

**UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO DECK NO COMPORTAMENTO DE  
PLATAFORMAS OFFSHORE FIXAS SUBMETIDAS A AÇÕES DINÂMICAS**

**TULLIO BARROS S. BOMTEMPO**

**ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr. Ing.**

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL II EM ESTRUTURAS**

**BRASÍLIA/DF: DEZ 2014**



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DO DECK NO COMPORTAMENTO DE  
PLATAFORMAS OFFSHORE FIXAS SUBMETIDAS A AÇÕES DINÂMICAS**

**TULLIO BARROS S. BOMTEMPO**

**MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA CIVIL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE  
BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.**

APROVADA POR:

---

Prof. Lineu José Pedroso, Dr. Ing. (ENC-UnB).  
(Orientador)

---

Prof. Dirceu Silveira Reis Júnior, Ph.D. (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)

---

Prof. Willian Taylor Matias Silva, Dr. Ing. (ENC-UnB)  
(Examinador Interno)

**BRASÍLIA/DF, DEZEMBRO de 2014**



## FICHA CATALOGRÁFICA

BOMTEMPO, BARROS TULLIO

Um estudo sobre a influência do deck no comportamento de plataformas offshore fixas submetidas a ações dinâmicas.

xviii, 75 p., XXVIII, A-iii, 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2012)

Monografia de Projeto Final – Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

1. Plataformas *Offshore* 2. Interação Fluido-Estrutura 3. Teoria Linear de Ondas 4. Ações de Ondas 5. Sismos 6. Dinâmica das Estruturas

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BOMTEMPO, T. B. S. (2014). Um estudo sobre a influência do deck no comportamento de plataformas offshore fixas submetidas a ações dinâmicas. Monografia de Projeto Final 2, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Tullio Barros Silva Bomtempo

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Um estudo sobre a influência do deck no comportamento de plataformas offshore fixas submetidas a ações dinâmicas.

GRAU/ANO: Engenheiro Civil / 2014

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta monografia de projeto final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

TULLIO BARROS BOMTEMPO

SMPW 04 CONJUNTO 03 LOTE 3 CASA C, Park Way

71.735-403 – Brasília – DF

E-mail: tullibomtempo@gmail.com



## **AGRADECIMENTOS**

Sobre tudo a Deus, pela dádiva do conhecimento e inspiração na busca do saber.

Ao meu orientador, Lineu José Pedroso, pela experiência transmitida, pelo exemplo de professor e pesquisador, pela sua motivação, disponibilidade, atenção.

Ao meu pai Roberto Silva Bomtempo, pela inspiração profissional e demonstração de trabalho realizado com humildade e respeito. A Tereza Neuma da Silva Barros, especialmente, pela grande sabedoria e amor de mãe, que me educou e conduziu-me com confiança, possibilitando-me uma formação sólida.

Aos meus irmãos, Rafael Barros Bomtempo e Felipe Barros Bomtempo, por serem ótimas referências profissionais e pessoais, pelo incentivo e paciência durante toda trajetória até aqui.

Aos meus primos e amigos, pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis da graduação e realização deste trabalho.

“Dá-me, Senhor,  
agudeza para entender,  
capacidade para reter,  
método e faculdade para apreender,  
sutileza para interpretar,  
graça e abundância para falar,  
Dê-me, Senhor,  
acerto ao começar,  
direção ao progredir  
e perfeição ao concluir.”  
(São Tomás de Aquino)

## SUMÁRIO

<b>1. GENERALIDADES</b> .....	<b>1</b>
1.1. INTRODUÇÃO .....	1
1.2. MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA .....	2
1.3. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA .....	3
1.4. OBJETIVOS .....	4
1.4.1. OBJETIVOS GERAIS .....	4
1.4.2. OBJETIVO ESPECÍFICO .....	4
1.5. METODOLOGIA APLICADA .....	5
1.7. ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS .....	7
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>9</b>
2.1. CLASSIFICAÇÃO E TIPOS DE PLATAFORMAS DE PETRÓLEO .....	9
2.1.1. PLATAFORMAS FIXAS .....	9
2.1.2. PLATAFORMA FLUTUANTE .....	11
2.2. VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS .....	13
2.2.1 SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE .....	14
2.3. SOLICITAÇÕES DE ODA'S E TERREMOTOS .....	15
2.3.1 ONDAS DE SUPERFÍCIE .....	15
2.3.2 SISMOS NO SOLO OCEÂNICO .....	16
<b>DESENVOLVIMENTO TEÓRICO</b> .....	<b>18</b>
<b>3. ONDAS</b> .....	<b>18</b>
3.1. TEORIA LINEAR DE ONDAS .....	18
3.2. DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS CINEMÁTICOS (VELOCIDADES E ACELERAÇÕES) .....	20
3.3. PRESSÕES DEVIDO AS ONDAS PROGRESSIVAS .....	21
<b>4. ESFORÇOS DE ONDAS</b> .....	<b>23</b>
4.1. EQUAÇÃO DE MORISON .....	23
4.2. CÁLCULO DAS FORÇAS E MOMENTOS .....	24
4.3. FORÇAS TOTAIS SOBRE A ESTRUTURA .....	25
4.4. FORÇAS LONGITUDINAIS EXERCIDAS PELAS ONDAS PROGRESSIVAS SOBRE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS .....	30
<b>5. TERREMOTO: RESPOSTA DINÂMICA</b> .....	<b>32</b>
5.1. ESPECTRO DE RESPOSTA ELÁSTICO .....	32
<b>6. DINÂMICA DAS ESTRUTURAS</b> .....	<b>36</b>

<b>6.1. SISTEMAS DE PARÂMETRO DISTRIBUÍDO</b> .....	36
6.1.1. SIMPLIFICAÇÃO EM UMA VIGA ENGASTADA .....	36
6.1.2 SIMPLIFICAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA COM MASSA CONCENTRADA NA PONTA .....	40
6.1.3. MASSA ADICIONAL.....	43
<b>7. ASPECTOS COMPUTACIONAIS</b> .....	<b>44</b>
7.1. MAPLE .....	44
7.2. LAS .....	44
7.3. SAP .....	45
<b>8. RESULTADOS</b> .....	<b>46</b>
8.1. SOLUÇÕES ANALÍTICAS .....	46
8.1.1. FORÇAS DEVIDO ÀS ONDAS PROGRESSIVAS .....	46
8.1.2. FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA SISTEMA DE PARÂMETRO DISTRIBUÍDO .....	52
8.1.3. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS PARA SISTEMA DE MASSA DISTRIBUÍDA E COM MASSA CONCENTRADA DO DECK .....	54
8.1.4 INFLUÊNCIA DA MASSA DO DECK NAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO .....	57
8.2. SOLUÇÕES NUMÉRICAS .....	60
8.2.1. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS PARA SISTEMA DISCRETO CONSIDERANDO A MASSA DO DECK .....	60
8.2.2. COMPARATIVO ENTRE OS RESULTADOS DO MODELO EM “LAS” e SAP2000 E O ANALÍTICO .....	62
8.2.3. INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DO DECK.....	63
8.2.4. RESPOSTA DINÂMICA DEVIDO ÀS ONDAS .....	67
8.2.5. RESPOSTA DINÂMICA AO TERREMOTO .....	69
<b>10. CONCLUSÃO</b> .....	<b>73</b>
<b>11. BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>74</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>I</b>
<b>12. REVISÃO DE HIDRODINÂMICA</b> .....	<b>II</b>
12.1. TEORIA LINEAR DE ONDAS .....	II
12.2. ONDAS PROGRESSIVAS .....	V
12.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	VI
12.4. RESOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO.....	VIII

12.5. DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS CINEMÁTICOS (VELOCIDADES E ACELERAÇÕES) .....	X
12.6. EQUAÇÕES DEGENERADAS, EM FUNÇÃO DA PROFUNDIDADE RELATIVA .....	XI
11.7. PRESSÕES DEVIDO AS ONDAS PROGRESSIVAS .....	XII
<b>13. REVISÃO DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS .....</b>	<b>XV</b>
13.1. SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE .....	XV
13.2. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO .....	XV
12.3. REGIME LIVRE CONSERVATIVO (NÃO AMORTECIDO) .....	XVI
12.4. REGIME LIVRE DISSIPATIVO (AMORTECIDO) .....	XVII
13.5. REGIME FORÇADO DISSIPATIVO (AMORTECIDO) .....	XIX
12.6. SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.....	XXII
12.7 . VIBRAÇÃO LIVRE EM SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE.....	XXIII
12.8. MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL .....	XXVI

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. 1 – Simplificação do Modelo de Plataforma (Fonte: HARITOS 2007 adaptada pelo autor) .....	3
Figura 1. 2- Modelo 1 Simplificado de uma Plataforma fixa.....	5
Figura 1. 3 – (a) Modelo 2 Simplificado SAP200 (b) Modelo 2 Simplificado LAS .....	6
Figura 2. 1 - Principais tipos de Plataforma <i>off-shore</i> .....	9
Figura 2. 2 (a) Plataforma tipo auto-elvatória (b) Plataforma tipo Jaqueta.....	11
Figura 2. 3 - (a) Plataforma tipo SPAR (b) Plataforma tipo TLP.....	12
Figura 2. 4 – Sistema massa-mola amortecido com 1GL.....	15
Figura 3. 1- Definição dos parâmetros da onda.....	19
Figura 3. 2- Pressões devido às ondas progressivas .....	22
Figura 4. 1 - Força de inércia e de arraste por unidade ao longo do cilindro .....	25
Figura 4. 2- Ábaco de obtenção do coeficiente de inércia $C_M$ .....	27
Figura 4. 3- Ábaco de obtenção do coeficiente de arraste $C_D$ .....	27
Figura 4. 4 - Ábaco genérico para obtenção do coeficiente de arrasto $C_D$ em função de $Re$ 4.428	
Figura 4. 5- Ábaco detalhado para obtenção do coeficiente de arrasto $C_D$ em função de $Re$ ....	29
Figura 4. 6– Estrutura flexível vibrando sob ação de uma onda. ....	30
Figura 5. 1– Acelerograma do terremoto de El Centro (1940) (Fonte: CHOPRA, 1995) .....	33
Figura 5. 2 – Histórico das respostas de deslocamento da estrutura para o terremoto de El Centro em 3 sistemas com taxa de amortecimento $\xi=2\%$ e período natural da estrutura 0,5;1 e 2 segundos, respectivamente. ....	34
Figura 5. 3 – Espectro de respostas do deslocamento para taxa de amortecimento $\xi = 2\%$ do terremoto El Centro, 1940. (Fonte: CHOPRA, 1995).....	35
Figura 6. 1– Propriedades da viga engastada. ....	37
Figura 6. 2 – Termos da equação da frequência.....	39
Figura 6. 3– Viga engasta com massa concentrada. (a) propriedades da viga, (b) forças agindo na extremidade livre.....	40
Figura 8. 1 – Esquema do exemplo de estudo.....	46
Figura 8. 2- Variação da força de arraste por unidade de comprimento ao longo da altura e do tempo.....	49
Figura 8.3 - Variação da força de inércia por unidade de comprimento ao longo da altura e do tempo.....	50
Figura 8.4-- Gráfico das força total na direção “x” aplicada ao longo do tempo.....	51
Figura 8.5- Gráfico do momento gerado pela força total na direção “x” aplicada ao longo do tempo.....	52
Figura 8. 6 – (a) Primeiro modo de vibração (b) Segundo modo de vibração (c) Terceiro modo de vibração (d) Quarto modo de vibração.....	55
Figura 8.7 – Variação da primeira frequência de vibração em função da massa $m_1$ . ....	57

Figura 8.8 - Variação da segunda frequência de vibração em função da massa $m_1$ .....	58
Figura 8.9 – Variação da primeira frequência de vibração em função da inercia ( $j$ ) .....	59
Figura 8.10 - Variação da primeira frequência de vibração em função da inercia ( $j$ ) .....	59
Figura 8. 11- Influência da rotação nos modos de vibração (a) Primeiro modo (b) Segundo modo.....	60
Figura 8. 12– Primeiro e Segundo modos de vibração obtidos numericamente. ....	61
Figura 8.13- Erro de desratização em função do $n^\circ$ de elementos. ....	62
Figura 8. 14– Modos de próprios de vibração Modelo 1 .....	63
Figura 8. 15- Modos de próprios de vibração Modelo 2.....	64
Figura 8. 16- Modos de próprios de vibração Modelo 3 .....	64
Figura 8. 17- Modos de próprios de vibração Modelo 4.....	65
Figura 8. 18- Modos de próprios de vibração Modelo 5.....	65
Figura 8. 19 – Gráfico comparativo das Frequências Naturais para os diversos modelos de deck .....	66
Figura 8. 20– Resposta Dinâmica para frequência de excitação menor que $\omega_1$ .....	67
Figura 8. 21- Resposta Dinâmica para frequência de excitação igual a $\omega_1$ (ressonância). ....	68
Figura 8. 22- Resposta Dinâmica para frequência de excitação igual abaixo de $\omega_1$ e $m_1$ muito elevada.....	69
Figura 8. 23 – Espectro de resposta dos deslocamentos.....	70
Figura 8. 24- Resposta Dinâmica para Terremoto para Modelo 1. ....	71
Figura 8. 25- Resposta Dinâmica para Terremoto para Modelo 2. ....	71
Figura12. 1- Definição dos parâmetros da onda.....	II
Figura12. 2- Orbita das partículas nas ondas (Fonte: HARITOS, 2007) .....	XII
Figura12. 3-Pressões devido às ondas progressivas .....	XIII
Figura13. 1-Sistema massa-mola amortecido com IGL. ....	XV
Figura13. 2-movimento de um oscilador subamortecido.....	XVIII
Figura13. 3-Deslocamento e velocidade de um oscilador elementar superamortecido. ....	XIX
Figura13. 4-Resposta de um sistema amortecido com uma força harmônica: (a) $\omega/\omega = 0,2$ ; $\xi = 0,05$ ; (b) $\omega/\omega = 0,2$ ; $\xi = 0,15$ .(Fonte : PAULTRE, 2005) .....	XX
Figura13. 5-Variação da amplitude dinâmica, $R_d$ em função da frequência relativa $\beta$ e da taxa de amortecimento $\xi$ .....	XXI
Figura13. 6-Variação do fator de resposta dinâmica $R(t)$ em função do tempo na ressonância. ....	XXII

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4. 1- Tabela simplificada para obtenção de CM em função de Re .....	28
Tabela 8. 1– Frequências Naturais para o modelo numérico com 8 elementos. ....	60
Tabela 8. 2– Frequências Naturais para o modelo numérico submerso com 8 elementos. ....	61
Tabela 8. 3– Comparativo das frequências Naturais para modelo analítico e numéricos em LAS e SAP 2000.....	63
Tabela 8. 4 Comparativo das frequências naturais para os diversos modelos de deck .....	66
Tabela 8. 5 – Frequências Próprias para Modelo 1 e 2 obtidas no software LAS.....	70

## SIMBOLOGIA

$A$  - Área; constante

$B$  - Constante

$c$  - Coeficiente de amortecimento

$C$  - Coeficiente; celeridade; propriedades de amortecimento em coordenadas normais

$C_M$  - Coeficiente de inércia ou massa

$C_D$  - Coeficiente de arraste

$D$  - Diâmetro

$f$  - Força por unidade de comprimento; função; frequência

$\omega$  - Frequência natural

$F$  - Força; função

$F_D$  - Força de arrasto

$F_M$  - Força de inércia

$g$  - Aceleração gravitacional

$h$  - Profundidade total

$H$  - Altura da onda

$I$  - Inércia

$k$  - Número da onda; constante elástica; energia cinética

$K$  - Propriedades elásticas em coordenadas normais

$K_p$  - Coeficiente de pressão hidrodinâmica

$L$  - Comprimento de onda xxiv

$L_0$  - Comprimento de onda a grandes profundidades

$m$  - Metro; massa por unidade de comprimento

$M$  - Momento; propriedades de massa em coordenadas normais; massa concentrada

$M_D$  - Momento devido ao arraste

$M_M$  - Momento devido à força inercial

$n$  - Número

$p$  - Pressão; força externa

$R$  - Parâmetro

$Re$  - Número de Reynolds

$St$  - Número de Strouhal

$t$  - Tempo

$T$  - Período

$v$  - Velocidade

$u$  - deslocamento

$\dot{u}$  - velocidade

$\ddot{u}$  - aceleração

$V$  - Volume

$x$  - Eixo; distância; deslocamento horizontal

$y$  - Eixo

$z$  - Eixo; cota em relação ao nível d'água

## LETRAS GREGAS

- $\alpha$  - Constante de integração; ângulo de fase
- $\beta$  - Constante de integração; taxa de frequência
- $\varepsilon$  - Coordenada elipse; razão de dissipação
- $\zeta$  - Fator de amortecimento
- $\rho$  - Densidade relativa
- $\eta$  - Função da onda
- $\theta$  - Ângulo; ângulo de fase
- $\mu$  - Viscosidade dinâmica
- $\nu$  - Viscosidade cinemática
- $\tau$  - Tensão cisalhante
- $\varphi$  - Função potencial
- $\phi$  - Função potencial; modo de vibração
- $\Phi$  - Latitude; amplitude
- $\psi$  - Função de interpolação
- $\omega$  - Frequência angular; dissipação específica
- $\omega_0$  - Frequência angular natural
- $\omega_D$  - Frequência angular amortecida

## RESUMO

Nas últimas décadas a produção de petróleo no mar cresceu consideravelmente e com isso ocorreu também o aumento na construção de plataformas *offshore*, assim como o desenvolvimento de novas técnicas, novas unidades de exploração e instalação destas estruturas. Entretanto, é essencial para a análise estrutural e compreensão do comportamento dinâmico de plataformas offshore um aprendizado progressivo, começando por modelos simplificados.

O presente trabalho apresenta um estudo do comportamento dinâmico de uma plataforma fixa com uma haste engastada e a influência do deck na vibração da mesma. É necessário o estudo das ações dinâmicas às quais podem estar submetidas essas estruturas, sendo aqui, abordadas as ondas progressivas de baixa inclinação em águas profundas e sismos, ambas de forma determinística.

São desenvolvidas as equações de campo cinemático das ondas e determinadas suas pressões sobre as estruturas analiticamente, utilizando a equação de Morison. Além disso, é abordado o tema de ondas sísmicas e a resposta dinâmica elástica da estrutura a tais solicitações.

Através da formulação feita por equações diferenciais para a plataforma estudada, considerando parâmetros distribuídos, é realizada uma comparação analítico-numérica entre os resultados obtidos e comprovado a eficácia da formulação. Além de validar os modelos numéricos criados nos *softwares* LAS e SAP2000, este trabalho mostra como a massa e a geometria do deck podem influenciar os modos de vibração e a resposta dinâmica da estrutura.

**Palavras-chave:** Plataformas Offshore, Interação Fluido-Estrutura, Teoria Linear de Ondas, Sismos, Dinâmica das Estruturas.

## ABSTRACT

In recent decades the production of oil at sea has grown considerably and so increased the construction of offshore platforms, as well as the development of new techniques, new operating units and installation of these structures. It is essential for structural analysis and understanding of the dynamic behavior of offshore platforms, progressive learning, starting with simplified models.

This work makes a study of the dynamic behavior of a fixed platform with a cantilever rod and the deck influence on the vibration of that. It is necessary to study the dynamic actions to which these structures can be submitted, and here addressed the traveling wave low slope in deep water and earthquakes, both deterministically.

The wave's cinematic field equations are developed and analytically determined its pressures on the structures using the equation of Morison. Also it addresses the seismic waves theme and the elastic dynamic response of the structure.

Through a formulation made by differential equations for the platform studied, considering distributed parameters, is performed an analytical-numerical comparison between the obtained results and proved the formulation efficacy. In addition to validating the numerical models created in LAS and SAP2000 software, this work shows how the mass and geometry of the deck can influence the vibration modes and the dynamic response of the structure.

**Keywords:** Offshore Platforms, Fluid-Structure Interaction, Linear Wave Theory, Earthquakes, Structural Dynamics.



# 1. GENERALIDADES

## 1.1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o Brasil desenvolveu novas tecnologias que nos fizeram garantir a capacidade de extração de petróleo em poços localizados em águas cada vez mais profundas que exige a utilização de plataformas flutuantes. Porém, conhecer o comportamento de plataformas fixas e a interação fluido-estrutura em ambiente marinho é extremamente importante para construção do conhecimento relacionado a plataformas *offshore*

A Petrobras, empresa estatal responsável pela exploração de petróleo no país, utiliza plataformas fixas e plataformas semissubmersíveis. São 111 plataformas ao longo da costa brasileira. Destas, 33 são fixas e 78 flutuantes.

Atualmente, com a descoberta do pré-sal, o Brasil pôde consolidar a autossuficiência no combustível fóssil, além de obter reservas estratégicas e poderio para exportação, levando o país a ser um dos maiores produtores de petróleo do mundo. A indústria petrolífera offshore encontra-se voltada para esse novo desafio tecnológico, trata-se de bacias sedimentares que se encontram abaixo do leito do mar e de uma extensa camada de sal. O petróleo, que provavelmente é de boa qualidade, localiza-se em áreas que podem chegar a mais de 7 mil metros de profundidade. (Fonte: Assessoria de imprensa da Petrobras).

Como as ações ambientais atuantes em uma plataforma *offshore* não são de natureza estática, torna-se importante o estudo do comportamento dinâmico da estrutura. Tendo em vista este comportamento da estrutura, será realizado neste trabalho um estudo do comportamento dos modos de vibração e frequências naturais de um modelo de plataforma fixa que se movimenta horizontalmente.

Na análise dos modos de vibração, serão utilizadas duas maneiras de verificar como as frequências e as formas modais se comportam. Uma delas é através do software LAS (Language for analysis of structures) que foi implementado em código LAS e do software SAP2000 V15 para obtenção de resultados numéricos. A outra forma é analítica e gráfica, observando as formas modais impressas. O programa em linguagem LAS e o SAP2000 V15, por meio do método dos elementos finitos, faz a

análise da estrutura de sustentação da plataforma através de elementos de viga. No trabalho será discutida a diferença entre a consideração ou não da massa do deck a influência da geometria do mesmo e sua relação com os valores próprios da estrutura.

Os dados herdados do projeto de graduação do engenheiro civil **Juliano L. Ferreira** (Um Estudo de Ações Dinâmicas em Plataformas Offshore Utilizando Dinâmica dos Fluidos Computacional, 2012) serão usados por motivos de comparação e continuidade dos estudos na área *offshore*. Além disso, o presente trabalho poderá servir ao aprofundamento do assunto, considerando que exige o conhecimento de temas importantes como mecânica dos fluidos e dinâmica das estruturas.

## **1.2. MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA**

Engenheiros tem tentado, cada vez mais, desenvolver soluções estruturais, mais leves, de menor custo e maior velocidade de execução. Tal procedimento resulta em estruturas cada vez mais esbeltas, flexíveis e pouco amortecidas, sendo que estão mais suscetíveis a problemas de natureza dinâmica e com níveis indesejáveis de vibração.

Estruturas *offshore*, que estão sujeitas a ações tais como o vento, terremotos, explosões, ondas, entre outras, é importante que o seu dimensionamento atenda aos critérios apresentados nas normas técnicas em vigor. Além disso, deve-se realizar uma análise dinâmica que seja consistente, analisando adequadamente as propriedades dinâmicas do sistema estrutural, tais como a massa, a rigidez e o amortecimento estrutural.

Tendo em vista tais considerações, para se realizar uma análise dinâmica confiável, é necessário a construção de um modelo numérico computacional que represente bem o sistema físico a ser analisado.

A demanda de projetos na área de exploração de óleo e gás nos últimos anos, utilizando-se estruturas cada vez mais esbeltas e com uma exigência maior no que diz respeito a segurança, insere esta monografia dentro da perspectiva de se conhecer mais este domínio de estudo e contribuir nas pesquisas relacionadas a este tema.

### 1.3. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

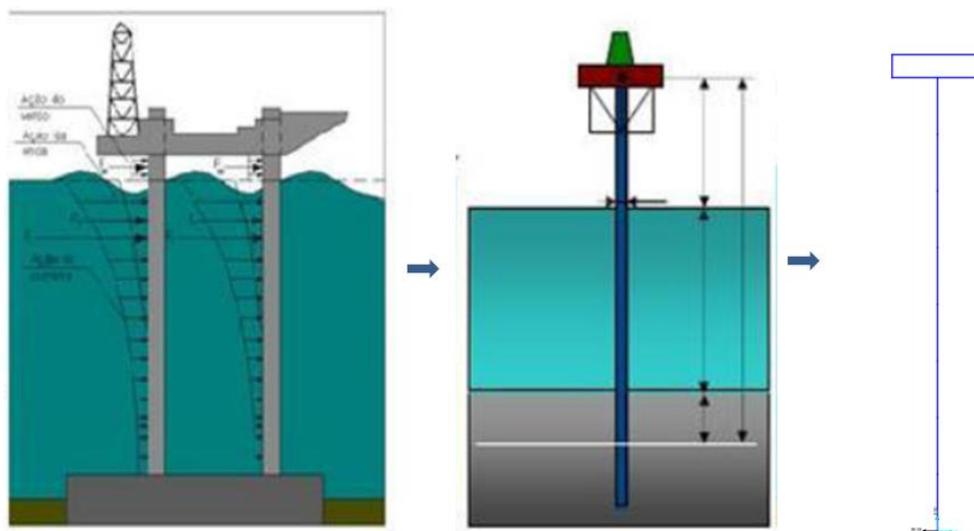
Para a análise dinâmica e entendimento das plataformas *offshore* fixas é necessário, primeiramente, conhecer os tipos de estruturas usuais na área, e então elaborar modelos simplificados que representem relativamente bem uma situação real e que, posteriormente, possam ser adaptados para modelos mais complexos.

É preciso conhecer os tipos de ações nas estruturas e as teorias que as governam, para então aplicar carregamentos que sejam compatíveis com o ambiente de implantação do projeto.

Para o dimensionamento de plataformas *offshore* é essencial uma análise dinâmica adequada da estrutura, incluindo a verificação quanto à proximidade das frequências solicitantes em relação às frequências naturais modais da estrutura.

Uma vez que se têm os dados de carregamento em mãos, é necessário desenvolver modelos numéricos que respondam adequadamente as situações de solicitação em ambiente marinho. Além disso, é importante verificar os parâmetros e propriedades que influenciam a vibração do sistema, passando finalmente a etapas de validação, ponto de partida para a análise de uma estrutura de maior complexidade.

A Figura 1.1 ilustra a simplificação utilizada para realização das análises neste trabalho, sendo que um modelo de plataforma auto elevatória sustentada por hastes bem espaçadas, as quais não interferem uma na outra, pode ser representado por um modelo com uma haste cilíndrica fixa e um deck retangular.



**Figura 1.1** – Simplificação do Modelo de Plataforma (Fonte: HARITOS 2007 adaptada pelo autor)

## **1.4. OBJETIVOS**

### **1.4.1. OBJETIVOS GERAIS**

Como objetivos gerais, o estudo tem:

1. Conhecer as ações solicitantes nas estruturas *offshore* geradas por ondas e sismos e a resposta dinâmica para uma plataforma fixa em relação a essas solicitações.
2. Estudar os modos de vibração e frequências naturais de uma modelo de plataforma fixa e a influência da massa e geometria do deck nas mesmas.

### **1.4.2. OBJETIVO ESPECÍFICO**

Como objetivos específicos, o estudo tem:

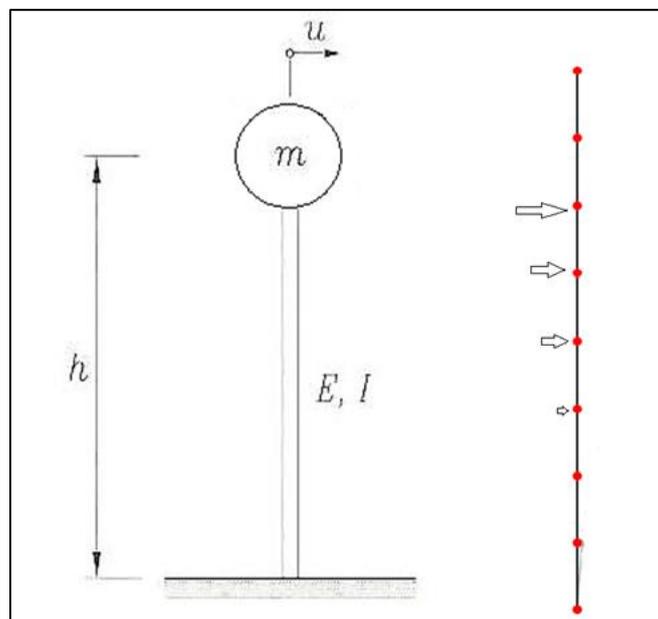
1. Determinar as equações que descrevem o comportamento das ondas;
2. Resolver analiticamente estruturas simples conhecidas da literatura, servindo de base a uma futura simulação numérica;
3. Modelar numericamente a estrutura e aplicar as forças que represente as ações oceânicas no programa LAS;
4. Determinar a frequência natural das vibrações modais relevantes ao problema através da formulação analítica realizada e dos programas numéricos;
5. Analisar a influência do deck da estrutura nos modos de vibração;
6. Validar e comparar os resultados analíticos com os métodos numéricos utilizando o programa LAS e SAP2000.

## 1.5. METODOLOGIA APLICADA

Será considerado um pilar simplificado, que possui solução analítica bem definida para obtenção dos resultados preliminares. As soluções analíticas servirão de base comparativa e como referência para validação do modelo numérico inicial, Figura 1.2. Primeiramente será analisado um pilar engastado com massa distribuída uniformemente e em seguida um modelo com massa distribuída e uma massa concentrada na ponta, representando o deck.

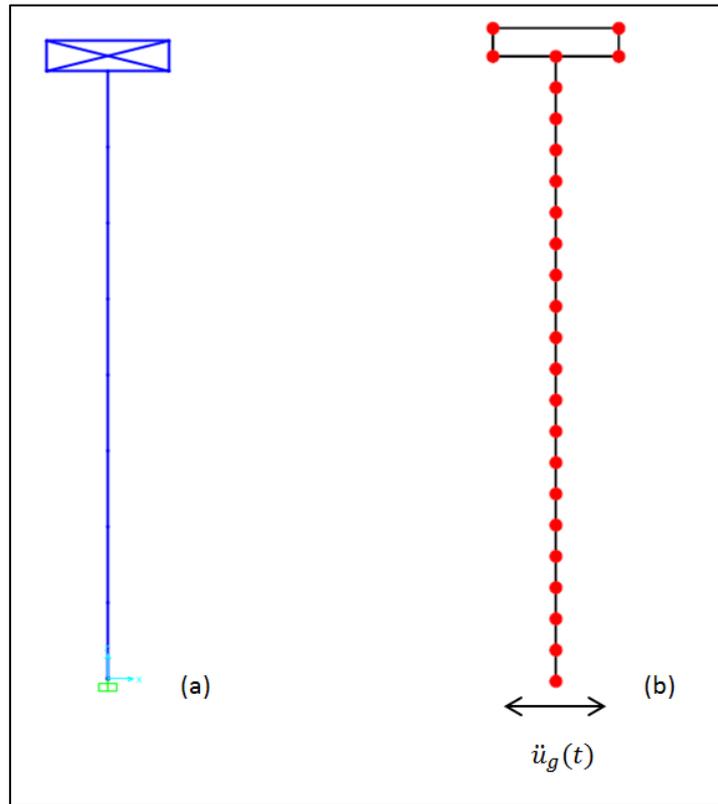
Através do modelo numérico será analisado o deslocamento da estrutura devido as forças dinâmicas aplicadas externamente. Após cada simulação, será feita uma comparação entre os resultados obtidos numericamente e os esperados, já obtidos pela solução analítica.

