PROJETO DE GRADUAÇÃO

TEORIA DOS JOGOS PARA OTIMIZAÇÃO DE *PORTFÓLIO* DE ATIVOS: APLICAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Por,

Pedro Victor de Oliveira Câmara

Brasília, 14 de Novembrode 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Produção

PROJETO DE GRADUAÇÃO

TEORIA DOS JOGOS PARA OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE ATIVOS: APLICAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

POR,

Pedro Victor de Oliveira Câmara

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro de Produção

Banca Examinadora

Prof. João Carlos Felix, UnB/ EPR (Orientador) ______________________

Prof. , UnB/ EPR ______________________

Prof. , UnB/ EPR ______________________

Brasília, 14 de Novembro de 2014

Aos meu pais, que desde sempre me apoiaram,

Pedro Américo Pinheiro (Pai), que por mais calado
que seja e poucas palavras foram ditas, elas fizeram
um peso enorme na formação de quem sou,

Rosângela Câmara, por ter feito jus ao significado da
palavra "Mãe" em todos os momentos de minha vida
nunca esquecendo de pegar muito no meu pé.

[Universidade, uma alegria ao entrar, outra maior ainda ao sair,
porém mal espero a hora de voltar]

"All stable processes we shall predict.
All unstable processes we shall control."

Von Neumann.

Agradecimentos

RESUMO

O presente trabalho apresenta o Projeto de Graduação do curso de Engenharia de Produção da Universidade de Brasília - UnB. O tema abordado é Teoria dos Jogos, mais propriamente a aplicação do modeloMinimax para otimização de portfólio de ativos e análise de ativos. O modelo usa programação linear como princípio de solução, e se baseia em dados de retornos históricos dos ativos previamente selecionados para compor uma carteira de investimentos. Diferentemente de outros modelos o Minimax usa o retorno mínimo ao invés de variância como medida de risco. Ou seja, a carteira escolhida é a que minimiza a perda máxima durante toda observação dos períodos passados, para um dado nível de retorno.Neste trabalho, buscou-se utilizar 10 ações, selecionadas do índice IBrX, para aplicação do modelo, que visa fornecer a alocação ótima de ativos de uma carteira de investimentos utilizando os dados históricos dos últimos 12 meses. O modelo se mostrou efetivo, haja vista o cenário econômico de estagnação ao qual estava passando a Bolsa de São Paulo (BOVESPA) durante o período analisado (Março de 2010 à Fevereiro de 2011). A aplicação do modelo indicou a alocação ideal de cada ativo dentro do *portfólio* para cada um dos 12 meses selecionados. O resultado final demonstrou um retorno acumulado - dos respectivos portfólios selecionados pelo modelo -superior a média do retorno acumulado entre os ativos se distribuídos igualmente.

Palavras-Chave: Teoria dos Jogos; Seleção de *Portfólio*; Programação Linear; Minimax.

ABSTRACT

This paper presents the Graduation Project of course of Production Engineering at the University of Brasilia - UnB. The topic is Game Theory, more specifically the application of the Minimax portfolio selection rule and assets analysis. The model uses linear programming as a principle solution, and is based on historical returns data of the assets previously selected to compose an investment portfolio. Unlike other models, the Minimax uses the minimum return rather than variance as a measure of risk. In particular, the portfolio is chosen that minimizes the maximum loss over all past observation periods, for a given level of return. In this work, it used 10 different assets, selected from the IBrX index, for applying the model, which aims to provide the optimal asset allocation of a portfolio using the historical data of the last 12 months. The model was effective, given the economic situation of stagnation which was passing the São Paulo Stock Exchange (BOVESPA) during the analysis period (March 2010 to February 2011). The application of the model indicated the ideal allocation of each asset in the portfolio for each of the selected 12 months. The final result showed a cumulative return - of the portfolios selected by the model - above of the average cumulative return of the assets when distributed equally.

Keywords: Game Theory; Portfolio Selection; Linear Programming; Minimax.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

GRÁFICOS

1 INTRODUÇÃO

1.1A INTRODUÇÃO

Com o crescimento da economia, aumento do poder de compra, ascensão de muitos brasileiros à classe média/alta e a queda na rentabilidade da poupança, a cada ano que passa aumenta-se o interesse de muitos sobre como ganhar, investir e fazer o seu dinheiro render mais. E com isso o mercado de ações ou bolsa de valores não passou a ser alvo somente de bancos, investidores profissionais, economistas, especialistas de mercado ou corretoras; cada vez mais palavras como bolsa de valores, ativos, ações, *IPO*[1] etc. tem se tornado mais frequentes na boca de pessoas comuns que buscam uma forma de investir o seu dinheiro. Mas a partir disso surgem diversas dúvidas como, por exemplo, quais ativos devo escolher para compor meu *portfólio*?; apesar de existirem diversos perfis de investidores, alguns mais arrojados outros mais conservadores, alguns com melhores condições que outros etc. todos buscam basicamente o mesmo objetivo: aumentar o seu retorno frente ao risco que estão correndo por ter comprado certaação. E a partir dessa premissa surgiram diversas teorias e análises com diferentes abordagens e níveis de complexidade matemática. Entre as principais, podemos destacar: análise técnica (grafista), análise fundamentalista, teoria do *portfólio* (MARKOWITZ), séries temporaise a teoria dos jogos.

Ao se realizar um investimento, leva-se em conta diversas variáveis. As duasvariáveismais importantes são: os ativos que irão compor seu *portfólio* e a parcela de investimentos que será destinada a cada um deles. O objetivo de todo investidor é obter o maior retorno possível de acordo com o nível de risco que corre, ou seja, menor risco possível, dado determinado nível de retorno.

A teoria dos jogos tem se mostrado capaz de solucionar diversas situações e dilemas na tomada de decisão sob condições de risco. Isso mostra um grande potencial de aplicação em áreas como seleção de *portfólio* e análise de ativos.

Na Engenharia de Produção a teoria dos jogos é uma sub-área advinda da Pesquisa Operacional, e essa representa uma das10 áreas do conhecimento[2] do curso, além de englobar outras sub-áreas como

---

[1]IPO (*Inicial PublicOffering)*: é um tipo de oferta pública em que as ações de uma empresa são vendidas ao público em geral numa bolsa de valores pela primeira vez. É o processo pelo qual uma empresa se torna numa empresa de capital aberto.

[2] As 10 áreas de conhecimento do curso de engenharia de produção podem ser encontradas com maiores detalhes no site da Abepro (Associação Brasileira de Engenharia de Produção).

Programação Matemática, Decisão Multicriterial, Processos Estocásticos, Modelagem, Simulação, Análise de Demandas por Produtos e Teoria da Decisão.

"A teoria dos jogos é o estudo das interações entre os jogadores, cujas recompensas dependem da escolha de cada um, levando em consideração a interdependência ao tentar maximizar suas respectivas recompensas"(GHEMAWAT, 1999).

"Teoria dos Jogos oferece uma abordagem científica para a tomada de decisão estratégica. No lugar das anedotas, casos, histórias e exemplos que são comumente oferecidos como conselhos para negociadores, teoria dos jogos propicia sistematicamente uma visão da estrutura" (MCMILLAN, 1992).

Portanto, neste trabalho, apresenta-se como objetivo principal determinar uma estratégia de maximização de retorno ou minimização de risco de uma carteira através da escolha de um *portfólio* gerado pelo modelo Minimax, destacando, assim, o uso dessa técnica para orientar investidores sobre qual peso (W_i) de determinados ativos deve-se escolher para compor uma carteira de investimentos. Este trabalho pretende provar sua eficiência no mercado acionário brasileiro. Para isso será comparado o retorno da carteira com o retorno de um dos mais importantes índices do mercado brasileiro, Ibovespa.

O modelo Minimaxserá aplicado num universo de 10 ações, no período de março de 2010 até fevereiro de 2011. O objetivo é determinar uma estratégia de maximização de retorno e minimização de risco, na escolha de um *portfólio* ótimo, com o uso do modelo Minimax.

1.2 COMPOSIÇÃO E ESTRUTURA DO TRABALHO.

Este trabalhoé divido em cinco capítulos e tem como um dos objetivos principais o uso da teoria dos jogos para seleção de *portfólio*[3] de modo a maximizar os lucros e minimizar os riscos. E para chegar a este ponto o trabalho irá abordar todo um contexto através de uma revisão bibliográfica, passandopor uma breve descrição sobre o que é teoria dos jogos,abordando algum teoremas (jogos) e áreas de aplicação, até chegarmos na parte final onde é utilizado o modelo Minimax para seleção de *portfólio*.

Neste primeiro capítulo é apresentada a introdução do tema e a aplicação que será feita a partir dele. No segundo, apresentam-se as principais diferenças entre a teoria dos jogos e a teoria da decisão. No terceiro, tem-se a metodologia, o porquê do uso do modelo Minimax, a descrição matemática do modeloe suas vantagens. No quarto é explicitado como o modelo foi operacionalizado, juntamente com o universo de ações que ele aborda como os dados foram utilizados para realização do modelo e o

[3] Portfólio: Portfólio, ou carteira de títulos, pode ser definido como o conjunto de ativos financeiros (ações, debêntures, etc.) adquiridos por um investidor, seja ela uma pessoa física ou jurídica (Sandroni, 2000).

resultado da programação seguido por uma análise de sua efetividade. E por fim, a conclusão. No anexo estará todos os dados usados para realização deste trabalho, e uma breve descrição da história da teoria dos jogos; passando desde sua origem, advinda da Teoria da Probabilidade, até atualmente.

2TEORIA DA DECISÃO E A TEORIA DOS JOGOS E SUAS DIFERENÇAS

A teoria dos jogos pode ser usada para alguns tipos de tomada de decisão, por isto a semelhança com as metodologias usadas na teoria da decisão, mas surgem diferenças na medida em que se percebem os diversos tipos de aplicações para as duas teorias como veremos a seguir.

A teoria da decisão é uma ciência que envolve um conjunto de conceitos e técnicas (modelos matemáticos úteis, programação linear, programação inteira, programação não-linear etc.) que tem como objetivo auxiliar o tomador de decisão; esses conceitos e técnicas têm como funções-objetivo, sujeito a certas restrições impostas pelo modelo, obter estimativas das decisões disponíveis ao tomador[4]. Embora não seja possível prever as consequências de cada decisão, ou de suas combinações com absoluta certeza, essa teoria permite ao menos a obtenção de estimativas precisas o suficiente para justificar a ação de uma decisão ao invés de outra.

Muitas vezes, os cenários de tomadas de decisão são repletos de incertezas, como por exemplo, se uma empresa deve desenvolver um novo sistema de freios para o seu carro sozinha ou envolver seu fornecedor, ou até mesmo comprar e utilizar um já pronto disponível no mercado. Outra aplicação pode ser vista no mercado financeiro, sobre qual segmento de mercado, títulos, ações, opções, etc. deverá investir uma corretora financeira levando em conta o cenário econômico atual; ou, por exemplo, se uma empreiteira deve aceitar um contrato de um novo projeto, levando em conta seu tamanho, *payback*, se a empresa tem *know-how* suficiente para desenvolver o projeto, entre outras variáveis. É infinito o campo de aplicação dessa teoria, sem contar as inúmeras contribuições para diversas áreas do conhecimento. Mas para o início deste trabalho, não obstante se tratar sobre teoria dos jogos, julga-se importante tratar da distinção do mesmo frente a teoria da decisão, tendo em vista que suas semelhanças possam gerar confusões de conceitos, e por consequência, um mal julgamento e aplicação de suas técnicas.

Para uma melhor compreensão das diferenças entre as duas teorias, logo a seguir será definida uma estrutura de análise de decisão e como ela se assemelha a um tipo de jogo muito conhecido na teoria

[4]Tomador: o responsável pela tomada de decisões. Pode ser um único indivíduo ou um grupo, uma empresa ou mesmo uma nação.

dos jogos – jogos entre dois participantes de soma zero[5] - que será abordado mais detalhadamente no decorrer deste trabalho;será mostrada, ainda, a diferença entre essas duas teorias.

Na teoria da decisão o tomadorirá escolher uma alternativa dentre um conjunto viável delas, cada alternativa traz consigo um risco e um prêmio[6]. A escolha da alternativa é feita diante de incertezas, pois apesar de levar em conta o prêmio e o risco, pode surgir um estado de natureza[7]desfavorável, ou favorável, à alternativa escolhida pelo tomador. Por isso foi dito anteriormente sobre a impossibilidade de prever com absoluta certeza a consequência de uma decisão, porém pode-se obter estimativas de acordo com as técnicas e metodologias usadas.

Por este ponto de vista, devemos destacar uma importante analogia ao se comparar a teoria dos jogos e a teoria da decisão, observando a tabela abaixo:

Tabela 1 - Tabela explicativa de teoria da decisão (Elabora pelo autor)

	Estado de Natureza	
Alternativas	Chuva (de 500mm³ a 800mm³)	Seca (<350 mm³)
1. Plantar Milho	680	-100
2. Arrendar Terreno	90	90
Probabilidade prévia	37%	63%

Esta tabela representa os ganhos e as perdas de um proprietário de uma fazenda no Sul do estado de Goiás, que pretende plantar milho em toda sua propriedade. Esse tipo de cultura necessita de muita água, por isto seu período de plantio acontece de outubro a dezembro - período chuvoso no Centro

[5]Jogos entre dois participantes de soma zero:"... esses jogos envolvem apenas dois adversários ou jogadores (que podem ser exércitos, equipes, empresas e assim por diante). Eles são denominados jogos de *soma zero*, pois um jogador ganha o quanto o outro perde, de forma que a soma de suas vitórias líquidas seja zero."HILLIER, F.S., LIEBERMAN, G.J. **Introdução à Pesquisa Operacional**.9.ed., 625 p.

