (2.127)$$

$$t_\sigma^* = \frac{t_\sigma}{t_i} = \sqrt{\frac{\rho R_E^3}{\sigma}} \times \frac{U_c}{R_E} = \frac{\rho U_c^2 R_E}{\sigma} = \sqrt{We} \quad (2.128)$$

$$t_m^* = \frac{t_m}{t_i} = R_E \times \left(\frac{\mu_0 H_0^2}{\rho} \right)^{-1/2} \times \frac{U_c}{R_E} = \sqrt{\frac{\rho U_c^2}{\mu_0 H_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{Re_m}}, \quad (2.129)$$

nas quais os números de Reynolds, Weber e Reynolds magnéticos já foram definidos anteriormente. Desta forma, observa-se que é possível interpretar os parâmetros físicos do sistema como razões de escalas de tempo. O número de Reynolds magnético, por exemplo, representa a relação entre duas escalas de tempo e pode, também, ser definido como a razão entre as forças de inércia e magnética. A partir do momento em que o campo aplicado cresce o número de Reynolds magnético diminui. Considerando que na ausência de campo $Re_m \rightarrow \infty$, a aplicação do campo tende a diminuir o valor de Re_m . Consideremos, por exemplo, $Re_m \sim 1$. Essa diminuição no valor de Re_m implica em um aumento na escala de tempo magnética do problema como pode ser visto em (2.129). Normalmente, as escalas de tempo magnéticas são muito pequenas e o sistema tende a reagir rapidamente. Essa rapidez na velocidade faz com que as escalas de tempo magnéticas estejam fora das escalas de

tempo da mecânica dos meios contínuos. No momento em que existe um crescimento na ordem de magnitude desta escala, fazendo com que ela se equipare às escalas de tempo contínuas do problema (como a inercial t_i), a bolha passa a reagir de modo mais expressivo aos

Por outro lado se a escala de tempo magnética é muito pequena em relação à escala inercial ($Re_m \gg 1$) durante um tempo típico de oscilação da bolha (considerando que $t_w^* \sim 1$) as nanopartículas magnéticas do meio sofreram um número muito maior de alterações microestruturais de modo que a bolha praticamente não percebe o efeito destas em seu movimento.

A mesma coisa acontece no outro limite assintótico, no qual os tempos magnéticos são grandes demais, de modo que enquanto a bolha oscilou um ou mais períodos, o campo ainda não foi capaz de alterar a microestrutura do ferrofluido. Neste sentido, espera-se que a bolha reaja melhor os efeitos magnéticos quando este encontra-se na mesma ordem de magnitude da escala de tempo de excitação do sistema.

Esta mesma interpretação vale para os outros parâmetros adimensionais do problema e sempre que possível a física dos resultados obtidos através das simulações realizadas neste trabalho será interpretada em termos das escalas de tempo típicas do problema expressas em termos dos parâmetros adimensionais que servirão como entrada para o processamento de dados.

2.1.10 Similaridade Dinâmica com Circuito Ressonante

É possível relacionar a equação de Rayleigh-Plesset com a equação descritiva de um circuito elétrico ressonante não linear, que funciona de forma similar a um sistema massa-mola-amortecedor. O circuito ressonante em série é utilizado em diversas aplicações devido a suas características de ressonância e filtragem. De forma mais geral, ressonadores são caracterizados por sistemas físicos que apresentam picos na resposta em frequência de sua função de transferência (definida na seção 3.2 - “Análise de Estabilidade”). Em circuitos elétricos, observa-se essa característica quando os mesmos possuem componentes armazenadores de energia. Entretanto, uma análise pode ser feita para qualquer sistema que armazene energia vibracional, gerando amplitudes de oscilação maiores em determinadas frequências.

A detecção de bolhas em certas áreas, especialmente na área médica, é de extrema importância e suas características ressonantes colaboram com sua identificação. Alguns métodos de como a ecográfica pulsada são utilizados para a detecção de cavitação nas câmaras cardíacas de mergulhadores após longos períodos de despressurização. Entretanto, esses métodos não são eficazes na caracterização de bolhas que já se encontram ressonantes. Bolhas de tamanho razoável excitadas com certas frequências, principalmente frequências ultrasônicas, podem ajudar nessa identificação. Isso ocorre devido a sua alta heterogeneidade em relação aos campos ultrasônicos. (Miller, 1981)

2.1.11 Cálculo da Equivalência Dinâmica

Multiplicando a equação de Rayleigh-Plesset por R^3 , tem-se:

$$R^5 \ddot{R} + \left(\frac{3}{2} R^4 \dot{R} + \frac{4}{Re} R^3 \right) \dot{R} - \left(1 + \frac{2}{We} (R^2 - 1) \right) R = f(t^*), \quad (2.130)$$

chamando

$$h(t) = \left(\frac{3}{2} R^4 \dot{R} + \frac{4}{Re} R^3 \right) \quad (2.131)$$

$$g(t) = \left(1 + \frac{2}{We} (1 - R^2) \right). \quad (2.132)$$

é possível notar que:

$$R^5 \ddot{R} + h(t) \dot{R} - g(t) R = f(t^*). \quad (2.133)$$

Considere uma equação diferencial não-linear que rege a dinâmica de um sistema RLC não-linear:

$$Li(t)i(\ddot{t}) + [Ri(t)]i(\dot{t}) - \left[\frac{1}{C}(i(t)^2 - 1) \right] i(t) = f(t^*) \quad (2.134)$$

fazendo uma análise de equivalência dinâmica entre as equações 2.133 e 2.134, conclui-se:

$$Li(t) \sim R^5; Ri(t) \sim h(t) \quad e \quad \frac{1}{C}(i(t)^2 - 1) \sim g(t) \quad (2.135)$$

De 2.135 conclui-se que existe uma equivalência dinâmica entre os sistemas não-linear RLC e o sistema hidrodinâmico bolha oscilatória com $R(t) \sim i(t)$. Isto, de certa forma, vem demonstrar que a teoria clássica em controle e sistemas não-lineares pode também ser utilizada para o sistema hidrodinâmico examinado no presente trabalho.

Capítulo 3

Soluções Assintóticas, Análise de Estabilidade e Dinâmica do Sistema Bolha-Fluido

Este capítulo tem por objetivo demonstrar a solução assintótica proposta e a linearização da equação. Além disso, faz-se o uso de uma análise de estabilidade no contexto da teoria de controle linear, fazendo uso da análise de controlabilidade e observabilidade.

3.1 Solução Assintótica

A não-linearidade de problemas pode se tornar um empecilho para o estudo da estabilidade do mesmo. As teorias de controle não-linear possuem uma densidade matemática muito grande se comparadas à teoria do controle linear. Sendo assim, determina-se uma solução assintótica para baixas excitações, que permite o estudo linearizado do problema.

Para tanto, utilizou-se o método de expansões assintóticas regulares que é uma ferramenta poderosa para desenvolver soluções analíticas em regimes assintóticos. Mais especificamente, usou-se o método de perturbações regulares paramétrico. Desta maneira, observa-se a resolução da parametrização da solução assintótica de primeira ordem, $O(\varepsilon)$, em função da amplitude de excitação considerada.

Para o desenvolvimento de uma solução assintótica da equação governante, primeiro propõe-se a seguinte mudança de variável: $R = (1 + r)$. Admitindo-se os produtos notáveis que aparecem, os mesmos são aproximados usando série binominal clássica $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + O(x^3)$, cujo erro será $O(x^3)$. Nessas condições:

$$(1 + r)^{-3n} = 1 - 3nr - \frac{3}{2} [(1 - 3n)n] r^2 + O(r)^3 \quad (3.1)$$

$$(1 + r)^{-1} = 1 - r + r^2 + O(r)^3. \quad (3.2)$$

Substituindo estas séries aproximadas na equação de Rayleigh-Plesset, obtém-se:

$$(1 + r)\ddot{r} + \frac{3}{2}\dot{r}^2 = \frac{2}{We} \left[(1 - 3n)r + \left(\frac{3}{2}n + \frac{9}{2}n^2 - 1 \right) r^2 \right] - 1 - \varepsilon sen(\omega t) - 3nr + 1 + \frac{3}{2}nr^2 + \frac{9}{2}n^2r^2 - \frac{4\dot{R}}{Re}(1 - r + r^2). \quad (3.3)$$

Agora, expandindo r e suas derivadas em termos de séries de potência, para uma perturbação regular do raio da bolha, obtém-se:

$$r = \sum_{n=1} \varepsilon^n f_n(t), \quad (3.4)$$

logo, considerando uma expansão até a segunda ordem

$$r = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 \quad (3.5)$$

$$\dot{r} = \dot{y}_0 + \varepsilon \dot{y}_1 + \varepsilon^2 \dot{y}_2 \quad (3.6)$$

$$\ddot{r} = \ddot{y}_0 + \varepsilon \ddot{y}_1 + \varepsilon^2 \ddot{y}_2 \quad (3.7)$$

Após várias manipulações algébricas, é possível determinar o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas

- Para $O(\varepsilon)$

$$\ddot{y}_1(t) + \gamma \dot{y}_1(t) + \kappa y_1(t) = -sen(\omega t) \quad (3.8)$$

- Para $O(\varepsilon^2)$

$$\ddot{y}_2(t) + y_1(t)\dot{y}_1(t) + \frac{3}{2}\dot{y}_1(t)^2 - \alpha y_2(t) - \beta y_1(t)^2 - \gamma(y_1(t)\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + \lambda y_2(t) - \eta y_1(t)^2 = 0. \quad (3.9)$$

Vale notar que tanto a equação 3.8 quanto a equação 3.9 são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem resultantes do processo de linearização do método de expansão assintótica utilizado.

Os parâmetros identificados nas equações 3.8 e 3.9, relacionam-se aos números de Reynolds, Weber e constante politrópica dos gases. São estes:

$$\alpha = \frac{2}{We}(1 - 3n) \quad (3.10)$$

$$\beta = \frac{2}{We} \left[\frac{9}{2}n^2 + \left(\frac{3}{2}\right)n - 1 \right] \quad (3.11)$$

$$\lambda = 3n \quad (3.12)$$

$$\eta = \left[\frac{9}{2}n^2 + \left(\frac{3}{2}\right)n \right] \quad (3.13)$$

$$\kappa = \lambda - \alpha \quad (3.14)$$

e

$$\gamma = \frac{4}{Re} \quad (3.15)$$

Aplicando-se, agora, as condições iniciais do problem, obtém-se:

$$y_1(0) = 0; \quad \dot{y}_1(0) = 0; \quad (3.16)$$

$$y_2(0) = 0; \quad \dot{y}_2(0) = 0; \quad (3.17)$$

A solução analítica para o termo de correção $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ é extremamente extensa e tediosa, conforme verificamos. Desta maneira, a análise da presente seção será restrita a solução $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Portanto, a equação diferencial ordinária a ser resolvida é a 3.8.

Resolvendo esta equação diferencial por meio do programa Maxima para Linux, com as respectivas condições iniciais, tem-se três correções de ordem ε , baseadas nos valores de Reynolds, Weber e n , o coeficiente politrópico dos gases. Estas correções foram efetuadas para a solução da equação 3.8, na qual $\gamma = a$ e $\kappa = b$. A primeira correção identifica valores positivos para a solução de $4b - a^2$, a segunda envolve valores negativos e a terceira é válida quando $4b - a^2$ é nula.

- **Condição 1:** solução válida para $4b - a^2 > 0$

$$y_1(t) = \frac{(\omega^2 - t)\text{sen}(\omega t) + a\omega\text{cos}(\omega t)}{\omega^4 + (a^2 - 2b)\omega^2 + b^2} + e^{\frac{-at}{2}} \left[- \left(\frac{\text{sen}(\frac{Yt}{2})(2\omega^3 + (a^2 - 2b)\omega)}{Y(\omega^4 + a^2\omega - 2b\omega^2 + b^2)} \right) - \frac{a\text{cos}(\frac{Yt}{2})\omega}{\omega^4 + (a^2 - 2b)\omega^2 + b^2} \right] \quad (3.18)$$

Sendo $a = \frac{4}{Re}$, $b = n \left(3 + \frac{6}{We} \right) - \frac{2}{We}$. $Y = \sqrt{4b - a^2}$. Substituindo os valores de a e b definidos logo acima chega-se a seguinte inequação, que valida a expressão acima:

$$\frac{1}{We}(6n - 2) > \frac{4}{Re^2} - 3n \quad (3.19)$$

- **Condição 2:** solução válida para $4b - a^2 < 0$

$$\begin{aligned}
y_1(t) = & \frac{(\omega^2 - b) \sin(t\omega) + a\omega \cos(t\omega)}{\omega^4 + (a^2 - 2b)\omega^2 + b^2} \\
& - \frac{e^{\frac{(\sqrt{a^2 - 4b - a})t}{2}} \left(2\omega^3 + \left(-2b + a\sqrt{a^2 - 4b + a^2} \right) \omega \right)}{2\sqrt{a^2 - 4b}\omega^4 + \left(2a^2\sqrt{a^2 - 4b} - 4\sqrt{a^2 - 4b}b \right) \omega^2 + 2\sqrt{a^2 - 4b}b^2} \\
& + \frac{e^{\frac{(-\sqrt{a^2 - 4b - a})t}{2}} \left(2\omega^3 + \left(-2b - a\sqrt{a^2 - 4b + a^2} \right) \omega \right)}{2\sqrt{a^2 - 4b}\omega^4 + \left(2a^2\sqrt{a^2 - 4b} - 4\sqrt{a^2 - 4b}b \right) \omega^2 + 2\sqrt{a^2 - 4b}b^2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Os mesmos valores de a e b utilizados na condição anterior são válidos. Nesta situação, a condição para validade é dada por

$$\frac{1}{We}(6n - 2) < \frac{4}{Re^2} - 3n \tag{3.21}$$

- **Condição 3:** solução válida para $4b - a^2 = 0$

$$\begin{aligned}
y_1(t) = & \frac{(16\omega^2 - 4a^2) \sin(t\omega) + 16a\omega \cos(t\omega)}{16\omega^4 + 8a^2\omega^2 + a^4} \\
& + e^{-\frac{at}{2}} \left(-\frac{16a\omega}{16\omega^4 + 8a^2\omega^2 + a^4} - \frac{4t\omega}{4\omega^2 + a^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Os mesmos valores de a e b utilizados na condição anterior são válidos. Nesta situação, a condição para validade é dada por

$$\frac{1}{We}(6n - 2) = \frac{4}{Re^2} - 3n \tag{3.23}$$

Realizando uma comparação entre a resposta linearizada e a resposta não-linear, é possível comparar qualitativamente, pela figura 3.1 que, em regime permanente, como o aumento do ε ocorre um aumento significativo da discrepância das soluções numérica e assintótica.

Na análise da solução assintótica, como dito anteriormente, a correção analítica $O(\varepsilon^2)$ se torna tediosa e trabalhosa. Desta maneira, efetuou-se uma solução numérica utilizando Runge-Kutta de quarta ordem para a mesma. Baseando-se na equação 3.9, um algoritmo numérico foi implementado, utilizando também a solução analítica proposta para a equação 3.8. Para isso, um vetor “contribuição” foi definido, de forma a simplificar a formulação matemática das funções de y_1 .

Quantitativamente, é possível observar na figura 3.2 que a partir de valores de $\varepsilon = 0,67$ o erro percentual entre a solução assintótica de ordem ε proposta e a solução numérica começa a ser maior que 1%. Por outro lado, entende-se que a solução de ordem ε^2 se aproxima ainda mais

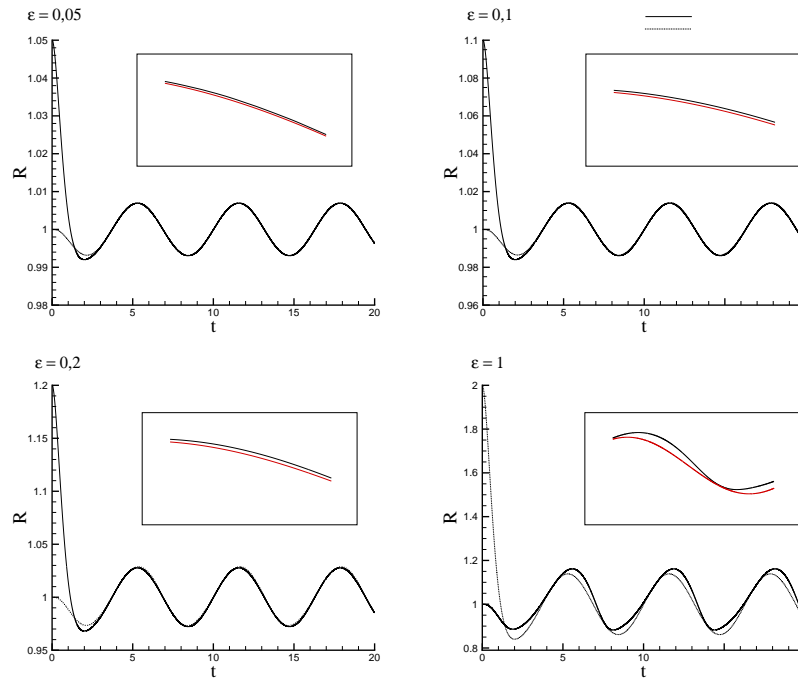


Figura 3.1: Diferença entre as respostas, para o raio da bolha em função do tempo, linearizada e não-linear com $Re = 1$, $We = 1$ e variação da amplitude de oscilação: (a) $\varepsilon = 0,05$; (b) $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,2$ e $\varepsilon = 1$. Os encartes representam um *zoom* nas curvas, demonstrando como o aumento da amplitude diferencia as respostas linearizada e não-linear.

da solução numérica. O resultado mostra concordância quase perfeita entre as três soluções para valores pequenos de ε , da ordem de $\varepsilon = 0,2$. Para valores maiores de amplitude de pressão, os efeitos não lineares começam a se tornar pronunciáveis. Por exemplo, para valores maiores que $\varepsilon = 0,2$ a resposta do raio da bolha em função do tempo não é mais harmônica e periódica e começa a sofrer leves deformações no vale, mesmo com baixos valores de Reynolds e Weber. O desvio se tornaria ainda mais notável, caso estes fatores adimensionais fossem modificados para valores maiores.

Por outro lado, como observado no encarte, nota-se que a $O(\varepsilon^2)$ se aproxima muito mais da solução numérica. O erro entre a correção $O(\varepsilon^2)$ e a solução numérica ultrapassa 1% apenas com $\varepsilon = 1,07$, mostrando que a mesma possui um comportamento mais similar do que a $O(\varepsilon)$.

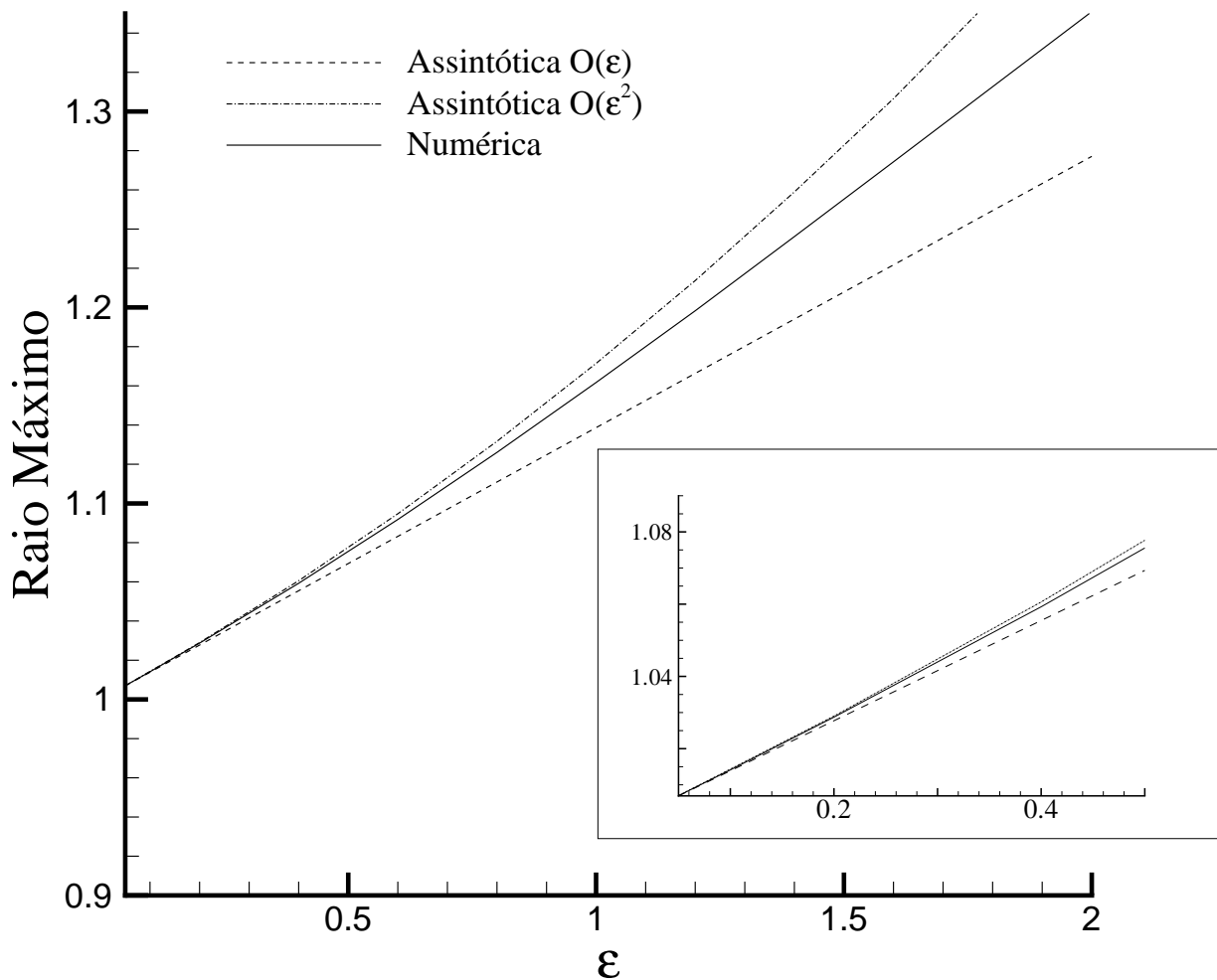


Figura 3.2: Raio máximo da bolha em função do tempo obtido em regime permanente, em função da amplitude - variando de 0,05 a 2 - da oscilação senoidal aplicada para $Re = 1$, $We = 1$. A linha tracejada representa a solução assintótica de ordem ϵ para a condição 1, enquanto a linha cheia representa a solução numérica e a linha pontilhada, por sua vez, representa a correção $O(\epsilon^2)$

3.2 Análise de Estabilidade Linear

A análise do espaço de estados determina um modelo matemático de representação de sistemas físicos por meio de equações diferenciais de primeira ordem. Esta análise se mostra superior a análise no domínio da frequência em diversos aspectos. Isso ocorre, pois as funções de transferência só são aplicáveis a sistemas lineares e invariantes no tempo. Estas só são definidas sob condições iniciais nulas. Além disso, somente fornecem a saída do sistema baseando-se em sua entrada, não revelando qualquer estado interno do sistema.

Retornando a ideia de funções de transferência, é possível defini-las por meio da transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace a um sistema, é possível definir uma função que, algebricamente, relacione a entrada e a saída do sistema. Para este fim, inicia-se escrevendo a equação diferencial linear geral de n -ésima ordem e invariante no tempo,

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t), \quad (3.24)$$

em que $c(t)$ é a saída (resposta do sistema), $r(t)$ é a entrada (excitação do sistema) e os coeficientes a_i , e b_i e a forma da equação diferencial representam o sistema. Aplicando-se a transformada de Laplace em ambos os lados da equação, tem-se agora no espaço de frequência a seguinte equação algébrica:

$$a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \dots + a_0 C(s) = b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \dots + b_0 R(s) \quad (3.25)$$

Admitindo-se que todas as condições iniciais sejam iguais a zero, a mesma se reduz a

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) C(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) R(s). \quad (3.26)$$

Expressa-se agora a relação entre a transformada da saída, $C(s)$, e a transformada da entrada, $R(s)$:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)}{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)} \quad (3.27)$$

- **Exemplo de Aplicação da função de transferência para uma equação diferencial de primeira ordem**

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2ct = r(t), \quad (3.28)$$

aplicando a transformada de Laplace, temos:

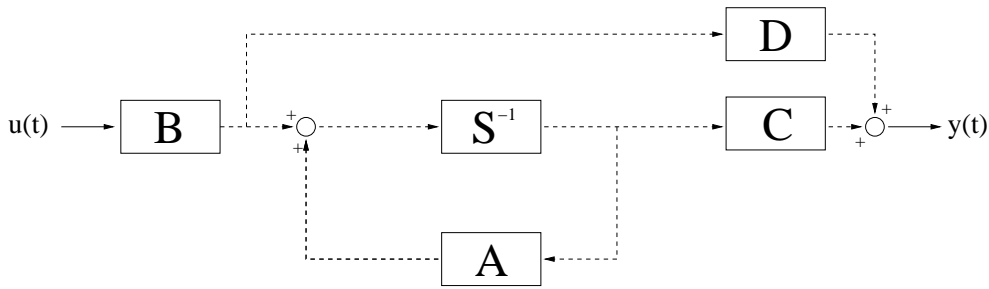


Figura 3.3: Diagrama de blocos da dinâmica de um sistema linear descrito por espaço de estados

$$sC(s) + 2C(s) = R(s), \quad (3.29)$$

desta forma, a função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s + 2} \quad (3.30)$$

Lembrando que s é a variável do domínio imaginário $\sigma + j\omega$, sendo j - também chamado de i - a unidade imaginária $\sqrt{-1}$. O domínio de Laplace é representado pela parte real (σ) no eixo horizontal e pela parte imaginária ($j\omega$) no eixo vertical. Para um sinal causal (ou seja, que não inicia antes de $t = 0$), caso $\sigma = 0$, a transformada de Laplace é idêntica a transformada de Fourier.

O plano de Laplace pode fornecer diversas informações interessantes sobre a estabilidade do sistema. E isso é possível por meio de pólos e zeros. As funções de transferência possuem um denominador e um numerador. Os valores que anulam o numerador são chamados zeros da função e, por conseguinte, os valores que anulam o denominador são chamados pólos. No exemplo acima $s = -2$ anula o denominador e, desta forma, é considerado um pólo do sistema. Ou seja, considerando uma função de transferência $G(s)$, um pólo é definido como um número real ou complexo finito λ tal que $|G(\lambda) = \infty|$. Um zero, por outro lado, é definido como um número real ou complexo finito λ tal que $|G(\lambda) = 0|$.

A partir dos pólos e zeros do sistema, observa-se o tipo de resposta que o mesmo representa. Por exemplo, ao falarmos do semi-plano direito do domínio de Laplace, estamos considerando que a parte real é positiva. Neste caso, uma vez que a transformada de Laplace representa termos exponenciais, estes iriam crescer indefinidamente, aumentando a energia do sistema e gerando instabilidade. Isso significa, fisicamente, que um distúrbio de pequena amplitude que perturbou inicialmente o sistema, dependendo dos parâmetros de controle do sistema, pode levar a uma amplificação do distúrbio infinitesimal. Este distúrbio cresce exponencialmente e pode chegar a níveis de amplitude muito altos.

A figura 3.2 apresenta como ilustração um diagrama de blocos típico de um sistema dinâmico. **A** representa a realimentação direta presente no sistema. **B** represente, por sua vez, o ganho em malha aberta do sistema, ou seja, independente da realimentação. **C** demonstra o ganho referente ao sistema como um todo, após os processos de realimentação. E **D** representa uma característica

do sistema que depende apenas da excitação de entrada, sendo independente dos processos de realimentação ou ganhos de malha aberta e fechada.

A grande tarefa de modelagem do sistema no espaço de estados é derivar os elementos das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} - que representam as equações diferenciais de estado - e as matrizes \mathbf{C} e \mathbf{D} - representando o conjunto de equações que relacionam as variáveis de saída de interesse com as variáveis de entrada e de estado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.32)$$

Na representação 3.31 e 3.32, \mathbf{x} denota o vetor de estados, ou seja, um vetor cujos elementos são as variáveis de estado. Essas variáveis são definidas como o menor conjunto de variáveis linearmente independentes do sistema. $\dot{\mathbf{x}}$ é a derivada do vetor de estado em relação ao tempo. \mathbf{y} é o vetor de saídas e \mathbf{u} é o vetor de entradas

• **Aplicação da Análise de Estabilidade Linear à equação de Rayleigh-Plesset**

Baseando-se na equação de Rayleigh Plesset linearizada, sob uma entrada senoidal de baixa amplitude, é possível avaliar a estabilidade do sistema. Separando a mesma em duas equações diferenciais com o vetor de estados sendo composto de X_1 e X_2 , tem-se uma representação similar ao oscilador harmônico ou ainda ao circuito ressonante citado anteriormente.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{4}{We} + 3) & -\frac{4}{Re} \end{bmatrix}}_2 \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_4 \underbrace{\mathbf{u}}_5 \quad (3.33)$$

$$\underbrace{\mathbf{y}}_6 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_7 \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_7 \quad (3.34)$$

Nesta configuração, **1** é Derivada do Vetor de Estados, **2** denota a Matriz do Sistema, **3** é o chamado Vetor de Estados, **4** é a Matriz de Entradas, **5** é o chamado vetor de controle, **6** o Vetor de Saída e **7** a Matriz de Saída. Desta forma, tem-se:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (3.35)$$

Sendo $Y(s)$ a saída - anteriormente chamada também de $C(s)$ - e $R(s)$ a entrada. Relembrando que a menos dos cancelamentos:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} adj(sI - A), \quad (3.36)$$

na qual *adj* se refere à matriz adjunta. Desta forma, é possível dizer que os pólos do sistema serão referentes às raízes do polinômio abaixo:

$$\left| sI - A \right| = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -\frac{4}{We} - 3 & s + \frac{4}{Re} \end{vmatrix} = \frac{((s^2 + 3)Re + 4s)We + 4Re}{ReWe} = \frac{s^2 ReWe + 4sWe + (3ReWe + 4Re)}{ReWe} \quad (3.37)$$

Os pólos que determinam a estabilidade do sistema serão, então:

$$s_1 = \frac{\frac{-4}{Re} + \sqrt{\frac{16}{Re^2} + 12 + \frac{16}{We}}}{2} \quad (3.38)$$

$$s_2 = \frac{\frac{-4}{Re} - \sqrt{\frac{16}{Re^2} + 12 + \frac{16}{We}}}{2} \quad (3.39)$$

A partir da equação 3.43, é possível definir um critério de estabilidade relacionando os números de Reynolds e Weber como segue

$$We > \frac{Re^2}{2 - \frac{3Re^2}{4}} \quad (3.40)$$

com

$$Re < \sqrt{\frac{8}{3}} \quad (3.41)$$

Quando estes critérios não são atendidos, observa-se na resolução da equação assintótica que o sistema passa a perder energia com o passar do tempo. Define-se um sistema como instável quando o mesmo ganha ou perde energia. Uma vez que o sistema dinâmico bolha oscilante não mantém sua amplitude em função do tempo, tendo a mesma amortecida, é possível dizer que a estabilidade do sistema está vinculada aos pólos no plano de Laplace. Da mesma forma, certa combinação de fatores pode levar a bolha ao colapso, vinculando também uma instabilidade.

Visando a estabilidade do sistema, é necessário que nenhum dos pólos esteja no semi-plano direito do plano de Laplace. No fundo isto se refere a uma análise modal, cujas auto-funções são ondas planas. No contexto de um problema de autovalor e autovetor, s_1 e s_2 seriam os autovalores associados ao sistema. As exponenciais associadas e^{is_1t} e e^{is_2t} são os autovetores (ou vetores no espaço de Hilbert). Desta forma, tem-se duas opções que garantem a estabilidade:

$$s_1 \rightarrow \frac{-4}{Re} + \sqrt{\frac{16}{Re^2} + 12 + \frac{16}{We}} < 0 \quad (3.42)$$

$$s_2 \rightarrow \frac{-4}{Re} - \sqrt{\frac{16}{Re^2} + 12 + \frac{16}{We}} < 0 \quad (3.43)$$

Ou ainda:

$$s_1 \rightarrow 3 + \frac{4}{We} < 0 \quad (3.44)$$

$$s_2 \rightarrow 3 + \frac{4}{We} < \frac{8}{Re^2} \quad (3.45)$$

Fisicamente, o número de Weber nunca será negativo. Desta forma, s_1 não poderá ser aplicado em um contexto físico.

- **Frequência natural do sistema Bolha-oscilante**

Considerando uma equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = f(t) \quad (3.46)$$

sabe-se que a frequência natural do sistema é definida com o sistema amortecido e livre de vibração, pois se traduz entre o balanço da inércia e efeito de relaxação do sistema. Determina-se pela solução da EDO que $\omega_n = \left(\frac{K}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$, não dependendo de C , que se refere ao amortecimento viscoso.

No caso da equação da bolha linearizada, tem-se:

$$M = 1 \quad (3.47)$$

$$K = \left(3 + \frac{4}{We}\right) \quad (3.48)$$

$$C = \frac{4}{Re} \quad (3.49)$$

Essas relações são coerentes fisicamente. C é a constante de amortecimento viscoso e quando Re tende para infinito C vai zero. A partir deste mesmo estudo, é possível determinar qual a frequência natural do sistema, uma vez que um sistema de segunda ordem linearizado é representado por:

$$H(s) = \frac{G_{dc}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.50)$$

Na qual, G_{dc} é o ganho *dc* referente ao sistema - ou seja um ganho que independe da frequência da excitação aplicada. Na transformada de Fourier ele representaria um pico na origem. Além disso, ω_n é a frequência natural do sistema e ξ é o fator de amortecimento. Seguindo os mesmos passos, é possível representar o sistema da seguinte maneira:

$$H(S) = \frac{ReWe}{s^2 ReWe + 4sWe + (4Re + 3ReWe)} \rightarrow \frac{1}{s^2 + \frac{4s}{Re} + \frac{(4Re+3ReWe)}{ReWe}} \quad (3.51)$$

Na solução de EDO lineares de sistemas amortecidos, a relação entre C e ξ é, no caso geral,

$$C = 2M\xi\omega_n \quad (3.52)$$

Sendo M o equivalente a massa em um oscilador harmônico. No problema da bolha, $M = 1$, logo a constante de amortecimento é dada por:

$$C = 2\xi\omega_n \quad (3.53)$$

Sendo assim, conclui-se que a frequência natural possui referência direta com o número de Weber. Uma vez que $C = \frac{4}{Re}$ e $\xi = \frac{C}{2\omega_n}$, pode-se concluir que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4}{We} + 3} \quad (3.54)$$

$$\xi = \frac{2}{\omega_n Re} \quad (3.55)$$

o fator de amortecimento, por outro lado, será referente aos números de Reynolds e Weber, como podemos observar pela equação 3.58. Da mesma forma, pode-se definir qual o ganho DC relacionado ao sistema da bolha linearizado:

$$G_{dc} = \frac{1}{(\omega_n)^2} \quad (3.56)$$

Uma condição de colapso é muito mais sensível ao número de Reynolds do que ao número de Weber, uma vez que esse rege as bifurcações e os efeitos não-lineares da bolha. Entretanto, Weber está associado as forças restauradoras e, nestas condições, um sistema linearizado está sendo observado. Isso significa que estamos próximos de pontos de equilíbrio e, para Reynolds pequenos, ele não iria impor seus efeitos sobre a dinâmica da bolha.