O modelo de estudo, representado pela Figura 1.2, será um sistema estrutural, de massa concentrada, engastado ao fundo, com quatro elementos inicialmente, sendo considerados apenas a inercia de translação. O número de elementos aumenta até ser atingido um resultado satisfatório quando comparado com o resultado analítico. Neste caso busca-se a validação da obtenção numérica dos modos de vibração considerando ou não a massa e geometria do deck. Este mesmo modelo será utilizado para a obtenção dos deslocamentos da estrutura, onde ela será inicialmente submetida a forças das ondas e posteriormente a sismo.



**Figura 1. 2-** Modelo 1 Simplificado de uma Plataforma fixa

Com o auxílio do software SAP2000 V15 serão observadas as variações dos valores e vetores próprios devido a mudança de geométrica do Deck e suas condições de deslocabilidade. A resposta dinâmica ao sismo para esse modelo será analisado no software LAS v2.62. A Figura 1.3 apresenta como foi construído o modelo.



**Figura 1.3** – (a) Modelo 2 Simplificado SAP2000 V15 (b) Modelo 2 Simplificado LAS

## 1.6. ABRANGÊNCIA E LIMITAÇÕES

O presente estudo abrangerá:

1. As ações de ondas lineares em alto mar;
2. A análise das pressões devido ao fluxo das águas e à passagem da onda pela equação de Morison;
3. A análise dinâmica das respostas modais da estrutura;
4. A resposta dinâmica da estrutura devido às ondas e terremoto;
5. A modelagem numérica de estruturas cilíndricas e reticuladas *offshore*;
6. A abordagem de estruturas no regime elástico;
7. A análise determinística.

Limitações:

O estudo apresentará limitações que futuramente poderão ser considerados em análises mais complexas e realistas. Em relação a teoria de ondas, não será abordado estados oceânicos extremos e são mares profundos para a propagação das ondas. Essa hipótese permite que o problema seja linearizado, desprezando-se os termos de segunda ordem e de ordens superiores.

O comportamento do fluido em relação a estrutura será fora do regime de difração, ou seja, a estrutura não apresenta grandes dimensões em relação a onda.

A análise não será estocástica e não será abordado os assuntos como correntes marinhas, vento e desprendimento de vórtices, que exige uma análise mais complexa em regime de turbulência. Além disso, os corpos não são flexíveis para análise fluido-estrutura, logo não existe velocidade relativa entre o fluido e a estrutura.

Para a análise de dinâmica não será considerado o fenômeno da fadiga, o qual ocorre em situações de alta frequência de excitação por um longo período de tempo. Outro aspecto importante que deve ser lembrado é não consideração da linearidade física e geométrica para estudo aqui apresentado.

## **1.7. ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS**

O capítulo 1 é um capítulo introdutório. Neste capítulo foram citadas algumas informações básicas sobre as plataformas *offshore*, as motivações que levaram a realização do trabalho e a escolha do tema, as informações que deverão conter neste trabalho, a metodologia aplicada em sua realização e as informações contidas em cada capítulo.

O capítulo 2 é referente revisão bibliográfica e apresenta as classificações de plataformas *offshore* e os principais tipos de plataforma, divididas em fixas e flutuantes, uma rápida revisão sobre vibrações de estruturas e algumas solicitações que estão presentes num ambiente oceânico.

O capítulo 3 trata da teoria linear de onda, ou seja, fala das equações básicas e considerações de simplificação para se chegar a formulação da teoria de Airy. Do estudo do problema de valor de

contorno, da determinação dos campos cinemáticos, dos deslocamentos das partículas de água, e da pressão devido às ondas progressivas.

O capítulo 4 apresenta a teoria para obtenção dos esforços de ondas (equação de Morison) sobre as estruturas, ou seja, apresenta a aplicação da fórmula de Morison, pela conservação da quantidade de movimento, na estrutura cilíndrica em questão. O cálculo das forças e momentos por unidade de comprimento sobre a estrutura e das forças e momentos totais nela, das forças transversais devido ao desprendimento de vórtice, das forças de onda sobre estruturas flexíveis e da escolha dos coeficientes de forças hidrodinâmicas e os fatores que as influenciam.

O capítulo 5 aborda o tema relacionado a cargas de terremoto e a resposta dinâmica da estrutura quando submetida a solicitações variáveis devido a aceleração do solo. Será apresentada a formulação da resposta dinâmica de acordo com a teoria de dinâmica das estruturas com um grau de liberdade.

O capítulo 6 é sobre as vibrações de estruturas através da teoria de dinâmica para estruturas com parâmetro distribuído. Utiliza-se a formulação por equações diferenciais para obtenção das frequências e modos próprios de vibração, e alguns conceitos sobre as propriedades físicas para análise dinâmica.

O capítulo 7 descreve os softwares utilizados nesse trabalho.

O capítulo 8 trata dos resultados obtidos e análise dos resultados, utilizando as equações obtidas pela teoria linear de ondas aplicada à equação de Morison. Apresenta os resultados de frequências e modos próprios obtidos analiticamente e numericamente. Analisa a influência do deck nas vibrações, apresenta o gráfico de convergência de resultados para resultados analíticos e numéricos, e finalmente, obtém-se a resposta dinâmica para diferentes frequências de onda e sismos.

O Capítulo 9 apresenta propostas para continuação deste trabalho e perspectivas futuras.

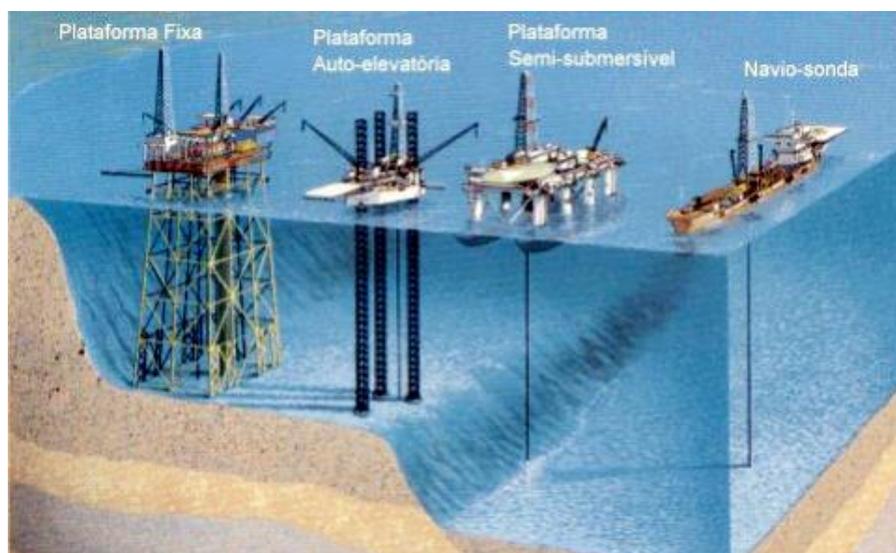
O Capítulo 10 é consagrado a conclusão do trabalho.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Conhecer as tecnologias atuais envolvidas nas plataformas de petróleo é necessário para a compreensão dos problemas envolvidos. Assim como as cargas que podem atuar em um ambiente oceânico e os conceitos de vibração de estruturas. Este capítulo de fundamentação está resumido a seguir.

### 2.1. CLASSIFICAÇÃO E TIPOS DE PLATAFORMAS DE PETRÓLEO

Neste tópico serão apresentados os principais tipos de plataforma para exploração em águas profundas.



**Figura 2. 1** - Principais tipos de Plataforma *off-shore*

(Fonte: Agência Petrobras de Notícias)

As plataformas podem ser classificadas de diversas maneiras, porém as três mais usadas são:

- a) Fixa ou Flutuante, sendo a primeira, aquelas que são apoiadas no fundo do mar e entende-se por plataforma flutuante uma estrutura complacente posicionada por sistema de ancoragem;
- b) Perfuração ou Produção, sendo a primeira, que perfura os poços produtores e exploratórios de petróleo e as unidades de produção são posicionadas nos campos já descobertos;

#### 2.1.1. PLATAFORMAS FIXAS

São unidades de produção ou perfuração fixadas no solo marinho, através de estacas ou por gravidade. São caracterizadas por estarem apoiadas diretamente no solo marinho e por serem

utilizadas em lâmina d'água pequena, em torno de 300 metros. Foram as primeiras plataformas *offshore* a serem desenvolvidas e as mais comumente utilizadas. Porém a principal limitação desse tipo de unidade é a lamina d'água a ser instalada, uma vez que em águas mais profundas a instabilidade aumenta, fazendo com que a base desse tipo de plataforma tenha que ser muito grande, e é inviável a quantidade de aço empregada para construção desse tipo de projeto. Os poços de petróleo a serem explorados hoje estão há mais de 4000 metros e nessa profundidade são usadas as plataformas flutuantes.

Há quatro tipos de plataformas fixas: Jaqueta, Torre Complacente, Auto-Elevatória e de Gravidade.

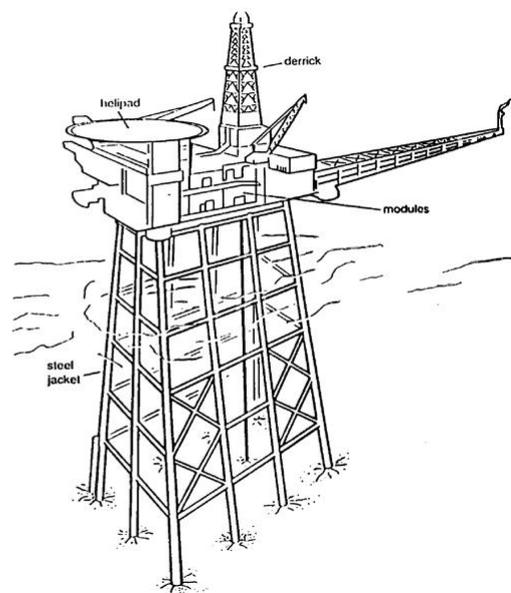
As plataformas tipo Jaqueta são estruturas utilizadas tanto para perfuração quanto produção de petróleo. Tem como principal característica uma estrutura de revestimento constituída por tubos de aço, por isso recebe o nome de jaqueta. É formada por uma estrutura treliçada e fixada no solo marinho através de estacas. Assim como as plataformas de torre complacente que se difere apenas por possuir uma base menos ampla, e apresentar maior flexibilidade.

As plataformas auto-elevatórias conhecidas também como Jack-up são unidades móveis que, quando estão em operação, são fixadas no solo marinho através de pernas treliçadas que se encontram nas extremidades da plataforma. Uma vez rebocada até o local de exploração, as pernas são fixadas no fundo do mar e a plataforma é erguida sobre essas pernas, acima da linha d'água.

Finalmente as plataformas tipo gravidade são caracterizadas por se fixarem no solo marinho por força de seu peso. Elas são construídas em concreto ou em aço e tem como finalidade a produção de petróleo até 400 metros de profundidade.



(a)



(b)

**Figura 2. 2** (a) Plataforma tipo auto-elvatória (b) Plataforma tipo Jaqueta  
( Fonte: Chakrabarti – Handbook of Offshore Platform)

### 2.1.2. PLATAFORMA FLUTUANTE

Com a descoberta de petróleo em lamina d'água superior a 1000 metros foi necessário o desenvolvimento de novas técnicas de exploração. Então, surgiram as plataformas flutuantes que são estruturas complacentes instaladas através de um sistema de ancoragem.

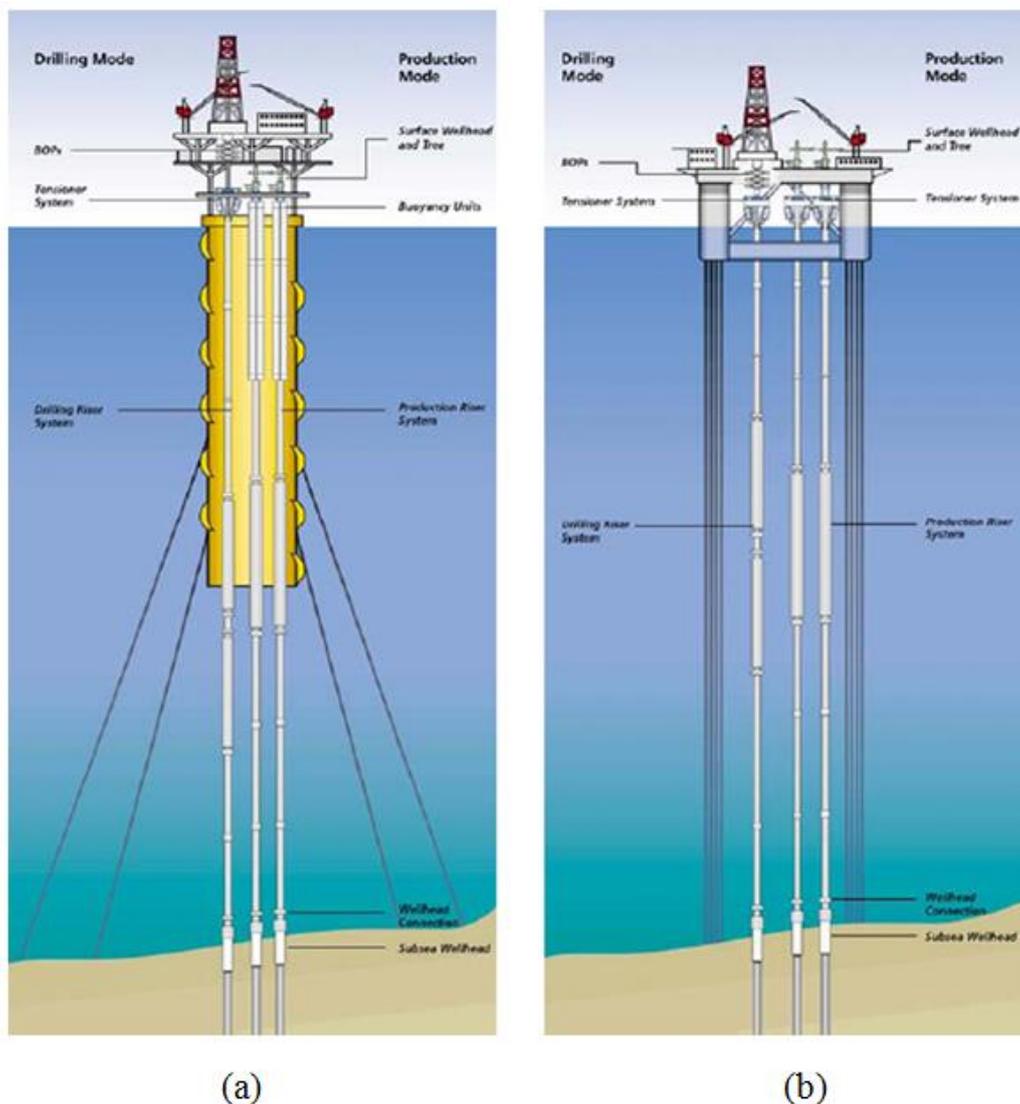
Existem vários tipos de unidades flutuantes que diferem pelo fato de produzir e/ou armazenar petróleo. Os principais tipos de plataforma flutuante são: Semissubmersíveis, TLP (*Tension Leg Platform*) e a SPAR.

As semissubmersíveis são estruturas flutuantes utilizadas para perfuração ou produção de petróleo. É formada basicamente por flutuadores, contraventamentos, colunas e o convés que suportam os principais equipamentos de perfuração ou produção. São os Flutuadores os responsáveis pela maior parte do empuxo, garantindo a flutuabilidade da plataforma, por se localizarem abaixo da linha d'água eles também minimizam os movimentos de onda da plataforma. Já as colunas são responsáveis pela estabilidade da plataforma não deixando que ela vire (emborque).

Estruturas semelhante a das plataformas semissubmersíveis são as TLPs, sendo que a diferença está na ancoragem da plataforma, que é realizada por meio de estruturas tubulares, como tendões,

fixados no fundo do mar por estacas, e mantidos esticados pela flutuação da plataforma, ou seja, por tensão entre a superfície do mar e o fundo.

Já as plataformas SPAR são utilizadas para exploração em águas profundas, em torno de 1650 metros. Possui maior estabilidade do que as plataformas flutuantes apresentadas anteriormente, gerando poucos movimentos verticais, devido ao tamanho do calado da plataforma, a resultante de vento, de corrente e onda não conseguem deslocar significativamente o centro de rotação, possibilitando desta forma uma diminuição dos efeitos de onda e movimentos verticais.



**Figura 2.3** - (a) Plataforma tipo SPAR (b) Plataforma tipo TLP  
(Fonte: Agência Petrobras de Notícias)

## 2.2. VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS

O estudo de vibração das estruturas é consagrado à análise do movimento periódico de um corpo ou conjunto de corpos acoplados que se deslocam em relação a sua posição de equilíbrio. Segundo **Paultre (2005)**, a vibração é causada por cargas dinâmicas (internas ou externas com relação ao corpo da estrutura), que contrariamente as cargas estáticas, variam com o tempo. Essas cargas dinâmicas geram deslocamentos, forças internas, reações e tensões que dependem do tempo. Porém a diferença primordial entre um problema estático e um problema dinâmico não se resume somente na variação temporal da carga ou da resposta, e sim, sobretudo, na importância das forças de inércia,  $f_I(t)$ , que resistem ao movimento gerado pelo carregamento dinâmico aplicado,  $p(t)$ .

Quando o carregamento dinâmico externo é igual a zero o sistema estará submetido à vibração livre, e movimento é mantido apenas por forças de inércia, elásticas e de amortecimento. Se a estrutura é deslocada de sua posição de equilíbrio e em seguida liberada, ela irá naturalmente retornar a sua posição original de equilíbrio.

A vibração forçada é aquela em que é causada por uma força periódica externa aplicada ao sistema cujo módulo, direção ou ponto de aplicação variam com o tempo. Se o carregamento é uma função conhecida do tempo, dizemos que o carregamento é dinâmico prescrito. A análise feita em relação a um carregamento prescrito é dita análise determinística. Por outro lado se a variação do carregamento em função do tempo não é conhecida e pode ser definido apenas em termos estatísticos, dizemos que ele é dinâmico aleatório e a resposta é feita através de uma análise probabilística. Este trabalho dedica-se apenas a análises determinísticas. [**PAULTRE, 2005**]

A frequência da vibração geralmente coincide com a frequência da força externa. Entretanto, quando esta frequência também coincide com a frequência natural do sistema, é dito que a estrutura encontra-se em ressonância. Esta condição pode ser muito prejudicial para a estrutura, especialmente se o amortecimento é pequeno. O aumento do movimento da estrutura com a ressonância é grande mesmo quando a força de excitação é pequena, e é controlada apenas pela presença do amortecimento no sistema. Se ele for pequeno levará um longo período de tempo antes de a estrutura repousar novamente na sua posição de equilíbrio. Quando o amortecimento é muito grande, a estrutura não irá oscilar e retornará rapidamente para a posição de repouso mesmo havendo excitação externa coincidente com a frequência natural no sistema.

Como a vibração é indesejável, a estrutura deve ser projetada de tal modo que as frequências naturais da estrutura em vários modos sejam mantidas fora do intervalo esperado de frequências de excitação do ambiente para o qual a estrutura está exposta. Porém vibrações de altas frequências podem gerar um fenômeno de baixas amplitudes, que permite que a estrutura falhe devido aos danos causados por um ciclo elevado de fadiga. [CHAKRABARTI, 2002]

**J.M. Ricles e P. Leger (1989)** apresentam um método para avaliar a fadiga em membros estruturais de plataformas offshore com base em procedimentos de confiabilidade dos componentes estruturais juntamente com métodos de análise espectral.

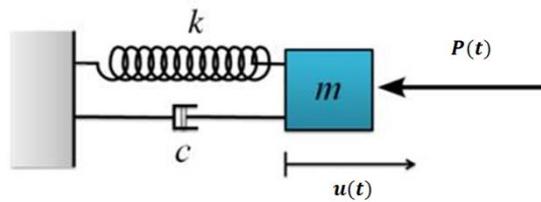
A abordagem é baseada na formulação de uma função não linear de desempenho que expressa o dano por fadiga acumulado utilizando a formulação de *Miner*. Assim como no presente trabalho, foi feita uma aplicação numérica numa plataforma fixa idealizada simples para demonstrar o método, e nesse caso, estudar a confiabilidade à fadiga.

### **2.2.1 SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE**

A resposta no tempo de certos sistemas estruturais submetidos a cargas dinâmicas pode ser definida completamente pela resposta no tempo relacionada a uma só coordenada: esses são sistemas com um grau de liberdade ou elementares. Mecanismos ou estruturas com um grau de liberdade são extremamente raros na prática. Normalmente tais casos são idealizações que resultam de uma hipótese simplificadora das propriedades essenciais de um sistema estrutural como: massa, rigidez e amortecimento. [PAULTRE, 2005]

Outra razão, talvez a mais importante, para se estudar sistemas com um grau de liberdade é que a resposta de sistemas mais complexos com vários graus de liberdade pode, no domínio linear, ser calculada por superposição de respostas de sistemas com um grau de liberdade associados.

O movimento de um sistema massa mola com um grau de liberdade é descrito pelos seguintes parâmetros:



**Figura 2. 4** – Sistema massa-mola amortecido com 1GL.

(Fonte: PAULTRE, 2005, adaptada pelo autor)

- ✓ o deslocamento da massa  $u(t)$ ;
- ✓ a velocidade da massa  $\dot{u}(t) = du(t)/dt$ ;
- ✓ a aceleração da massa  $\ddot{u}(t) = d^2u(t)/dt^2$ .

A equação do movimento da massa ou equação do equilíbrio dinâmico, da qual se obtém a resposta dinâmica é:

**Eq. 5.5**

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

## 2.3. SOLICITAÇÕES DE ODAS E TERREMOTOS

### 2.3.1 ONDAS DE SUPERFÍCIE

As ondas de superfície num meio fluido podem ser progressivas ou estacionárias. As ondas progressivas correspondem a uma perturbação no fluido que se desloca com uma velocidade denominada celeridade da onda, ao passo que, nas ondas estacionárias, estamos em presença de perturbações periódicas de oscilação da massa fluida. As ondas estacionárias, também chamadas clapotis, provêm em geral da superposição de duas ondas progressivas, uma incidente e outra refletida [MASON, 1981].

O carregamento das ondas nos elementos estruturais offshore depende da geometria deste, das condições hidrodinâmicas e se o sistema estrutural é flutuante ou fixo.

Sabe-se que as ondas produzidas num estado de mar aleatório, pode fazer com que a estrutura vibre em muitos de seus modos. A faixa de frequência das forças causadas por ondas podem ir de 0,04 Hz a 0,70 Hz. Nos últimos anos estruturas construídas em águas profundas, com lâminas d'água de 100 a 200 m, têm apresentado sensíveis frequências de vibrações (ordem de 0,125 Hz a 0,25 Hz), caindo

dentro do espectro de frequência do mar. Estas frequências passam pelas frequências de flexão da estrutura aumentando a chance da estrutura experimentar vibrações extremas, e conseqüentemente desastres. [PEDROSO, 1982]

Através da relação entre o diâmetro da estrutura e o comprimento da onda (condição de absorção de impacto), define-se qual regime e equações serão utilizadas para determinar os esforços na estrutura, podendo ser pela Equação de *Morison* ou pelo regime de difração.

Para obter os esforços, é necessário adquirir parâmetros como a aceleração e velocidade da onda, retiradas através da teoria das ondas. Teorias foram desenvolvidas para descrever a cinemática de partículas de água associada com ondas oceânicas com graus de complexidade variados [CHAKRABARTI, 2005].

As principais teorias utilizadas são a teoria de Airy, Stokes de 2ª ordem a 4ª ordem, função Stream e teoria Cnoidal. A escolha da teoria apropriada depende da altura da onda, profundidade do mar e do comprimento de onda. Neste trabalho será utilizada a teoria de ondas de Airy.

### **2.3.2 SISMOS NO SOLO OCEÂNICO**

Terremoto, ou sismo, são as vibrações provocadas por uma ruptura muito rápida de alguma falha geológica. Essas vibrações se propagam em todas as direções. As rupturas ocorrem devido ao lento acúmulo de tensões no interior da Terra, principalmente relacionado ao movimento das placas litosféricas.

As tensões podem levar vários anos para se acumularem até atingir o limite de resistência das rochas. Quando estas não resistem mais as altas tensões, rompe-se em poucos segundos (geralmente ao longo de uma falha geológica). Cada lado da fratura desliza em relação ao outro. A ruptura gera ondas sísmicas, semelhantes às vibrações que podem ser produzidas num colchão de molas. Quanto maior for a área da superfície da ruptura, maior deve ser a magnitude do sismo. Os efeitos destrutivos das ondas sísmicas dependem da magnitude do terremoto e da distância do epicentro. [MACHADO, 1980]

As grandes incertezas nas características dos movimentos sísmicos tornam impossível o exato estabelecimento de critérios de projeto visando, assim, minimizar os efeitos desse tipo de ação sobre estruturas.

No capítulo 5 serão apresentadas algumas recomendações de procedimentos para estimativa da ação de sismos sobre estruturas. Trata-se da utilização de Espectros de Resposta no dimensionamento de estruturas de comportamento elástico pelo método dinâmico.

## DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Nos capítulos 3, 4, 5 e 6 serão desenvolvidas as teorias que serão utilizadas para realização das análises, obtenção das cargas solicitantes e resposta dinâmica associada as mesmas. Os resultados analíticos encontrados a partir da formulação serão importantes para validação do modelo numérico.

### 3. ONDAS

Chamamos de onda de gravidade ao movimento oscilatório de um fluido devido a efeitos gravitacionais ocasionados pela presença de superfície livre. Qualquer perturbação que ocasione uma variação da pressão do fluido próximo à superfície livre acarretará um movimento da massa fluida em busca do equilíbrio com a pressão atmosférica e com isto mudança de forma desta superfície. [BARLTROP, 1991]

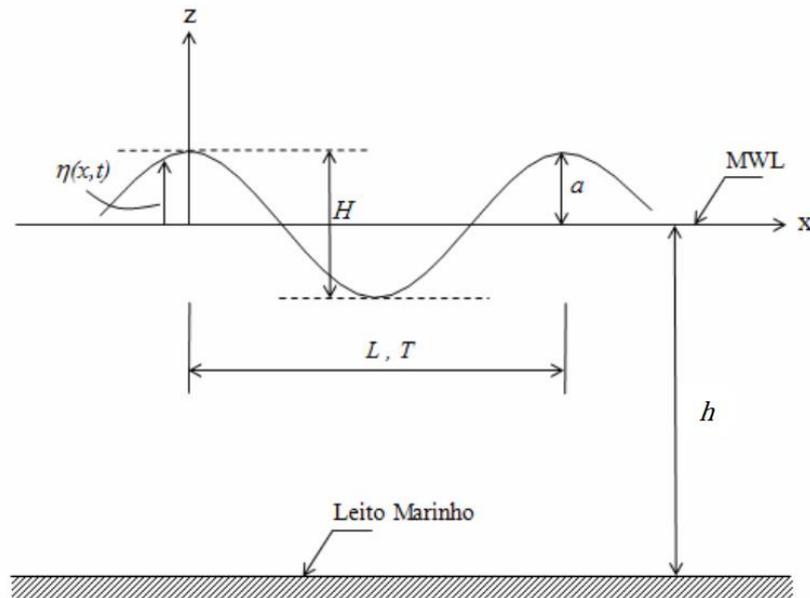
Segundo **Pedroso (1982)**, apesar da superfície do mar parecer um conjunto desordenado e caótico de elevações e vales a primeira vista, pode-se observar certa regra neste fenômeno quando separados os efeitos localizados e de segunda ordem. O modelo matemático para estudo do comportamento das elevações da superfície do mar envolve um problema de valor de contorno (PVC), que consiste em uma equação diferencial e as condições de contorno associadas.

Usualmente conhecido como a *teoria de onda*, este modelo tem por objetivo determinar velocidades e acelerações do fluido, sem considerar a presença do corpo. Existem diversos métodos de solução para o referido problema, sendo o procedimento mais usual, e que atende à prática de projeto de sistemas *offshore*, a Teoria Linear de Airy (teoria das ondas senoidais).

#### 3.1. TEORIA LINEAR DE ONDAS

A Teoria Linear de Airy está baseada na premissa de que a altura de onda é pequena comparada com o comprimento de onda. Esta hipótese permite que o problema seja linearizado, desprezando-se os termos de segunda ordem e de ordens superiores. [ELLWANGER e LIMA, 2007]

As principais características de uma onda regular:



**Figura 3. 1-** Definição dos parâmetros da onda (Fonte: MUNSON 2004)

**Período (T)** = O tempo necessário, geralmente em segundos, para que sucessivas cristas de ondas cruzem um ponto estacionário.

**Altura (H)** = Distância vertical entre a crista da onda e o cavado, ou seja, entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo.

**Elevação da superfície do mar ( $\eta$ )** = Altura da superfície do mar, medida acima do nível médio MWL (*Mean Water Level*).

**Lâmina d'água (h)** = Profundidade do mar a partir da elevação média do mar (MWL) até o leito marinho.

O estudo é baseado na teoria potencial, e assim, admitem-se as seguintes considerações:

- O fluido é homogêneo e incompressível (densidade do fluido constante);
- O movimento é irrotacional;
- A pressão na superfície livre é uniforme e constante;
- As tensões na superfície podem ser negligenciadas;
- O fluido é ideal (sem viscosidade);
- O fundo é horizontal, fixo e impermeável, o que implica que a velocidade no fundo é zero;

- As ondas são de pequena amplitude (em relação ao comprimento de onda  $\lambda$ ), e sua forma invariável no tempo e no espaço;
- As ondas são planas ou de cristas longas (bidimensionais).

Para que a teoria tenha uma formulação correta é necessário fazer considerações de simplificação que levem a bons resultados e facilite a modelagem do sistema fluido-estrutura.

Considerando o escoamento como irrotacional, os componentes do vetor velocidade podem ser expressos a partir de uma função escalar  $\phi(x, y, z, t)$ , chamada de potencial de velocidade, como se segue:

**Eq. 3.1**

$$V = \nabla\phi \rightarrow u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

de modo que a velocidade num escoamento irrotacional pode ser expressa como gradiente da função escalar  $\phi$  (potencial de velocidade) e então a velocidade pode ser utilizada para descrever o escoamento. [MUNSON, 2004]

### 3.2. DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS CINEMÁTICOS (VELOCIDADES E ACELERAÇÕES)

Segundo **Pedroso** (1982), a partir da equação de velocidades potencial podemos obter as equações paramétricas das componentes da velocidade das partículas, considerando as devidas condições de contorno as quais o escoamento está sujeito e desenvolvimento da fórmula, o qual será descrito detalhadamente em anexo. As velocidades horizontal e vertical são respectivamente:

**Eq. 3.2**

$$v_x = \frac{a \cdot \omega \cdot \cosh k(h + y)}{\cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

**Eq. 3.3**

$$v_y = \frac{a \cdot \omega \cdot \operatorname{sen}hk(h + y)}{\cosh(kh)} \operatorname{cos}(kx - \omega t)$$

As equações paramétricas das componentes horizontal e vertical das acelerações das partículas são respectivamente:

**Eq. 3.4**

$$v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{a \cdot \omega^2 \cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

**Eq. 3.5**

$$v_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{a \cdot \omega^2 \cdot \sinh k(h+y)}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

### 3.3. PRESSÕES DEVIDO AS ONDAS PROGRESSIVAS

A definição dos diagramas de pressão causados pela passagem de ondas progressivas é importante para a determinação de esforços em elementos de obras marítimas vazadas, como é o caso de plataformas sobre estacas [MASON, 1981].