[6]Prêmio: "O prêmio é uma medida quantitativa do valor para o tomador de decisãodas consequências do resultado. Por exemplo, o prêmio é com frequência representado pelo *ganho monetário líquido* (lucro), embora outras alternativastambém podem ser usadas." HILLIER, F.S., LIEBERMAN, G.J. **Introdução à Pesquisa Operacional**.9.ed., 646 p.

[7]Estado de Natureza: Todas possíveis situações que se farão presentes mediante o momento que a alternativa de decisão for executada. Fatores aleatórios as determinam.

Oeste - e sua colheita de fevereiro a junho. Durante o ciclo de plantio o milho necessita de no mínimo 350 milímetros de chuva (para que produza sem a necessidade de irrigação), sendo o ideal de 500 milímetros a 800 milímetros; porém, se no decorrer do ano a seca superar o período de chuva, o fazendeiro terá um prejuízo de R$100.000,00 referente a todo investimento em sementes, preparação da terra, plantio e manutenção da lavoura. No entanto, se o clima for favorável e as chuvas irrigarem a lavoura com a quantidade ideal de precipitação, o fazendeiro terá que desembolsar mais R$20.000,00 para o aluguel de uma colheitadeira e venderá toda sua produção por R$ 800.000,00. Isso representa um lucro de 680.000,00. Outra opção para o fazendeiro seria arrendar sua terra, pelo período de uma colheita, para uma grande multinacional especializada na produção de grãos como milho, soja e etc.(exemplo elaborado pelo próprio autor)

Ao nos depararmos com esse exemplo é possível destacar uma interessante analogia entre essa estrutura de decisão e os jogos entre dois participantes de soma zero. Ou seja, o tomador de decisão e a natureza (natureza será quem escolherá os estados de natureza, ou seja, a incerteza se irá chover ou não a quantidade necessária) podem ser vistos como dois jogadores de tal jogo. E assim, as alternativas e os Estados de Natureza podem ser vistos como possíveis estratégias para os jogadores. Dessa maneira, cada combinação de estratégia resulta em algum prêmio para o jogador 1 (no caso, o tomador de decisão). Desse modo, a estrutura de análise de decisão pode ser resumida da seguinte forma:

1. O tomador de decisão precisa escolher uma das alternativas de decisão;
2. A natureza escolherá então um dos estados de natureza possíveis;
3. Cada combinação de uma alternativa de decisão e um estado de natureza resultaria em um prêmio, que é dado como uma das entradas da tabela de prêmios;
4. Essa tabela de prêmios deve ser usada para encontrar uma alternativa ótima para o tomador de decisão apropriado.

(Hillier e Lieberman, 2013)

Porém, de acordo com a teoria dos jogos (mais especificamente o jogo entre dois participantes da soma zero), os dois jogadores são racionais e escolhem suas estratégias para promover o próprio bem-estar[8]. Como os dois jogadores são, respectivamente, o tomador de decisão e a natureza percebe-se que um deles, no caso a natureza, não age de acordo com as premissas de racionalidade e promoção do próprio bem-estar, ou seja, trata-se de um jogador passivo. O jogador passivo age de maneira aleatória e imprevisível, e como não é respeitado, pelo menos neste exemplo, o critério de que todos os jogadores têm de buscar racionalmente uma escolha de alternativas ótimas, definitivamente, a teoria dos jogos não seria a técnica mais atrativa para resolução desse exemplo.

[8]Bem-estar: A escolha da melhor alternativa para o respectivo jogador.

O exemplo acima permite refletir e entender melhor a teoria dos jogos e suas diferenças referentes à teoria da decisão. A teoria dos jogos estuda situações em que dois ou mais jogadores racionais estão num ambiente em comum e que o custo e benefício das opções disponíveis não são fixos, e todos estão na busca por tomar decisões que mais os satisfaçam, porém a decisão de um jogador irá impactar diretamente no *payoff*[9]do outro. Esse ambiente, onde todos estão buscando maximizar o seu *payoff* juntamente com outros jogadores, nos lembra bastante de situações da vida real, desde qual empresa devo contratar para realizar um serviço, até qual medida protecionista deve tomar um país, qual estratégia de ganho de mercado uma companhia deve adotar ou quais ações que deverá conter no meu *portfólio* de maneira que eu obtenha o maior *payoff* possível. E é esse último o tema que este trabalho irá abordar através do uso da teoria dos jogos.

[9]*Payoff:* Jargão de origem inglesa utilizado na Economia, Negócios e na Teoria dos Jogos. Pode significar: pagamento, recompensa ou retorno

3METODOLOGIA

A maneira com que cada investidor escolhe ações para compor sua carteira de investimentos depende, particularmente, de suas preferências em uma situação que envolva risco, ou seja, se o seu perfil é avesso ao risco, neutro ao risco ou propenso ao risco. Ao levar em conta a escolha do agente econômico sob condições de risco, o problema assumirá uma estrutura particular. Segundo FARIA (2003), de modo geral, a forma como o agente avalia seu *portfólio* em um período, em comparação ao outro, dependerá da distribuição de probabilidade associada à ocorrência dos retornos dos ativos que compõe este *portfólio.*

Para descrever as preferências de um investidor em situação de riscos (perfil de risco de um investidor), faz-se uso da função de utilidade. A função utilidade é descrita como uma função das probabilidades, assim como dos níveis de retornos dos ativos. VARIAN (1997) diz que uma forma conveniente que a função de utilidade $U(.)$ de um investidor poderia assumir é a seguinte:

$$U(R_1, R_2, ..., R_n, \pi_1, \pi 2, ..., \pi_n) = \pi_1 v(R_1) + ... + \pi_n v(R_n), I=1, 2, ..., n \quad (1)$$

em que Ri é o retorno esperado do ativo i; π_i é a probabilidade relacionada à ocorrência do retorno i; e $v(R_i)$ é uma função dos possíveis retornos do ativo i. Se a probabilidade de π_1=1, então $v(R_1)$ será a utilidade relacionada ao retorno do ativo 1. Da mesma maneira que, se π_2=1, $v(R_2)$ será a utilidade relacionada ao retorno 2. A Equação (1) representa a utilidade média, ou utilidade esperada, do *portfólio.*Essa função utilidade é também conhecida como função utilidade de Von Neumann-Morgenstern.

A figura 8 mostra as possibilidades em termos de funções de utilidade de um investidor, ou seja, os três perfis em que pode se encaixar. Supondo que um agente econômico queira realizar um investimento, e que disponha de um capital pessoal igual a R*; esse investimento tem a probabilidade de 50% de ganhar um determinado valor V e 50% de chance de perder esse mesmo valor. Portanto, se ganhar o capital passará a ser R*+ V, que corresponde ao valor R_1, e se perder R*- 1, que trataremos aqui como R_0. Dessa maneira sua riqueza será aleatória; e seu valor esperado é de R*, com a utilidade esperada, de:

$$\frac{1}{2}u(\mathrm{R1}) + \frac{1}{2}\,u(R0). \quad (2)$$

Assim, a utilidade esperada da riqueza é a média da utilidade proporcionada pelas riquezas R_1 e R_0, ou seja, a média de $u(R_1)$ e $u(R_0)$, que foi chamada1 de valor da utilidade esperada da riqueza, *UVE(R*)*. Observe, também, que a utilidade do valor esperado de riqueza, *EU(R*)*, é associada ao valor da riqueza R*.

Segundo VARIAN (1997), o agente econômico é avesso a risco quando ele prefere ter o valor esperado de seu capital do que realizar o investimento com risco. Portanto, para este perfil, a utilidade do valor esperado de riqueza, *UVE(R*)*, é maior que a utilidade esperada da riqueza, *EU(R*)*, assim como é demonstrado na Figura 8a). Outro caso é quando o investidor prefere risco do que o valor esperado dela; nesse caso, assim como mostra Figura 8c, o investidor é propenso ao risco. Para ele, a utilidade esperada de riqueza, *EU(R*)*, é maior que a utilidade do valor esperado de riqueza, *UVE(R*)*. Já para o investidor neutro de risco, o *UVE(R*)* é igual ao *EU(R*)*, ou seja, sua preocupação não está com os riscos que o seu capital ou riqueza está sujeita, mas sim no valor esperado da mesma.

FARIAS (2003), comenta que "o investidor propenso ao risco tem uma função de utilidade convexa, ou seja, sua inclinação torna-se cada vez mais íngreme à medida que a riqueza aumenta'' (figura 8c). Já o avesso ao risco tem uma função de utilidade côncava - sua inclinação torna-se cada vez mais plana à medida que a riqueza aumenta (figura 8a). Dessa forma, a curvatura da função utilidade demonstra a atitude do investidor com relação ao risco. Quanto mais côncava for a função utilidade, mais avesso ao risco será o consumidor, e quanto mais convexa for esta função, mais propenso ele será ao risco.

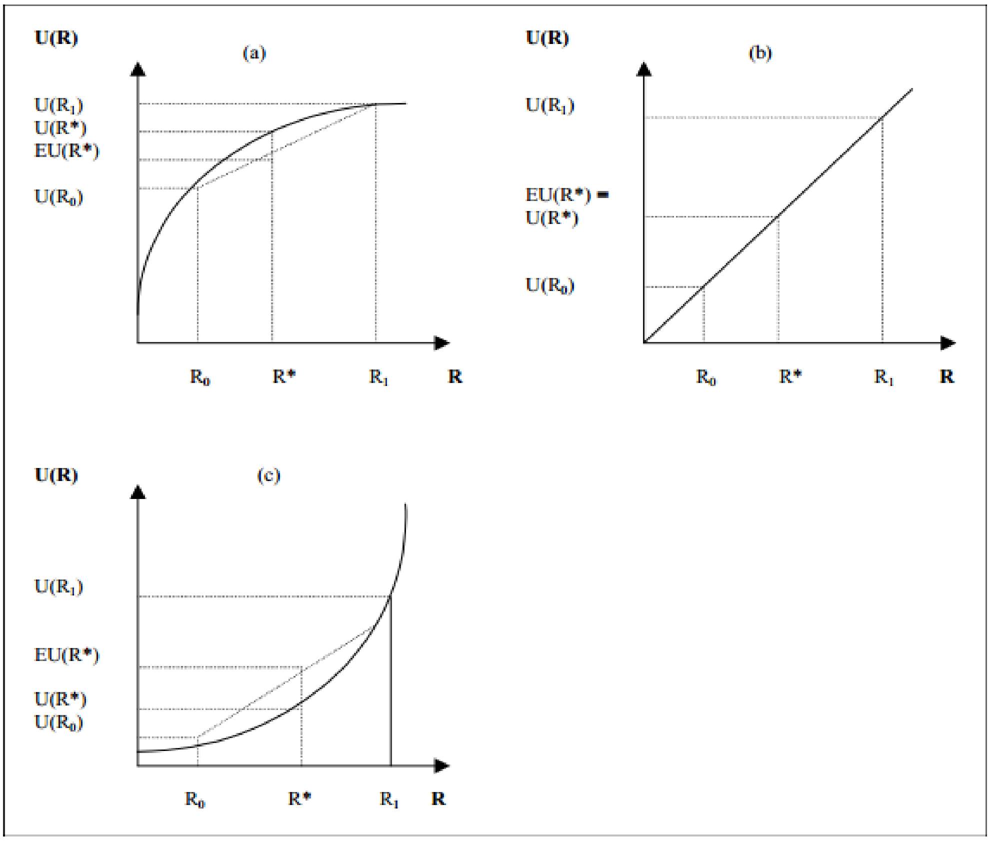

Figura 1 - Perfis de risco de um investidor. Fonte: VARIAN (1997)

3.1 O PORQUÊ DO USO DO MODELO MINIMAX

Levando em consideração que os agentes econômicos são avessos a riscos, procurou-se um modelo que fosse permitido analisá-lo.Há agentes com diferentes níveis de aversão a risco, não faz parte do escopo deste trabalho levantar e nem levar em conta os diferentes níveis de riscos que existem nas opções dos investidores. E muito menos será calculado o risco associado à alocação do orçamento em cada mês. Apesar de o modelo contemplar o risco, com o intuito de reluzi-lo, foi abordado uma estratégia que permiti que se aloque, no máximo, 65% do total do orçamento em um único ativo.

Um dos primeiros *papers*publicado que utilizava a teoria dos jogos para seleção de *portfólio* foi escrito por Young (1998) da Universidade do Michigan. Ele utilizou o critério Minimaxpara formulação do modelo. Este utiliza retorno mínimo ao invés de variância[10] como modo de mensurar riscos. Ou seja, o *portfólio* escolhido é aquele que minimiza a perda máxima em todos os períodos de observação do passado, para um dado nível de retorno. Dessa maneira facilitam-se os cálculos, pois o Minimax pode ser solucionado por Programação Linear, diferentemente de outros modelos como o de Média-Variância que faz uso de formulação quadrática.

