PROJETO DE GRADUAÇÃO

ESTUDO DO MODELO ELASTO-PLÁSTICO DE GAO E DESENVOLVIMENTO DE ROTINA UMAT PARA IMPLEMENTAÇÃO NO ABAQUS

Por,
Jônatas Pinheiro de Oliveira

Brasília, 02 de Julho de 2015

UNIVERSIDADE DE BRASILIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

UNIVERSIDADE DE BRASILIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ESTUDO DO MODELO ELASTO-PLÁSTICO DE GAO E DESENVOLVIMENTO DE ROTINA UMAT PARA IMPLEMENTAÇÃO NO ABAQUS

POR,

Jônatas Pinheiro de Oliveira

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Lucival Malcher, UnB/ ENM (Orientador)	____________________
Prof. Edgar Nobuo Mamiya, UnB/ ENM	____________________
Prof. Thiago de Carvalho R. Doca, UnB/ ENM	____________________

Brasília, 02 de Julho de 2015

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Lucival Malcher pelos conhecimentos compartilhados e pela orientação dada no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a Equipe Piratas do Cerrado de Baja SAE da Universidade de Brasília pela sua contribuição para o aprimorando dos meus conhecimentos acadêmicos, pela minha formação prática em Engenharia Mecânica, pela experiência de trabalho em equipe e gestão de projeto que adquiri, e por me fazer buscar sempre os melhores resultados.

Agradeço aos meus pais, José Osmarino e Antônia Ferreira, e meus irmãos, Jorge Dorico e Veranda Pinheiro, por todo incentivo, apoio, confiança e paciência durante todo meu curso de graduação.

Jônatas Pinheiro de Oliveira

RESUMO

Neste trabalho realizou-se um estudo da influência do efeito do terceiro invariante do tensor desviador, no comportamento mecânico de materiais dúcteis, através do uso do domínio elástico proposto por Gao e de uma rotina UMAT implementada no programa comercial de elementos finitos Abaqus CAE. Para isto, propôs-se um algoritmo implícito de integração do modelo, utilizando endurecimento isotrópico não-linear, plasticidade associativa e a metodologia de decomposição do operador. Apresentaram-se os requisitos e os passos necessários para implementação do modelo numérico no Abaqus CAE 6.10-1, através de uma sub-rotina UMAT. Realizou-se uma análise da influência das constantes do material, a_1e b_1, na superfície de escoamento de Gao pela comparação desta com outros critérios de escoamento, como o de von Mises e o de Tresca. Analisou-se numericamente corpos de provas de diferentes materiais e geometrias variando os valores das constantes do material. Por fim, resultados experimentais foram gerados para o alumínio 6101 e uma nova comparação entre resultados numéricos e experimentais foi realizada.

ABSTRACT

A study was carried out of the influence of the third invariant of the desviatoric stress tensor in the mechanical behavior of ductile materials, using the elastic domain proposed by Gao and a UMAT routine implemented in a finite element program. It is proposed an implicit numerical integration algorithm model using non-linear isotropic hardening, associative plasticity and the splitting methodology. The requirements and the steps needed to implement the numerical model in Abaqus CAE 6.10-1 through a subroutine UMAT were presented. An analysis of the influence of the materials constants, a_1e b_1, was performed in Gao flow surface by comparing it with other flow criteria, such as the von Mises and Tresca. Test samples of different materials and geometries have been numerically analysed varying the values of the constants of the material. Finally, experimental results were generated for the aluminium 6101 and a new comparison between experimental and numerical results was performed.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ALGORITMOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão.
$\boldsymbol{S}$	Tensor desviador.
$\boldsymbol{I}$	Tensor identidade.
p	Tensão hidrostática.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Componentes principais do tensor tensão.
I_1, I_2, I_3	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor das tensões.
J_1, J_2, J_3	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor desviador.
η	Razão de triaxilidade.
σ_{eq}	Tensão equivalente.
θ	Ângulo de Lode.
ξ	Terceiro invariante normalizado.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Parcela elástica do tensor das deformações.
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Parcela plástica do tensor das deformações.
$\mathbb{D}^e$	Tensor constitutivo de elasticidade.
ϕ	Função de escoamento do material.
σ_y	Limite de escoamento do material.
a_1, b_1, c_1	Constantes do material.
σ_{yo}	Limite de escoamento inicial do material.
H^I	Módulo de endurecimento isotrópico não linear.
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica equivalente
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica.
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico.
$\boldsymbol{N}$	Vetor de fluxo plástico.
$\boldsymbol{S}^{-T}$	Inverso do transposto do tensor desviador.
$\mathbb{I}^{\boldsymbol{d}}$	Tensor identidade de quarta ordem.
$\dot{w}_p$	Evolução do trabalho plástico
$\dot{\bar{\varepsilon}}^p$	Taxa de evolução da deformação plástica equivalente.
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$	Tensor das tensões tentativa atualizado.
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$	Parcela elástica do tensor deformação tentativa atualizado.
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Incremento do tensor deformação.
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}$	Incremento de deformação plástica.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Parcela plástica do tensor deformação tentativa atualizado.
α_{n+1}^{trial}	Variável interna tentativa atualizada.
α_n	Variável interna.
ϕ^{trial}	Função de escoamento tentativa do material.
$\sigma_{eq(n+1)}^{trial}$	Tensão equivalente tentativa
$I_{1(n+1)}, J_{2(n+1)}, J_{3(n+1)}$	Invariantes atualizados.
$\boldsymbol{S}_{n+1}$	Tensor desviador atualizado
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p}$	Deformação plástica equivalente atualizada.
$\Delta\gamma$	Incremento do multiplicador plástico.
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$	Tensor das tensões atualizados.
$\boldsymbol{N}_{n+1}$	Vetor de fluxo atualizado.
$\sigma_{eq(n+1)}$	Tensão equivalente atualizada.
$\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$	Operador tangente.
C_{22}	Representa um escalar,
$\boldsymbol{C}_{12}, \boldsymbol{C}_{21}$	Representam tensores de segunda ordem.
$\mathbb{C}_{11}$	Representa um tensor de quarta ordem.
$tr(\boldsymbol{\sigma})$	Traço do tensor tensão.
μ	Expoente de encruamento.

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Teorias que permitem a formulação de equações matemáticas capazes de descrever, qualitativamente e quantitativamente, o comportamento de um material é chamado de modelo constitutivo. A obtenção de modelos constitutivos que determinem de forma mais realística possível o comportamento mecânico de um material e que prevejam o início de sua falha com maior precisão é de extrema importância para fins de projeto e dimensionamento. Já que ao aliar os modelos constitutivos com modelos numéricos desenvolve-se projetos mecânicos mais otimizados, baratos e de elevada confiabilidade podendo se tornar uma vantagem competitiva (Andrade Pires,2005; Bai,2008). Na Figura (1.1) apresentam-se alguns exemplos de aplicação do uso de modelos elasto-plásticos.

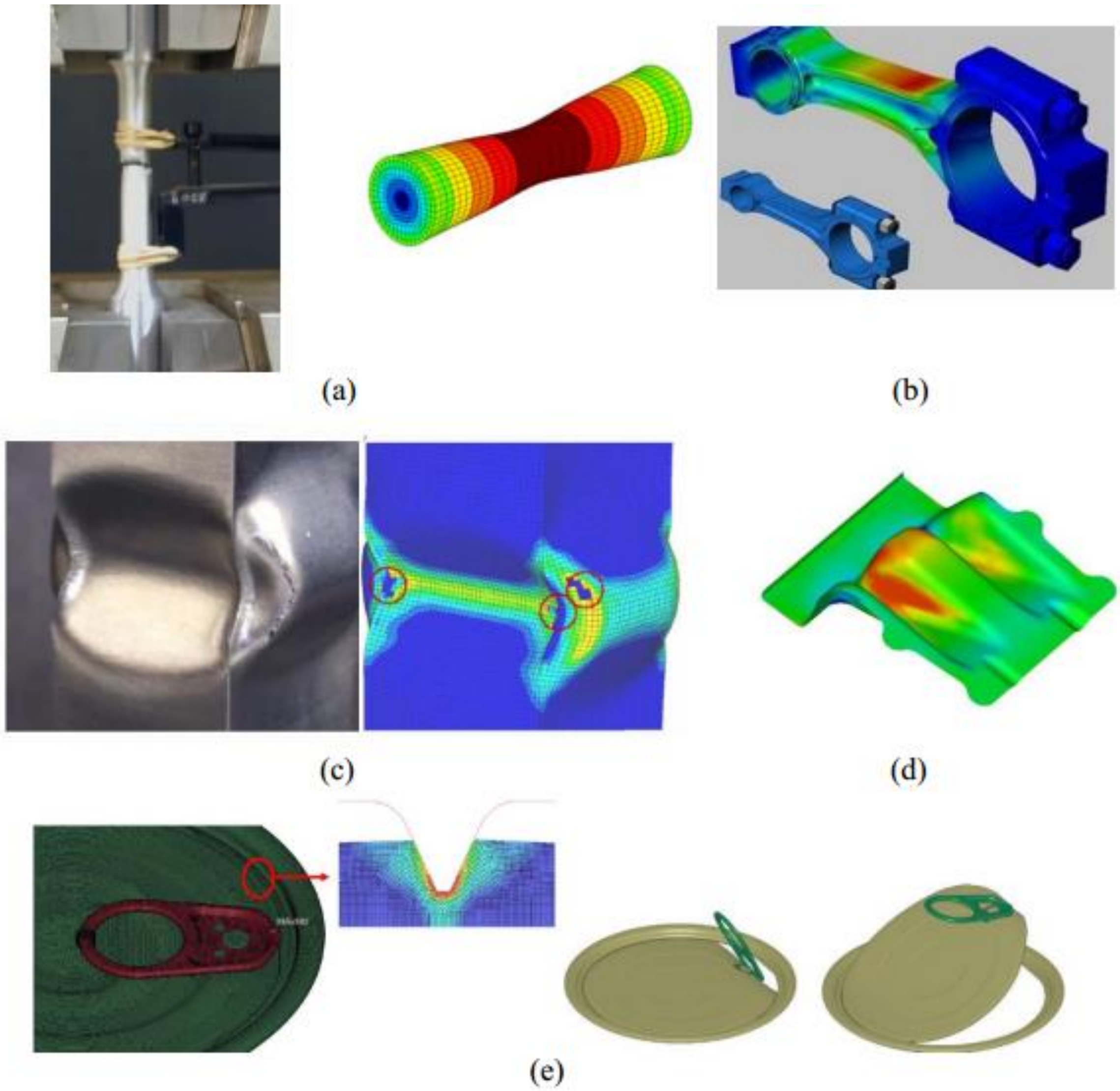


Figura 1. 1 - Exemplos do uso de modelos constitutivos elasto-plásticos. Fonte: Malcher (2011).

Os modelos constitutivos podem ser utilizados na caracterização do material (Fig. 1.1a), na análise de tensões de componentes mecânicos (Fig. 1.1b), na simulação da falha de uma estrutura (Fig. 1.1c), na otimização de processos de fabricação (Fig. 1.1d) e em processos industriais (Fig. 1.1e).

O modelo constitutivo mais comumente utilizado para descrever o comportamento elástico de metais é o modelo constitutivo de von Mises o qual propõe que o escoamento plástico de um material se inicia quando o segundo invariante do tensor desviador, J_2, atinge um valor crítico. Entretanto, evidências experimentais mostram que para vários materiais (Gao *et al.*, 2011) considerar a tensão hidrostática como também o terceiro invariante do tensor desviador, J_3, resulta no desenvolvimento de modelos constitutivos mais precisos.

Alguns autores formularam estudos e modelos plásticos que adotam estes parâmetros como, por exemplo, Brünig (1999) que apresentou um critério de escoamento em função do segundo invariante do tensor desviador, J_2, e do primeiro invariante do tensor das tensões, I_1, para descrever o efeito da tensão hidrostática sobre as propriedades de fluxo plástico de metais. Posteriormente, Brünig *et al.* (2000) adicionaram o terceiro invariante do tensor desviador, J_3, como um dos termos da função de escoamento para estudar o comportamento e localização potencial da deformação e também a sensibilidade de metais ao efeito da tensão hidrostática. Bai & Wierzbicki (2007) discutiram a dependência de modelos de plasticidade quanto a tensão hidrostática e do ângulo de Lode como também da aplicação destes na análise de falhas. Mirone e Corallo (2010) descobriram que, para os metais que eles testaram, a tensão hidrostática tem uma atuação significativa em acelerar a falha, mas têm efeito desprezível no relacionamento da tensão e deformação plástica enquanto que o ângulo de Lode têm um efeito considerável em modificar as curvas tensão-deformação, mas não afeta significativamente as tensões de falha. E ainda Gao *et al.* (2011) que propuseram um modelo elasto-plástico que é dependente do segundo e terceiro invariantes do tensor desviador como também da tensão hidrostática.

Segundo alguns autores (Bardet, 1990; Bai, 2008), a tensão hidrostática é um parâmetro responsável pelo controle da superfície de escoamento e o ângulo de Lode, que é em função do terceiro invariante do tensor desviador, J_3, é o parâmetro responsável pelo formato da superfície de escoamento. O efeito destes parâmetros no comportamento mecânico de materiais dúcteis pode ser mostrado pelas três configurações de curvas obtidas da simulação numérica do modelo proposto por Bai & Wierzbicki (2007) na Fig.(1.2). Uma destas configurações se iguala ao modelo de von Mises sem o efeito da tensão hidrostática e do terceiro invariante do tensor desviador, a outra faz o uso do efeito da tensão hidrostática e a última configuração faz uso do efeito da tensão hidrostática e do terceiro invariante do tensor desviador.

A Figura (1.2) mostra que o resultado da simulação ganha mais precisão ao introduzir o efeito do terceiro invariante do tensor desviador o qual é mais expressivo do que resultado de somente com o efeito da tensão hidrostática. Percebe-se também que quanto maior a componente de cisalhamento maior a influência do ângulo de Lode.