Podemos conjecturar, intuitivamente, que a pressão no interior do fluido, por ocasião da passagem de uma onda, é constituída de duas parcelas, uma delas referente à pressão hidrostática de repouso e a outra referente à perturbação induzida pela passagem da onda.

**Eq. 3.6**

$$p(x, y, t) = -\rho \cdot g \cdot y + \delta p$$

Utilizando a equação de Bernoulli temos:

**Eq. 3.7**

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Através do desenvolvimento das equações do potencial de velocidade a Eq. 3.7 resulta na seguinte expressão para as variações na pressão do líquido que ocorrem pela passagem da onda:

**Eq. 3.8**

$$\delta p = a \cdot \rho \cdot g \frac{\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

ou

**Eq. 3.9**

$$\frac{\delta p}{\rho} = K_p \eta, \quad K_p = \frac{\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)}$$

onde,  $K_p$  é um coeficiente de pressão. A carga de pressão será de:

**Eq. 3.10**

$$\frac{p}{\rho} = K_p \eta - y$$

para  $y = 0$ , constata-se que:

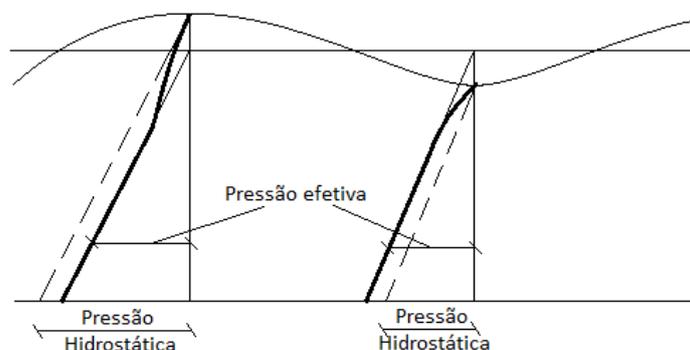
**Eq. 3.11**

$$K_p = 1, \quad \frac{p}{\rho} = \eta$$

para  $z = -h$ :

**Eq. 3.12**

$$K_p = \frac{1}{\cosh(kh)}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\eta}{\cosh(kh)} + h$$



**Figura 3. 2-** Pressões devido às ondas progressivas

(Fonte: Desenho do PF Juliano Ferreira, inspirado em MASON, 1981)

Por ocasião da passagem de uma crista, as partículas encontram-se no ponto mais alto da trajetória e sua força centrífuga é dirigida para cima, aliviando a pressão hidrostática, ao passo que, na passagem de uma depressão, as partículas encontram-se no ponto mais baixo da trajetória, aumentando a pressão hidrostática. [MASON, 1981]

Se for desejado conhecer a pressão devida apenas ao efeito dinâmico da onda, bastam subtrair dos diagramas totais de pressão da Figura 3.2 os diagramas devido à pressão hidrostática.

## 4. ESFORÇOS DE ONDAS

Uma estrutura inserida em um ambiente oceânico está sujeita a forças devido ao vento, ondas de superfície e correntes oceânicas. Os tipos de estruturas *off-shore* para as quais o presente trabalho se orienta, são estruturas em que seus membros (ou a estrutura toda) possuem uma dimensão predominante em relação a outras, de forma que poderão ser representadas por componentes cilíndricos engastados no fundo do oceano. Além disso, o diâmetro do cilindro é pequeno comparado ao comprimento de onda das ondas incidentes, portanto, a equação de Morison pode ser utilizada para modelar as forças do fluido agindo na estrutura. A avaliação destas forças é feita com base no campo de velocidades determinado pelo movimento ondulatório, em particular pela componente horizontal da velocidade das partículas fluidas, dada pela Eq. 3.2. [MASON, 1981]

### 4.1. EQUAÇÃO DE MORISON

A equação de Morison foi originalmente derivada para um cilindro rígido sob a hipótese de que a força do fluido é composta por forças de arrasto ( $F_A$ ) e de inércia ( $F_I$ ), com a força de arrasto sendo predominante. Esta força é proporcional ao quadrado da velocidade relativa do fluido. A força de inercia é a força exercida pelo fluido enquanto ele acelera e desacelera conforme passa pela estrutura.

Considerando uma estrutura cilíndrica fixa no leito do oceano, em águas profundas, submetida à ação das ondas. Supõem-se conhecido o campo cinemático, para qualquer tempo  $t$ .

É gerada uma força total ( $F_T$ ), pois o corpo obstrui a passagem da onda dispersando as partículas d'água, e conseqüentemente, alterando a quantidade de movimento do sistema. Se a estrutura for completamente rígida, existirá uma reação horizontal ( $R_0$ ) e um momento ( $M_0$ ) na extremidade inferior (fundo), pois a distribuição da força total é levada até o fundo através do esforço cortante. [PEDROSO, 1982]

Baseado na condição de conservação da quantidade de movimento, para um volume de controle em torno de cilindro perpendicular ao fluxo do fluido, Morison propôs a seguinte formulação:

**Eq. 4.1**

$$F_T^x = F_I + F_A = C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{dv_x}{dt} + C_D \rho \frac{D}{2} v_x |v_x|$$

Onde,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $D$  é o diâmetro do cilindro e  $v_x$  a velocidade do fluido na direção  $x$ . Chegou-se a Eq. 4.1 levando-se em conta que o fluxo é unidirecional e que a única componente da velocidade é  $v_x$  na direção  $x$ .

$C_D$  e  $C_M$  são constantes experimentais, denominadas respectivamente coeficiente de arraste e coeficiente de inércia ou massa, que dependem de uma série de grandezas, como a Geometria, Rugosidade, Turbulência do Fluxo, Número de Reynolds, Número de Keulegan-Carpenter, entre outros. [PEDROSO, 1982]

O segundo termo da Eq. 4.2, define a força de arraste do movimento do fluido. O quadrado da velocidade  $v_x^2$  é escrito sob a forma  $v_x|v_x|$ , de modo ser possível levar em conta a mudança de sinal da força, com a mudança no sentido do fluxo. [MASON, 1981]

## 4.2. CÁLCULO DAS FORÇAS E MOMENTOS

Conforme foi apresentado anteriormente, o campo cinemático associado a onda de projeto é descrito pela teoria linear de Airy, cujos resultados na direção de interesse (direção de propagação da onda ( $x$ )), são a seguir sumarizados:

Levando-se as Eq. 3.30 e Eq. 3.32 em Eq. 4.1, chega-se a:

**Eq. 4.2**

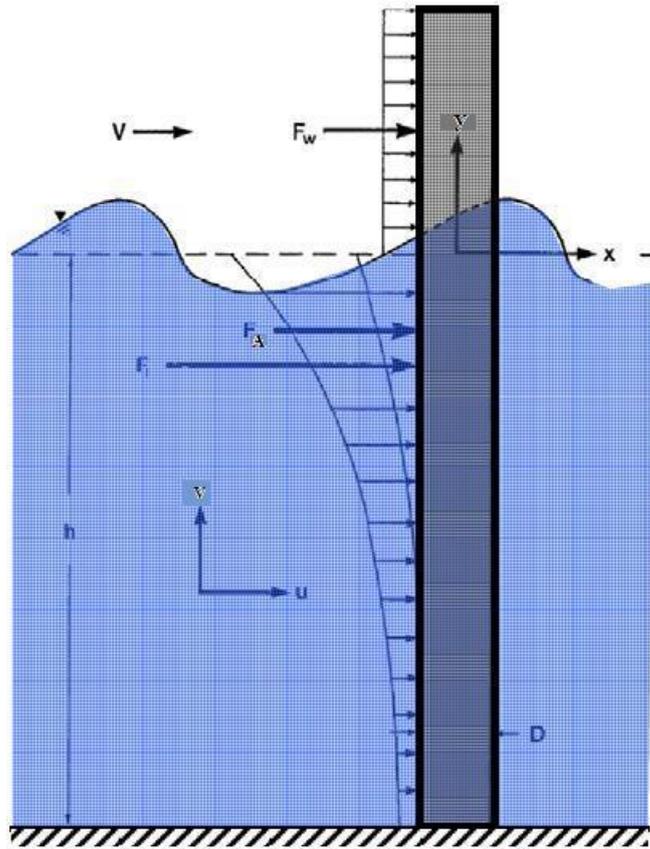
$$F_I = C_M(\rho\pi a^2) \frac{gH}{2} \cdot \frac{k \cos k(y+h)}{\cosh(kh)} \cos \theta_f$$

**Eq. 4.3**

$$F_A = C_D(\rho a) g H^2 \left( \frac{g T^2}{4 L^2} \right) \left| \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh h(kh)} \right|^2 \sin \theta_f |\sin \theta_f|$$

onde  $\theta_f = (kx - \omega t)$ , conhecido como ângulo de fase e  $a$  é o raio do cilindro.

As Eq. 4.2 e Eq. 4.3 mostram as duas componentes da força total por unidade de comprimento do cilindro, variando com a profundidade ( $y$ ), *off-set* ( $kx$ ), e o tempo ( $\omega t$ ), estando o termo de inércia em fase com a aceleração, e o de arraste, com a velocidade. Seus máximos valores se dão para  $y = 0$ , diminuindo com a profundidade Figura 4.1, porém, o decaimento do arraste é mais rápido.



**Figura 4.1** - Força de inércia e de arraste por unidade ao longo do cilindro

(Fonte: HARITOS, 2007)

### 4.3. FORÇAS TOTAIS SOBRE A ESTRUTURA

Para a obtenção da força total que atua sobre a estrutura, e o momento de tombamento na base, devemos integrar as Eq. 4.2 e Eq. 4.3:

**Eq. 4.4**

$$F_T = \int_{-h}^0 f_I dy + \int_{-h}^0 f_A dy = F_I + F_A$$

e

**Eq. 4.5**

$$M = \int_{-h}^0 (y + h) f_I dy + \int_{-h}^0 (y + h) f_A dy = M_I + M_A$$

A resolução das integrais nos dá os seguintes resultados:

**Eq. 4.5**

$$F_I = C_M(\rho\pi a^2)gH \left[ \frac{1}{2} \operatorname{tgh}(kh) \cdot \cos(kx - \omega t) \right]$$

**Eq. 4.5**

$$F_A = C_D(\rho a)gH^2 \left\{ \frac{1}{g} \cdot \left[ 1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \right] \cdot \operatorname{sen} \theta_f \mid \operatorname{sen} \theta_f \right\}$$

**Eq. 4.6**

$$M_I = C_M(\rho\pi a^2)g \frac{H}{2} h \operatorname{tgh}(kh) \left\{ \left[ 1 + \frac{1 - \cosh(kh)}{(kh)\operatorname{senh}(2kh)} \right] \cdot \cos(kx - \omega t) \right\}$$

**Eq. 4.7**

$$M_A = C_D(\rho a)g \frac{H^2}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \right] \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh(2kh)}{(2kh)\operatorname{senh}(2kh)} \right) \right] \cdot \operatorname{sen} \theta_f \mid \operatorname{sen} \theta_f \right\}$$

onde:

**Eq. 4.8**

$$\eta = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)} \right] = \frac{cg}{C} = \frac{\text{velocidade de grupo}}{\text{celeridade da onda}}$$

A velocidade com que se propagam os grupos de ondas é denominada velocidade de grupo e sua importância decorre do fato de ser com esta velocidade que se propaga a energia criada pelas ondas no meio fluido não perturbado. [MASON, 1981]

Para a ocasião de grupos de estacas ou estacas inclinadas, substitui-se o ângulo de fase  $\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ , pela expressão generalizada:

**Eq. 4.9**

$$\theta_n = \frac{2\pi \cdot x_n}{T} - \frac{2\pi t}{L}, x_n = r_n \cos(\alpha_n)$$

O coeficiente de arrasto " $C_D$ " e o coeficiente de massa " $C_M$ " para corpos cilíndricos imersos em um fluxo fluido oscilatório dependem do " $R_e$ " e do número de Keulegan-Carpenter " $KC$ "(Eq.4.10):

**Eq. 4.10**

$$KC = u_{max}(x, t) \frac{T}{D} = \frac{a \omega \cosh[k(y + h)] T}{\operatorname{senh}(kh) D} = a \frac{2\pi T}{T D} = \pi \frac{H}{D}$$

Os valores de  $C_M$  e " $C_D$ " em função de " $KC$ ", podem ser obtidos pelos gráficos a seguir:

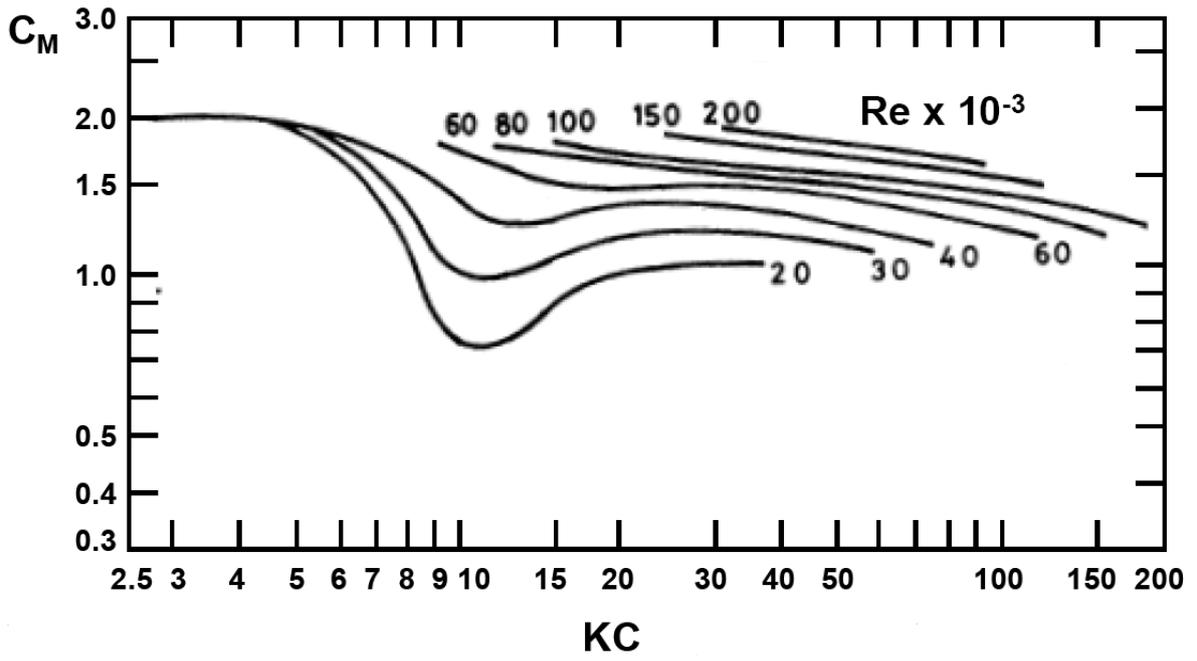


Figura 4. 2- Ábaco de obtenção do coeficiente de inércia  $C_M$   
 (Fonte: SARPKEYA, 1976 apud HARITOS, 2007)

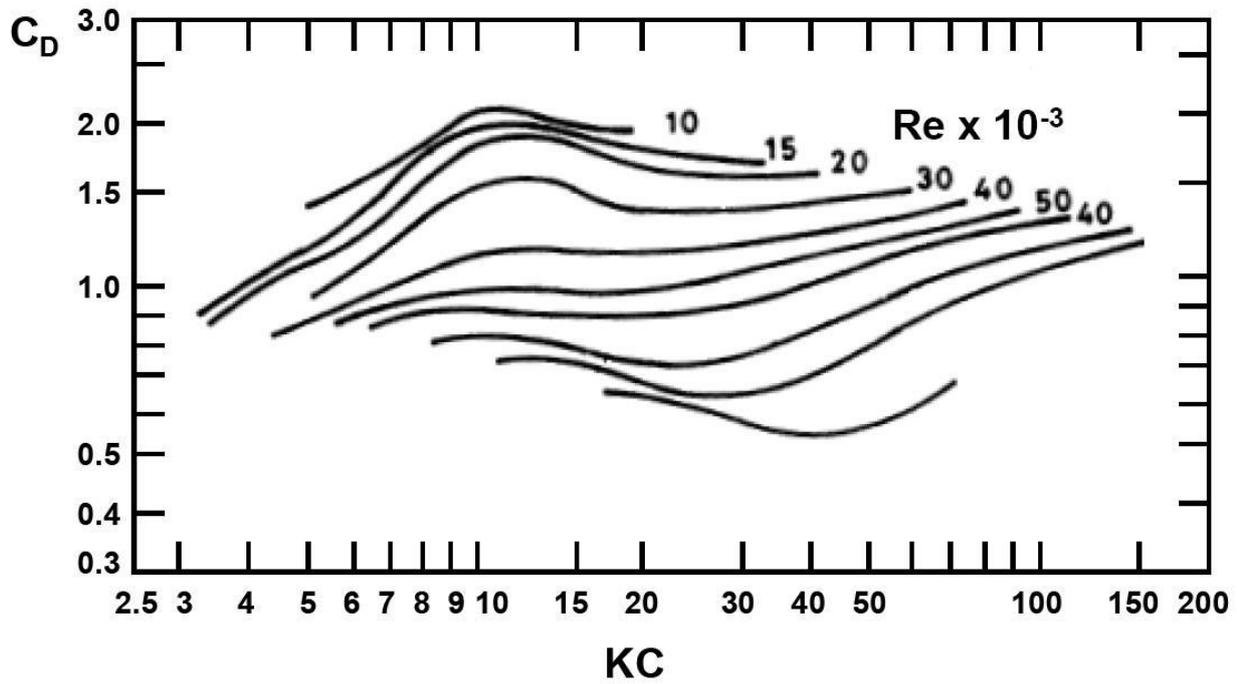


Figura 4. 3- Ábaco de obtenção do coeficiente de arraste  $C_D$   
 (Fonte: SARPKEYA, 1976 apud HARITOS, 2007)

Quando estão em função do numero de Reynolds " $Re$ ", podem ser obtidos das seguintes formas:

$C_M$	Reynolds ( $Re$ )
2	$> 5 \cdot 10^5$
$5 - \frac{Re}{5 \cdot 10^5}$	$2,5 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^5$
1,5	$< 2,5 \cdot 10^5$

Tabela 4. 1- Tabela simplificada para obtenção de  $C_M$  em função de  $Re$   
(Fonte: Vários autores apud PEDROSO, 1982)

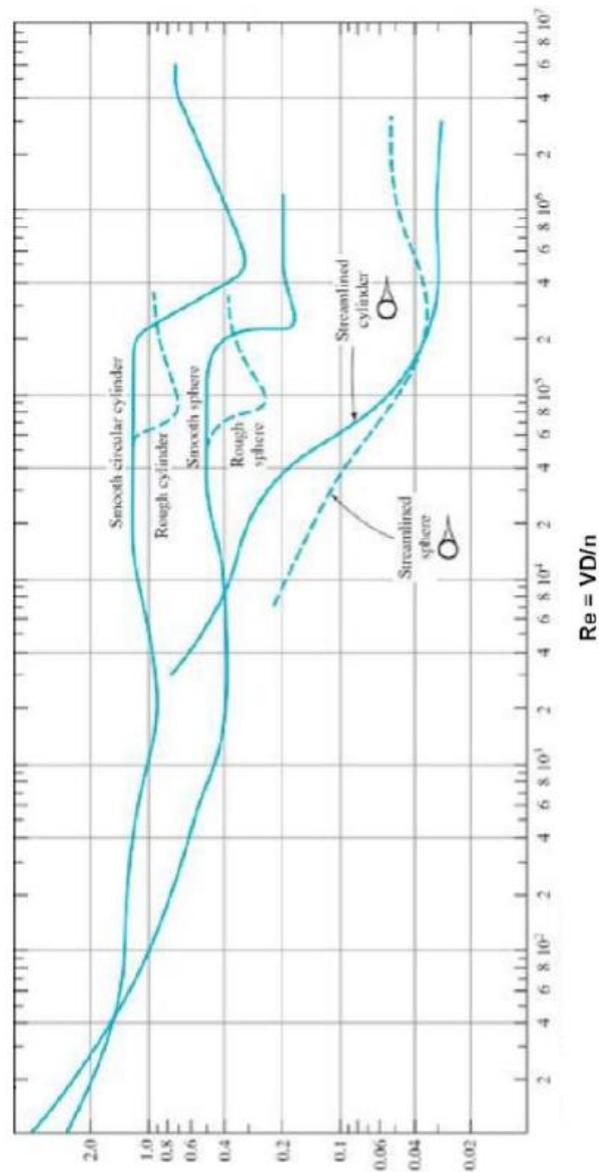


Figura 4. 4 - Ábaco genérico para obtenção do coeficiente de arrasto  $C_D$  em função de  $Re$  4.4

(Fonte: RODRIGUEZ)

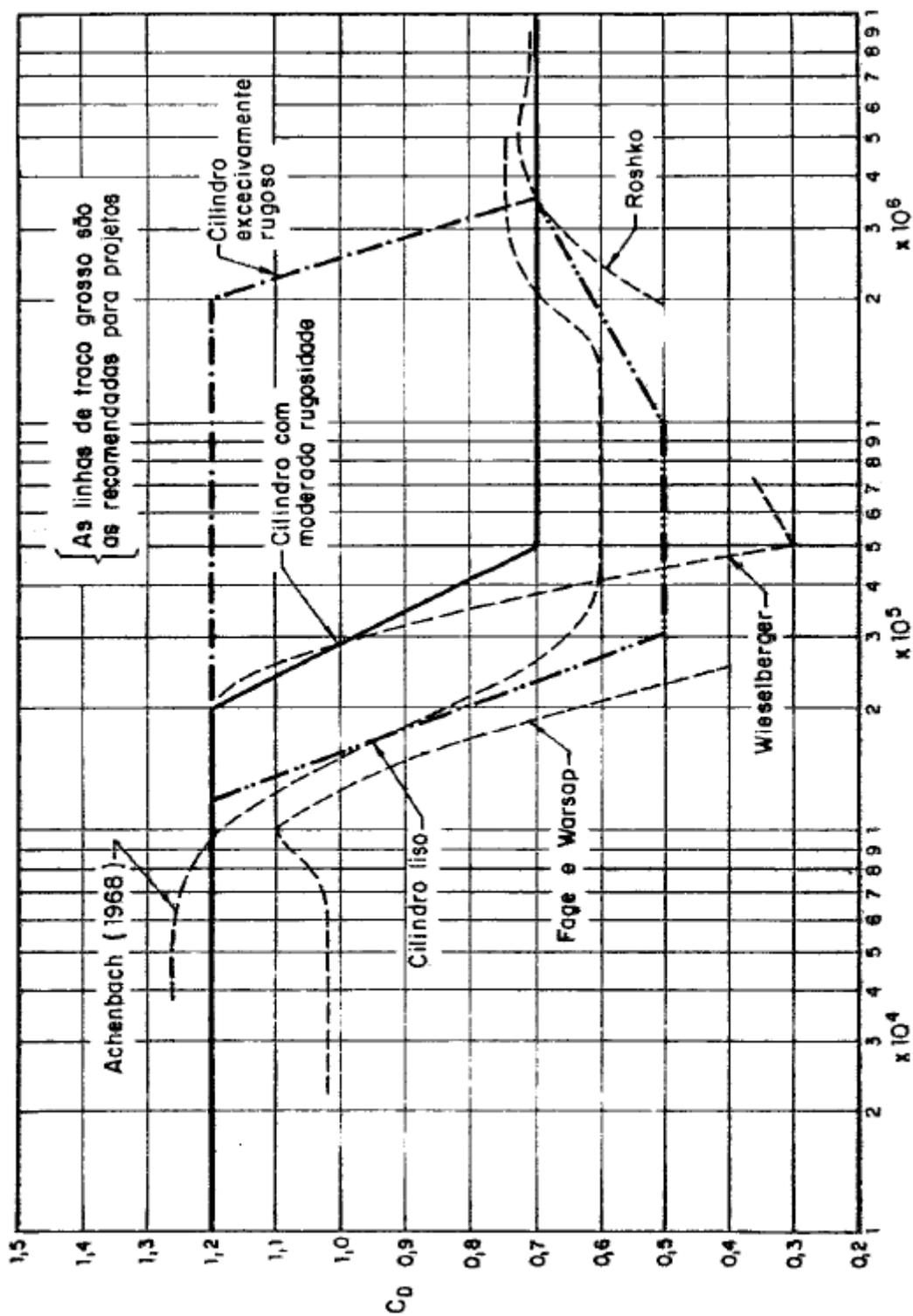
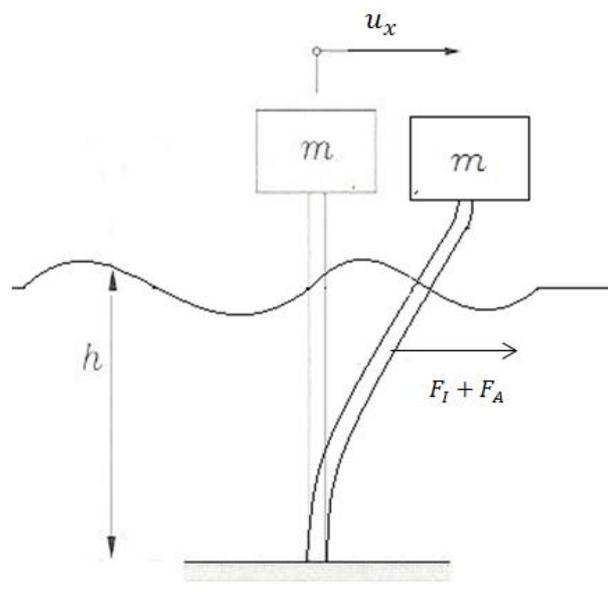


Figura 4. 5- Ábaco detalhado para obtenção do coeficiente de arrasto  $C_D$  em função de  $Re$   
 (Fonte: U. S. ARMY apud PEDROSO, 1982)

#### 4.4. FORÇAS LONGITUDINAIS EXERCIDAS PELAS ONDAS PROGRESSIVAS SOBRE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Para estruturas relativamente flexíveis que oscilam devido a excitação da onda Figura 4.6, ainda que ocorram forças transversais, por simplificação, supõe-se que estas não influenciam na análise e que a estrutura vibra somente na direção da propagação da onda.

Considera-se que a forma do modo de vibração, corresponde ao movimento das partículas dadas pela teoria de Airy; todavia, com pequenas amplitudes e seu movimento é harmônico com a mesma frequência da onda incidente, consideração esta não muito razoável. [PEDROSO, 1982]



**Figura 4.6**– Estrutura flexível vibrando sob ação de uma onda.  
(Fonte : Desenho do autor baseado em Pedroso, 1982)

Somando as componentes de inércia e arraste das forças obtemos a força total por unidade de comprimento da estrutura:

**Eq. 4.11**

$$F_T = F_I + F_A = (\rho\pi a^2)\dot{v}_x + C_M(\rho\pi a^2)(\dot{v}_x - \ddot{u}) + C_D\rho a|u - \dot{x}|(u - \dot{x})$$

Supondo que o deslocamento do eixo da estrutura tenha a forma:

**Eq. 4.12**

$$u = u_m f(y) \cos(\omega t + \varphi)$$

onde  $u_m$  é o deslocamento máximo no topo e  $\varphi$  representa a diferença de fase entre o movimento da onda e da estrutura. O campo cinemático do eixo da estrutura será dado por:

Velocidade:

**Eq. 4.13**

$$\dot{u} = -\omega u_m f(y) \cos \bar{\theta}$$

Aceleração:

**Eq. 4.14**

$$\ddot{u} = -\omega^2 u_m f(y) \cos \bar{\theta}$$

Para  $C_M = C_D = 1$ , e substituindo as velocidades e acelerações na Eq 4.11, tem-se

**Eq. 4.15**

$$F(y, t) = \rho \pi a^2 f(y) \left\{ 2gka \cos \theta_f + \omega^2 u_m \cos \bar{\theta} \right\} + \rho a |f(y)|^2 \left\{ -\frac{gkA}{\omega} \text{sen } \theta_f \right. \\ \left. + \omega u_m \text{sen } \bar{\theta} \left| -\frac{gkA}{\omega} \text{sen } \bar{\theta} + \omega u_m \text{sen } \bar{\theta} \right| \right\}$$

onde  $\bar{\theta} = \omega t - \varphi$  e  $f(y) = \frac{\cos k(y+h)}{\cosh(kh)}$

As forças totais são obtidas por:

**Eq. 4.16**

$$F_T(t) = \int_{-h}^0 F(y, t) dy$$

**Eq. 4.17**

$$M(t) = \int_{-h}^0 (y + h) F(y, t) dy$$

## 5. TERREMOTO: RESPOSTA DINÂMICA

O cálculo da resposta no tempo da estrutura devido o movimento da base causado por um terremoto é apresentado nesse capítulo. Normalmente, a aceleração do solo na base da estrutura é diferente da aceleração em campo livre devido a interação entre o solo e estrutura. Entretanto, será considerada apenas a resposta para solo rígido.

### 5.1. ESPECTRO DE RESPOSTA ELÁSTICO

O espectro de resposta elástico é utilizado frequentemente para se determinar as solicitações em uma estrutura sob a ação de sismos. Pode-se obtê-lo a partir de qualquer acelerograma de terremoto  $\ddot{u}_g(t)$ , ou por expressões sugeridas em normas de sismos.

Para o caso de um acelerograma conhecido, admite-se um sistema massa-amortecedor-mola para um grau de liberdade [CLOUGH, 1975].

A equação dinâmica de movimento é:

**Eq. 5.1**

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

onde,  $m$  representa a massa da estrutura,  $c$ , o amortecimento e  $k$ , a rigidez da estrutura.  $\ddot{u}(t)$ ,  $\dot{u}(t)$ ,  $u(t)$  e  $p(t)$  estão relacionados ao instante de tempo, e indicam, respectivamente, a aceleração, a velocidade, o deslocamento e o carregamento dinâmico que excita a estrutura.

Dividindo-se a Eq. 5.1 por  $m$ , obtem-se:

**Eq. 5.2**

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\bar{\omega}\dot{u}(t) + \bar{\omega}^2u(t) = \frac{p(t)}{m}$$

onde,  $\xi$  é a taxa de amortecimento da estrutura, em %, determinada pela razão entre o amortecimento  $c$  e a taxa de amortecimento crítico  $C_c$ .  $\bar{\omega}$  indica a frequência natural da estrutura em rad/s.

O carregamento dinâmico  $p(t)$  dá-se pelo produto entre a massa  $m$  e a aceleração do solo ao longo do tempo  $\ddot{u}_g(t)$  com sentido oposto a essa aceleração. Assim:

**Eq. 5.3**

$$p(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

Resultando em:

Eq. 5.4

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\bar{\omega}\dot{u}(t) + \bar{\omega}^2u(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

e  $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$ , onde o período da estrutura é  $T$ , em s.

A seguir, aplica-se um registro do histórico de acelerações do solo para qualquer registro de terremoto. Exemplifica-se, na Figura 5.1, o acelerograma (histórico de acelerações do solo) do terremoto de El Centro (1940) [CHOPRA, 1995].