Na figura 3.4 é possível notar que quando $We = 2$, ou seja, quando a frequência natural do sistema atinge o mesmo valor da frequência de excitação, tem-se o maior valor de amplitude. Isso ocorre, pois para um fator de amortecimento pequeno, a frequência natural se aproxima à frequência de ressonância. Esta frequência de ressonância, em nosso caso, pode ser descrita como

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.57)$$

a qual, no caso da bolha, resume-se a

$$\omega_r = \sqrt{\frac{4}{We} + 3} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{Re^2(\frac{4}{We} + 3)}} \right) \quad (3.58)$$

- **Analogia com um sistema mecânico**

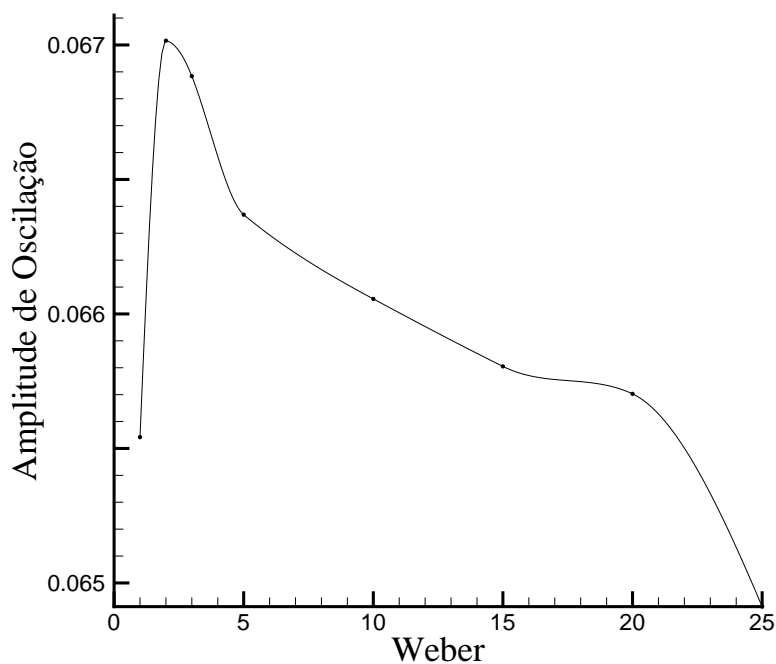


Figura 3.4: Gráfico demonstra a amplitude da oscilação em função do número de Weber para uma excitação de entrada com frequência $\omega = 2,236$. Esta é a frequência natural do sistema para $We = 2$. Neste caso, $Re = 1$ e $\varepsilon = 0,3$.

Aqui será verificada a analogia e equivalência entre o sistema bolha oscilante examinado como um sistema padrão do tipo oscilador harmônico (massa, mola, amortecedor), ilustrado na figura 3.4. O sistema é regido pelo balanço entre as forças de inércia, força elástica e força dissipativa de amortecimento (segundas leis de Newton) A equação diferencial de segunda ordem do sistema mecânica é dada por:

$$m \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + k(y - y_0) = u \quad (3.59)$$

Considerando $s_0 = 0$, tem-se:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \quad (3.60)$$

Aplicando Laplace e condições iniciais nulas, tem-se:

$$U(S) = ms^2 Y(S) + bsY(S) + kY(S). \quad (3.61)$$

Desta forma, a função de transferência se torna:

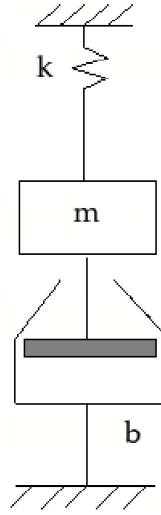


Figura 3.5: Diagrama de um oscilador harmônico: massa, mola e amortecedor.

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}, \quad (3.62)$$

e pode-se verificar de imediato a equivalência dos dois sistemas comparando-se a equação 3.51 com a 3.62 para o caso da dinâmica de bolhas (Rayleigh-Plesset)

3.2.1 Controlabilidade

Algumas análises serão efetuadas neste item. Todas elas são aplicadas para sistemas linearizados. Imaginemos um sistema prático de controle para o movimento oscilatório do sistema bolha. Neste, sensores e atuadores funcionarão de modo a controlar a vibração da bolha. No presente contexto, um controlador funciona atuando sobre um sistema e capturando as informações de saída do mesmo. Essa saída é comparada com o valor de referência esperado e, caso o erro permaneça, o atuador continua corrigindo a trajetória do sistema.

Para tanto, existem duas importantes análises a serem consideradas: a controlabilidade, que permite projetar a realimentação que promoverá esta informação de saída e a observabilidade, que permite a visualização de todas as variáveis de estado (Nise, 2009).

Baseando-se na necessidade em controlar um sistema ou transformá-lo em estável, algumas técnicas podem ser empregadas. Uma delas é a alocação de pólos, que só poderá ser realizada caso o sistema seja “controlável”.

Considerando a equação dinâmica de dimensão n e n entradas - a equação de saída não irá influenciar a controlabilidade:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.63)$$

A equação de estado acima ou o par (A,B) é *controlável* se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e para qualquer estado final x_1 existir uma entrada $u(t)$ que transfere o estado de x_0 para x_1

em tempo finito. Esta definição requer apenas que se possa mover o estado inicial para o estado final no espaço de estados em tempo finito, sem se preocupar quanto à trajetória nem quanto à magnitude da entrada.

Para que um sistema seja dito controlável, ele deve seguir o teorema descrito a seguir, no qual as afirmações são equivalentes:

O problema de visualizar a controlabilidade se torna mais complicado se o sistema possui pólos múltiplos. Para se determinar a controlabilidade ou, de modo alternativo, projetar a realimentação de estados para um processo representado por um escolha qualquer de variáveis de estado, é possível se basear na terceira definição. Por meio dela, monta-se a matriz de controlabilidade do sistema linearizado e monta-se seu posto. A partir disso, como o posto é diferente de zero, conclui-se que o sistema é controlável.

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-4}{Re} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-4}{Re} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.64)$$

Sendo A e B definidos nas equações 3.33 e 3.34 como as matrizes 2 e 4. Eles se relacionam, respectivamente, com as variáveis de estado do sistema dinâmico bolha oscilante e com as entradas relacionadas que, neste caso, resume-se a excitação imposta.

Sistemas não controláveis possuem certas características intrínsecas como, por exemplo, uma dependência sólida das condições iniciais e distúrbios de entrada. Esse resultado nos garante a possibilidade de representar o sistema na chamada forma canônica controlável, utilizada para o projeto de um controlador.

De forma simplificada, a controlabilidade ocorre quando todas as variáveis podem ser alteradas pelo controlador de modo que o sistema consiga seguir uma referência estabelecida previamente.

3.2.2 Observabilidade

Em alguns casos, como no controle de aviões, a controlabilidade é função de muitas variáveis de estado (Nise, 2009). Desta forma, para evitar que todas as variáveis tenham de ser medidas por sensores utiliza-se um observador - também chamado de estimador. O mesmo é usado para calcular as variáveis de estado que não estão disponíveis. Ou seja, se o observador conseguisse obter as variáveis de estado que não foram medidas da bolha, como a taxa de expansão e redução de seu raio, esse processo poderia ser controlado. Em outras palavras, a observabilidade implica a dedução das variáveis de estado a partir da entrada e da saída (resposta) do sistema.

Ao contrário da controlabilidade, a observabilidade depende diretamente das condições iniciais, uma vez que um sistema é dito observável se e somente se todas as condições iniciais puderem ser reconstruídas em um tempo finito somente das medições das entradas e saídas.

Uma vez que o projeto do controlador depende do acesso às variáveis de estado para efetuar a realimentação por meio de ganhos ajustáveis, ele pode ser realizado por meio de *hardware*. Quando essas variáveis de estado não estiverem todas disponíveis ou a medição de alguma delas for muito

cara, é de praxe a utilização de um observador - também chamado de estimador (Ogata, 2011).

Os pré-requisitos de observabilidade são semelhantes aos da controlabilidade. Um processo de ordem n cujas equações de estado e de saída são, respectivamente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Desta maneira, um sistema dinâmico é dito completamente observável se a matriz chamada de matriz de observabilidade, expressa na equação 3.57, possui determinante diferente de zero.

Desta maneira, considerando o sistema linearizado baseado na solução assintótica para pequenas perturbações, é possível determinar a matriz de observabilidade do sistema e, assim, considerá-lo completamente observável ou não.

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.68)$$

sendo C e A representados por 2 e 7 nas equações 3.33 e 3.34. A partir desta resposta, é possível escrever o sistema na chamada forma canônica observável, que permite o projeto de um observador. Este, por sua vez, tem a capacidade de ajustar o controlador, observando como o sinal reage em tempo real.

Capítulo 4

Solução Numérica

A solução numérica utilizada para o cálculo da equação diferencial não-linear de dinâmica de bolhas desenvolvida no capítulo anterior é modelada neste capítulo. A aplicação do Runge-Kutta de quarta ordem e, posteriormente, sua evolução para o Runge-Kutta de quinta ordem com passo de tempo adaptativo é reproduzida e validada.

4.1 Introdução

O comportamento não-linear da dinâmica da bolha não permite que as equações sejam resolvidas analiticamente e, visando a otimização da análise dessas equações diferenciais ordinárias não-lineares, foi utilizada a simulação computacional.

Essa, por sua vez, foi realizada por meio de um código em Fortran 90 com um arquivo mestre, que organiza a ordem de chamada das subrotinas, um arquivo principal que organiza o processo numérico de cálculo (neste caso, Runge-Kutta), um arquivo de entrada com definição de variáveis e uma utilidade *makefile* para a definição de regras de compilação dos arquivos. O texto contido em um arquivo *makefile* é usado para a compilação, ligação ou conexão, montagem de arquivos de projeto entre outras tarefas como limpeza de arquivos temporários, execução de comandos, etc. Todas as simulações foram efetuadas com o compilador GFortran, da GNU em computadores dois computadores: um com processador Intel i5, 4GB DDR3 de memória RAM e outro i7 com 8GB DDR3, ambas as memórias com 1600 MHz.

Para o pós-processamento, utiliza-se um algoritmo em *Matlab*, preparado para efetuar FFT, ou seja, *Fast Fourier Transform*, utilizada posteriormene neste trabalho. O mesmo *software* é utilizado para a criação e treinamento de redes neurais, discutidas em avanço.

A primeira validação do código em Fortran baseia-se na solução analítica desenvolvida por Rayleigh, 1927, considerando o tempo de colapso de uma bolha que se encontra imersa em um meio infinito de fluido. Admitindo-se este mesmo colapso da bolha e suas considerações matemáticas e pensando adiante nos métodos de parada implementados, um meio mais robusto é implementado com o passo de tempo adaptativo (Albernaz, 2007).

4.2 Runge-Kutta de Quarta Ordem

Existem vários métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais ordinárias. De fato, cada um tendo pontos positivos e negativos, dependendo da aplicação. Um desses métodos bem conhecidos e amplamente utilizados, dentro da classe de métodos de equações diferenciais, são os algoritmos de Runge-Kutta, que são apresentados em diferentes ordens de precisão. Este método corresponde ao algoritmo corretor-preditor avançado, que se utiliza de médias ponderadas de uma função f calculada nos extremos e em um ponto intermediário de um intervalo de tempo inicial e final, ou seja $[t_j, t_j + 1]$.

Para o método de quarta ordem, avalia-se cada passo de tempo em quatro sub-passos, realizando quatro integrações por passo de tempo. A expressão padrão que caracteriza-o é da forma (Press et al., 1992):

$$y_{n+1} = y_n \left(+ \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right), \quad (4.1)$$

na qual:

$$k_1 = \Delta t f(x_n, y_n) \quad (4.2)$$

$$k_2 = \Delta t f \left(x_n + \frac{\Delta t}{2} k_1, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1 \right) \quad (4.3)$$

$$k_3 = \Delta t f \left(x_n + \frac{\Delta t}{2} k_2, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_2 \right) \quad (4.4)$$

$$k_4 = \Delta t f(x_n + \Delta t k_3, y_n + \Delta t k_3) \quad (4.5)$$

Observa-se que este método irá separar a equação diferencial ordinária, independente de sua ordem, em equação de primeira ordem e, posteriormente, resolverá este sistema. Para um problema de valor inicial, utilizando n passos de tempo, faz-se necessário $4n$ avaliações, demandando certo esforço computacional.

Este valor de Δt deve ser observado de forma cuidadosa, dado que a função $R(t)$, que descreve a evolução temporal do raio da bolha pode variar significativamente dependendo dos valores de Re e We , além da perturbação aplicada. Pequenos valores de Δt poderiam diminuir o risco de um alto valor de $\dot{R}(t)$, eliminando assim a possibilidade do colapso numérico sem sentido físico ou erros na simulação; entretanto isso demandaria um maior custo computacional e desperdício de tempo, uma vez que todos os processos seriam igualmente analisados.

O erro numérico para o método de solução é da ordem $O(\Delta t^5)$. O intervalo de tempo deve ser calibrado em função da frequência de excitação da pressão aplicada. Um passo de tempo numérico proposto em função da frequência, assume a forma $\Delta t = O(\frac{1}{\omega})$. Da mesma maneira, é preciso

observar o tempo de realização do fluido. No caso de fluidos Newtonianos, a percepção deste tempo de realização não se torna tão abrangente, uma vez que o fluido não possui efeitos elásticos - como no caso de um fluido viscoelástico - estruturas de alinhamento e agregados - como no caso de um fluido magnético submetido a um campo externo.

Com base na análise da cavidade de Rayleigh, identificou-se um passo de tempo adequado para as simulações subsequentes dado por valores entre $\Delta t_{Ray} = 10^{-3}$ e $\Delta t_{Ray} = 5 \cdot 10^{-4}$. Um teste de convergência foi efetuado buscando entender o funcionamento do sistema a medida que o passo de tempo diminuía.

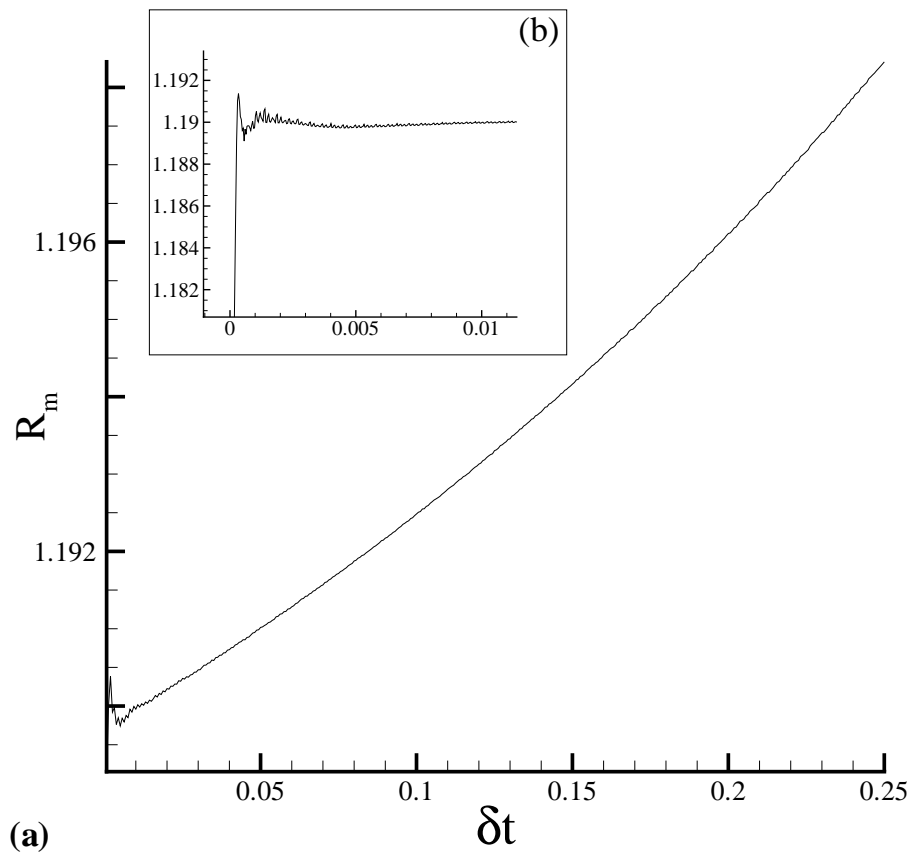


Figura 4.1: (a) Convergência da solução numérica, observando o raio médio em função do passo de tempo utilizado; (b) Encarte explicita um zoom da zona de início de instabilidade do raio médio, devido ao baixo passo de tempo utilizado

Percebe-se pela figura 4.1 que a medida que o passo de tempo aumenta o valor do raio médio para uma excitação senoidal para pequenas amplitudes aumenta de modo não convergente, em contrapartida para valores de $\Delta t < 0.01$ esta variável alcança um platô estável indicando que não existe a necessidade de utilização de passos de tempo muito menores que 10^{-3} , pois estaríamos tendo um aumento no custo computacional para uma mesma resolução numérica da equação governante. Essa convergência significa que o código tende para a faixa, na qual a equação diferencial é resolvida numericamente com boa precisão.

Da mesma forma, para valores muito pequenos (menor que 0,002), a convergência do sistema fica prejudicada por um movimento oscilatório, como pode-se observar no encarte da figura 4.1. Esse fenômeno é relacionado explicitamente ao próprio erro numérico, característico de todo código computacional que lida com a solução de equações não-lineares. A linguagem utilizada, Fortran, utiliza por padrão oito casas decimais. Um número muito pequeno para o passo de tempo pode gerar certos arredondamentos posteriores, que podem gerar uma instabilidade computacional, gerando oscilações numéricas.

É importante frisar que em um problema físico regido por equações diferenciais com termos de derivadas temporais, a solução numérica desta passa pela necessidade de um processo de discretização temporal. Conseqüentemente, a adoção de um passo de tempo numérico Δt é parte do processo de solução da equação de interesse. Os parâmetros físicos que regem o comportamento de um sistema dinâmico servem como uma boa estimativa da ordem de magnitude das escalas de tempo envolvidas no processo. Como estes parâmetros podem ser interpretados como razões de escalas de tempo típicas, frações destes podem servir como uma estimativa da ordem de grandeza dos passos de tempo numéricos apropriados para a solução de determinada equação diferencial.

No caso específico do problema da bolha oscilante (sem efeitos magnéticos), pode-se identificar três escalas de tempo típicas:

- Escala de Tempo Inercial

$$t_i \sim \frac{R_E}{U_c} \quad (4.6)$$

- Escala de Tempo da Relaxação da Tensão Superficial

$$t_s \sim \sqrt{\frac{\rho R_E^3}{\sigma_s}} \quad (4.7)$$

- Escala de Tempo da Excitação do Sistema

$$t_f \sim \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.8)$$

Adimensionalizando as três escalas apresentadas pela escala de tempo utilizada na adimensionalização da equação de Rayleigh-Plesset generalizada, $\frac{R_E}{U_c}$, temos

$$t_i^* = 1, \quad t_s^* = \sqrt{We}, \quad t_f^* = \frac{2\pi}{\omega^*}, \quad (4.9)$$

em que as variáveis detonadas com asteriscos representam as versões adimensionais destas previamente escritas sem asterisco. Desta forma, uma definição mais geral para o passo de tempo numérico adotado nas simulações é que este seja sempre muito menor que cada uma das três escalas de tempo apresentadas - em suas versões adimensionais. Uma proposta fisicamente coerente para este passo de tempo é dada por:

$$\Delta t = 0,01 \times \min \left(1; \frac{1}{\omega^*}; \sqrt{We} \right). \quad (4.10)$$

Note que a ordem de magnitude dos passos de tempo utilizados para garantir a convergência do processo, de acordo com a figura 4.1, respeita a condição definida na equação 4.10. Entretanto o presente trabalho utilizará um algoritmo sofisticado de resolução da equação modificada de Rayleigh-Plesset. Neste algoritmo, o passo de tempo é modificado ao longo do processo de solução de acordo com a ordem de magnitude das derivadas do raio da bolha oscilante com relação ao tempo. Esse método, conhecido como método de Runge-Kutta com passo de tempo adaptativo, será explorado com mais detalhes na seção 4.3.

4.2.1 Solução analítica para a cavidade de Rayleigh

Besant (1859) propôs uma massa infinita de fluido incompressível e homogêneo atuando sem forças e em repouso sobre uma porção esférica de fluido, que era subitamente preenchida. Ele determinou, para qualquer ponto de massa, a alteração instantânea de pressão utilizando-se da equação do movimento do fluido. Da mesma forma, determinou o tempo em que a cavidade foi preenchida.

Rayleigh, 1917, observou meticulosamente as condições de colapso de uma cavidade no vácuo, desenvolvendo um modelo teórico que é utilizado como calibração de parâmetros no presente trabalho. Rayleigh determinou τ_c como sendo o tempo de colapso total da cavidade, assumindo a forma abaixo, seguida por sua forma em termos adimensionais:

$$\tau_c = 0,915R_0\sqrt{\frac{\rho}{P_0}} \rightarrow \frac{\tau_c}{R_0\sqrt{\frac{\rho}{P_0}}} = 0,915 \quad (4.11)$$

No caso de uma cavidade temos que a equação de Rayleigh-Plesset adimensionalizada se torna:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -1 \quad (4.12)$$

A integração numérica da equação 4.12 leva ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} y = \dot{R} \\ \dot{y} = \frac{1}{R}[-1 - \frac{3}{2}y^2] \end{cases} \quad (4.13)$$

A solução numérica do movimento da bolha em condição de colapso é apresentado na figura 4.2. O erro na estimativa do tempo de colapso numérico relativo ao tempo de colapso previsto pela solução analítica é de, aproximadamente, 0,082%. Isto, de certa forma, é uma validação do cálculo numérico e mostra que nossa integração numérica, com a metodologia de passos de tempo numéricos estabelecidos no presente trabalho, captura o tempo de colapso da bolha com excelente precisão.

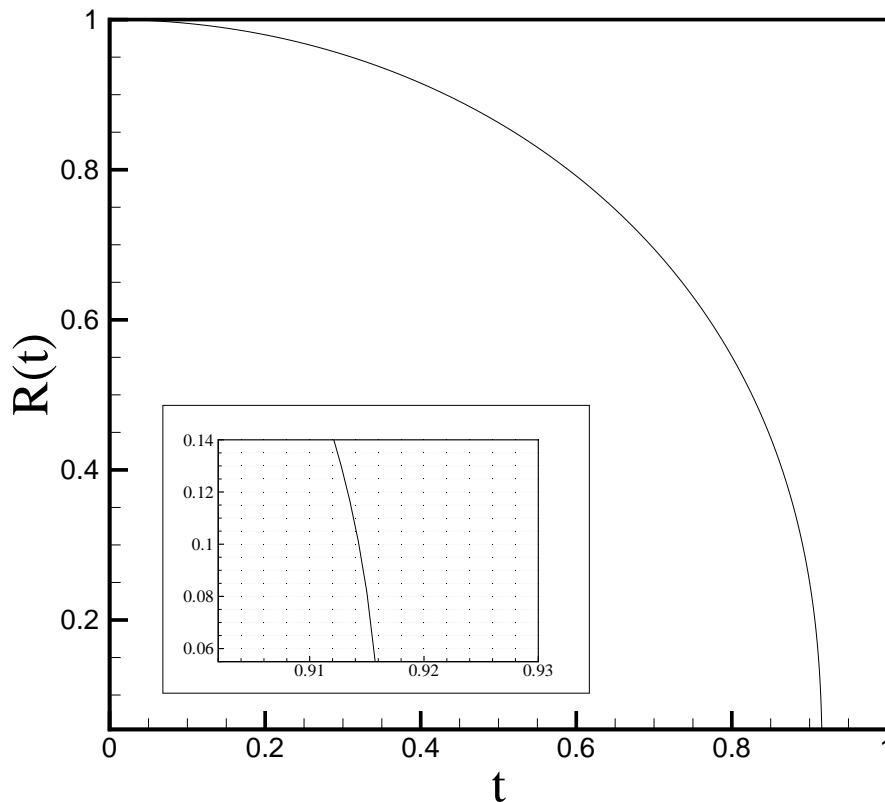


Figura 4.2: Apresentação do tempo de colapso proposto no problema da cavidade de Rayleigh, obtida por meio de simulação computacional. O encarte apresenta um detalhamento do movimento da bolha na iminência do colapso.

4.3 Passo de Tempo Adaptativo

Como dito anteriormente, visando obter a menor exigência computacional possível, os passos de tempo devem ser meticulosamente calibrados. Para regiões mais instáveis, nas quais existe uma mudança brusca no tamanho do raio ou na velocidade com que o mesmo se comprime ou expande, é preciso um passo de tempo menor. Da mesma forma, aplicando-se critérios de parada, o passo de tempo adaptativo torna a simulação mais real, aumentando a tolerância do sistema e com um menor custo computacional.

A estimativa do erro ao aplicar-se o método numérico de resolução de EDOs é primordial para a implementação do passo de tempo adaptativo, retornando a performance do programa. Aplicando o controle de passo de tempo adaptativo ao Runge-Kutta de quarta ordem, faz-se necessária a utilização de uma técnica que captura cada passo de tempo duas vezes - uma delas fornece o valor para a função y_1 utilizando o passo de tempo completo e a outra, de forma independente, com dois passos de tempo, resultando em y_2 . O erro associado entre essas duas medidas numéricas assume:

$$\Delta_{err} = y_2 - y_1 \quad (4.14)$$

O primeiro passo de tempo adaptativo e mais conhecido foi proposto por de Fehlberg (Press et al.,1992). Este método propõe a utilização de seis funções - Runge-Kutta de quinta ordem - em que a combinação destas também resulta no método de quarta ordem.

A forma mais geral do método é expressa por:

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (4.15)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{5}h, y_n + \frac{1}{5}k_1\right) \quad (4.16)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3}{10}h, y_n + \frac{30}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right) \quad (4.17)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{3}{5}h, y_n + \frac{3}{10}k_1 - \frac{9}{10}k_2 + \frac{6}{5}k_3\right) \quad (4.18)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n - \frac{11}{54}k_1 + \frac{5}{2}k_2 - \frac{70}{27}k_3 + \frac{35}{27}k_4\right) \quad (4.19)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{7}{8}h, y_n + \frac{1631}{55296}k_1 + \frac{175}{512}k_2 + \frac{575}{13824}k_3 + \frac{44275}{110592}k_4 + \frac{253}{4096}k_5\right) \quad (4.20)$$

A aproximação da solução $y(t)$ para o Runge-Kutta de quinta ordem é obtido pela equação:

$$y_{n+1}^* = y_n^* + \frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6 \quad (4.21)$$

Por outro lado, a aproximação da solução $y(x)$ para o Runge-Kutta de quarta ordem assume:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6 \quad (4.22)$$

A estimativa do erro é, então, dada por:

$$\Delta_{err} = y_{n+1}^* - y_{n+1} \quad (4.23)$$

Essas constantes foram determinadas por Cash & Karp, 1990. As mesmas fornecem erros ainda menores que os estimados por Fehlberg. Em adição, o método pode ser implementado a partir de um algoritmo que assume uma lógica semelhante ao esquema mostrado em detalhes na figura 4.3. Nesta é possível observar a densidade do método aplicado e implementado neste trabalho.

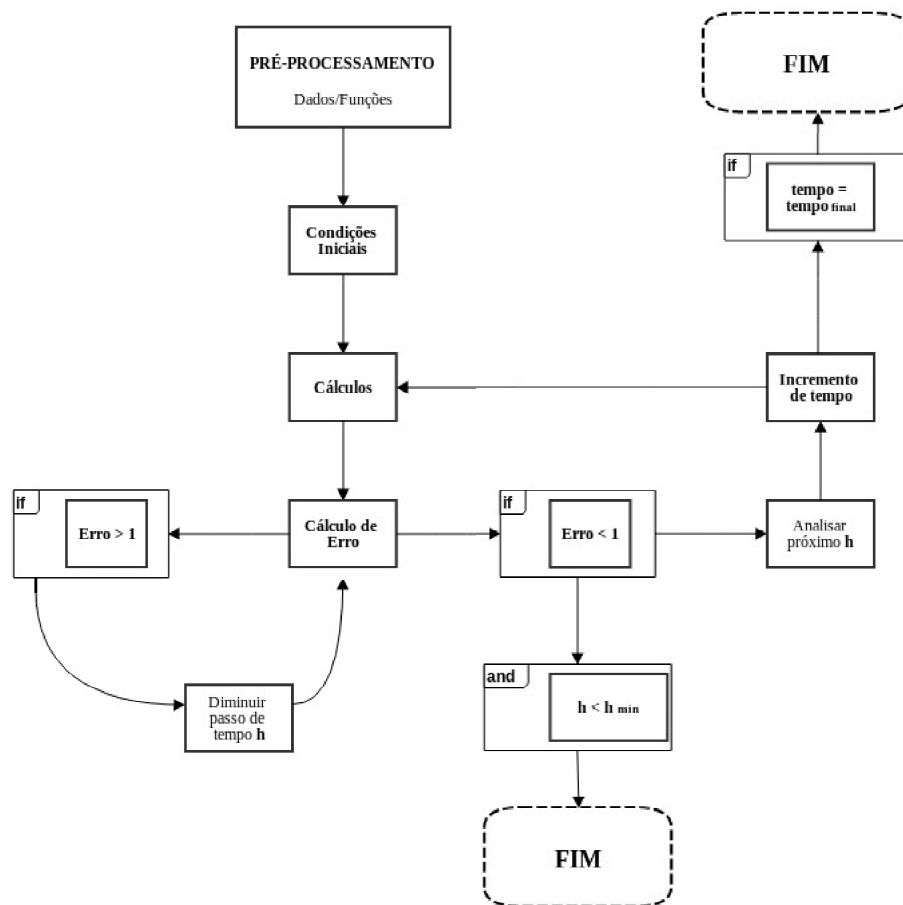


Figura 4.3: Fluxograma representativo do método de Fehlberg1 utilizado no presente trabalho para a implementação do passo de tempo adaptativo.

Este algoritmo pode ser descrito textualmente da seguinte maneira:

```

ALGORITMO NUMÉRICO
1 - Determinação de constantes, variáveis e funções
2 - Entrada de dados (parâmetros do problema, passo de tempo mínimo, intervalo de ←
   simulação ...
3 - Definição das condições iniciais e alocação de vetores

*****

do while (x_n < b)
  calcular k1, k2, k3, k4, k5, k6 e k7
  fornecer y_n, y*_n, derr
  estimar o erro: erro = derr/tolerancia

  if (erro > 1) then
    do while (erro > 1)
      htemp = Segurança*h
      calcular k1, k2, k3, k4, k5, k6, k7, y_n, y*_n e derr
      estimar o erro novamente
    end do
  end if

  if (h < h_min) exit

  if (erro > Parâmetro) then
    hnext = Seguança*htemp*Parâmetro2 (diminuir h para a próxima corrida)
  else
    hnext = Parâmetro3*htemp (aumentar h)
  end if

  hdid = h
  h = hnext

  fornecer y_(n+1), y*_(n+1), x_(n+1) e derr
  rodar novamente (enquanto a simulação não alcança o tempo final)

end do

```

Figura 4.4: Fluxograma da subrotina de implementação e resolução numérica da equação de Rayleigh-Plesset com Runge-Kutta com passo de tempo adaptativo.

Aqui, $x_n = x_n$, y_n e $y^*_n = y_n$ e y_n^* . Não obstante, $derr = \Delta_{err}$ e $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ são, respectivamente, $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$, $h_{min} = h_{min}$, $y_{(n+1)}$ e $y^*_{(n+1)}$ são $y_{(n+1)}$ e $y^*_{(n+1)}$.

O referido algoritmo deve ter seus parâmetros “Segurança”, “Parâmetro”, “Parâmetro2” e “Parâmetro3” calibrados de acordo com a função que se deseja implementar. No caso da aplicação do Runge-Kutta para a solução numérica da equação de Rayleigh-Plesset na condição da bolha oscilando imersa em um fluido Newtoniano, os valores calibrados foram 0.1, 0.01, 0.1 e 2, respectivamente.

Caso o erro calculado satisfaça as tolerâncias estabelecidas, a aproximação será aceita; caso contrário, o passo de tempo h é reduzido até que o erro diminua ao valor de tolerância. Depois

deste passo de tempo ser definido, o mesmo é avaliado para uma próxima iteração aumentando ou diminuindo o próximo passo de tempo $hnext$ caso o erro não seja satisfatório. O programa só não irá efetuar uma nova iteração caso o passo de tempo $hdid$ seja menor que um passo de tempo mínimo, pré-estabelecido.

É preciso observar que a utilização de uma tolerância pequena nem sempre leva aos melhores resultados, uma vez que o custo computacional é uma variável importante. Neste trabalho, caso as tolerâncias sejam muito baixas, o programa irá recalculer o erro, diminuindo o passo de tempo. Quanto menor o passo de tempo, mais caro computacionalmente essa rotina se torna. Por este motivo, a definição destes parâmetros de tolerância e segurança são um problema de otimização sem teoria bem definida. Na realidade, existe um *trade off*, de modo a se obter o melhor resultado.

O código numérico desenvolvido possui algumas versões, uma delas conta apenas com a formulação Newtoniana da equação de Rayleigh-Plesset com excitação senoidal, outra possui excitação em pulsos periódicos, não-periódicos e excitação não-linear. Posteriormente, tem-se o desenvolvimento de uma versão com a formulação magnética da equação de Rayleigh-Plesset e outra com a formulação magnética sem a componente azimutal. Apresenta-se abaixo, em 4.24, o algoritmo da versão com excitação senoidal, formulação magnética e componente azimutal.

1. Definir $Re, We, Re_{mag}, \chi, n$ (coeficiente politrópico) e ϵ ;
2. Condições iniciais e tempo de simulação $R(0)$ e $G(0)$;
3. Definição das variáveis lógicas $malha$ e $fase$;
4. Enquanto $(t(i-1) < b)$ faça ;
5. Computar $R_{min}(R(0), We)$;
6. Computar $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ e $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$;
7. Quarta ordem $\rightarrow g(i)$ e Quinta ordem $\rightarrow P(i)$;
8. Computar $erro = \left| \frac{g(i) - P(i)}{tolerancia} \right|$; (4.24)
9. Se $erro > 1$ then $\rightarrow dt = htemp * seg$
10. Computar novos $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ e $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$;
11. Se $erro > 1$ então $\rightarrow dt = htemp * seg$;
12. Se $erro > parametro$ então $\rightarrow hnext = seg * htemp * parametro2$;
13. Se $erro < parametro$ então $\rightarrow hnext = htemp * parametro3$;
16. Se $R(i) < R_{min}$ então \rightarrow COLAPSO
15. Se $hdid < dtm$ então \rightarrow END
16. Se $hdid > dtm$ então \rightarrow vá para o passo 3

Neste, $malha$ e $fase$ são variáveis lógicas que geram uma malha na bolha, para simulação em três dimensões de sua oscilação e o diagrama de fase, respectivamente. $t(i-1)$ representa o cálculo do tempo, baseando-se em b que é o tempo total de simulação, definido pelo usuário. R_{min} representa o raio mínimo obtido por meio da equação 5.17 no capítulo 5, seção 5.1.

Para o passo de tempo, tem-se $htemp$ que representa o passo de tempo dt temporário e $hnext$ é o próximo passo de tempo a ser utilizado na iteração seguinte após a multiplicação pelos parâmetros

de segurança (*seg*) e tolerância (*parametro2* e *parametro3*). Tem-se, por último, o *hdid*, o passo no fim da iteração, a ser comparado com o passo de tempo mínimo *dtm* definido no início do código pelo usuário.

Capítulo 5

Resultados - Bolha em Fluido Newtoniano

Este capítulo demonstra os resultados preliminares obtidos para uma bolha imersa em um fluido Newtoniano. Neste são apresentadas as respostas referentes às excitações senoidal, com pulsos periódicos, pulsos não-periódicos e excitação altamente não-linear. Posteriormente, uma análise de controle não-linear é efetuada, objetivando uma análise dos coeficientes de Lyapunov, construção do diagrama de bifurcação, análise dos padrões vibracionais e treinamento de uma rede neural para identificação dos mesmos.

5.1 Teoria Assintótica do Raio de Colapso

Apesar da definição do colapso de uma bolha estar fora da formulação dos meios contínuos, estando imersa no campo da termodinâmica do não-equilíbrio, podemos utilizar uma análise assintótica para a predição do raio mínimo de colapso desta. A mudança dos parâmetros físicos que regem a equação modificada de Rayleigh-Plesset podem levar a bolha ao colapso, fazendo com que qualquer estudo referente sem os critérios de parada adequados sejam invalidadas pela inconsistência física. Apesar de abrangente, é necessário também identificar que outros critérios de parada podem ser utilizados, como o aumento brusco da derivada referente a $R(t)$.

Albernaz e Cunha, (2011, 2013¹ e 2013²) referem-se à teoria assintótica para o raio de colapso considerando a condição mais adversa, na qual o escoamento pode ser encontrado: $Re \rightarrow \infty$. Considerando que a pressão ambiente seja constante $p_\infty(t) = \tilde{p}$, temos a equação modificada de Rayleigh-Plesset:

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} - \frac{2\tilde{\sigma}}{R\rho} \quad (5.1)$$

A equação 5.1 pode ser resolvida pelo método do fator integrante, que é dado por $2\dot{R}R^2$. O Fator Integrante é uma função tal que o produto da EDO por ela faz com que o lado esquerdo da equação possa ser visto como a derivada do produto de duas funções. Neste caso, consegue-se tornar a EDO separável e, conseqüentemente, integrável.