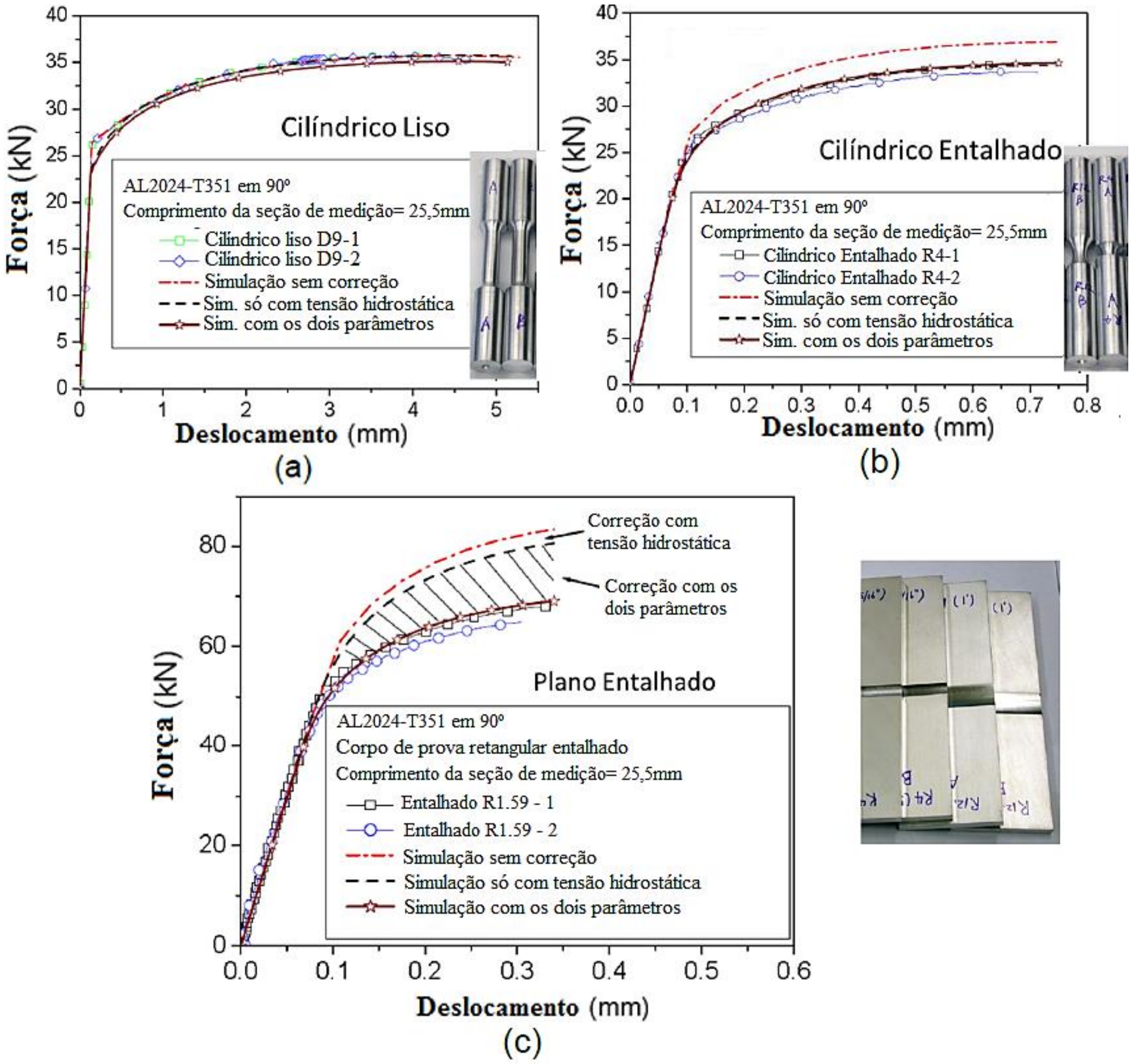


Figura 1. 2 - Contribuição do efeito da tensão hidrostática e do efeito do terceiro invariante do tensor desviador no comportamento de materiais. Fonte: Adaptado de Bai, 2008.

Da mesma maneira que houve uma evolução dos modelos constitutivos, houve também uma evolução dos computadores, os quais começaram a fornecer uma maior velocidade de processamento de dados e, portanto, uma maior eficiência na realização de cálculos de modo que pôde-se desenvolver métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise e simulação de várias estruturas. Vários programas de simulação foram eficientemente desenvolvidos, como o programa comercial de elementos finitos Abaqus, que permitem a implementação de modelos constitutivos mediante programação de uma sub-rotina em linguagem Fortran que é associada aos modelos numéricos o que atinge uma grande capacidade preditiva essencial para o projetista na resolução de problema reais de engenharia. Uma sub-rotina UMAT (*User Material Subroutine*) pode então ser utilizada para descrever o comportamento de um material a ser modelado quando a biblioteca de modelos do programa de elementos finitos não possuir o modelo material desejado.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é estudar o domínio elástico proposto por Gao, o qual contempla a influência da tensão hidrostática e o efeito do terceiro invariante do tensor desviador. E desenvolver um algoritmo de integração implícita das equações deste modelo para a sua implementação no programa comercial de elementos finitos Abaqus, através de uma sub-rotina UMAT.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho apresenta sete capítulos que podem se subdividir a fim de atender as exigências do objetivo estipulado e desenvolver assim um trabalho de forma clara e objetiva. No primeiro capítulo é realizado a contextualização do assunto, mostrando a importância e a influência da tensão hidrostática e do efeito dos parâmetros elasto-plásticos na descrição do comportamento mecânico de materiais dúcteis.

No segundo capítulo são apresentados os aspectos teóricos por meio das definições de alguns parâmetros elasto-plásticos e das principais teorias da plasticidade para a então descrição do domínio elástico proposto por Gao.

No terceiro capítulo apresenta a estratégia que foi adotada para a formulação de um modelo numérico que descreva a superfície de escoamento proposto por Gao para posterior implementação em elementos finitos. Para esta metodologia utilizou-se o método de integração implícito de Euler e do método de decomposição do operador. E ainda são apresentados os requisitos e os passos para a implementação do modelo numérico no programa comercial de elementos finitos Abaqus CAE 6.10-1 através de uma sub-rotina UMAT.

No quarto capítulo é analisado a influência dos parâmetros do material a_1e b_1 na forma da superfície de escoamento de Gao, utilizando para comparação as superfícies de escoamento de von Mises e de Tresca.

No quinto capítulo é feito uma análise dos resultados numéricos obtidos de uma rotina que segue o domínio elástico proposto por Gao executada em um pacote comercial de elementos finitos. Foram estudados diferentes corpos de prova em aço SAE 1045 e em alumínio aeronáutico considerando os valores das constantes do material de $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ e $a_1 = 0$, $b_1 = -60{,}75$.

No sexto capítulo são apresentados os resultados experimentais obtidos do ensaio de corpos de prova da liga de alumínio 6101 para comparação com os resultados numéricos. Foram realizados um ensaio de tração uniaxial e um ensaio de cisalhamento com os devidos corpos de prova na máquina da MTS de modelo 647 *Hydraulic Collet Grip*.

No sétimo capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho com base nos resultados numéricos encontrados.

2 ASPECTOS TEÓRICOS

2.1. DEFINIÇÕES

O tensor das tensões pode ser decomposto em uma componente desviadora e uma componente hidrostática. Desta maneira, o tensor das tensões é descrito conforme a equação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + p\boldsymbol{I}, \tag{2.1}$$

onde $\boldsymbol{S}$ é o tensor desviador ou tensor das tensões desviadoras e $p\boldsymbol{I}$ é chamado de tensor hidrostático, sendo que $\boldsymbol{I}$ representa o tensor identidade de segunda ordem e p a tensão hidrostática definida por:

$$p \equiv \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{2.2}$$

onde $tr(\boldsymbol{\sigma})$ é o traço do tensor tensão e σ_1, σ_2 e σ_3 são as suas componentes principais.

A componente tensorial hidrostática representa a capacidade do estado de tensões em produzir variações volumétricas elásticas. E a componente tensorial desviadora é responsável pelas mudanças de forma (Dieter, G.E. 1981).

O tensor das tensões pode ser escrito em qualquer sistema de coordenadas em função dos invariantes. Os invariantes do tensor tensão e do tensor desviador das tensões podem ser determinados pelas equações:

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}),$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[tr^2(\boldsymbol{\sigma}) - tr(\boldsymbol{\sigma^2})]$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \tag{2.3}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}[\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}]$$

$$J_3 = \det(\boldsymbol{S})$$

onde I_1, I_2 e I_3 representam, respectivamente, o primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão e J_2, J_3 o segundo e terceiro invariantes do tensor desviador. Por definição, o primeiro invariante do tensor desviador apresenta traço nulo, $J_1 = 0$. A operação ":" representa a dupla contração entre tensores e $\det(\boldsymbol{S})$, $\det(\boldsymbol{\sigma})$ são os determinantes do tensor desviador e do tensor das tensões, respectivamente.

No estudo de alguns modelos elasto-plásticos pode-se verificar o efeito dos invariantes no comportamento de um material através de parâmetros como a razão de triaxialidade e o ângulo de Lode.

A razão de triaxialidade, η, é definido pela equação:

$$\eta = \frac{p}{\sigma_{eq}}, \tag{2.4}$$

onde σ_{eq} é um escalar que representa a tensão equivalente, dado um estado multiaxial de tensões. Cada modelo constitutivo possui uma forma de calcular essa tensão de acordo com seus critérios de escoamento adotados.

O ângulo de Lode é o parâmetro elasto-plástico responsável por dá a forma da superfície de escoamento do material (Bai,Y.,Wierzbicki, T. 2007). Ele é definido como sendo o menor ângulo formado entre a projeção do tensor das tensões no plano π e um dos eixos das tensões principais conforme ilustrado na Fig.(2.1).

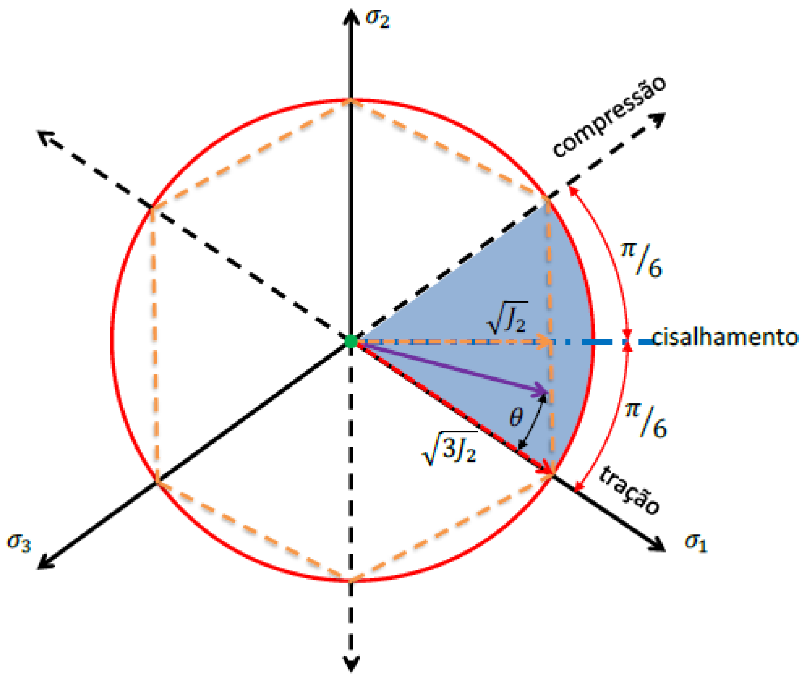


Figura 2. 1 - Representação do ângulo de Lode, θ, sobre o plano desviador. Adaptado de Bai, 2008.

O ângulo de Lode, θ, é definido matematicamente de acordo com a expressão:

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos(\xi), \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \tag{2.5}$$

onde ξ é o terceiro invariante normalizado e este é obtido pela expressão:

$$\xi = \left(\frac{\frac{27}{2} J_3}{\sigma_{eq}{}^3} \right), \qquad -1 \leq \xi \leq 1 \,. \tag{2.6}$$

2.2. MODELO CONSTITUTIVO

Para se estudar o comportamento tensão-deformação dos materiais é necessário estabelecer teorias sobre os aspectos predominantes deste comportamento a partir de formulações matemáticas denominadas modelos constitutivos.

Para realizar uma escolha correta de um modelo constitutivo, devem-se analisar fatores como: níveis de deformação, tipo e o nível de carga aplicada, gradiente de temperatura ao qual a peça foi submetida, tipo de material, entre outros (De Souza Neto *et al.*, 2008).

A teoria da plasticidade descreve o comportamento de determinados materiais que, depois de serem submetidos a um carregamento, podem apresentar deformações permanentes quando completamente descarregados. Os materiais os quais apresentam este comportamento são definidos como materiais plásticos. Um modelo elasto-plástico leva em consideração o comportamento tanto elástico quanto plástico do material.

Uma das hipóteses usadas na teoria da plasticidade, para pequenas deformações, é a decomposição aditiva da deformação total, $\boldsymbol{\varepsilon}$, em uma componente elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, e em uma componente plástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{2.7}$$

A decomposição aditiva da deformação total é melhor entendida a partir da curva tensão-deformação obtida experimentalmente a partir de corpos de prova de materiais dúcteis submetidos a tensões uniaxiais de tração (Fig. 2.2). Após descarregar o corpo de prova, verifica-se uma deformação permanente que é a componente plástica da deformação total sofrida. Pode-se relacionar a magnitude da tensão em função da deformação e uma matriz constitutiva utilizando da Lei de Hooke generalizada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{D}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \,, \tag{2.8}$$

onde $\mathbb{D}^e$ é o tensor constitutivo de elasticidade do material, que depende das propriedades do material como o módulo de Young, E, e o coeficiente de Poisson, ν .

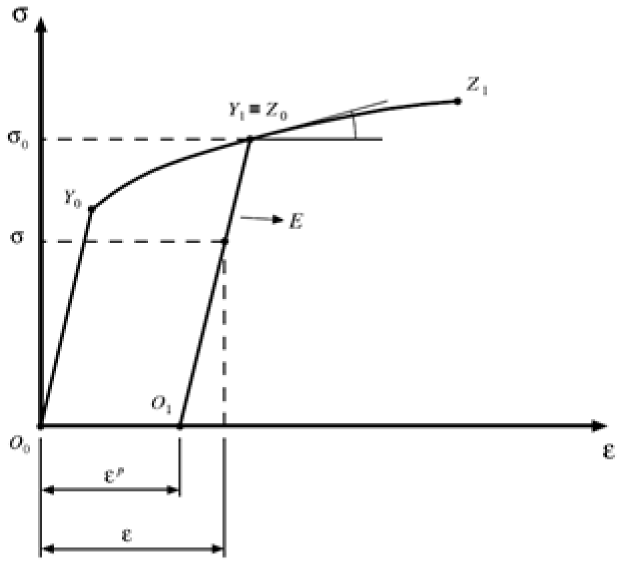


Figura 2. 2 - Decomposição da deformação total. Adaptado de Souza Neto *et al.* (2008)

A curva da Fig.(2.2) mostra o aumento da resistência ao escoamento do material devido seu próprio escoamento. A lei de endurecimento descreve como as superfícies de escoamento são alteradas devido à deformação plástica. A curva tensão-deformação da Fig.(2.3) mostra o início do fluxo plástico de um material no ponto **A**, e que no ponto **B** o material é descarregado totalmente e logo depois recarregado dando início a um escoamento agora em uma nova tensão, não mais no ponto **A**. Este comportamento que ocorre quando a superfície de escoamento inicial, após uma deformação plástica, se expande de forma uniforme sem mudança da forma e sem a translação do centro da superfície de escoamento é a definição de endurecimento isotrópico.