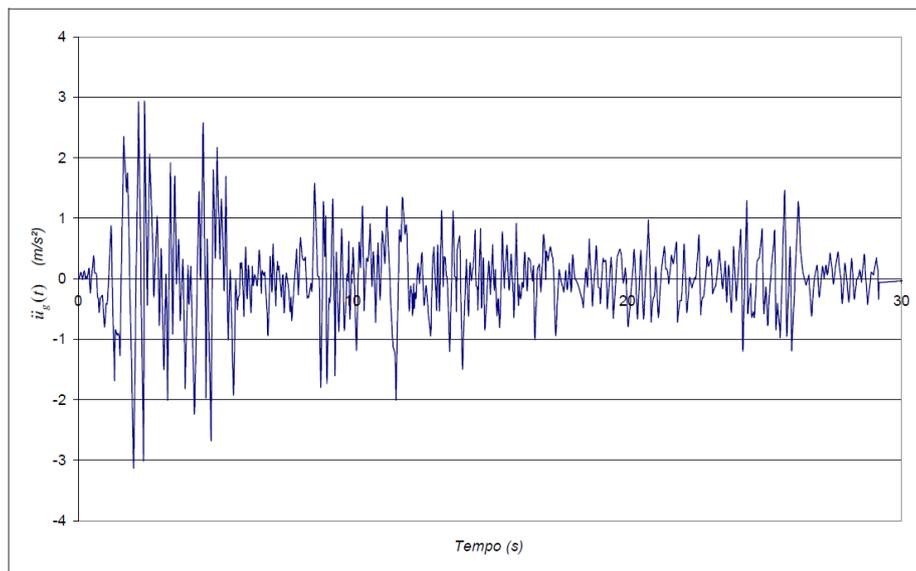
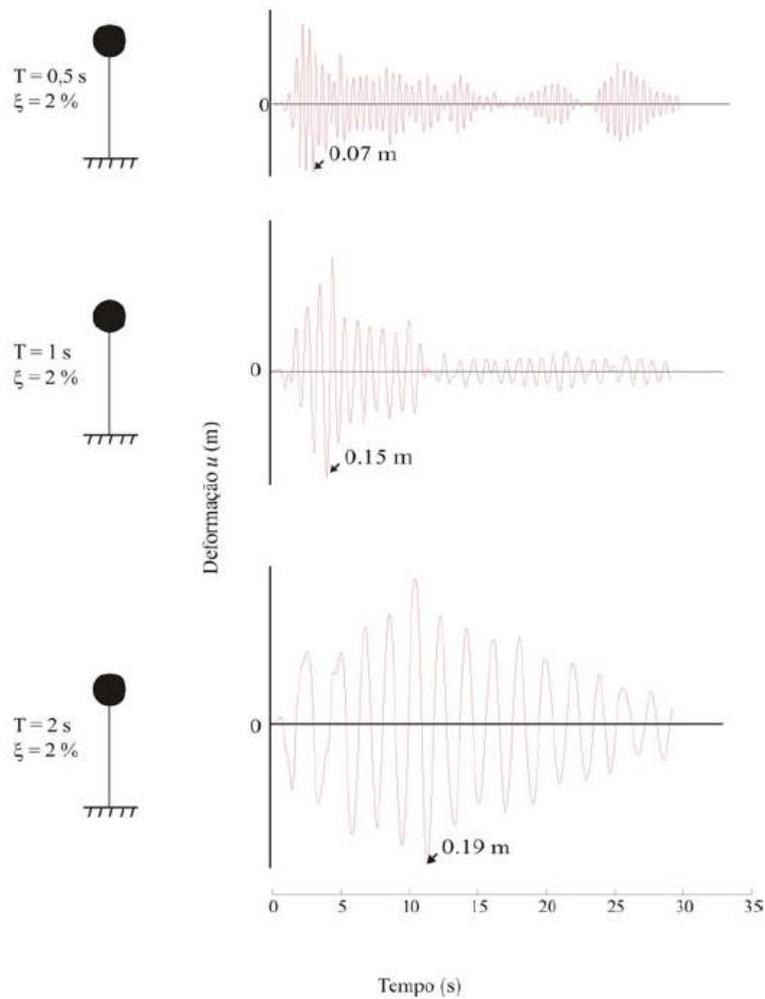


Figura 5. 1-Acelerograma do terremoto de El Centro (1940) (Fonte: CHOPRA, 1995)

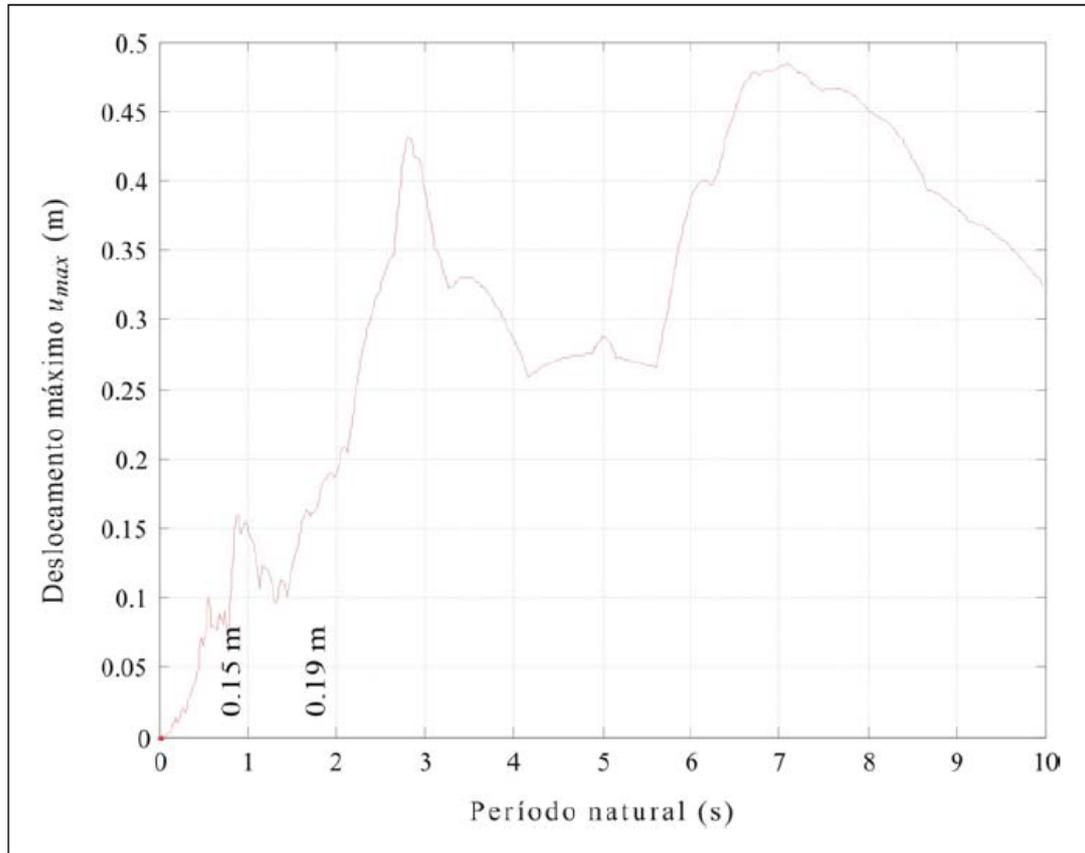
O período da estrutura é variado em pequenos passos para uma taxa fixa de amortecimento assumida para esse sistema, obtendo-se um histórico de respostas de deslocamentos para cada período. Assim, é possível determinar a resposta máxima de cada histórico. Na Figura 5.2 é ilustrado, conforme **Chopra 1995**, esse procedimento.



**Figura 5. 2-** Histórico das respostas de deslocamento da estrutura para o terremoto de El Centro em 3 sistemas com taxa de amortecimento  $\xi=2\%$  e período natural da estrutura 0,5;1 e 2 segundos, respectivamente.

(Fonte: CHOPRA, 1995)

Portanto, pode-se obter um gráfico relacionando o período e a resposta máxima do sistema para uma taxa constante de amortecimento da estrutura, como é apresentado na Figura 5.3. Esse gráfico é denominado espectro de resposta do deslocamento.



**Figura 5.3**– Espectro de respostas do deslocamento para taxa de amortecimento  $\xi = 2\%$  do terremoto El Centro, 1940. (Fonte: CHOPRA, 1995)

## **6. DINÂMICA DAS ESTRUTURAS**

O capítulo 6 será consagrado ao estudo de dinâmica das estruturas. Cada sistema possui modos e frequências próprias de vibração, que dependem de diversos parâmetros intrínsecos ao sistema como: massa, rigidez, graus de liberdade, meio que ocorre a vibração.

Existem diferentes maneiras de obtenção desses valores e vetores próprios. Neste trabalho será desenvolvida a teoria de dinâmica das estruturas em sistemas de parâmetro distribuído utilizando a formulação por equações diferenciais.

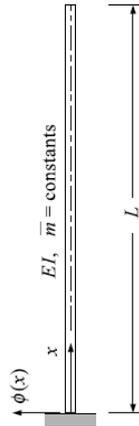
### **6.1. SISTEMAS DE PARÂMETRO DISTRIBUÍDO**

O sistema de coordenadas discretas é o método mais usual para análise dinâmica e possibilita um resultado adequado e aproximado para respostas dinâmicas de estruturas arbitrárias. Entretanto, a solução obtida pode ser apenas aproximação do comportamento dinâmico, pois o movimento é representado por um número limitado de coordenadas de deslocamento. A precisão dos resultados pode ser melhorada se aumentarmos o número de graus de liberdade considerados na análise. Teoricamente, porém, um número infinito de coordenadas seria requerido para que o resultado convergisse para o resultado real de qualquer estrutura com propriedades distribuídas. Portanto com método de parâmetros discretos é impossível obter a solução exata. [CLOUGH, 1995]

O procedimento matemático que considera um número infinito de pontos conectados é por meio de equações diferenciais em que a coordenada das posições e o tempo são considerados variáveis independentes na resposta dinâmica.

#### **6.1.1. SIMPLIFICAÇÃO EM UMA VIGA ENGASTADA**

Devido a complicações matemáticas, o presente trabalho será limitado a análise do modelo com uma dimensão principal, uma plataforma fixa representada por uma viga engastada com parâmetros uniformes de massa e rigidez distribuídos ao longo do seu eixo elástico, Figura 6.1.



**Figura 6. 1**– Propriedades da viga engastada. (Fonte: CLOUGH, 1995)

A equação diferencial parcial do movimento em regime livre conservativo para uma viga é apresentada a seguir, como  $EI(x)$  e  $m(x)$  definidos como constantes  $EI$  e  $\bar{m}$ :

**Eq. 6.1**

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Dividindo por  $EI$  e adotando notação de linha e ponto para indicar derivadas parciais com relação a  $x$  e  $t$ , respectivamente, a equação se torna:

**Eq. 6.2**

$$u''''(x, t) + \frac{\bar{m}}{EI} \ddot{u}(x, t) = 0$$

Como  $\bar{m}/EI$  é constante, pode-se solucionar essa equação facilmente por separação de variáveis usando:

**Eq. 6.3**

$$u(x, t) = \psi(x)Y(t)$$

logo,

**Eq. 6.4**

$$\psi''''(x)Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \psi(x)\ddot{Y}(t) = 0$$

Dividindo por  $\psi(x)Y(t)$ , as variáveis podem ser separadas como:

**Eq. 6.5**

$$\frac{\psi''''(x)}{\psi(x)} = \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = a^4$$

Onde a constante isolada é definida como  $a^4$  por conveniência matemática. Essa equação nos leva a duas equações diferenciais ordinárias.

**Eq. 6.6**

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0$$

**Eq. 6.7**

$$\psi''''(x) - a^4 \psi(x) = 0$$

Em que:

**Eq. 6.8**

$$\omega^2 \equiv \frac{a^4 EI}{\bar{m}} \rightarrow a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}.$$

A Eq. 6.6 é a conhecida equação de vibração livre conservativa com um grau de liberdade, e tem solução:

**Eq. 6.9**

$$Y(t) = Y(0) \cos \omega t + \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen } \omega t$$

A segunda Eq. 6.7 pode ser resolvida de maneira usual e nos leva a solução completa:

**Eq. 6.10**

$$\psi(x) = A_1 \cos ax + A_2 \text{sen } ax + A_3 \cosh ax + A_4 \text{senh } ax$$

Onde  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  são constantes reais que devem satisfazer as condições de contorno (deslocamento, rotação, momento e cisalhamento) na extremidade da viga. Para uma viga engastada temos:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0 & \psi'(0) &= 0 \\ M(L) = EI\psi''(L) &= 0 & V(L) = EI\psi'''(L) &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo na Eq. 6.10 e nas suas respectivas derivadas obtemos:

**Eq. 6.11**

$$\psi(0) = (A_1 \cos 0 + A_2 \text{sen } 0 + A_3 \cosh 0 + A_4 \text{senh } 0) = 0$$

**Eq. 6.12**

$$\psi'(0) = a(-A_1 \text{sen } 0 + A_2 \cos 0 + A_3 \sinh 0 + A_4 \cosh 0) = 0$$

**Eq. 6.13**

$$\psi''(L) = a^2(-A_1 \cos aL - A_2 \operatorname{sen} aL + A_3 \cosh aL + A_4 \operatorname{senh} aL) = 0$$

**Eq. 6.14**

$$\psi'''(L) = a^3(A_1 \operatorname{sen} aL - A_2 \cos aL + A_3 \operatorname{senh} aL + A_4 \cosh aL) = 0$$

Sendo  $\cos 0, \cosh 0 = 1$  e  $\operatorname{sen} 0$  e  $\operatorname{senh} 0 = 0$ . Obtemos  $A_3 = -A_1$  e  $A_4 = -A_2$ . Resolvendo as equações e fazendo as devidas substituições, podemos escrever a equação em forma matricial:

**Eq. 6.15**

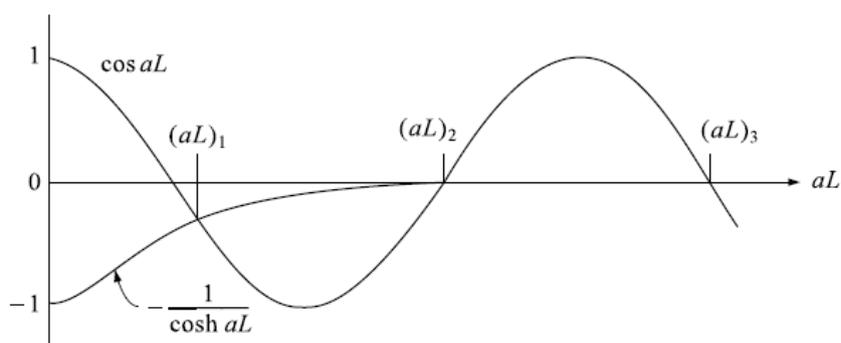
$$\begin{bmatrix} (\cos aL + \cosh aL) & (\operatorname{sen} aL + \operatorname{senh} aL) \\ (\operatorname{senh} aL - \operatorname{sen} aL) & (\cos aL + \cosh aL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  diferentes de zero, o determinante da matriz quadrada da equação deve ser igual a zero, isso nos leva a equação transcendental:

**Eq. 6.16**

$$\cos aL = -\frac{1}{\cosh aL}$$

A solução da Eq. 5.16 nos dá os valores de  $aL$  que representam as frequências de vibração da viga engastada. A Figura 6.2 mostra o gráfico da função  $\cos aL$  e  $-(1/\cosh aL)$ .



**Figura 6. 2** – Termos da equação da frequência.

(Fonte: CLOUGH, 1995)

Substituindo os valores de  $aL$  na Eq. 6.8 as frequências correspondentes podem ser obtidas por:

**Eq. 6.17**

$$\omega_n = (aL)_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} \quad n = 1,2,3, \dots$$

Igualmente a Eq. 6.15 pode ser escrita colocando os coeficientes  $A_2$  em função de  $A_1$ , temos:

**Eq. 6.18**

$$A_2 = -\frac{(\cos aL + \cosh aL)}{(\sin aL + \sinh aL)} A_1$$

O resultado obtido para os modos de vibração, considerando condições de  $A_3 = -A_1$  e  $A_4 = -A_2$  é escrito como:

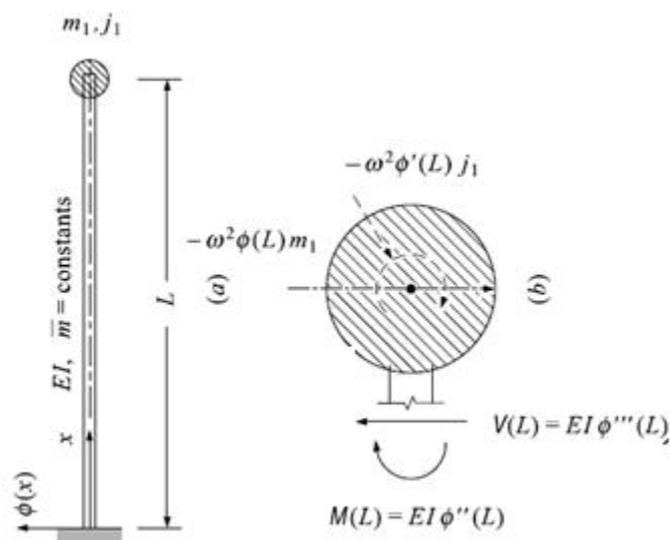
**Eq. 6.19**

$$\psi(x) = A_1 \left[ \cos ax - \cosh ax - \frac{(\cos aL + \cosh aL)}{(\sin aL + \sinh aL)} (\sin ax - \sinh ax) \right]$$

Substituindo separadamente a equação das frequências próprias em função de  $aL$  nessa expressão, podemos obter o modo próprio correspondente.

### 6.1.2 SIMPLIFICAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA COM MASSA CONCENTRADA NA PONTA

Um modelo mais aproximado para uma plataforma *off-shore* fixa é a viga engastada com massa concentrada na ponta, representando o deck da plataforma. Nesse caso a massa concentrada terá um momento de inércia devido a sua translação e rotação ( $j_1$ ). A Figura 5.9 apresenta o modelo para uma viga engastada com massa concentrada.



**Figura 6.3**– Viga engastada com massa concentrada. (a) propriedades da viga, (b) forças agindo na extremidade livre.

(Fonte: CLOUGH, 1995)

As condições de contorno para a extremidade fixa são as mesmas que do caso anterior, porém, o momento e o cisalhamento são iguais a zero na outra extremidade devido a presença da massa

concentrada. As componentes de forças inerciais são mostradas no diagrama de corpo livre da figura 6.3, com as forças de inercia de translação e rotação iguais  $m_1 u(L, t)$  e  $j_1 \ddot{u}'(L, t)$ , respectivamente. Sendo que sobre as condições de vibração livre temos:

$$\begin{aligned}\ddot{u}(L, t) &= \psi(L)Y(t) = -\omega^2 \psi(L)Y(t) \\ \ddot{u}'(L, t) &= \psi'(L)Y(t) = -\omega^2 \psi'(L)Y(t)\end{aligned}$$

As condições de contorno para a extremidade engastada e outra com massa concentrada são:

$$\begin{aligned}\psi(0) &= 0 & \psi'(0) &= 0 \\ EI\psi''(L) &= -\omega^2 \psi'(L)j_1 & EI\psi'''(L) &= -\omega^2 \psi(L)m_1\end{aligned}$$

Substituindo na Eq. 5.64 e nas suas respectivas derivadas obtemos:

**Eq. 6.20**

$$\psi(0) = (A_1 \cos 0 + A_2 \operatorname{sen} 0 + A_3 \cosh 0 + A_4 \operatorname{senh} 0) = 0$$

**Eq. 6.21**

$$\psi'(0) = a(-A_1 \operatorname{sen} 0 + A_2 \cos 0 + A_3 \sinh 0 + A_4 \cosh 0) = 0$$

**Eq. 6.22**

$$\psi''(L) = a^2(-A_1 \cos aL - A_2 \operatorname{sen} aL + A_3 \cosh aL + A_4 \operatorname{senh} aL) = -\frac{\omega^2 \psi'(L)j_1}{EI}$$

**Eq. 6.23**

$$\psi'''(L) = a^3(A_1 \operatorname{sen} aL - A_2 \cos aL + A_3 \sinh aL + A_4 \cosh aL) = -\frac{\omega^2 \psi(L)m_1}{EI}$$

Sendo  $\cos 0, \cosh 0 = 1$  e  $\operatorname{sen} 0$  e  $\operatorname{senh} 0 = 0$ . Obtemos  $A_3 = -A_1$  e  $A_4 = -A_2$ . Resolvendo as equações e fazendo as devidas substituições, podemos escrever a equação em forma matricial apresentada a seguir:

**Eq. 6.24**

$$\begin{bmatrix} \left( \left( -\frac{j_1 \omega^2}{EI} + a \right) \cos aL + \left( -\frac{j_1 \omega^2}{EI} + a \right) \cosh aL \right) & \left( \left( \frac{j_1 \omega^2}{EI} + a \right) \operatorname{sen} aL + \left( -\frac{j_1 \omega^2}{EI} + a \right) \operatorname{senh} aL \right) \\ \left( a^3 \operatorname{senh} aL - a^3 \operatorname{sen} aL + \frac{m_1 \omega^2}{EI} \cosh aL - \frac{m_1 \omega^2}{EI} \cos aL \right) & \left( a^3 \cos aL + a^3 \cosh aL + \frac{m_1 \omega^2}{EI} \sinh aL - \frac{m_1 \omega^2}{EI} \operatorname{sen} aL \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde  $r_1$  e  $m_1$  são o raio e a massa adicional do deque da plataforma simplificado, respectivamente.  $j_1$  e  $\omega$  são definidos como:

**Eq. 6.25**

$$j_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2,$$

**Eq. 6.26**

$$\omega = (aL)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}}$$

Para que os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  sejam diferentes de zero, o determinante da matriz quadrada nessa equação deve ser igual a zero, isso nos dá a equação das frequências:

**Eq. 6.27**

$$1 + \cos aL \cosh aL + \frac{aLm_1}{\bar{m}L} (\cos aL \sinh aL - \sen aL \cosh aL) - \frac{(aL)^3 j_1}{\bar{m}L^3} (\sen aL \sinh aL + \cos aL \cosh aL + \cos^2 aL) + \frac{(aL)^4 j_1 m_1}{\bar{m}^2 L^4} (\cos aL \sen aL - \cos aL \sinh aL) = 0$$

A solução da equação transcendental nos dá os valores de  $aL$ , que representam as frequências de vibração da viga engasta com uma massa concentrada na extremidade livre. A Eq. 6.24 pode ser escrita colocando os coeficientes  $A_2$  em função de  $A_1$ , temos:

**Eq. 6.28**

$$A_2 = \frac{(\cos aL + \cosh aL) - \frac{(aL)^3 j_1}{\bar{m}L^3} (\cosh aL + \cos aL)}{(\sen aL + \sinh aL) - \frac{(aL)^3 j_1}{\bar{m}L^3} (\sinh aL - \sen aL)} A_1$$

O resultado obtido para os modos de vibração, considerando condições de  $A_3 = -A_1$  e  $A_4 = -A_2$  é escrito como:

**Eq. 6.29**

$$\begin{aligned} \phi(x) = \cos ax - \sen ax & \frac{(\cos aL + \cosh aL) - \frac{(aL)^3 j_1}{\bar{m}L^3} (\cosh aL + \cos aL)}{(\sen aL + \sinh aL) - \frac{(aL)^3 j_1}{\bar{m}L^3} (\sinh aL - \sen aL)} \\ - \cosh ax + \sinh ax & \frac{(\cos aL + \cosh aL) - \frac{(aL)^3 j_1}{\bar{m}L^3} (\cosh aL + \cos aL)}{(\sen aL + \sinh aL) - \frac{(aL)^3 j_1}{\bar{m}L^3} (\sinh aL - \sen aL)} \end{aligned}$$

### 6.1.3. MASSA ADICIONAL

A massa adicional representa o fluido deslocado pelo movimento do cilindro e deve ser considerada na dinâmica do cilindro. O acréscimo de inércia do fluido ao sistema deve ser levado em consideração, pois como a velocidade varia continuamente a massa adicional do fluido tem uma contribuição permanente no movimento e na dinâmica do sistema. A expressão para o cálculo de massa adicional no caso de um cilindro submerso em que  $L \gg D$  é:

**Eq. 6.30**

$$m_A = \rho \pi r^2 L$$

Portanto as frequências naturais para a condição submersa são dadas pela Eq. 6.31. na qual está incluída a massa adicional.

**Eq. 6.31**

$$\omega_{AR} = (aL)^2 \sqrt{\frac{EI}{(\bar{m} + m_A)L^4}}$$

## 7. ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são descritos os programas utilizados para resolução das equações, geração de gráficos e construção do modelo numérico.

### 7.1. MAPLE

Este programa é uma ferramenta matemática que será utilizada para resolução rápida das equações diferenciais do movimento da estrutura e integrais de pressões, facilitando a resolução analítica dos problemas iniciais.

O Maple possui visualizadores em 2D e 3D de gráficos e elementos, sendo, portanto, bastante elucidativo durante os cálculos intermediário e uma ferramenta de diagnóstico de problemas ao gerar gráficos tridimensionais.

Sua linguagem é comum dentro dos programas de programação matemática, sendo de fácil manipulação.

### 7.2. LAS

LAS ( Language for Analysis of Structures, **Paultre (2009)**) é uma linguagem de programação e um ambiente de desenvolvimento e análise, desenvolvido na Universidade de Sherbrooke, Canada, para ensinamento de calculo matricial das estruturas, da dinâmica das estruturas e do método dos elementos finitos. LAS é um ambiente de aprendizagem flexível, pois para resolver um problema estrutural, o usuário deve programar a solução.

A linguagem de programação LAS inclui varias operações de controle e iteração, assim como múltiplas funções ( geração de matrizes, álgebra linear, locação segundo o método de rigidez direto, análise modal, análise dinâmica no domínio temporal e das frequências) para manipular as matrizes e construir algoritmos que nos permitem resolver problemas de análise estática e dinâmica das estruturas.

### **7.3. SAP2000 V15**

O software SAP2000 V15 é o mais utilizado no mundo para Análise Estrutural, por meio dele pode-se analisar e projetar uma estrutura desejada utilizando uma interface gráfica de fácil aplicação.

O programa utiliza para seus cálculos o processo de subdivisão da estrutura por elementos finitos, ou seja, ele discretiza a estrutura em pequenas regiões (pontos) onde se efetuam os cálculos. A precisão dos resultados varia de acordo com o número de elementos finitos que a estrutura é discretizada, ou seja, quanto maior o número de discretizações, maior será o resultado, sendo que o programa possibilita essa manipulação.

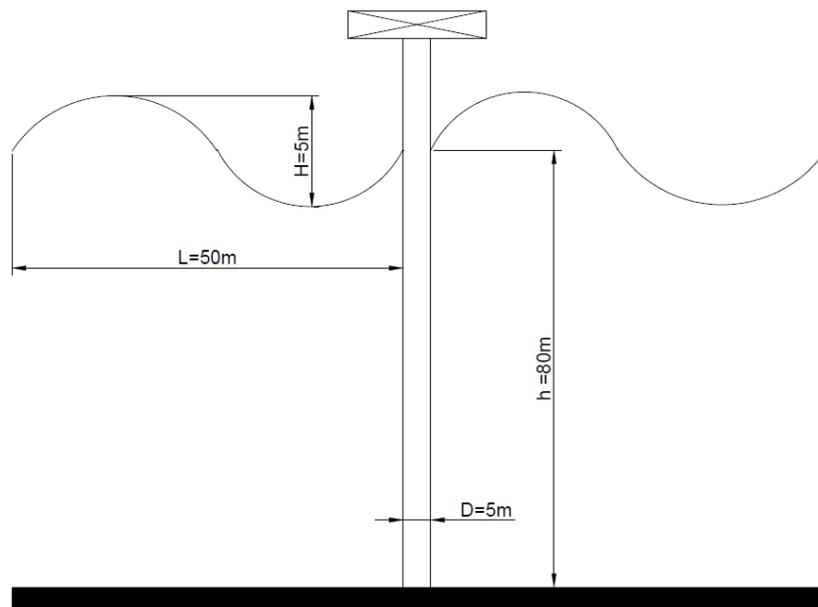
## 8. RESULTADOS

O capítulo 8 trata dos resultados obtidos e análise dos resultados, utilizando as equações obtidas pela teoria linear de ondas aplicada à equação de Morison. Apresenta os resultados de frequências e modos próprios obtidos analiticamente e numericamente. Analisa a influencia do deck nas vibrações e a resposta dinâmica para diferentes frequências de onda e sismos.

### 8.1. SOLUÇÕES ANALÍTICAS

A forma mais estudada para análise de fluido-estrutura é o cilindro, tabelas e coeficientes empíricos foram determinados por diversos pesquisadores para esse tipo de geometria. Tais parâmetros auxiliarão na obtenção de resultados e na comparação com o modelo computacional. Portanto, adotou-se o cilindro engastado para ser estudado.

Com base nas teorias de ondas, escoamentos e dinâmica das estruturas, serão obtidos os esforços sobre o cilindro engastado representado abaixo:



**Figura 8. 1** – Esquema do exemplo de estudo

#### 8.1.1. FORÇAS DEVIDO ÀS ONDAS PROGRESSIVAS

Considerando um problema hipotético, foi fixado o comprimento da onda em função da condição de águas profundas e da aplicabilidade da equação de Morison, procurando afastar-se dos limites de aplicação para obtenção de resultados precisos:

- $H = 5m, a = 2,5m$
- $D = 5m$
- $g = 10m/s^2$
- $L = 50m$
- $T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}} = 5,605s$
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,121rad/s$
- $C = \frac{L}{T} = 8,92 m/s$
- $v_{x_{max}}(x, t) = \frac{2\pi a}{T} = 2,802 m/s$
- $k \cdot h = \frac{2\pi}{L} h = 12,566$
- $K_h = \frac{h}{L} = 2$
- $K_a = \frac{\pi D}{L} = \frac{\pi}{10}$
- $KC = \frac{\pi H}{D} = \pi$

As características do domínio fluido:

- $\nu = 1.10^{-3} Pa \cdot s$  ou  $1cP$
- $Re_{max} = \frac{v_{x_{max}D}}{\frac{\sqrt{2}}{v}} \cong 1,0.10^4$  (Regime laminar)
- $S_t = 0,2$
- $C_D = 1,2$
- $C_M = 1,5$
- $C_L = 3,5$
- $g = 10 m/s$
- $\rho = 10^3 Kg/m^3$
- $h = 80m$

Através das equações cinemáticas das ondas, Eq. 3.2 e Eq. 3.3, para a propagação das ondas em águas profundas ( $kh \ll 1$ ), encontramos a velocidade e aceleração da onda em função do tempo e da altura y.