Em 1971 Sharpe destacou que "se a essência do problema de análise de portfólio puder ser adequadamente capturada de forma hábil para métodos de Programação Linear, as perspectivas para aplicações práticas deveriam ser grandemente realçadas". Haja vista da maior facilidade de resolução de um problema em programação linear em relação a quadrática ou outros, e que programas de computadores pessoais, atualmente, já resolvem problemas com formulações lineares, este Projeto de Graduação traz um modelo mais acessível e que pode ser usado por, praticamente, todos aqueles que detenham conhecimento superficial de Álgebra e Programação Linear; sem a necessidade de estudar técnicas sofisticadas de resolução de programação não linear.

O modeloMinimax apresenta vantagens lógicas quando os preços dos ativos não são distribuídos normalmente, e apresentam resultados semelhantes quando estes possuem distribuição normal, destaca Young (1998).

Farias (2003) diz que “essas vantagens ressaltadas por Young (1998), podem ser facilmente observadas com um simples exemplo” de acordo com a Tabela abaixo. Suponha que dois *portfólios,* A e B, em que B é dominado por A, pois este possui maiores retornos nos respectivos estados de natureza. Assim, o investidor deveria alocar seu orçamento somente no *portfólio*A e nunca B. Porém, o *portfólio* B é “média-variância eficiente”, pois tem variância menor que A.

---

[10]Variância: é utilizada como forma de mensuração do risco no modelo de Markowitz (Média-Variância), o qual tem formulação quadrática.

Tabela 2 - Retornos de *portfólios* em um jogo com três diferentes estados de natureza

Estados da Natureza	Probabilidade de ocorrência de cada estado	Retorno dos *portfólios*	
		A	B
1	25	0,20	0,05
2	50	0,40	0,08
3	25	0,60	0,11
Variação dos *portfólios*	-	0,04	0,0009

Fonte: FARIAS (2003) adaptada

Portanto, se estivéssemos aplicando o modelo MV, todo o orçamento seria alocado no *portfólio* B, pois ele apresenta variância muito menor que a do *portfólio* A. Contudo, o Minimax alocaria todo o seu orçamento no *portfólio* B, pois esse modelo sempre seleciona "o pior resultado, em termos de retorno, dentro os melhores (Maximin)" disse Farias (2003).

A partir disso, percebe-se que “ a mínima variância do *portfólio* – isto é, o conceito que é a essência do modelo MV se baseia – pode ser, algumas vezes ineficiente.”(FARIAS, 2003)

3.2 MODELO MINIMAX

O modelo Minimax para seleção de *portfólio*baseia-se na teoria dos jogos. Em um jogo podem existir dois ou mais jogadores, e estes conhecem os objetivos dos seus adversários. Uma vez que cada jogador age racionalmente, a teoria dos jogos pode apresentar soluções para essas situações, admitindo que eles procuraram maximizar os retornos mínimos esperados ou, de forma equivalente, minimizar as máximas perdas esperadas (WEBER, 1986).

Young (1998) propõe a formulação do modelo Minimax para seleção de *portfólio*usando o mínimo retorno como medida de risco. OMinimaxé, como podemos ver abaixo, um modelo de programação linear. Para um número finito de ativos financeiros, N, e períodos, T. A solução deste problema pode ser dada, como descrito a seguir:

$$Max M_p \text{(em que } M_p = Min_t \textstyle\sum_{j=1}^{n} w_j\, y_{jt}) \tag{3}$$

Sujeito a (4)

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} w_j\, y_{jt} - M_p \geq 0,\ t = 1,\ldots,T,$$

$$E_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j \geq G, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \leq W, \tag{6}$$

$$w_j \geq 0, j=1,...,N. \tag{7}$$

O Minimax, como modelo de seleção de portfólio, representa o máximodo valor de M_P, sujeito à restrição de que E_P supere determinando nível,que se chama de G ouH, e que a soma das alocações do*portfólio* nãopossa exceder o valor total do orçamento, W, ou seja, o *portfólio* que minimiza o máximo prejuízo, que é definido como o ganho negativo ou, de forma equivalente, que maximiza o mínimo ganho. (FARIAS, 2003)

$$\bar{y}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{jt} \text{ ,(Retorno médio do ativo j)} \tag{8}$$

$$y_{pt} = \sum_{j=1}^{n} w_j y_{jt}\text{,(Retorno do portfólio, no período t)} \tag{9}$$

$$E_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j\text{,(Retorno médio do portfólio, no período t)} \tag{10}$$

$$M_p = Min_t \sum_{j=1}^{n} w_j y_{jt} \text{ . (Retorno mínimo do portfólio, por período t)} \tag{11}$$

Como principais variáveis do problemas temos:y_{jt}é o retorno por unidade monetária investida no ativo j, noperíodo de tempo t; $\bar{y}_j$, retorno médio do ativo j nos últimos 12 meses; w_j ,alocação do portfólio para o ativo j; y_{pt} , retorno do portfólio, no período t; E_P , retorno médio do portfólio, no período t; e M_P, retorno mínimo do portfólio,por período.[11]

Uma formulação equivalente visa maximizar o retorno esperado, sujeito a uma restrição que o retornoda carteira exceda algum limite H em cada observação período no período t:

$$MaxE_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j \tag{12}$$

Sujeito a

[11] Esta formulação se refere mais à descrição do critério Maximin de seleção de *portfólio*; contudo, o termo Minimax será usado, uma vez que esse é o mais utilizado na literatura especializada para esta formulação. Entretanto, faz-se necessário ressaltar que a formulação apresentada na verdade é o critério Maximin e não a sua forma dual, Minimax. (FARIAS, 2003)

$$\sum_{j=1}^{n} w_j\, y_{jt} \geq H,\ t = 1,...,T, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \leq W, \tag{14}$$

$$w_j \leq 0,\ j=1,...,N. \tag{15}$$

O portfólio escolhido pelo modelo é o que minimiza o máximo prejuízo para um dado nível de retorno (Minimax). Já a forma dual, maximiza o mínimo retorno sobre observações de períodos passados (Maximin).

Ao analisar o modelo percebemos que a Equação (4) assegura que para cada período variável M_P será sempre menor ou igual ao retorno do *portfólio* ($\sum_{j=1}^{n} w_j y_{jt} \geq M_p, t=1, ..., T$). Dessa maneira o$M_P$ representará o mínimo retorno em cada período, e consequentemente, o máximo retorno igual. Ou seja, Se $M_P$está sendo maximizado, o *portfólio* terá o valor máximo dos mínimos retornos (Maximin)ou o mínimo das máximas perdas (Minimax).

A carteira ótima é definida com respeito ao conjunto de dados $\{y_{jt}\}$ dos 12 meses anteriores ao mês que deseja obter a carteira. O y_{jt} pode ser um conjunto das observações históricas obtidas através da fórmula:

$$Y_{jt} = (P_{j,t+1} - P_{jt}) / P_{jt}\ .^{12} \tag{16}$$

Os y_{jt}´s também podem ser valores simulados a partir de um modelo probabilístico para retornos futuros. Se houver falta de dados históricos sobre os retornos passados e/ou uma previsão modelo de probabilidade de retornos futuros, o Minimax não será aplicável. Vale lembrar que se optou por utilizar nesse trabalho a fórmula de retornos discretos (16), porém - também - poderia ter sido usada a fórmula de retorno contínuo

$$Y_{jt} = ln(P_{j,t+1} / P_{jt}). \tag{17}$$

---

[12] P_{jt}é o preço do ativo j, no período de tempo t (Retorno Discreto).

4OPERACIONALIZAÇÃO DO MINIMAX, FONTES DE DADOS E RESULTADOS

Na aplicação do modelo, a projeção é feita para o período de um mês, ou seja, para selecionar o *portfólio* ótimo de um determinado mês, utilizam-se dados mensais passados em um horizonte de 12 meses. Cabe salientar que não são considerados nesta aplicação quaisquer custos de transação etributos, além de admitir a compra de ações em qualquer quantidade, inclusive frações. Lembrando que neste trabalho se aborda a estratégia de permitir que se aloque no máximo 65% do total do orçamento em um único ativo.

Portanto, se o período de análise é de março de 2010 até fevereiro de 2011, para obter *portfólio* ótimo do mês de março de 2010, utilizam-se os retornos das ações dos meses de março de 2009 até fevereiro de 2010, e assim respectivamente[13].

Para realização deste trabalho utilizou-se dados referentes aos retornos proporcionados por 10 ações negociadas na BOVESPA. Estas ações faziam parte do Índice IBrX[14] no mês de março de 2010, o qual é composto por 100 ações selecionadas entre as mais negociadas na BOVESPA, em termos de número de negócios e volume financeiro. Essas ações são ponderadas na carteira do índice pelo seu respectivo número de ações disponíveis à negociação no mercado. Dentre as 100 ações, foram escolhidas as 10 ações mais líquidas da BOVESPA, exceto a BISA3[15], assim como mostra a tabela abaixo.

---

[13] Este procedimento é usado por vários autores como YOUNG (1998) e FIGUEIREDO (2000).

[14] A escolha por utilizar ações que compõe o IBrX deve-se ao fato de esse índice retratar de forma mais fiel o mercado acionário brasileiro, pois além de utilizar a liquidez das ações como condição para composição de sua carteira, a mesma é ponderada pelo valor de mercado. Dessa maneira, as empresas com maior valor de mercado (nº de ações x cotação) tendem a apresentar maior peso no IBrx.

[15] A sétima ação com maior participação era a BRFS3 da empresa BRF, porémfoi possível obter dados históricos de março á novembro de 2009. Portanto não seria possível aplicar o Minimax, haja vista da necessidade dos dados. Por isso decidiu-se por trocá-la pela BISA3.

Tabela 3 - Lista de ações utilizadas no trabalho

Código	Ação	Tipo
ITUB4	ITAUUNIBANCO	PN N1
PETR4	PETROBRAS	PN
ABEV3	AMBEV S/A	ON
BBDC4	BRADESCO	PN EJ N1
VALE5	VALE	PNA N1
PETR3	PETROBRAS	ON
BISA3	BROOKFIELD	ON NM
VALE3	VALE	ON N1
ELPL4	ELETROPAULO	PN N2
BRML3	BR MALLS PAR	ON NM

Todos os dados históricos de cotações e índices (em anexo) foram obtidos no site da ADVFN Brasil[16](br.advfn.com) e importados para o software Microsoft Excel. Neste foram tratados e organizados para posteriormente servirem de insumo para a programação linear -que foi feita através do suplemento Solver -, construções de gráficos comparativos e demais análises.A taxa mensal do CDI[17] foi coletada da Central de Custódia e Liquidação de Títulos Privados (Cetip), e depois importado para o software Microsoft Excel.

[16]A ADVFN Brasil é uma empresa que atua no ramo de mercado financeiro por meio de informações via web, como cotações e gráficos. É voltada para o atendimento à pessoa física e tem como principal objetivo ajudar os investidores a tomarem decisões com as melhores ferramentas e com todas as cotações do mundo. A ADVFN Brasil é, hoje em dia, uma das mais conceituadas empresas no ramo de mercado financeiro no País. Com mais de300 novos registros diários e mais de 80 mil pessoas diferentes acessando seu sitediariamente, ela conquistou seu espaço oferecendo serviços de qualidade sem nenhum custo.

[17] A taxa mensal de retorno do CDI durante o período analisado se encontra no anexo.

4.1 RESULTADOS E ANÁLISE

Ao montarmos a programação linear no solver, teremos o seguinte formato:

$$MaxE_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{y}_j \qquad (18)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} w_j y_{jt} \geq 0{,}075,\ t = 1,...,12, \qquad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \qquad (20)$$

$$0 \leq w_j \leq 0{,}65, \quad j = 1,...,10. \qquad (21)$$

A programação é feita 12 vezes. Uma para cada mês que se deseja obter uma carteira ótima. Nesse caso, serão os meses de março de 2010 até fevereiro de 2011, utilizando os dados de março de 2009 até janeiro de 2011[18]. Portanto, essa programação linear visa maximizar E_P (18) sujeito as restrições (19), (20) e (21). A restrição (19) garante que o retorno da carteira do respectivo mês, de acordo com os meses passados, seja maior que 0,75%. O valor de 0,75% foi escolhido nesse caso, pois esse é o menor valor percentual do retorno do CDI durante o período analisado[19]. A restrição (20) faz com que todo o orçamento, no caso 1 (100%),seja utilizado. Já a última restrição, (21), cumpri com a premissa de não negatividade da programação linear, além de evitar que mais de 65 % do orçamento seja alocado em um único ativo, evitando, assim, que um ativo componha grande parte da carteira.

Ao montar toda programação no Excel, temos a seguinte montagem de acordo com as figuras abaixo que demonstram a simulação para o mês de março de 2010:

---

[18] Todos os retornos de cada carteira no período de março de 2009 a janeiro de 2011 encontram-se em anexo, juntamente com o $\bar{y}_j$de cada mês.