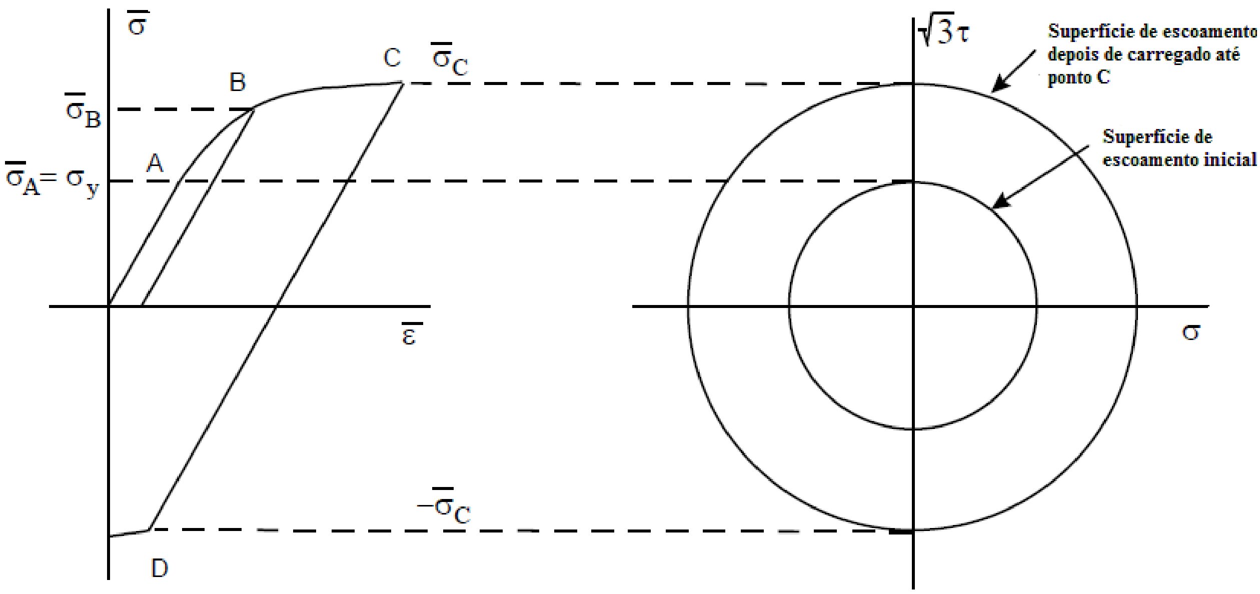


Figura 2. 3 - Endurecimento isotrópico. Adaptado: Socie, D., Marquis, G.B. (2000).

A teoria de fluxo é a mais conhecida teoria da plasticidade, e ela consiste de um critério de escoamento, de uma lei de fluxo e de uma lei de endurecimento já mencionada acima (De Souza Neto *et al.*, 2008).

O critério de escoamento determina o estado de tensão no qual irá iniciar a deformação plástica. De modo geral a função de escoamento é determinada como:

$$\phi = \sigma_{eq} - \sigma_y \tag{2.9}$$

onde σ_{eq} é a tensão equivalente e σ_y é o limite de escoamento do material.

Para esse trabalho será estudado o domínio elástico proposto por Gao e, portanto, os termos da função de escoamento serão calculados conforme este modelo. Para Gao a tensão equivalente, σ_{eq}, é obtida em função dos invariantes I_1, J_2 e J_3 conforme a equação:

$$\sigma_{eq} = c_1\left[a_1 {I_1}^6 + 27{J_2}^3 + b_1{J_3}^2\right]^{\frac{1}{6}}, \tag{2.10}$$

onde a_1, b_1 e c_1 são constantes do material.

As constantes a_1 e b_1 são obtidas a partir de testes experimentais de tração e cisalhamento respectivamente. Já a constante c_1 pode ser encontrada considerando uma condição uniaxial para a função de escoamento, de modo que:

$$c_1 = \left(a_1 + \frac{4}{729}b_1 + 1\right)^{-\frac{1}{6}}. \tag{2.11}$$

Será adotado que a plasticidade não é ideal e, portanto, σ_y não será constante, mas esta será modelada de acordo com o endurecimento isotrópico não linear como mostra a equação:

$$\sigma_y = \sigma_{yo} + H^I \bar{\varepsilon}^p, \tag{2.12}$$

onde σ_{yo} é o limite de escoamento inicial do material, H^I é o módulo de endurecimento isotrópico e $\bar{\varepsilon}^p$ é a deformação plástica equivalente. Neste caso, o módulo de endurecimento isotrópico é uma função da deformação plástica equivalente, $H^I = H^I(\bar{\varepsilon}^p)$, o que então introduz o comportamento isotrópico não linear ao modelo.

A lei de fluxo descreve a evolução da deformação plástica depois do escoamento definida pela equação:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma}\boldsymbol{N}, \tag{2.13}$$

onde $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ é a taxa de deformação plástica, $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico e $\boldsymbol{N}$ é o vetor de fluxo plástico.

Considerando que a lei de fluxo plástico é associativa (De Sousa Neto *et al.*, 2008), o vetor de fluxo plástico é um vetor normal a superfície de escoamento e é calculado por:

$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \tag{2.14}$$

de forma, que para o modelo de Gao, obtém-se:

$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{c_1}{6}\left(a_1 I_1{}^6 + 27 J_2{}^3 + b_2 J_3{}^2\right)^{-\frac{5}{6}}\left(6 a_1 I_1{}^5 \boldsymbol{I} + 81 J_2{}^2 \boldsymbol{S} + 2 b_1 J_3 \det(\boldsymbol{S})\, \boldsymbol{S}^{-T} : \mathbb{I}^{\boldsymbol{d}}\right), \tag{2.15}$$

onde $\boldsymbol{S}^{-T}$ é o inverso do transposto do tensor desviador e $\mathbb{I}^{\boldsymbol{d}}$ o tensor identidade desviador de quarta ordem.

A taxa de evolução de deformação plástica equivalente, $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$, pode ser determinada a partir da evolução do trabalho plástico, $\dot{w}_p$, pela equação (De Sousa Neto *et al.*, 2008):

$$\dot{w}_p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sigma_{eq} \dot{\bar{\varepsilon}}^p \tag{2.16}$$

De modo que se obtém:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\sigma_{eq}} = \dot{\gamma} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{N}}{\sigma_{eq}} \tag{2.17}$$

O multiplicador plástico é um número não negativo, $\dot{\gamma} \geq 0$, e satisfaz a condição de complementaridade,

$$\phi \dot{\gamma} = 0, \tag{2.18}$$

que estabelece quando o fluxo plástico ocorre. No interior domínio elástico ocorre que:

$$\phi < 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0, \tag{2.19}$$

já o fluxo plástico ocorre somente quando:

$$\dot{\varepsilon}^p \neq 0 \Leftrightarrow \dot{\gamma} > 0 \Rightarrow \phi = 0. \tag{2.20}$$

O modelo constitutivo a ser utilizado neste trabalho considerará o domínio elástico proposto por Gao e também o endurecimento isotrópico não linear e a plasticidade associativa. O Quadro 2.1 a seguir descreve resumidamente este modelo.

Quadro 2. 1 - Modelo adotado considerando o domínio elástico proposto por Gao, endurecimento isotrópico não linear e plasticidade associativa.

(i) Decomposição aditiva da deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

(ii) Lei de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

(iii) Função de escoamento:

$$\phi = \sigma_{eq} - \sigma_{yo} - H^I \bar{\varepsilon}^p$$

onde $\sigma_{eq} = c_1\left[a_1 {I_1}^6 + 27 {J_2}^3 + b_1 {J_3}^2\right]^{\frac{1}{6}}$

(iv) Lei de fluxo plástico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma}\boldsymbol{N}$$

onde:

$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{c_1}{6}\left(a_1 {I_1}^6 + 27 {J_2}^3 + b_2 {J_3}^2\right)^{-\frac{5}{6}}\left(6 a_1 {I_1}^5 \boldsymbol{I} + 81 {J_2}^2 \boldsymbol{S} + 2 b_1 J_3 \det(\boldsymbol{S})\, \boldsymbol{S}^{-T} : \mathbb{I}^{\boldsymbol{d}}\right).$$

E a lei de evolução para $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}\,\frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{N}}{\sigma_{eq}}$$

(v) Regra de complementaridade:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \qquad \phi \leq 0, \qquad \phi\dot{\gamma} = 0.$$

3 ESTRATÉGIA NUMÉRICA

Neste capítulo será apresentada a metodologia que vai permitir realizar a formulação de algoritmos para simulação numérica de problemas plásticos. Para a escolha adequada da metodologia é necessário entender a física do problema a fim de chegar a níveis de aproximações aceitáveis com a realidade, logo foram escolhidos o domínio elástico proposto por Gao para descrever a física e a decomposição do operador e método de integração implícito de Euler como estratégia numérica.

3.1 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

O método de decomposição do operador é um processo de atualização da tensão (Simo & Hughes, 1998), e consiste na divisão do problema em um preditor elástico e um corretor plástico. Para o preditor elástico assume-se que o problema é completamente elástico e que são conhecidos, no início do intervalo do pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$, os valores da deformação elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$, da deformação plástica, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ (caso não tenha uma deformação permanente anteriormente conhecida seu valor será igual à zero), e do conjunto das variáveis internas, α_n. Assumindo conhecer o incremento de deformação, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, para este intervalo, pode-se escrever uma atualização da tensão e das variáveis de estado denominada de estado tentativa a partir das Eq. (3.1):

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
&\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \\
&\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\
&\alpha_{n+1}^{trial} = \alpha_n \\
&\sigma_y = \sigma_y(\alpha_n)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$ é o tensor das deformações elásticas tentativa, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ representa o tensor das tensões tentativa, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial}$ é o tensor das deformações plásticas tentativa e α_{n+1}^{trial} é a variável interna tentativa associada ao endurecimento isotrópico e σ_y é o limite de escoamento do material que é função da variável interna associada ao endurecimento isotrópico, $\sigma_y(\alpha_n)$. Para o modelo de Gao a deformação plástica equivalente, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, será tomada como variável interna associada ao endurecimento isotrópico, portanto o limite de escoamento do material será função da $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.

Já o corretor plástico só é inicializado caso o estado tentativa se encontre fora do limite elástico do material. Para esta verificação, determina-se a função de escoamento tentativa a partir da equação:

$$
\phi^{trial} = \sigma_{eq(n+1)}^{trial} - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p), \tag{3.2}
$$

onde $\sigma_{eq(n+1)}^{trial}$ corresponde à tensão equivalente tentativa determinada em função dos invariantes atualizados $I_{1(n+1)}$, $J_{2(n+1)}$ e $J_{3(n+1)}$ por meio da expressão $\sigma_{eq(n+1)}^{trial} = c_1 \left[a_1\, {I_{1(n+1)}^{trial}}^{6} + 27\, {J_{2(n+1)}^{trial}}^{3} + b_1\, {J_{3(n+1)}^{trial}}^{2}\right]^{\frac{1}{6}}$.

Portanto, se ϕ^{trial} for menor ou igual à zero, o incremento de deformação é totalmente elástico como foi assumido inicialmente, deste modo, o estado real do material será igual ao estado tentativa, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$. Entretanto, caso ϕ^{trial} seja maior que zero, o material se encontra dentro do regime plástico e o incremento de deformação antes considerado totalmente elástico apresenta na verdade uma parcela plástica. Há então a necessidade de corrigir o estado tentativa com a remoção do incremento de deformação plástica, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$, de dentro da deformação elástica tentativa, conforme expresso pela equação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\;trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \tag{3.3}$$

Esse incremento de deformação plástica é definido pelo o modelo de Gao a partir da lei de fluxo plástico. Da substituição desta na Eq. (3.3), obtém-se a expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\;trial} - \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1}, \tag{3.4}$$

onde $\Delta\gamma$ é o incremento do multiplicador plástico e $\boldsymbol{N}_{n+1}$ o vetor de fluxo plástico atualizado representado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{n+1} = \left[\frac{c_1}{6}\left(a_1 {I_{1(n+1)}}^{6} + 27 {J_{2(n+1)}}^{3} + b_2 {J_{3(n+1)}}^{2}\right)\right]^{-\frac{5}{6}} &\left(6a_1 {I_{1(n+1)}}^{5}\boldsymbol{I}\right.\\ &\left. + 81 {J_{2(n+1)}}^{2}\boldsymbol{S}_{(n+1)} + 2b_1 J_{3(n+1)} \det\left(\boldsymbol{S}_{(n+1)}\right) {\boldsymbol{S}_{(n+1)}}^{-T} : \mathbb{I}^{\boldsymbol{d}}\right),\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $I_{1(n+1)}$, $J_{2(n+1)}$, $J_{3(n+1)}$ e $\boldsymbol{S}_{(n+1)}$ representam o primeiro invariante do tensor tensão atualizado, o segundo invariante do tensor desviador atualizado, o terceiro invariante do tensor desviador atualizado e o tensor desviador atualizado.

Pode-se também reescrever a Eq. (3.4) em termos do campo de tensão, como se segue:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \mathbb{D}^e : \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1} \;. \tag{3.6}$$

A atualização das variáveis de estado pode ser obtida através das equações a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n}^{p} + \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1}, \tag{3.7}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n}^{p} + \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{N}_{n+1}}{\sigma_{eq(n+1)}}, \tag{3.8}$$

onde $\sigma_{eq(n+1)}$ corresponde a tensão equivalente atualizada.

A função de escoamento atualizada através do estado real, ϕ_{n+1}, no pseudo-tempo t_{n+1}é obtida pela equação:

$$\phi_{n+1} = c_1\left[a_1 {I_{1(n+1)}}^6 + 27{J_{2(n+1)}}^3 + b_1 {J_{3(n+1)}}^2\right]^{\frac{1}{6}} - \sigma_{yo} - H^I \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{n+1} = 0\ . \tag{3.9}$$

Portanto, para obtenção do estado real do material é necessário resolver um sistema de equações não-linear formado pelas Eq.(3.6), Eq.(3.8) e Eq.(3.9), que têm como variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{n+1}$ e $\Delta\gamma$. A fim de reduzir o esforço computacional e aumentar a velocidade de processamento, pode-se reduzir a quantidade de equações e variáveis a calcular por substituir a Eq. (3.8) na Eq.(3.9). Gera-se então um sistema de duas equações não-lineares pelas Eq.(3.6) e Eq.(3.10) e com duas variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$.

$$\phi_{n+1} = c_1\left[a_1 {I_{1(n+1)}}^6 + 27{J_{2(n+1)}}^3 + b_1 {J_{3(n+1)}}^2\right]^{\frac{1}{6}} - \sigma_{yo} - H^I \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{n} - H^I \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{N}_{n+1}}{\sigma_{eq(n+1)}} = 0\ . \tag{3.10}$$

Pode-se representar o sistema de equações não lineares na forma de equações residuais, o que se obtém:

$$\begin{aligned} R_{\sigma_{n+1}} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}^{trial}_{n+1} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \boldsymbol{N}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} &= c_1\left[a_1 {I_{1(n+1)}}^6 + 27{J_{2(n+1)}}^3 + b_1 {J_{3(n+1)}}^2\right]^{\frac{1}{6}} - \sigma_{yo} - H^I \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{n} - H^I \Delta\gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{N}_{n+1}}{\sigma_{eq(n+1)}}\ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, após a resolução desse sistema de equações não-lineares e da atualização das variáveis, é possível escrever o modelo numérico desenvolvido para o modelo de Gao como é apresentado resumidamente no Algoritmo (3.1).