Multiplicando a equação 5.1 pelo fator integrante, tem-se:

$$2\dot{R}\dot{R}R^3 + 3\dot{R}^3R^2 = -2\dot{R}R^2\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}2\dot{R}R^2 \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) \left(\frac{R_E}{R} \right)^{3n} - \frac{4\dot{R}R\tilde{\sigma}}{R\rho} \quad (5.2)$$

Definindo uma constante, na qual o sistema está em equilíbrio, \tilde{H} , tem-se:

$$\tilde{H} = \left(\Delta\tilde{p} + \frac{2\tilde{\sigma}}{R_E} \right) R_E^3 \quad (5.3)$$

É possível escrever a equação 5.2 em função de suas respectivas derivadas e, posteriormnte, integrá-la em função das condições iniciais: $\dot{R}(0) = 0$ e $R(0) = R_0$

$$\frac{d}{dt}(R^3\dot{R}^2) = \frac{-2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) \frac{d}{dt}(R^3) + \frac{2}{\rho}\tilde{H} \frac{d}{dt}(\ln R) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{d}{dt}(R^2) \quad (5.4)$$

Integrando-a:

$$R^3\dot{R}^2 = \frac{-2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) (R^3 - R_0^3) + \frac{2}{\rho}\tilde{H} \frac{d}{dt} \left(\frac{\ln R}{R_0} \right) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho}(R^2 - R_0^2) \quad (5.5)$$

É possível manipular a equação e colocar certos termos em evidência, de modo a reescrevê-la como:

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0^3}{R^3} \right) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) \left(1 - \frac{R^3}{R_0^3} \right) + \frac{2}{\rho}\tilde{H} \frac{1}{R_0^3} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{1}{R_0} \left(\frac{R^2}{R_0^2} - 1 \right) \right] \quad (5.6)$$

Na iminência do colapso, em que $R \ll 1$, podemos reescrever a equação 5.6 nesse limite assintótico como sendo:

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R_0^3}{R^3} \right) \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) + \frac{2}{\rho}\tilde{H} \frac{1}{R_0^3} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{1}{R_0} \right] \quad (5.7)$$

Uma vez que a bolha não é uma cavidade, ou seja, está preenchida por um gás, possuindo um número de moles finito, não podemos considerar a condição $\dot{R} \rightarrow \infty$, ou seja, o raio mínimo nunca será nulo. Em nosso caso, $\dot{R} = 0$ e na condição de colapso, o raio da bolha atinge o raio mínimo. Reduz-se a equação para:

$$0 = \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta\tilde{p}}{\rho} \right) + \frac{2}{\rho} \frac{\tilde{H}}{R_0^3} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) - \frac{2\tilde{\sigma}}{\rho} \frac{1}{R_0} \quad (5.8)$$

Isolando R_{min} e aplicando a exponencial em ambos os lados, obtém-se:

$$\ln \left(\frac{R_{min}}{R_0} \right) = -\frac{R_0^3}{3\tilde{H}} \left(\Delta\tilde{p} + \frac{3\tilde{\sigma}}{R_0} \right) \quad (5.9)$$

$$R_{min} = R_0 e^{\frac{-R_0^3}{3\tilde{H}} \Delta\tilde{p} + \left(\frac{3\tilde{\sigma}}{R_0} \right)} \quad (5.10)$$

Como estamos trabalhando com a equação de Rayleigh-Plesset, é preciso que o critério de parada também seja adimensionalizado. Desta forma, tem-se os raios mínimo e inicial adimensionalizados, respectivamente:

$$R_{min}^* = R_{min} R_E \quad (5.11)$$

$$R_0^* = R_0 R_E \quad (5.12)$$

Substituindo:

$$R_{min}^* = R_0^* e^{\frac{(-R_0^*)^3 R_E^3}{3\tilde{H}} \left(\delta\tilde{p} + \frac{3\tilde{\sigma}}{R_0^* R_E} \right)} = R_0^* e^X \quad (5.13)$$

Explorando a adimensionalização do termo definido por X, obtém-se:

$$X = -\frac{(R_0^* R_E)^3 \Delta\tilde{p}}{3\Delta\tilde{p} R_E^2 \left[\frac{2\tilde{\sigma}}{R_E \delta\tilde{p}} + 1 \right]} \left[1 + \frac{3\tilde{\sigma}}{R_0^* R_E \Delta\tilde{p}} \right] \quad (5.14)$$

A partir do número de Weber, a equação acima pode ser reescrita como

$$X = -\frac{(R_0^*)^3}{3 \left[\frac{2}{We} + 1 \right]} \left[1 + \frac{3}{R_0^* We} \right], \quad (5.15)$$

simplificando

$$X = -(R_0^*)^2 \frac{\left(1 + \frac{R_0^* We}{3} \right)}{We + 2}. \quad (5.16)$$

Desta forma, o raio mínimo encontrado pela solução assintótica, adimensionalizado, é dado por:

$$R_{min}^* = (R_0^*) e^{-\left(R_0^* \right)^2 \left[\frac{(1 + R_0^* We/3)}{We + 2} \right]} \quad (5.17)$$

5.2 Excitação Senoidal

No presente trabalho, as mudanças de temperatura foram desconsideradas, admitindo um processo isotérmico e considerando o $n = 1$. Para todas as simulações numéricas, a frequência utilizada, ω , foi unitária, buscando analisar o padrão puramente viscoso do fluido Newtoniano em que a bolha se encontra imersa.

Normalmente, a análise da não-linearidade da equação pode ser efetuada pelos diferentes picos encontrados na transformada de Fourier e pelo espaço de fase. Sistemas estáveis e periódicos sem deformações apresentam os chamados ciclos limite no diagrama de fase, ou seja, círculos descritivos que relacionam a velocidade do sistema e sua posição. A figura 5.1 mostra essa representação com dois ciclos limite. A variação de energia é definida como ΔE .

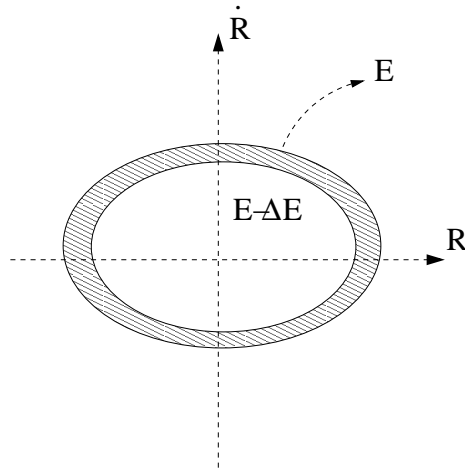


Figura 5.1: Demonstração no espaço de fase de um oscilador com diferentes níveis de energia

Todos os estados de um sistema podem ser representados pelo espaço de fase, no qual cada estado possível do sistema corresponde a um ponto. Esse conceito, desenvolvido no fim do século 19 por Boltzmann, Poincaré e Gibbs, consegue demonstrar a estabilidade e a instabilidade do sistema, além de seus modos vibracionais. Isso é possível devido a quantificação da energia contida no sistema, fator importante para a determinação de estabilidade; a energia de um sistema instável tende a aumentar.

Por “estado” não entende-se apenas as posições de todos os objetos do sistema, mas também suas velocidades. Para descrever um comportamento futuro de um sistema, as duas informações são necessárias: velocidade e posição (Townsend et al, 1995).

Um oscilador harmônico e periódico, por exemplo, deve ser representado no espaço de fase como uma circunferência, descrevendo seu estado energético. Em um sistema, no qual a energia está contida em um intervalo $[E - \Delta E, E]$, o número de microestados com energias neste intervalo é denotado por $\Omega_{\Delta}(E)$ e é chamado número de estados acessíveis. Os estados de equilíbrio, por sua vez, são definidos como estados isolados, no qual o sistema não troca energia com o meio além de pequenas perturbações causadas pelo chamado *butterfly effect*. Outra definição de equilíbrio

postula sobre a probabilidade de encontrar um sistema em determinado microestado ser invariante na evolução dinâmica do mesmo.

O efeito borboleta - *butterfly effect* - é uma expressão utilizada na teoria do caos para descrever a sensibilidade de um sistema às condições iniciais. Essa dependência também pode ser observada em sistemas estáticos: por exemplo, uma bola colocada no pico de uma colina pode rolar em várias direções em função de sua localização inicial. A divergência exponencial observada - em função das condições iniciais - em duas trajetórias distintas evoluindo de equações idênticas é uma das principais características de um sistema caótico e é conhecido como efeito borboleta (Karkuszewski, 2001).

Estes conceitos foram formulados por Lorenz (1963), que estava estudando modelos teóricos de predição das condições meteorológicas atmosféricas. Ele resolveu replicar uma sequência de valores que já havia utilizado para uma nova simulação numérica e encontrou valores muito diferentes dos obtidos no primeiro experimento. Os valores haviam sido suavemente alterados e ele esperava que essa diferença não fosse modificar o resultado em estado estacionário.

O conceito de espaço de fase será largamente utilizado neste trabalho para avaliar a não linearidade e a instabilidade do movimento oscilatório da bolha a partir da solução numérica da equação modificada de Rayleigh-Plesset. Esta ferramenta matemática será de grande importância no estudo da influência dos principais parâmetros físicos do problema no que diz respeito a como estes influenciam a estabilidade do sistema dinâmico estudo no presente contexto.

5.3 Sensibilidade às Condições Iniciais

Como toda equação diferencial ordinária não linear, a equação de Rayleigh-Plesset e suas variações possui certa sensibilidade às condições iniciais escolhidas. A variação da velocidade inicial afeta a não-linearidade do sistema de forma concisa. Trajetórias de sistemas não lineares ou caóticos são fortemente dependentes das condições iniciais. Em outras palavras, uma variação infinitesimal numa condição inicial do sistema pode causar um estado final do sistema ou uma mudança não infinitesimal de sua trajetória. Uma modelagem matemática baseada na teoria de sistemas dinâmicos poderia descrever como o sistema se comporta em relação as condições iniciais. A presente seção será dividida em duas partes: (i) uma primeira retrata a sensibilidade do sistema às condições iniciais com o critério de colapso desligado no código; (ii) a segunda se baseia em consistências físicas e permite que se observe como um sistema, considerando-se a teoria assintótica para o raio de colapso, reage a diferentes condições iniciais. Desta forma, divide-se essa seção em duas partes: uma primeira retrata a teoria matemática de sistemas dinâmicos e a análise de como o processo diverge, encaminhando-se ao caos; a segunda, baseia-se em conceitos físicos, e considera a teoria do raio de colapso, já descrito na seção, permitindo um maior controle oscilatório da bolha.

Em suma, inicialmente o critério de parada do programa, baseado na teoria do raio mínimo de colapso será desligado a fim de que se possa investigar como as condições iniciais do problema influenciam o comportamento da função R (raio da bolha) no tempo, do ponto de vista pura-

mente matemático. Em seguida, este critério será ligado e a mesma investigação será realizada, porém como agora o critério de colapso estará ligado a análise será mais física e não puramente matemática.

5.3.1 Primeira Parte - Modelagem Matemática em Sistemas Dinâmicos

Sem admitir o critério de colapso para a bolha, pode-se analisar como o sistema se comporta em uma tendência caótica. Ao retirarmos a excitação, é possível perceber como a bolha funciona como um oscilador amortecido, com suas constantes de tempo variando em função dos parâmetros introduzidos e, novamente, das condições iniciais.

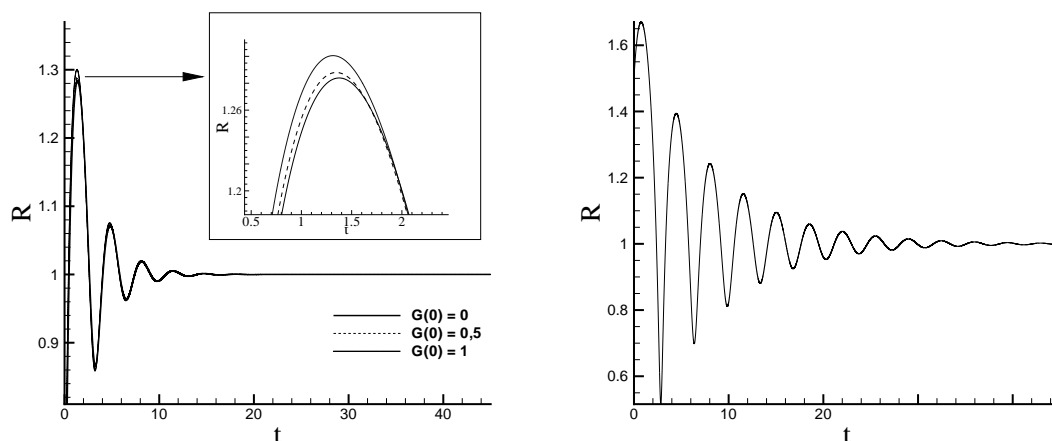


Figura 5.2: Comparação da sensibilidade da bolha sem excitação externa: na primeira imagem identifica-se a oscilação quando $R(0) = 0,5$ e varia-se $G(0)$ com $Re = 5$ e $We = 5$. Na segunda, observa-se $R(0) = 1,5$ e $G(0) = 0,5$ com $Re = 15$ e $We = 15$.

Observa-se pela resposta obtida sem excitação, apresentada na figura 5.2, que o comportamento do sistema dinâmico em questão é fortemente influenciado pelas condições iniciais, uma característica importante dos sistemas não-lineares. Uma pequena alteração na condição inicial da velocidade da bolha, na condição de ausência de uma excitação externa, gera grandes alterações no comportamento da variação do raio com relação ao tempo. O tempo de relaxação - também chamado de tempo de relaxação na teoria de controle - das oscilações iniciais passa da ordem de 15 para mais de 40 conforme o raio inicial varia de 0,5 a 1,5. Nota-se também, a partir do encarte na primeira imagem, que a velocidade da oscilação não é um fator tão relevante quando o raio inicial é baixo.

O aumento do número de Weber também descreve um movimento com menor amplitude no segundo gráfico: percebe-se que o valor máximo do raio é menor do que o valor obtido quando $We = 5$. A variação das condições iniciais com os mesmos números de Reynolds e Weber também geram uma grande diferença entre as respostas, como se pode perceber das figuras 5.3 e 5.4.

Nas figuras 5.3 e 5.4, é possível notar a tendência a um comportamento caótico. Nesse sentido, é

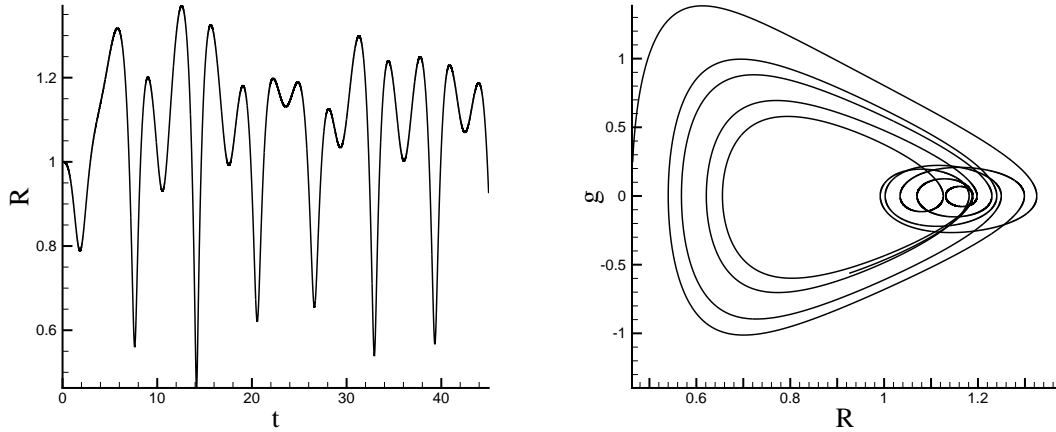


Figura 5.3: Comparação da sensibilidade da bolha com excitação externa $Re = 50$, $We = 50$, $\varepsilon = 0,5$ e $R(0) = 1$, $G(0) = 0$. Tem-se a comparação do espaço de fase que leva a um sistema caótico.

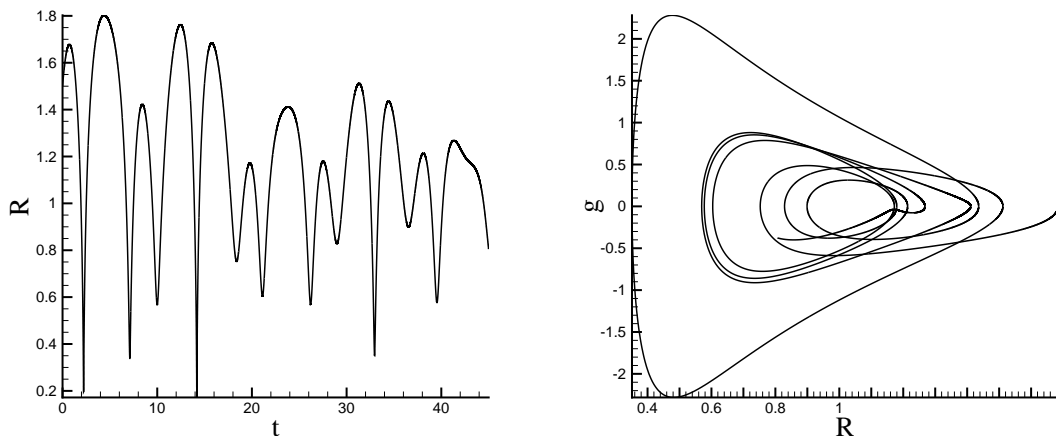


Figura 5.4: Comparação da sensibilidade da bolha com excitação externa $Re = 50$, $We = 50$, $\varepsilon = 0,5$ e $R(0) = 1,5$, $G(0) = 0,5$. Tem-se a comparação do espaço de fase que leva a um sistema caótico.

comum observar algumas características próprias de sistemas caóticos como a chamada *topological transitivity* (Birkhoff, 1929), na qual o sistema evolui no tempo de maneira que uma órbita não fechada no espaço de fase poderá sobrepor outra órbita.

Sistemas periódicos e harmônicos apresentam, normalmente, ciclos limites (Amaral, 2006). Estes são definidos como uma órbita associada a uma trajetória fechada e isolada, ou seja, não existem trajetórias fechadas infinitesimalmente próximas. No comportamento observado em 5.3, é possível notar a existência de superfícies toroidais. Estas se diferenciam dos ciclos limites, pois apresentam mais de uma frequência fundamental de oscilação, gerando leves deformações no comportamento

circular do ciclo limite. Por outro lado, na figura 5.4 o comportamento observado se assemelha ao de um atrator estranho, no qual não se pode prever o comportamento no domínio do tempo. Sua caracterização no espaço de fase é contínua, ou seja, não possui uma órbita dominante. Além disso, a sensibilidade às condições iniciais promove diferenças visíveis nos diagramas impostos pelas figuras 5.3 e 5.4, apesar da semelhança dos sistemas orginais, referentes à dinâmica da bolha oscilante.

5.3.2 Segunda Parte - Modelagem Física

Nesta etapa do problema, retoma-se a teoria de colapso da bolha, tornando o sistema ainda mais sensível às condições iniciais. Uma alteração simples no tamanho do raio inicial pode levar a mesma ao colapso, como mostrado na figura 5.5. Uma vez que a teoria assintótica para o raio de colapso utilizada depende exponencialmente do raio inicial, qualquer alteração pode implicar no colapso da bolha, antecipando seu possível comportamento caótico.

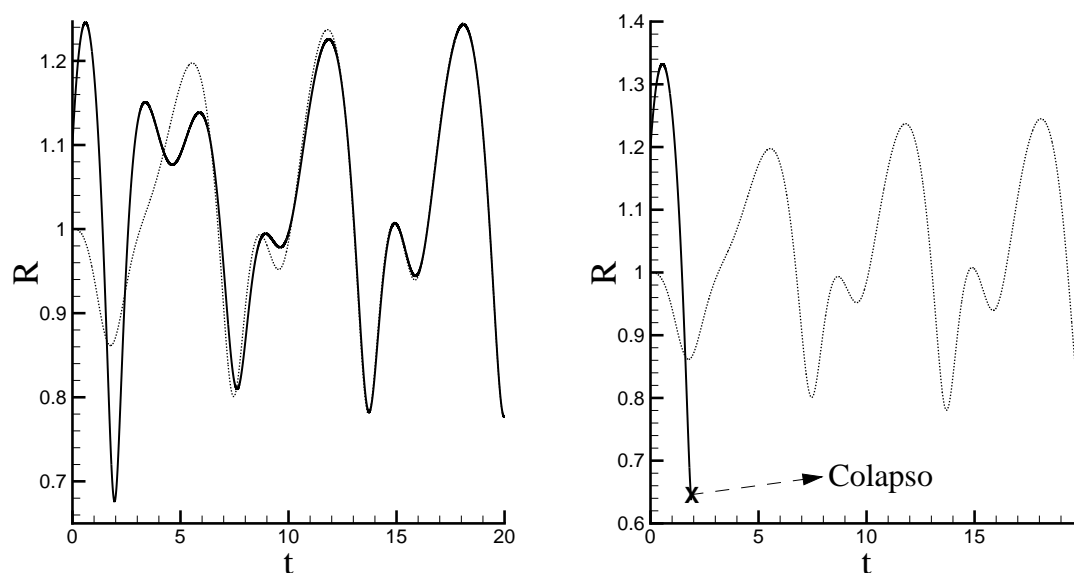


Figura 5.5: Comparação da sensibilidade da bolha à variação do raio inicial: na primeira imagem é possível comparar a diferença entre $R(0) = 1,1$ e $G(0) = 0,5$ e, em linha pontilhada, $R(0) = 1$ e $G(0) = 0$. Na segunda, observa-se $R(0) = 1,2$ e $G(0) = 0,5$ e, novamente, em linha pontilhada, $R(0) = 1$ e $G(0) = 0$. Simulação efetuada com $Re = 8$, $We = 3$

É possível perceber, pela figura 5.6, que uma alteração nas condições iniciais também modifica o tempo de relaxação do sistema. Todo sistema oscilatório possui alguns parâmetros bem definidos que determinam como pode ser efetuado um controle sobre o processo. Alguns destes parâmetros são: *overshoot*, tempo de relaxação, tempo de subida e tempo de pico.

O tempo de relaxação ou constante de tempo é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores dentro de uma faixa em torno do valor final. Neste caso, considerou-se que seria o

tempo necessário para o fim do transiente do processo. É comum utilizar-se a nomenclatura tempo de relaxação nesta situação.

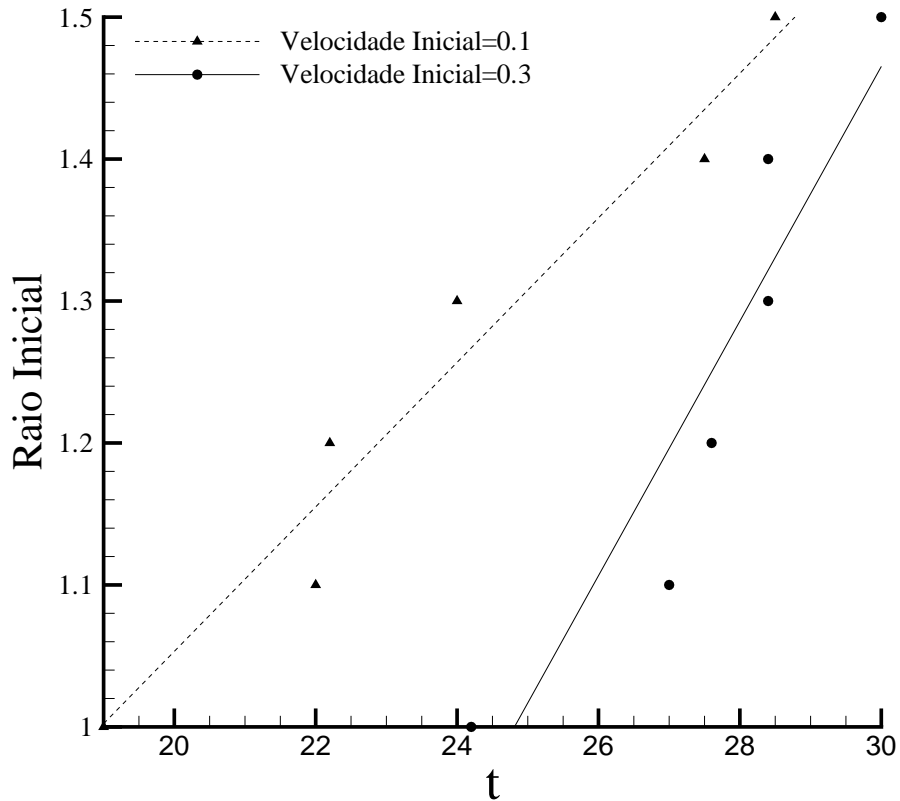


Figura 5.6: Comparação do tempo de relaxação da bolha, ou seja, tempo para o fim do transiente para diferentes condições iniciais de velocidade. Existe uma translação no tempo quando se relaciona as duas velocidades. Desta forma, pode-se estimar $t_0 = 25$ em termos adimensionais.

É possível observar que quanto maiores forem os valores referentes ao raio inicial, mais tempo a bolha permanece em seu estado transitório. De forma concisa, isso se deve a constante de tempo do sistema, que se torna muito grande quando os parâmetros envolvem muitas perturbações e fogem da condição de equilíbrio comum. Os processos se tornam anisotrópicos a medida que mais energia é acrescida ao sistema, fugindo de sua zona energética de estabilidade.

Da mesma forma, é possível também determinar qual o tempo de colapso com referência a amplitude da excitação, como mostrado na figura 5.7. A medida que a amplitude de excitação aumenta, o tempo de colapso diminui de forma não-linear, o que é de se esperar uma vez que tanto a teoria para o raio de colapso quanto a equação diferencial de Rayleigh-Plesset possuem um acentuado caracter de não-linearidade. Observa-se pela figura 5.7 um decaimento algébrico regido por uma lei de potência do tempo de colapso em função da amplitude de excitação. Em amplitudes da ordem da unidade, os tempos de colapso são cerca de 25% menores do que para $\varepsilon = 0,2$.

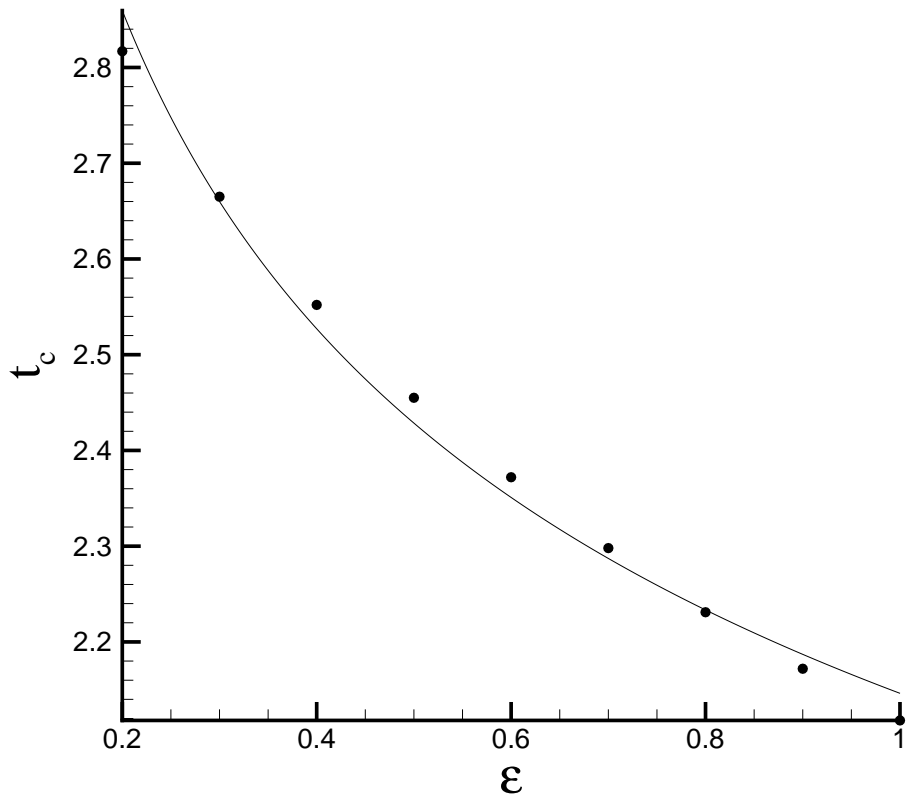


Figura 5.7: Comparação do tempo de colapso em função da amplitude da excitação senoidal aproximada por uma lei de potência descrita como: $t_c = 2,15\varepsilon^{-0,18}$

Essa sensibilidade às condições iniciais permite que um estudo sobre as condições de colapso da bolha seja feito. Tal estudo deve levar em conta os dois parâmetros adimensionais: número de Reynolds e número de Weber. A figura 5.8 apresenta um diagrama de colapso baseado nestes parâmetros. As curvas apresentadas delimitam a região de colapso (acima das curvas) e de não colapso (abaixo das curvas) para ε diferentes. Os casos analisados representam duas situações de $\varepsilon = 0,5$ e $\varepsilon = 1$ para $R_0 = 1$. Em outras palavras, cada ponto na curva representa a iminência do colapso.

Observa-se que o número de Reynolds é o parâmetro mais determinante no colapso da bolha e que o aumento de ε gera uma translação na curva, mas mantém seu comportamento. Conclui-se que o tempo de colapso da bolha é menor, principalmente para valores de Reynolds e ε mais altos. Tal análise leva a crer que uma força de inércia maior que a força da tensão superficial resulta em uma instabilidade do movimento oscilatório da bolha. Enquanto as forças de inércia tendem a incrementar a amplitude de oscilação do movimento da bolha por efeitos não-lineares (bifurcações nos modos de oscilação, aumento do número de harmônicos ou períodos de oscilação), a tensão superficial tem um efeito restaurador ou estabilizador, tentando trazer a bolha para regimes mais harmônicos ou lineares. Estas duas forças em competição definem todo o cenário de instabilidade

do movimento da bolha.

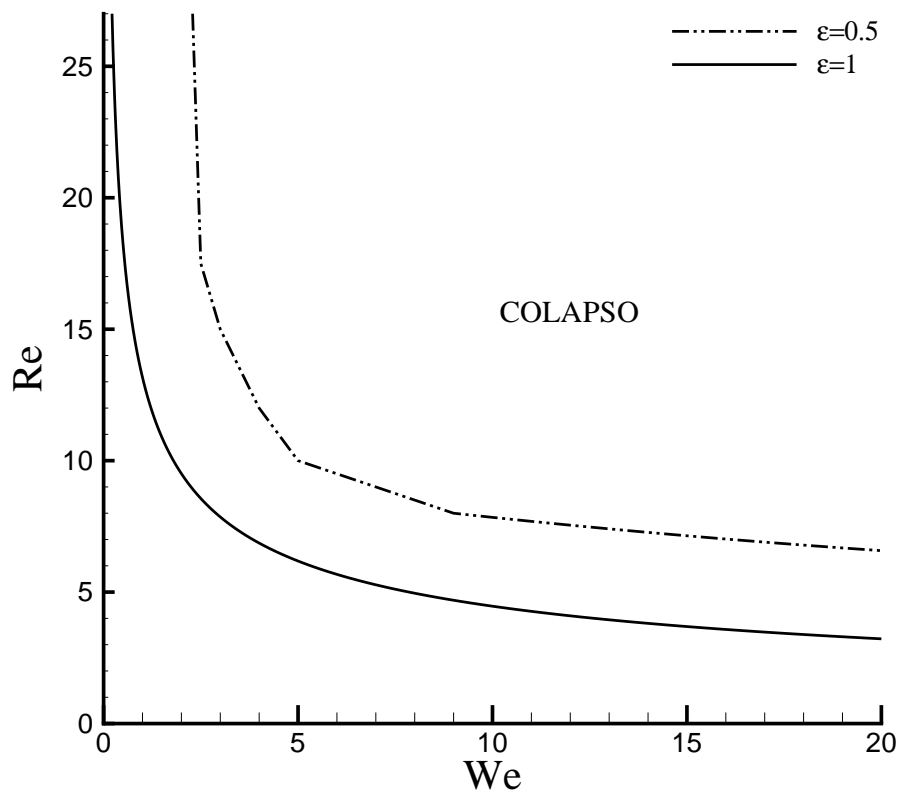


Figura 5.8: Diagrama de colapso em função dos números de Reynolds e Weber

5.4 Excitação em Pulsos não Periódicos

Contextualizando o presente problema fisicamente, é possível descrever uma situação, na qual várias bolhas estejam interagindo. O colapso de uma irá causar certa excitação nas demais, fazendo com que, em um processo de cavitação, esses colapsos repentinos se tornem semelhantes a uma excitação por meio de pulsos não-periódicos.

Baseando-se neste estudo, é possível descrever como uma bolha se comportaria nesta situação. Nesta seção e na seção 5.5, serão utilizados os chamados trem de pulsos, definidos como deltas de dirac com amplitude variável. Nesta seção, os passos de tempo e amplitude são randômicos. Na seção 5.5, a amplitude e a distância entre os pulsos é constante e definida como $f(t) = \varepsilon\delta(t - t_0)$.

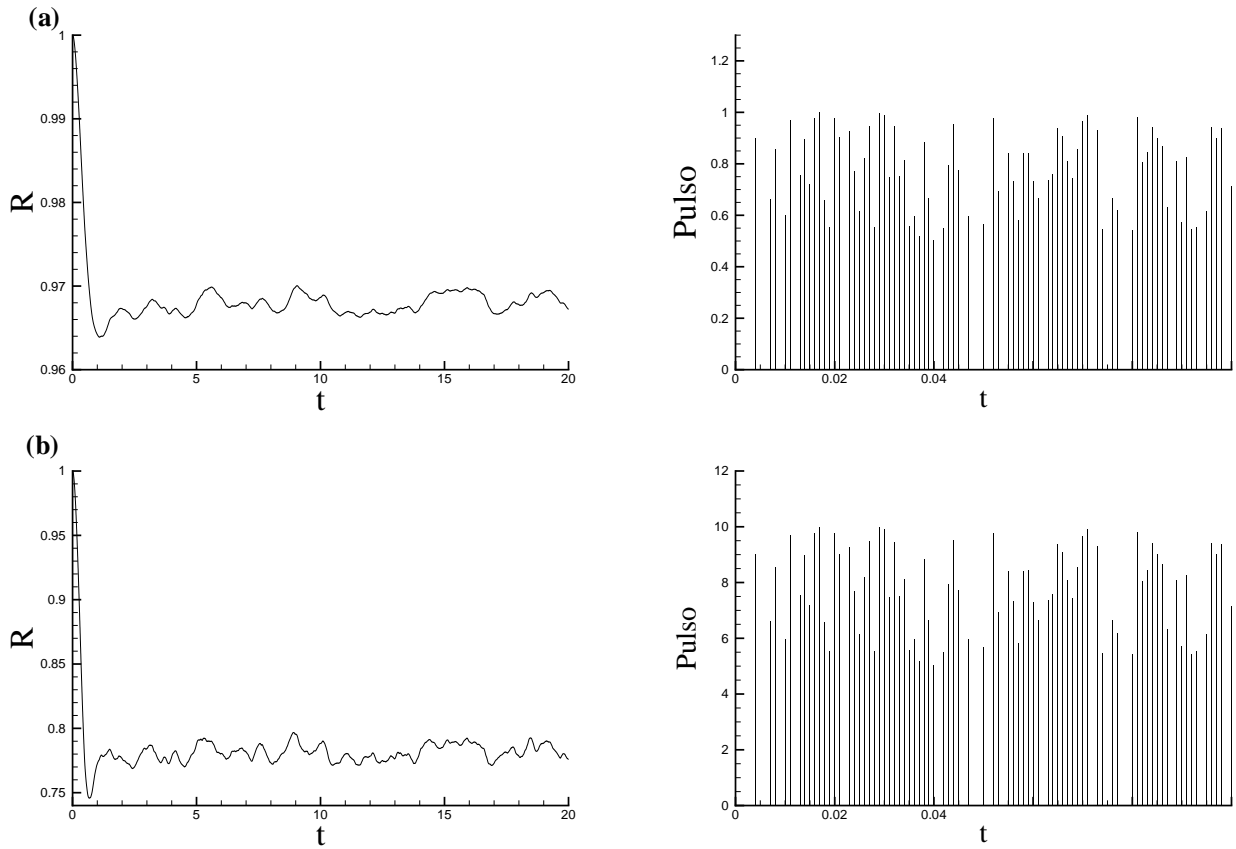


Figura 5.9: Comparação da sensibilidade da bolha em resposta a excitações (pulsos não-periódicos) de amplitude (a) 1 e (b) 10. Para $Re = 10$ e $We = 6$.

É possível perceber que o aumento da intensidade de colapsos próximos a bolha faz com que ela sofra uma maior pressão, contraindo-se. Seu raio atinge um limite menor, tendendo mais rapidamente ao colapso, como mostrado na figura 5.9 (a) e (b). É possível perceber também que mesmo que os pulsos ocorram no mesmo período de tempo, a amplitude dos mesmos é um fator primordial para o comportamento subsequente da bolha.