[19]Utilizou-se o menor valor de retorno mensal, pois assim se estabelece o mínimo retorno que o Minimax deve obter para pelo menos se igualar ao CDI.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Função	Coeficientes de variáveis											
2	Objetivo	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10		
3		0,02218	0,02992	0,04749	0,04892	0,05821	0,04165	0,05103	0,16657	0,02612	0,06884		
4	Variável ideal	0	0	0	0,03868	0,65	0	0	0,20353	0,1078	0		
5	E=	0,07644											
6													
7	Restrições	Coeficientes de variáveis											Constante
8	nº	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10	LHC	RHC
9	1	0,15319	0,14109	0,06456	0,05941	0,21307	0,15964	0,24619	0,07735	0,12586	0,23818	0,2	0,0075
10	2	0,04127	0,03468	0,16387	0,13944	0,06638	0,17273	0,16164	0,92308	-0,13905	0,1375	0,2	0,0075
11	3	0,17155	0,16622	0,05377	0,06627	0,09236	0,11849	0,04934	0,06667	0,09	0,03419	0,1	0,0075
12	4	-0,07839	-0,06349	-0,11037	-0,09271	-0,02844	-0,0464	-0,02813	0,06484	0,15191	-0,12353	0	0,0075
13	5	-0,03841	-0,0302	0,07391	0,08543	0,01511	0,01967	0,08039	0,39344	0,00202	0,30201	0,1	0,0075
14	6	-0,02646	-0,00286	-0,00999	0,01543	0,12391	0,04061	-0,04821	0,27731	0,00489	-0,01031	0,1	0,0075
15	7	0,08846	0,11536	0,12296	0,11246	0,04701	0,14634	0,11632	0,01711	0,0366	0,08854	0	0,0075
16	8	-0,00857	0,00114	0,08764	0,07787	0,06008	-0,01957	-0,06162	-0,1216	-0,09103	-0,06699	0	0,0075
17	9	0,08914	0,10731	0,0942	0,07402	0,06629	0,05613	0,13284	0,10898	0,03187	0,23077	0,1	0,0075
18	10	-0,05577	-0,05438	0,00979	-0,00401	0,03154	-0,00329	0,0195	0,03586	0,01471	-0,10417	0	0,0075
19	11	-0,08235	-0,06868	-0,01192	-0,00142	0,01695	-0,13881	-0,06617	0,05897	0,04058	-0,04651	0	0,0075
20	12	0,01256	0,01288	0,03149	0,05482	-0,0058	-0,00575	0,01024	0,09685	0,04513	0,14634	0	0,0075
21	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	14	1										0	0,65
23	15		1									0	0,65
24	16			1								0	0,65
25	17				1							0	0,65
26	18					1						0,6	0,65
27	19						1					0	0,65
28	20							1				0	0,65
29	21								1			0,2	0,65
30	22									1		0,1	0,65
31	23										1	0	0,65

Figura 2 - Exemplo no Excel doMinimax no mês de março

Há no total24 restrições. Ao analisarmos a figura, vemos que as restrições de nº1 à nº12 tratam-se da equação de restrição (19). A restrição nº13 trata-se da (20). E as restrições de nº14 á nº23 são referentes a equação (21), que limita a máxima alocação de 65% em um único ativo. E por último temos a restrição nº24 que pode ser vista na figura 8 e 9, pois atribuiu-se a não negatividade diretamente as restrições no Parâmetros do Solver e na Opções do Solver.

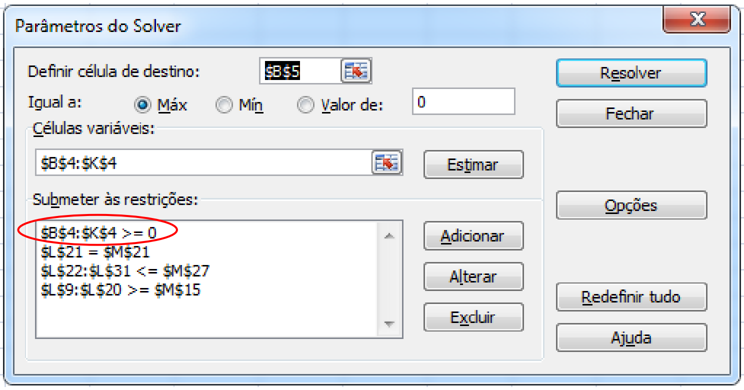

Figura 3 - Parâmetros do solver da simulação de março de 2010

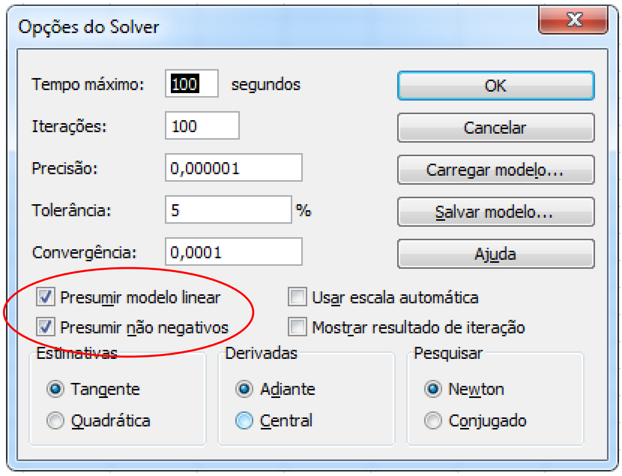

Figura 4 - Opções do Solver da simulação de março de 2010

É importante salientar que é fundamental presumir modelo linear e presumir valores não negativos. Dessa maneira evita-se qualquer inconsistência no resultado, garantindo, assim, uma simulação confiável.

Após resolver a programação linear os resultados gerados estão nas células da linha "Variável Ideal" na figura 7. Que são:

Tabela 4 - Tabela com os pesos de cada ativo que compõe o *portfólio* de março de 2010

Função	Coeficientes de variáveis									
Objetivo	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0,022185	0,029921	0,047493	0,048917	0,058205	0,04165	0,051027	0,166571	0,026122	0,068836
Variável ideal	0	0	0	0,038675	0,65	0	0	0,203525	0,107799	0

A porcentagem de cada ativo que compõe a carteira de março de 2010 é:

Tabela 5- Tabela com as porcentagens de cada ativo que compõe carteira de março de 2010

Ativo	Porcentagem a ser alocado na carteira
PETR3 - ON (w1)	0%
PETR4 - PN (w2)	0%
VALE3 - ON (w3)	0%
VALE 5 - PNA (w4)	3,8675%

ABEV3 - ON (w5)	65%
BBDC4 - PN (w6)	0%
ITUB4 - PN (w7)	0%
BISA3 - ON (w8)	20,3525%
ELPL4 - PN (w9)	10,7799%
BRML3 - ON (w10)	0%

4.2 RENTABILIDADE REAL DA CARTEIRA

A rentabilidade real da carteira é a variação percentual positiva, ou negativa, que a carteira sofreu durante o período em que se deixou o dinheiro investido nas ações que a compõe. Neste caso em análise, é o mês de março de 2010. Ou seja, usou-se os retornos de cada um dos ativos (y_{jt}) dos últimos 12 meses – março de 2009 á fevereiro de 2010 –para gerar os pesos (w_j´s). Agora, para descobrir qual seria o ganho, ou prejuízo, que um investidor teria nesse mês, caso utilizasse o Minimax como modelo de otimização de *portfólio*, basta multiplicar o peso de cada carteira (w_j´s) pelo seu respectivo retorno do mês em análise, neste caso o mês de março. A título de explicação e demonstração, a fórmula e a tabela abaixo explicitam o que foi explicado acima:

$$PR = \sum_{j=1}^{n} w_j\, y_{jt}\ ,\ t = \textit{mês em análise} \qquad (22)$$

	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
Peso de cada ativo na carteira de março de 2010 (w_j)	0	0	0	0,038	0,65	0	0	0,203	0,107	0
Retorno no mês de Março (y_{jt})	0,025	0,022	0,132	0,114	-0,074	0,052	0,068	-0,121	0,039	-0,106
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	0	0,004	-0,048	0	0	-0,024	0,0042	0
$\sum_{j=1}^{n} w_j\, y_{jt}$ (Retorno do *portfólio* de	-0,0644									

março de 2010)	

Portanto, no mês de março de 2010 o retorno da carteira selecionada pelo Minimax foi de -6,44%, ou seja, a carteira obteve prejuízo. Abaixo são informados os retornos dos meses restantes, juntamente com o retorno acumulado da carteira, ou seja, quanto foi o lucro, ou prejuízo, de um investidor no respectivo período quando usado o modelo Minimax[20].

Tabela 6 - Tabela com o resultado de rentabilidade do modelo Minimax para os demais meses

Mês	Retorno	Retorno (%)	Retorno Acumulado (%)
Mar/10	-0,0644303	-6,44%	-6,44%
Abr/10	-0,0337803	-3,38%	-9,60%
Mai/10	-0,0508051	-5,08%	-14,20%
Jun/10	0,04228965	4,23%	-10,57%
Jul/10	0,06680641	6,68%	-4,59%
Ago/10	-0,0100528	-1,01%	-5,55%
Set/10	0,02896971	2,90%	-2,82%
Out/10	0,08053232	8,05%	5,01%
Nov/10	0,01813	1,81%	6,91%
Dez/10	0,07370241	7,37%	14,79%
Jan/11	-0,0532429	-5,32%	8,68%
Fev/11	-0,0159437	-1,59%	6,95%

[20] Todos os dados usados para gerar a carteira dos meses restantes estão anexo, juntamente com o resultado (pesos) dos demais meses.

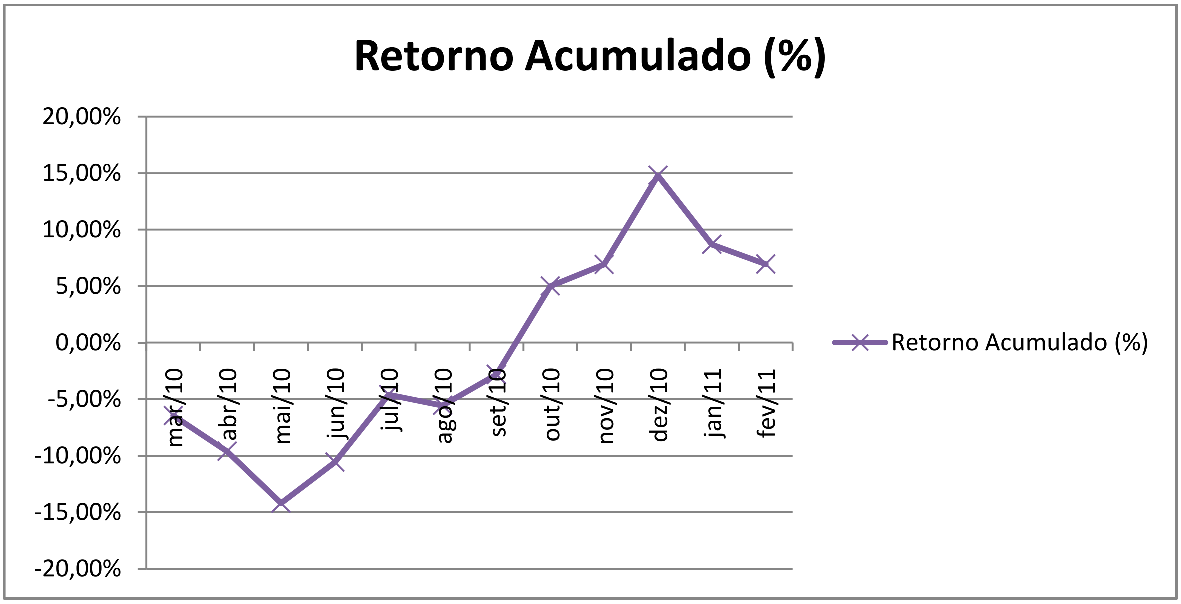

Gráfico 1 - Retorno acumulado da carteira gerada pelo modelo Minimax

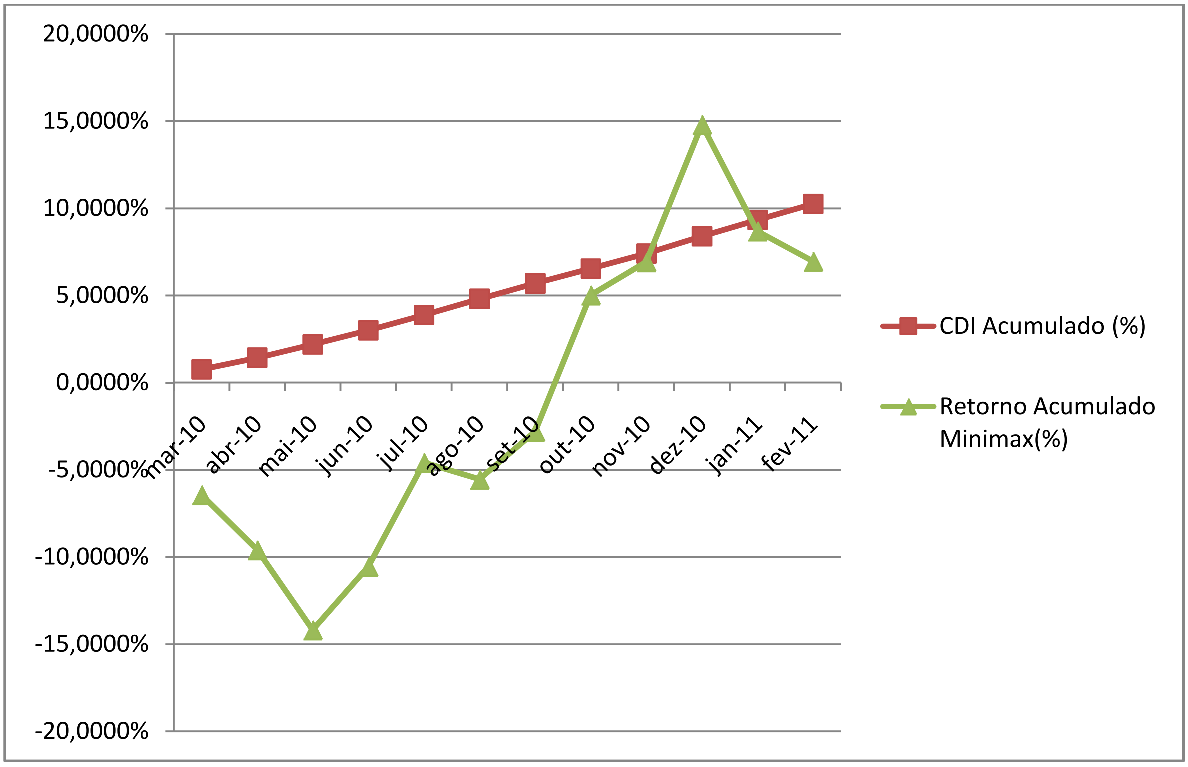

Gráfico 2- -Comparativo entre o CDI e o Minimax

4.3 ANÁLISE DE EFETIVIDADE DO MODELO

A rentabilidade da carteira gerada pelo modelo Minimax é inferior ao retorno acumulado do CDI no mesmo período. Porém isso não significa que o modelo é falho, ou que o mesmo apresente uma baixa taxa de retorno, pois, haja vista que o período analisado foi marcado por uma taxa de crescimento quase nulo, assim como mostra o gráfico abaixo.