Algoritmo 3. 1 - Atualização das tensões e variáveis internas para o modelo adotado.

i) Determinar o estado tentativa: Dado um incremento deformação, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\varepsilon}_n^p$$

ii) Verificar a admissibilidade Plástica:

$$\phi^{trial} = c_1 \left[a_1 {I_{1(n+1)}^{trial}}^6 + 27 {J_{2(n+1)}^{trial}}^3 + b_1 {J_{3(n+1)}^{trial}}^2 \right]^{\frac{1}{6}} - \sigma_{yo} - H^I {\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}^{trial}$$

Se $\phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;

Caso contrário, então (passo plástico): Algoritmo de retorno

iii) Algoritmo de retorno: resolver o sistema de equações não-lineares (Newton-Raphson), tendo como variáveis: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$.

$$\begin{cases} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \boldsymbol{N}_{n+1} \\ R_{\Delta\gamma} = c_1 \left[a_1 {I_{1(n+1)}}^6 + 27 {J_{2(n+1)}}^3 + b_1 {J_{3(n+1)}}^2 \right]^{\frac{1}{6}} - \sigma_{yo} - H^I \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - H^I \Delta\gamma \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{N}_{n+1}}{\sigma_{eq(n+1)}} \end{cases}$$

Onde:

$$\boldsymbol{N}_{n+1} = \left[\frac{c_1}{6} \left(a_1 {I_{1(n+1)}}^6 + 27 {J_{2(n+1)}}^3 + b_2 {J_{3(n+1)}}^2 \right) \right]^{-\frac{5}{6}} (6 a_1 {I_{1(n+1)}}^5 \boldsymbol{I} \\ + 81 {J_{2(n+1)}}^2 \boldsymbol{S}_{(n+1)} + 2 b_1 J_{3(n+1)} \det\left(\boldsymbol{S}_{(n+1)}\right) {\boldsymbol{S}_{(n+1)}}^{-T} : \mathbb{I}^{\boldsymbol{d}})$$

$$\sigma_{eq(n+1)} = c_1 \left[a_1 {I_{1(n+1)}}^6 + 27 {J_{2(n+1)}}^3 + b_1 {J_{3(n+1)}}^2 \right]^{\frac{1}{6}}.$$

iv) Atualizar outras variáveis internas.

v) Fim.

Para a resolução do sistema de equações não-lineares descrito acima, utiliza-se o método de Newton-Raphson (De Souza Neto *et al.*, 2002). Para isto, necessita-se escrever o sistema de equações residuais não linear (Eq. 3.11), para uma forma linearizada de acordo com a expressão a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \dfrac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \dfrac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \dfrac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^k. \tag{3.12}$$

O Algoritmo (3.2) a seguir mostra a aplicação do método de Newton-Raphson para resolução do sistema linear (Eq. 3.12), onde o estado tentativa é tomado como parâmetro inicial do problema. O desenvolvimento das derivadas parciais das equações residuais se encontra no Anexo I deste trabalho.

Algoritmo 3. 2 - Algoritmo para resolução do sistema linear através do método de Newton-Raphson

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial};$$

$$\Delta\gamma^{(0)} = \Delta\gamma.$$

ii) Resolver o sistema de equações para: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \dfrac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \dfrac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \dfrac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{k} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = -\begin{bmatrix} R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \\ R_{\Delta\gamma} \end{bmatrix}^{k}$$

iii) Calcular:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)};$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\Delta\gamma^{(k+1)}.$$

iv) Verificar convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \sigma_{eq\,n+1}^{(k+1)} - \sigma_{yo} - H^{I}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n}^{p} - H^{I}\Delta\gamma^{(k+1)} \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} : \boldsymbol{N}_{n+1}^{(k+1)}}{\sigma_{eq\,n+1}^{(k+1)}}$$

$$erro = \frac{\phi^{(k+1)}}{\left[\sigma_{yo} + H^{I}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n}^{p} + H^{I}\Delta\gamma^{(k+1)} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} : \boldsymbol{N}_{n+1}^{(k+1)}}{\sigma_{eq\,n+1}^{(k+1)}}\right]} \leq toler\hat{a}ncia$$

v) Fim.

3.2 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Para a implementação implícita do modelo numérico descrito acima em elementos finitos é necessário construir a matriz rigidez do material. Esta é obtida pela determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização (De Sousa Neto, 2002). Considerando um caso elástico, o operador tangente no tempo t_{n+1} passa a ser simplesmente o operador elástico, descrito por:

$$\widehat{\mathbb{D}}^{e} = \mathbb{D} \ . \tag{3.13}$$

onde $\mathbb{D}$ é matriz tangente elástica que depende do módulo de elasticidade, *E*, e o coeficiente de Poisson, *v*, do material.

Por outro lado, em um caso elasto-plástico o operador tangente, escrito por $\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$**,** é definido como:

$$\widehat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \ , \tag{3.14}$$

onde $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ representa a função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões, definida pelo algoritmo de retorno, que é dependente de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$.

A metodologia aplicada para determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é escrito a partir da Eq. (3.11) escrita na forma inversa:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \mathrm{d}\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{D}^{e} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \end{bmatrix} \ , \tag{3.15}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \dfrac{\partial R_{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} \\ \dfrac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} & \dfrac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \ , \tag{3.16}$$

O termo C_{22} representa um escalar, os termos $\boldsymbol{C}_{12}$ e $\boldsymbol{C}_{21}$ representam tensores de segunda ordem, e $\mathbb{C}_{11}$ representa um tensor de quarta ordem. Assim, a partir da Eq. (3.15), pode-se escrever que:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \mathbb{C}_{11} : \mathbb{D}^{e} \ , \tag{3.17}$$

onde a operação ($\mathbb{C}_{11} : \mathbb{D}^{e}$) representa a composição entre o tensor de quarta ordem $\mathbb{C}_{11}$ e o tensor de quarta ordem $\mathbb{D}^{e}$.

3.3 IMPLEMENTAÇÃO DA SUB-ROTINA UMAT

O programa a ser utilizado neste trabalho foi o pacote de simulação comercial Abaqus CAE 6.10-1, devido a facilidade de implementação de sub-rotinas materiais. Como a estratégia numérica escolhida foi a de integração implícita, a sub-rotina a ser utilizada, adequada para esta, é a sub-rotina material UMAT desenvolvida em linguagem FORTRAN.

A fim de que o Abaqus CAE 6.10-1 execute uma sub-rotina UMAT em um computador com Windows 7 de 64 bit é necessário que esteja instalado os programas Microsoft Visual Studio 2008 Professional Edition e Intel Fortran Compiler Version 11.1. Apesar de haver versões mais atuais desses programas, não foi possível utiliza-los devido a problemas encontrados de compatibilidade como também erros durante compilação. No Anexo II é apresentado os passos para configurar o Abaqus com os programas mencionados.

Uma rotina similar à desejada foi feita inicialmente em um programa acadêmico devido as facilidades em se escrever a rotina bem como analisar e corrigir possíveis erros de programação. E então posteriormente adapta-la para a sub-rotina material UMAT escrita em linguagem FORTRAN. As sub-rotinas referentes ao algoritmo de retorno e a de tangente consistente estão nos Anexos III e IV deste trabalho.

4 ANÁLISE DA SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO

Neste capítulo é feito uma análise da forma e convexidade da superfície de escoamento de Gao, considerando diferentes valores de a_1e b_1. Esta análise é feita através da comparação das superfícies de escoamento de von Mises e Tresca.

Para fazer a análise comparativa das superfícies de escoamento desenvolveu-se uma rotina no programa MATLAB R2010a para impressão de um gráfico que represente para cada modelo constitutivo considerado sua respectiva função de escoamento. Para tanto foi necessário considerar as mesmas condições em cada modelo como um limite de escoamento de um material hipotético igual a 360 MPa e os mesmos valores limites para os eixos do gráfico no plano das tensões principais, $\sigma_1 - \sigma_2$.

Primeiramente, considerando $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$, obteve-se a Fig. (4.1), que mostra que o modelo de Gao apresenta o mesmo comportamento que o modelo de von Mises já que as superfícies de escoamento dos mesmos coincidiram. Verifica-se a partir da legenda do gráfico que a superfície de escoamento para o modelo de von Mises está indicada por uma linha tracejada com círculos pretos, para o modelo de Tresca por uma linha azul e para o modelo de Gao por uma linha tracejada na cor roxa.

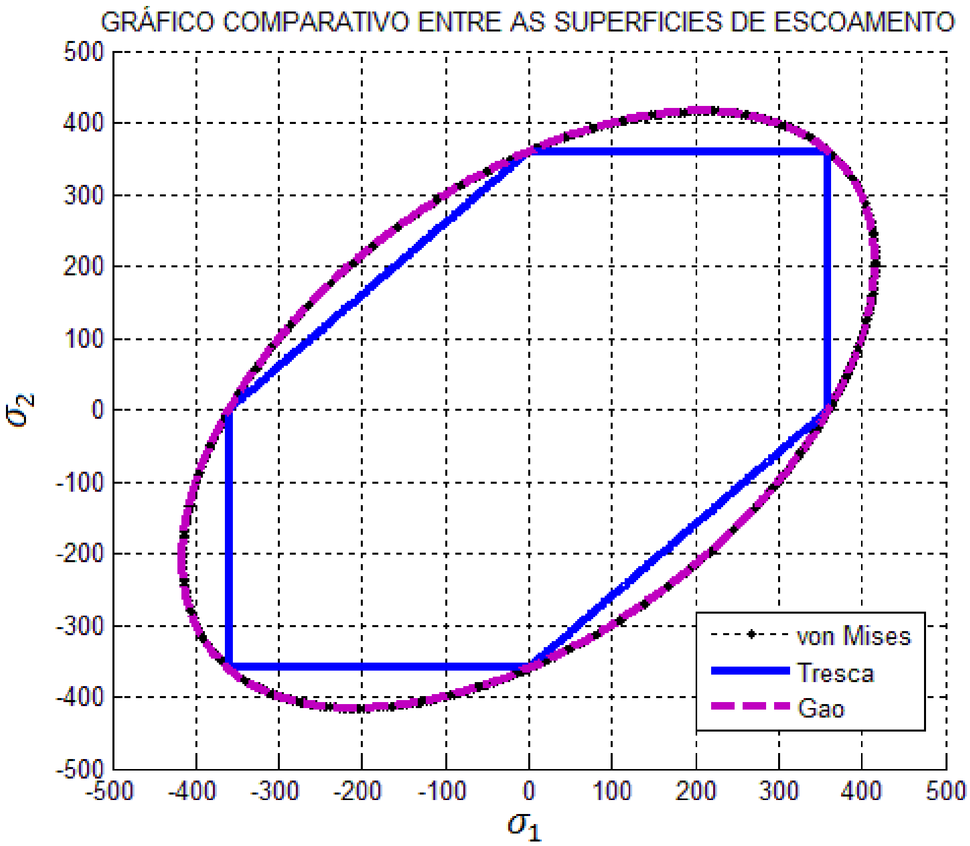


Figura 4. 1 - Comparação entre as superfícies de escoamento para $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$.

Para os valores de $a_1 = 0$ e $b_1 = -30$, obtém-se a Fig. (4.2). Este mostra que a superfície de escoamento de Gao difere-se ligeiramente do modelo de von Mises e difere-se muito do modelo de Tresca.

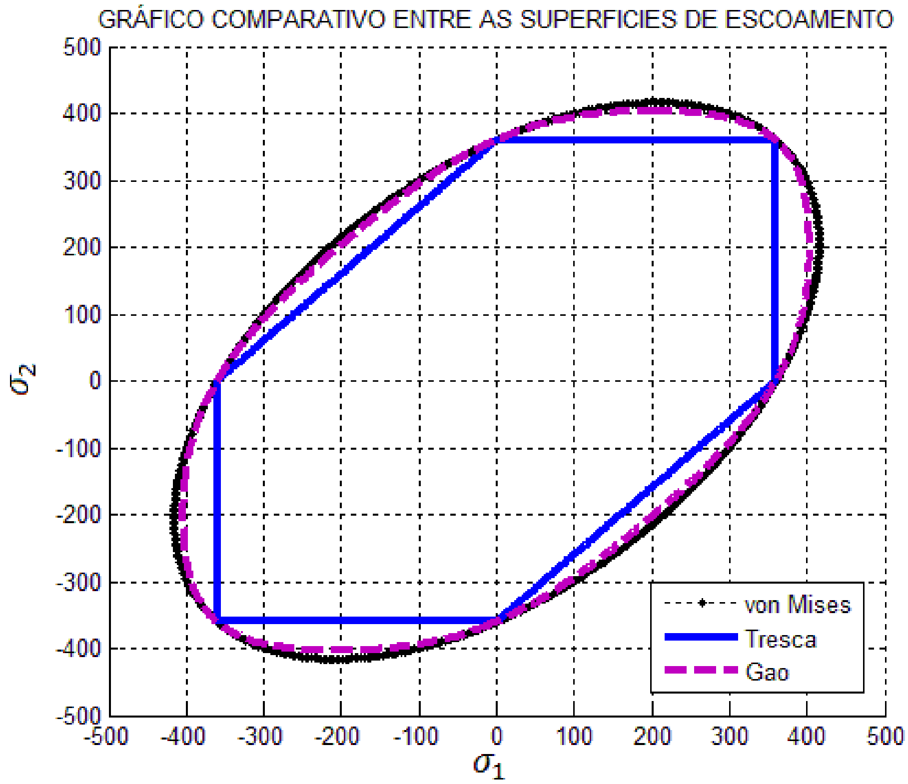


Figura 4. 2 - Comparação entre as superfícies de escoamento para $a_1 = 0$ e $b_1 = -30$.

Com os valores de $a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$, observa-se pela Fig. (4.3) que a superfície de escoamento de Gao está caminhando em direção a curva da superfície de escoamento de Tresca e, portanto, se afastando da curva de von Mises.

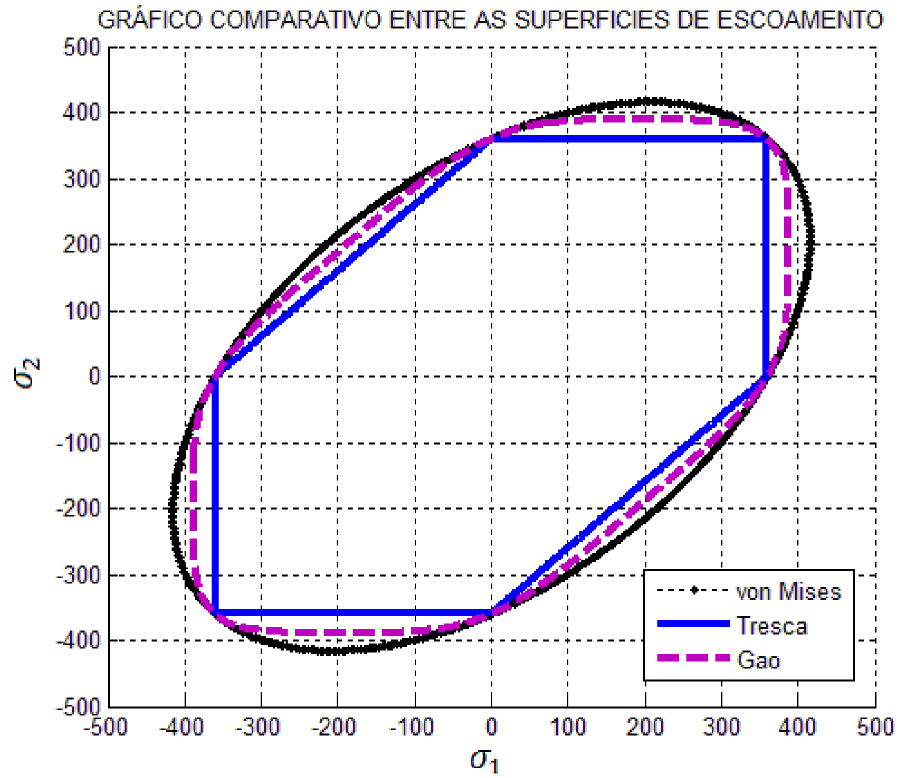


Figura 4. 3 - Comparação entre as superfícies de escoamento para $a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$.