Outra medida de sensibilidade da bolha se relaciona diretamente aos seus parâmetros de con-

trole adimensionais. Os números de Reynolds e Weber modificam notoriamente seu comportamento, como representado pela figura 5.10.

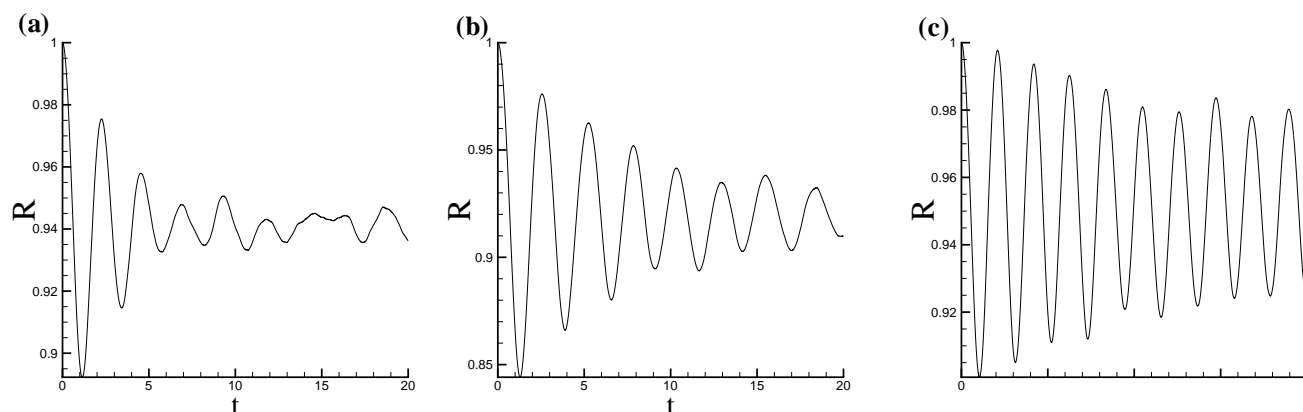


Figura 5.10: (a) Variação do raio da bolha com relação ao tempo para uma excitação não periódica, na qual os parâmetros físicos valem (a) $Re = 10$ e $We = 3$; (b) $Re = 20$ e $We = 9$; (c) $Re = 70$ e $We = 2$

É possível notar que com ambos os parâmetros muito baixos, o sistema tende a perder sua característica oscilatória. Por outro lado, ao aumentar os parâmetros, o sistema tende a se comportar como um oscilador subamortecido com oscilações frequentes, porém decrito em função de uma exponencial dominante. Ao elevar apenas o parâmetro viscoso, o sistema volta a se comportar como um oscilador, diminuindo seu caráter de amortecimento descrito anteriormente como um sistema subamortecido.

5.5 Excitação em Pulsos Periódicos

As simulações subsequentes relatam o que ocorreria em um sistema biomédico, por exemplo. Nessa situação, um conjunto de bolhas menores estaria imerso no mesmo fluido que uma bolha maior. Nesta situação, essa bolha maior pode ter o objetivo de influenciar um conjunto de células cancerosas. Uma onda de choque, como o ultra-som, por exemplo, poderia ser aplicada para incitar o colapso das bolhas menores.

Uma comparação com diferentes amplitudes foi efetuada. Baseando-se nisso, é possível observar na figura 5.11 que uma excitação maior gera uma maior oscilação no raio da bolha.

É possível observar por esta resposta que quando a bolha é excitada com pulsos periódicos, a diferença entre o raio mínimo atingido e o raio inicial é menor do que no caso em que ela é excitada com pulsos não-periódicos. Isso ocorre, pois uma sequência de pulsos pode ser vista como o chamado trem de pulsos, ou seja, uma sequência de ondas quadradas com pulsos muito pequenos. Este, por sua vez, possui uma baixa densidade de energia. Os pulsos não periódicos, por apresentarem uma resposta não-linear acabam apresentando um espalhamento espectral. Desta forma, a energia do sistema é dividida em diferentes harmônicos, diminuindo a amplitude (e consequen-

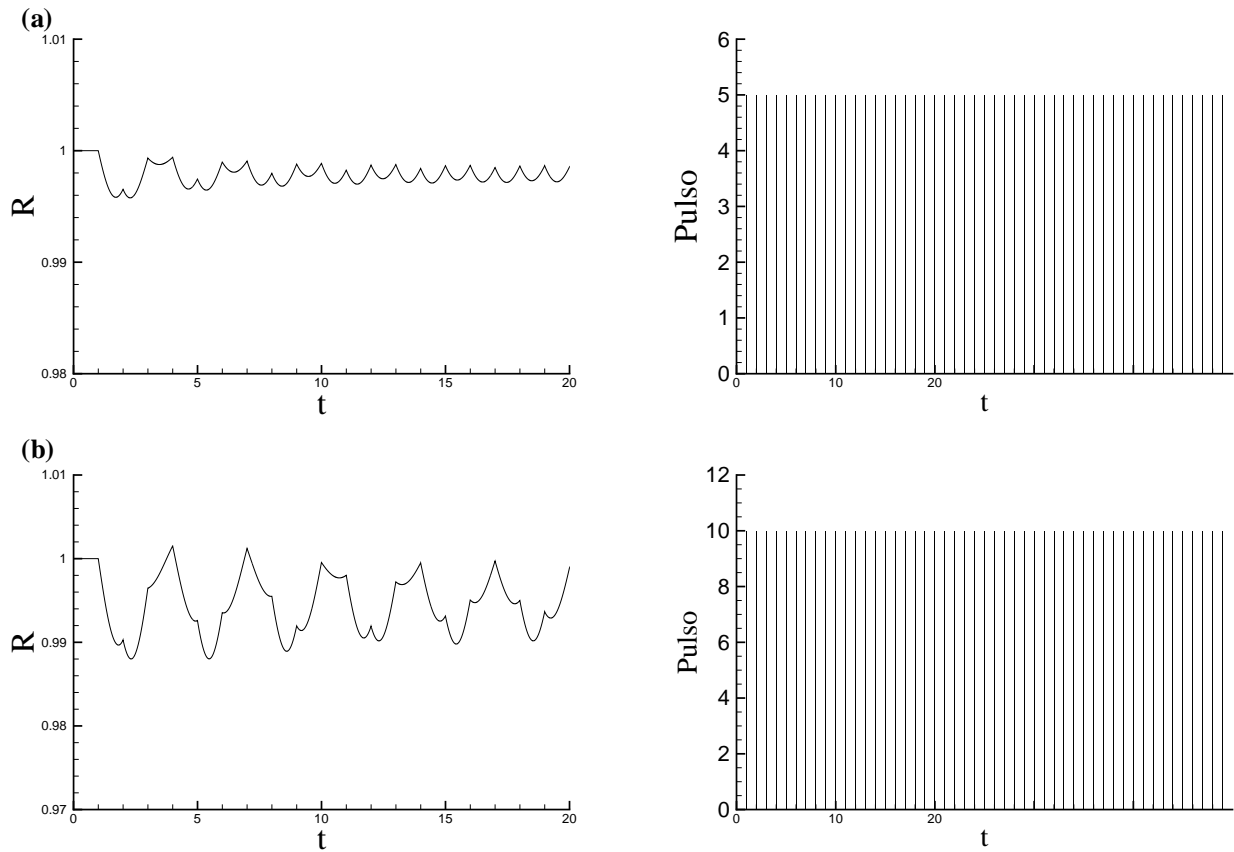


Figura 5.11: Variação do raio da bolha excitada periodicamente com parâmetros físicos valendo $Re = 10$ e $We = 6$. (a) Excitação com amplitude 5; (b) Excitação com amplitude 10

temente a densidade de potência) dos harmônicos principais. Por outro lado, quando se tem um trêm de pulsos, as amplitudes dos harmônicos são similares, modificando a resposta em frequência do sistema.

Nota-se, a partir da figura 5.12, que com pulsos em menor frequência, a bolha reage como um sistema subamortecido e sua amplitude não avança sobre o raio inicial. Isso ocorre pois a frequência de oscilação deste pulso não se acopla com a frequência de oscilação da própria bolha. Por outro lado, a medida que essa frequência é aumentada, a bolha reage com maior amplitude de oscilação, sofrendo diretamente a interferência da pressão externa aplicada.

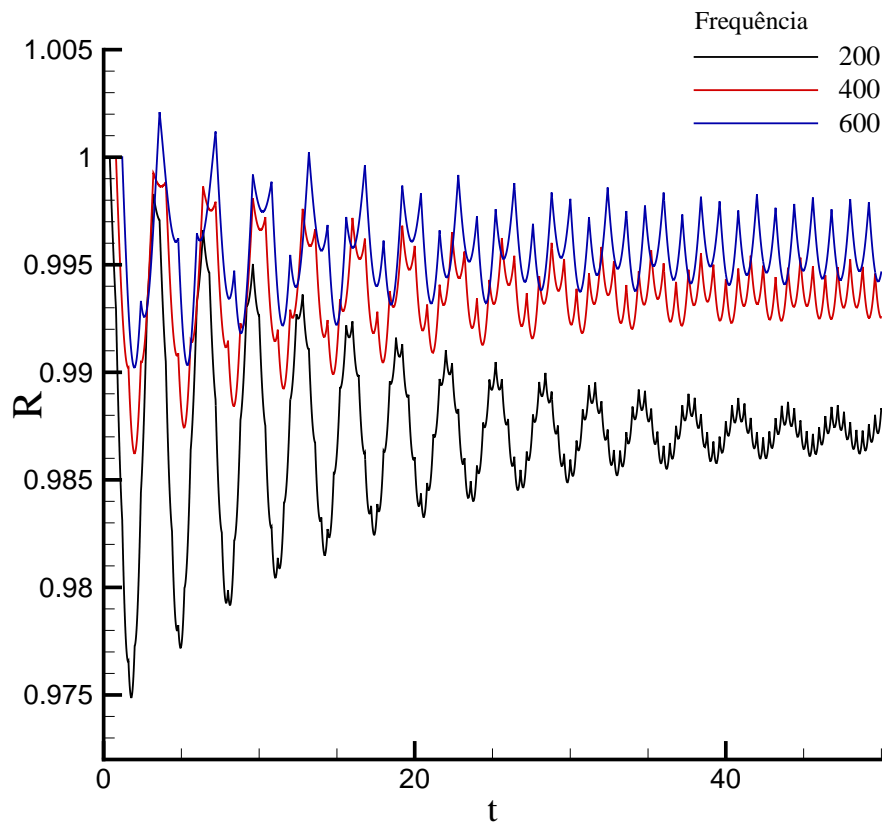


Figura 5.12: Variação do raio da bolha excitada periodicamente com parâmetros físicos valendo $Re = 30$ e $We = 10$. A variação da frequência gera modificações na amplitude de oscilação e em seu padrão de vibração.

5.6 Excitação não-Linear

Buscando evidenciar as diferenças resultantes de uma excitação altamente não-linear, aplicou-se um campo de pressão do tipo: $f(t) = \text{sen}[1 + \varepsilon \text{sen}(\omega t)]$, demonstrado na figura 5.13. A medida que aumentamos ε , as não-linearidades ou bifurcações no movimento da bolha vão surgindo, tornando o movimento cada vez mais instável. Isso faz com que o mesmo tenda a uma condição caótica ou até mesmo ao colapso. Em outras palavras, podemos dizer que o número de graus de liberdade de vibração da bolha ou dos modos de vibração aumenta, correspondendo aos diferentes períodos de oscilações que vão surgindo com o aumento da amplitude de oscilação ε .

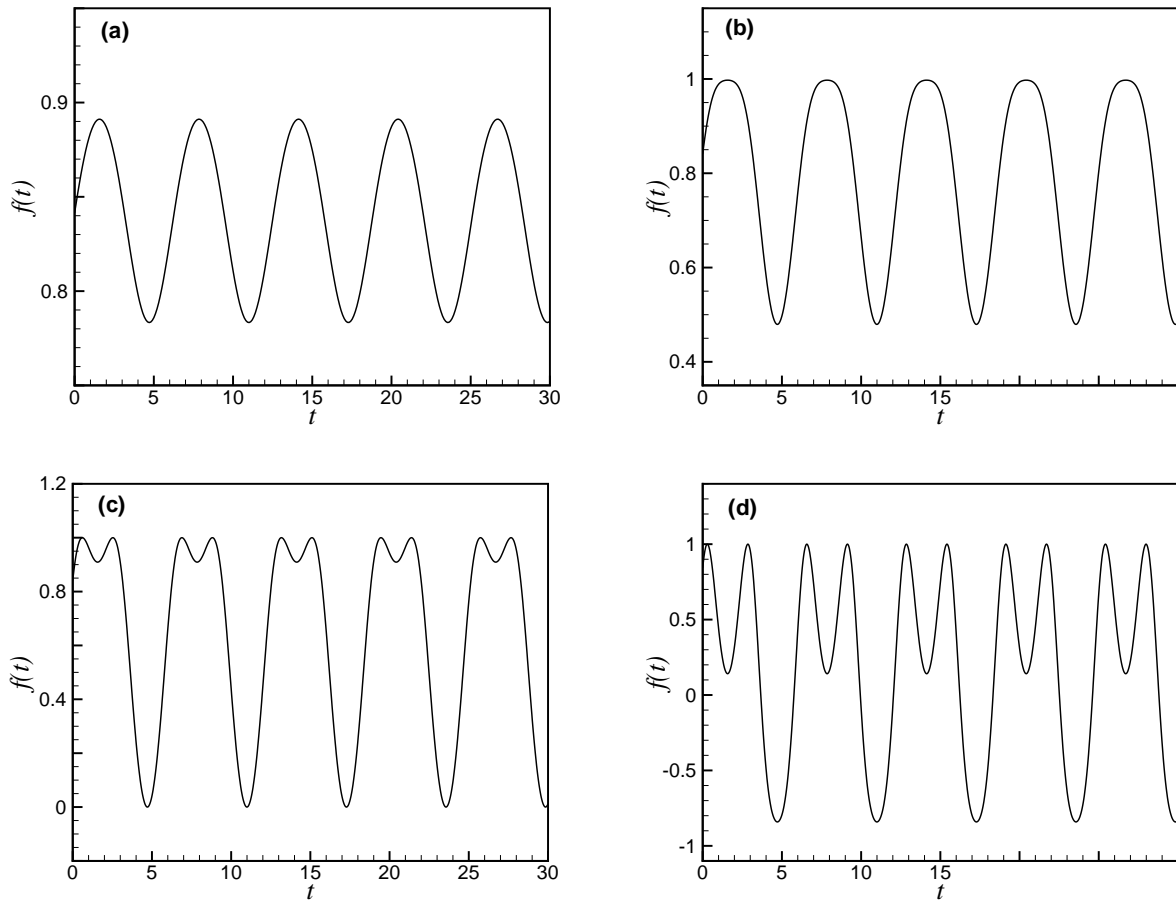


Figura 5.13: Excitação não-linear aplicada à bolha. Nas imagens, têm-se: (a) $\varepsilon = 0, 1$; (b) $\varepsilon = 0, 5$; (c) $\varepsilon = 1, 0$; e (d) $\varepsilon = 2, 0$. Para $Re = 1$ e $We = 1$.

É possível perceber, da figura 5.14, que existe a criação de mais harmônicos e períodos de oscilação, além de um aumento da mudança do padrão vibracional do sistema. A medida que ε aumenta, a resposta do sistema se modifica, criando vales com valores de derivada muito altos. Da mesma forma, aparecem mais frequências fundamentais no sistema e seu padrão vibracional se altera.

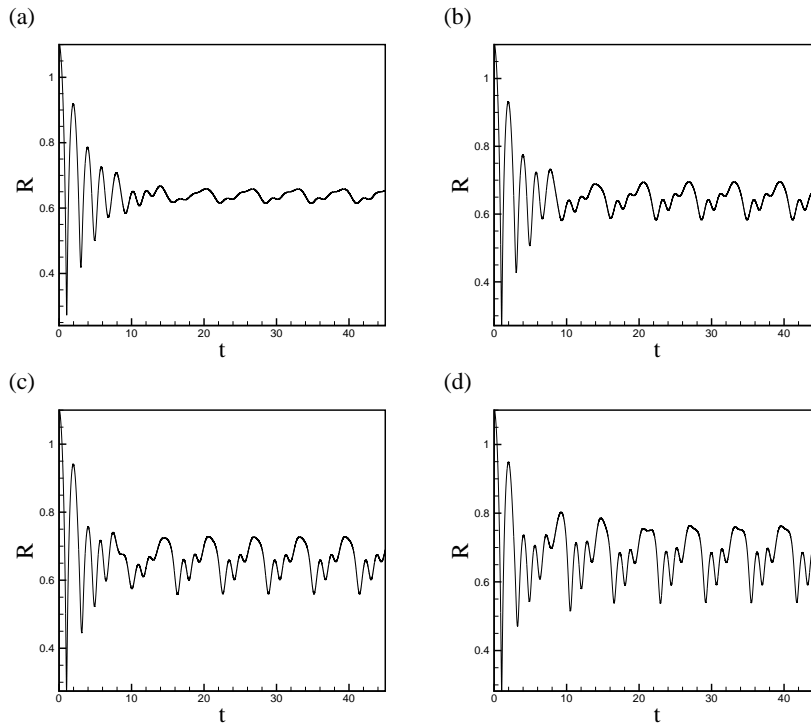


Figura 5.14: Resposta do raio da bolha em função do tempo para os parâmetros $Re = 10$, $We = 5$ variando: (a) $\varepsilon = 0,2$; (b) $\varepsilon = 0,4$; (c) $\varepsilon = 0,6$; e (d) $\varepsilon = 0,8$ com excitação não-linear.

Nota-se destas imagens, obtidas com o critério de parada desligado, uma vez que seu transiente possui uma alta velocidade de modificação do raio, que a alteração da amplitude da excitação não-linear, provoca uma mudança na própria amplitude da resposta do raio no tempo. Da mesma forma, esse aumento da amplitude gera uma maior deformação na harmonicidade da resposta. Observemos agora qual a influência do número de Reynolds na figura 5.15; entende-se que o aumento do número de Reynolds gera um aumento no tempo de relaxação da bolha oscilante, aumentando seu transiente.

É possível observar que o aumento do número de Reynolds está diferentemente relacionado à não-linearidades - observáveis pela própria equação de Cauchy. A medida que ele aumenta, podemos dizer que a inércia se sobressai à componente viscosa que tende a atenuar este processo não-linear. Desta forma, aumentando este número, aumentamos o transiente da resposta, dado que as forças amortecedoras não estão em magnitude suficiente para atenuar as não-linearidades.

Na última análise, faz-se presente a mudança do número de Weber, mostrada na figura 5.16. Este, por sua vez, modifica os termos de velocidade referentes ao raio da bolha. É possível perceber que com o aumento do número de Weber, as declividades se tornam maiores, aumentando as derivadas em relação ao raio da bolha. Por este motivo e, dada a utilização de um passo de tempo adaptativo, para valores maiores que $We = 10$ o código se torna instável. Isso ocorre, pois os passos de tempo se tornam muito pequenos, fazendo com que o código se torne muito caro computacionalmente.

A partir disso, efetuou-se o diagrama de colapso, mostrado na figura 5.17. Neste caso, o

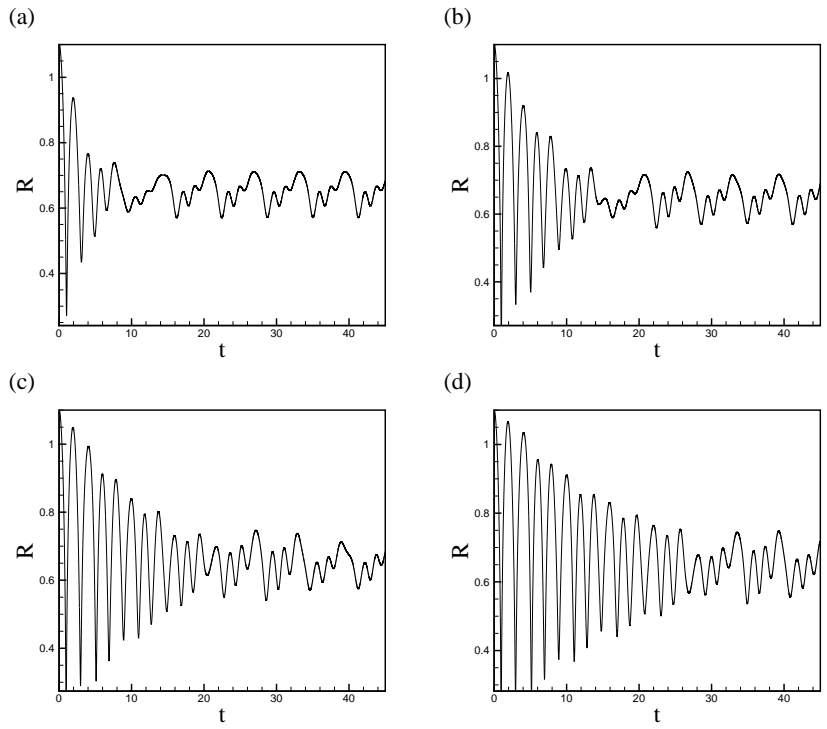


Figura 5.15: Resposta do raio da bolha em função do tempo para os parâmetros $\varepsilon = 0,5$, $We = 5$ variando: (a) $Re = 10$; (b) $Re = 20$; (c) $Re = 30$; e (d) $Re = 40$ com excitação não-linear.

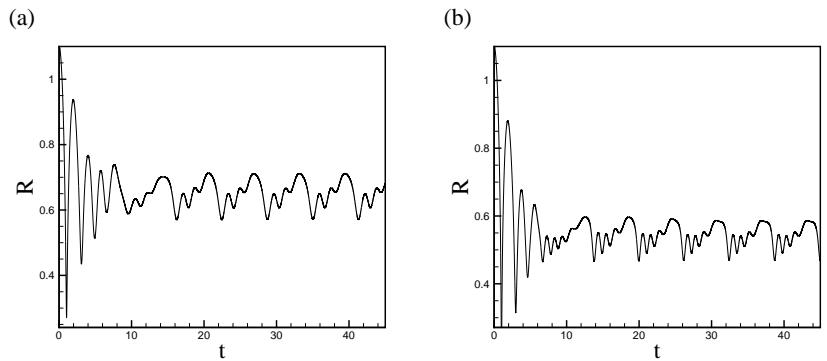


Figura 5.16: Resposta do raio da bolha em função do tempo para os parâmetros $\varepsilon = 0,5$, $Re = 10$ variando: (a) $We = 5$; e (b) $We = 10$.

número de Weber é apresentado como uma função do número de Reynolds. Nota-se, por exemplo, que fixando um valor de Weber e desenhando uma linha vertical neste valor, observa-se que o ângulo formado pela função $Re(We)$ na linha é muito menor do que no caso de fixarmos uma linha horizontal em um valor de Reynolds. Isso demonstra que o sistema é muito mais suscetível as forças viscosas do que as próprias forças de restauração da bolha. Neste caso Newtoniano, as forças comparativas são puramente inerciais e se observa que sua relação com as forças viscosas é um quociente muito sensível neste sistema dinâmico. Por outro lado, como o número de Weber se relaciona com as forças de restauração do movimento da bolha e sua frequência, este se torna um parâmetro com menor influência no comportamento oscilatório da bolha.

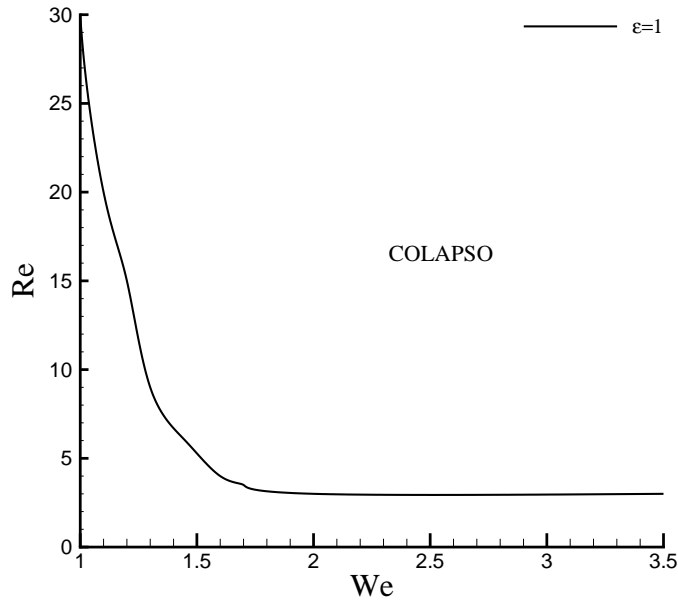


Figura 5.17: Diagrama de colapso para a excitação $f(t) = \text{sen}[1 + \varepsilon \text{sen}(\omega t)]$

É possível perceber que o sistema se torna ainda mais sensível aos parâmetros adimensionais, tendendo ao colapso com mais facilidade. Isso significa também que, para uma modelagem matemática, caso o critério de parada do código fosse desligado, ou seja, a teoria do raio de colapso fosse desconsiderada, o sistema tenderia ao caos com mais facilidade.

Da mesma forma, o sistema se torna ainda mais sensível às condições iniciais. Nestes testes, $R(0) = 1$ e $G(0) = 0$. Uma alteração leve com $R(0) = 1,1$ já leva o sistema ao colapso.

5.7 Padrões Vibracionais

Existem 4 padrões identificáveis, demonstrados na figura 5.18, baseados no número de Reynolds, Weber e amplitude da excitação aplicada à bolha. Os padrões podem ser descritos como não harmônicos e não periódicos, harmônicos e periódicos, não harmônicos e periódicos com dois tipos diferentes: alta deformação e baixa deformação - definidos no próximo parágrafo.

O conceito de deformação “leve” ou “moderada” se baseou na identificação de um padrão de deformabilidade. O quociente entre os picos (caso existentes), apresentados na figura 5.19, determina o grau de deformabilidade. Para valores inferiores a 1, considera-se uma deformação leve; para valores superiores a 1, considera-se uma deformação moderada; e para o valor nulo, entende-se que a resposta é harmônica.

Para o este trabalho, foram identificados outros padrões - que posteriormente facilitaram o treinamento da rede neural. Os padrões vibracionais do sistema foram identificados de sete formas diferentes, baseando-se em suas deformações recorrentes da perturbação: 1) periódico com leve

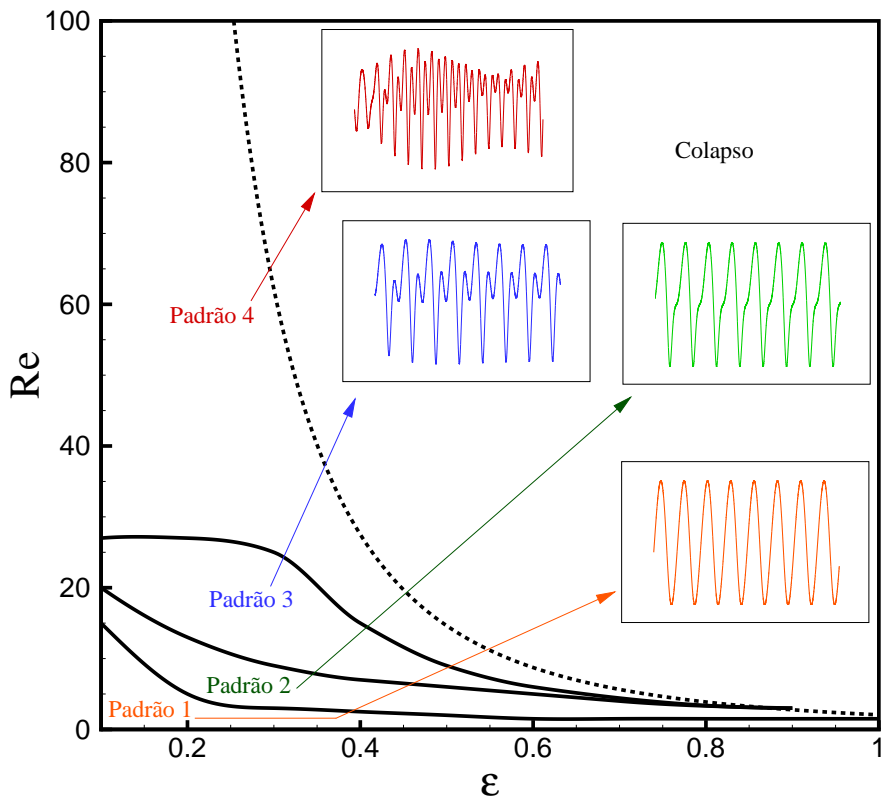


Figura 5.18: Diagrama de bifurcação: Os quatro padrões principais identificáveis baseando-se nos padrões adimensionais número de Reynolds e amplitude da excitação senoidal para $We = 6$.

deformação no vale; 2) periódico com deformação moderada no vale; 3) periódico com leve deformação; 4) periódico com deformação moderada; 5) harmônico sem deformação; 6) não harmônico e não periódico; 7) não harmônico e não periódico do tipo 2.

Os padrões 6 e 7 se diferem em relação ao seu resultado em sistema permanente: o padrão 6 leva o sistema ao caos claramente, enquanto o padrão 7, apesar de não periódico, mantém curvas de energia semelhantes, com pequena variação, como pode ser observado no espaço de fase de ambos.

Observa-se na figura 5.20, que no padrão 1 o espaço de fase se aproxima a um sistema estável, periódico e harmônico - representado por um círculo - apesar de uma leve deformação no segundo quadrante, referente à mudança de velocidade em relação à posição que ocorre no vale da função evoluinte no tempo. No padrão 2, a anisotropia geométrica se torna maior, e a mudança brusca de velocidade não somente aumenta a amplitude da resposta em frequência - obtida através da transformada de Fourier - como também gera um terceiro harmônico ao sistema que não estava presente no padrão 1.

No padrão 3, apresentado na figura 5.21, a deformação já não se encontra mais no vale da resposta no tempo, modificando também seu espaço de fase, que passa a ser mais simétrico, não apresentando deformação em apenas um quadrante específico. É possível notar que as mudanças

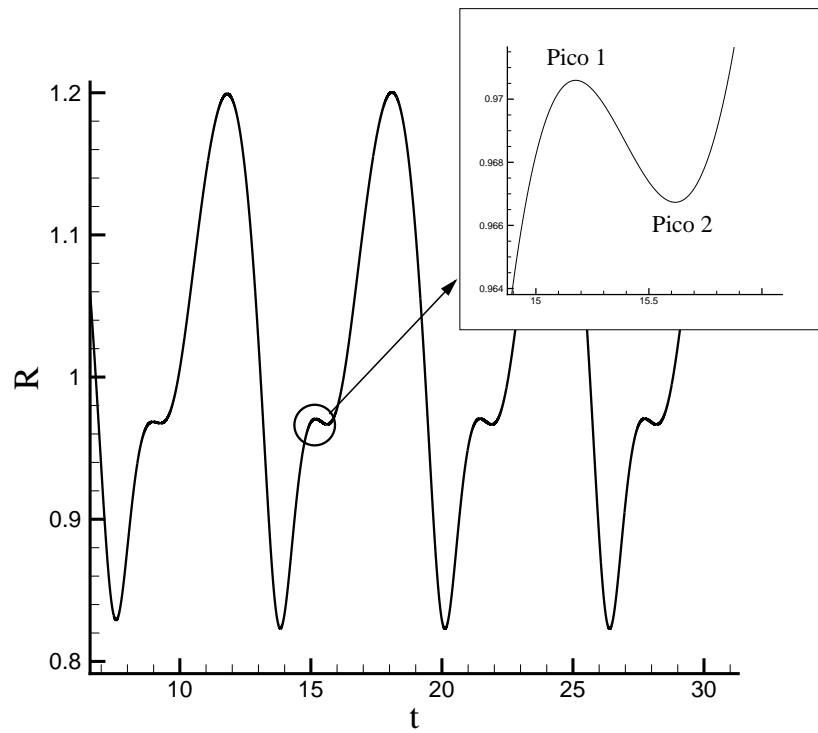


Figura 5.19: Identificação do padrão de deformabilidade

de velocidade dos padrões 3 e 4 são semelhantes, entretanto a mudança na posição do padrão 4 é muito mais expressiva, aumentando também a amplitude do quarto harmônico.

Sendo assim, observa-se que a deformação comum gerada, transforma o círculo estável e as rápidas variações da velocidade, ou seja, acelerações muito grandes gerando círculos internos ao ciclo limite, os quais possuem tamanho proporcional a variação da aceleração.

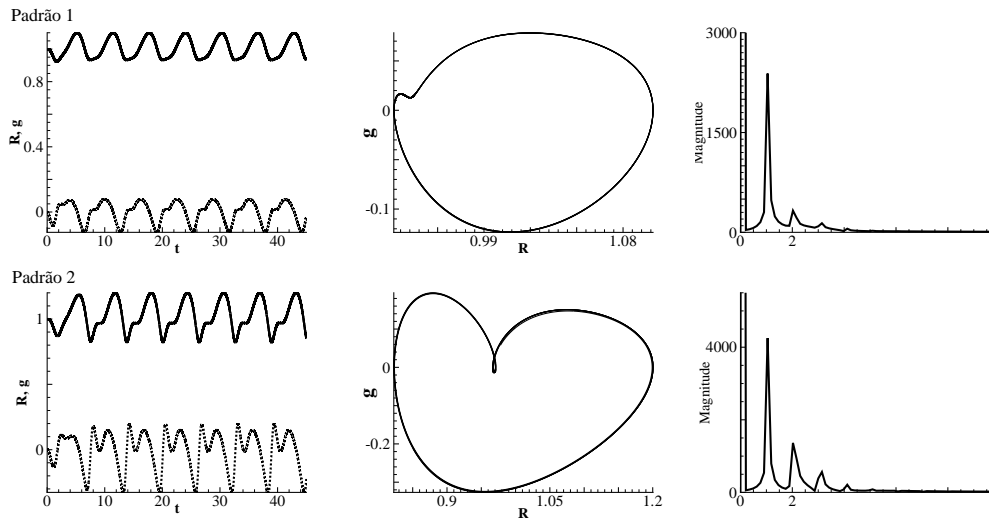


Figura 5.20: Padrão 1 e 2 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. A linha pontilhada em (a) demonstra a variação da velocidade no tempo.

A figura 5.22 mostra os padrões 5 e 6, ou seja, harmônico sem deformação e não harmônico e não periódico, e é possível observar algumas mudanças expressivas. No caso do padrão 5, percebe-se uma tendência de estabilidade no espaço de fase e dois harmônicos na frequência. No padrão 6, nota-se que a cada oscilação, o parâmetro de deformação se altera, provocando diferentes respostas vibracionais - o que leva o sistema ao caos.

Por último, apresenta-se na figura 5.23 o padrão 7, que possui certa deformação no pico e, não obstante, uma certa aperiodicidade se faz presente. Esse comportamento anisotrópico é observado pelo espaço de fase, no qual várias curvas de energia são encontradas.

Essa dinâmica é rica em possibilidades e bifurcações induzidas e diferentes parâmetros de fase e frequência pelo aumento da não linearidade do sistema de acordo com a variação dos parâmetros adimensionais e , não somente, e variação do tipo de excitação. Isso mostra que no controle de sistemas dinâmicos, o controle de parâmetros físicos é tão importante quanto o controle da amplitude de oscilação ou até mesmo do tipo de excitação. A comparação das forças viscosas e das forças de restauração em relação às forças inerciais é muito mais relevante na dinâmica do sistema do que sua amplitude de excitação, uma vez que estes efeitos são interligados.

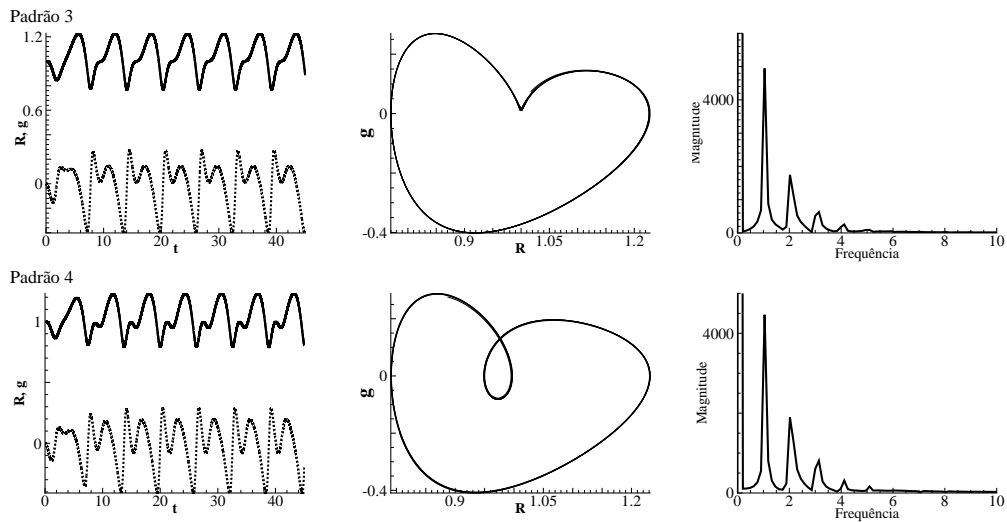


Figura 5.21: Padrão 3 e 4 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência. A linha pontilhada em (a) demonstra a variação da velocidade no tempo.