**Eq. 8.1**

$$v_x = \frac{a \cdot \omega \cdot \cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) = 2,5 \frac{2\pi}{5,605} \frac{\cosh \left[ \frac{2\pi}{50} (y+80) \right]}{\sinh \left( \frac{2\pi}{50} 80 \right)} \cos \left( -\frac{2\pi}{5,605} t \right) =$$

$$v_x = 0,892 \pi \frac{\cosh[0,04(y+80)]}{\sinh(4\pi)} \text{sen}(1,1210t) \text{m/s}$$

**Eq. 8.2**

$$\dot{v}_x = \frac{a \cdot \omega^2 \cdot \cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \text{sen}(kx - \omega t) = 2,5 \frac{2\pi}{5,605} \frac{\cosh \left[ \frac{2\pi}{50} (y+80) \right]}{\sinh \left( \frac{2\pi}{50} 80 \right)} \text{sen} \left( -\frac{2\pi}{5,605} t \right) =$$

$$\dot{v}_x = -0,318 \pi^2 \frac{\cosh[0,04(y+80)]}{\sinh(4\pi)} \text{sen}(1,1210t) \text{m/s}^2$$

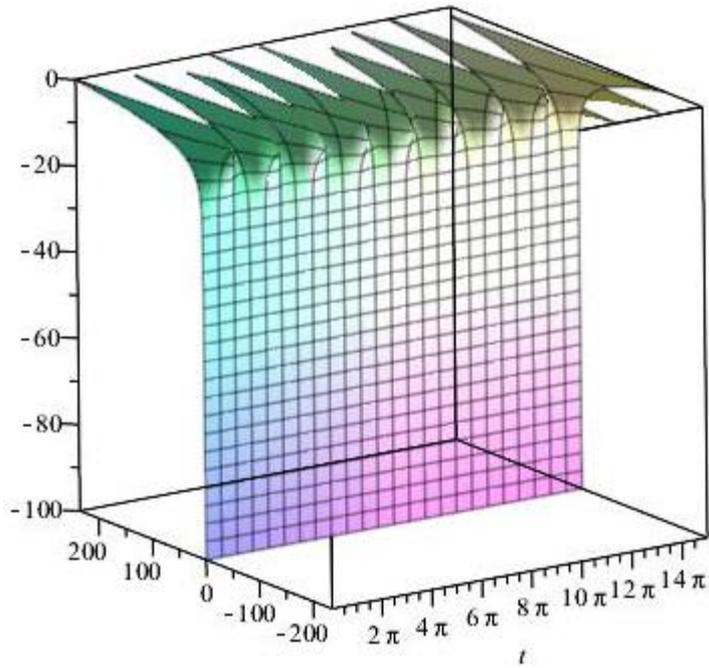
Aplicando na equação de Morison obtemos a forças Figura 8.2 e 8.3:

**Eq. 8.3**

$$f_A = C_D \rho \frac{D}{2} v_x |v_x| = 1,2 \cdot 10^3 \frac{5}{2} v_x |v_x|$$

$$= 2386,992 \pi^2 \left\{ \frac{\cosh[0,04\pi(y+80)]}{\sinh(4\pi)} \right\}^2 \cos(0,3568\pi t) |\cos(0,3568\pi t)|$$

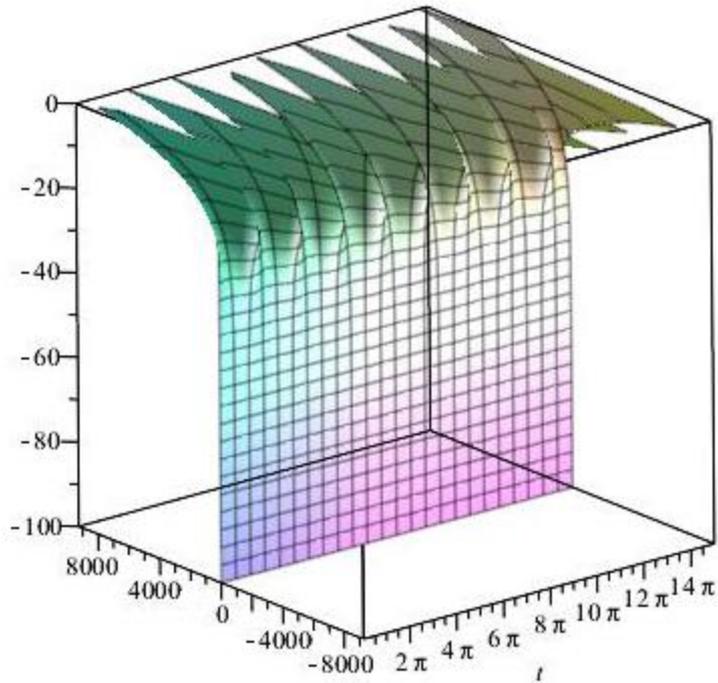
$$f_{A,0} = 154,67 \cos(1,121t) |\cos(1,121t)|$$



**Figura 8. 2-** Variação da força de arraste por unidade de comprimento ao longo da altura e do tempo.

**Eq. 8.4**

$$\begin{aligned}
 f_l &= C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \dot{v}_x = -1,5 \cdot 10^3 \frac{\pi D^2}{4} \dot{v}_x \\
 &= 2983,74 \pi^2 \frac{\cosh[0,04\pi(y + 80)]}{\sinh(4\pi)} \text{sen}(0,3568\pi t) \\
 f_{l,0} &= 7495,9 \text{sen}(1,121t)
 \end{aligned}$$



**Figura 8.3** - Variação da força de inércia por unidade de comprimento ao longo da altura e do tempo.

Para obter as forças totais de reação, basta integrar as forças por unidade de comprimento ao longo da altura, somando as de inércia e arraste para encontrar a força total na direção “x”:

**Eq. 8.5**

$$F_A = \int_{-h}^0 f_D dy = 12366,26 \cos(1,121t) | \cos(1,121t) |$$

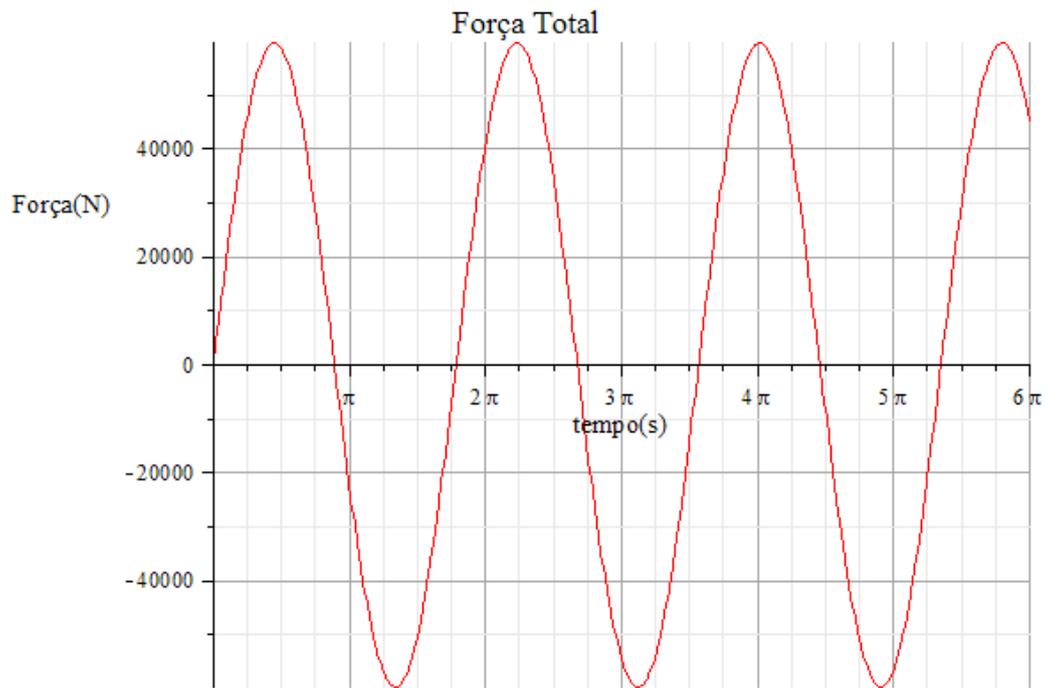
**Eq. 8.6**

$$F_I = \int_{-h}^0 f_I dy = 599514,23 \sin(1,121t)$$

**Eq. 8.7**

$$F_T = F_A + F_I$$

A Figura 8.4 representa a força total concentrada no a uma distancia de aproximadamente um terço de h em função do tempo.



**Figura 8.4--** Gráfico das força total na direção “x” aplicada ao longo do tempo.

Para obter os momentos gerados pelas forças de arraste inercia basta resolver as seguintes integrais:

**Eq. 8.8**

$$M_A = \int_{-h}^0 f_D(80 + y)dy = 46756,61 \cos(1,121t) | \cos(1,121t) |$$

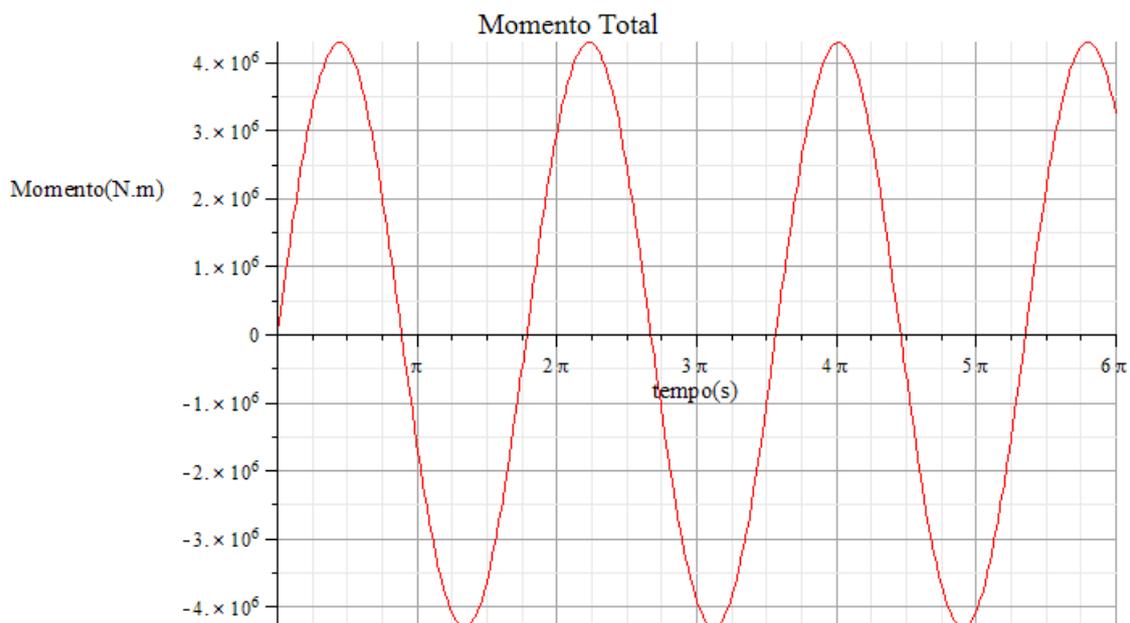
**Eq. 8.9**

$$M_I = \int_{-h}^0 f_I(80 + y)dy = 4,2963.10^6 \sin(1,121t)$$

**Eq. 8.10**

$$M_T = M_I + M_A$$

O gráfico 8.5 representa o momento gerado pela força total, aplicada a aproximadamente 1/3 da altura h, em função do tempo.



**Figura 8.5-** Gráfico do momento gerado pela força total na direção “x” aplicada ao longo do tempo.

### 8.1.2. FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA SISTEMA DE PARÂMETRO DISTRIBUÍDO

Considerando a mesma geometria do cilindro utilizado na obtenção de esforços hidrodinâmicos, porém considerando a altura total do cilindro (Seção fora da água), apresenta-se à obtenção das frequências naturais do cilindro engastado com as seguintes características físicas:

- *Altura*  $L = 100m$ ;
- *Diâmetro*  $D = 5m$ ;
- *Modulo de Young*  $E = 30 \text{ GPa}$
- *Densidade*  $2500 \frac{Kg}{m^3}$

Utilizando o software MAPLE obtemos os quatro primeiros valores de  $(aL)$  através da equação transcendental Eq. 6.16. Calculam-se, então, as quatro primeiras frequências naturais do sistema.

- $(aL)_1 = 1,875$ ;
- $(aL)_2 = 4,694$ ;
- $(aL)_3 = 7,855$ ;
- $(aL)_4 = 10,995$ ;

Aplicando na Eq. 6.19 temos:

**Eq. 8.11**

$$\omega_1 = 1,875^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 1.5223 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.12**

$$\omega_2 = 4,694^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 9,5409 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.13**

$$\omega_3 = 7,855^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 26,7149 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.14**

$$\omega_4 = 10,995^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 52.352 \text{ rad/s}$$

### 8.1.3. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS PARA SISTEMA DE MASSA DISTRIBUÍDA E COM MASSA CONCENTRADA DO DECK

Considerando a mesma geometria do cilindro do item anterior e adicionando uma massa concentrada na ponta ( $m_1 = 400\text{ton}$ ) com um raio ( $r = 5\text{m}$ ), calcula-se, a partir da Eq. 6.27, os quatro primeiros valores de  $(aL)$  utilizando o software MAPLE, em seguida, obtemos as quatro primeiras frequências naturais do sistema.

- $(aL)_1 = 1.746;$
- $(aL)_2 = 4.428;$
- $(aL)_3 = 7.455;$
- $(aL)_4 = 10.461.$

Aplicando na Eq. 6.27 temos:

**Eq. 8.15**

$$\omega_1 = 1.746^2 \sqrt{\frac{30.10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 1.321 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.16**

$$\omega_2 = 4.434^2 \sqrt{\frac{30.10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 8.489 \text{ rad/s}$$

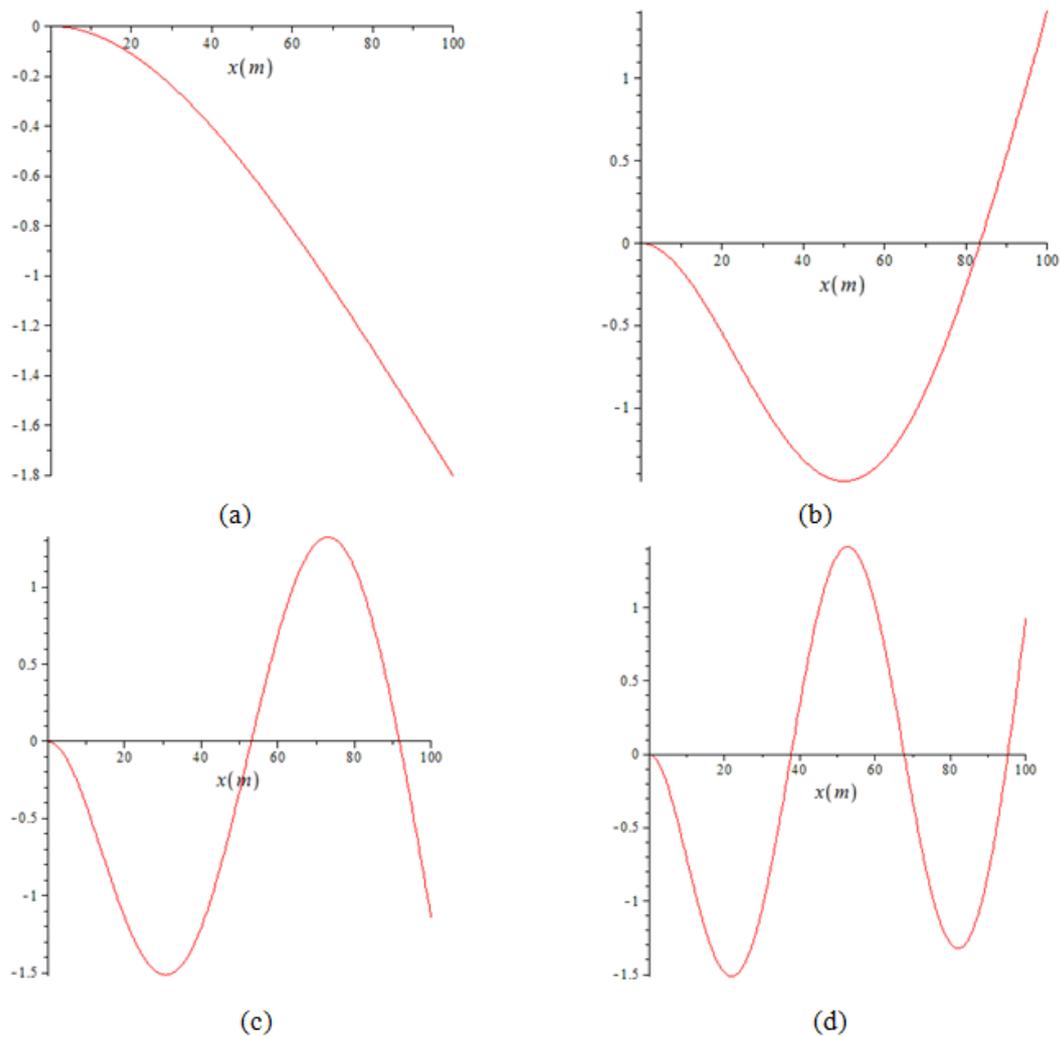
**Eq. 8.17**

$$\omega_3 = 7.483^2 \sqrt{\frac{30.10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 24.068 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.18**

$$\omega_4 = 10.537^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{2500\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 47.385 \text{ rad/s}$$

Os modos de vibração podem ser obtidos através da Eq. 6.29 substituindo os valores de  $(aL)$  encontrados da Eq. 6.27 e os parâmetros aqui definidos. A Figura 8.6 apresenta os modos próprios encontrados.



**Figura 8. 6** – (a) Primeiro modo de vibração (b) Segundo modo de vibração (c) Terceiro modo de vibração (d) Quarto modo de vibração

Para o cálculo das frequências naturais embaixo d'água, utiliza-se o conceito de massa adicional:

**Eq. 8.19**

$$m_A = \rho \pi r^2$$

Logo,

**Eq. 8.20**

$$m_A = 1000 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow m_A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Abaixo são apresentados os resultados para as frequências naturais submersas, lembrando que se trata de uma aproximação, pois as massas deslocadas variam para cada modo de vibração.

**Eq. 8.21**

$$\omega_{1,sub} = 1,778^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{(1000 + 2500) \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 1,157 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.22**

$$\omega_{2,sub} = 4,471^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{(1000 + 2500) \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 7,318 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.23**

$$\omega_{3,sub} = 7,471^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{(500 + 2500) \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 20,429 \text{ rad/s}$$

**Eq. 8.24**

$$\omega_{4,sub} = 10,385^2 \sqrt{\frac{30 \cdot 10^9 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4}{(500 + 2500) \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot 100^4}} = 39,465 \text{ rad/s}$$

### 8.1.4 INFLUÊNCIA DA MASSA DO DECK NAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO

Com o objetivo de analisar a influência da massa concentrada e da inercia devido ao giro dessa massa nas frequências naturais, apresentam-se os gráficos nas Figuras 8.7 e 8.8, que mostram a variação para a primeira e segunda frequência de vibração. Em ambos os gráficos é variado tanto a inercia devido ao giro ( $j$ ) quanto massa concentrada. Sendo  $(m_1/m.L)$  a relação entre a massa concentrada na ponta e a massa distribuída vezes o comprimento da haste.

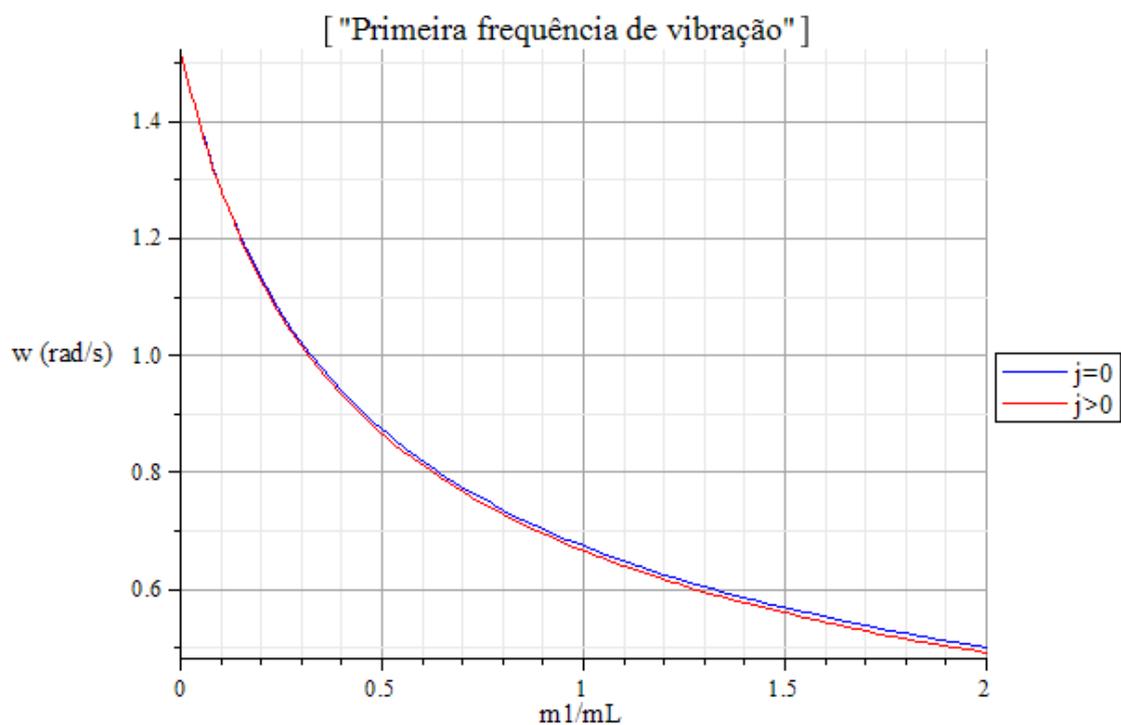
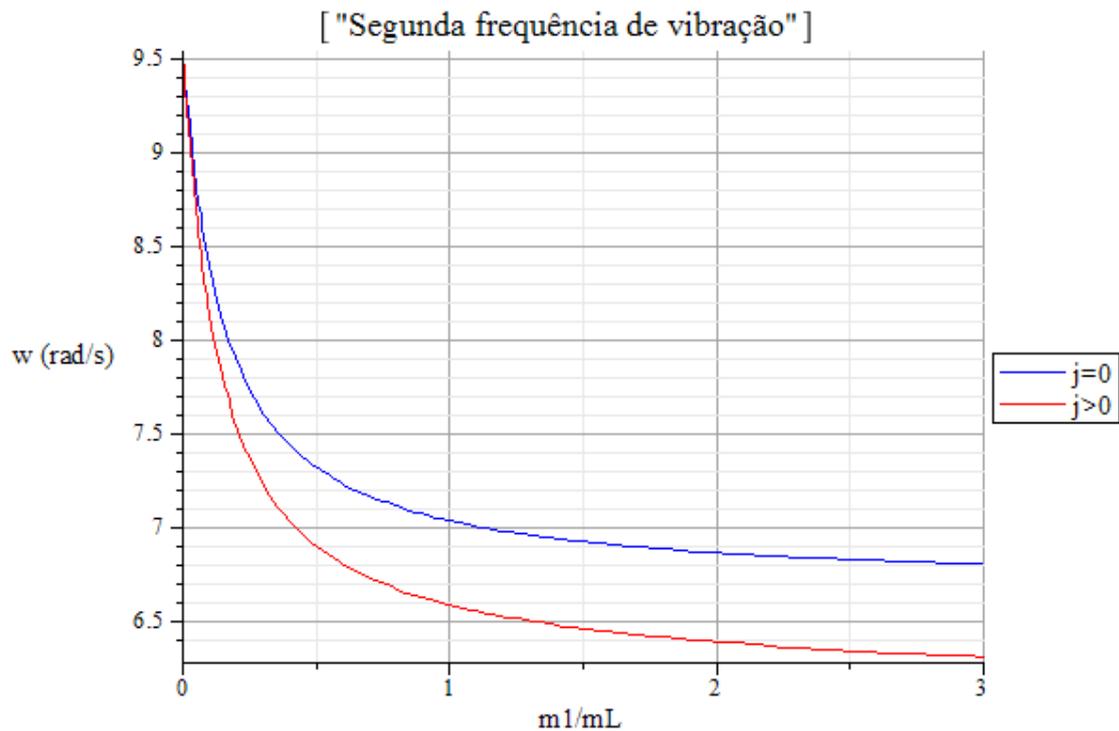


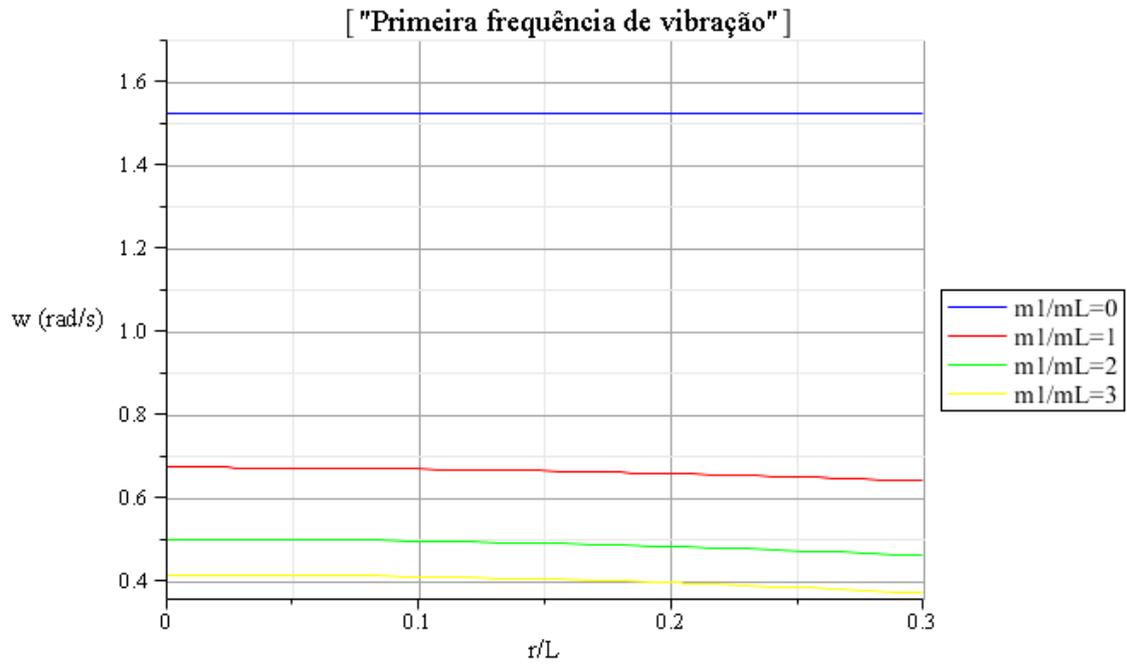
Figura 8.7 – Variação da primeira frequência de vibração em função da massa  $m_1$ .



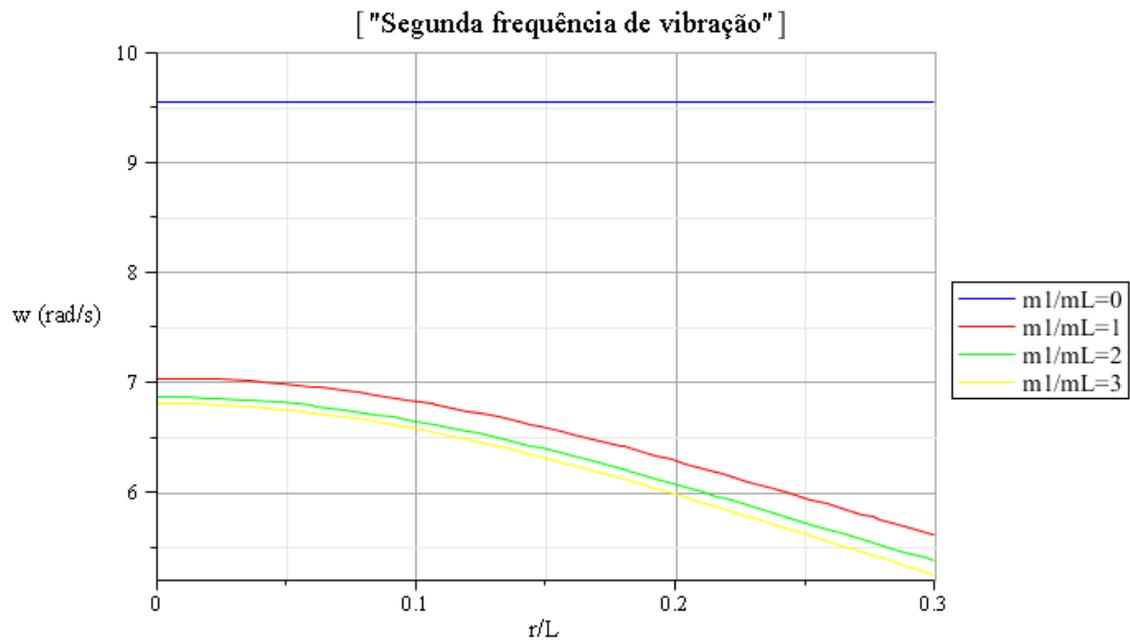
**Figura 8.8** - Variação da segunda frequência de vibração em função da massa  $m_1$

A simulação resulta em duas figuras que indicam que a primeira e segunda frequências de vibração diminuem com o aumento da massa concentrada. Além disso, o gráfico da Figura 8.7 revela que o momento de inercia devido ao giro( $j$ ) da massa, tem pouca influencia na primeira frequência de vibração. Por outro lado o gráfico da Figura 8.8 mostra que a segunda frequência de vibração é bastante sensível a variação da inercia ( $j$ ).

Os gráficos das Figuras 8.9 e 8.10 apresentam a variação da primeira e segunda frequência em função da inercia devido ao giro que é proporcional a relação  $(r/L)$ , sendo  $r$  o raio da estrutura na ponta e  $L$  o comprimento da haste. Isso para diferentes valores de  $m_1$ . A primeira frequência praticamente não varia com o aumento da inercia( $j$ ). Já a segunda frequência de vibração diminui rapidamente com aumento da inercia de vido ao giro. Isso acontece devido ao efeito de rotação da massa ter uma influencia forte na segunda frequência de vibração.

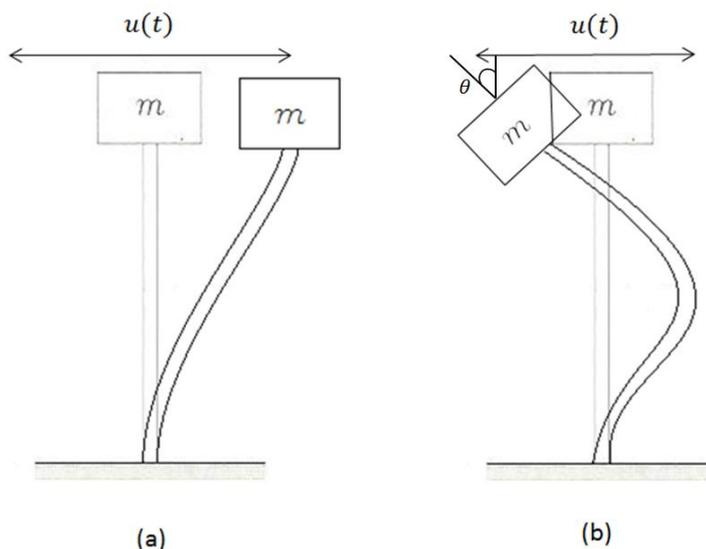


**Figura 8.9** – Variação da primeira frequência de vibração em função da inercia (j)



**Figura 8.10** - Variação da primeira frequência de vibração em função da inercia (j)

O fenômeno verificado se deve ao fato a vibração na primeira frequência não provoca giro relevante do deck, entretanto para a segunda frequência o giro do deck é significativo, influenciado a frequência de maneira mais evidente. A figura 8.11 ilustra como a rotação da massa concentrada influência consideravelmente o segundo modo de vibração da estrutura.



**Figura 8. 11-** Influência da rotação nos modos de vibração (a) Primeiro modo (b) Segundo modo.

## 8.2. SOLUÇÕES NUMÉRICAS

### 8.2.1. FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS PRÓPRIOS PARA SISTEMA DISCRETO CONSIDERANDO A MASSA DO DECK

Para o modelo feito no software LAS com 8 elementos viga, considerando a massa concentrada nos nós e desprezando o efeito de rotação foi possível obter resultados praticamente exatos para as primeiras frequências de vibração. A Tabela 8.1 mostra os resultados.