A Figura (4.4) mostra que a curva da superfície de escoamento de Gao se aproxima do formato da superfície de escoamento de Tresca, entretanto sua forma continua diferente. Verificou-se que a partir deste ponto mesmo aumentando o valor de b_1, a curva correspondente à superfície de escoamento de Gao não se aproximava da superfície de escoamento de Tresca, esta na verdade se deformava ainda mais.

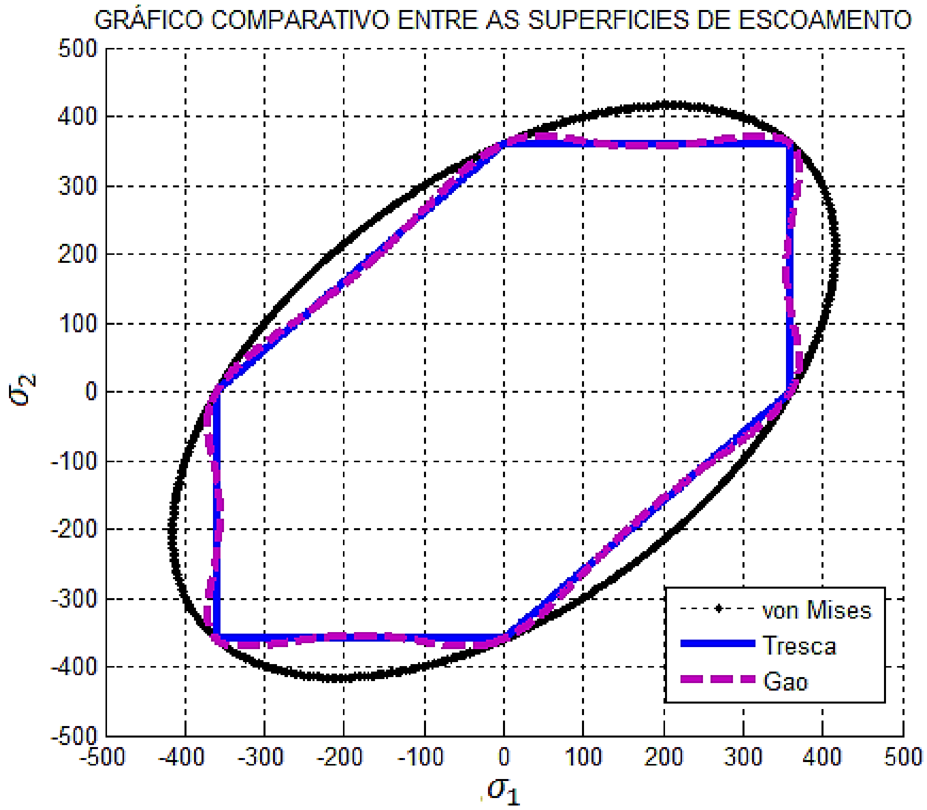


Figura 4. 4 - Comparação entre as superfícies de escoamento para $a_1 = 0$ e $b_1 = -111{,}6$.

Para os valores de $a_1 = 0{,}0006$ e $b_1 = 0$, observa-se pela Fig. (4.5) que há uma pequena distinção entre a curva de Gao e a curva de von Mises. Com a alteração dos valores de a_1 foi percebido de que a superfície de escoamento de Gao variava apenas o seu tamanho sem tender a outra curva.

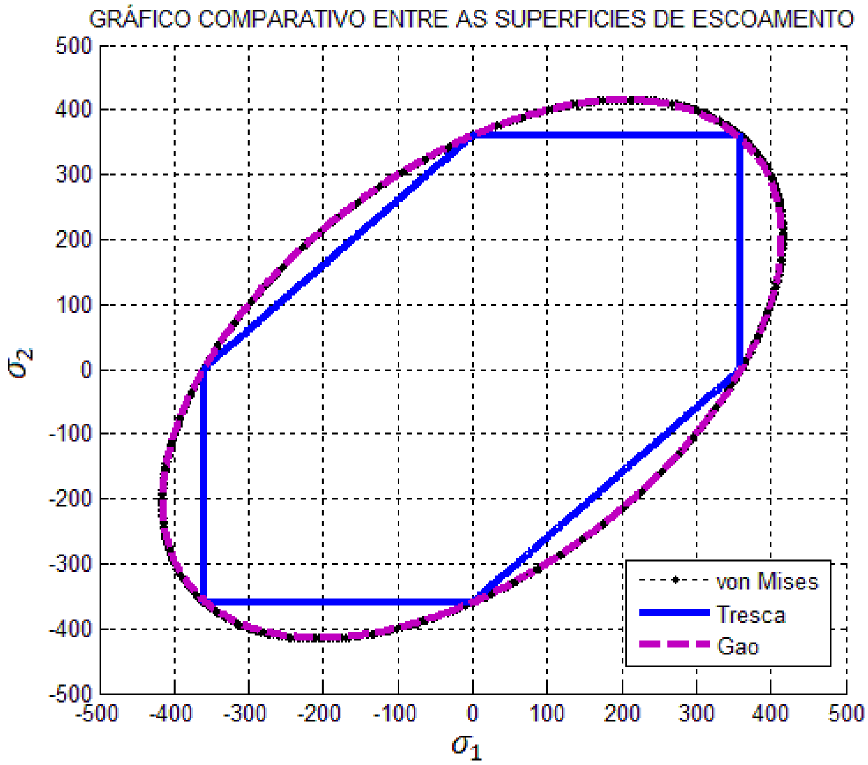


Figura 4. 5 - Comparação entre as superfícies de escoamento para $a_1 = 0{,}0006$ e $b_1 = 0$.

Entretanto com os valores de $a_1 = 0{,}0006$ e $b_1 = -110$, observa-se pela Fig. (4.6) que a curva de Gao tende a coincidir com a curva de Tresca até mais do que quando se usou os valores de $a_1 = 0$ e $b_1 = -110$. Portanto, pode-se dizer que ao considerar valores de a_1 diferentes de zero, isto provoca uma maior precisão na descrição do comportamento do material.

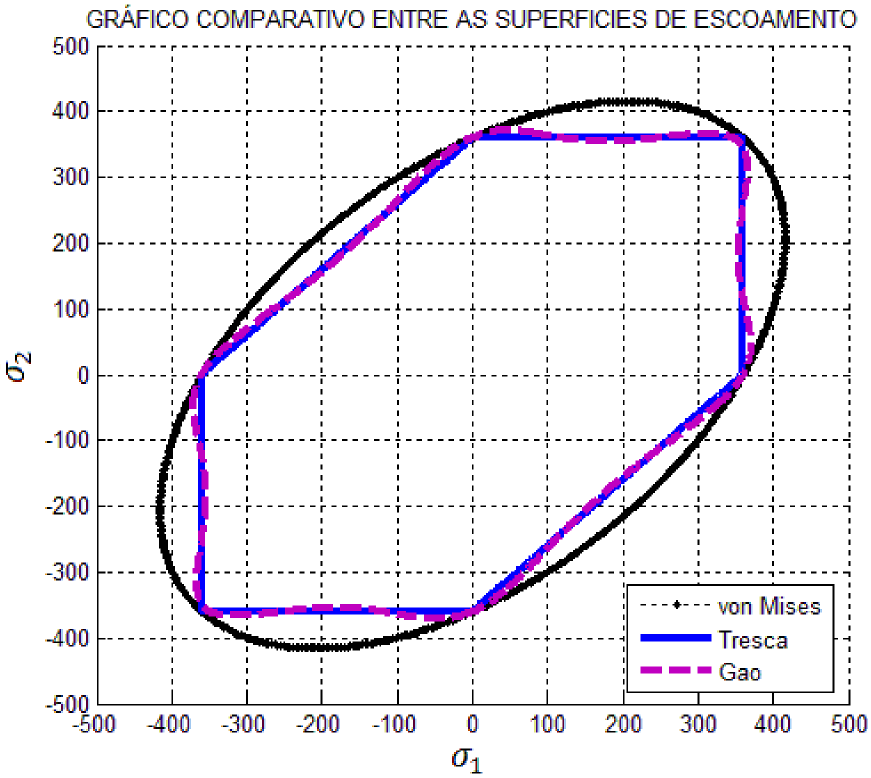


Figura 4. 6 - Comparação entre as superfícies de escoamento para $a_1 = 0{,}0006$ e $b_1 = -111{,}6$.

Pode-se também verificar pela Eq. (2.10) que a_1 é responsável por introduzir o efeito da tensão hidrostática no domínio elástico proposto por Gao já que acompanha o invariante I_1, e b_1 é responsável de introduzir o efeito de forma já que acompanha o invariante J_3 desta equação.

Verificou-se nesse estudo que existem materiais que se comportam segundo o critério de escoamento de von Mises, outros segundo o critério de escoamento de Tresca e outros de maneira intermediária. Observou-se, portanto, que utilizando do domínio elástico proposto por Gao é possível descrever o comportamento mecânico de uma gama muito maior de materiais.

Também foi observado a não convexidade do critério de escoamento de Gao pelas Fig. (4.4) e (4.6) a partir de valores críticos da constante do material próximos à $b_1 = -111{,}6$. Este resultado mostra que matematicamente o problema pode estar mal posto e além de causar problemas de convergência dentro dos algoritmos propostos.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo será feito uma análise dos resultados do modelo implícito implementado em um desenvolvimento em elementos finitos, através de uma rotina UMAT que descreve o domínio elástico proposto por Gao. Para esta análise foram estudados inicialmente, diferentes corpos de prova em aço SAE 1045 (Teng, 2008; Bai, 2008) e em alumínio aeronáutico (Teng, 2008; Bai, 2008) considerando os valores dos parâmetros $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ e $a_1 = 0$, $b_1 = -60{,}75$. E por fim, uma comparação entre os resultados numéricos e experimentais para a curva de reação e de evolução da deformação plástica dos espécimes será realizada.

5.1 GEOMETRIA E DEFINIÇÃO DA MALHA PARA O AÇO SAE 1045

Foram definidos dois corpos de prova para o aço SAE 1045, retirados da literatura (Teng, 2008; Bai, 2008). Para análise de tração adotou-se um corpo de prova cilíndrico liso e para análise de cisalhamento um corpo de prova tipo borboleta. As dimensões e a geometria desses corpos de prova podem ser observadas na Fig. (5.1).

As malhas definidas para estes corpos de prova são ilustradas respectivamente na Fig. (5.2). Observa-se que o corpo de prova cilíndrico liso foi modelado de forma simplificada como um problema 2D axissimétrico o que permitiu realizar uma simulação com menor custo computacional sendo ainda condizente com a realidade (Alves, 2007). Observa-se também, por esse mesmo motivo, que a malha foi refinada na região de interesse que é o lugar onde ocorrerá experimentalmente a falha dos corpos de prova (Bai, 2008).

Para os corpos de prova modelados como 2D axissimétrico escolheu-se o elemento quadrilateral de 8 nós e para o corpo de prova tipo borboleta o elemento hexaédrico de 20 nós. Na Tabela (5.1) apresenta o número de elementos e nós para cada corpo de prova.

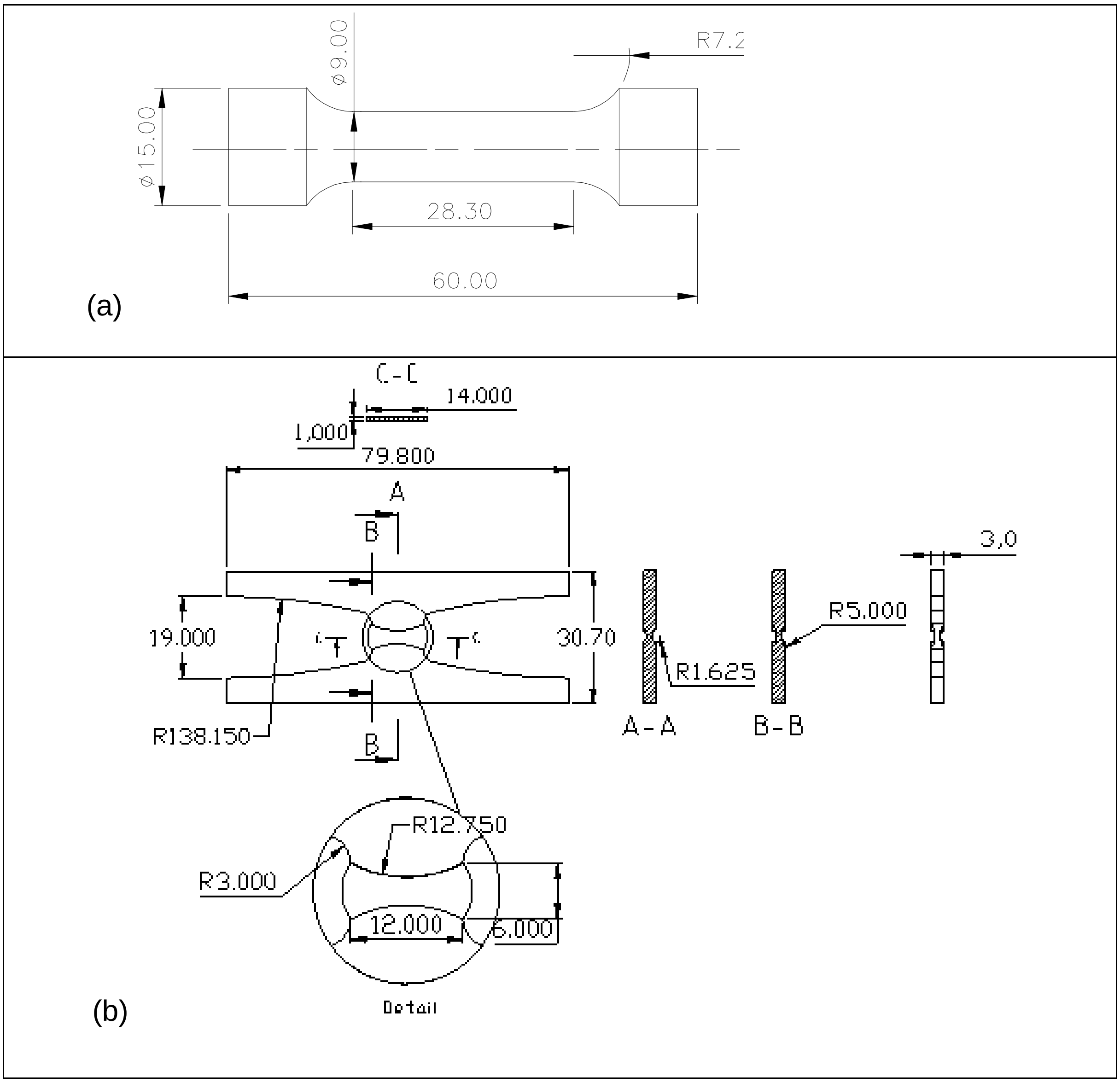


Figura 5. 1 - Corpos de prova para o aço 1045. a) cilíndrico liso e b) tipo borboleta (Teng, 2008; Bai, 2008).