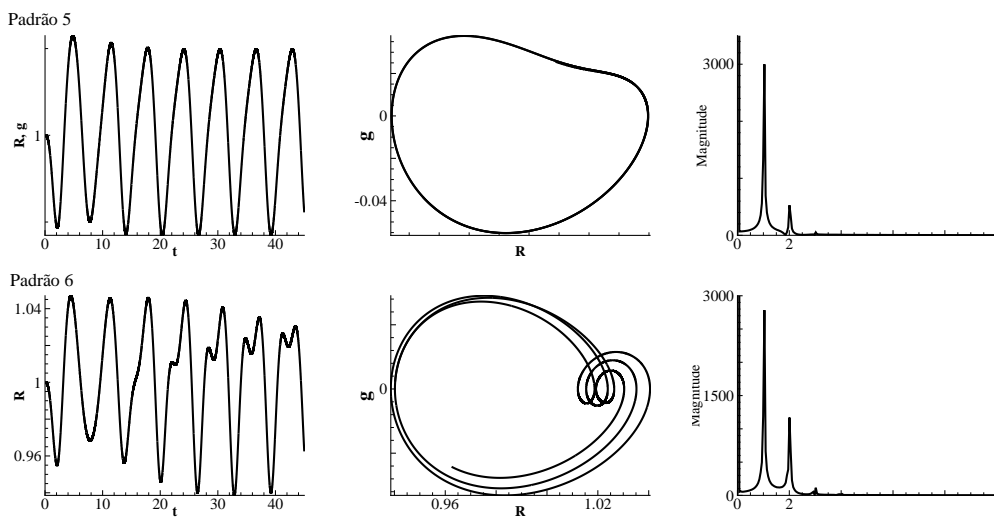


Figura 5.22: Padrão 5 e 6 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência.

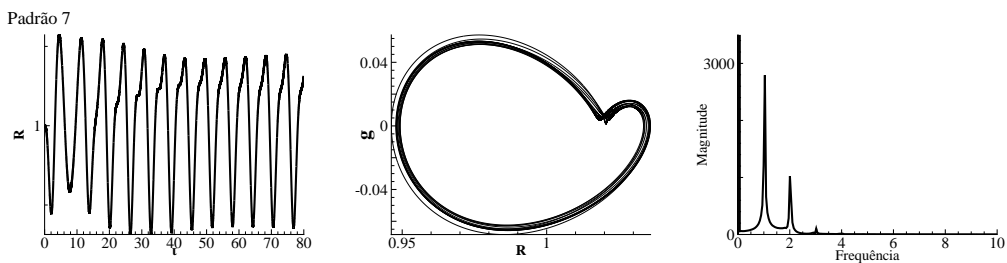


Figura 5.23: Padrão 7 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência.

5.7.1 Diagrama de Bifurcação e Expoentes de Lyapunov

Uma das formas mais significativas de estudo de sistemas dinâmicos é a utilização de expoentes de Lyapunov, que permitem observar a sensibilidade do sistema às condições iniciais e as taxas de divergência e convergência de trajetórias próximas no espaço de fase. Os expoentes de Lyapunov são considerados uma medida dinâmica da complexidade dos atratores e podem ser utilizados para a caracterização de caos e bifurcações, consequências comuns da alta não-linearidade em sistemas dinâmicos, como é o caso do movimento transiente-oscilatório de bolhas em fluidos complexos. (Parlitz, 1990).

• Definições

Behnia (2013) define os expoentes de Lyapunov da seguinte maneira: considerando dois pontos vizinhos no espaço de fase no tempo 0 e t , com distâncias na direção i definidas como $\|\delta x_i(0)\|$ e $\|\delta x_i(t)\|$. O expoente de Lyapunov será referente ao crescimento médio, λ_i das distâncias iniciais:

$$\frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} = 2^{\lambda_i t} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (5.18)$$

ou

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} \quad (5.19)$$

Baseando-se nisso, existem três possibilidades de resposta:

- Se $\lambda < 0$ as trajetórias estão próximas - oscilação radial estável
- Se $\lambda = 0$ os níveis de energia se mantêm em suas posições relativas - atrator estável
- Se $\lambda > 0$ implica que as órbitas energéticas não se mantêm próximas - atrator instável

A existência dos expoentes positivos de Lyapunov indicam que existe um comportamento caótico em relação a diferenças ininitesimais. Ou seja, o estado inicial se modifica abruptamente. Entretanto existem casos, nos quais os estados iniciais permanecem próximos e os estados finais levam o sistema ao caos. Este fenômeno é chamado, esporadicamente, de dependência das condições iniciais.

É possível perceber, por exemplo, na figura 5.3 e 5.4 a exata demonstração de como as condições iniciais podem influenciar o processo. Em ambos os casos, o sistema tende ao caos, uma vez que os expoentes de Lyapunov são positivos. É possível perceber que ocorre a bifurcação do período, uma vez que o mesmo dobra (*doubling-period bifurcation*). Em outras palavras, o ciclo limite, descrito como o período original de resposta a bolha passa a não ser único, havendo a presença de mais períodos, gerando uma bifurcação no espaço de fase.

Ao modificar as condições iniciais e, para altos valores de Reynolds e Weber, observa-se uma mudança de comportamento no sistema, criando atratores estranhos nas regiões de menor energia, o

que pode indicar a tendência de aumento dos expoentes de Lyapunov. São criados diversos círculos limites que não se estabilizam, levando o sistema ao caos. Para menores valores de Reynolds, Weber e de amplitude de excitação, apresentados na figura 5.24, é possível perceber que os expoentes de Lyapunov tendem a valores negativos, o que indica que a redução do efeito turbulento e da interferência do campo de pressão externo aplicado à bolha faz com que a dependência das condições iniciais seja menor.

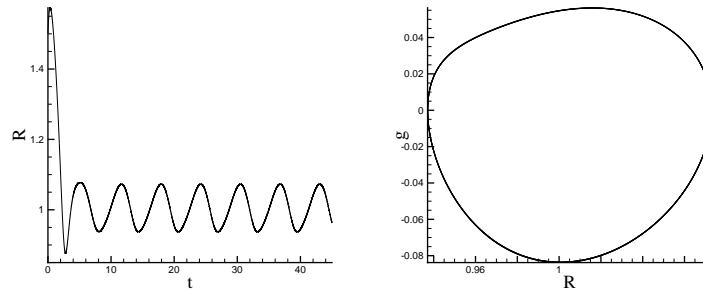


Figura 5.24: Comparação da sensibilidade da bolha com excitação externa $Re = 2$, $We = 2$, $\varepsilon = 0,3$ e $R(0) = 1,5$, $G(0) = 0,5$. Tendência de diminuição dos expoentes de Lyapunov, diminuindo também a sensibilidade às condições iniciais.

5.8 Redes Neurais

A identificação de parâmetros adimensionais referentes ao comportamento da bolha na prática pode se tornar algo difícil devido a não-linearidade da equação que controla o regime de oscilação da bolha. Entretanto esse pode ser um problema fácil de identificação de padrões para redes neurais.

Braga, Carvalho e Ludemir (2000) definem as Redes Neurais Artificiais (RNAs) como modelos matemáticos que se assemelham às estruturas neurais biológicas e que tem capacidade computacional adquirida por meio de aprendizado e generalização. Atualmente, diversos algoritmos podem ser utilizados para o processo de reconhecimento de padrões, cada um seus pontos positivos e negativos.

McCulloch e Pitts (1943) criaram o chamado neurônio de McCulloch, um dispositivo binário do sistema conexionista, que segue a lógica de saída de pulso ou não pulso, e as suas várias entradas possuem ganho arbitrário e poderiam ser excitatórias ou inibitórias. Este neurônio booleano só pode, no entanto, identificar padrões linearmente separáveis.

Os trabalhos do Perceptron Multicamadas de Rummelhart, Hinton e Williams (1986) complementaram o trabalho de exposição das fragilidades do neurônio booleano expressas por Minsky e Pappert (1969).

As redes neurais multicamadas são, normalmente, formadas por uma camada de entrada, uma camada oculta e a camada de saída, como demonstrado na figura 5.25.

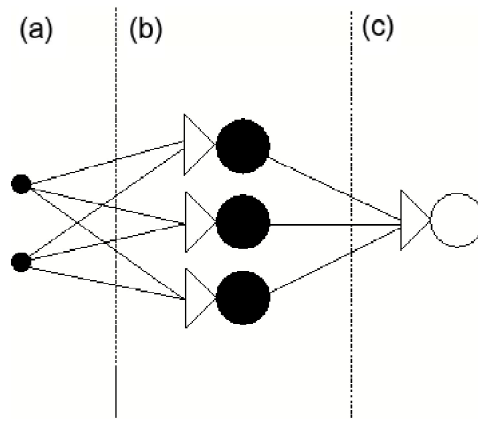


Figura 5.25: (a) Camada de entrada; (b) camada oculta; e (c) camada de saída em esquema de rede neural

Essa rede neural (Bauchspiess, 2013), por conseguinte, pode ser formada por diferentes funções de ativação e métodos de treinamento. As funções de ativação são funções de transferência que calculam a saída da camada, baseando-se em sua entrada e em condições iniciais randômicas. Desta forma, a saída do k -ésimo neurônio é dada pela equação 5.20:

$$y_k = \phi\left(\sum_{j=0}^m w_{kj}x_j\right) \quad (5.20)$$

na qual w_{kj} determina os pesos dados por cada entrada, x_j é o número de entradas e ϕ é a função de transferência utilizada. As funções de ativação utilizadas são normalmente *logsig*, *tansig*, *purelin* e *perceptron*. Cada uma possui diferentes arranjos e pode ser expressa de maneira diferente.

- **Aplicação à Dinâmica de Bolhas**

Da mesma maneira, existem diferentes métodos de treinamento. No seguinte trabalho, foram explorados os métodos de Levenberg-Marquardt, um algoritmo de otimização que procura o mínimo global em uma função e converge mais rapidamente - por se tratar da utilização do Jacobiano para atualização dos pesos - e o método do Gradiente Descendente, que possibilita recalcular a função delta com base na atualização dos pesos w , utilizando a queda do gradiente de erro e determinando valores mínimos desta função.

Baseando-se nos 7 padrões vibracionais apresentados anteriormente, uma rede neural foi treinada, utilizando os primeiros harmônicos da resposta em frequência dos mesmos. O método de treinamento utilizado, *trainoss* (One step secant backpropagation), uma versão modificada do algoritmo Levenberg-Marquardt, permite cálculos mais eficientes com menos espaço computacional e qualidade de processamento. Um dos pontos de maior importância é quando apresenta-se à rede já treinada um padrão qualquer que não foi incluído no seu treinamento. Se tudo foi feito de maneira correta e tomando certos cuidados, a rede neural consegue colocar este padrão dentro do que se espera na saída.

A rede treinada utilizou um conjunto de 36 matrizes de entrada chamadas de *Pattern* - representadas pela tabela 5.1 - cada um com 2x15 diferentes pares de informações referentes à frequência e a amplitude resultantes de simulações computacionais do modelo de Rayleigh-Plesset. Foram treinadas 1000 épocas com as funções de ativação *purelin* na primeira camada e *logsig* na segunda camada. No treinamento, utilizaram-se 30 neurônios na primeira camada e 1 neurônio na segunda camada. É possível observar, na figura 5.26, a apresentação da *toolbox* do Matlab utilizada.

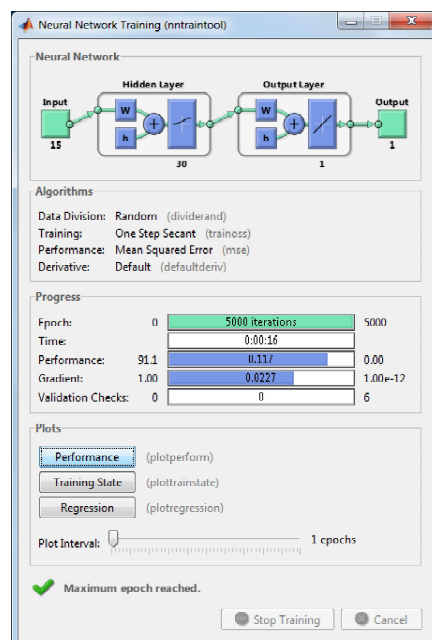


Figura 5.26: Imagem obtida do Matlab a partir da *toolbox* do Matlab.

Cada conjunto de treinamento contava também com uma saída, *target*, referente ao seu padrão vibracional. Para a validação da rede neural, utilizou-se o conjunto de treinamento que ainda não fora treinado. Foram efetuados sete testes, procurando encontrar os melhores resultados possível, apresentados na figura 5.27. É possível observar que o padrão 1 dificultou a identificação dos demais padrões, aumentando o erro percentual de identificação. O teste 3, por exemplo, determinou valores baixos de erro para a identificação de todos os padrões exceto o primeiro, que obteve um erro altíssimo. Todas essas respostas são obtidas diretamente na linha de comando do Matlab, que identifica valores reais, aproximados para o valor inteiro mais próximo.

Após outros testes, obteve-se um valor de pesos para a rede neural que minimiza de forma mais eficiente todos os padrões: o teste 7. Este resultado se deve a dificuldade da rede em identificar diferenciações entre os padrões 1 e 2, uma vez que as alterações de velocidade do movimento da bolha em relação ao tempo são muito semelhantes em ambos os padrões vibracionais. Após alguns treinamentos, os pesos são melhor adaptados e é possível otimizar o erro.

Esse treinamento de redes neurais permite a identificação de parâmetros como o número de Reynolds, Weber e até mesmo a margem de amplitude de perturbação aplicada à bolha. Nos problemas práticos que se utilizam da cavitação, identificar este tipo de parâmetro abre portas nos ramos da biomedicina, indústrias e náutica.

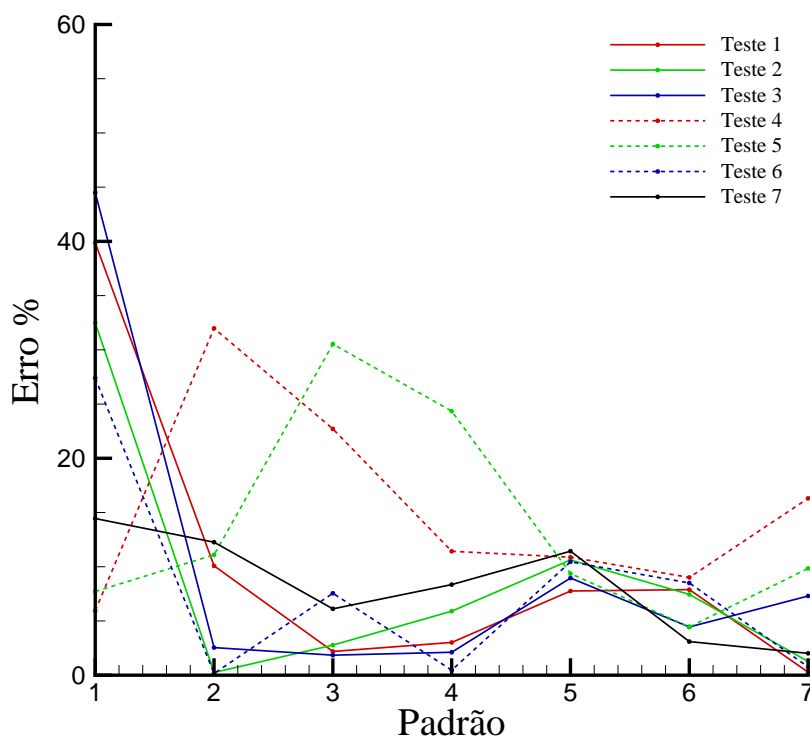


Figura 5.27: Erro percentual obtido para os diferentes padrões vibracionais no conjunto de teste.

Apesar do modelo proposto ter considerado um escoamento unidimensional na direção radial, devido à esfericidade da bolha, a excitação senoidal no mesmo sentido permitiu a visualização dos efeitos anisotrópicos na estabilidade da mesma. Para o algoritmo, utilizou-se, primeiramente, a abertura de toda a relação numérica obtida após a aplicação da FFT. Após a abrir todos os dados e os armazenar, é preciso que uma rede seja criada com as informações requeridas.

Embora o treinamento da rede neural seja um processo demorado, a sua aplicação é rápida e simples, fazendo com que o processo possa ser facilmente identificado. Baseando-se em informações da literatura, a escolha correta do algoritmo de treinamento, número de épocas e número de neurônios é um fator importante na qualificação dos pesos da rede neural. Os resultados demonstraram que a alteração dos pesos iniciais da rede neural - que são definidos randomicamente - pode gerar resultados com erros otimizados; desta forma, o treinamento constante e o armazenamento dos pesos e *bias* que geraram resultados produtivos é um passo importante para o *setup* de novas redes.


```

ABERTURA DOS ARQUIVOS DE TREINAMENTO E SIMULAÇÃO

fidA = fopen('fftre=3we=1.txt');
    %Abrindo o dado com Re=3, We=3 e amplitude = 0,3
A = fscanf(fidA, '%g %g', [1 15]);

fclose(fidA);
PA = A';
%Aplicação da transposta
pa = [PA(:,1)];
%Leitura apenas dos valores de magnitude
TA = [1];
ta = TA';

\begin{lstlisting}
    DETERMINAÇÃO DO PATTERN E TARGET
P = [pa . pb . pc . pd . pe . pf . pg . ph . pi . pj . pk . pl . pm . pn . po . pp . pq . pr . ps . pt . pu, ←
    pv . px];
T = [ta . tb . tc . td . te . tf . tg . th . ti . tj . tk . tl . tm . tn . to . tp . tq . tr . ts . tt . tu, ←
    tv . tx];
%Um exemplo do que seria um pattern e target plausível.

    INICIO DO TREINAMENTO
net = newff(P,T,30) %Modificar o número de neurônios aqui
net.divideParam.trainRatio = 1
net.divideParam.valRatio = 0
net.divideParam.testRatio = 0

net.trainFcn = 'trainoss';
%Algoritmo de treinamento utilizado
net.layers{1}.transferFcn = 'logsig';
%Função de transferência na primeira camada
net.layers{2}.transferFcn = 'purelin';
%Função de transferência na segunda camada
net.trainParam.epochs = 1000;
%Número de épocas
net = train(net,P,T);
%Iniciar o treinamento

    SIMULAÇÃO
a = sim(net,pa)
%Introdução da rede e do pattern desejado

```

Figura 5.28: Fluxograma representativo da subrotina utilizada para o treinamento da rede neural no Matlab.

Em suma, é possível utilizar, de forma efetiva, redes neurais para identificação de padrões. No trabalho de Bauchpiess e Genovese (2001), por exemplo, as redes neurais multicamadas são utilizadas para identificar defeitos e desgastes em vigas de metal. Os parâmetros vibracionais das vigas e essa resposta no domínio da frequência são utilizados para a determinação do comprometimento da mesma. No caso da bolha oscilante, por exemplo, a rede neural pode identificar como essa bolha está vibrando e, munidos do diagrama de colapso, identificar qual a faixa de Reynolds e Weber nos quais estamos operando. Como aplicação prática, processos de cavitação poderiam ser controlados, assim como o momento de colapso, uma vez que um monitoramento em tempo real

estaria ocorrendo devido às redes neurais.

| | Reynolds | Weber | ϵ |
|----|----------|-------|------------|
| 1 | 3 | 1 | 0,3 |
| 2 | 3 | 3 | 0,3 |
| 3 | 3 | 5 | 0,3 |
| 4 | 3 | 7 | 0,3 |
| 5 | 7 | 2 | 0,5 |
| 6 | 7 | 3 | 0,3 |
| 7 | 5 | 6 | 0,5 |
| 8 | 7 | 7 | 0,3 |
| 9 | 15 | 1 | 0,3 |
| 10 | 15 | 3 | 0,3 |
| 11 | 10 | 1 | 0,1 |
| 12 | 10 | 10 | 0,1 |
| 13 | 8 | 17 | 0,3 |
| 14 | 7 | 55 | 0,3 |
| 15 | 30 | 7 | 0,1 |
| 16 | 50 | 7 | 0,1 |
| 17 | 45 | 20 | 0,3 |
| 18 | 50 | 20 | 0,3 |
| 19 | 60 | 6 | 0,3 |
| 20 | 3 | 2 | 0,5 |
| 11 | 3 | 8 | 0,5 |
| 22 | 3 | 1,5 | 0,5 |
| 23 | 7 | 5 | 0,3 |
| 24 | 6 | 5 | 0,5 |
| 25 | 7 | 1 | 0,3 |
| 26 | 7 | 9 | 0,5 |
| 27 | 10 | 60 | 0,3 |
| 28 | 10 | 20 | 0,3 |
| 29 | 9 | 3 | 0,1 |
| 30 | 10 | 9 | 0,1 |
| 31 | 3 | 1 | 0,3 |
| 32 | 40 | 6 | 0,1 |
| 33 | 50 | 20 | 0,1 |
| 34 | 50 | 5,5 | 0,3 |
| 35 | 60 | 2,5 | 0,1 |
| 36 | 60 | 25 | 0,1 |
| 37 | 60 | 7 | 0,1 |

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados nas simulações para obtenção dos parâmetros vibracionais e como entrada dos dados de treinamento da rede neural

Capítulo 6

Resultados - Bolha em Meio Magnético

Este capítulo demonstra os resultados obtidos para uma bolha imersa em um fluido não-Newtoniano. Neste serão apresentadas as respostas a nova formulação magnética proposta, demonstrando como a aplicação de um campo magnético altera as respostas referentes à excitação senoidal. Da mesma forma, os parâmetros físicos magnéticos são explorados, de modo a entender como o magnetismo altera o comportamento já não-linear da bolha.

6.1 Excitação Senoidal

Considerando ainda as mesmas bases do capítulo anterior, considerou-se para a formulação magnética que não existem alterações de temperatura, admitindo um processo isotérmico e considerando o coeficiente politrópico, associado ao processo expansional da bolha, $n = 1$. Para todas as simulações numéricas, a frequência utilizada, ω , foi unitária, buscando analisar o padrão puramente viscoso e magnético do fluido não-Newtoniano em que a bolha se encontra imersa.

Na figura 6.1 é possível observar claramente como o fator Re_{mag} altera os padrões de vibração do sistema se comparado com a bolha imersa em um fluido Newtoniano. Para pequenos valores de Re_{mag} , ou seja, para um grande campo magnético aplicado, é possível observar como a amplitude de oscilação do raio da bolha aumenta, relacionando o sistema ao comportamento de um conjunto subamortecido. O movimento de expansão da bolha é rápido e amplo, gerando, possivelmente, uma grande interação com o meio externo. Por outro lado, com um Re_{mag} unitário, no qual as escalas de tempo magnética e inercial são comparáveis, o sistema adquire um padrão vibracional único, atingindo um regime permanente de modo de oscilação, comparável com o Padrão Vibracional 3, representado na figura 5.18.

Ao aumentarmos o valor de Re_{mag} - diminuindo o campo aplicado - observa-se um padrão mais controlável da bolha, porém a mesma não atinge o regime permanente em valores de tempo adimensional menores que 50. Por outro lado, a amplitude de oscilação da bolha se torna menor

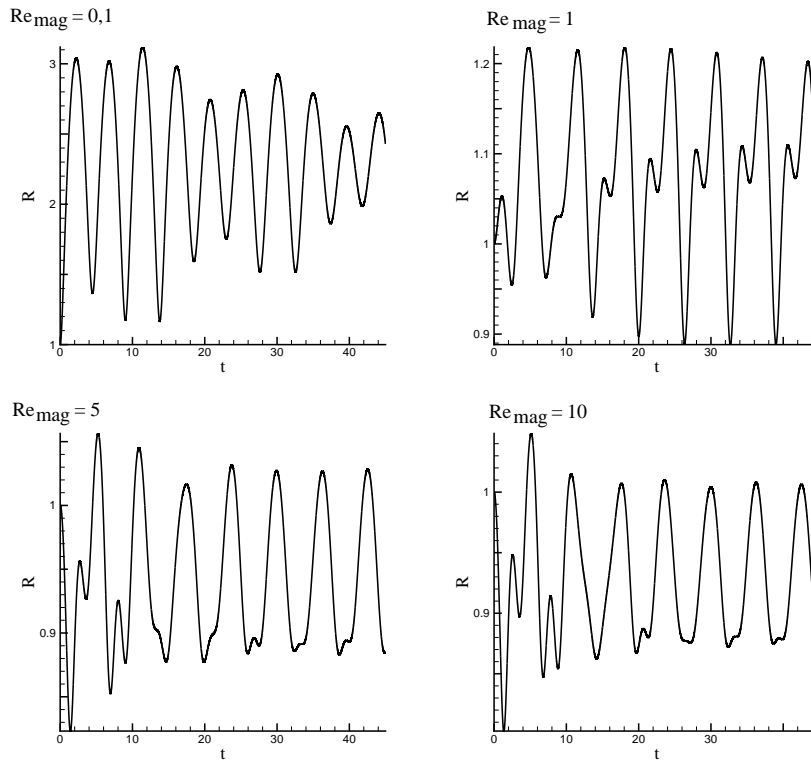


Figura 6.1: Comparação do comportamento do raio da bolha no tempo para diferentes valores de Reynolds Magnético, considerando $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,3$ e $\chi = 1$.

e seu comportamento se aproxima mais do que se considera um padrão harmônico de vibração, demonstrando maior estabilidade, apesar das condições adversas.

Para melhor entender como esses padrões interferem no que diz respeito a estabilidade da bolha, é possível analisar a resposta da oscilação da bolha no espaço de fase.

Na figura 6.2, o comportamento oscilatório da bolha é observado a partir do espaço de fase. É possível perceber que para um alto campo magnético aplicado, a bolha reage de maneira subamortecida, diminuindo sua energia de oscilação e, conseqüentemente, sua amplitude de oscilação. Caso o sistema continue a convergir para o centro, é possível que um ponto de instabilidade focal fosse formado, gerando o colapso da bolha.

Por outro lado, observa-se que com Re_{mag} unitário, a oscilação da bolha reage de maneira diferente e não existe mais nenhum ponto de instabilidade. O padrão, apesar de não-harmônico permanece no que aparenta ser um regime permanente com leves mudanças de níveis de energia. A medida que o Re_{mag} aumenta e o campo aplicado diminui, existe maior estabilidade, demonstrado pelos círculos descritivos.

Outra análise importante que pode ser utilizada é a Transformada de Fourier, expressa na figura 6.3. Nesta condição, podemos estudar o sistema a partir do espaço de frequência. Nesta condição, tem-se a figura

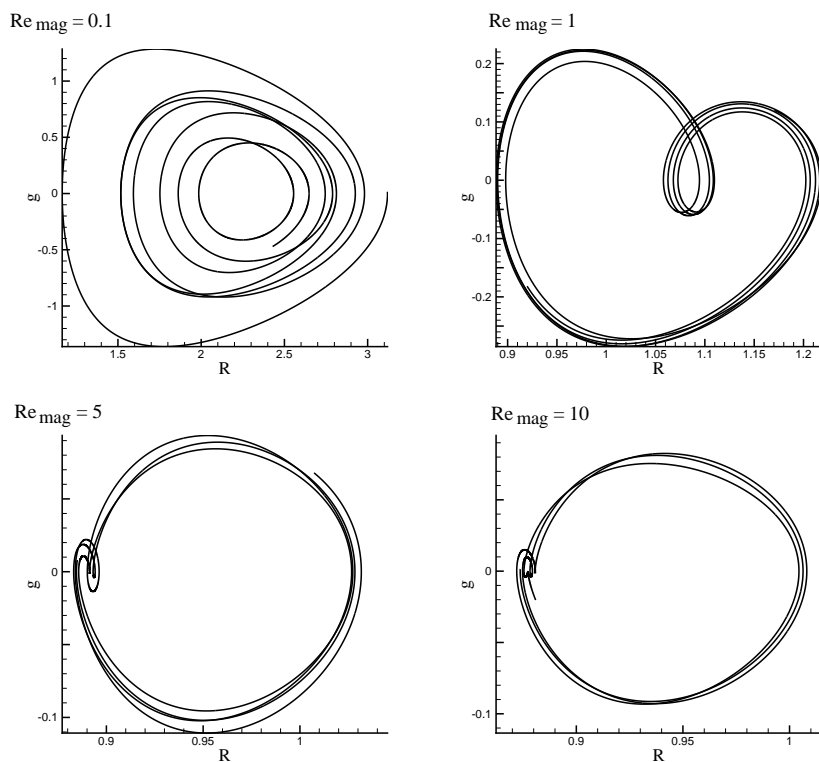


Figura 6.2: Comparação do comportamento do raio da bolha no espaço de fase para diferentes valores de Reynolds Magnético, considerando $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,3$ e $\chi = 1$.

Comparando a figura 6.3, que apresenta as Transformadas de Fourier, com a figura 6.1 é possível perceber que, no caso de $Re_{mag} = 0, 1$, existe um maior pico de frequência, possuindo mais energia. Da mesma forma, a frequência desse pico é igual a frequência de excitação do campo de pressão aplicado. Por outro lado, a medida que Reynolds Magnético aumenta, as amplitudes dos picos diminuem. Além disso, o pico principal não ocorre mais na frequência de excitação, pois o sistema passa por um período transiente. Como o sinal é não-periódico, existe uma banda de energia em várias frequências e não apenas picos. Esse é um problema que pode ser interpretado como sendo de autovalor-autovetor, no qual as frequências seriam os autovalores e os modos de vibração associado a cada ω e amplitude seriam os autovetores. Os regimes não-lineares apresentam um aumento do número de graus de liberdade vibracionais do sistema. A medida que esses graus de liberdade aumentam o sistema vai se tornando mais instável. Comparando os gráficos referentes a $Re_{mag} = 5$ e $Re_{mag} = 10$, é possível observar que existe uma diferença pequena no segundo pico, pois a amplitude e o comportamento em regime permanente é muito semelhante. O pico em zero é referente ao que chamamos de amplitude DC, ou seja, não é relacionada a frequência de excitação e, neste caso, é referente a pressão constante aplicada na bolha.

É possível notar também que com a diminuição de Re_{mag} o espectro se torna mais contínuo, demonstrando a existência de mais frequências no sistema. Desta forma, com um alto campo magnético aplicado o sistema se torna pouco harmônico. Entretanto isso não representa uma maior instabilidade do mesmo. A presença de mais frequências, mas com amplitudes pequenas caracteriza

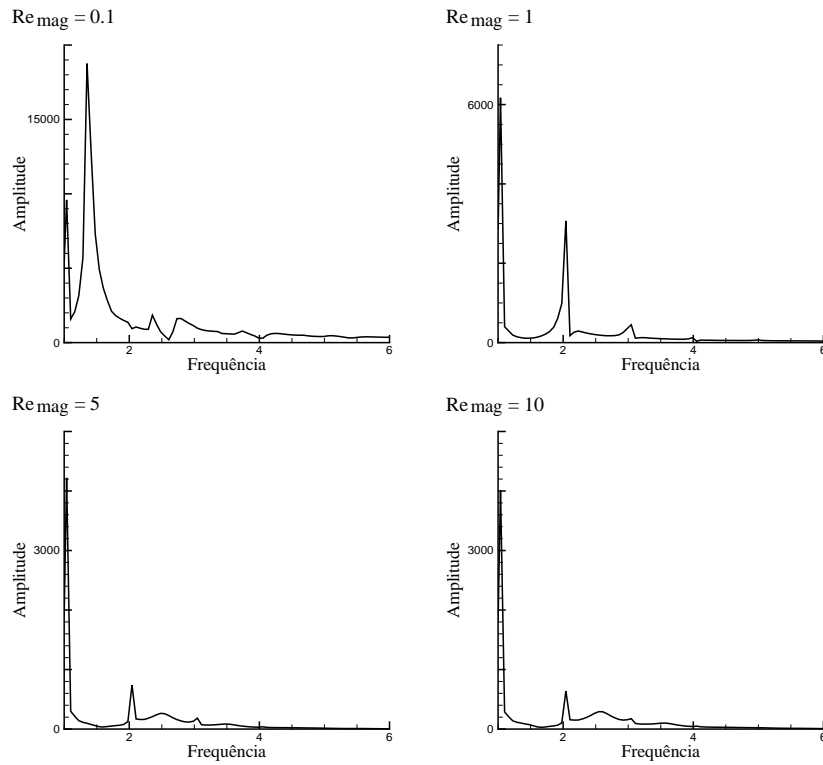


Figura 6.3: Comparação do comportamento do raio da bolha a partir da FFT para diferentes valores de Reynolds Magnético, considerando $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,3$ e $\chi = 1$.

um sistema com predominância de uma frequência específica. Da mesma forma, com $Re_{mag} = 5$ e $Re_{mag} = 10$, observa-se uma saturação no tipo de comportamento vibracional do sistema. Isso acontece, pois a medida que Re_{mag} aumenta, o campo aplicado diminui e a componente magnética da equação de Rayleigh-Plesset apresenta menos influência. Entretanto, nota-se, comparando com a figura que o comportamento magnético acaba por estabilizar o sistema, fazendo com que o mesmo se torne mais harmônico. Isso mostra que o controle do campo magnético aplicado é de extrema importância no controle do movimento oscilatório da bolha. Em certas combinações de parâmetros adimensionais, a aplicação de um campo menor gera uma maior periodicidade e harmonicidade do sistema. Em outras dituações, um campo aplicado mais forte é mais indicado. Isso acontece pois existem, como dito, deferentes escalas de tempo agindo no sistema. Isso faz com que, em algumas situações, as forças viscosas impeçam a bolha a oscilar. Em outras situações, o alinhamento dos dipolos do fluido magnético acaba por dificultar (ou facilitar) o movimento radial de oscilação da bolha.

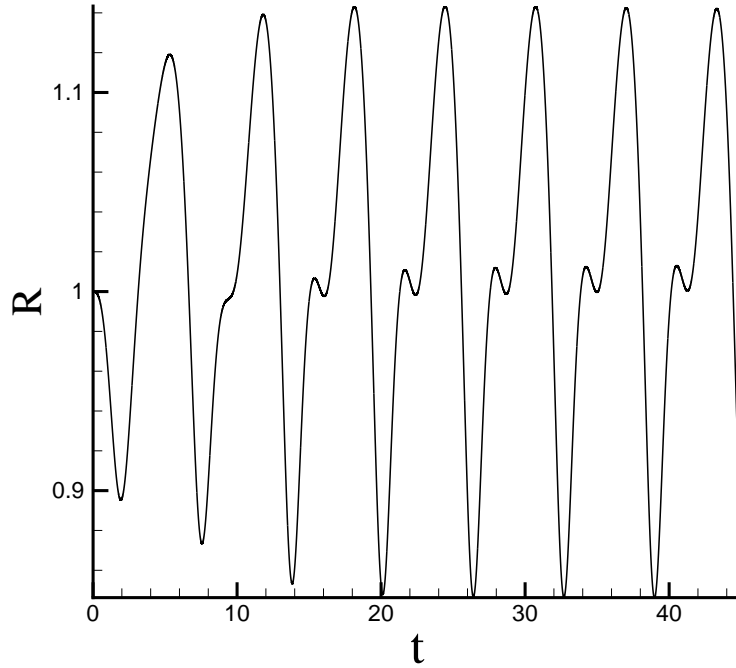


Figura 6.4: Comportamento oscilatório do raio da bolha imersa em fluido Newtoniano com $Re = 10$, $We = 5$ e $\epsilon = 0,3$.