	<b>Analítico</b>	<b>Numérico</b>	<b>Erro (%)</b>
	<b>(rad/s)</b>	<b>(rad/s)</b>	
$\omega_1$	1,32	1,3140	0.53
$\omega_2$	8,43	8,3930	1.13
$\omega_3$	23,58	23,820	1.03
$\omega_4$	45,40	47,119	0.56
$\omega_5$	72,61	78,010	0.15
$\omega_6$	104,92	114,774	0.71
$\omega_7$	144,67	152,423	4.10
$\omega_8$	193,71	181,347	12.84

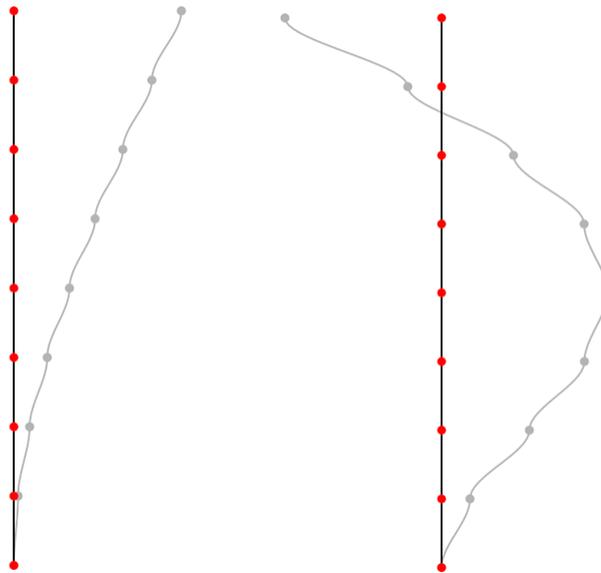
**Tabela 8. 1-** Frequências Naturais para o modelo numérico com 8 elementos.

Os valores de frequências naturais obtidos numericamente para a plataforma submersa, considerando a massa adicional da água, estão na Tabela 8.2. Percebe-se um aumento considerável do erro, em relação aos resultados analíticos, pois existem erros associados como a mesma consideração de massa para todos os modos próprios e o acréscimo da massa adicional apenas nos nós.

	<b>Analítico</b> (rad/s)	<b>Numérico</b> (rad/s)	<b>Erro (%)</b>
$\omega_1$	1,157	1,294	11,80
$\omega_2$	7,318	8,264	12,93
$\omega_3$	20,429	23,449	14,78
$\omega_4$	39,466	46,378	17,51
$\omega_5$	63,536	76,777	20,84
$\omega_6$	91,913	112,953	22,89
$\omega_7$	125,694	150,001	19,34
$\omega_8$	166,791	178,463	7,00

**Tabela 8. 2**– Frequências Naturais para o modelo numérico submerso com 8 elementos.

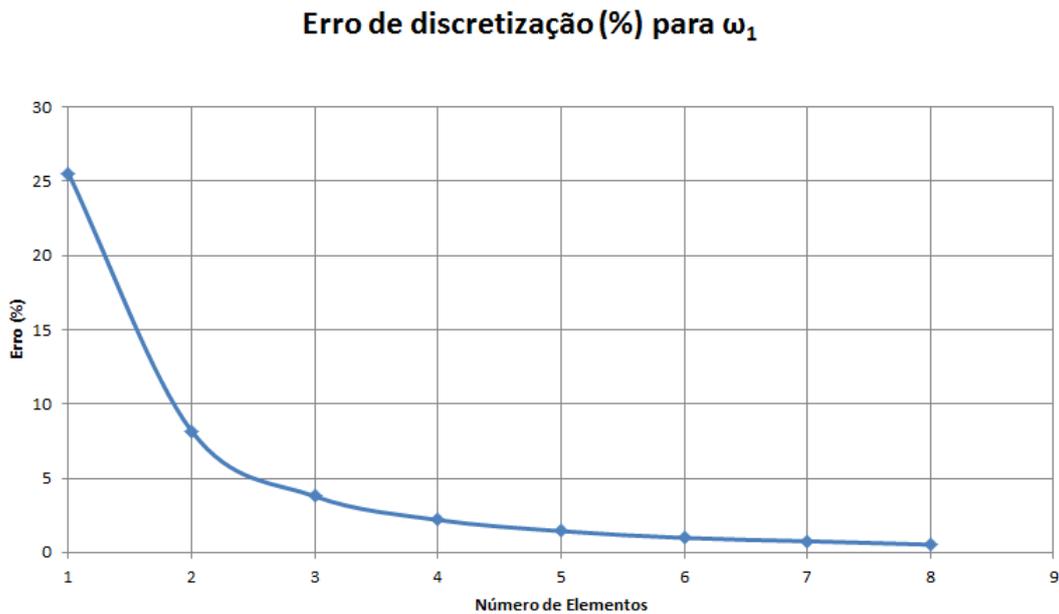
A Figura 8.12 ilustra os dois primeiros modos de vibração obtidos com o modelo de 8 elementos. Como podemos comparar, são semelhantes aos obtidos analiticamente, Figura 8.6.



**Figura 8. 12**– Primeiro e Segundo modos de vibração obtidos numericamente.

## 8.2.2. COMPARATIVO ENTRE OS RESULTADOS DO MODELO EM “LAS” e “SAP2000’ E O ANALÍTICO

O gráfico 8.13 apresentado abaixo mostra que os resultado numérico para a primeira frequência de vibração convergem rapidamente para a resposta analítica, sendo que com apenas 4 elementos já se tem uma excelente aproximação.



**Figura 8.13-** Erro de desratização em função do n° de elementos.

A Tabela 8.3 apresenta um comparativo entre o resultado analítico e os diferentes modelos numéricos. A segunda coluna apresenta os resultados encontrados no software LAS com uma massa distribuída (MD) e considerando o grau de liberdade de rotação dos nós. Na terceira coluna os resultados obtidos são para um modelo *shear building* (SB), considera-se apenas o deslocamento horizontal e massa está concentrada nos nós (MC). Percebe-se que os valores obtidos para essa situação já são suficientemente bons, erros próximos de 1%.

Na ultima coluna é apresentado os valores próprios obtidos para o modelo criado no software SAP2000.

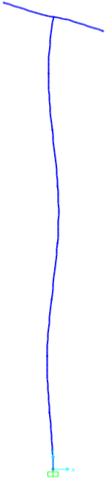
	<b>Analítico (rad/s)</b>	<b>LAS MD ( rad/s)</b>	<b>Erro (%)</b>	<b>LAS MC_SB ( rad/s)</b>	<b>Erro (%)</b>	<b>SAP2000 ( rad/s)</b>	<b>Erro (%)</b>
<b><math>\omega_1</math></b>	1,321	1,32	0,00	1,31	0,53	1,30	1,32
<b><math>\omega_2</math></b>	8,489	8,52	0,35	8,39	1,13	8,29	2,31
<b><math>\omega_3</math></b>	24,068	24,30	0,96	23,82	1,03	23,39	2,83
<b><math>\omega_4</math></b>	47,385	48,32	1,98	47,12	0,56	45,88	3,19

**Tabela 8. 3**– Comparativo das frequências Naturais para modelo analítico e numéricos em LAS e SAP 2000.

### 8.2.3. INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DO DECK

Através do software SAP2000 foi realizado diferentes modelos de plataformas com geometrias variadas para o deck. Manteve-se a mesma massa equivalente de 400 toneladas para todos os modelos de Deck analisados a fim de compreendermos a influência do momento de inércia rotacional  $j$  e condições de deslocabilidade nas frequências e modos próprios da plataforma. As Figuras 8.5, 8.6, 8.7, 8.8 e 8.9 apresenta os diferentes modelos analisados com seus respectivos modos próprios e os resultados de frequência própria. A seguir serão comparados com o modelo de massa concentrada e momento de inércia rotacional “ $j$ ” igual à zero, “Modelo MC”:

- Modelo 1 – Plataforma em forma de “T” raso.

<b>Modelo Indeformado</b>	<b>1º Modo</b>	<b>2º Modo</b>	<b>3º Modo</b>	<b>4º Modo</b>
				
<b><math>\omega</math> (rad/s)</b>	<b>1,17</b>	<b>7,75</b>	<b>21,68</b>	<b>36,87</b>

**Figura 8. 14**– Modos de próprios de vibração Modelo 1

- Modelo 2 – Plataforma em forma de “T” caixão.

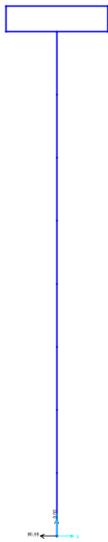
Modelo Indeformado	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo
				
$\omega$ (rad/s)	<b>1,16</b>	<b>7,52</b>	<b>17,11</b>	<b>25,4</b>

Figura 8. 15- Modos de próprios de vibração Modelo 2

- Modelo 3 – Plataforma em forma de “T” caixão com duas barras de contraventamento.

Modelo Indeformado	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo
				
$\omega$ (rad/s)	<b>1,16</b>	<b>7,53</b>	<b>17,78</b>	<b>25,73</b>

Figura 8. 16- Modos de próprios de vibração Modelo 3

- Modelo 4 - Plataforma tipo “T” caixão com treliça de enrijecimento.

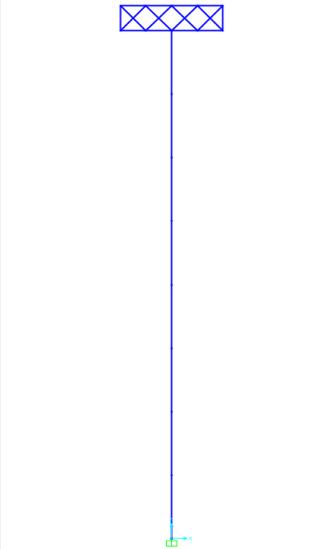
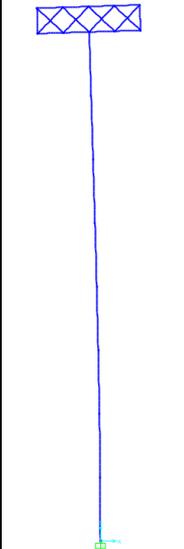
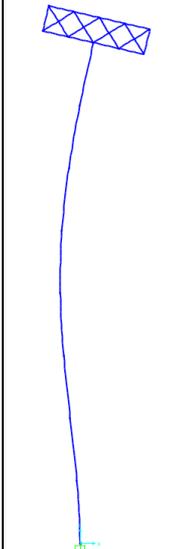
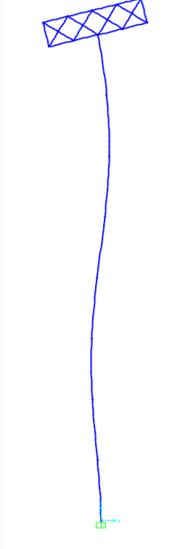
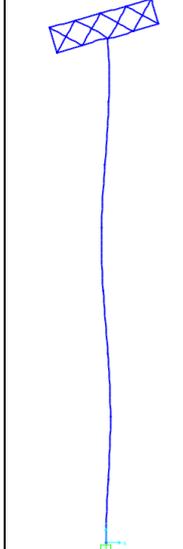
Modelo Indeformado	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo
				
$\omega$ (rad/s)	<b>1,16</b>	<b>7,63</b>	<b>17,78</b>	<b>36,16</b>

Figura 8. 17- Modos de próprios de vibração Modelo 4

- Modelo 5 – Plataforma em forma de “T” caixão com treliça densa. (muito enrijecida)

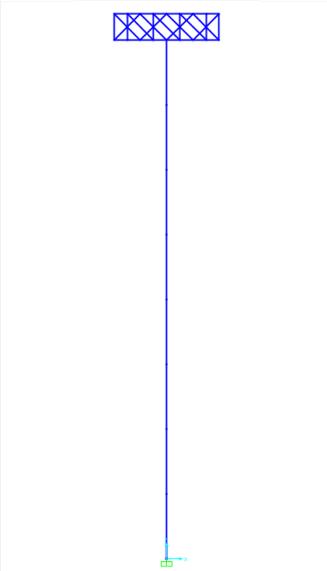
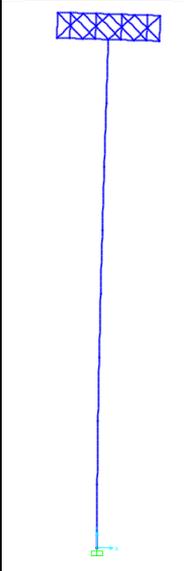
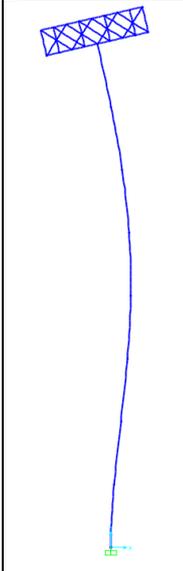
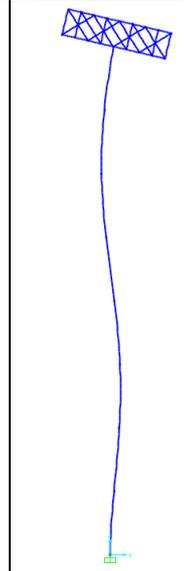
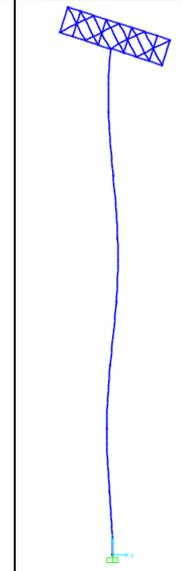
Modelo Indeformado	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo
				
$\omega$ (rad/s)	<b>1,16</b>	<b>7,64</b>	<b>21,35</b>	<b>37,36</b>

Figura 8. 18- Modos de próprios de vibração Modelo 5

- Comparativo entre os modelos

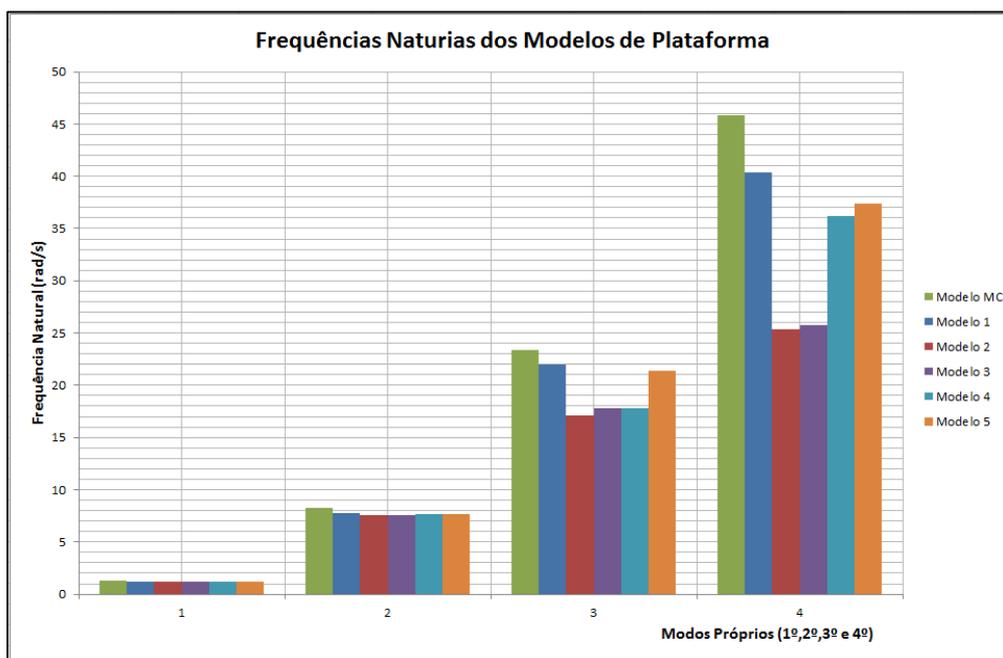
A partir da comparação entre os diversos modelos, podemos perceber na Tabela 8.4 que a primeira frequência de vibração praticamente não varia, algo que está de acordo com o observado analiticamente. Portanto, o momento de inercia rotacional do Deck pouco influencia as primeiras frequências próprias.

Entretanto ocorre uma alteração considerável nas frequências mais altas, sendo que a vibração do deck influenciam consideravelmente tais frequências. A medida que o modelo vai se tornando mais rígido, “Modelos 3, 4 e 5”, a terceira e quarta frequência própria tende a aumentar, pois o deck começa a se aproximar novamente de uma massa concentrada. Assim como no “Modelo MC”.

A Figura 8.19 ilustra de maneira clara esse fenômeno, sendo que os modelos 4 e 5 cores azul e laranja, respectivamente, estão sempre mais próximos do modelo de massa concentrada (Modelo MC).

<b>Modelo MC</b>	<b>Modelo 1</b>	<b>Modelo 2</b>	<b>Modelo 3</b>	<b>Modelo 4</b>	<b>Modelo 5</b>
<b>w (rad/s)</b>					
<b>1,30</b>	1,17	1,16	1,16	1,16	1,16
<b>8,29</b>	7,78	7,52	7,53	7,63	7,64
<b>23,39</b>	22,02	17,11	17,78	17,78	21,35
<b>45,88</b>	40,32	25,40	25,73	36,16	37,36

**Tabela 8. 4** Comparativo das frequências naturais para os diversos modelos de deck



**Figura 8. 19** – Gráfico comparativo das Frequências Naturais para os diversos modelos de deck

## 8.2.4. RESPOSTA DINÂMICA DEVIDO ÀS ONDAS

Para obtenção da resposta dinâmica da estrutura devido a força dinâmica exercida pela onda de características descritas no tópico 8.1.1, utilizou-se um modelo com vinte elementos. As forças foram distribuídas nos nós de forma decrescente de acordo com função obtida através da equação de Morison, Eq. 8.7, Gráfico 8.4.

- Frequência de excitação próxima de  $\omega_1$

A figura 8.20 apresenta a resposta a haste devido a onda, podemos ver a função da força o deslocamento dinâmico de forma gráfica a direita, e o deslocamento da estrutura a esquerda. Devido a frequência da onda ser relativamente próxima da primeira frequência natural do sistema, a estrutura oscila de acordo com o primeiro modo de vibração. A partir de um determinado instante a estrutura entra em regime permanente e realiza deslocamentos constantes. Isso ocorre devido a frequência de excitação estar próxima da frequência de ressonância, porém os deslocamentos ainda conseguem ser enfraquecidos pelo amortecimento.

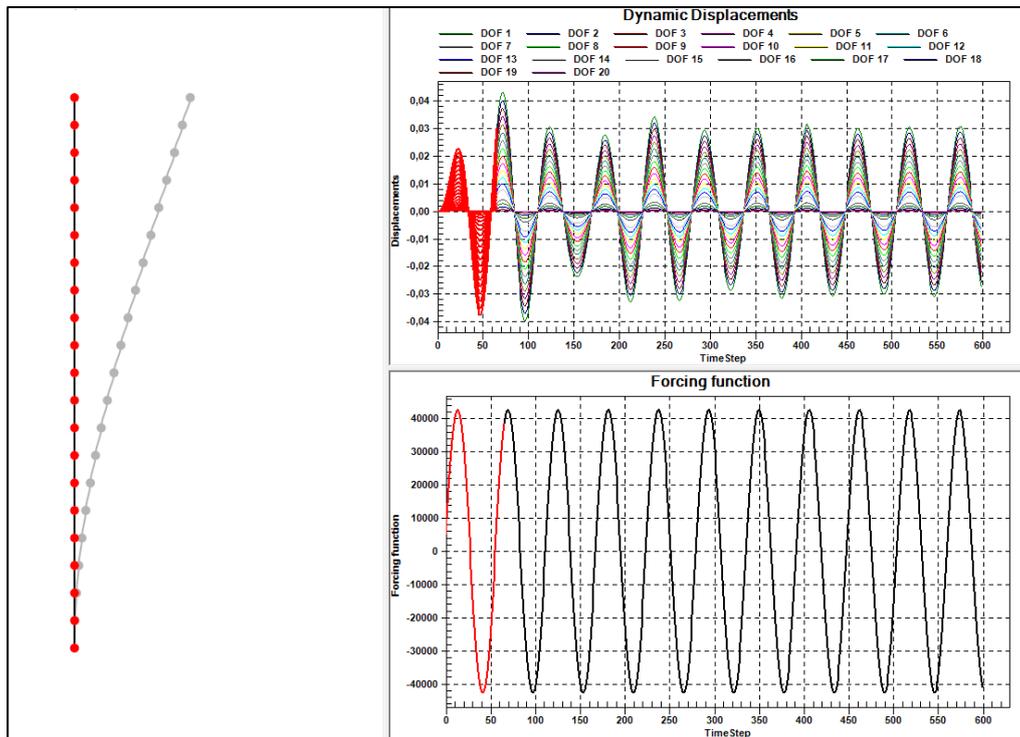
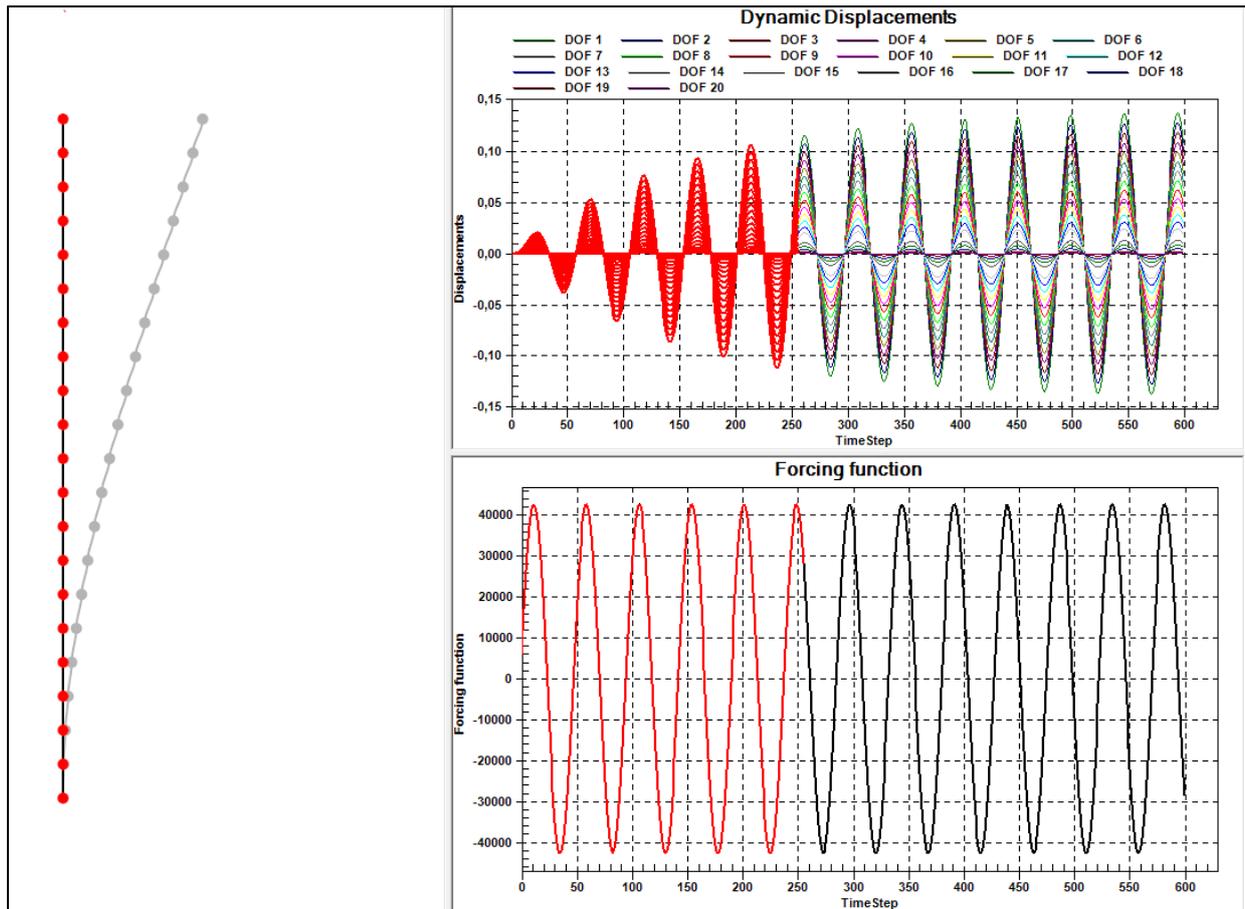


Figura 8. 20– Resposta Dinâmica para frequência de excitação menor que  $\omega_1$

- Frequência de excitação ressonante igual a  $\omega_1$

Uma outra análise hipotética foi feita considerando a frequência das ondas igual a primeira frequência de vibração natural do sistema, ou seja, na frequência de ressonância. Como podemos observar na figura 8.21, os deslocamentos dinâmicos aumentam de amplitude a cada ciclo, mesmo que tendendo a estabilidade devido ao amortecimento. Porém essa situação é muito indesejável, pois o aumento indeterminado dos deslocamentos podem aumentar muito os esforços na estrutura.



**Figura 8. 21-** Resposta Dinâmica para frequência de excitação igual a  $\omega_1$ (ressonância).

- Massa concentrada muito elevada

Com o objetivo de se analisar a influencia da massa na extremidade livre da estrutura aumentou-se consideravelmente o valor da massa, com vezes a mais que as outras situações. Devido a diminuição considerável da primeira frequência natural do sistema, a estrutura oscila de maneira diferente, sendo que é realizado movimentos periódicos, porém diferentes do primeiro modo próprio, Figura 8.22. O aumento exagerado da massa concentrada na ponta, faz a estrutura tender

uma condição de duplo engasgamento, levando a maiores deslocamentos no meio da haste e mudança nos esforços internos da estrutura.

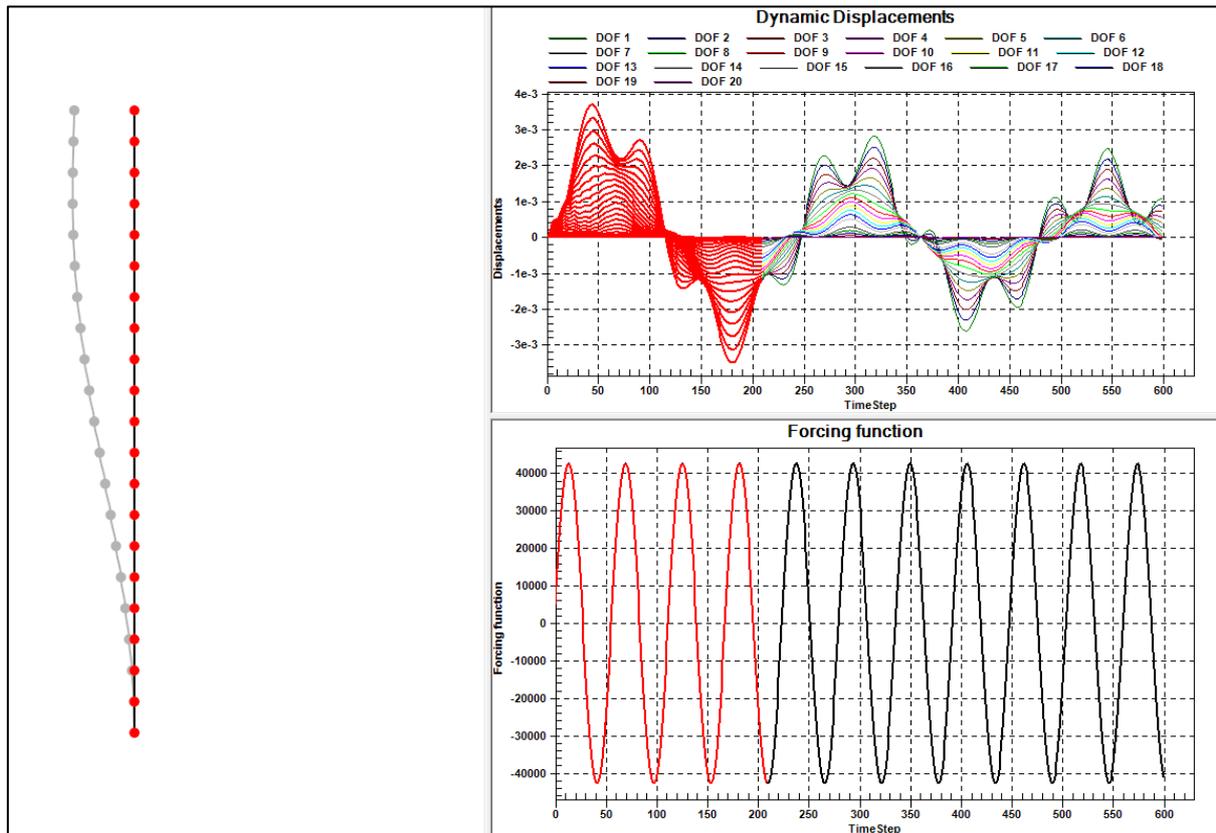
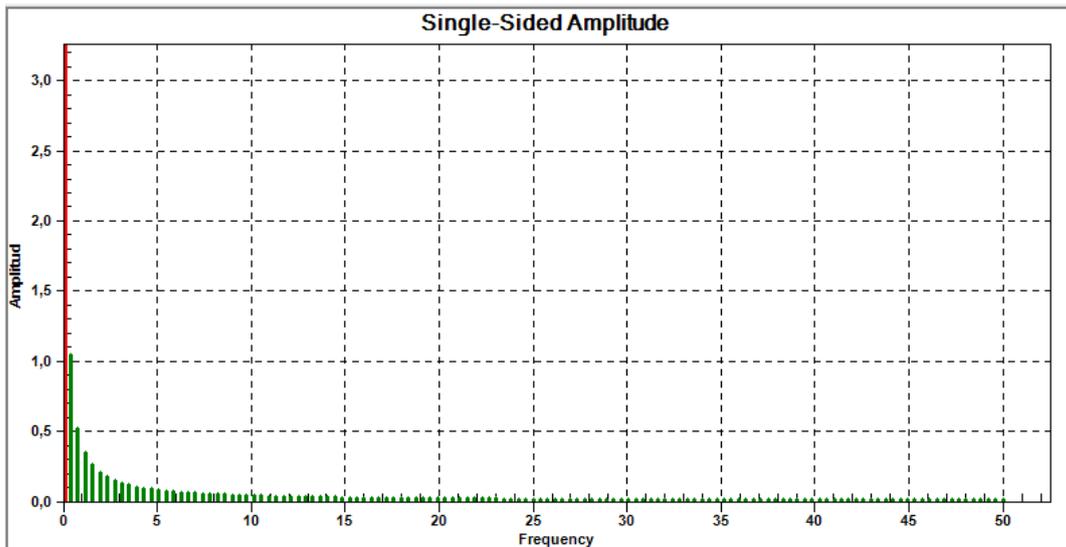


Figura 8. 22- Resposta Dinâmica para frequência de excitação igual abaixo de  $\omega$  e  $m_1$  muito elevada..

### 8.2.5. RESPOSTA DINÂMICA AO TERREMOTO

O sinal para a análise da resposta dinâmica ao terremoto foi gerado no software LAS através de dados de um acelerograma sintético, a Figura 8.23 apresenta o espectro de amplitude do sinal gerado. Foram aplicadas as forças inerciais agindo nos nós dos modelos criados, onde se concentram as massas.