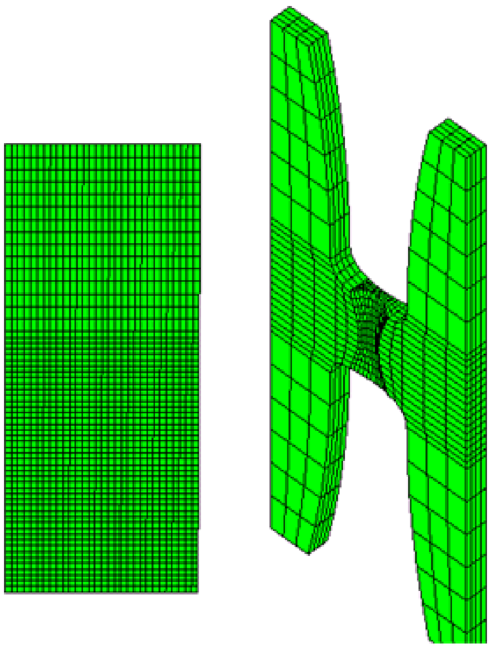


Figura 5. 2 - Diferentes corpos de prova e suas respectivas malhas.

Tabela 5. 1 - Número de nós e de elementos para cada corpo de prova do aço SAE 1045.

CORPO DE PROVA	NÚMERO DE NÓS	NÚMERO DE ELEMENTOS
LISO	5581	1800
BORBOLETA	7773	1440

Os corpos de prova foram modelados de forma a representar um ensaio submetendo os mesmos à um deslocamento até a falha, de acordo com observações experimentais (Bai,2008). Para o corpo de prova cilíndrico liso representar um ensaio de tração, aplicou-se um deslocamento igual à $uy = 1{,}6\ mm$, e para o tipo borboleta representar um ensaio de cisalhamento aplicou-se um deslocamento de $ux = 1{,}0\ mm$ (Bai,2008). As demais condições de contorno estão ilustradas na Fig. (5.3).

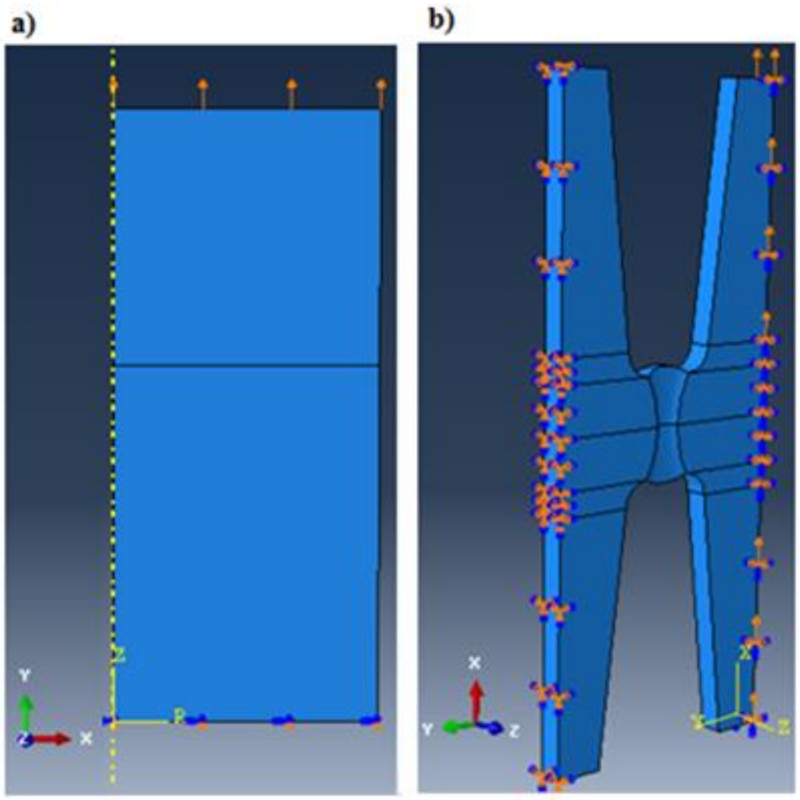


Figura 5. 3 - Condições de contorno realizadas no Abaqus para o corpo de prova em aço SAE 1045. a) Corpo de prova cilíndrico liso. b) Corpo de prova tipo borboleta.

5.2 RESULTADOS DO AÇO SAE 1045

A primeira análise realizada foi considerando o aço SAE 1045. Este possui as propriedades de módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, limite de escoamento inicial, coeficiente de encruamento e expoente de encruamento apresentadas na Tab. (5.2). Pode-se observar também a curva de encruamento deste material pela Fig. (5.4).

Tabela 5. 2 - Propriedades do aço SAE 1045. Fonte: Bai, 2008.

PROPRIEDADES	VALOR	UNIDADE
MÓDULO DE ELASTICIDADE, E	220.000	MPa
COEFICIENTE DE POISSON, ν	0,33	-
LIMITE DE ESCOAMENTO INICIAL, σ_{yo}	830	MPa
MÓDULO DE ENDURECIMENTO, H^{I}	1.128,9	MPa
EXPOENTE DE ENCRUAMENTO, μ	0,1	-

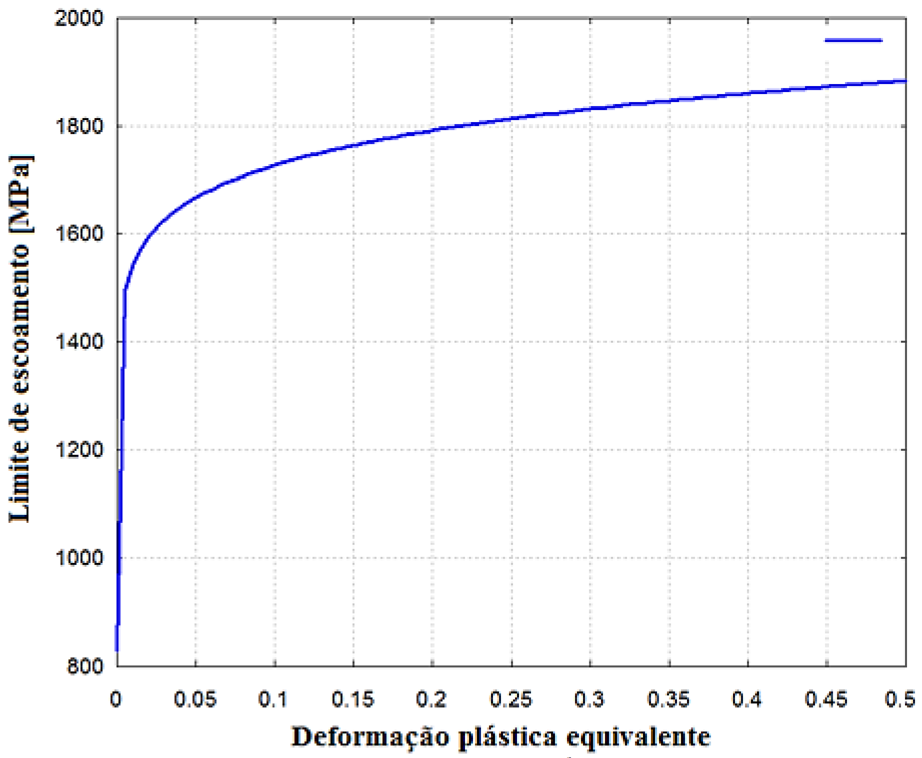


Figura 5. 4 - Curva de encruamento do aço SAE 1045. Fonte: Bai, 2008.

5.2.1 TENSÃO E DEFORMAÇÃO EQUIVALENTE OBTIDA PARA O AÇO SAE 1045

As Figuras (5.5) a (5.8), a seguir, apresentam os resultados obtidos utilizando o modelo de Gao em elementos finitos. São comparadas as tensões equivalentes de von Mises, bem como a deformação plástica considerando primeiramente os valores das constantes do material de $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$.

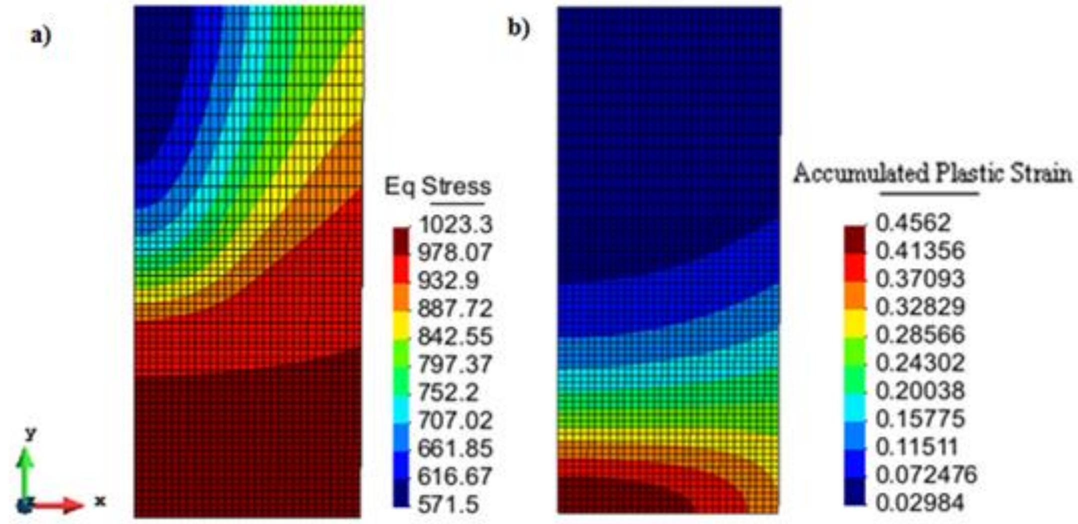


Figura 5. 5 - Resultados obtidos para o corpo de prova liso em aço SAE 1045: a) Tensão equivalente de von Mises; e b) a Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = 0$).

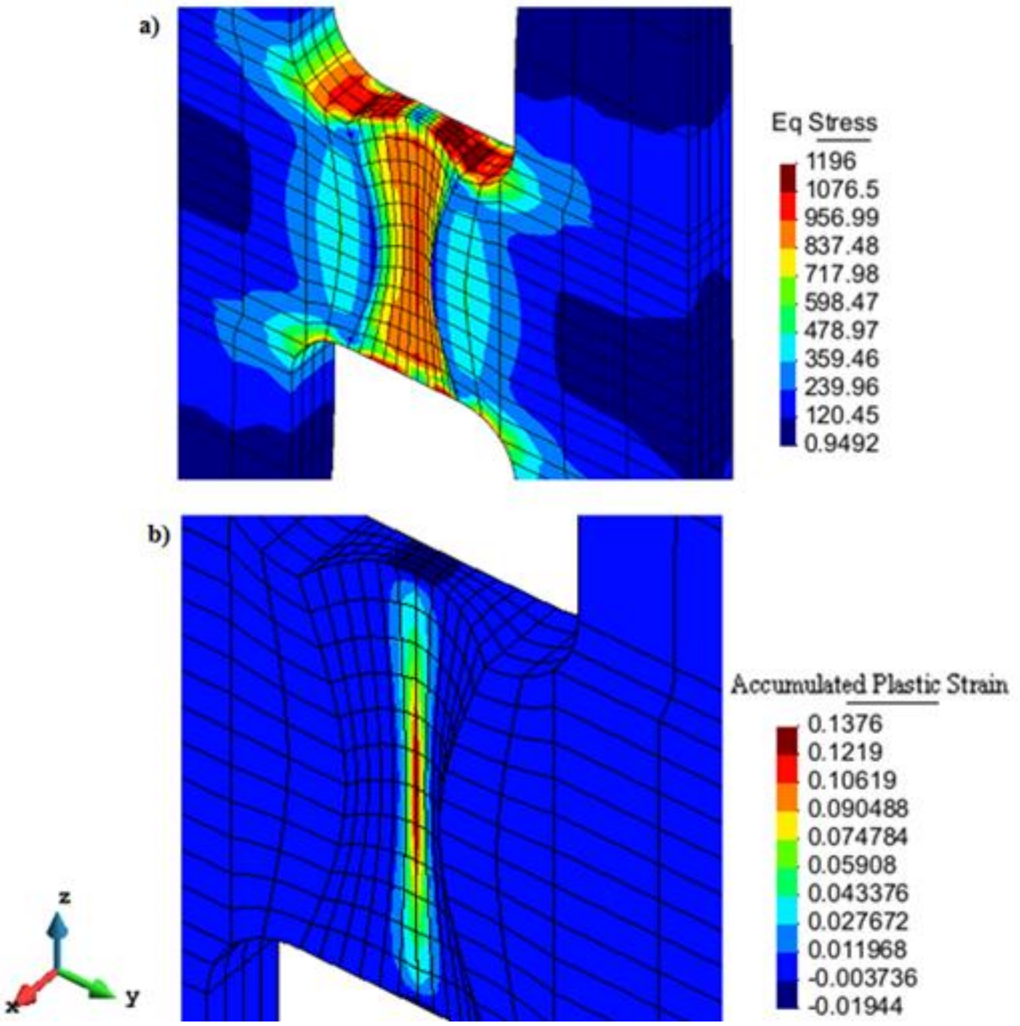


Figura 5. 6 - Resultados obtidos para o corpo de prova tipo borboleta em aço SAE 1045: a) Tensão equivalente de von Mises; e b) a Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = 0$).

A fim de avaliar a influência do terceiro invariante do tensor desviador, utilizou-se para os mesmos corpos de prova os seguintes valores de $a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$. Obtiveram-se deste modo os resultados mostrados a seguir.

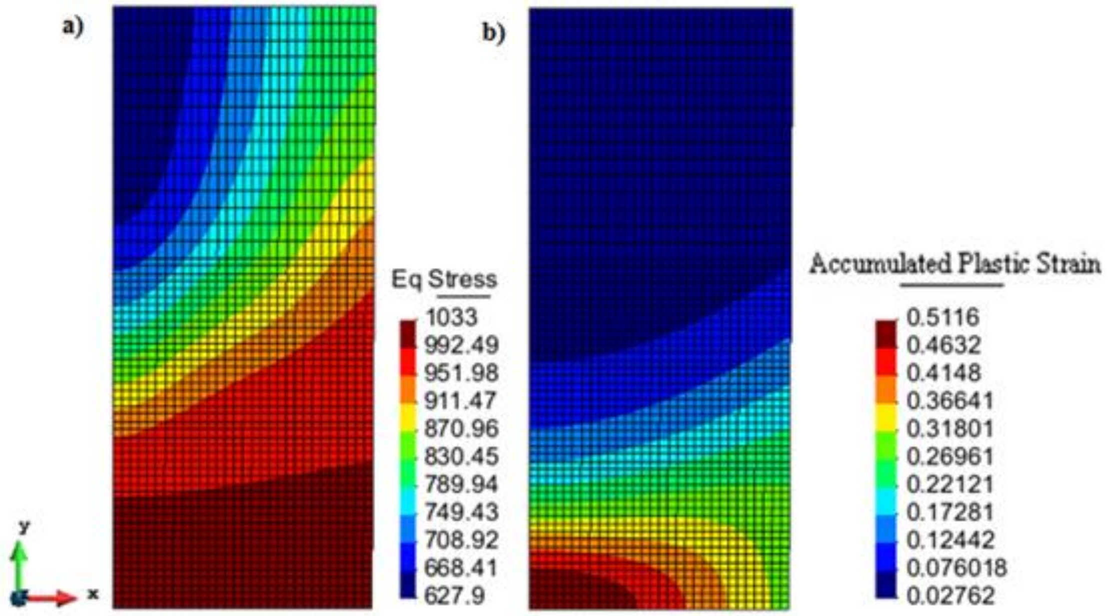


Figura 5. 7 - Resultados obtidos para o corpo de prova liso em aço SAE 1045: a) Tensão equivalente de von Mises; b) a Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$).