6.2 Variações de Amplitude em Função do Campo

Como observado na seção anterior, é possível notar diferentes amplitudes em regime permanente, resultantes de diferentes campos aplicados. Quando o campo aplicado é modificado, existem dois mecanismos que descrevem a relaxação de um ferrofluido coloidal (Shliomis, 1974a). No primeiro mecanismo, a relaxação ocorre devido a própria rotação das partículas no líquido. No segundo, a relaxação é devido a rotação do dipolo magnético das partículas. Quando um ferrofluido é solidificado, por exemplo por meio de congelamento, apenas o segundo mecanismo opera. Esse mecanismo de rotação das partículas é caracterizado por um tempo de difusão Browniano (τ_B). O processo rotacional intrínseco é chamado de Mecanismo de Néel, caracterizado pela constante de tempo τ_N . A relaxação de Néel predomina e o momento de dipolo das partículas gira livremente (superparamagnetismo intrínseco).

$$\frac{\tau_N}{\tau_B} \ll 1 \quad (6.1)$$

por outro lado, considerando o dipolo fixo e sabendo que τ_N é o tempo associado com a rotação intrínseca do dipolo, pode-se considerar que τ_B é muito menor. Nesta condição, é como se o dipolo não girasse na mesma escala de tempo que τ_B . Diz-se que essa é a condição de bloqueio magnético:

$$\frac{\tau_N}{\tau_B} \gg 1 \quad (6.2)$$

sendo

$$\tau_N \sim e^{(a^3)} \quad (6.3)$$

e

$$\tau_B \sim a^3 \quad (6.4)$$

Normalmente, a relaxação Browniana é mais rápida que a relaxação de Néel quando as partículas possuem um tamanho considerável, cerca de 10nm para magnetita, 8,5nm para ferro e 4nm para cobalto (Rosensweig, 1987). Normalmente com 10nm a partícula já pode estar em condição de bloqueio.

Neste caso, o campo aplicado foi mantido, permitindo a observação da alteração da amplitude em regime permanente. Na figura 6.6, observa-se que a medida que o campo aplicado aumenta, a amplitude de oscilação do raio da bolha também cresce.

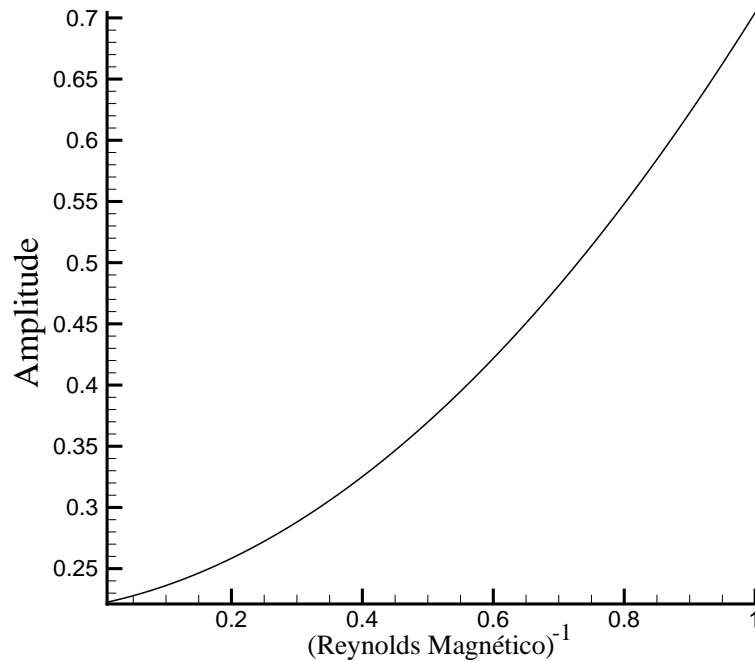


Figura 6.5: Amplitude de oscilação do raio da bolha em função de $\frac{1}{Re_{mag}}$, parâmetro proporcional ao campo externo aplicado

Isso mostra uma interessante condição de controle de comportamento da bolha que se mantém

estável apesar da maior amplitude de oscilação. Com o aumento do campo magnético aplicado, as escalas de tempo se tornam muito diferentes, fazendo com que o tempo de alinhamento dos dipolos magnéticos seja muito mais rápido do que das forças inerciais. Dessa forma, a bolha fica mais livre para oscilar em diferentes amplitudes. Por outro lado, ao diminuir o campo magnético, os efeitos viscosos se tornam mais presentes, dificultando o aumento de velocidade no movimento de expansão e contração da bolha.

6.3 Diagrama de Colapso

Uma vez que a bolha está, agora, sujeita a um campo magnético externo e imersa em um fluido magnético, é possível analisar como o conceito de colapso pode ser observado por meio do estudo do diagrama de colapso. Sob o efeito de um campo magnético variável, a viscosidade do fluido agindo nas partículas magnéticas faz com que a magnetização \mathbf{M} fique defasada em relação ao campo oscilatório \mathbf{H} . Com \mathbf{M} não paralelo com \mathbf{H} , existe uma densidade de torque $\mathbf{T} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$ agindo no ferrofluido (Zahn, 2001). Este torque faz com que as nanopartículas do ferrofluido rotacionem, resultando em um fluxo (em escala nanométrica) ao redor das partículas que pode resultar na diminuição da viscosidade efetiva do fluido, denominada ‘viscosidade negativa’ (Shliomis & Morozov, 1994; Bacri et al., 1995; Rosensweig, 1996; Zeuner et al., 1998).

Baseando-se nessa mudança dos efeitos viscosos devido a aplicação de um campo externo variável, é de se esperar que os critérios de colapsos sejam, também, modificados.

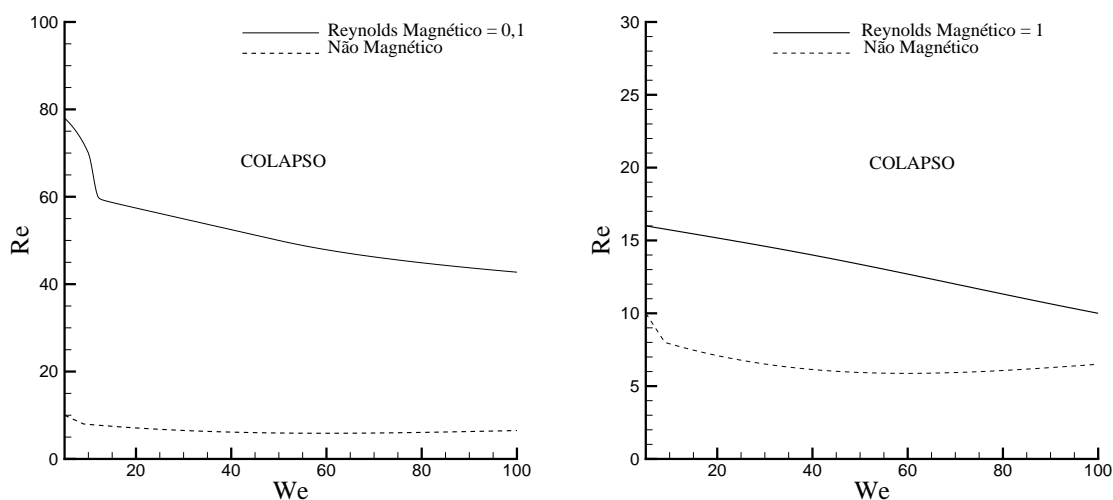


Figura 6.6: Comparação do diagrama de colapso, para diferentes valores de Re e We , para o caso magnético forte e unitário em comparação ao caso não magnético com $\epsilon = 0,5$.

Como pode ser visto na figura 6.5, para um campo magnético alto ($Re_{mag} = 0,1$), existe uma estabilização no movimento da bolha e seu colapso se torna mais difícil se comparado com o comportamento da bolha em fluido Newtoniano. Por outro lado, aumentando o Re_{mag} e diminuindo

o campo aplicado, a bolha está mais sujeita ao colapso. Como observado na seção *Excitação Senoidal* do presente capítulo, com o número de Reynolds Magnético unitário, as escalas de tempo atuam em conjunto no sistema, mas o movimento da bolha foge do padrão harmônico, o que nos indica o porquê dela se tornar mais suscetível ao colapso. As mudanças bruscas de velocidade e posição podem gerar focos de instabilidade, levando ao colapso. Por outro lado, com altos valores de campo magnético aplicado, a bolha funciona como um sistema subamortecido, sem maiores oscilações e mudanças bruscas de velocidade e posição. A longo prazo, sem alteração no campo aplicado, é possível que esse subamortecimento gere uma oscilação pequena no raio da bolha em torno de um ponto de operação.



Figura 6.7: Demonstração do momento de colapso de uma bolha de sabão. (Foto extraída de: <http://www.makeuponyourmind.com/capturing-the-moment-a-soap-bubble-bursts/>)

Observa-se, na figura 6.7 que, em diferentes fluidos, as bolhas reagem de formas diferentes ao colapso. No caso de uma bolha de sabão, por exemplo, o colapso pode ocorrer de duas formas principais: devido a diferenças bruscas na curvatura de sua superfície, que ocorrem devido a gravidade que drena o fluido constituinte da camada superficial para a parte inferior da bolha, fazendo com que essa camada se torne muito fina e não proporcione tensão superficial suficiente para conter o gás interno; ou ainda na forma de encolhimento, devido a transferência de ar de fora para dentro da bolha.

Este segundo caso se assemelha mais ao que pode ocorrer no caso da bolha imersa em um fluido magnético no caso de um campo alto aplicado. Por se tratar de um sistema subamortecido,

é possível que a amplitude de oscilação do raio da bolha vá diminuindo expressivamente até oscilar em torno do raio de equilíbrio ou, devido aos efeitos viscosos, colapse.

6.4 Tempo de Colapso

Visando determinar como o tempo de colapso se modificava em relação as variações no número de Reynolds Magnético e Susceptibilidade Magnética, apresenta-se o gráfico na figura 6.8. É possível notar que quando as escalas de tempo se encontram em uma escala de ordem um existe um atraso da condição de colapso da bolha. Da mesma forma, para valores de Re_{mag} pequenos (campo aplicado elevado) e muito grandes (campo aplicado pequeno) não existe colapso. No caso de Re_{mag} ordem unitária, os efeitos magnéticos se acoplam aos efeitos inerciais, tendo em vista que as escalas de tempo de atuação são comparáveis. Além disso, também existe acoplamento na escala de tempo referente à pressão aplicada (uma vez que a frequência $\omega = 1$).

Essa saturação do tempo de colapso com o Re_{mag} é perfeitamente aceitável, porque para Re_{mag} altos quem domina o movimento da bolha seria a inércia e os efeitos magnéticos passam a ser irrelevantes. De outra maneira estaríamos numa situação em que o tempo de relaxação de estruturas magnéticas deve ser muito maior do que um período de oscilação da bolha, que deve ser da ordem da escala de tempo inercial. Além disso, considerando $\omega = 1$ e adimensionalizando com o tempo inercial t_i , tem-se $Re_{mag} = t_{mag}/t_i = 1$ e $t_{period} = (2\pi/\omega)/t_i$. Desta maneira, a escala de tempo magnética seria maior que o período de oscilação da bolha, o que pode não refletir corretamente como o magnetismo influencia em cada período de oscilação separadamente.

Esse primeiro platô demonstra que quando o tempo de relaxação magnética é muito pequeno, os efeitos magnéticos sobre a bolha são muito intensos. Se o tempo de oscilação da bolha é muito maior que t_{mag} , ocorre um alinhamento quase instantâneo das partículas, de modo que a bolha é vista quase como estacionária, dada a pequena escala de tempo magnética. Esse comportamento tende a favorecer o colapso da bolha até um valor mínimo.

Refletindo sobre o significado físico destes platôs identificáveis no gráfico, desenvolveu-se uma nova formulação para o tensor de tensões sem a componente H_θ . Imaginando que toda a formulação da equação de Rayleigh-Plesset foi feita baseando-se apenas no movimento radial, ou seja, baseando-se no fato da bolha continuar esférica mesmo tendo uma componente tangencial do campo acreditou-se que isso poderia gerar discrepâncias físico-matemáticas. Na realidade, a bolha deveria sofrer deformações e esta falta de deformações inibiria uma dimensão do movimento.

Para essa nova formulação, considerou-se:

$$\sigma_{rr} = \mu_0 \left(\frac{1}{2} + \chi \right) H_r^2 \quad (6.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu_0 H_r^2}{2} \quad (6.6)$$

Desta maneira, efetuando o mesmo procedimento algébrico realizado anteriormente para a

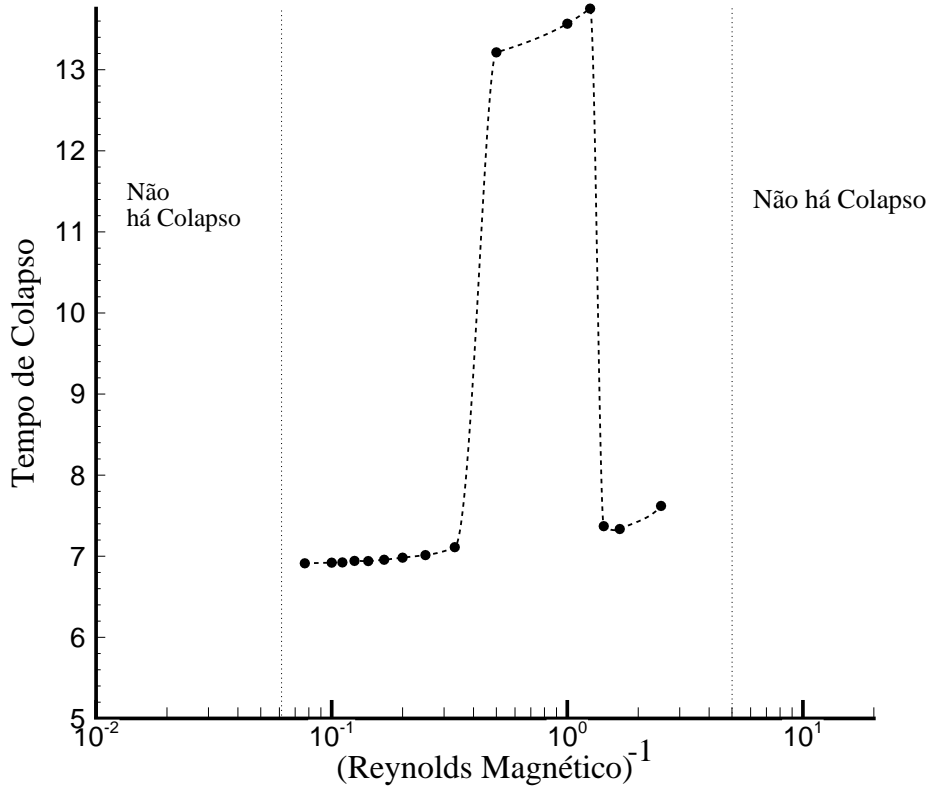


Figura 6.8: Tempo de colapso em função de $\frac{1}{Re_{mag}}$ com a componente H_θ

formulação magnética completa, obtém-se a seguinte modificação na equação de Rayleigh-Plesset:

$$\frac{1}{Re_{mag}} \left[\left(\frac{3}{4} + \chi \right) \ln \left(\frac{R_\infty}{R} \right) - \frac{1}{8} \right] \quad (6.7)$$

resultando na equação de Rayleigh-Plesset modificada:

$$R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} (\dot{R}^*)^2 = \frac{2}{We} \left[\frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{1}{R^*} \right] - 1 - \varepsilon^* \text{sen}(\omega^* t^*) + \frac{1}{(R^*)^{3n}} - \frac{4}{Re} \frac{\dot{R}^*}{R^*} + \frac{1}{Re_{mag}} \left[\left(\frac{3}{4} + \chi \right) \ln \left(\frac{R_\infty}{R} \right) - \frac{1}{8} \right]. \quad (6.8)$$

Entretanto, com essa extensão equação de Rayleigh-Plesset magnética sem a componente azimutal, os resultados qualitativos não foram muito diferentes, mostrando que, na realidade, o acoplamento das escalas de tempo é de extrema importância. Nota-se na figura 6.9 que também tem-se a existência de platôs com menor tempo de colapso e certos valores de Reynolds Magnético para os quais o tempo de colapso é maior. Mostrando a relação entre as escalas de tempo.

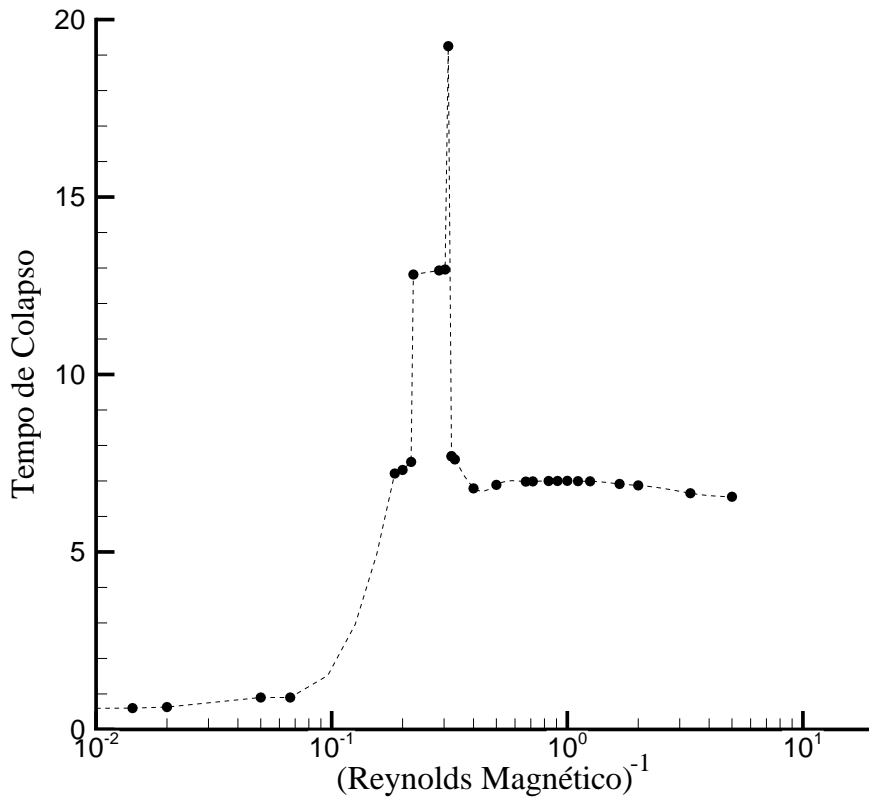


Figura 6.9: Tempo de colapso em função de $\frac{1}{Re_{mag}}$ sem a componente H_θ

É possível notar na figura 6.8 que também existe um maior tempo para o colapso quando Re_{mag} possui ordem unitária. Por outro lado, quando o campo magnético aplicado é baixo, o tempo para o colapso é pequeno, uma vez que as escalas de tempo inerciais passam a controlar o movimento. Uma vez que os número adimensionais Reynolds e Weber utilizados foram da ordem de 20 e a amplitude do campo de pressão aplicado, ϵ , foi de 0,6, espera-se que o comportamento da bolha seja extremamente caótico, devido às condições adversas.

Essas alterações do tempo de colapso com o Re_{mag} são perfeitamente aceitáveis, porque para Re_{mag} altos quem domina o movimento da bolha são os feitos de inércia e os efeitos magnéticos passam a ser irrelevantes. De outra maneira estaríamos numa situação em que o tempo de relaxação de estruturas magnéticas deve ser muito maior do que um período de oscilação da bolha, que deve ser da ordem da escala de tempo inercial.

Para $0,1 < Re_{mag} < 1$, nota-se um platô e uma menor oscilação entre o tempo de colapso, que se mantém constante na ordem 7. Essas variações são de extrema importância no que diz respeito ao comportamento da bolha, uma vez que toda a formulação magnética depende do tensor de tensões magnético. A alteração da equação de Rayleigh-Plesset, neste ponto, não modifica o tipo de comportamento obtido, entretanto muda como o sistema reage às deformações que podem existir

sendo representadas apenas na direção radial.

Em suma, observa-se que quando as escalas de tempo magnética e inercial são comparáveis, pode existir um atraso no colapso da bolha. Por outro lado, considerando a formulação magnética com a componente H_θ , é possível notar que quando a componente inercial ou a componente magnética prevalece (campo aplicado baixo e alto, respectivamente), não há colapso, demonstrando que o acoplamento se faz necessário para que tenhamos diferentes compartimentos dinâmicos.

6.5 Padrões Vibracionais

Assim como definido na figura 5.18, o mesmo estudo de padrões vibracionais foi refeito para o caso magnético. Como já dito anteriormente, o magnetismo cria ainda mais não-linearidades. Por este motivo, é notável que o sistema fique mais sensível às mudanças. Neste caso, foi feito um estudo se baseando no número de Reynolds Magnético e na Susceptibilidade Magnética. A medida que o número de Reynolds Magnético diminui, aumentando o campo aplicado, é possível notar que o sistema fica mais sensível e mais padrões vibracionais ficam visíveis, como visto na figura 6.10.

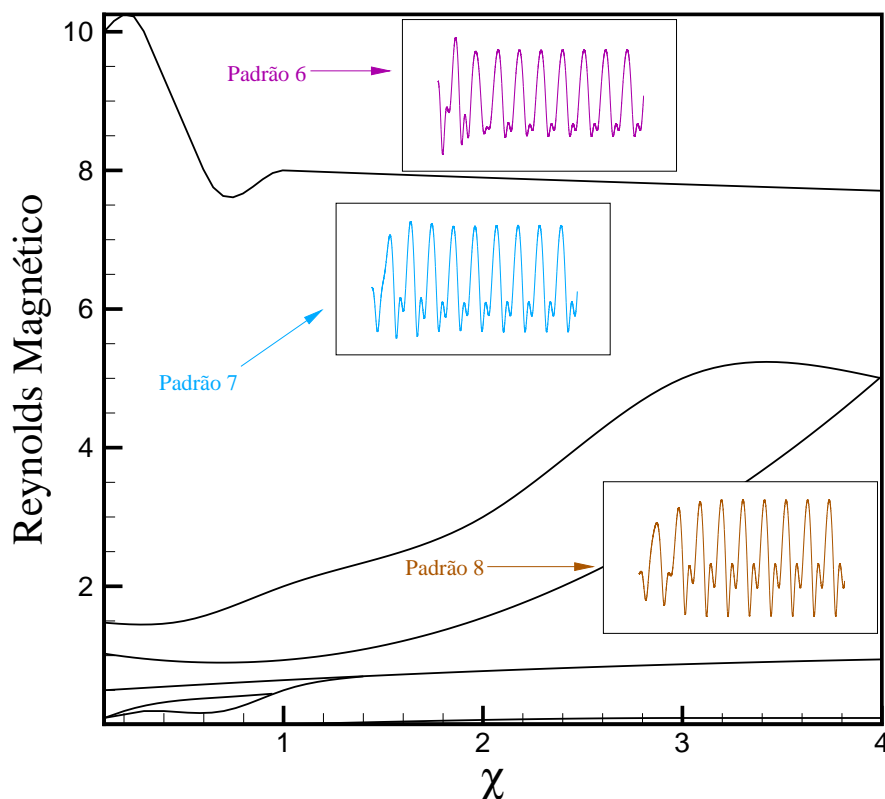


Figura 6.10: Padrões vibracionais identificados em função do número de Reynolds Magnético e Susceptibilidade Magnética. Para os testes $Re = 10$, $We = 5$ e $\epsilon = 0,5$.

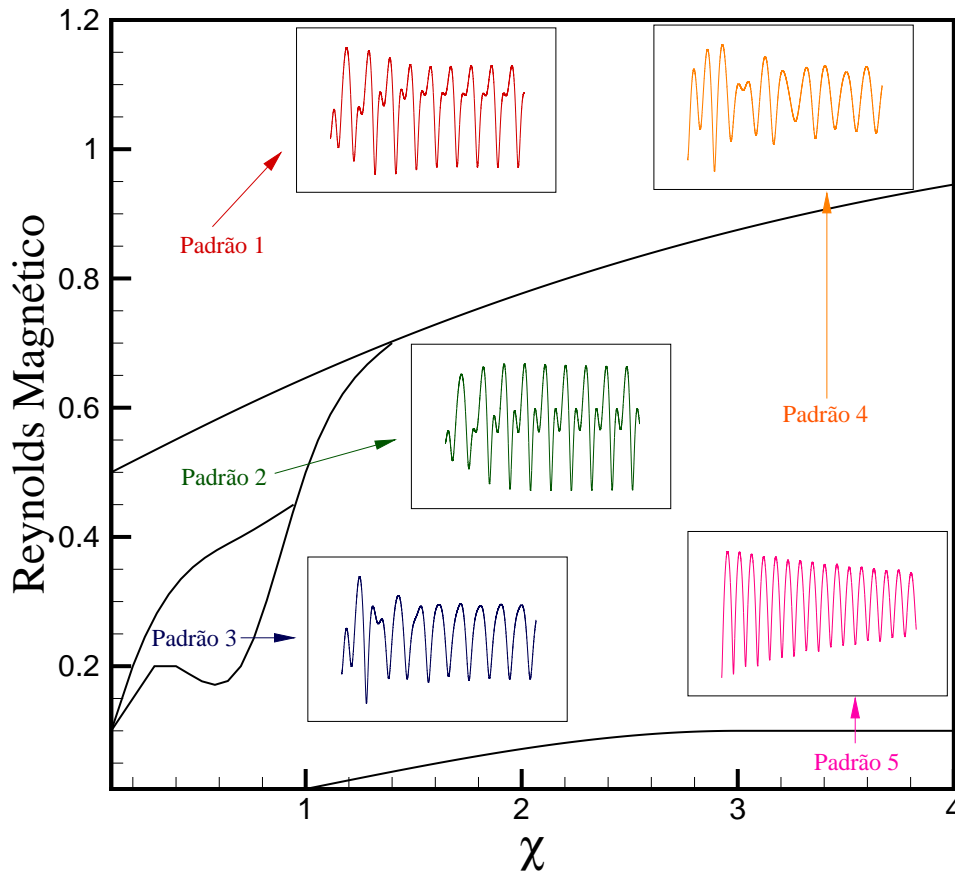


Figura 6.11: Ampliação nas regiões de baixo Reynolds Magnético. Para os testes $Re = 10$, $We = 5$ e $\epsilon = 0,5$.

Percebe-se, a partir das figuras 6.10 e, em adição, 6.11, a existência de 8 padrões identificáveis em função dos valores do número de Reynolds Magnético e Susceptibilidade Magnética. É possível notar que alguns padrões não são tão diferentes entre si quando o sistema é observado em função do tempo. Nota-se uma semelhança qualitativa grande entre os padrões vibracionais identificados na figura 6.10 e entre as condições de deformabilidade. Entretanto, ao observar a resposta do raio da bolha na frequência e no diagrama de fase notam-se extensas diferenças. A figura 6.11 expressa uma ampliação na região de pequenos números de Reynolds e Weber, na qual o sistema se mostra mais sensível.

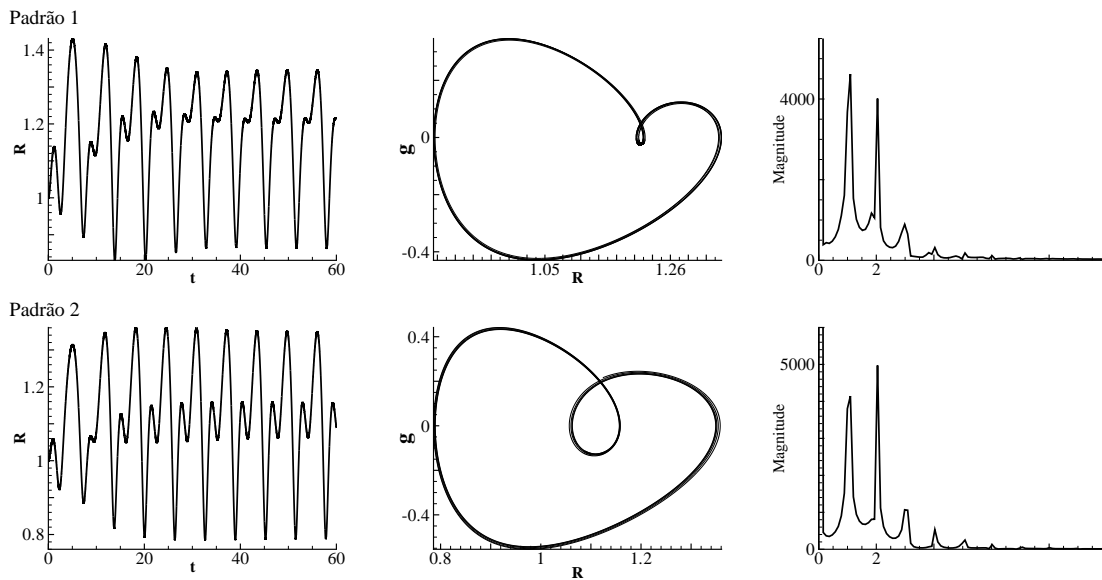


Figura 6.12: Padrão 1 e 2 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência.

A figura 6.12 mostra os padrões 1 e 2 representados no tempo, na frequência e no espaço de fase. É possível observar que no padrão 1 o sistema possui mais de uma frequência natural. Em comparação com o padrão 2, por outro lado, nota-se que a frequência primária de oscilação possui maior amplitude que a secundária. Este comportamento é contrário no padrão 2. A não-linearidade, observada no primeiro padrão no gráfico da resposta no tempo, parece ocorrer no pico do gráfico. Por outro lado, no segundo padrão, essa não-linearidade ocorre no centro do gráfico. Isso é demonstrado no diagrama de fase, no qual existem dois círculos de energia, mostrando a existência de dois modos de vibração ou dois graus de liberdade com diferentes períodos.

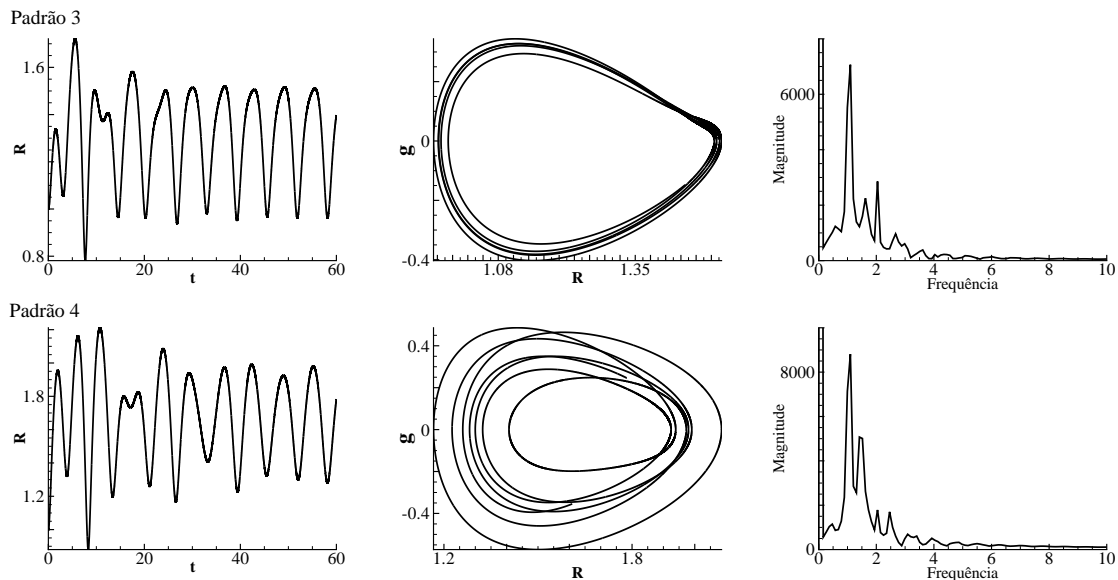


Figura 6.13: Padrão 3 e 4 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência.

Os padrões 3 e 4 estão explícitos na figura 6.13. No padrão 3 é possível notar uma maior semelhança com um sistema de oscilação harmônico. No diagrama de fase, por exemplo, tem-se uma resposta que se assemelha ao sistema harmônico: um círculo de energia. Da mesma forma, sua resposta no domínio da frequência possui maior amplitude em apenas uma frequência. Majoritariamente, o sistema possui uma frequência de vibração.

Por outro lado, o padrão 4 não possui uma frequência de vibração bem estabelecida e tende a oscilar sem adquirir um modo de vibração em regime permanente. Como se observa no espaço de fase, o sistema nunca mantém seu nível de energia e se mantém oscilando em diferentes níveis.

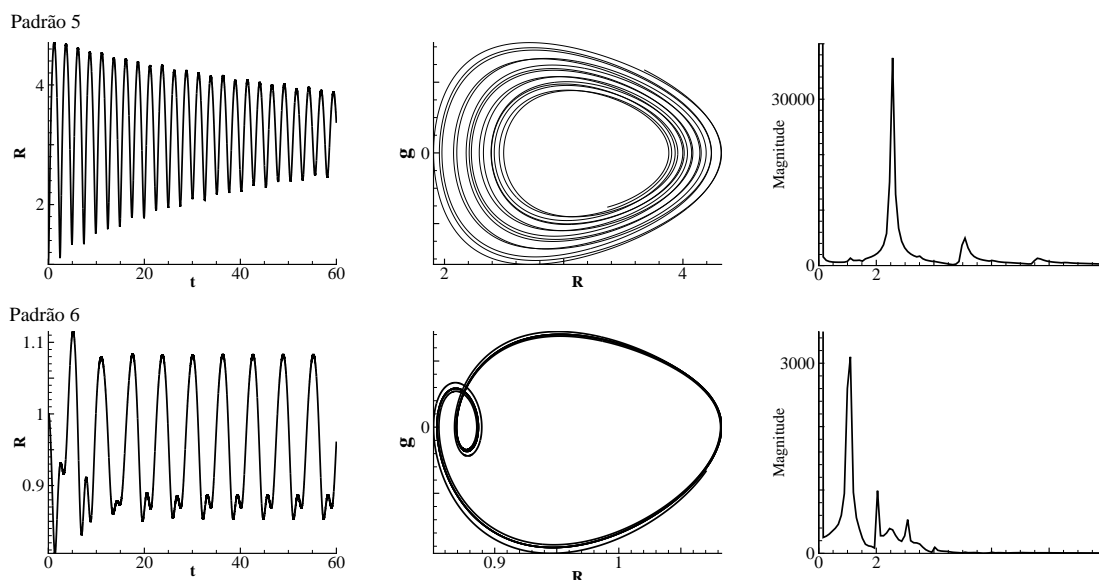


Figura 6.14: Padrão 5 e 6 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência.

O padrão 5, mostrado na figura 6.14, apresenta um padrão subamortecido. Em sistemas dinâmicos, os padrões subamortecidos acontecem quando o fator de amortecimento se encontra entre 0 e 1. Normalmente, esses sistemas apresentam uma resposta senoidal com decaimento exponencial. É possível, pelo diagrama de fase, perceber que a energia diminui neste sistema. É possível notar também picos de amplitude em frequências igualmente espaçadas. Estes picos possuem diferentes amplitudes, mostrando o decaimento de energia do sistema.

O padrão 6, por sua vez, apresenta uma leve deformação no vale de sua oscilação. Em comparação com o padrão 1, é possível observar que quando essa deformação ocorre no vale existe uma deformação no diagrama de fase no quadrante esquerdo. No caso do padrão 1, como essa deformação se dá no pico, ela é representada no quadrante direito do diagrama de fase.

Os padrões 7 e 8, apresentados na figura 6.15 se assemelham pelo tipo de deformação. Entretanto, nota-se que no padrão 7 a deformação ocorre no vale, da mesma forma que no padrão 6, porém de forma mais intensa. É possível observar isso pela amplitude do círculo secundário de energia no diagrama de fase. No padrão 8 a deformação se torna mais evidente e ocorre no centro da resposta no tempo. Em comparação com os outros padrões, é possível observar, no diagrama de fase, o círculo secundário no centro. Além disso, na resposta em frequência, observa-se que

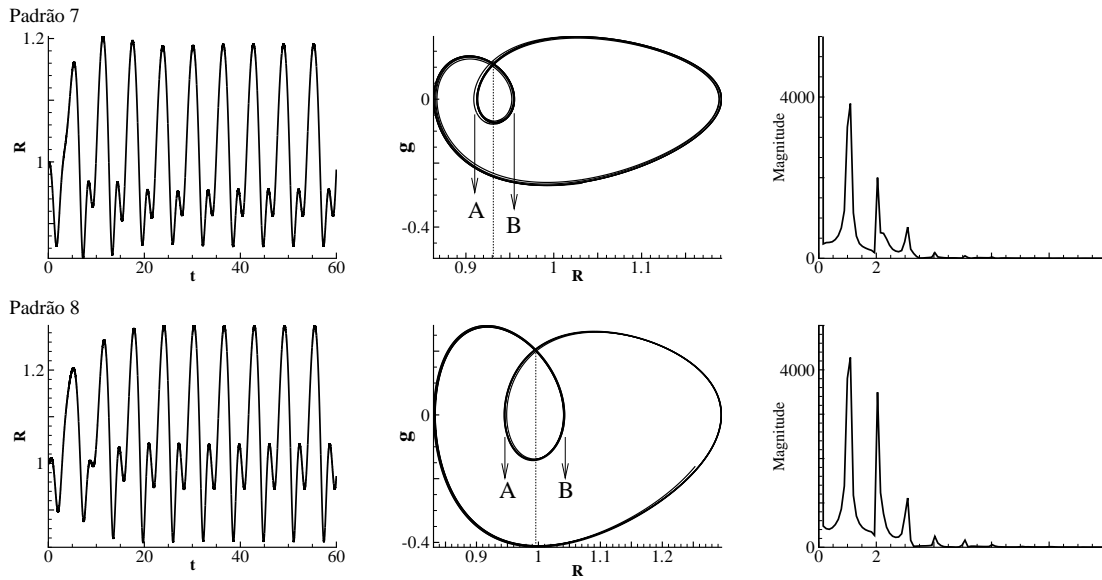


Figura 6.15: Padrão 7 e 8 em suas respectivas respostas no tempo, espaço de fase e na frequência.

existe uma diferença menor entre as amplitudes dos três picos de frequência principais. É possível observar a variação de local do segundo ciclo limite. No diagrama de fase do padrão 7, tem-se o início do segundo ciclo limite, ou seja, a descrição do período do segundo modo de vibração em $R = 0,93$. Além disso, a separação entre os pontos A e B vale $0,048534$. Por outro lado, no padrão 8, tem-se esse início em $R = 0,99$ e a separação entre os pontos A e B vale $0,004563$. Neste caso, observa-se que o padrão 8 possui quase 10% do tamanho original do segundo ciclo limite presente do padrão 7.