O ano de 2010, principalmente o segundo trimestre, foi marcado por uma grande queda na Bolsa de Valores de São Paulo. Isso se deu devido a continuidade da crise financeira iniciada com o *subprime* americano no início de 2008.Impactando, não só, a bolsa de valores assim como a economia interna e internacional. No âmbito doméstico, assistiu-se a preocupações: inicialmente, sobre o comportamento da inflação, desaquecimento da economia (sinal tanto do cenário externo quanto das políticas domésticas para estabilização dos preços) etc. É diante deste cenário complexo que este estudo se fez presente.

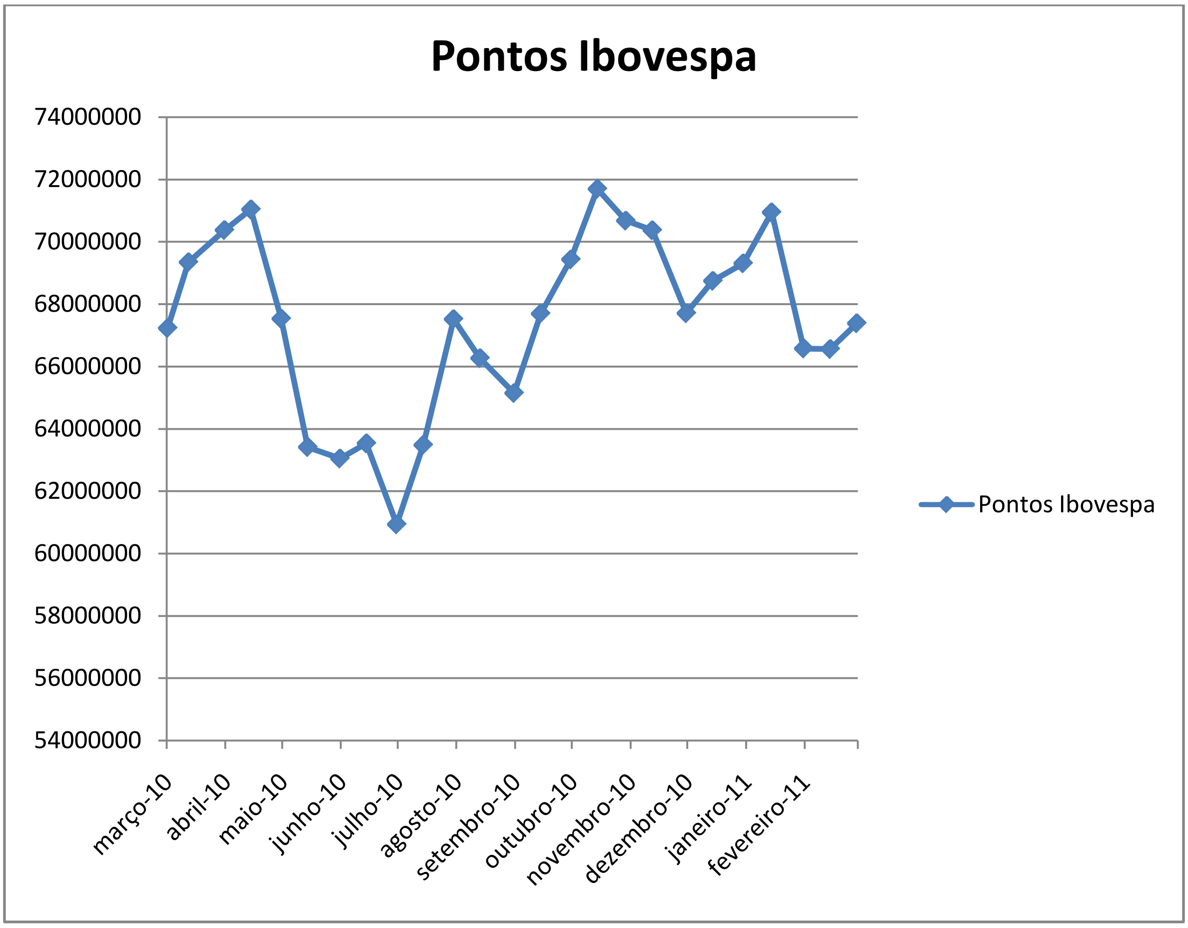

Gráfico 3 - Pontos Ibovespa durante o período analisado

No início do mês de março de 2010 a Ibovespa marcou 67.227.937 pontos. Já no final do mês de fevereiro de 2011 a Ibovespa marcou 67.383.227 pontos. Ou seja, um crescimento muito pouco expressivo.

Se analisarmos a taxa de retorno durante o mesmo período de cada um dos 10 ativos escolhidos para compor a carteira, temos o seguinte resultado:

Data	ABEV3	BRML3	BBDC4	BISA3	PETR3	PETR4	VALE3	VALE4	ITUB4	ELPL4
01/03/10	R$ 150,90	R$23,20	R$31,50	R$8,78	R$39,05	R$34,93	R$50,97	R$44,65	R$36,56	R$37,79
15/03/10	R$ 146,70	R$23,15	R$31,75	R$8,43	R$41,08	R$36,77	R$52,90	R$46,70	R$37,61	R$39,18
01/04/10	R$ 138,24	R$21,40	R$33,18	R$8,11	R$40,15	R$35,75	R$57,73	R$49,95	R$39,20	R$39,45
15/04/10	R$ 147,73	R$21,89	R$32,66	R$7,84	R$37,97	R$33,60	R$59,35	R$51,20	R$39,59	R$38,34
03/05/10	R$ 146,11	R$22,34	R$31,65	R$ 7,93	R$35,40	R$31,50	R$51,78	R$45,35	R$37,80	R$33,00
17/05/10	R$ 151,00	R$22,26	R$30,95	R$7,03	R$33,63	R$29,85	R$48,14	R$41,61	R$35,90	R$31,23
01/06/10	R$ 148,50	R$22,30	R$29,77	R$7,60	R$32,98	R$28,65	R$48,92	R$42,00	R$34,00	R$30,07
15/06/10	R$ 158,90	R$22,03	R$30,40	R$7,78	R$33,88	R$29,00	R$48,91	R$42,20	R$35,19	R$33,46
01/07/10	R$ 153,75	R$23,15	R$29,37	R$7,82	R$30,19	R$26,45	R$43,84	R$38,18	R$33,99	R$36,11
15/07/10	R$ 159,99	R$24,10	R$29,34	R$8,15	R$31,02	R$27,11	R$43,82	R$37,93	R$37,00	R$36,19
02/08/10	R$ 164,16	R$26,83	R$32,45	R$9,15	R$32,68	R$28,44	R$50,53	R$44,10	R$39,71	R$37,84
16/08/10	R$ 160,55	R$26,25	R$31,28	R$8,97	R$31,69	R$27,61	R$49,44	R$43,45	R$37,89	R$32,80
01/09/10	R$ 168,00	R$27,90	R$31,54	R$9,29	R$31,25	R$27,03	R$49,05	R$43,30	R$38,31	R$33,65
15/09/10	R$ 176,29	R$29,09	R$32,46	R$9,38	R$29,98	R$26,45	R$48,08	R$42,50	R$39,28	R$31,76
01/10/10	R$ 180,00	R$14,25	R$34,31	R$9,24	R$30,60	R$27,50	R$52,80	R$46,75	R$40,80	R$30,25
15/10/10	R$ 195,50	R$15,79	R$35,81	R$9,64	R$28,64	R$26,29	R$53,35	R$47,78	R$42,77	R$29,62
01/11/10	R$ 197,72	R$16,20	R$36,00	R$9,27	R$29,10	R$26,56	R$54,80	R$48,34	R$42,28	R$29,85
16/11/10	R$ 192,94	R$16,00	R$35,07	R$8,49	R$27,96	R$25,40	R$53,89	R$48,09	R$41,15	R$29,50
01/12/10	R$ 198,00	R$16,80	R$34,31	R$8,35	R$28,16	R$25,26	R$55,30	R$49,23	R$40,01	R$31,75
15/12/10	R$ 205,99	R$15,74	R$32,59	R$8,24	R$27,96	R$25,37	R$56,80	R$50,34	R$38,45	R$30,29
03/01/11	R$ 217,50	R$16,75	R$33,04	R$8,72	R$30,30	R$27,00	R$56,97	R$49,90	R$39,68	R$32,39
17/01/11	R$ 203,25	R$16,56	R$32,80	R$ 8,35	R$30,47	R$27,45	R$60,17	R$52,86	R$39,05	R$32,75
01/02/11	R$ 188,50	R$15,63	R$30,84	R$7,77	R$30,69	R$27,64	R$58,49	R$51,87	R$36,10	R$32,40
15/02/11	R$ 188,10	R$15,65	R$31,39	R$ 8,04	R$30,63	R$26,97	R$57,36	R$50,14	R$37,02	R$32,00
28/02/11	R$ 187,25	R$15,85	R$32,00	R$ 7,74	R$32,60	R$28,58	R$56,30	R$49,60	R$37,00	R$32,10
Rendimento do ativo ao longo do ano	24,09%	-31,68%	1,59%	-11,85%	-16,52%	-18,18%	10,46%	11,09%	1,20%	-15,06%
Média	-4,49%									

Tabela 7 - Cotação do início e meio de cada mês do período analisado

A média dos retornos das 10 ações no período analisado é de -4,49%. Ou seja, se fosse alocado o orçamento igualmente em cada ação – 10% do orçamento em cada ação – o investidor teria um prejuízo de 4,49%. Isso prova o quão efetivo foi o método, pois mesmo mediante um período muito ruim do mercado, o modelo obteve um retorno positivo.

A partir dos gráficos 4 e 5 abaixo, a ideia é reforçada, basta perceber que a cotação dos ativos, em sua maioria, se manteve constante ou houve queda do preço no decorrer do período analisado.