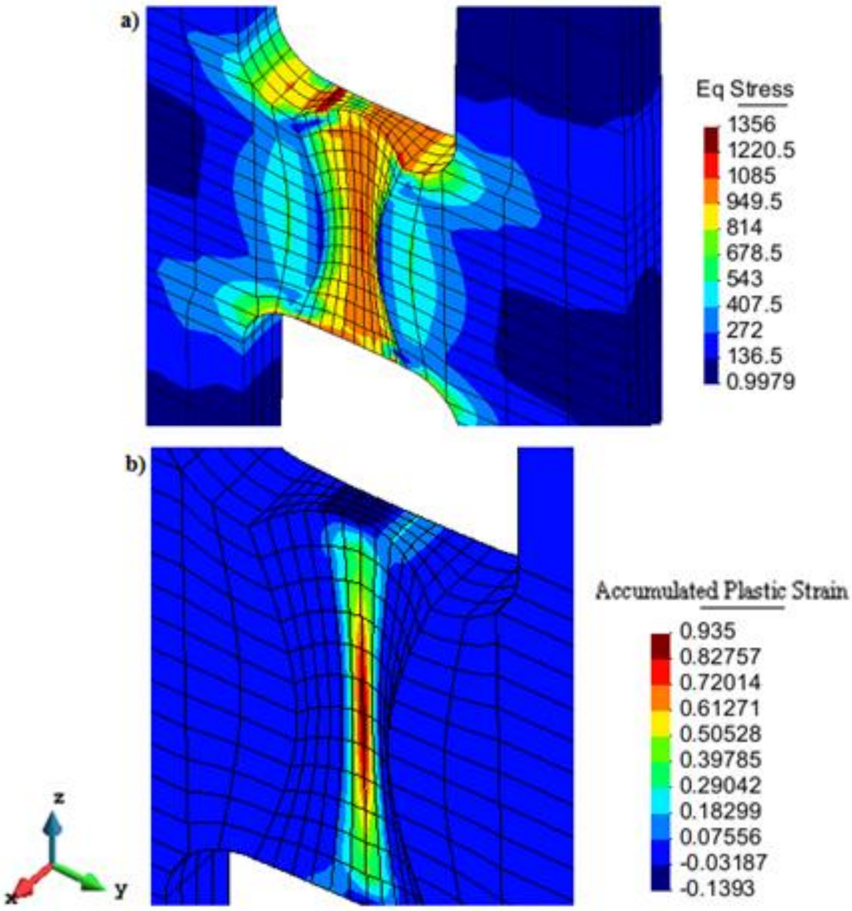


Figura 5. 8 - Resultados obtidos para o corpo de prova tipo borboleta em aço SAE 1045: a) Tensão equivalente de von Mises; b) Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$).

5.2.2 CURVAS DE REAÇÃO E EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA OBTIDAS PARA O AÇO SAE 1045

Analisando os gráficos obtidos, percebe-se que o corpo de prova do tipo borboleta apresentou a maior diferenciação entre os dois casos o que mostra uma maior influência da constante do material $b_1 = -60{,}75$, responsável pelo efeito de forma do material.

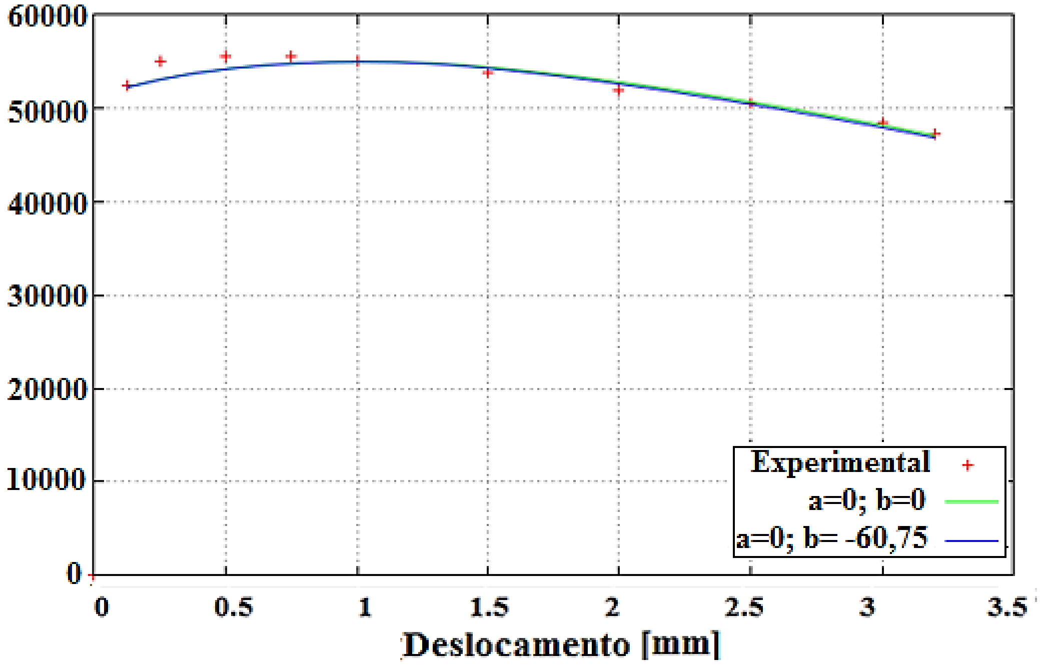


Figura 5. 9 – Curva de reação para o corpo de prova liso (aço SAE 1045).

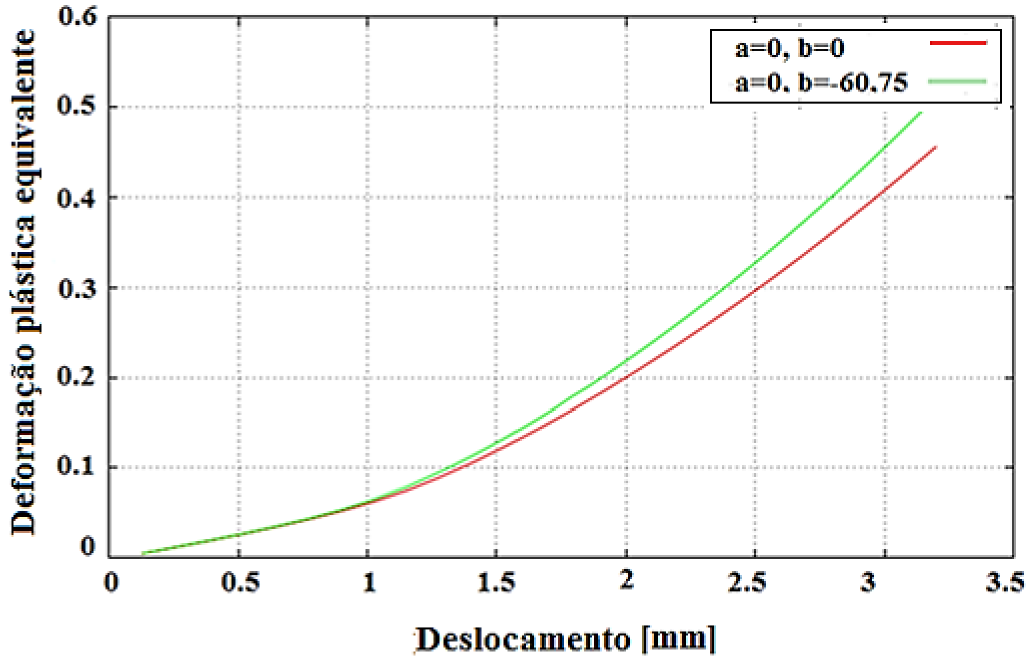


Figura 5. 10- Evolução da deformação plástica para o corpo de prova liso (aço SAE 1045).

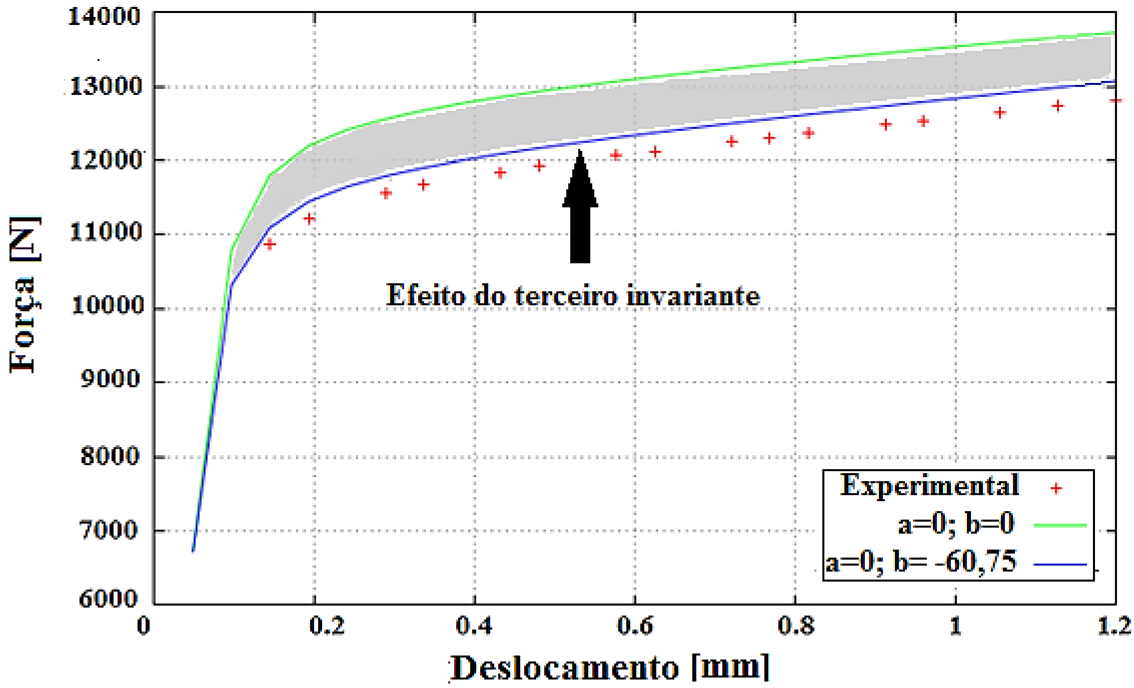


Figura 5. 11– Curva de reação para o corpo de prova borboleta (aço SAE 1045).

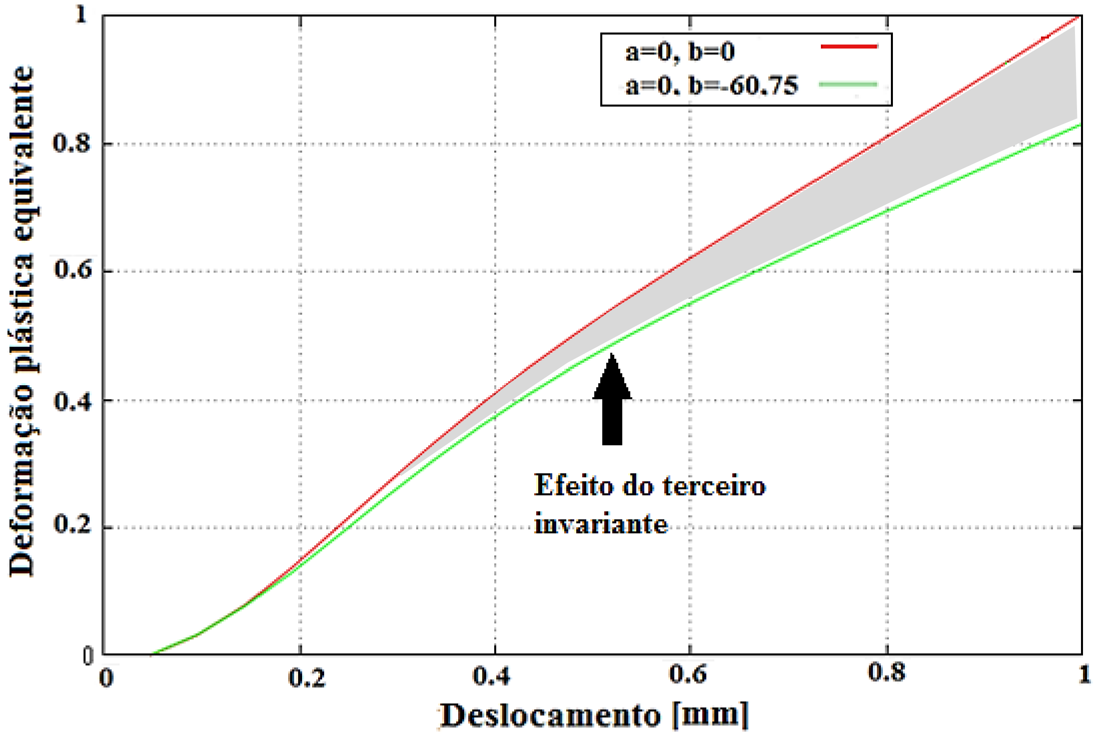


Figura 5. 12 – Evolução da deformação plástica para o corpo de prova borboleta (aço SAE 1045).

5.3 GEOMETRIA E DEFINIÇÃO DA MALHA DO ALUMÍNIO AERONÁUTICO

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, foram definidos dois tipos de corpos de prova em alumínio aeronáutico sendo que para um será feito uma análise de tração e para o outro uma análise de cisalhamento (Driemeier *et al.*, 2010). Para a análise de tração e de cisalhamento foram adotados corpos de prova retangulares com dimensões e geometrias conforme apresentados na Fig. (5.13).

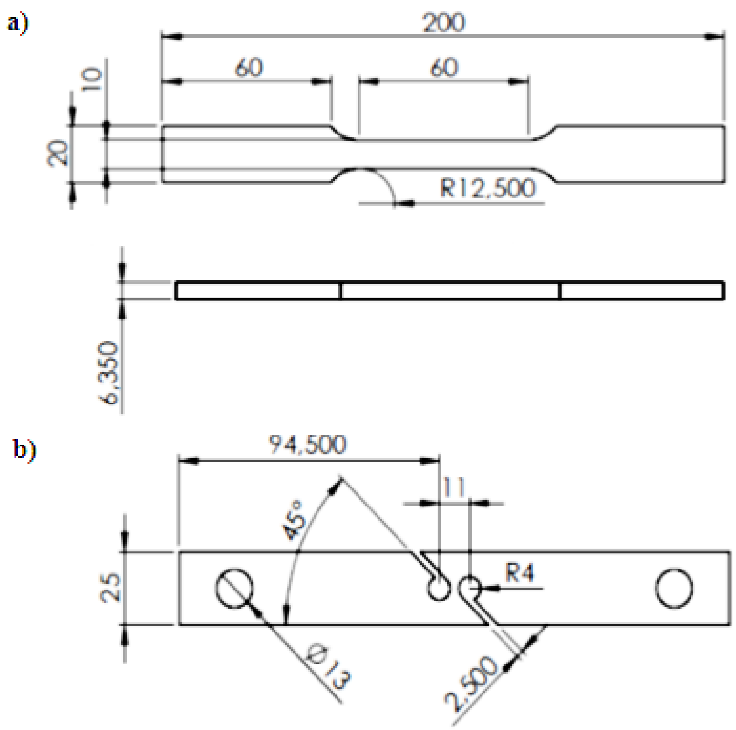


Figura 5. 13 - Dimensões e geometria do corpo de prova em alumínio aeronáutico. a) Retangular liso e b) Retangular entalhado.