6.6 Influência da Susceptibilidade Magnética

A resposta do material a um campo aplicado, caracterizada pelo comportamento da magnetização, é representada pela susceptibilidade magnética. Este resposta ao campo aplicado descreve, juntamente da permeabilidade magnética do meio, o comportamento magnético do material. Em alguns casos, como nos materiais diamagnéticos, a susceptibilidade é pequena e negativa. Em outros casos a relação entre magnetização e campo aplicado não é linear, de modo que a susceptibilidade magnética varia com a intensidade de campo magnético. Os materiais paramagnéticos são materiais cujos átomos possuem momentos de dipolo magnéticos permanentes. Quando um campo magnético externo é aplicado ao material, os dipolos tende a alinhar-se com o campo, sendo que o vetor soma dos momentos de dipolo individuais não é mais nulo. O campo dentro do material tem agora dois componentes: o campo aplicado e o campo induzido proveniente da magnetização ou orientação dos dipolos.

A agitação térmica dos átomos tende a perturbar o alinhamento dos dipolos e, conseqüentemente, a magnetização diminui com o aumento da temperatura. A magnetização alcança o seu valor máximo quando todos os dipolos estão alinhados. Quando o campo externo é removido da amostra paramagnética, a agitação térmica faz com que os momentos de dipolo magnético tenham novamente direções aleatórias. As forças magnéticas entre os átomos são muito fracas para manter o alinhamento.

Os efeitos ferromagnéticos assim como os paramagnéticos ocorrem em materiais cujos átomos possuam momentos de dipolo magnéticos resultantes. O que diferencia os materiais ferromagnéticos dos paramagnéticos é que nos primeiros existe uma forte interação entre momentos de dipolo atômicos vizinhos que os mantêm alinhados, mesmo quando o campo magnético externo é removido. Se isto ocorre ou não, depende da intensidade dos dipolos atômicos e da separação entre os átomos do material. No caso da figura 6.16(a) e (b), por exemplo, observa-se que para materiais com magnetização superparamagnética, a susceptibilidade afeta diretamente o comportamento do mesmo: quando maior a susceptibilidade, maior o alinhamento de \mathbf{M} e \mathbf{H} . Existem várias formulações de magnetização, além da superparamagnética. Um exemplo é mostrado na figura 6.16(c).

Baseando-se nestas considerações, foi feito um estudo baseado na influência da susceptibilidade a partir de um Reynolds Magnético constante. A figura 6.17 mostra o comportamento do raio da bolha no tempo em função de $\chi = 0,1$, $\chi = 1$, $\chi = 5$ e $\chi = 10$. Observa-se que para $Re_{mag} = 1$, o aumento da susceptibilidade magnética produz uma maior distorção nos ciclos dos diagramas de fase do sistema. Entretanto, esse comportamento satura. É possível notar da figura 6.18 que o segundo círculo de energia aparenta possuir o mesmo diâmetro nos casos de $\chi = 5$ e $\chi = 10$. Na figura 6.18, nota-se uma variação da localização da deformação. O valor de R no ponto A representa o local da deformação ou do início de um outro período diferente de vibração. Quando o mesmo se encontra em $R = 1$, tem-se a deformação no raio de equilíbrio, ou seja, no centro da resposta no tempo. O tamanho do segundo ciclo limite, determinado pela distância apresentada pela linha pontilhada varia em função do tamanho da deformação e da influência dos modos de vibração secundários. Essa distância para $\chi = 0,1$ vale 0,0777843, para $\chi = 0,5$ tem-se o 33%

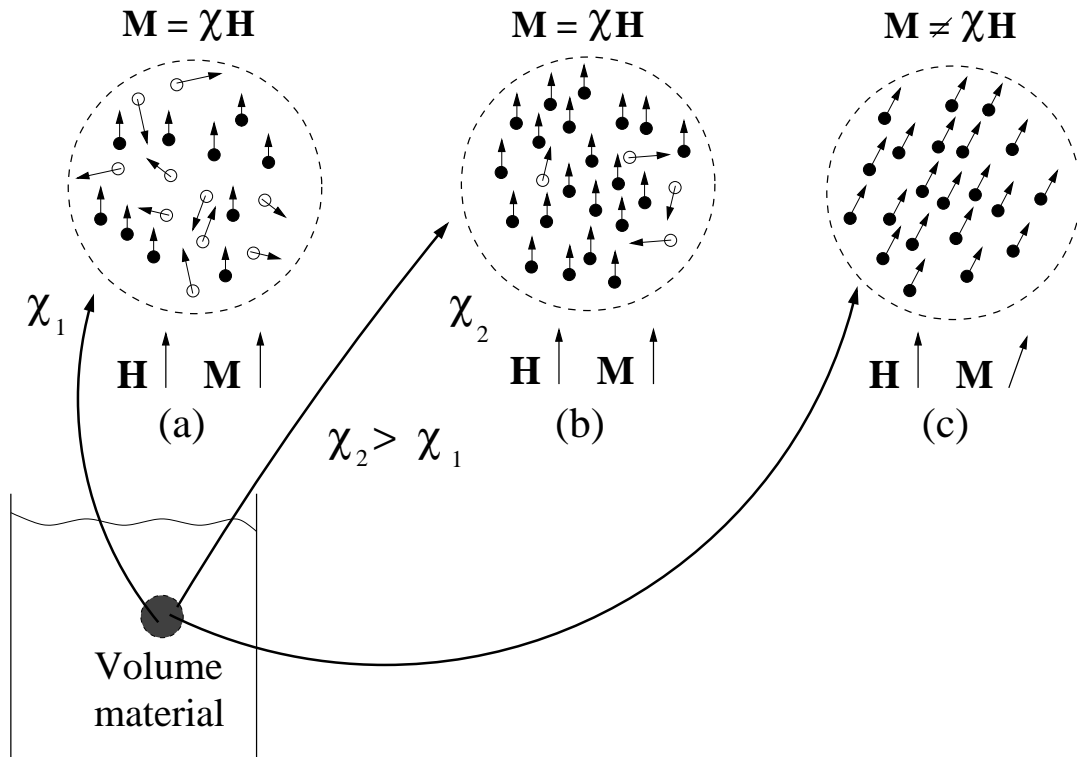


Figura 6.16: (a) Material com comportamento superparamagnético e baixa susceptibilidade; (b) Material com comportamento superparamagnético e alta susceptibilidade; e (c) material com magnetização diferente da superparamagnética - neste caso, não existe alinhamento de \mathbf{H} e \mathbf{M} .

deste valor. À medida que aumenta-se a susceptibilidade, também aumentamos o tamanho deste segundo ciclo limite e sua deformação. Para $\chi = 5$, o tamanho do segundo ciclo equivale a 550% do ciclo observado para $\chi = 0, 1$. No caso de $\chi = 10$, tem-se 270%.

Na figura 6.19, por outro lado, observa-se uma mudança em χ com $Re_{mag} = 0, 1$. Neste caso, o campo magnético aplicado é alto. Por este motivo, o sistema se torna mais suscetível aos efeitos não-lineares e qualquer alteração em χ gera um novo padrão de vibração. Nota-se que quando $\chi = 1$, o sistema se torna incontroleável, não-periódico e não-harmônico. Ao elevar o χ para 5, tem-se uma alteração expressiva no padrão, que se torna subamortecido. Este movimento subamortecido mostra a dissipação de energia de oscilação da bolha. Quando $\chi = 10$, o comportamento da bolha se torna muito semelhante aos comportamentos apresentados no caso de $Re_{mag} = 1$. Ao contrário do número de Reynolds Magnético, a susceptibilidade é diretamente proporcional a não-linearidade da bolha. Quando $\chi = 0, 1$, a característica não-linear da equação de Rayleigh-Plesset magnética, representada pelo logaritmo natural, é atenuada. Por este motivo, com $\chi = 0, 1$, tem-se o resultado mais semelhante ao comportamento harmônico e periódico.

No caso da figura 6.20 é importante considerar as diferenças no espaço de fase, mostrando como o sistema pode ser considerado caótico ou não. Para $\chi = 0, 1$, observa-se um sistema controlável com apenas um ciclo limite. Neste caso, não existe dissipação de energia e a deformação é gerada pela não-harmonicidade do movimento oscilatório. Por outro lado, quando $\chi = 1$, o sistema

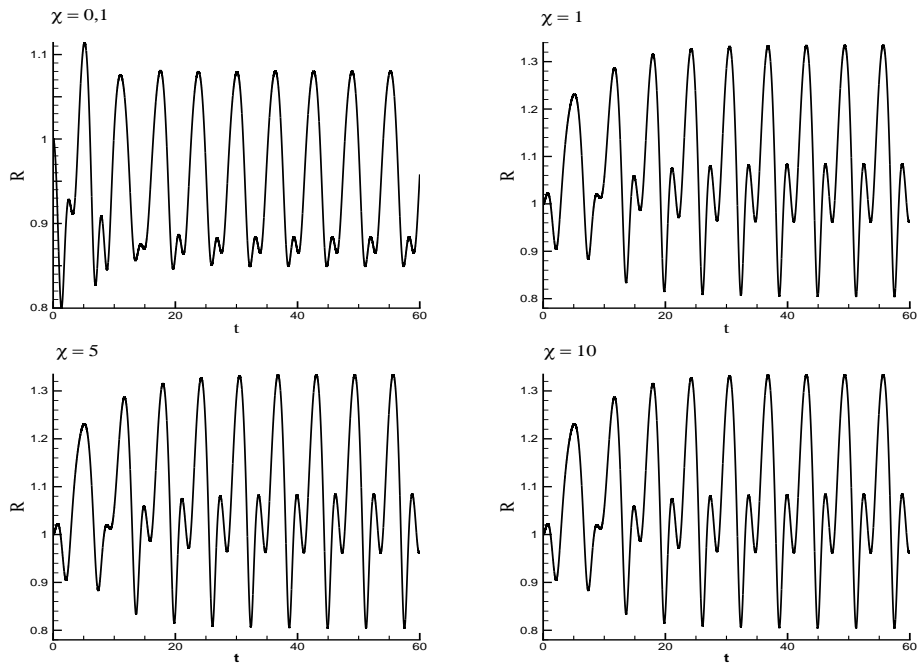


Figura 6.17: Comportamento do raio da bolha em função da variação do χ para $Re_{mag} = 1$.

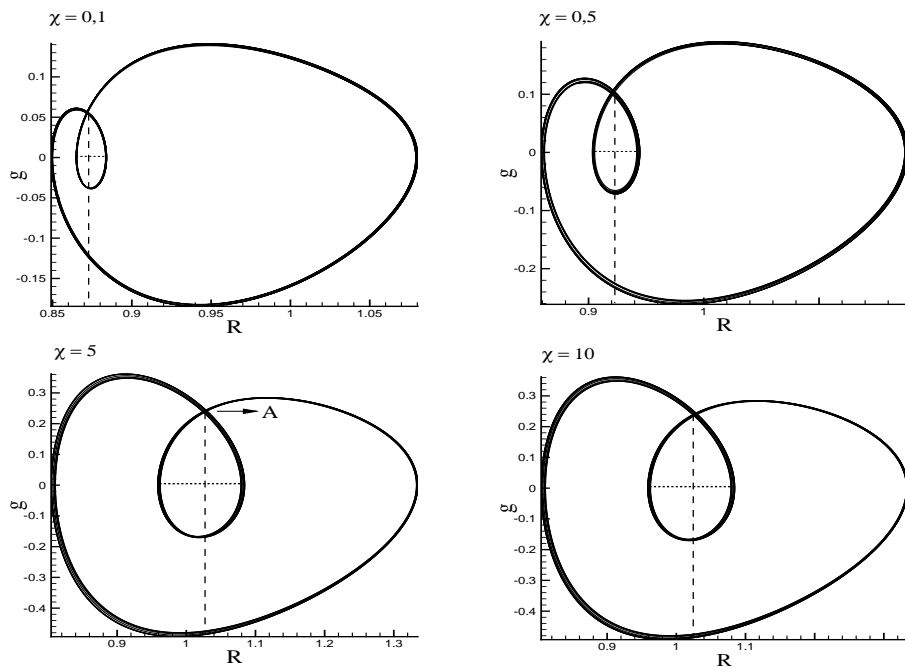


Figura 6.18: Comportamento do raio da bolha no diagrama de fase em função da variação do χ para $Re_{mag} = 1$.

é absolutamente caótico. Não existem trajetórias repetidas e um numero grande de atratores, criando uma imprevisibilidade no sistema.

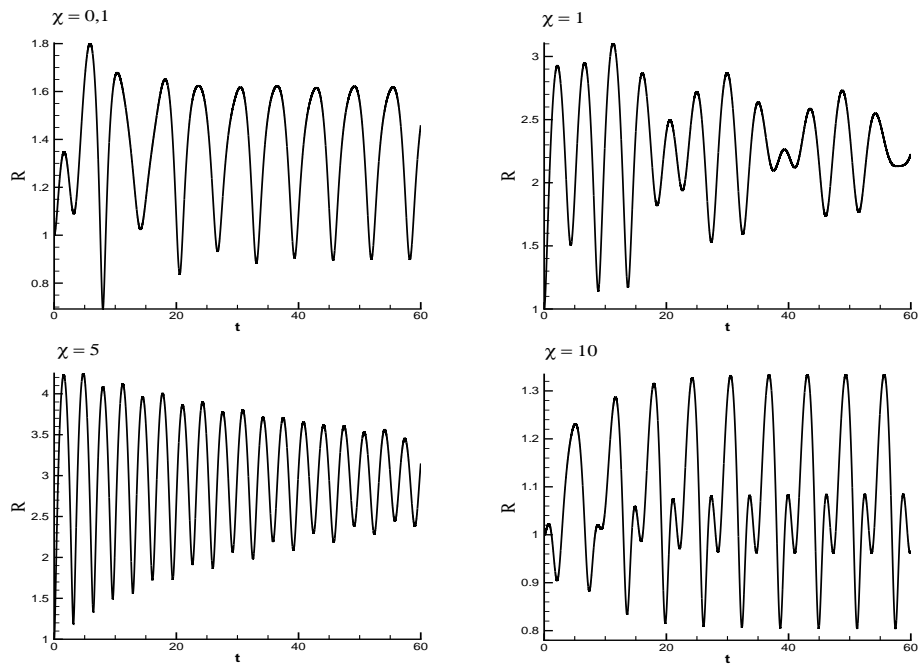


Figura 6.19: Comportamento do raio da bolha em função da variação do χ para $Re_{mag} = 0, 1$.

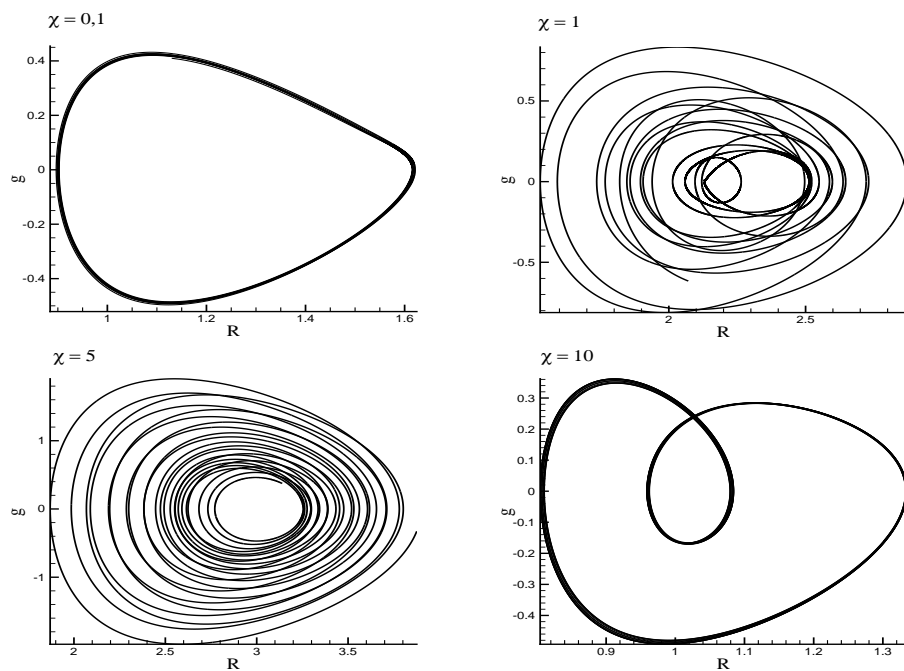


Figura 6.20: Comportamento do raio da bolha no diagrama de fase em função da variação do χ para $Re_{mag} = 0, 1$.

Com $\chi = 5$ também tem-se uma trajetória caótica. Entretanto, esta é chamada de trajetória convergente. Neste caso, existe uma diminuição das distâncias entre as trajetórias a medida que

estas se aproximam do ponto de atração que, neste caso, é a origem do sistema. Quando $\chi = 10$, nota-se um resultado muito semelhante ao obtido com $Re_{mag} = 1$, como dito anteriormente.

6.7 Pressão no Interior da Bolha

Considerando que dentro da bolha segue a chamada transformação politrópica. Esta transformação é uma transformação termodinâmica na qual a pressão e o volume de um gás (normalmente considerado ideal) são relacionados por uma expressão da forma:

$$P_g V_g^n = \text{constante} \quad (6.9)$$

considerando essa condição como verdade, admite-se que, no equilíbrio:

$$P_g V_g^n = \text{constante} = \tilde{P}_g V_E^n \quad (6.10)$$

na qual \tilde{P}_g é a pressão no equilíbrio, assim como V_E , que é o volume de equilíbrio. Desta forma, tem-se:

$$P_g = \tilde{P}_g \left(\frac{V_E}{V_g} \right)^n \quad (6.11)$$

Considerando o volume da bolha, tem-se:

$$P^* = \left(\frac{1}{R^*} \right)^n \quad (6.12)$$

Da mesma maneira, a derivada da pressão será dada por:

$$\frac{dP^*}{dt} = (-3nR^{-3n-1}) \dot{R} \quad (6.13)$$

Determinando qual a pressão dentro da bolha, é possível observar como isso afeta o comportamento oscilatório do raio da bolha. Mudanças bruscas na pressão geram bruscas reações no raio da bolha. Além disso, quando a pressão diminuir, o raio tende a aumentar, gerando a expansão da bolha.

No padrão 1 da figura 6.21, por exemplo, é possível notar a existência de bruscas mudanças de pressão dentro da bolha, levando a um movimento periódico e não-harmônico. Essas mudanças bruscas geram esse comportamento angulado no espaço de fase. Como o sistema oscila de duas formas diferentes, perdendo energia em alguns pontos, existem dois ciclos de energia representados no espaço de fase. Por meio da Transformada de Fourier, é possível observar a existência de várias frequências, caracterizando o comportamento não-harmônico. Este padrão representa o comportamento da pressão dentro da bolha para $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,5$, $Re_{mag} = 1$ e $\chi = 1$.

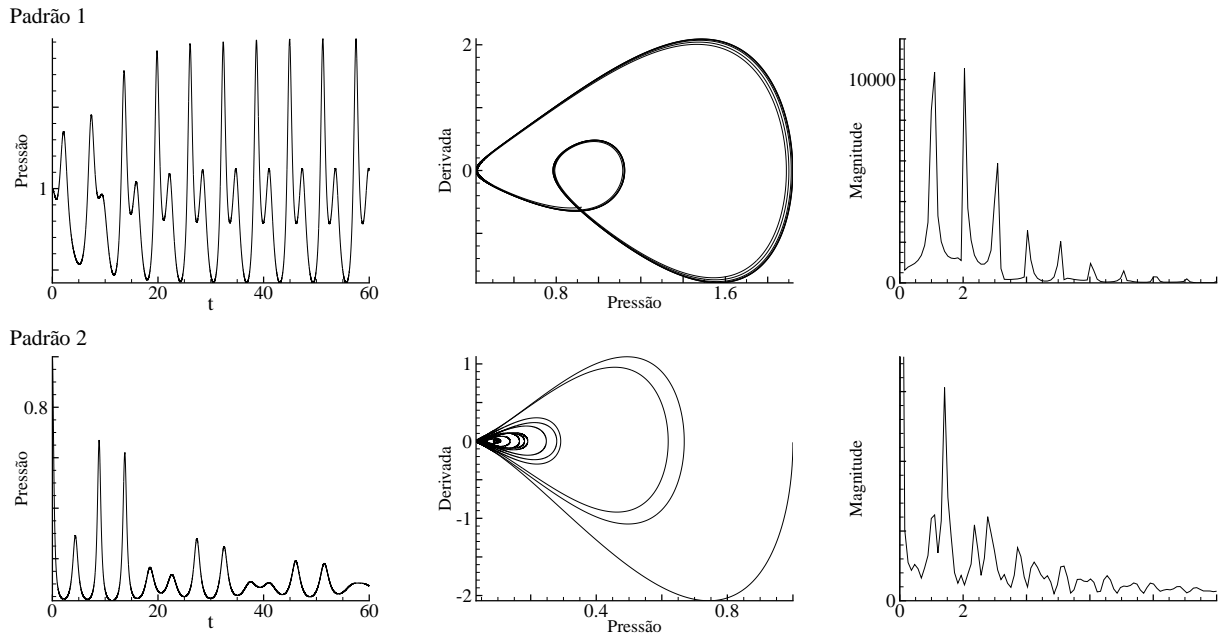


Figura 6.21: Comportamento da pressão dentro da bolha representado no tempo, no diagrama de fase e na frequência para diferentes combinações de parâmetros adimensionais.

No padrão 2, $Re = 10$, $We = 5$, $\epsilon = 0,5$, $Re_{mag} = 0,1$ e $\chi = 10$. É possível perceber uma diminuição na amplitude da resposta da pressão no tempo. Entretanto, o sistema se torna extremamente caótico, como pode ser observado pelo espaço de fase. Este sistema vai perdendo energia e tende a um ponto focal no zero, o que levaria a bolha ao colapso, provavelmente. Isso também pode ser observado pela Transformada de Fourier. Nesta, existem várias frequências com diferentes amplitudes, mostrando a presença de várias harmônicos e, desta forma, diminuindo a energia nos primeiros harmônicos. Quanto mais harmônico e periódico for o sinal, a densidade de potência do sistema se aloca em um número menor de frequências. A medida que o sistema se torna mais não-linear, essa energia sofre um espalhamento espectral e o sistema passa a ter respostas em diferentes harmônicos.

No caso da figura 6.22, apresentam-se mais dois padrões. O padrão 3, representando $Re = 15$, $We = 5$, $\epsilon = 0,5$, $Re_{mag} = 1$ e $\chi = 0,1$ e no padrão 4 se tem $Re = 15$, $We = 5$, $\epsilon = 0,7$, $Re_{mag} = 0,6$ e $\chi = 0,1$. Observa-se que não existe tanta discrepância entre os dois padrões. A principal diferença apresentada está no diagrama de fase: a amplitude do segundo ciclo limite no diagrama de fase que, no caso do padrão 4 é maior, uma vez que a própria amplitude da deformação presente na resposta no tempo é maior. Além disso, na Transformada de Fourier do padrão 4, observa-se um pico de maior amplitude na frequência adimensional 3.

É possível notar que, com o aumento da amplitude da pressão de excitação e do campo magnético aplicado, a pressão dentro da bolha aumenta. Esse comportamento também apresenta uma oscilação mais rápida, com diferentes frequências. Por este motivo, qualquer alteração gera uma grande não-linearidade no sistema e a bolha responde de maneiras tão distintas, como mostrado nos padrões vibracionais estudados.

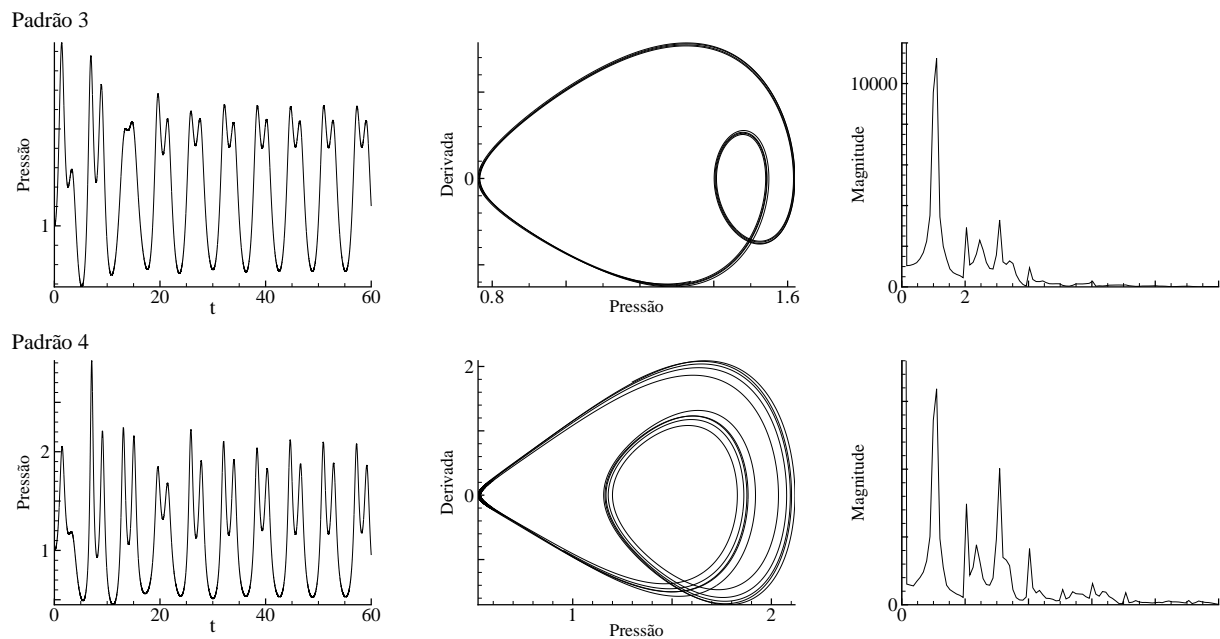


Figura 6.22: Comportamento da pressão dentro da bolha representado no tempo, no diagrama de fase e na frequência para diferentes combinações de parâmetros adimensionais.

Apesar disso, a maior diferença se faz presente com o aumento do campo magnético e da susceptibilidade magnética. Nesta formulação de Rayleigh-Plesset magnética as não-linearidades aumentam e aparecem de forma logarítmica. Essa condição é principalmente afetada pelo Reynolds Magnético, mas também pela suscetibilidade. Uma vez que a bolha é extremamente sensível aos movimentos bruscos, qualquer aplicação de campo magnético alto faz com que os dipolos se alinhem quase instantaneamente, gerando efeitos viscosos bruscos. Esses efeitos geram deformações na bolha, entretanto, como a formulação foi baseada no movimento radial, as mesmas não são percebidas e acabam se manifestando de formas diferentes. Essas compensações geram muitos resultados altamente não-lineares, sensíveis e, em alguns casos, caóticos.

Capítulo 7

Conclusão

Este trabalho investigou o movimento oscilatório de uma bolha imersa em um fluido magnético sujeita a um campo externo. Além disso, considerou-se a presença de um campo de pressão harmônico. A equação governante do movimento radial de oscilação da bolha, neste contexto, denominada equação de Rayleigh-Plesset magnética, por possuir características fortemente não-lineares mostra diferentes possibilidades de resposta ao *input* senoidal do campo de pressão excitante. Neste sentido, este trabalho procurou fazer uma análise utilizando uma metodologia própria a fim de buscar as possíveis interpretações físicas de como os principais parâmetros do problema influenciam a resposta da bolha.

Para interpretar fisicamente como o comportamento oscilatório da bolha pode ser modificado com diferentes parâmetros aplicados, uma série de ferramentas foi utilizada. Dentre elas o diagrama de colapso, estudo no espaço da frequência, resposta no tempo, espaço de fase e diagramas de bifurcação. Estas são capazes de fornecer informações importantes do comportamento da bolha em diferentes aspectos físicos. Além disso, mostraram-se muito eficazes do ponto de vista da análise de estabilidade e controle do sistema dinâmico. As nuances geradas pelas não-linearidades do sistema podem ser identificadas e quantificadas por meio de diferentes ferramentas. Estas são, em determinadas situações, mais sensíveis à pequenas variações.

Neste sentido, a combinação destas ferramentas compreende uma nova metodologia para análise de sistemas dinâmicos. E esta é uma das contribuições do presente trabalho.

A parte inicial do trabalho teve como foco a análise do sistema sem a consideração de efeitos magnéticos. Esta etapa serviu para a criação deste arcabouço de ferramentas. Para a resolução da equação governante do problema, empregou-se o método de Runge-Kutta de 5ª ordem com passo de tempo adaptativo. Este método se mostrou extremamente eficiente, diminuindo o tempo necessário para as iterações com pequenos passos de tempo. Para o caso não magnético, foi desenvolvida uma teoria assintótica para pequenas perturbações do campo de pressão a fim de validar a metodologia numérica empregada na solução da equação de Rayleigh-Plesset. Para essa solução linearizada, todo um estudo de análise dinâmica linear foi empregado, admitindo a análise de observadores e controladores e estabilidade no espaço de estados.

Ainda para o caso não-magnético, estudou-se como as condições iniciais afetam o comporta-

mento da bolha oscilante. Para isso, duas metodologias foram aplicadas: uma delas considerando um raio mínimo de colapso e a outra considerando o sistema sem teorias assintóticas para o colapso. Para a consideração do raio mínimo, utilizou-se uma teoria assintótica do raio de colapso.

Visando entender como o campo de pressão aplicado interfere no movimento oscilatório da bolha, diversos tipos de campo foram aplicados: senoidal, pulsos periódicos, pulsos não-periódicos e excitação não-linear. Para todos estes a resposta da bolha se mostrou extremamente sensível à variação de parâmetros adimensionais.

Estas variações geraram diferentes padrões vibracionais que foram apresentados em um diagrama de bifurcações. Posteriormente, aplicando os resultados adquiridos em um sistema de aprendizado inteligente, baseado em redes neurais, um sistema de reconhecimento de padrões foi desenvolvido. Esta metodologia se tornou bastante eficiente e promissora para aplicações práticas. Além disso, o envolvimento de mais parâmetros (dentre eles o número de neurônios da rede, número de épocas de treinamento e funções de transferência de aplicação) para controlar o processo o tornou extremamente sujeito à mudanças.

Aplicando a formulação magnética foi possível identificar dois parâmetros adimensionais: número de Reynolds Magnético e Susceptibilidade Magnética. A partir destes, ainda utilizando a excitação senoidal, foi possível observar a variação de resultados em comparação ao modelo não-magnético.

Uma análise de como campo magnético externo aplicado modifica a amplitude em regime permanente da oscilação do raio da bolha foi feita. Observou-se que quanto maior o campo aplicado, maior a amplitude de oscilação. Corroborando este resultado, o diagrama de colapso não-magnético foi comparado com uma versão magnética, produzido em função dos números de Reynolds e Weber. A partir dele foi possível notar que o magnetismo, quando aplicado com o conjunto certo de parâmetros, pode estabilizar o sistema de forma considerável, prevenindo o colapso, comportamento compatível foi mostrado em Cunha et al. (2002)

Ainda para o caso magnético, o estudo dos padrões vibracionais foi novamente efetuado. Entretanto, para este caso, os parâmetros magnéticos foram utilizados para o reconhecimento de padrões. Notou-se que a sensibilidade do sistema aos parâmetros adimensionais cresceu significativamente, mostrando uma dinâmica muito rica e abrangente. Diversas características observadas em sistemas subamortecidos e caóticos puderam ser notadas.

A susceptibilidade magnética se mostrou um parâmetro de forte interação com o sistema. Variações pequenas neste número adimensional transformam expressivamente a resposta do sistema, apresentando mais uma forma de controlar ou desestabilizar o mesmo. Considerando que a susceptibilidade magnética tem direta relação com o tipo de material empregado nas partículas para sintetizar o fluido, nota-se que a simples mudança do material de estudo pode transformar expressivamente o comportamento da bolha. As características de alinhamento dos dipolos magnéticos do fluido podem ser controladas facilmente através da aplicação do campo e da mudança do tipo de fluido empregado.

7.0.1 Trabalhos Futuros

Por fim, como sugestão para trabalhos futuros, pode-se investigar como a hipótese de superparamagnetismo influencia essa dinâmica, buscando também examinar o efeito de uma assimetria no tensor de tensões do líquido produzida pela presença de torques internos $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$ na dinâmica da bolha. Neste sentido, modelos de magnetização mais sofisticados poderiam ser utilizados considerando equações evolutivas da magnetização do líquido magnético na direção radial acopladas com a equação de Rayleigh-Plesset. Além disso, é possível utilizar metodologias de análise de controle não-linear, como os critérios de Lyapunov, para estudar a estabilidade de forma completa. As redes neurais também podem ser treinadas para a identificação de parâmetros adimensionais, além do reconhecimento de padrões já empregado. Ainda neste contexto, buscando entender como a bolha se deforma em diferentes regiões e como ela reage no momento de colapso, poderiam ser exploradas outras metodologias que considerem movimentos e deformações em diferentes direções. Como exemplo, pode-se citar o método de *Boundary Integral*.

Este trabalho deverá ser mais explorado, no futuro, em um programa de pós-graduação em Ciências Mecânicas, de modo a aumentar ainda mais a multidisciplinaridade do tema. Isso pode proporcionar uma maior interação entre diferentes linhas de pesquisa - dentre redes neurais e algoritmos inteligentes, materiais magnéticos, nanotecnologia, mecânica dos fluidos e controle não-linear.

Um último estudo teórico e numérico que pode ser realizado, quiçá no mestrado que será feito na sequência, baseia-se em analisar como as bolhas podem interagir em uma suspensão. Neste caso, o contexto de cavitação seria mais aprofundado e seria possível observar como o comportamento de uma bolha oscilante afeta as demais.

Do ponto de vista experimental, é possível comparar todos os resultados aqui obtidos com uma bancada baseada em excitação com campo magnético. Um sistema de alta frequência poderia ser construído de modo a excitar micro-bolhas. Um gerador de sinal ou um eletroímã poderia ser utilizado para excitar o sistema oscilante, aproveitando a utilização do fluido magnético. Além disso, obtendo resultados experimentais, a rede neural poderia ser implementada como um identificação de padrões gráficos, utilizando vídeos da bolha oscilando. A partir disso, faz-se possível identificar quais os parâmetros envolvidos e compatibilizar os resultados teóricos e numéricos com experimentais. Esta oportunidade de estudar experimentalmente o movimento oscilatório da bolha abre portas para a interação dos grupos de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos (VORTEX) com o Laboratório de Dispositivos e Circuitos Integrados (LDCI), coordenado pelo professor Dr. José Camargo, e com o Laboratório de Eletrônica Computacional, coordenado pelo professor Dr. Carlos Llanos.

O trabalho será mais explorado no contexto de pós-graduação e outras ferramentas de análise de sistemas dinâmicas serão aplicadas. Uma ferramenta mais robusta que a Transformada de Fourier são as Transformadas de Wavelets, que podem ser vistas como mecanismos para decompor sinais nas suas partes constituintes, permitindo analisar os dados em diferentes domínios de frequências com a resolução de cada componente amarrada a sua escala; desta forma, mostram-se convenientes na aproximação de sinais com descontinuidades ou não-linearidades expressivas (Lima, 2003).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **ALBERNAZ, D. L., 2011** Dinâmica de bolhas em líquidos elásticos e anisotrópicos, *Dissertação de Mestrado* (UnB - Brasília).