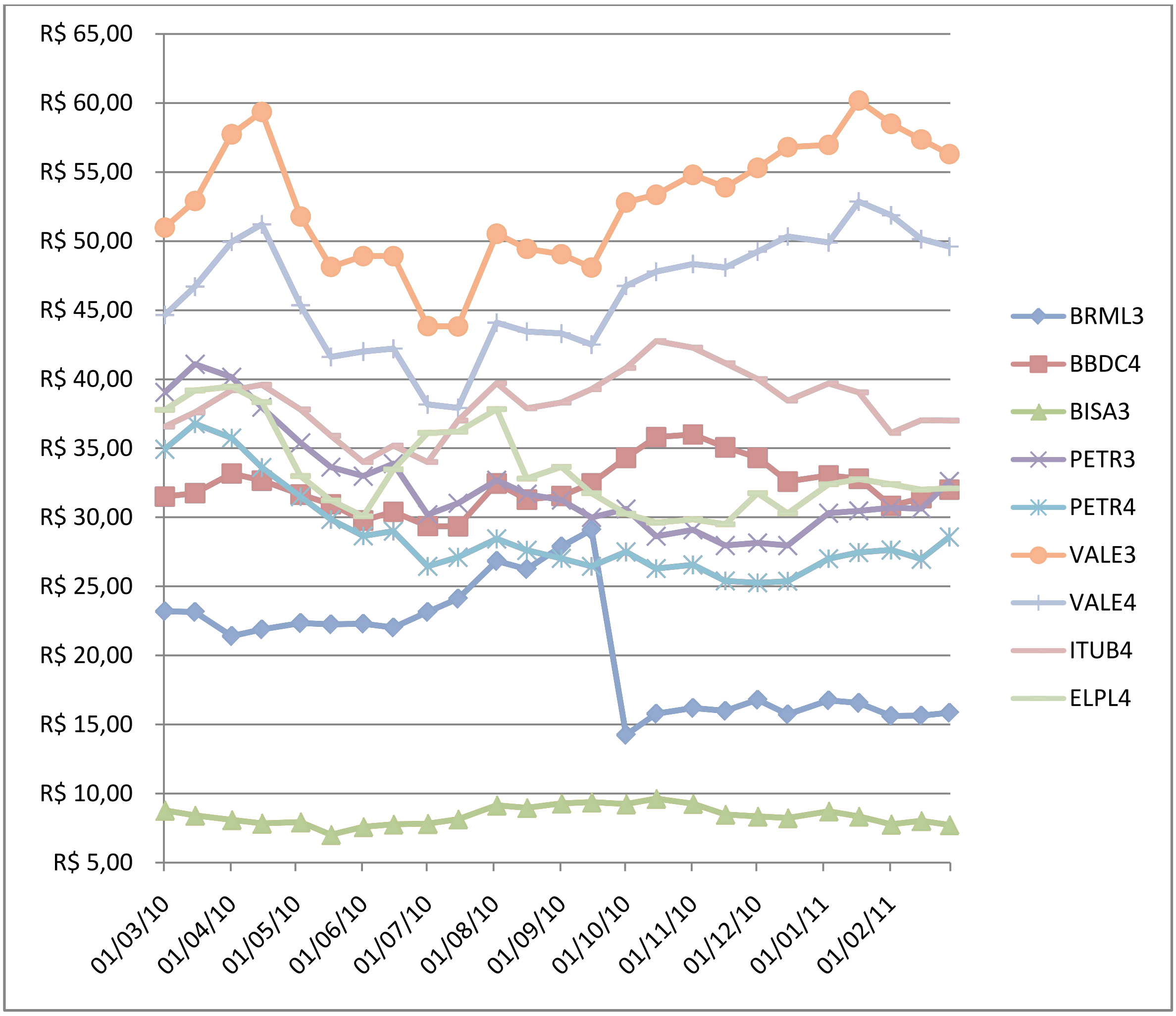

Gráfico 4 - Variação das cotações de 9 ações

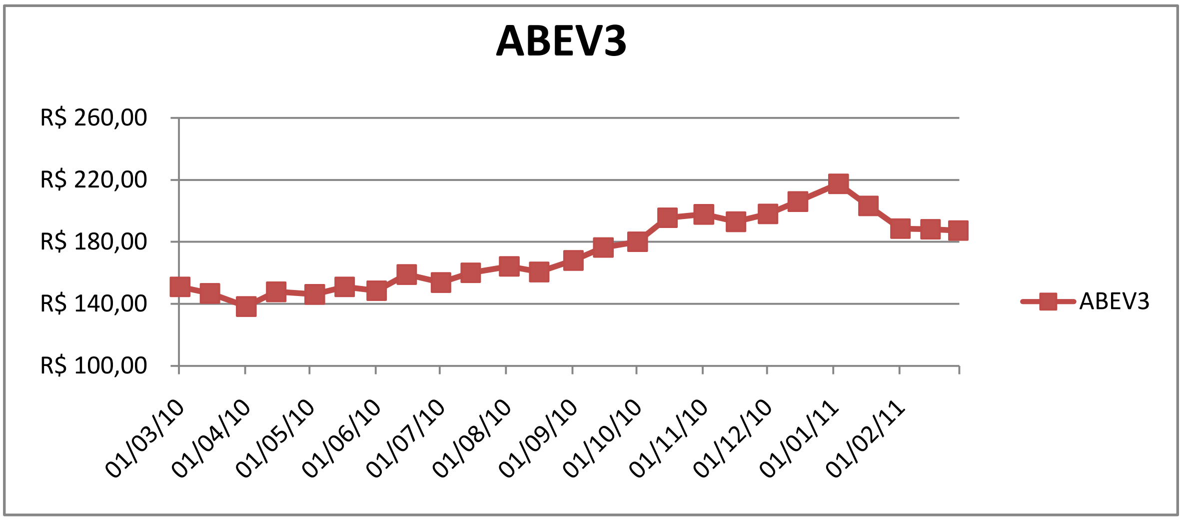

Gráfico 5[21] - Variação das cotações da ABEV3

[21] O gráfico de variação das cotações da ação ABEV3 ficou separado dos demais por motivo de escala, pois o preço de seu papel é superior das demais.

5 CONCLUSÃO

Neste estudo buscou-se aplicar o modelo Minimax desenvolvido por Young (1998) no mercado acionário brasileiro. Haja vista que este mercado apresenta características muito distintas quando comparadas com outros mercados acionários. Isso foi uma preocupação inicial, e ao mesmo tempo foi o que motivou a realização desse estudo.

O modelo gerou *portfólios* ótimos para cada mês, a partir dos retornos dos últimos 12 meses – março de 2009 á janeiro de 2011 -, e utilizando ao todo 10 ações. Houve algumas dificuldades com a obtenção de dados e seu tratamento, haja vista sua grande quantidade, além da divisão da quantidade de papeis emitidos por cada empresa, como ocorreu na ABEV3, o que gerou alteração nos preços dos papeis do ativo, mas não no seu valor final.

Tentou-se utilizar, no decorrer do trabalho, uma linguagem mais simplória possível, mas sempre de acordo com o padrão de escrita de estudos acadêmicos, pois uma das principais intenções do estudo é criar um trabalho fácil de interpretar e que gere o mínimo de dúvidas e dificuldade de interpretação possível, para que os leitores deste possam entender o método e por fim replicá-lo de maneira mais rápida e prática.

A escolha por utilização desse método se deu principalmente ao fato de se basear na programação linear como método matemático do modelo. O que torna sua utilização um pouco mais simples e de maior facilidade operacional, quando comparado a outros que se baseiam em programação não-linear e quadrática. Portanto, uma vez obtido os dados de cada ativo no período desejado e entendido como iria se dar a montagem da programação linear; não foi complicado sua execução no Solver.

Vale relembrar que não se considerou nenhuma forma de custo de transação ou na avaliação dos *portfólios* selecionados, o que distancia, um pouco, o estudo da realidade a qual os investidores estão inseridos. Percebe-se, assim, que a pesquisa de técnicas de otimização de *portfólios* se mostra ainda bastante aberta ao desenvolvimento de novas teorias, métodos e modelos, principalmente os que incluem aspectos não levados em conta nesse trabalho, como os custos de transação e impostos envolvidos nesse tipo de investimento.

Por fim, o Minimax se mostrou bastante efetivo. Gerou resultados superiores a realidade do período em que se analisou o mercado e provou ser um método aplicável e com retorno satisfatório. Foram ao todo 12 *portfólios* gerados pelo modelo - um para cada mês do período de análise -, dentre os quais 6 obtiveram retornos negativos e 6 positivos. Ao final o retorno acumulado ao longos dos 12 meses foi de 6,25%; o que representa um bom resultado frente a situação econômica delicada - de estagnação/queda - do período analisado. Acredita-se que o modelo pode expressar resultados ainda melhores, caso seja replicado em períodos menos críticos ao qual este estudo está inserido.

Dessa forma, para extensão e estudo do comportamento do modelo Minimax no mercado brasileiro. Se faria válido sua aplicação em outros períodos, tanto de alta quanto de queda do mercado, assim como o aumento da quantidade de ações no estudo. Ou seja, usar um universo maior de ações para aplicação do modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, M. L. A Teoria dos Jogos e os Oligopólios. 1º ed. 2004.120p.

BOVESPA. **Informe técnico: composição dos índices**. (http://www.bovespa.com.br).

VON NEUMANN, J., MORGENSTEIN, O. Theory of Games and Economic Behavior. Princenton University Press, 1944

FARIAS, C.A., SANTOS, VIEIRA, W.C., SANTOS, M.L. TEORIA DOS JOGOS E SELEÇÃO DE *PORTFÓLIO*: UMA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO AO MODELO MINIMAX E APLICAÇÃO AO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO. **REVISTA DE ECONOMIA E AGRONEGÓCIO**, v. 2, n. 1, p. 65-92, 2004.

FARIAS, Christiano Alves, 2003 - Modelos de otimização de *portfólio*: análise comparativa e aplicação ao mercado acionário brasileiro. Dissertação de Mestrado - Viçosa: UFV, 2003.

FIANI, R.Teoria dos Jogos. Editora campus. 2004.

FIGUEIREDO, A.C. et al. A utilização da teoria de carteiras de Markowitz e do modelo de índice único de Sharpe no mercado de ações brasileiro em 1999. **Resenha BM&F**, n. 141, p. 51-59, set./out. 2000.

HILLIER, F.S., LIEBERMAN, G.J. Introdução à Pesquisa Operacional., 9.ed. Mc Graw-Hill 2013

MCMILLAN, J. Games, Strategies, and Managers. New York: Oxford University Press, 1992

SANDRONI, P. *Portfolio*. In: **Dicionário de Economia**. São Paulo: Best Seller, 2000. 615p.

SHARPE, W.F.A linear programming algorithm approximation for the general *portfolio* selection problem.**Journal of Financial Quantitative Anal.**, v.6, p. 1263-1275, 1971

SHARPE, W.F.A linear programming algorithm for a mutual fund *portfolio* selection.**Management Science**, v. 13, p. 499-510, 1967.

VARIAN, H.R. Microeconomia: princípios básicos. 2.ed. São Paulo: Campus, 1997. 709 p.

WEBER, J.E. Matemática para economia e administração. 2.ed. São Paulo: Harbra, 1986. 674 p.

YOUNG, M.R.A. Minimax*portfolio* selection rule with linear programming solution.**Management Science**, v.44, p.673-683, 1998.

ZERMELO, E. Über eine Anwendung der Mengdenlehre auf die theories des Schachspiels. Atas do Décimo Quinto Congresso Internacional de Matemáticos, v. 2, p. 501-504, 1913.

ANEXO

PETR3 - ON			PETR4 - PN	
Mês	Retorno (Y_{1t})		Mês	Retorno (Y_{2t})
Mar/09	0,153194263		Mar/09	0,14108713
Abr/09	0,041266252		Abr/09	0,034676007
Mai/09	0,17155266		Mai/09	0,166215301
Jun/09	-0,078390805		Jun/09	-0,063492063
Jul/09	-0,038413569		Jul/09	-0,030200308
Ago/09	-0,026459144		Ago/09	-0,002859867
Set/09	0,088462563		Set/09	0,115360102
Out/09	-0,008567931		Out/09	0,001142857
Nov/09	0,089135802		Nov/09	0,107305936
Dez/09	-0,055769667		Dez/09	-0,054381443
Jan/10	-0,082352941		Jan/10	-0,068683565
Fev/10	0,01255887		Fev/10	0,012876793
Mar/10	0,025839793		Mar/10	0,022536839
Abr/10	-0,069269521		Abr/10	-0,073184515
Mai/10	-0,07767253		Mai/10	-0,097560976
Jun/10	-0,090375587		Jun/10	-0,092567568
Jul/10	0,033548387		Jul/10	0,036857781
Ago/10	-0,076466916		Ago/10	-0,06427289
Set/10	0,027374113		Set/10	0,055257099
Out/10	-0,060855263		Out/10	-0,06
Nov/10	-0,041330998		Nov/10	-0,048742747
Dez/10	0,116185605		Dez/10	0,109800732
Jan/11	-0,016366612		Jan/11	-0,007328692
Fev/11	0,084858569		Fev/11	0,055001846

Mês	$\bar{Y}1$		Mês	$\bar{Y}2$
Mar/10	0,022184696		Mar/10	0,029920573
Abr/10	0,011571824		Abr/10	0,020041382
Mai/10	0,002360509		Mai/10	0,011053006
Jun/10	-0,018408257		Jun/10	-0,010928351
Jul/10	-0,019406989		Jul/10	-0,01335131
Ago/10	-0,013410159		Ago/10	-0,007763135
Set/10	-0,017577473		Set/10	-0,012880887
Out/10	-0,022668177		Out/10	-0,017889471
Nov/10	-0,027025455		Nov/10	-0,022984709
Dez/10	-0,037897688		Dez/10	-0,035988766
Jan/11	-0,023568083		Jan/11	-0,022306918

Fev/11	-0,018069222		Fev/11	-0,017194012

VALE3 - ON			VALE 5 - PNA	
Mês	Retorno (Y)		Mês	Retorno (Y)
Mar/09	0,06456044		Mar/09	0,059405941
Abr/09	0,163870968		Abr/09	0,139439252
Mai/09	0,053769401		Mai/09	0,066272966
Jun/09	-0,110366168		Jun/09	-0,092705167
Jul/09	0,073913043		Jul/09	0,085427136
Ago/09	-0,009986505		Ago/09	0,015432099
Set/09	0,122955289		Set/09	0,112462006
Out/09	0,087642632		Out/09	0,077868852
Nov/09	0,094196429		Nov/09	0,074017744
Dez/09	0,009791922		Dez/09	-0,004012273
Jan/10	-0,011919192		Jan/10	-0,001421801
Fev/10	0,031486404		Fev/10	0,054817276
Mar/10	0,132804757		Mar/10	0,114735658
Abr/10	-0,070866142		Abr/10	-0,060948537
Mai/10	-0,058380414		Mai/10	-0,078444015
Jun/10	-0,127		Jun/10	-0,115904851
Jul/10	0,112256586		Jul/10	0,125560538
Ago/10	-0,034397528		Ago/10	-0,02906023
Set/10	0,115614334		Set/10	0,117547671
Out/10	0,024856597		Out/10	0,031317495
Nov/10	-0,000746269		Nov/10	0,005235602
Dez/10	0,03304705		Dez/10	0,010416667
Jan/11	0,031628411		Jan/11	0,051340206
Fev/11	-0,013665032		Fev/11	-0,027260247