A análise foi feita utilizando 20 elementos viga no eixo principal da plataforma e com dois modelos de decks diferentes. Os modelos 1 e 2 do item 8.2.3. Podemos observar respostas diferentes quando variado os modelos. Isso ocorre, pois existe influência do deck na resposta dinâmica da estrutura. O Modelo 2 sofre mais influência dos efeitos de rotação do deck. As frequências próprias e a respostas dinâmica obtidas são apresentadas na tabela 8.5.



**Figura 8. 23** – Espectro de resposta dos deslocamentos

Pode-se observar na tabela 8.5 que as frequências próprias mais altas tem uma variação maior quando comparados os dois modelos. As Figuras 8.24 e 8.25 mostram a resposta dinâmica para o Modelo 1 e 2 respectivamente. Pode-se observar que houve variação da resposta, sendo os picos de amplitude ocorre em momentos diferentes e a plataforma vibra de maneira diferente nos casos em questão.

<b>Modelo1(rad/s)</b>	<b>Modelo 2 (rad/s)</b>
1,403	1,462
8,726	8,683
24,226	23,123
46,966	40,226
76,635	56,998

**Tabela 8. 5** – Frequências Próprias para Modelo 1 e 2 obtidas no software LAS

- Resposta Dinâmica- Modelo 1

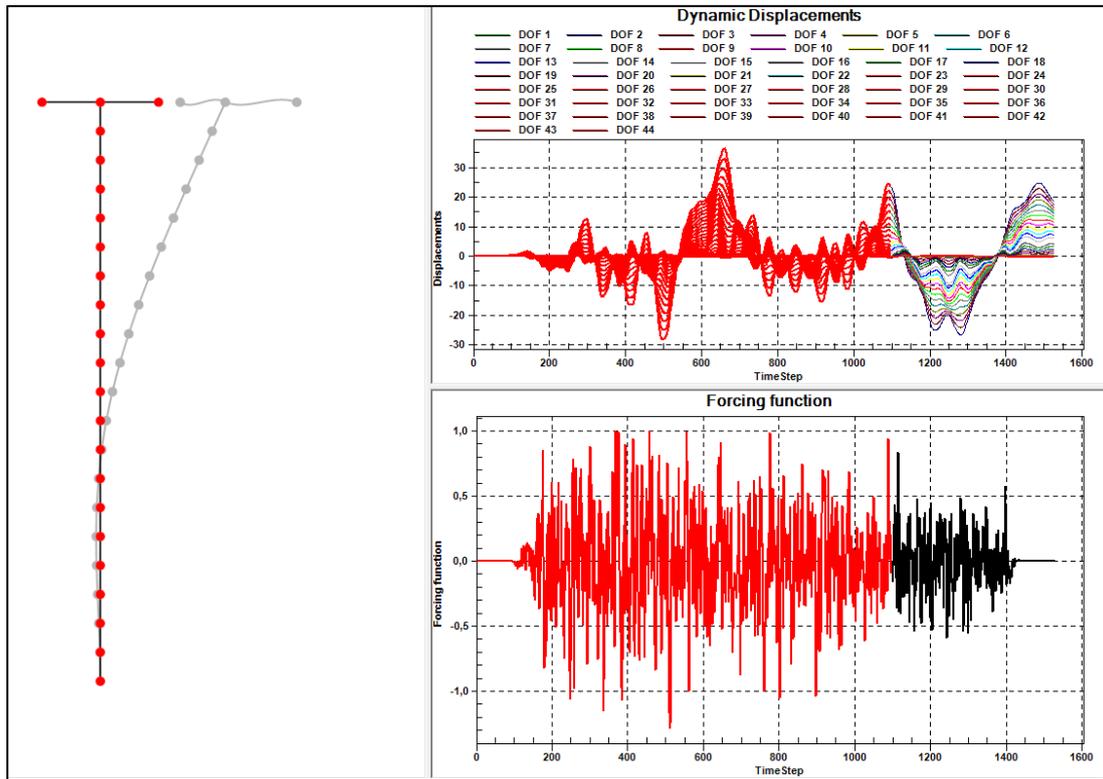


Figura 8. 24- Resposta Dinâmica para Terremoto para Modelo 1.

- Resposta Dinâmica - Modelo 2

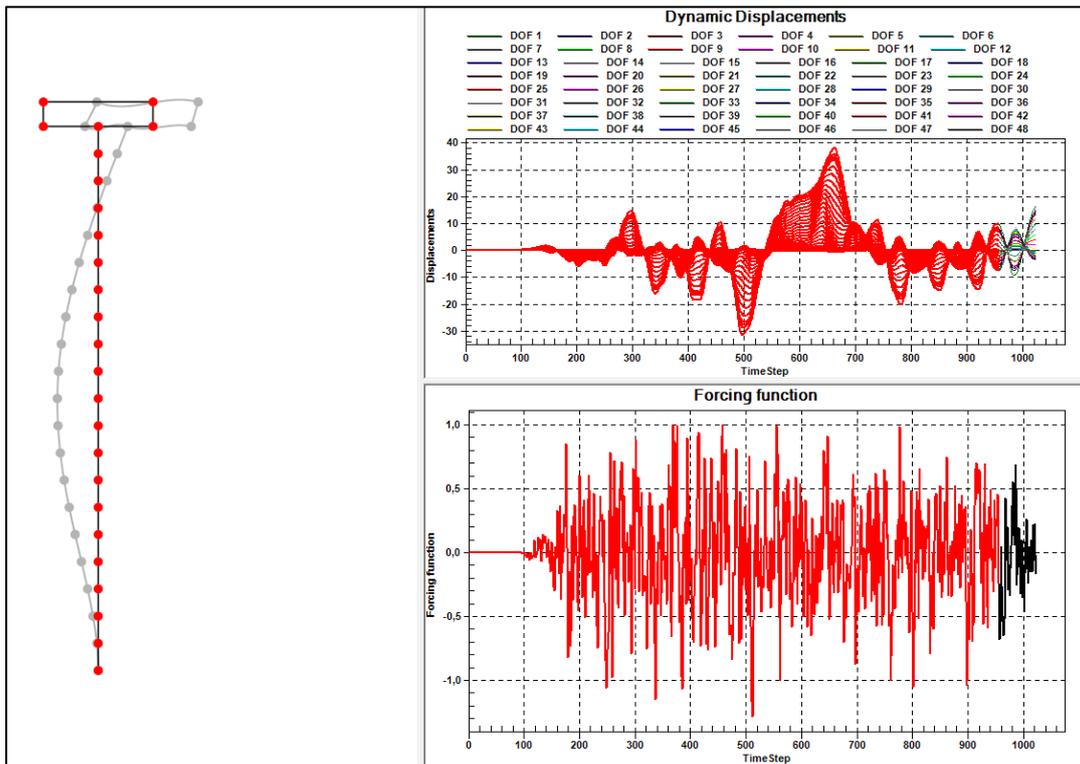


Figura 8. 25- Resposta Dinâmica para Terremoto para Modelo 2.

## **9. PERSPECTIVAS FUTURAS**

Para análise futuras é possível considerar solicitações oceânicas como correntes marinhas e cargas de vento. A análise de forças exercidas pelo fluido feita neste trabalho envolveu um regime permanente e a não consideração do deslocamento do fluido. É possível, no entanto, fazer uma análise fluido-estrutura mais aprofundada, além de avaliar as frequências de liberação de vórtices e seus efeitos ao longo do tempo.

Pode-se considerar, posteriormente, uma estrutura em três dimensões e esforços de torção atuantes. Além disso, considerar várias hastes de sustentação contraventadas ou não.

Para o aprofundamento do estudo de vibração em altas frequências pode-se considerar o fenômeno da fadiga e suas implicações na resistência e durabilidade da estrutura. Neste trabalho não foi abordado a não linearidade física presentes em regimes plásticos. Consideração que pode feita em outros trabalhos.

Com o objetivo de se fazer uma análise mais realista em relação aos sismos, futuramente, é possível considerar no cálculo da resposta no tempo da estrutura devido o movimento da base a interação entre o solo e estrutura..

## 10. CONCLUSÃO

A partir da análise dos resultados e dos estudos desenvolvidos, pode-se fazer diversas observações claramente relevantes para a continuação desse estudo, além de conclusões que ainda não haviam sido documentadas em relação ao estudo de dinâmica das estruturas. Como a formulação das frequências e modos próprios para modelo de plataforma em questão através da teoria de dinâmica das estruturas com parâmetros distribuídos.

Foi comprovada a aplicabilidade da equação de Morison, já consagrada na literatura, para a obtenção de forças aplicadas geradas por ondas, como demonstrado nos resultados iniciais. Além disso, a teoria de ondas de Airy representou uma ferramenta simples e que pode ser aplicada sem dificuldades para a obtenção das equações cinemáticas da onda e posterior aplicação na equação de Morison.

Concluiu-se com esse trabalho que a massa do deck de uma plataforma fixa tem influência direta nas frequências naturais e conseqüentemente nos modos de vibração. Sendo que o aumento da massa diminuiu consideravelmente as primeiras frequências naturais do sistema. Foi observado, também, que a inércia de rotação devido ao giro da massa do deck não influencia a primeira frequência, porém tem impacto significativo nas frequências mais altas.

A variação da geometria do Deck e suas condições de deslocabilidade mostraram uma interferência direta nas frequências mais altas da estrutura. Sendo que efeito de rotação do Deck gerou uma diminuição de tais frequências. Entretanto, com aumento da sua rigidez através de barras transversais, formando uma treliça, podemos perceber que as frequências voltam a subir, se aproximando novamente de uma massa concentrada.

Analisando a resposta dinâmica da estrutura submetida às forças das ondas pode-se concluir que é de extrema importância se considerar o amortecimento adequado da estrutura. Ondas que incidem com frequências semelhantes as frequências naturais do sistema podem fazer a estrutura entrar em ressonância e conseqüentemente provocar o aumento indeterminado dos deslocamentos transversais e das tensões internas. Finalmente, foi possível observar que a resposta dinâmica da estrutura ao sismo foi diferente quando variado a geometria do Deck para uma mesma massa equivalente. Isso ocorreu, pois o efeito de rotação do Deck influenciou os modos de vibração da plataforma.

## 11. BIBLIOGRAFIA

- [1] CHAKRABARTI, S. K. **Advanced series on ocean engineering v. 20: The Theory and Practice of Hydrodynamics and Vibration**. Tradução livre do autor. World Scientific: Cingapura, 2002.
- [2] CHEMTECH. **Curso Web OGM: Módulo 1: Apostila teórica offshore**. Maratona nacional Chemtech de engenharia, 2011.
- [3] CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. 3.ed. Computers & Structures, Inc. Berkeley, California, USA, 1995.
- [4] HARITOS, N. **Introduction to the analysis and design of offshore structures: An overview**. Tradução livre do autor. Australia: eJSE Special Issue: Loading on Structures, 2007.
- [5] MASON, Jayme. **Obras portuárias**. Rio de Janeiro: Elsevier. 1981.
- [6] PAUTRE, Patrick. **Dynamique de structures**. 1.ed. Application aux ouvrages de genie civil. Hermes & Science, Paris, França, 2005.
- [7] PEDROSO, L. J. **Alguns aspectos da interação fluido-estrutura em estruturas offshore**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1982, 340p. Tese (Mestre em estruturas), Programa de engenharia civil, UFRJ, Rio de Janeiro 1982.
- [8] PEDROSO, L.J. **Introdução a Dinâmica das Estruturas**. Publicação didática (Apostila interna), UnB-FT/ENC, Setembro 1998.
- [9] LEGER, P. E RICLES J.M. **Fatigue Reliability of Offshore Structures**. Proceedings of the 7th International Symposium on Engineering held at COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro 1989.
- [10] FERREIRA, J. L. **Um Estudo de Ações Dinâmicas em Plataformas Offshore Utilizando Dinâmica dos Fluidos Computacional**. Monografia de Projeto Final, UnB-FT/ENC, Outubro 2012.
- [11] CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures**. Theory and Applications to Earthquake Engineering. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J.,2001.
- [12] CARNEIRO, D. L. **Análise de Vibrações Induzidas por Vórtices em Estruturas Offshore Utilizando Modelos Numéricos Tridimensionais no Domínio do Tempo**, Rio de Janeiro 2007.
- [13] CORBANI, S. **Análise Dinâmica Elasto-Plástica de Estruturas Metálicas Sujeitas a Excitação Aleatória de Sismos**, Dissertação de Mestrado, São Paulo 2006.
- [14] MACHADO, Rômulo; SILVA, Marcos Egydio. **Geologia Geral. Sismicidade no Brasil**. 8ª Edição. São Paulo: Editora Nacional. 1980
- [15] ELLWANGER, G. B., LIMA, A. L., **Tópicos Básicos de Hidrodinâmica Aplicados a Engenharia Offshore**. Apostila de curso, COPPE/UFRJ, 2007.

[16] MUNSON. B.R. **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. Vol 1, Tradução da 4ed americana. 2004.

[17] PEDROSO, L. J. " **Dinâmica das Estruturas**". In: *Notas de Curso e Apostila Didática*. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil. PECC, Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE), Universidade de Brasília, Brasil (2005).

# ANEXOS

# A. REVISÃO DE HIDRODINÂMICA

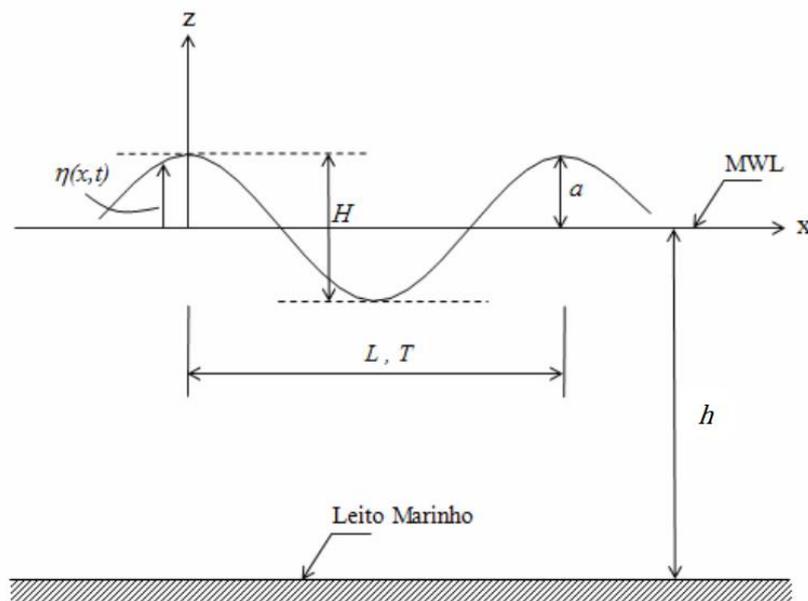
## 12. REVISÃO DE HIDRODINÂMICA

### 12.1. TEORIA LINEAR DE ONDAS

A Teoria Linear de Airy está baseada na premissa de que a altura de onda é pequena comparada com o comprimento de onda. Esta hipótese permite que o problema seja linearizado, desprezando-se os termos de segunda ordem e de ordens superiores. [ELLWANGER e LIMA, 2007]

Quando um grupo de ondas consiste em várias ondas em sequência, umas idênticas às outras, estas são denominadas ondas periódicas ou ondas regulares. Diferentemente das ondas reais, grande parte das teorias de onda assume que as ondas são periódicas e uniformes, possuindo um período  $T$  e uma altura  $H$ .

Tal simplificação é comumente utilizada para estimar carregamentos em estruturas offshore que na realidade são submetidas à ação de ondas irregulares.



**Figura12. 1-** Definição dos parâmetros da onda

Principais características de uma onda regular:

**Período (T)** = O tempo necessário, geralmente em segundos, para que sucessivas cristas de ondas cruzem um ponto estacionário.

**Altura (H)** = Distância vertical entre a crista da onda e o cavado, ou seja, entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo.

**Elevação da superfície do mar ( $\eta$ )** = Altura da superfície do mar, medida acima do nível médio MWL (*Mean Water Level*).

**Lâmina d'água (h)** = Profundidade do mar a partir da elevação média do mar (MWL) até o leito marinho.

O estudo é baseado na teoria potencial, e assim, admitem-se as seguintes considerações:

- O fluido é homogêneo e incompressível (densidade do fluido constante);
- O movimento é irrotacional;
- A pressão na superfície livre é uniforme e constante;
- As tensões na superfície podem ser negligenciadas;
- O fluido é ideal (sem viscosidade);
- O fundo é horizontal, fixo e impermeável, o que implica que a velocidade no fundo é zero;
- As ondas são de pequena amplitude (em relação ao comprimento de onda  $\lambda$ ), e sua forma invariável no tempo e no espaço;
- As ondas são planas ou de cristas longas (bidimensionais).

Para que a teoria tenha uma formulação correta é necessário fazer considerações de simplificação que levem a bons resultados e facilite a modelagem do sistema fluido-estrutura.

O movimento do fluido é descrito utilizando o método de Euler, portanto a velocidade de uma partícula depende de sua posição no campo de escoamento (coordenadas cartesianas  $x, y, z$ ) e do instante em que ela ocupa esta posição (instante  $t$ ).

Assume-se que o escoamento seja contínuo em toda região considerada, ou seja, sempre mantendo suas propriedades em cada ponto do espaço, sem se preocupar com o comportamento individual de suas moléculas. A continuidade do escoamento faz com que a massa do fluido seja conservada para todo o tempo ( $t$ ).

Em fluidos como Água e ar, admite-se a possibilidade de desprezar os efeitos da viscosidade (ou seja, considerar nulas as tensões de cisalhamento). Os campos de escoamento que apresentam tensões de cisalhamento desprezíveis são denominados escoamentos invíscidos, não viscosos ou sem atrito. [MUNSON, 2004]

Considerando o escoamento como irrotacional, os componentes do vetor velocidade podem ser expressos a partir de uma função escalar  $\phi(x, y, z, t)$ , chamada de potencial de velocidade, como se segue:

**Eq. 12.1**

$$V = \nabla\phi \rightarrow u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

de modo que a velocidade num escoamento irrotacional pode ser expressa como gradiente da função escalar  $\phi$  (potencial de velocidade) e então a velocidade pode ser utilizada para descrever o escoamento. [MUNSON, 2004]

A fim de aplicar o efeito do fluido na estrutura, a dinâmica da partícula fluida deve ser conhecida. A equação de Bernoulli fornece a relação da pressão do fluido sobre a estrutura baseado na função potencial do escoamento em relação ao tempo. Para este propósito, é examinado a equação de Navier-Stokes e aplicado a condição de escoamento irrotacional e invíscido. Para um modelo bidimensional podemos utilizar a equação Bernoulli como:

**Eq. 12.2**

$$\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + p + \rho gy + \frac{1}{2}\rho \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right] = Q$$

onde  $p$  é a pressão dinâmica,  $\rho$  é a densidade do fluido, e  $Q$  é a constante Bernoulli.

As ondas de superfície num meio fluido podem ser progressivas e estacionárias. As ondas progressivas correspondem a uma perturbação no fluido que se desloca com uma velocidade denominada “celeridade” da onda, ao passo que, nas ondas estacionárias, ocorre a presença de perturbações periódicas de oscilação da massa fluida. As ondas estacionárias provêm em geral da superposição de duas ondas progressivas, uma incidente e outra refletida. [MASON, 1981]

## 12.2. ONDAS PROGRESSIVAS

Segundo Mason [1981], uma onda cria um movimento de superfície livre. A elevação desta superfície livre varia com o tempo e espaço. Se a forma da onda, a partir do nível de repouso, no qual se implantou o sistema de coordenadas  $x$ - $y$ , é senoidal, então o perfil da superfície livre é dado por:

**Eq. 12.3**

$$\eta(x, t) = a \text{ sen}(kx - \omega t)$$

na qual  $A$  é a amplitude da onda,  $k$  o número da onda e  $\omega$ , a sua frequência angular.

Na Figura 12.1, mostrada anteriormente, estão representadas as características e notações referentes a uma onda progressiva senoidal.

O número da onda  $k$  e a frequência angular  $\omega$  são relacionados com o comprimento da onda  $L$  e o período  $T$ , respectivamente, pelas relações:

**Eq. 12.4**

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

**Eq. 12.5**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

A Eq. 12.3 mostra que a onda considerada é uma perturbação da superfície do fluido que depende da abscissa  $x$  e do tempo  $t$ . Se um ponto virtual é identificado sobre a superfície livre, e se move com a onda, tal que sua posição relativa à onda permanece fixa, então  $(kx - \omega t)$  é constante. Derivando esta expressão em relação ao tempo, e observando as equações (12.4) e (12.5), obtém-se:

**Eq. 12.6**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} = C$$

Portanto este ponto virtual se move na direção  $x$  com a velocidade de propagação da onda, denominada “celeridade”  $C$  da onda.

Esta descrição da superfície livre do escoamento encontra-se em duas dimensões – horizontal (x) e vertical (y). É delimitada pela superfície livre no topo e pelo fundo do mar a uma profundidade igual a h. [CHAKRABARTI, 2002]

### 12.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Segundo **Pedroso** (1982), para tornar completa a formulação matemática do problema, é necessário especificar as condições de contorno sobre a fronteira  $\Omega$  do domínio de escoamento D, para todo instante t.

Seja:

**Eq. 12.7**

$$S(x, y, z, t) = 0$$

A equação acima é a equação da superfície de um contorno impermeável genérica. A condição que expressa o fato do fluido permanecer sobre o contorno é dita condição cinemática da superfície do contorno:

**Eq. 12.8**

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = 0$$

**Eq.12.9**

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla\phi \times \nabla S = 0$$

Para se obter a equação do potencial escalar, primeiramente deve-se observar as condições de contorno a que ele está submetido:

- Condição Cinemática no Fundo:

A velocidade do líquido na direção perpendicular ao fundo plano é nula.

**Eq. 12.10**

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \text{ para } y = -h$$

- Condição Cinemática na Superfície Livre:

A forma da superfície livre será:

**Eq. 12.11**

$$S = \eta(x, t) - y = 0 \text{ ou } y = \eta(x, t)$$

Pelas condições cinemáticas, a partícula de fluido e a superfície tem a propriedade de satisfazer a equação 12.11 para qualquer tempo:

**Eq. 12.12**

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

Levando a equação 12.11 na equação 12.12, tem-se:

**Eq. 12.13**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Então, a equação da superfície livre será:

**Eq. 12.14**

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad y = \eta(x, t)$$

que é a condição cinemática da superfície livre.

- Condição Dinâmica da Superfície Livre:

Para a avaliação da Eq. 12.14, uma condição auxiliar deve ser procurada. E será expressa pelo acoplamento das condições dinâmicas e cinemáticas. A condição dinâmica descreve o campo de pressão da superfície livre na elevação  $\eta$ . Esta é expressa pela igualdade de pressões na superfície do fluido e a pressão atmosférica ( $p = p_{atm}$ ). É obtida aplicando o teorema de Bernoulli. Assumindo que o escoamento é irrotacional, por meio da Eq. 12.2, tem-se:

**Eq. 12.15**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g\eta + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad y = \eta(x, t)$$

#### 11.4. RESOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO

A Eq. 12.14 e Eq. 12.15 apresentam incógnitas  $\phi$  e  $\eta$ , além de possuírem termos não lineares. Utilizando hipótese de movimento lento e fundo pouco inclinado ( $\frac{\partial \eta}{\partial x} \rightarrow 0$ ) é possível eliminar a variável  $\eta$ .

A Eq. 12.15 ficará:

**Eq. 12.16**

$$\eta = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}, y = 0$$

Para movimentos lentos  $v_x \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t}$ ,  $y = \eta$

Expandindo em série de Taylor para pequenas perturbações ( $\eta$  e/ou  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  pequenos) a Eq. 12.15 linearizada é:

**Eq. 12.17**

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, y = 0$$

Segundo **Pedroso** (1982), seja o problema de valor de contorno definido a seguir, onde a função potencial  $\phi$  deve atender às seguintes condições:

Escoamento Potencial:

**Eq. 12.18**

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Equação de Fundo Rígido:

**Eq. 12.19**

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = -h$$

Condição de superfície:

**Eq. 12.20**

$$g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, y = 0$$

Assim, utilizando o Método de Separação de Variáveis, chega-se à:

**Eq. 12.21**

$$\phi(x, y, t) = X(x) + Y(y) + T(t) = X.Y.T$$

onde:

**Eq. 12.22**

$$Y(y) = A_3 \cosh[k(y + h)]$$

**Eq. 12.23**

$$T(t) = A_4 e^{i\omega t}$$

**Eq. 12.24**

$$X(x) = A_7 e^{i\omega t}$$

Assim, substituindo as Eq. 12.22, Eq. 12.23 e Eq. 12.24 na Eq. 12.21 e resolvendo-a, chega-se a seguinte solução final:

**Eq. 12.25**

$$\phi(x, y, t) = \frac{ag \cosh[k(y + h)] \cos(kx - \omega t)}{\omega \cosh(kh)}$$

sendo esta última equação, a equação da velocidade potencial, que representa uma onda progressiva se movendo na direção ( $x$ ) positiva.

Levando-se a Eq. 12.25 em Eq. 12.16 obtém-se a equação do perfil de onda:

**Eq. 12.26**

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = A \operatorname{sen}(kx - \omega t), y = 0$$

periódica em  $x$  e  $t$ .

Assim, a crista da onda ocorre no local onde  $x = 0$  no tempo  $t = 0$ . Se a Eq.12.25 for substituída na Eq. 12.17, então se obtém para a velocidade de onda:

**Eq. 12.27**

$$C^2 = \frac{g}{k} \operatorname{tgh} kh$$

ou seja:

Eq. 12.28

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi h}{L}\right)}$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $h$ , a profundidade do fundo.

E, substituindo  $C = \frac{L}{T}$  na Eq. 3.27 deduz-se que:

Eq. 12.29

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$$

Uma vez conhecidos o período da onda  $T$  e a profundidade  $h$  da água, é possível determinar o comprimento de onda  $L$  por meio da Eq. 12.29 resolvendo-a por tentativas.

## 12.5. DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS CINEMÁTICOS (VELOCIDADES E ACELERAÇÕES)

Segundo **Pedroso** (1982), a partir da equação de velocidades potencial podemos obter as equações paramétricas das componentes horizontal e vertical da velocidade das partículas, que são respectivamente:

Eq. 12.30

$$v_x = \frac{a \cdot \omega \cdot \cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Eq. 12.31

$$v_y = \frac{a \cdot \omega \cdot \operatorname{senh} k(h+y)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

As equações paramétricas das componentes horizontal e vertical das acelerações das partículas são respectivamente:

Eq. 12.32

$$\dot{v}_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{a \cdot \omega^2 \cosh k(h+y)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

Eq. 12.33

$$\dot{v}_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{a \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{senh} k(h+y)}{\cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

## 12.6. EQUAÇÕES DEGENERADAS, EM FUNÇÃO DA PROFUNDIDADE RELATIVA

De acordo com a variação do parâmetro  $kh$ , que determina o comportamento das funções hiperbólicas e que representa uma condição geométrica, relacionando as dimensões da onda com a profundidade, podem-se classificar as ondas em três tipos: águas profundas ( $kh \gg 1$ ), águas rasas ( $kh \ll 1$ ), e águas intermediárias ( $kh \approx 1$ ). [PEDROSO, 1982]

Aqui será apresentado somente o caso de ondas em águas profundas, devido à proposta deste trabalho.

Estas classificações podem, também, ser caracterizadas através da relação altura da lâmina d'água  $h$  e comprimento da onda  $L$ , relação denominada profundidade relativa ( $h/L$ ).

Portanto para águas profundas  $kh \gg 1$  ou  $\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$ . Logo  $tgh(kh) \cong 1$ .

A Eq. 12.29 se reduz a:

$$L = L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 1,56T^2$$

Eq. 12.34

e a Eq. 12.28 a:

$$C = C_0 = \frac{gT}{2\pi}$$

Eq. 12.35

Por outro lado, como:

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{\cosh k(h+y)}{\sinh(kh)} = e^{ky}$$

Eq. 12.36

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{c = \sinh k(h+y)}{\sinh(kh)} = e^{ky}$$

Eq. 12.37

têm-se as equações simplificadas:

$$v_x = -a\omega e^{k_0 y} \sin(kx - \omega t)$$

Eq. 12.38

$$v_y = a\omega e^{k_0 y} \cos(kx - \omega t)$$

Eq. 12.39

Eq. 12.40

$$\dot{v}_x = a\omega^2 e^{k_0 y} \cos(kx - \omega t)$$

Eq. 12.41

$$\dot{v}_y = a\omega^2 e^{k_0 y} \sin(kx - \omega t)$$

Neste caso as órbitas das partículas são circunferências de raios decrescentes, uma vez que a coordenada  $y$  é negativa no interior do fluido. O raio das trajetórias orbitais decresce rapidamente, tornando-se desprezível a uma profundidade da ordem de  $L/2$ , a partir do qual o fluido pode ser considerado em repouso. Esta situação está esquematizada na Figura 12.2 abaixo:

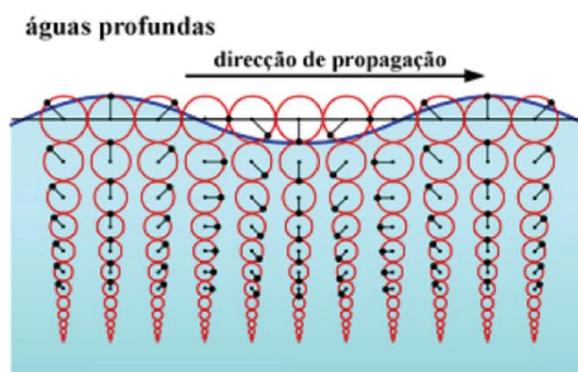


Figura12. 2- Orbits das partículas nas ondas (Fonte: HARITOS, 2007)

## 11.7. PRESSÕES DEVIDO AS ONDAS PROGRESSIVAS

A definição dos diagramas de pressão causados pela passagem de ondas progressivas é importante para a determinação de esforços em elementos de obras marítimas vazadas, como é o caso de plataformas sobre estacas [MASON, 1981].

Podemos conjecturar, intuitivamente, que a pressão no interior do fluido, por ocasião da passagem de uma onda, é constituída de duas parcelas, uma delas referente à pressão hidrostática de repouso e a outra referente à perturbação induzida pela passagem da onda.

Eq. 12.42

$$p(x, y, t) = -\rho \cdot g \cdot y + \delta p$$

Utilizando a equação de Bernoulli temos:

Eq. 12.43

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Aplicando a Eq. 12.25 a Eq. 12.43 resulta na seguinte expressão para as variações na pressão do líquido que ocorrem pela passagem da onda:

**Eq. 12.44**

$$\delta p = a \cdot \rho \cdot g \frac{\cosh[k(y + h)]}{\cosh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

ou

**Eq. 12.45**

$$\frac{\delta p}{\rho} = K_p \eta, \quad K_p = \frac{\cosh[k(y + h)]}{\cosh(kh)}$$

onde,  $K_p$  é um coeficiente de pressão. A carga de pressão será de:

**Eq. 12.46**

$$\frac{p}{\rho} = K_p \eta - y$$

para  $y = 0$ , constata-se que:

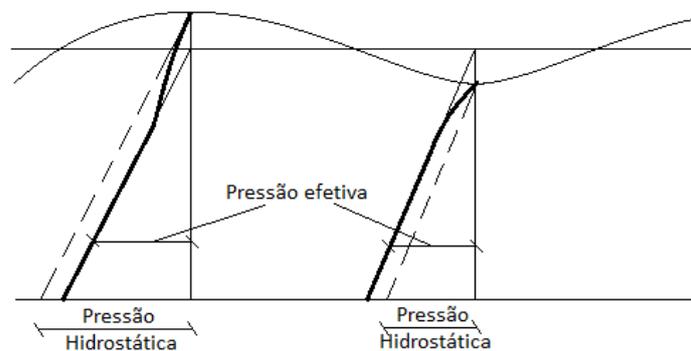
**Eq. 12.47**

$$K_p = 1, \quad \frac{p}{\rho} = \eta$$

para  $z = -h$ :

**Eq. 12.48**

$$K_p = \frac{1}{\cosh(kh)}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\eta}{\cosh(kh)} + h$$



**Figura12. 3**-Pressões devido às ondas progressivas

(Fonte: Desenho do PF Juliano Ferreira, inspirado em MASON, 1981)

Por ocasião da passagem de uma crista, as partículas encontram-se no ponto mais alto da trajetória e sua força centrífuga é dirigida para cima, aliviando a pressão hidrostática, ao passo que, na passagem de uma depressão, as partículas encontram-se no ponto mais baixo da trajetória, aumentando a pressão hidrostática. [MASON, 1981]

Se for desejado conhecer a pressão devida apenas ao efeito dinâmico da onda, bastam subtrair dos diagramas totais de pressão da Figura 12.3 os diagramas devido à pressão hidrostática.