[2] **ALBERNAZ, D. L., CUNHA, F. R., 2011** Bubble dynamics in a Maxwell fluid with extensional viscosity, *Mechanics Research Communications*, Vol 38/3, pag 255.

[3] **ALBERNAZ, D. L., CUNHA, F. R., 2013²** Unsteady Motion of a Spherical Bubble in a Complex Fluid: Mathematical Modelling and Simulation, *Applied Mathematical Modelling*, vol 37, Issues 20-21, pag 8972-8984.

[4] **AMARAL, G. F. V., 2006** Síntese de Dinâmica Não-Linear por Meio de Modelos Afins por Partes: Um Método Baseado em Topologia., *Tese de Doutorado* (UFMG - Belo Horizonte).

[5] **BACRI, J. C., PERZYNSKI, R., SHLIOMIS, M. I., BURDE G. I., 1996** Negative Viscosity effect in a magnetic fluid, *Phys. Rev. Lett.*, 75(11), pag 2128-2131.

[6] **BAUCHSPIESS, A., 2013** Notas de Aula do Curso Introdução ao Controle Inteligente Numérico, *Universidade de Brasília*, Segundo semestre de 2013

[7] **BEHNIA, S., MOBADERSANI, F., YAHYAVI, M., 2013** Chaotic behavior of gas bubble in non-Newtonian fluid: a numerical study, *Nonlinear Dynamics*, vol 74, Issue 3, pag 559-570.

[8] **BESANT, W. H., 1859** A Treatise on Hydrostatics and Hydrodynamics, *Deighton Bell*, Cambridge, pag 170-171.

[9] **BIRKHOFF, G. D., 1929** Demonstration d'un theoreme elementaire sur les fonctions entieres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol 189, pag 473-475.

[10] **BLAKE, J. R., GIBSON, D. C., 1987** Cavitation bubbles near boundaries, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol 19, pag 99-123.

[11] **BRAGA, A. P., CARVALHO, A. P. L., LUDERMIR, T. B., 2000** Redes Neurais Artificiais: teoria e aplicações, *Livros Técnicos e Científicos*, pag 262.

[12] **CASH, J. R., KARP, A. H., 1990** A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand side. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol 36, pag 201-222.

[13] **CHANDRASEKHARAI AH, D. S., DEBNATH, L., 1999** Continuum Mechanics. *Academic Press Inc.*

[14] **CHANG, R., ALEJOS, J. C., ATKINSON, D., JENSEN, R., DRANT, S., GALINDO, A., LAKS, H., 1999** Bubble contrast echocardiography in detecting pulmonary arteriovenous shunting in children with univentricular heart after cavopulmonary anastomosis. *Journal of the American College of Cardiology*, Vol 33, Issue 7, pag 2052-2058.

[15] **CHEN, S., DING, J., BEKEREDJIAN, R., YANG, B., SHOHET, R. V., JOHNSTON, S. A., 2006** Efficient gene delivery to pancreatic islets with ultrasonic microbubble destruction technology *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 22, 103.

[16] **CUNHA, F. R., 2012** Fundamentos da Hidrodinâmica de Fluidos Magnéticos, *Capítulo de Livro*, ISBN: 978-85-85769-49-9, Poli-USP-ABCM, São Paulo, Vol 8, pag 257-339

[17] **CUNHA, F. R., SOUSA, A. J., MORAIS, P. C., 2002** The Dynamic Behavior of a Collapsing Bubble in a Magnetic Fluid, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol 252, pag 271-275.

[18] **CUNHA, F. R., ALBERNAZ, D. L., 2013¹** Oscillatory motion of a spherical bubble in a non-Newtonian fluid., *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol 191, pag 35-44.

[19] **CRUM, L. A., 1994a** Synchronous Picosecond Sonoluminescence, *Phys. Today*, 47, 22.

[20] **DAHI, E., 1982** Perspective of Combination of Ozone and Ultrasound, *Ozonization Manual for Water and Wastewater Treatment*, John Wiley and Sons.

[21] **DOKTYCZ, S. J., SUSLICK, K. S., 1990** Interparticle Collisions Driven by Ultrasound, *Science*, Vol 247, pag 1067-1069.

[22] **DOKTYCZ, S. J., SUSLICK, K. S., 1990** Interparticle Collisions Driven by Ultrasound, *Science*, Vol 247, pag 1067-1069.

[23] **GONTIJO, R. G., 2013** Micromecânica e Microhidrodinâmica de Suspensões Magnéticas, *Tese de Doutorado* (UnB - Brasília).

[24] **HENDRIX, M. H., MANICA, R. KLASEBOER, E. CHAN, D. Y. C. OHL, C. D., 2012** Spatiotemporal evolution of thin liquid films during impact of water bubbles on glass on a micrometer to nanometer scale, *Physical Review Letters* , Vol 108.

[25] **KARKUSZEWSKI, Z. P., JARZYNSKI, C., ZUREK W., H., 2001** Quantum Chaotic Environments, the Butterfly Effect, and Decoherence, *Phys.Rev.Lett.*, Vol 89.

[26] **FRENZEL, H., SCHULTES, H., 1934** Luminescenz im ultraschallbeschickten Wasser, *Phys. Chem.* Vol 27B, 427.

[27] **LARINA, I. V., EVERS, M., ESENALIEV, O. R., 2005** Optimal Drug and Gene Delivery in Cancer Cells by Ultrasound-Induced Cavitation, *Anticancer Research*, Vol 25, 149-156.

[28] **LAUTERBORN, W., OHL, C. D., 1997** Cavitation bubble dynamics, *Ultrasonics Sonochemistry*, Vol 4, pag 65-75.

[29] **LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M., 1987** Fluid Mechanics, *Institute of Physical Problems, U.S.S.R, Academy of Sciences*, Second edition, vol 6 of Course of Theoretical Physics.

[30] **LAPLACE, P. S. M, 1805** Traité de Mécanique Céleste, *IParis, França: Courcier*, vol 4, pag 1-79.

[31] **LEIGHTON, T. G., 1994** The Acoustic Bubble, *Academic Press*, London.

[32] **LIMA P. C., 2003** Wavelets: uma introdução, *Departamento de Matemática - ICEX* (UFMG - Belo Horizonte)

[33] **LINDNER, J. R., SONG, J., JAYAWEERA, A. R., SKLENAR, J., KANT, S.,**

2002 Microvascular Rheology of Definity Microbubbles following Intra-arterial and Intravenous Administration, *J. Am. Soc. Echocardiogr.*, Vol 15, 396-403.

[34] **LORENZ, E. N., 1963** Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmospheric Sciences*, Vol 20.

[35] **MARMOTTANT, P., HILGENFELDT, S., 2004** A bubble-driven microfluidic transport element for bioengineering , *J. American Chemical Society*, Vol 101, Issue 26.

[36] **MASON, T. J., LORIMER, J. P., 1988** Sonochemistry: theory, applications and uses of ultrasound in chemistry, *Chichester, UK: Ellis Horwood*.

[37] **MCCULLOCH, W., PITTS, W., 1943** A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol 5, 115-133.

[38] **NAUDÉ, C. F., ELLIS, A. T., 1961** On the mechanism of cavitation damage by non-hemispherical cavities, *Trans. ASME D: Basic Eng.*, vol 83, pag 648-656.

[39] **NEWTON, I., 1704** Optiks, *Dover Publication*, New York, 207.

[40] **NISE, S. N., I., 2009** Engenharia de Sistemas de Controle, *Livros Técnicos e Científicos Editora*, Quinta edição, Rio de Janeiro, Brasil.

[41] **OHL, C., ARORA, M., DIJKINK, R., JANVE, V., LOHSE, D., 2006** Surface cleaning from laser-induced cavitation bubbles, *Applied Physics Letters*, vol 89.

[42] **OGATA, K., 2011** Engenharia de Controle Moderno, *Pearson Education do Brasil*, Quinta Edição, São Paulo, Brasil.

[43] **PARLITZ, U., ENGLISCH, V., SCHEFFCZYK, C., LAUTERBORN, W., 1990** Bifurcation structure of bubble oscillators , *Journal of the Acoustical Society of America*, vol 88, Issue 3, pag 1061-1077.

[44] **PARSONS, C. A., 1906** The Steam Turbine on Land and at Sea , *Lectures to Royal Institution*.

[45] **PLESSET, M. S., CHAPMAN, R. B., 1970** Collapse of an Initially Spherical Vapor Cavity in the Neighborhood of a Solid Boundary , *Office of Naval Research - Division of Engine-*

ering and Applied Science California Institute of Technology Pasadena, California.

[46] **POPINET, S., ZALESKI, S., 2001** Bubble collapse near a solid boundary: A numerical study of the influence of viscosity, *Journal of fluid mechanics*, vol 464 / August 2002, pag 137-163.

[47] **PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P., 1992** Numerical recipes in C: The art of scientific computing, *Cambridge: Cambridge Univ. Press*, Segunda Edição.

[48] **PUTTERMAN, S. J., 1995** Sonoluminescence: Sound into Light, *Scientific American*, 272(2), pag 46-51.

[49] **QUINTO-SUL, P. A., ANDO, K., 2013** Nucleating bubble clouds with a pair of laser-induced shocks and bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 733.

[50] **RAYLEIGH, L., 1917** On the Pressure Develop in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity, *Phil. Magazine* (series 6), Vol 34, 94-98.

[51] **REYNOLDS, O., 1873** The Causes of the Racing of the Engines of Screw Steamers Investigates Theoretically ans by Experiment, *Trans. Inst. Naval Arch.*, Vol 14, 56-67.

[52] **RUMELHART, D., HINTON, G. E., WILLIAMS, R. J., W., PITTS, W., 1986** Explorations in the Microstructure of Cognition, *Foundations*, Vol 1, 318-362 (MIT, Cambridge).

[53] **ROSENSWEIG, R. E., 1987** Magnetic Fluids, *Ann. Rev. Fluid Mech*, Vol 19, pag 437-463

[54] **ROSENSWEIG, R. E., 1996** Negative viscosity in a magnetic fluid, *Science* 271, pag 614-615

[55] **SANTOS, R. A. M., 2002** Investigação da Dinâmica de Bolhas em Fluido não-Newtoniano, *Projeto de Graduação* (UnB - Brasília).

[56] **SHLIOMIS, M. I., 1974a** Magnetic Fluids, *Sov. Phys. Usp.* 17(2), pag 153-169

[57] **SHLIOMIS, M. I., MOROZOV, K. I., 1994** Negative viscosity of ferrofluid under

alternating magnetic field, *Phys. Fluids* 6(8), pag 2855-2861

[58] **SUSLICK, K. S., 1988** Ultrasound: its chemical, physical, and biological effects, *New York: VCH*.

[59] **TRUESDELL, G. I., TOUPIN, R., 1960** The classical field theories, *Handbuch der Physik III/1*, Vol 226.

[60] **TOWNSEND, H. H., EDWARDS, C. J., COOPER, C. J., ZETIE, K. P., FOOT, C. J., 1995** Phase-space density in the magneto-opticaltrap, *Physical Review A*, Vol 52, num 2.

[61] **WINER, N., SOWERS, J. R., 2004** Epidemiology of diabetes, *J. Clin. Pharmacol.*, 44, 397-405.

[62] **YOUNG, T., 1805** An essay on the cohesion of fluids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 95, pag 65-87.

[63] **ZAHN, M., 2001** Magnetic fluid and nanoparticle applications to nanotechnology, *Journal of Nanoparticle Research*, 3, pag 73-78.

[64] **ZEUNER, A. R., REHBERG, I., 1998** Negative viscosity in a dispersion of magnetite., *Abstracts of the 8th International Conference on Magnetic Fluids*, Timisoara, Romania, pag 72-73.

Apêndice 1 - Formulação da Equação de Rayleigh-Plesset Magnética

Este apêndice tem por objetivo explicitar a algebra por trás da formulação magnética proposta. No capítulo 2, mostra-se que a equação 2.12 assume a forma da equação 2.29, apresentada abaixo:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nabla \sigma^N + \nabla \sigma^{mag} \quad (7.1)$$

em que σ^N representa a contribuição Newtoniana o tensor de tensões, enquanto σ é utilizado para denotar efeitos não Newtonianos do fluido. Para o movimento unidimensional (movimento radial) proposta na formulação, a velocidade consiste na componente $\mathbf{u} = u_{rr}\hat{e}$. Desta forma, em coordenadas esféricas tem-se:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{rr}^N) - \frac{(\sigma_{\theta\theta}^N + \sigma_{\varphi\varphi}^N)}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{rr}) - \frac{(\sigma_{\theta\theta}^N + \sigma_{\varphi\varphi}^N)}{r} \quad (7.2)$$

Após certa manipulação algébrica, tem-se:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{\partial 3\sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2r\sigma_{rr} \right) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (7.3)$$

Na formulação não-magnética, entretanto, utilizou-se a definição de que σ possui traço nulo. Essa afirmação continua sendo válida, porém apenas para a parte Newtoniana do tensor.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{\partial 3\sigma_{rr}^N}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr}}{r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (7.4)$$

Neste ponto, retoma-se a equação 2.53. Nela é possível observar as novas componentes não-Newtonianas. Para dar prosseguimento a formulação, é necessário calcular esta integral não-Newtoniana obtida anteriormente.

$$\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr + \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \left(\frac{2\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) dr \quad (7.5)$$

Sabendo que a força referente a interação de dois dipolos é:

$$\mathbf{F} = \mu_0 \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{H}) \quad (7.6)$$

pode-se definir qual o tensor de tensões desta forma:

$$\mathbf{T} = \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I}. \quad (7.7)$$

Sabendo que $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ e que, no caso superparamagnético, $\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}$, define-se, neste caso, considerando apenas as componentes radial e polar:

$$\sigma_{\theta\theta}^{mag} = -\frac{\mu_0}{2}(H_r^2 + H_\theta^2) + \mu_0(1 + \chi)H_\theta^2 \quad (7.8)$$

$$\sigma_{rr}^{mag} = -\frac{\mu_0}{2}(H_r^2 + H_\theta^2) + \mu_0(1 + \chi)H_r^2 \quad (7.9)$$

Como a formulação considera apenas o movimento radial, não existem parâmetros para definir os valores de θ que devem ser utilizados. Por este motivo, calcula-se a média de modo a considerar os efeitos médios da colatitude no campo aplicado.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sen 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (7.10)$$

o mesmo é feito para o $\sen\theta$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sen^2\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sen 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (7.11)$$

Neste momento, os três termos da integral não-Newtoniana serão divididos e resolvidos separadamente. Desta maneira, tem-se:

$$\text{Fator 1} - \frac{\sigma_r r}{\rho} \Big|_R^\infty \quad (7.12)$$

$$\text{Fator 2} - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{2\sigma_{rr}}{r} dr \quad (7.13)$$

$$\text{Fator 3} - \frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dr \quad (7.14)$$

• **Fator 1**

$$\frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\mu_0}{2} \left[\frac{C^2}{2} - \frac{4DC}{2r^3} + \frac{4D^2}{2r^6} + \frac{C^2}{2} + \frac{2DC}{2r^3} + \frac{D^2}{2r^6} \right] + \mu_0(1 + \chi) \left[\frac{C^2}{2} - \frac{4DC}{2r^3} + \frac{4D^2}{2r^6} \right] \right\} \quad (7.15)$$

após certa manipulação algébrica, anulando os termos disponíveis, têm-se:

$$\frac{1}{\rho} \left\{ -\frac{\mu_0}{2} \left[C^2 - \frac{DC}{r^3} + \frac{5D^2}{2r^6} \right] + \mu_0(1 + \chi) \left[\frac{C^2}{2} - \frac{4DC}{2r^3} + \frac{4D^2}{2r^6} \right] \right\} \quad (7.16)$$

Isolando os termos em função de μ_0 e $\mu_0\chi$

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \mu_0 \left[\frac{C^2}{2} - \frac{4DC}{2r^3} + \frac{4D^2}{2r^6} - \frac{C^2}{2} + \frac{DC}{2r^3} - \frac{5D^2}{4r^6} \right] + \mu_0\chi \left[\frac{C^2}{2} - \frac{4DC}{2r^3} + \frac{4D^2}{2r^6} \right] \right\} \quad (7.17)$$

Manipulando os termos algebricamente, de modo a obter a expressão mais enxuta possível e aplicando os limites de integração de R a ∞ , é possível obter

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \mu_0 \left[\frac{-3DC}{2r^3} + \frac{3D^2}{4r^6} \right] + \mu_0 \chi \left[\frac{C^2}{2} - \frac{4DC}{2r^3} + \frac{4D^2}{2r^6} \right] \right\} \Big|_R^\infty \quad (7.18)$$

Neste caso, quando $r\beta\infty$, os termos se anulam. Desta maneira, a equação resultante diminui para

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \mu_0 \left[\frac{-3DC}{2R^3} - \frac{3D^2}{4R^6} \right] + \mu_0 \chi \left[\frac{4DC}{2R^3} - \frac{4D^2}{2R^6} \right] \right\} \quad (7.19)$$

• **Fator 2**

$$\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \frac{2}{r} \left\{ \mu_0 \left[-\frac{3DC}{2r^3} + \frac{3D^2}{4r^6} \right] + \mu_0 \chi \left(\frac{C^2}{2} - \frac{4DC}{2r^3} + \frac{4D^2}{2r^6} \right) \right\} dr \quad (7.20)$$

integrando de R a ∞ .

$$\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \left\{ \mu_0 \left(\frac{3DC}{3r^3} - \frac{3D^2}{12r^6} \right) + \mu_0 \chi \left(C^2 \ln(r) + \frac{4DC}{3r^3} - \frac{4D^2}{6r^6} \right) \right\} \Big|_R^\infty \quad (7.21)$$

substituindo os limites de integração e reorganizando os termos, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \left\{ \mu_0 \left(-\frac{DC}{R^3} + \frac{D^2}{4R^6} \right) + \mu_0 \chi \left(C^2 \ln(R_\infty) - C^2 \ln(R) - \frac{4DC}{3R^3} + \frac{2D^2}{3R^6} \right) \right\} \quad (7.22)$$

• **Fator 3**

$$\frac{1}{\rho} \int_R^\infty \left\{ \mu_0 \left[\frac{3DC}{2r^4} - \frac{-3D^2}{4r^7} \right] + \mu_0 \chi \left(\frac{C^2}{2r} - \frac{DC}{r^4} + \frac{D^2}{2r^7} \right) \right\} dr \quad (7.23)$$

integrando de R a ∞ .

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \mu_0 \left[-\frac{3DC}{6r^3} + \frac{3D^2}{24r^6} \right] + \mu_0 \chi \left(\frac{C^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{DC}{3r^3} - \frac{D^2}{12r^6} \right) \right\} \Big|_R^\infty \quad (7.24)$$

reorganizando os termos da equação, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \mu_0 \left[\frac{DC}{2R^3} - \frac{D^2}{8R^6} \right] + \mu_0 \chi \left(\frac{C^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{C^2}{2} \ln(R) + \frac{DC}{3R^3} + \frac{D^2}{12R^6} \right) \right\} \quad (7.25)$$

Organizando e juntando os três termos, obtém-se:

$$\frac{1}{\rho} \left(\sigma_{rr} + \int_R^\infty \frac{2\sigma_{rr}}{r} dr - \int_R^\infty \frac{2\sigma_{\theta\theta}}{r} dr \right) \quad (7.26)$$

logo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\mu \left(\frac{3DC}{2R^3} - \frac{3D^2}{4R^6} \right) + \mu_0 \chi \left(\frac{4DC}{2R^3} - \frac{4D^2}{2R^6} \right) \right] \right. \\
& + \left[\mu_0 \left(\frac{D^2}{4R^6} - \frac{DC}{R^3} \right) + \mu_0 \chi \left(C^2 \ln(R_\infty) - C^2 \ln(R) - \frac{4DC}{3R^3} + \frac{2D^2}{3R^6} \right) \right] \\
& \left. - \left[\mu_0 \left(\frac{DC}{2R^3} - \frac{D^2}{8R^6} \right) + \mu_0 \chi \left(\frac{C^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{C^2}{2} \ln(R) + \frac{DC}{3R^3} + \frac{D^2}{12R^6} \right) \right] \right\} \quad (7.27)
\end{aligned}$$

Separando os termos em comum, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\mu \left(\frac{3DC}{2R^3} - \frac{3D^2}{4R^6} + \frac{D^2}{4R^6} - \frac{DC}{R^3} - \frac{DC}{2R^3} + \frac{D^2}{8R^6} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mu_0 \chi \left(\frac{2DC}{R^3} - \frac{2D^2}{R^6} + C^2 \ln(R_\infty) - C^2 \ln(R) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{4DC}{3R^3} + \frac{2D^2}{3R^6} - \frac{C^2}{2} \ln(R_\infty) + \frac{C^2}{2} \ln(R) - \frac{DC}{3R^3} - \frac{D^2}{12R^6} \right) \right] \right\} \quad (7.28)
\end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \left[\mu_0 \left(-\frac{3D^2}{8R^6} - \frac{3D^2}{4R^6} + \frac{DC}{6R^3} \right) + \right. \right. \quad (7.29)$$

$$\left. \left. \mu_0 \chi \left(\frac{DC}{3R^3} + \frac{C^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{C^2}{2} \ln(R) - \frac{4D^2}{3R^6} + \frac{2D^2}{12R^3} \right) \right] \right\} \quad (7.30)$$

Utilizando ainda a formulação proposta por Rosensweig, tem-se que:

$$C = -H_0 \quad (7.31)$$

$$D = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} R^3 H_0 \quad (7.32)$$

considerou-se ainda que

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} = \mu_r \quad (7.33)$$

logo, substituindo os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho} \left[\mu \left(\frac{2\mu_r^2 H_0^2}{8} - \frac{\mu_r H_0^2}{6} - \frac{3\mu_r^2 H_0^2 R^3}{4} \right) + \right. \\
& \left. + \mu_0 \chi \left(-\frac{4\mu_r^2 H_0^2}{3} - \frac{\mu_r H_0^2}{3} - \frac{\mu_r^2 H_0^2}{12} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R) \right) \right] \quad (7.34)
\end{aligned}$$

A partir da equação 2.111 é possível acompanhar o processo de adimensionalização da equação governante magnética. Entretanto, não foi explicitado como os termos da integral não-Newtoniana foram adimensionalizados. Para tanto, ao contrário do que foi efetuado na seção 2.1.7.1, para essa adimensionalização utilizou-se a suposição efetuada na seção 2.1.8, baseada no salto de tensões. Neste ponto, utiliza-se, então, a suposição matemática comprovada por Rosensweig, na qual o valor do campo na superfície da bolha é nulo.

Este processo se baseia na divisão da equação por U_c^2 :

$$\frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu \left(-\frac{3\mu_r^2 H_0^2}{8} \right) + \mu_0 \chi \left(-\frac{\mu_r H_0^2}{3} - \frac{17\mu_r^2 H_0^2}{12} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R) \right) \right] \quad (7.35)$$

considerando $\mu_r = -\frac{1}{2}$, podem-se fazer algumas simplificações:

$$\frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu \left(-\frac{3H_0^2}{32} \right) + \mu_0 \chi \left(-\frac{9H_0^2}{48} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R) \right) \right] \quad (7.36)$$

Definindo a adimensionalização de R_∞ e R como:

$$\frac{1}{\rho U_c^2} \left[\mu \left(-\frac{3H_0^2}{32} \right) + \mu_0 \chi \left(-\frac{9H_0^2}{48} + \frac{H_0^2}{2} \ln(R_\infty^* R_E) - \frac{H_0^2}{2} \ln(R^* R_E) \right) \right] \quad (7.37)$$

e considerando ainda o número adimensional de Reynolds Magnético como

$$Re_{mag} = \frac{\rho U_c^2}{\mu_0 H_0^2} \quad (7.38)$$

obtem-se:

$$\frac{1}{Re_{mag}} \left[\mu \left(-\frac{C_1}{8} \right) + \chi \left(-\frac{C_1}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{R_\infty^*}{R^*}\right) \right) \right] \quad (7.39)$$

Apêndice 2 - Objetivos em Diagrama de Blocos

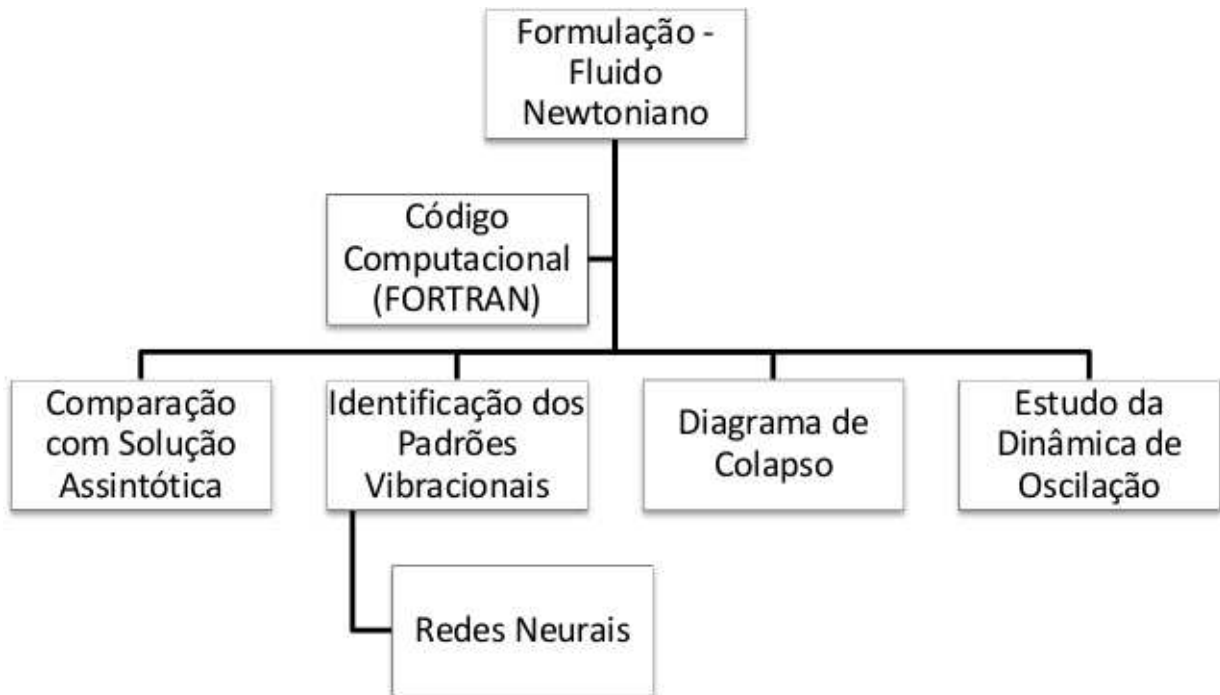


Figura 7.1: Objetivos propostos para a formulação com fluido newtoniano em diagrama de blocos.

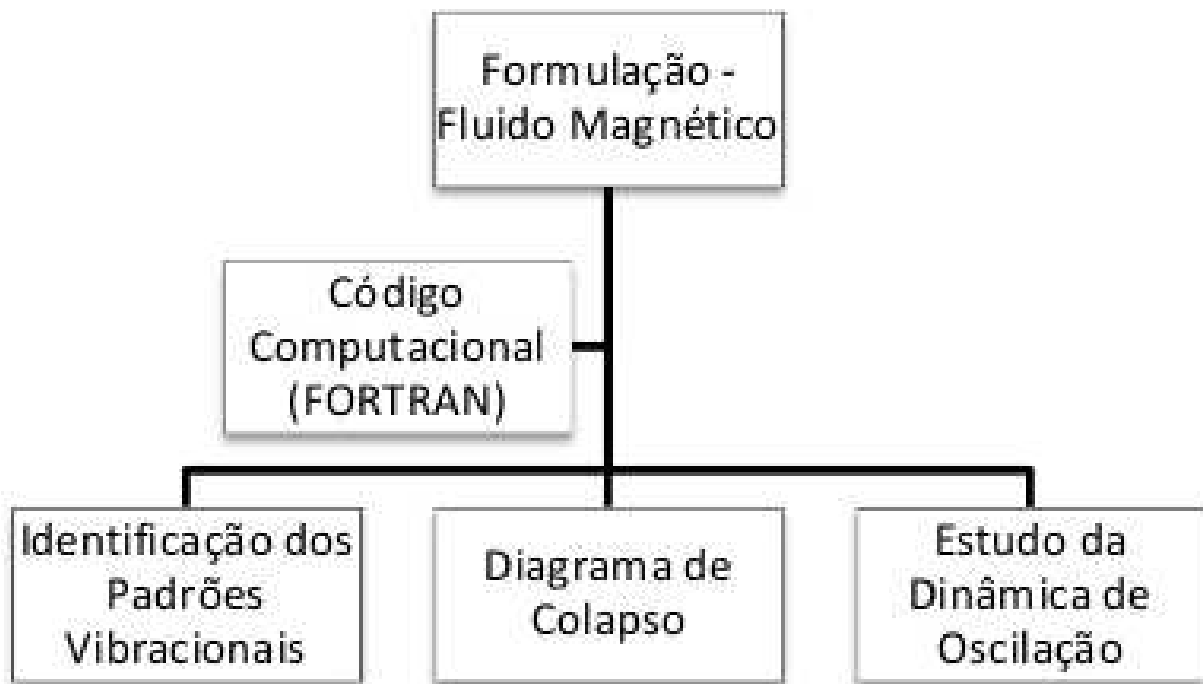


Figura 7.2: Objetivos propostos para a formulação com fluido magnético em diagrama de blocos.

Apêndice 3 - Conclusões em Diagrama de Blocos Neste apêndice, tem-se uma conclusão em formato de diagrama de blocos, expressando com um fluxograma as etapas atingidas neste trabalho.

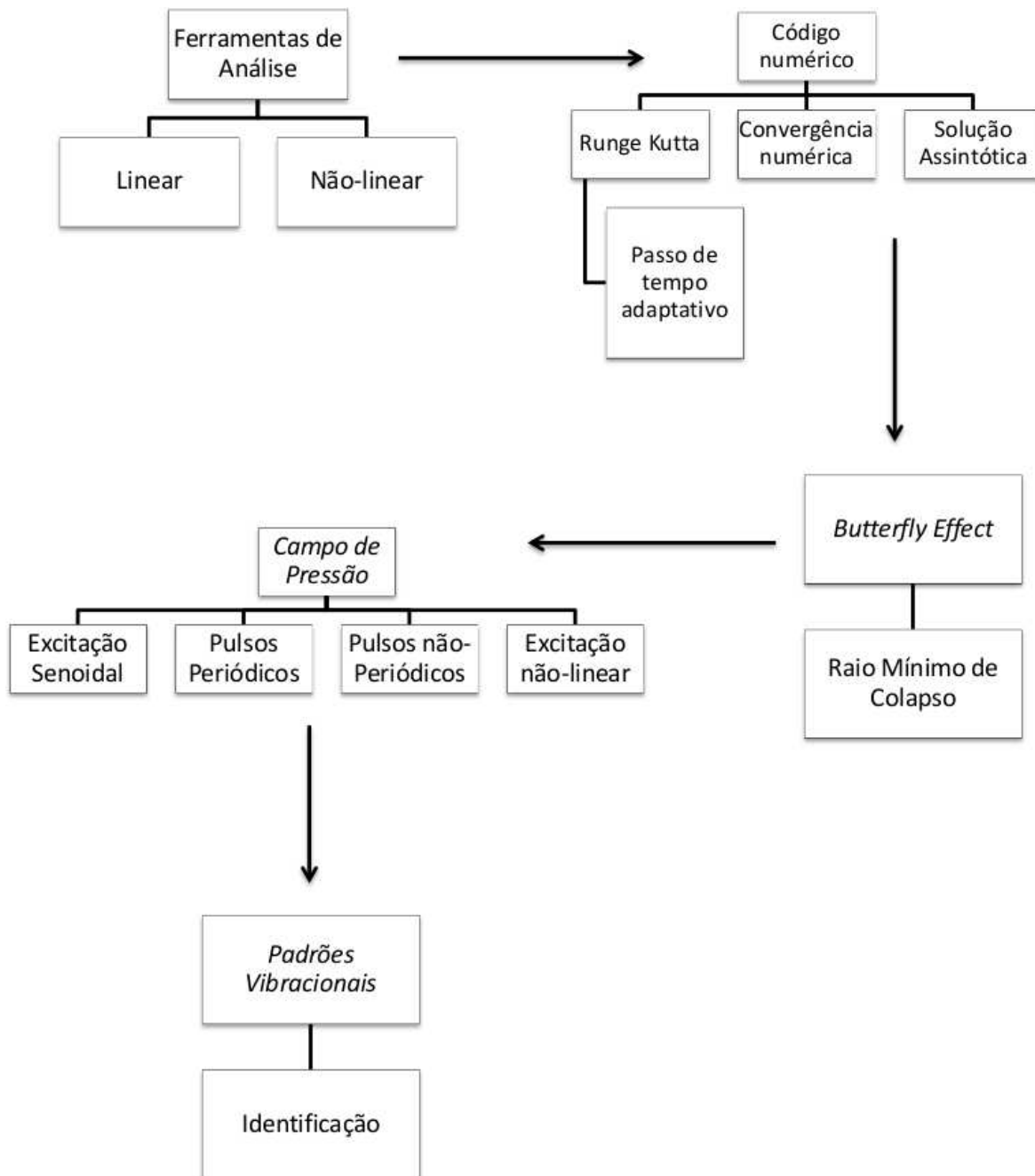


Figura 7.3: Conclusões obtidas para a formulação com fluido newtoniano em diagrama de blocos.

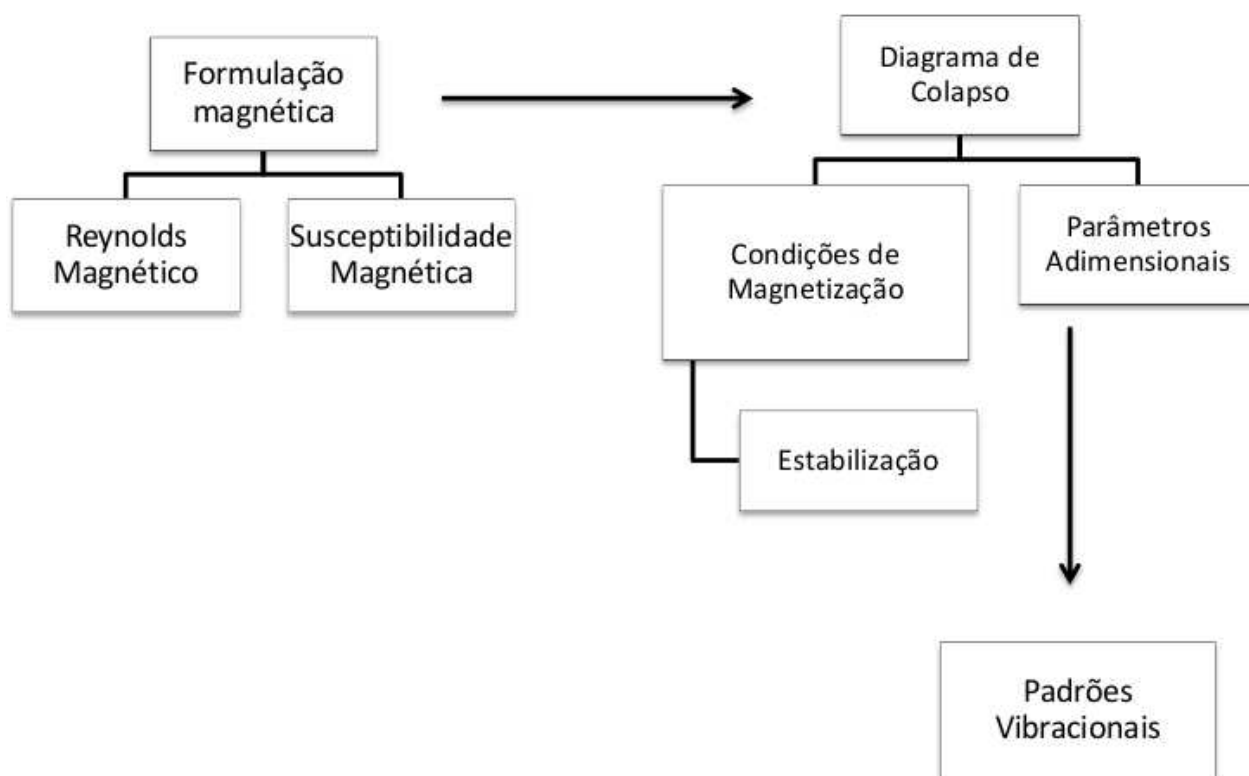


Figura 7.4: Conclusões obtidas para a formulação com fluido magnético em diagrama de blocos.