Mês	$\bar{Y}3$		Mês	$\bar{Y}4$
Mar/10	0,047492888		Mar/10	0,048917003
Abr/10	0,053179915		Abr/10	0,053527812
Mai/10	0,033618489		Mai/10	0,03682883
Jun/10	0,024272671		Jun/10	0,024769082
Jul/10	0,022886519		Jul/10	0,022835775
Ago/10	0,026081814		Ago/10	0,026180225
Set/10	0,024047562		Set/10	0,022472531
Out/10	0,023435816		Out/10	0,022896336
Nov/10	0,018203646		Nov/10	0,019017056
Dez/10	0,010291755		Dez/10	0,013285211
Jan/11	0,012229682		Jan/11	0,014487623
Fev/11	0,015858649		Fev/11	0,018884457

ABEV3 - ON			BBDC4 - PN	
Mês	Retorno (Y)		Mês	Retorno (Y)
Mar/09	0,213071895		Mar/09	0,159638554
Abr/09	0,06637931		Abr/09	0,172727273
Mai/09	0,09236055		Mai/09	0,118493909
Jun/09	-0,028440367		Jun/09	-0,046396841
Jul/09	0,015108593		Jul/09	0,019668737
Ago/09	0,123906977		Ago/09	0,040609137
Set/09	0,047012084		Set/09	0,146341463
Out/09	0,060079051		Out/09	-0,019574468
Nov/09	0,066293811		Nov/09	0,056134259
Dez/09	0,031540667		Dez/09	-0,003287671
Jan/10	0,016949153		Jan/10	-0,138812534
Fev/10	-0,0058		Fev/10	-0,005745292
Mar/10	-0,074431704		Mar/10	0,052969502
Abr/10	0,065855249		Abr/10	-0,030182927
Mai/10	0,001223491		Mai/10	-0,044325684
Jun/10	0,059063136		Jun/10	-0,075328947
Jul/10	0,046346154		Jul/10	0,147278549
Ago/10	0,023096245		Ago/10	-0,055503876
Set/10	0,035928144		Set/10	0,113591596
Out/10	0,116936416		Out/10	0,033313679
Nov/10	0,029860788		Nov/10	-0,042225392
Dez/10	0,090452261		Dez/10	-0,027405422
Jan/11	-0,125115207		Jan/11	-0,056661562
Fev/11	-0,0066313		Fev/11	0,038961039

Mês	$\bar{Y}5$		Mês	$\bar{Y}6$
Mar/10	0,058205144		Mar/10	0,041649711
Abr/10	0,03424651		Abr/10	0,032760623
Mai/10	0,034202839		Mai/10	0,01585144
Jun/10	0,026608084		Jun/10	0,00228314
Jul/10	0,033900042		Jul/10	-0,000127869
Ago/10	0,036503172		Ago/10	0,010506282
Set/10	0,028102278		Set/10	0,002496864
Out/10	0,027178616		Out/10	-0,000232291
Nov/10	0,03191673		Nov/10	0,004175054
Dez/10	0,028880645		Dez/10	-0,004021583
Jan/11	0,033789944		Jan/11	-0,006031396
Fev/11	0,021951248		Fev/11	0,000814519

ITUB4 - PN		BISA3 - ON	
Mês	Retorno (Y)	Mês	Retorno (Y)
Mar/09	0,246190476	Mar/09	0,077348066
Abr/09	0,16163546	Abr/09	0,923076923
Mai/09	0,049342105	Mai/09	0,066666667
Jun/09	-0,028125	Jun/09	0,064837905
Jul/09	0,080385852	Jul/09	0,393442623
Ago/09	-0,048214286	Ago/09	0,277310924
Set/09	0,116322702	Set/09	0,017105263
Out/09	-0,06162465	Out/09	-0,12160414
Nov/09	0,132835821	Nov/09	0,1089838
Dez/09	0,019499341	Dez/09	0,035856574
Jan/10	-0,066166968	Jan/10	0,058974359
Fev/10	0,010240797	Fev/10	0,0968523
Mar/10	0,068493151	Mar/10	-0,121412804
Abr/10	-0,033333333	Abr/10	-0,018844221
Mai/10	-0,079575597	Mai/10	-0,00128041
Jun/10	-0,063400576	Jun/10	-0,002564103
Jul/10	0,218153846	Jul/10	0,18251928
Ago/10	-0,04470826	Ago/10	-0,015217391
Set/10	0,070068747	Set/10	0,003311258
Out/10	0,025450951	Out/10	0,01870187
Nov/10	-0,054216867	Nov/10	-0,120950324
Dez/10	0,013757962	Dez/10	0,062653563
Jan/11	-0,105554159	Jan/11	-0,112138728
Fev/11	0,03961787	Fev/11	0,0078125

Mês	$\bar{Y}7$	Mês	$\bar{Y}8$
Mar/10	0,051026804	Mar/10	0,166570939
Abr/10	0,036218694	Abr/10	0,150007533
Mai/10	0,019971294	Mai/10	0,071514104
Jun/10	0,009228152	Jun/10	0,065851848
Jul/10	0,006288521	Jul/10	0,060235014
Ago/10	0,017769187	Ago/10	0,042658069
Set/10	0,018061356	Set/10	0,018280709
Out/10	0,01420686	Out/10	0,017131209
Nov/10	0,02146316	Nov/10	0,028823376
Dez/10	0,005875436	Dez/10	0,009662199
Jan/11	0,005396988	Jan/11	0,011895282
Fev/11	0,002114722	Fev/11	-0,002364142

ELPL4 - PN			BRML3 - ON	
Mês	Retorno (Y)		Mês	Retorno (Y)
Mar/09	0,125862069		Mar/09	0,238177128
Abr/09	-0,139050536		Abr/09	0,1375
Mai/09	0,090003557		Mai/09	0,034188034
Jun/09	0,151907131		Jun/09	-0,123529412
Jul/09	0,002015549		Jul/09	0,302013423
Ago/09	0,004885057		Ago/09	-0,010309278
Set/09	0,036602802		Set/09	0,088541667
Out/09	-0,091034483		Out/09	-0,066985646
Nov/09	0,031866464		Nov/09	0,230769231
Dez/09	0,014705882		Dez/09	-0,104166667
Jan/10	0,04057971		Jan/10	-0,046511628
Fev/10	0,045125348		Fev/10	0,146341463
Mar/10	0,039179104		Mar/10	-0,106382979
Abr/10	-0,015132085		Abr/10	0,054285714
Mai/10	-0,197916667		Mai/10	0,047877145
Jun/10	0,167532468		Jun/10	0,012931034
Jul/10	0,028921023		Jul/10	0,114468085
Ago/10	-0,108108108		Ago/10	0,050019091
Set/10	-0,084848485		Set/10	-0,485818182
Out/10	-0,016556291		Out/10	0,149222065
Nov/10	0,043097643		Nov/10	0,04
Dez/10	0,036475145		Dez/10	0,01183432
Jan/11	0,012145749		Jan/11	-0,111111111
Fev/11	-0,012307692		Fev/11	0,042763158

Mês	$\bar{Y}9$		Mês	$\bar{Y}10$
Mar/10	0,026122379		Mar/10	0,068835693
Abr/10	0,018898799		Abr/10	0,040122351
Mai/10	0,029225337		Mai/10	0,033187827
Jun/10	0,005231985		Jun/10	0,034328586
Jul/10	0,006534096		Jul/10	0,04570029
Ago/10	0,008776219		Ago/10	0,030071512
Set/10	-0,000639878		Set/10	0,035098876
Out/10	-0,010760819		Out/10	-0,012764445
Nov/10	-0,004554303		Nov/10	0,005252865
Dez/10	-0,003618371		Dez/10	-0,010644571
Jan/11	-0,001804266		Jan/11	-0,000977822
Fev/11	-0,004173763		Fev/11	-0,006361113

Tabela 8 - Retorno do modelo em Abril de 2010

Peso de cada ativo na carteira de abril de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0,031	0	0,0462	0	0,08	0	0	0	0,418	0,031
Retorno no mês de abril (y_{jt})	-0,069	0,07	-0,07	-0,06	0,065	-0,03	-0,03	-0,018	-0,015	0,0542
Multiplicação (w_j x y_{jt})	-0,002	0	-0,038	0	0,0057	0	0	0	-0,006	0,0017
(Retorno do *portfólio* de abril de 2010)	-0,03378									

Tabela 9 - Retorno do modelo em Maio de 2010

Peso de cada ativo na carteira de maio de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0,266	0	0,4309	0	0	0,017	0,285	0
Retorno no mês de maio (y_{jt})	-0,07	-0,09	-0,05	-0,07	0,0012	-0,044	-0,079	-0,001	-0,197	0,0478
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	-0,009	0	0,00034	0	0	0	-0,042	0
(Retorno do *portfólio* de maio de	-0,05081									

2010)	

Tabela 10 - Retorno do modelo em Junho de 2010

Peso de cada ativo na carteira de junho de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0	0,2663	0,4309	0	0	0,0177	0,28503	0
Retorno no mês de junho (y_{jt})	-0,09	-0,092	-0,12	-0,1159	0,05906	-0,075	-0,06	-0,002	0,16753	0,0129
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	0	-0,030	0,0254	0	0	-4,5E-5	0,0477	0
(Retorno do *portfólio* de junho de 2010)	0,04229									

Tabela 11 - Retorno do modelo em Julho de 2010

Peso de cada ativo na carteira de julho de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0,338	0	0,5574	0	0	0	0,1045	0
Retorno no mês de julho (y_{jt})	0,033	0,036	0,112	0,125	0,0463	0,147	0,218	0,182	0,0289	0,114
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	0,0379	0	0,0258	0	0	0	0,0030	0
(Retorno do *portfólio* de julho de	0,066806									

2010)	

Tabela 12 - Retorno do modelo em Agosto de 2010

Peso de cada ativo na carteira de agosto de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0,3380	0	0,55742	0	0	0	0,1045	0
Retorno no mês de agosto (y_{jt})	-0,076	-0,064	-0,0344	-0,029	0,02309	-0,05	-0,044	-0,015	-0,1081	-0,076
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	-0,0116	0	0,0128	0	0	0	-0,0113	0
(Retorno do *portfólio* de agosto de 2010)	-0,01005									

Tabela 13 - Retorno do modelo em Setembro de 2010

Peso de cada ativo na carteira de setembro de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0,04554	0	0,65	0	0	0,10604	0	0
Retorno no mês de setembro (y_{jt})	0,027	0,0552	0,1156	0,1175	0,0359	0,1135	0,0700	0,003311	-0,0848	-0,4858
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	0,005	0	0,023	0	0	0,000351	0	0
(Retorno do *portfólio* de setembro de	0,02897									

2010)	

Tabela 14 - Retorno do modelo em Outubro de 2012

Peso de cada ativo na carteira de outubro de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0,395	0	0,604	0	0	0	0	0
Retorno no mês de outubro (y_{jt})	-0,06	-0,06	0,024	0,031	0,116	0,033	0,025	0,0187	-0,016	0,149222
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	0,009	0	0,0707	0	0	0	0	0
(Retorno do *portfólio* de outubro de 2010)	0,080532									

Tabela 15 - Retorno do modelo em Novembro de 2010

Peso de cada ativo na carteira de novembro de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0,258	0	0,65	0	0	0,029	0,0079	0,053
Retorno no mês de novembro (y_{jt})	-0,041	-0,048	-7,46E-4	0,005	0,0298	-0,042	-0,054	-0,120	0,0430	0,04
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	-1,93E-4	0	0,0194	0	0	-3,58E-03	3,43E-04	2,15E-03
(Retorno do *portfólio* de	0,01813									

novembro de 2010)	

Tabela 16 - Retorno do modelo em Dezembro de 2010

Peso de cada ativo na carteira de dezembro de 2010 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0,2586	0	0,65	0	0	0,0296	0,0079	0,0538
Retorno no mês de dezembro (y_{jt})	0,1161	0,1098	0,0330	0,0104	0,095	-0,027	0,0137	0,0626	0,0364	0,0118
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	0,0085	0	0,062	0	0	0,0018	0,0002	0,0006
(Retorno do *portfólio* de dezembro de 2010)	0,073702									

Tabela 17 - Retorno do modelo em Janeiro de 2011

Peso de cada ativo na carteira de janeiro de 2011 (w_j)	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
	0	0	0	0,149	0,485	0	0	0,0017	0	0
Retorno no mês de janeiro (y_{jt})	-0,01	-0,007	0,031	0,051	-0,12	-0,05	-0,10	-0,112	0,016	-0,111
Multiplicação	0	0	0	0,00768	-0,060	0	0	-	0	0

(w_j x y_{jt})								0,0002		
(Retorno do *portfólio* de janeiro de 2011)	-0,05324									

Tabela 18 - Retorno do modelo em fevereiro de 2011

	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	w8	w9	w10
Peso de cada ativo em fevereiro de 2011 (w_j)	0	0	0	0,487	0,125	0	0	0	0,333	0,0534
Retorno no mês de fevereiro (y_{jt})	0,0848 59	0,0550 02	- 0,013 67	- 0,027 26	- 0,006 63	0,0389 61	0,0396 18	0,0078 13	- 0,012 31	0,0427 63
Multiplicação (w_j x y_{jt})	0	0	0	-0,013	- 8,3E-4	0	0	0	-0,004	0,0022
(Retorno do *portfólio* de fevereiro de 2011)	-0,01594									