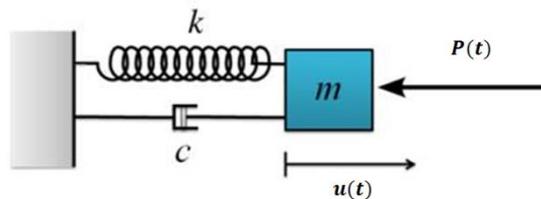
## B. REVISÃO DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

### 13. REVISÃO DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

#### 13.1. SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

#### 13.2. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Considerando um sistema massa-mola representada por um modelo, com a inércia de uma simples massa ( $m$ ) e a rigidez de uma mola ( $k$ ) e amortecedor ( $c$ ) Figura 5.1. Considera-se a massa se movendo na direção transversal (direção da força) e somente uma coordenada,  $u(t)$ , define sua posição. Deste modo, o modelo é descrito como um sistema de um grau de liberdade (SUGL); este simples modelo pode proporcionar resultados vantajosos em muitos casos práticos de engenharia, e ao mesmo tempo, um adequado modelo para uma avaliação inicial. [PAULTRE, 2005]



**Figura13. 1**-Sistema massa-mola amortecido com 1GL.

(Fonte: PAULTRE, 2005, adaptada pelo autor)

O movimento de desse sistema é descrito pelos seguintes parâmetros:

- ✓ o deslocamento da massa  $u(t)$ ;
- ✓ a velocidade da massa  $\dot{u}(t) = du(t)/dt$ ;
- ✓ a aceleração da massa  $\ddot{u}(t) = d^2u(t)/dt^2$ .

As forças que agem sobre a massa no instante  $t$  são força externa  $p(t)$ , força interna  $f_s(t)$ , a força de amortecimento  $f_D(t)$ , e a força de inércia  $f_I(t)$ . A força elástica e a força de amortecimento agem no sentido oposto ao deslocamento e a velocidade, que são positivos para a direita. A força de inércia age em oposição a aceleração do sistema que inicialmente é positiva para a direita. A todo instante  $t$ , a massa está em equilíbrio pelo princípio de d'Alembert. O equilíbrio dinâmico se apresenta como:

**Eq. 13.1**

$$f_I(t) + f_D(t) + f_s(t) = p(t)$$

onde:

**Eq. 13.2**

$$f_s(t) = ku(t)$$

**Eq. 13.3**

$$f_D(t) = c\dot{u}(t)$$

**Eq. 13.4**

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t)$$

Substituindo as Eq. 13.2, Eq. 13.3 e Eq. 13.4 na Eq. 13.1, obtemos equação do movimento da massa ou equação do equilíbrio dinâmico.

**Eq. 13.5**

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

### 12.3. REGIME LIVRE CONSERVATIVO (NÃO AMORTECIDO)

O regime livre conservativo é descrito pela solução da equação homogenia seguinte:

**Eq. 13.6**

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Considerando:  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , temos:

**Eq. 13.7**

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

Supondo condições iniciais  $u(0)$  e  $\dot{u}(0)$  em  $t_0 = 0$ , nós obtemos como solução:

**Eq. 13.8**

$$u(t) = u(0)\cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

O período e frequência próprios de um oscilador não amortecido é relacionado a pulsação natural  $\omega$  pela seguinte relação:

**Eq. 13.9**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} (s)$$

**Eq. 13.10**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ (Hz)}$$

#### 12.4. REGIME LIVRE DISSIPATIVO (AMORTECIDO)

A análise de vibração considerada até este ponto não incluiu os efeitos de atrito ou amortecimento do sistema, ou seja, não existia energia absorvida pelo sistema, e a amplitude de oscilação do deslocamento, tensões, entre outros, permaneciam constantes. Na verdade, todas as estruturas reais dissipam energia (conversão de energia cinética em calor) e a amplitude diminui do valor inicial. A taxa de absorção desta energia e o consequente decaimento da amplitude dependem de uma propriedade da estrutura chamada amortecimento. A energia absorvida ocorre devido ao atrito interno do material, devido aos efeitos de fricção nas vinculações, e também a dissipação no solo e água circundante. [PEDROSO, 1982]

A vibração é considerada dissipativa quando o amortecimento não é nulo, o que significa que  $c \neq 0$  na Eq. 13.5.

Considerando,  $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ , temos:

**Eq. 13.11**

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = 0$$

A resolução da equação característica da EDO nos dá duas raízes:

$$s_1 = -\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad s_2 = -\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Três tipos de movimento são possíveis dependendo da quantidade de amortecimento presente no sistema, ou dependendo do valor de  $\xi^2 - 1$ .

- 1) movimento oscilatório quando  $\xi < 1$ :  $s_1$  e  $s_2$  são complexos;
- 2) movimento não oscilatório quando  $\xi = 1$ :  $s_1$  e  $s_2$  são reais e iguais;
- 3) movimento não oscilatório quando  $\xi > 1$ :  $s_1$  e  $s_2$  são reais e diferentes.

A bifurcação entre um movimento oscilatório e um movimento não oscilatório corresponde a  $\xi = 1$ .

E o amortecimento crítico se apresenta como:

**Eq. 13.12**

$$c_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} = 2\sqrt{km}$$

e  $\xi = c/c_{cr}$  é a taxa de amortecimento crítico.

- Amortecimento subcrítico

O amortecimento subcrítico quando a taxa de amortecimento é inferior a um, as raízes da equação características são conjugados complexos:

$$s_1 = -\xi\omega + i\omega_D \quad s_2 = -\xi\omega - i\omega_D$$

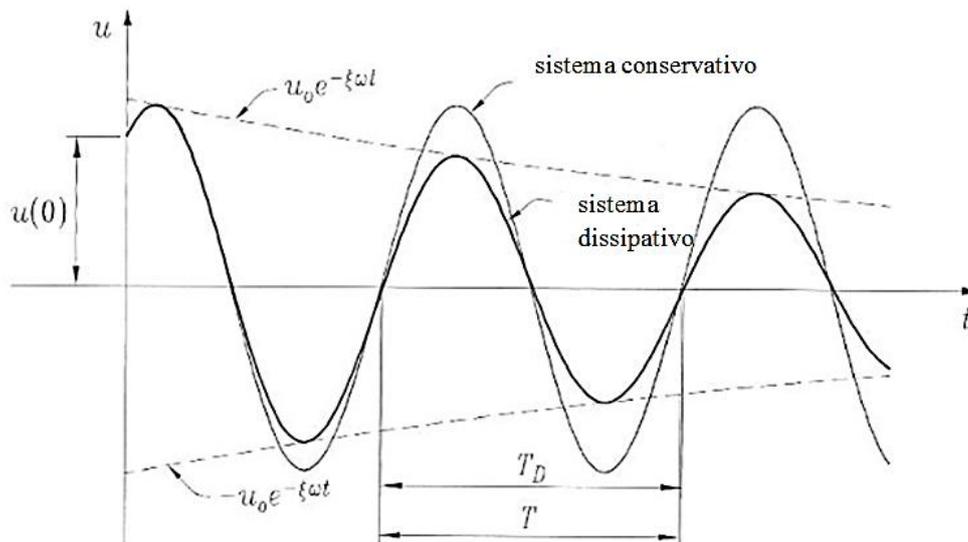
Sendo,  $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ , a pulsação própria amortecida.

A solução da equação do movimento (A), para as condições iniciais  $u(0)$  e  $\dot{u}(0)$ , se apresenta como:

**Eq. 13.13**

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left( u(0)\cos \omega_D t + \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D} \text{sen } \omega_D t \right)$$

A Figura 13.2 apresenta o movimento de um oscilador simples com amortecimento subcrítico.



**Figura13. 2**-movimento de um oscilador subamortecido

( Fonte: PAULTRE, 2005)

- Amortecimento crítico

Para o caso de amortecimento crítico a taxa de amortecimento é igual a um. Nesse caso:

$$s_1 = s_2 = -\omega$$

E solução da EDO é:

**Eq. 13.14**

$$u(t) = (u(0)(1 + \omega t) + \dot{u}(0)t) e^{-\omega t}$$

- Amortecimento supercrítico

No amortecimento supercrítico a taxa de amortecimento é maior que um. As raízes da equação características são reais e distintas:

$$s_1 = -\xi\omega + \hat{\omega}, \quad s_2 = -\xi\omega - \hat{\omega}$$

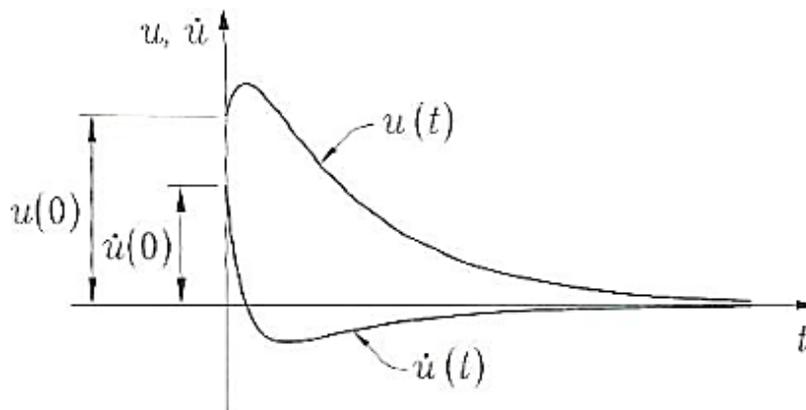
Sendo,  $\hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$ .

A solução da EDO é:

**Eq. 13.15**

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left( u(0) \cosh \hat{\omega}t + \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\hat{\omega}} \sinh \hat{\omega}t \right)$$

A Figura 13.3 apresenta o deslocamento e a velocidade de um oscilador elementar com amortecimento supercrítico.



**Figura 13.3** - Deslocamento e velocidade de um oscilador elementar superamortecido.

(Fonte : PAULTRE, 2005)

### 13.5. REGIME FORÇADO DISSIPATIVO (AMORTECIDO)

Para o regime forçado a equação do movimento se torna:

**Eq. 13.16**

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega}t$$

A solução completa, neste caso, é a soma da parcela devido a resposta em regime dissipativo livre (solução homogenia) e uma solução particular devido ao carregamento dinâmico aplicado.

**Eq. 13.17**

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} ((1 - \beta^2) \cos \bar{\omega}t - 2\xi\beta \sin \bar{\omega}t)$$

o primeiro termo corresponde ao regime transitório que desaparece rapidamente devido ao termo  $e^{-\xi\omega t}$  e o segundo termo corresponde ao regime permanente. As constantes A e B da parte transitória da resposta total podem ser definidas pelas condições iniciais. Sendo  $u(0)$  o deslocamento inicial e  $\dot{u}(0)$  a velocidade inicial. As constantes A e B valem:

**Eq. 13.18**

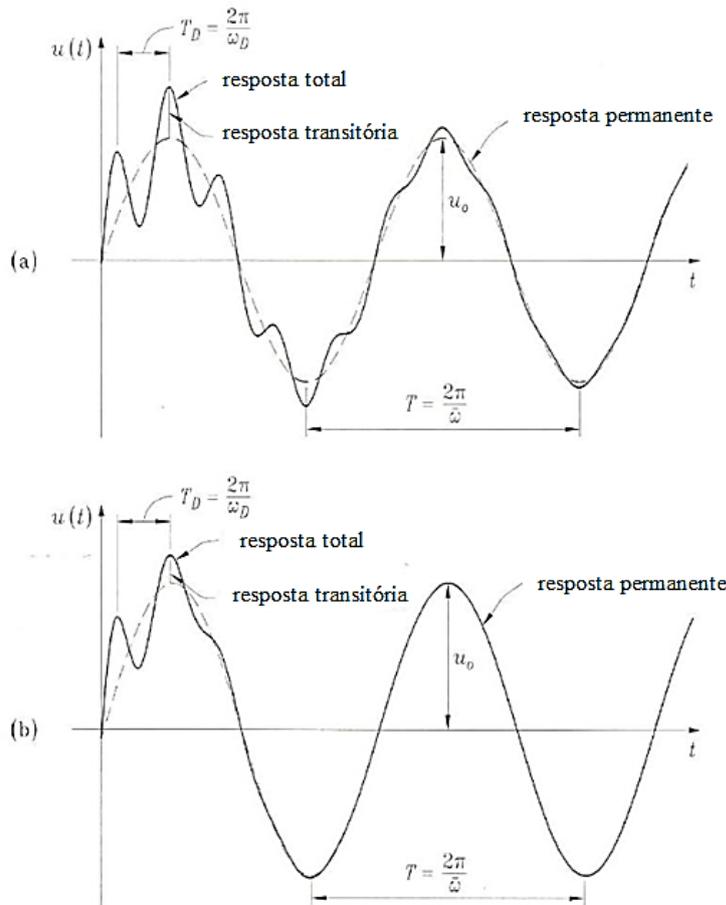
$$A = \frac{p_0}{k} \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} + u(0)$$

**Eq. 13.19**

$$B = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{\omega_D} \left( \frac{2\xi^2\beta - \beta(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right) + \frac{\dot{u}(0) + u(0)\omega\xi}{\omega_D}$$

Onde,  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$  é a pulsação relativa.  $\bar{\omega}$  é a frequência angular da carga aplicada.

Apesar do primeiro termo da Eq. 13.17 ser dissipado rapidamente é importante observar que o deslocamento máximo pode acontecer antes de se estabelecer o regime permanente. A Figura 13.4 mostra a resposta total de dois sistemas elementares com taxas de amortecimento ( $\xi$ ) diferentes.



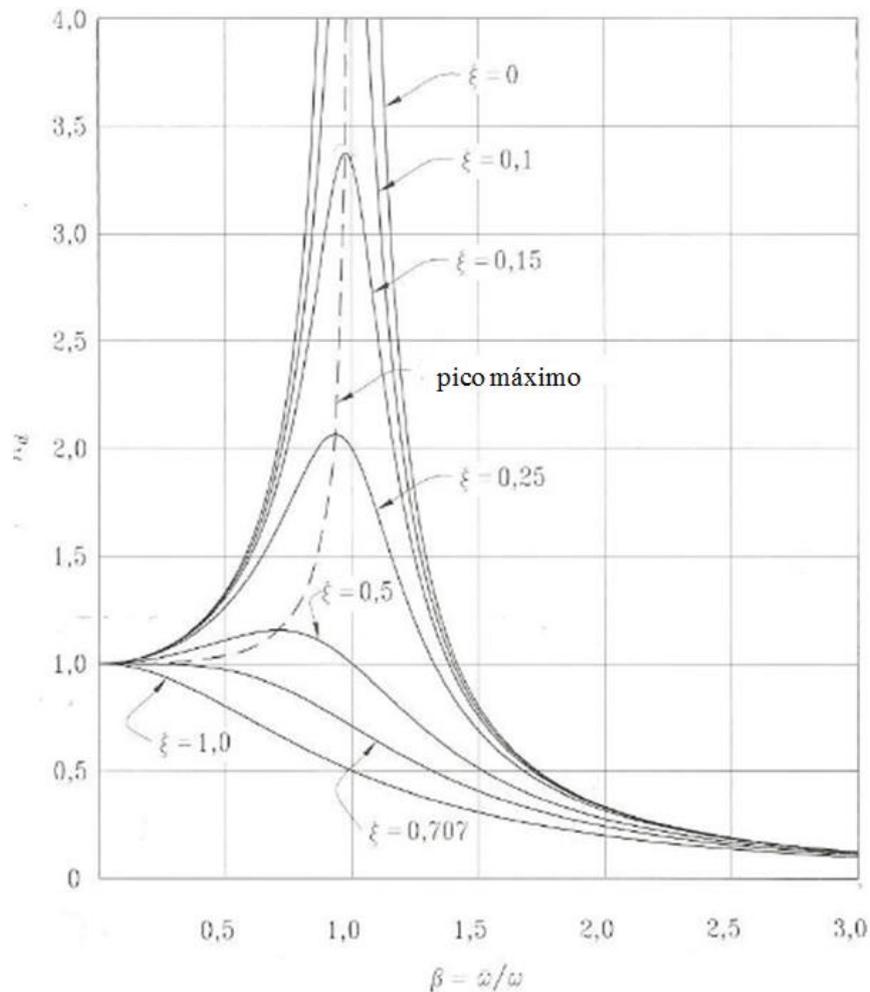
**Figura13. 4**-Resposta de um sistema amortecido com uma força harmônica: (a)  $\bar{\omega}/\omega = 0,2$ ;  $\xi = 0,05$ ; (b)  $\bar{\omega}/\omega = 0,2$ ;  $\xi = 0,15$ .(Fonte : PAULTRE, 2005)

A amplitude da resposta pode ser representada adimensionalmente pela definição de um fator de amplificação dinâmica (FAD), sendo ele definido como a razão da amplitude de vibração de estado constante ( $u_0$ ) pela deflexão estática  $p_0/k$ , que seria produzida pela amplitude da força periódica  $p_0$ :

**Eq. 13.20**

$$FAD, R_d = \frac{u_0}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2}}$$

O FAD é colocado na Figura 13.5 versus a razão de frequência, para vários valores do fator de amortecimento. Pode ser visto, a partir deste gráfico, que a ampliação da amplitude aumenta na medida em que o fator de amortecimento diminui. A ressonância obviamente ocorre apenas quando a pulsação relativa é igual a 1. [PAULTRE, 2005]

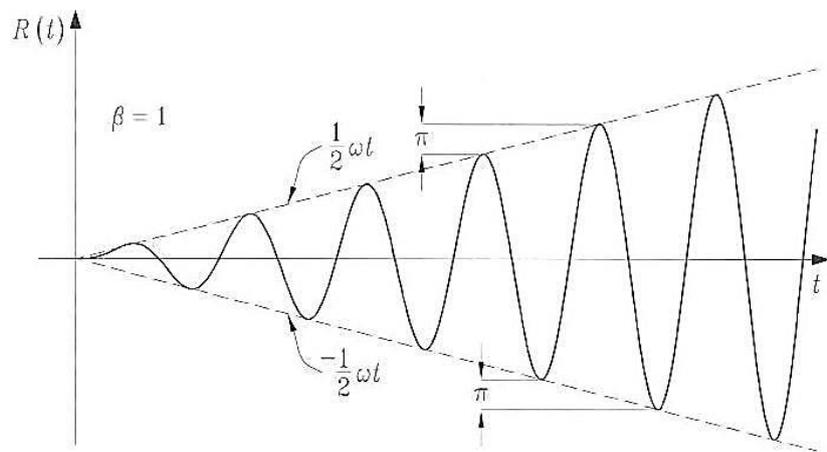


**Figura13. 5-**Variação da amplitude dinâmica,  $R_d$  em função da frequência relativa  $\beta$  e da taxa de amortecimento  $\xi$

(Fonte: PAULTRE, 2005)

Quando  $\beta = 1$ , a frequência forçada e a natural coincidem, sendo isto chamado de ressonância, Figura 13.6. As oscilações resultantes podem fazer com que a estrutura se rompa. Esta é a área da curva da resposta de maior interesse nos problemas dinâmicos. Na ressonância a amplitude é governada pelo amortecimento e se este tende a zero ( $\xi \rightarrow 0$ ), então teoricamente uma amplitude infinita é atingida.

Para  $\beta \gg 1$ , a resposta é reduzida, e controlada pela massa com maior intensidade que a rigidez e o amortecimento. A Figura 30 mostra estas regiões características do comportamento da resposta. O crescimento do amortecimento reduz as amplitudes para todas as frequências forçadas. O pico da resposta ocorre para  $\beta = 1$  para baixo amortecimento. Mas para amortecimentos muito altos ( $\beta = 0,5$  e  $1,0$ ) o pico ocorre para baixas frequências forçadas (isto é, para  $\beta < 1$ ).



**Figura13. 6-**Variação do fator de resposta dinâmica  $R(t)$  em função do tempo na ressonância.

(Fonte: PAULTRE, 2005)

## 12.6. SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Inúmeros sistemas são descritos apenas como tendo um grau de liberdade. Porém em muitas situações de análise esta simplificação não se torna válida. Sendo assim, torna-se necessário empregar um modelo de sistema com múltiplos graus de liberdade (M.D.O.F). Ao se modelar um sistema como sendo (M.D.O.F), em vez de termos apenas uma frequência natural e um fator de amortecimento, haverá várias frequências naturais e fatores de amortecimento. No caso de vibrações livres, o sistema vibra como uma combinação de todas estas frequências naturais e não apenas em uma como no caso de sistema com 1 grau de liberdade. Além destes fatos, outra variável extremamente importante irá aparecer: os modos de vibrar (ou formas modais) de uma estrutura. Cada modo é associado diretamente com sua respectiva frequência natural e fator de amortecimento. [SILVA, 2008]

A proposição primária é dividir a estrutura em várias subestruturas, quanto maior a discretização, maior precisão no cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração. Na teoria, a distribuição completa de massas na estrutura, conduz a um número infinito de frequências naturais, todavia, somente as cinco primeiras são geralmente importantes, para estes tipos de problemas.

A modelização realista do comportamento de uma estrutura complexa é um trabalho árduo e demanda muita experiência do engenheiro para identificar os parâmetros e as propriedades que terão uma influência relevante no comportamento dinâmico da estrutura. [PAULTRE, 2005]

## 12.7 . VIBRAÇÃO LIVRE EM SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

A equação de equilíbrio dinâmico matricial de um sistema de vários graus de liberdade é equivalente aquela de um grau de liberdade, com cada quantidade representada por matrizes, e pode ser expressa pela equação seguinte:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t)$$

Eq. 13.21

onde,  $f_I = M\ddot{u}(t)$ ,  $f_D = C\dot{u}(t)$ ,  $f_S = Ku(t)$ , logo:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = p(t)$$

Eq. 13.22

O sistema submetido a vibração livre apresenta a seguinte formulação:

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0$$

Eq. 13.23

onde,

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_2 & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

Eq. 13.24

É a matriz de massa discreta (matriz diagonal).

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_2 & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

Eq. 13.25

é a matriz de rigidez, e

**Eq. 13.26**

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} e \quad \ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix}$$

São os vetores de deslocamento e aceleração.

Uma forma de solucionar este problema é propor uma solução do tipo:

**Eq. 13.27**

$$\mathbf{u} = \Phi e^{j\omega t}$$

Sendo o vetor  $\Phi$  formado por amplitudes que indicam quais as formas modais do problema.

Substituindo a Eq. 13.27 dentro da Eq. 13.23, obtendo-se:

**Eq. 13.28**

$$-\omega^2 \mathbf{M} \Phi e^{j\omega t} + \mathbf{K} \Phi e^{j\omega t} = 0$$

que após uma simples manipulação, torna-se:

**Eq. 13.29**

$$e^{j\omega t} [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0$$

Uma vez que  $e^{j\omega t} \neq 0$ , existe o seguinte problema a solucionar:

**Eq. 13.30**

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \Phi = 0$$

A Eq. 13.30 representa um problema clássico de autovalor e autovetor. Este problema também pode ser descrito como:

**Eq. 13.31**

$$[\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}] \Phi = 0$$

Sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade de ordem  $N \times N$ , sendo  $N$  o número de graus de liberdade empregados e  $\lambda = \omega^2$ . Agora o problema de autovalor e autovetor podem ser escritos em uma forma padrão:

**Eq. 13.32**

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \Phi = \lambda \Phi$$

**Eq. 13.33**

$$\mathbf{A} \Phi = \lambda \Phi$$

Sendo  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ . Os autovalores são dados por  $\lambda = \omega^2$  e neste caso são relacionados diretamente as frequências naturais dos sistemas. Os autovetores são dados por  $\Phi$  e representam os modos de

vibrar (ou formas modais), e nada mais são do que uma razão de amplitudes. A solução do problema de autovalor e autovetor pode ser feita via inúmeros métodos numéricos, porém aqui será resolvido de forma clássica a partir do cálculo do determinante. Assim:

**Eq. 13.34**

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

**Eq. 13.35**

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$$

O problema de autovalor leva à uma equação algébrica em  $\omega^2$ . Como os coeficientes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são normalmente reais e simétricos, haverá  $N$  raízes reais, o que implicará em  $N$  frequências naturais, ou seja, as frequências dos  $N$  modos de vibração que são possíveis, com a primeira frequência sendo a mais baixa e recebendo o nome de primeiro modo de vibração, a segunda menor recebe o nome de segundo modo e assim por diante:

**Eq. 13.36**

$$a_n(\omega^2)^n + a_{n-1}(\omega^2)^{n-1} \dots a_1(\omega^2) + a_0 = 0$$

Se o sistema for estável,  $\mathbf{K}$  é definida positiva e as raízes são positivas.

Importante constatar que os modos de vibrar representam uma base ortogonal no espaço. Assim a matriz modal  $\Phi$  apresenta as seguintes propriedades para  $i \neq j$ :

**Eq. 13.37**

$$\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_j = 0$$

**Eq. 13.38**

$$\Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_j = 0$$

Sendo  $\phi_i$  o  $i$ -ésimo modo associado com a  $i$ -ésima frequência  $\omega_{ni}$  e  $\phi_j$  o  $j$ -ésimo modo associado com a  $j$ -ésima frequência  $\omega_{nj}$ . Assim:

**Eq. 13.39**

$$\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = 1$$

**Eq. 13.40**

$$\Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i = \omega_i^2$$

Neste caso os modos  $\Phi$  são normalizados em relação à matriz massa, o que implica que a matriz modal é ortonormal. A matriz modal  $\Phi$  contém as formas de vibrar  $\Phi_1$  quando o sistema é excitado na primeira frequência natural  $\omega_{n1}$ ,  $\Phi_2$  quando o sistema é excitado na segunda frequência natural  $\omega_{n2}$  e assim por diante, assim esta matriz é dada por:

Eq. 13.41

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$$

Uma vez calculados os modos de vibrar e as frequências naturais pode-se substituir estes valores na solução proposta, Eq. 13.27, e obter a solução da resposta da vibração do sistema (se conhecendo as condições iniciais  $u(0)$ ).

## 12.8. MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL

Segundo **Paultre 2005**, para sistemas lineares, as propriedades de ortogonalidade dos modos de vibração permitem uma importante simplificação das equações gerais do movimento. Essa simplificação consiste em transformar as equações do movimento expressas no sistema de coordenadas geométricas em equações de movimento expressas por uma combinação de coordenadas normais ( $Z(t)$ ).

A resposta dinâmica exata pode então ser obtida calculando a resposta de cada coordenada normal e superpondo-as a fim de se obter a resposta no sistema de coordenadas geométricas original. A resposta total pode ser representada com uma precisão suficiente considerando um número de modos próprio bastante inferior ao número total de modos. [**PAULTRE, 2005**]

Seja a equação do movimento:

Eq. 13.42

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = p(t)$$

Que representa um sistema simultâneo de equações diferenciais. É possível através de uma mudança de coordenadas desacoplar estas equações, tornando-as num sistema de “N” equações diferenciais ordinárias independentes; e cada uma poderá ser trabalhada individualmente, como se fosse um sistema simples com 1 GL.

O desacoplamento destas equações é feito: calculando-se primeiro os autovalores e autovetores da equação reduzida Eq. 13.23 por algum método qualquer, tais como os apresentados na seção anterior. Com os “N” autovetores, monta-se uma matriz (N x N). Efetuando-se a transformação  $u = \Phi z(t)$ , e pré-multiplicando a Eq. 5.42 por  $\Phi^T$ , chega-se a:

Eq. 13.43

$$\Phi^T M \Phi \ddot{z} + \Phi^T C \Phi \dot{z} + \Phi^T K \Phi z = \Phi^T P(t)$$

Considerando que a matriz de amortecimento  $C$  seja bem comportada, ou seja, atenda certas condições ( $C = a_0 M + a_1 K$ ) combinação linear da matriz de massa e de rigidez), será possível manter as condições de ortogonalidade para  $C$ , onde  $a_0$  e  $a_1$  são constantes dependentes das frequências naturais, e obtidas pelo processo da matriz de amortecimento de Rayleigh, através da fixação da percentagem de amortecimento sobre dois modos, em que se tem muito controle. Desta forma se consegue o desacoplamento.

De fato, a operação de desacoplagem é possível graças à propriedade de ortogonalidade dos modos normais; e também que a energia contida em um modo é independente da energia contida em um outro modo.

Primeiramente encontram-se as frequências naturais e os modos próprios.

$$\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n \rightarrow \phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$$

Em seguida obtêm-se as matrizes generalizadas:

**Eq. 13.44**

$$M_i^* = \phi_i^T M \phi_i$$

**Eq. 13.45**

$$K_i^* = \phi_i^T K \phi_i = M_i \omega_i^2$$

**Eq. 13.46**

$$P_i^* = \phi_i^T P$$

Equação de movimento desacoplada:

**Eq. 13.47**

$$\ddot{z}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = \frac{P_i^*}{M_i^*}$$

Uma vez que se tem varias equações elementares, diferentes métodos de integração podem ser adotados para se obter a resposta dinâmica. Uma deles é através da equação de Duhamel, que para um sistema amortecido é:

**Eq. 13.48**

$$z_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_{D_i}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi \omega_i(t-\tau)} \text{sen } \omega_{D_i}(t-\tau) P_i(\tau) d\tau$$

onde  $\omega_D$  é a frequência da vibração amortecida.

A resposta modal calculadas com a integração de Duhamel no qual o domínio das frequência correspondem a condições iniciais nulas  $z_i(0) = \dot{z}_i(0) = 0$ . Sendo:

**Eq. 13.49**

$$z_i(0) = \frac{\Phi_i^T M u(0)}{M_i^*}$$

**Eq. 13.50**

$$\dot{z}_i(0) = \frac{\Phi_i^T M \dot{u}(0)}{M_i^*}$$

Obtemos a seguinte resposta em vibração livre:

**Eq. 13.51**

$$z_i = e^{-\xi\omega_i t} \left[ \frac{\dot{z}_i(0) + z_i(0)\xi\omega_i}{\omega_{D_i}} \text{sen } \omega_{D_i} t + z_i(0) \cos \omega_{D_i} t \right]$$

Calcula-se então a resposta no sistema de coordenadas geométricas segundo a seguinte relação:

**Eq. 13.52**

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i z_i(t)$$

As forças resistentes elásticas podem ser determinadas através da seguinte equação:

**Eq. 13.53**

$$\mathbf{f}_S(t) = \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \Phi \mathbf{z}(t)$$

ou

**Eq. 13.54**

$$\mathbf{f}_S(t) = \mathbf{M} \Phi [\omega_i^2 \mathbf{z}_i]$$