Tabela 19 - Taxa de retorno do CDI durante o período analisado

CDI		
Período	Taxa Mensal	CDI Acumulado (%)
Mar/10	0,7569%	0,7569%
Abr/10	0,6639%	1,4258%
Mai/10	0,7500%	2,1865%
Jun/10	0,7908%	2,9946%
Jul/10	0,8592%	3,8795%
Ago/10	0,8863%	4,8002%
Set/10	0,8445%	5,6853%

Out/10	0,8056%	6,5367%
Nov/10	0,8056%	7,3949%
Dez/10	0,9271%	8,3906%
Jan/11	0,8606%	9,3234%
Fev/11	0,8424%	10,2443%
Retornos Acumulados Março/2010 - Fevereiro/2011		

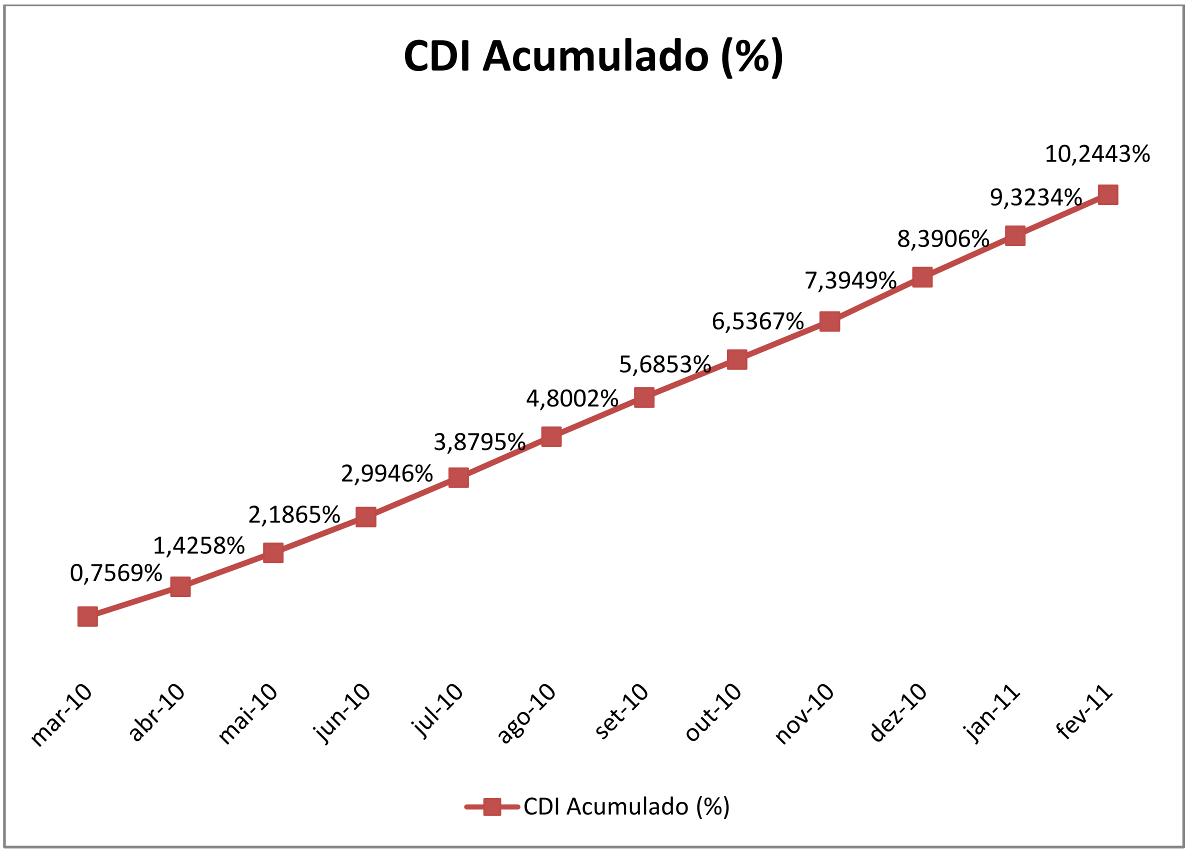

Gráfico 6- CDI Acumulado (%)

A HISTÓRIA DA TEORIA DOS JOGOS

2.1 AS ORIGENS DA TEORIA DOS JOGOS

Os jogos de aposta fazem parte do lazer da humanidade desde as primeiras civilizações. Estar em situações em que vencer ou perder dependem das escolhas feitas no início e no decorrer da partida, fascinam e despertam o interesse humano. Esse tipo de situação pode ser encontrada nos famosos jogos de salão como: jogos de tabuleiro, dados, cartas, roletas etc. Além de diversão, o jogo proporciona o desenvolvimento de diversas habilidades para o conhecimento, interação social, visualização de cenário como um todo , rapidez no raciocínio lógico, coordenação de ideias e tomada de decisão; mas isso só passou a ser estudado com mais afinco após o surgimento da teoria da probabilidade.

A teoria da probabilidade teve início com os jogos de cartas, dados e roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório. A teoria da probabilidade em jogos foi primeiramente estudada pelo famoso matemático, físico e filósofo francês Blaise Pascal, juntamente com o matemático francês Fermat. Registros históricos relatam que tudo começou em uma viagem quando Pascal conheceu um jogador com uma notável habilidade para problemas matemáticos, o Cavaleiro De Méré, cujo verdadeiro nome era Antoine Gombaud. De Méré sabendo das habilidades de Pascal, o confrontou com um problema que intrigava matemáticos famosos, como Pacioli (1494), Tartaglia (1556) e Cardano (1545), há séculos:

"Dois jogadores com igual perícia são interrompidos enquanto jogam um jogo de azar para uma certa quantia de dinheiro. Dada a pontuação do jogo naquela altura, como deve ser dividida a aposta?"[22]

Figura 5 - Matemático Francês - Blaise Pascal (1623-1662)

O problema chamou bastante atenção de Pascal, que por sua vez o mostrou para Fermat. Isso resultou numa troca de correspondência entre os dois. Aproximadamente sete cartas[23] foram escritas, a partir disso começou a aproximação à descoberta da teoria das probabilidades.

[22]Por, jogadores com igual perícia, deve entender-se dois jogadores que iniciam o jogo com igual probabilidade de ganhar, em todos os aspectos.

[23]Essas sete cartas podem ser encontradas na integra e com as resoluções mais detalhadas do problema acima, no site: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/7cartas/pascalfermat.htm

A partir daí, pela primeira vez, era possível medir com valores numéricos coisas até então consideradas imensuráveis, tais como a certeza e a incerteza de que um determinado evento pudesse ocorrer.

Figura 6 - Matemático Francês, Fermat (1601-1665)

Mais tarde, outros registros indicaram que os primeiros estudos realizados em teorias dos jogos aconteceram no século XVIII e foram relatados por James Waldegrave em correspondências a Nicolas Bernoulli. Foi analisado um jogo de cartas chamado “le Her” o qual fornecia uma solução de estratégia mista. Porém, Waldegrave não aplicou essa solução para uma teoria geral.

Figura 7 - James Waldegrave (1684-1741)

No início do século XIX outro matemático francês, Cournot, apresentou um estudo da análise do ponto de equilíbrio nas estratégias de jogos, e publicou um famoso trabalho sobre duopólio. Mais tarde esse estudo foi generalizado por John Forbes Nash Jr. com o famoso equilíbrio de Nash.

Figura 8 - Antoine Augustin Cournot (1801-1887)

Mas foi somente em 1913 que Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos[24]. Em seu teorema ele afirma que o jogo de xadrez é estritamente determinado, ou seja, em cada estágio do jogo um dos jogadores tem uma estratégia em mão que poderá lhe conduzir a vitória ou ao empate.

Figura 9 - Ernst Zermelo (1871 - 1953)

[24]ZERMELO, E. Über eine Anwendung der Mengdenlehre auf die theories des Schachspiels. Atas do Décimo Quinto Congresso Internacional de Matemáticos, v. 2, p. 501-504, 1913.

Porém, de acordo com estudiosos, o marco inicial da teoria dos jogos se deu através de John Von Neumann, matemático húngaro-americano, que alcançou uma solução geral para o teorema Minimax proposto pelo matemático Francês Émile Borel. A princípio Borel conseguiu resolver jogos com duas pessoas que tivessem até cinco opções de estratégias a sua escolha.Mas pouco tempo depois, em 1928, Von Neumann publica um artigo contendo a solução geral para o teorema de borel. O mesmo teorema diz que sempre há uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos cujos interesses são completamente opostos.

A solução foi publicada no artigo *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*(Sobre a Teoria dos Jogos de Estratégia, 1928), nesse período Oskar Morgenstern, economista alemão, estava por publicar o livro Implicações Quantitativas docomportamento do Máximo, no qual discute qual deveria ser a unidade de análise econômica: o individualismo ou a interação social.

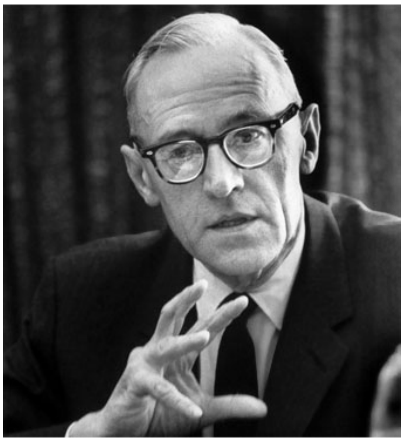

Figura 10 - Oskar Morgenstern (1902-1977)

Chegando à conclusão que os indivíduos interagem, então a sua racionalidade é relativa, se a racionalidade do individuo não é plena então a sua maximização também não será. A obra de Morgenstern expõe que o máximo depende diretamente da interação entre os indivíduos e indiretamente do meio no qual os indivíduos interagem. Por isso Morgenstern e Von Neumann juntaram os seus trabalhos e publicaram, em 1944, a obra: *The Theory of Games and Economics Behavior*(Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico, 1944), que além de desenvolver uma teoria de jogos para mais participantes, eles afirmaram que o comportamento da economia depende, fundamentalmente, da interação entre os agentes, já que ele afeta diretamente a elaboração de estratégias e tomadas de decisão dos produtores e dos consumidores (Almeida, 2006).

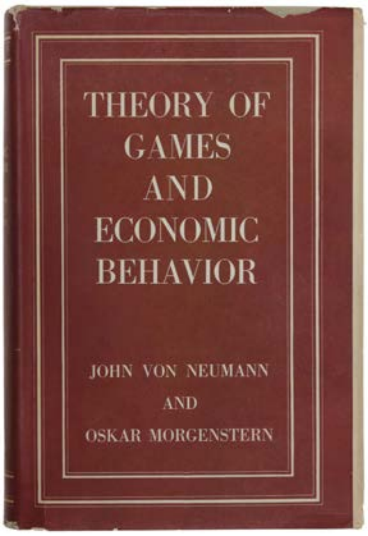

Figura 11 - Capa da primeira edição do *The Theory of Games ans Economics Behavior*

Em 1950, John Forbes Nash Jr., matemático estadunidense que conquistou o prêmio Nobel de economia em 1994, um dos principais nomes da história da Teoria dos Jogos, formado pela Universidade de Princeton, em 1950, com a tese *Non-Cooperative Games*(Jogos Não-Cooperativos, publicada em 1951) que lhe valeu mais tarde a indicação para o Nobel. Nesta tese, Nash provou a existência de ao menos um ponto de equilíbrio em jogos de estratégias para múltiplos jogadores, mas para que ocorra o equilíbrio é necessário que os jogadores se comportem racionalmente e não se comuniquem antes do jogo para evitar acordos. O equilíbrio de Nash era utilizado para jogos de informação completa, mas, com trabalhos posteriores de Harsanyi e Selten, o mesmo passou a ser aplicado, também, em jogos de informação incompleta, a principal contribuição desses autores foi mostrar que a teoria dos jogos de informação completa pode ser estendida para cobrir certas situações importantes nas quais a informação é incompleta. A partir desses trabalhos começaram a surgir novas técnicas de solução de jogos e a serem aplicadas em diferentes áreas de estudo, como Economia, Engenharia, Direito, Biologia, Ciências Políticas, Relações Internacionais etc. Nash não fez a Teoria dos jogos, mas modificou-a, pois Neumann utilizava suas teses para trabalho unitário, já Nash fez seu trabalho valer em grupo, modificando a economia mundial. Seus estudos são ainda amplamente utilizados. Entre 1949 e 1953, além deste trabalho, escreveu mais artigos ligados à teoria dos jogos[25].

[25] o chamado programa de Nash para solução de jogos estratégicos *TheBargaining Problem*(O Problema da Barganha, 1949); *Equilibrium Points in N-PersonGames* (Pontos de Equilíbrio em Jogos de N-Pessoas, 1950) e *Two-PersonCooperative* *Games* (Jogos Cooperativos de Duas Pessoas, 1953). Também escreveu artigos de matemática pura sobre variedades algébricas, em 1951 e de arquitetura de computadores, em 1954. Contudo, Nash tinha problemas de esquizofrenia que se agravou ao extremo, afastou-se das pesquisas e submeteu-se a um tratamento rigoroso durante alguns anos. Depois da estabilização do seu quadro mental volta a ministrar aulas no

departamento de matemática de Princeton. Em dezembro de 1994, recebe a medalha com a efígie de Alfred Nobel, das mãos do rei da Suécia. Sua vida conturbada foi tema de biografia escrita por Sylvia Nasar que originou o filme Uma Mente Brilhante, que recebeu o Oscar de 2001 (Almeida, 2006).