As malhas definidas para o alumínio aeronáutico são ilustradas na Fig. (5.14). Observa-se que ambos os corpos de prova foram simplificados e modelados como problemas 3D. Foi escolhido o elemento hexaédrico de 8 nós para o corpo de prova retangular liso e o elemento hexaédrico de 20 nós para o corpo de prova retangular entalhado. Na Tabela (5.3) apresenta o número de elementos e nós para cada corpo de prova.

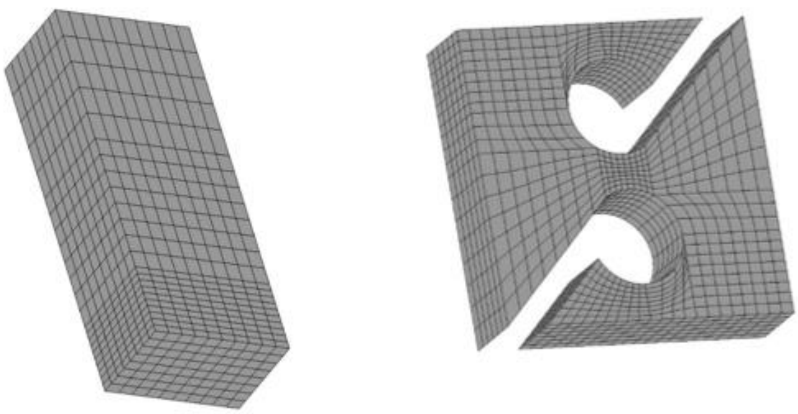


Figura 5. 14 - Malhas para os corpos de prova em alumínio aeronáutico.

Tabela 5. 3 - Número de nós e de elementos para cada corpo de prova em alumínio aeronáutico.

CORPO DE PROVA	NÚMERO DE NÓS	NÚMERO DE ELEMENTOS
Retangular Liso	2376	1840
Retangular Entalhado	17165	3456

Os corpos de prova em alumínio aeronáutico também foram modelados de forma a representar um ensaio submetendo os mesmos à um deslocamento até a falha (Driemeier *et al.*, 2010). Para o corpo de prova retangular liso representar um ensaio de tração e o corpo de prova retangular entalhado representar um ensaio de cisalhamento aplicou-se os respectivos deslocamentos de $uy = 3{,}75\ mm$ e $uy = 2{,}0\ mm$ e condições de contorno como ilustra a Fig.(5.15).

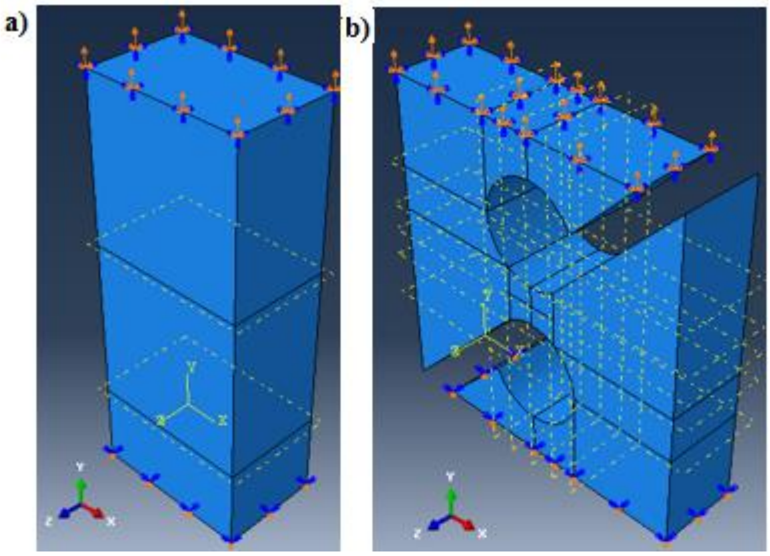


Figura 5. 15 - Condições de contorno realizadas no Abaqus para o alumínio aeronáutico. a) Corpo de prova retangular liso. b) Corpo de prova retangular entalhado.

5.4 RESULTADOS DO ALUMÍNIO AERONÁUTICO

As propriedades adotadas de módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e limite de escoamento inicial do alumínio aeronáutico estão apresentados na Tab. (5.4). A curva de encruamento utilizada deste material pode ser observada pela Fig. (5.16).

Tabela 5. 4 - Propriedades do alumínio aeronáutico. Fonte: Driemeier *et al.*, 2010.

PROPRIEDADES	VALOR	UNIDADE
MÓDULO DE ELASTICIDADE, E	65.000	MPa
COEFICIENTE DE POISSON, v	0,3	-
LIMITE DE ESCOAMENTO INICIAL, σ_{yo}	420	MPa
MÓDULO DE ENDURECIMENTO, H^I	1.383,58	MPa
EXPOENTE DE ENCRUAMENTO, μ	0,115	-

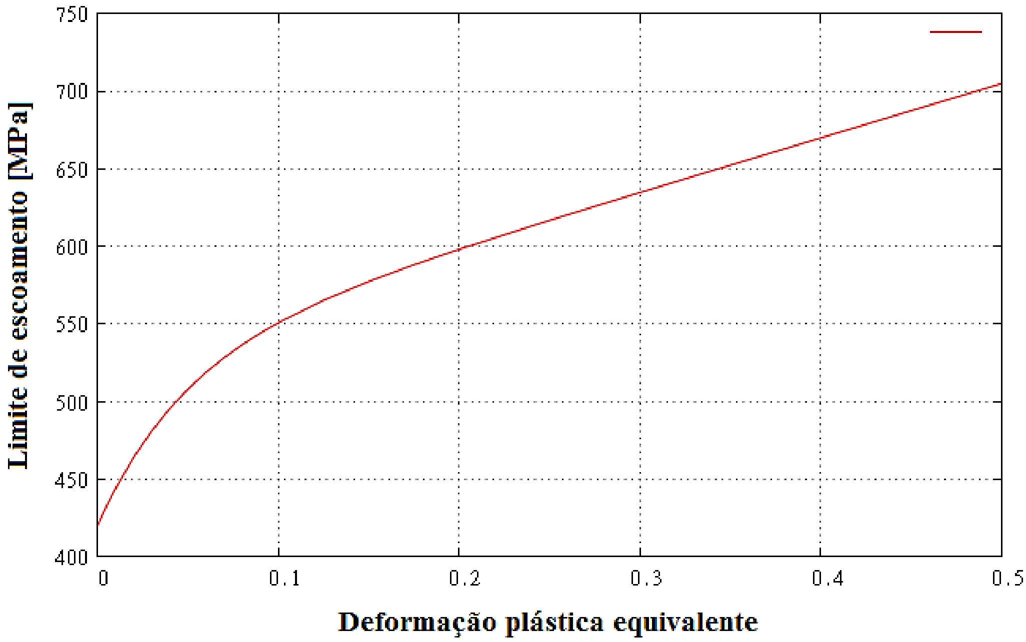


Figura 5. 16 - Curva de encruamento do alumínio aeronáutico. Fonte: Driemeier *et al.*, 2010.

5.4.1 TENSÃO E DEFORMAÇÃO EQUIVALENTES OBTIDAS PARA O ALUMÍNIO AERONÁUTICO

Os resultados obtidos de tensão equivalente e deformação plástica para o corpo de prova retangular liso, considerando as constantes do material com valores de $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$, foram iguais à:

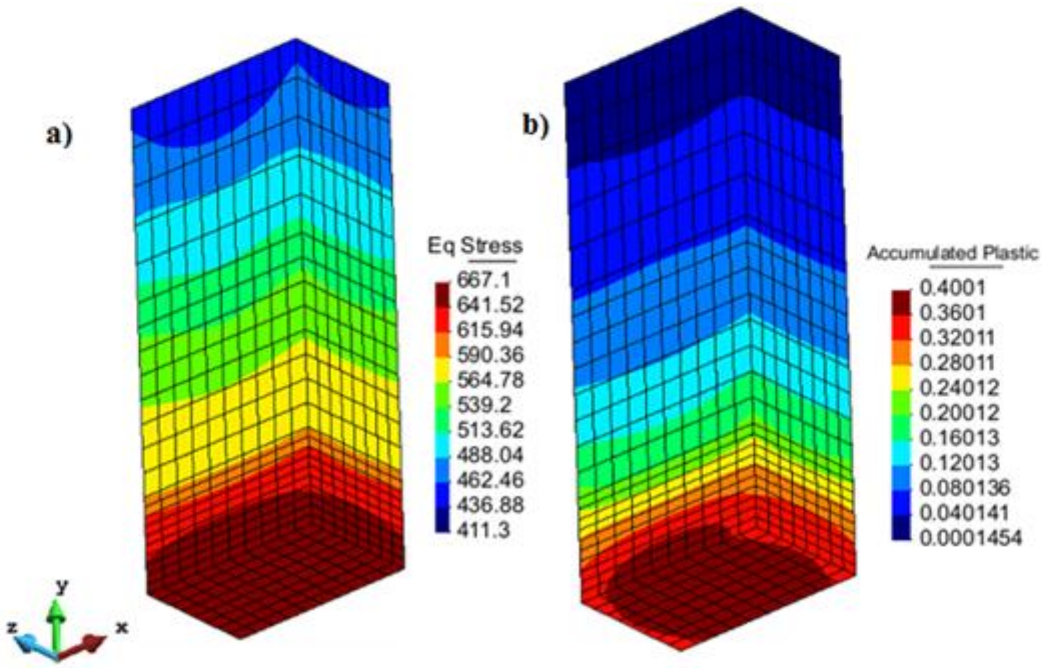


Figura 5. 17 – Resultados para o corpo de prova retangular liso em alumínio aeronáutico: a) Tensão equivalente de von Mises; e b) a Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = 0$).

Utilizando das mesmas constantes do material, obteve-se para o corpo de prova retangular entalhado do alumínio aeronáutico que:

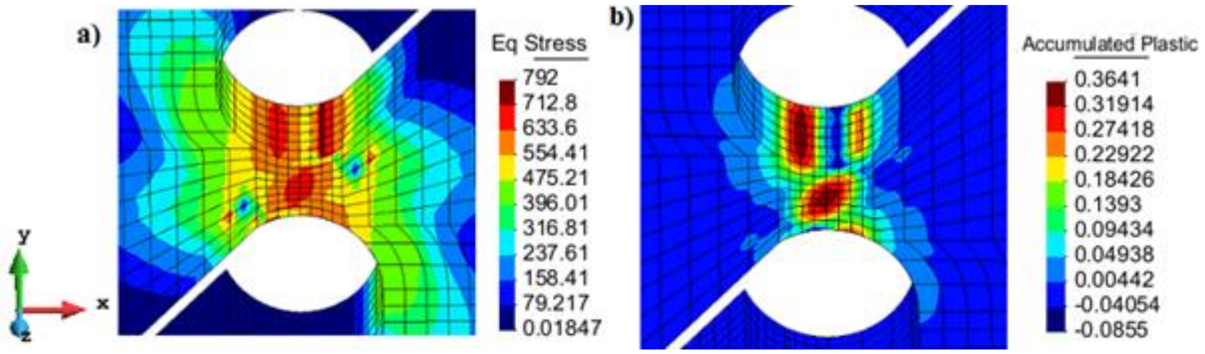


Figura 5. 18 - Resultados para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio aeronáutico: a) Tensão equivalente de von Mises; e b) a Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = 0$).

Fez-se o mesmo procedimento, porém considerando as constante do material valores de $a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$, obtivendo-se os seguintes resultados:

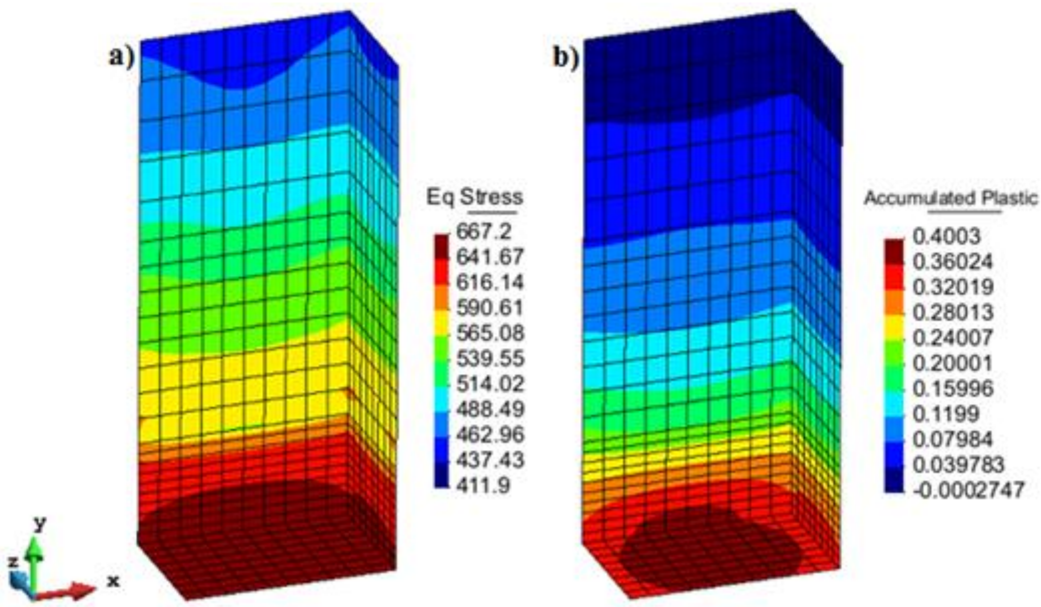


Figura 5. 19 – Resultados para o corpo de prova retangular liso em alumínio aeronáutico: a) Tensão equivalente; b) Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$).

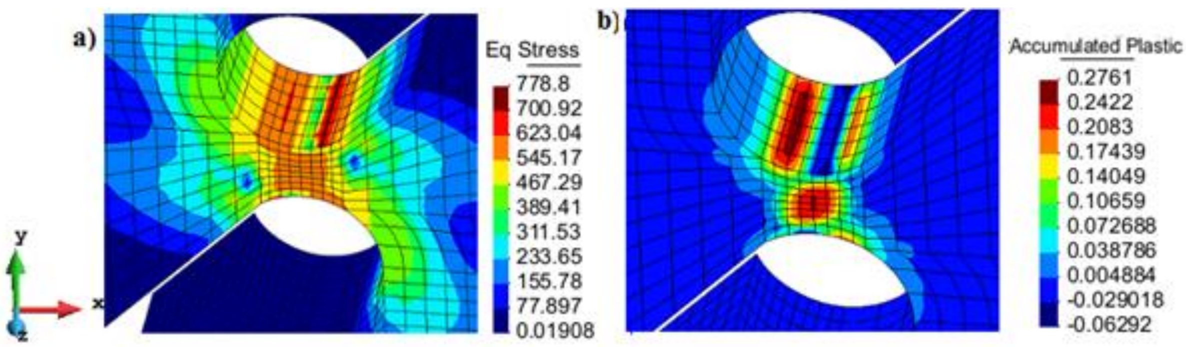


Figura 5. 20 - Resultados para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio aeronáutico: a) Tensão equivalente; b) Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$).

5.4.2 CURVAS DE REAÇÃO E EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA OBTIDAS PARA O ALUMINIO AERONÁUTICO

Para o alumínio aeronáutico também foi realizado uma análise dos gráficos de reação e evolução da deformação plástica obtidos a partir dos dados gerados em elementos finitos. Primeiramente para o corpo de prova retangular liso obteve-se os seguintes resultados:

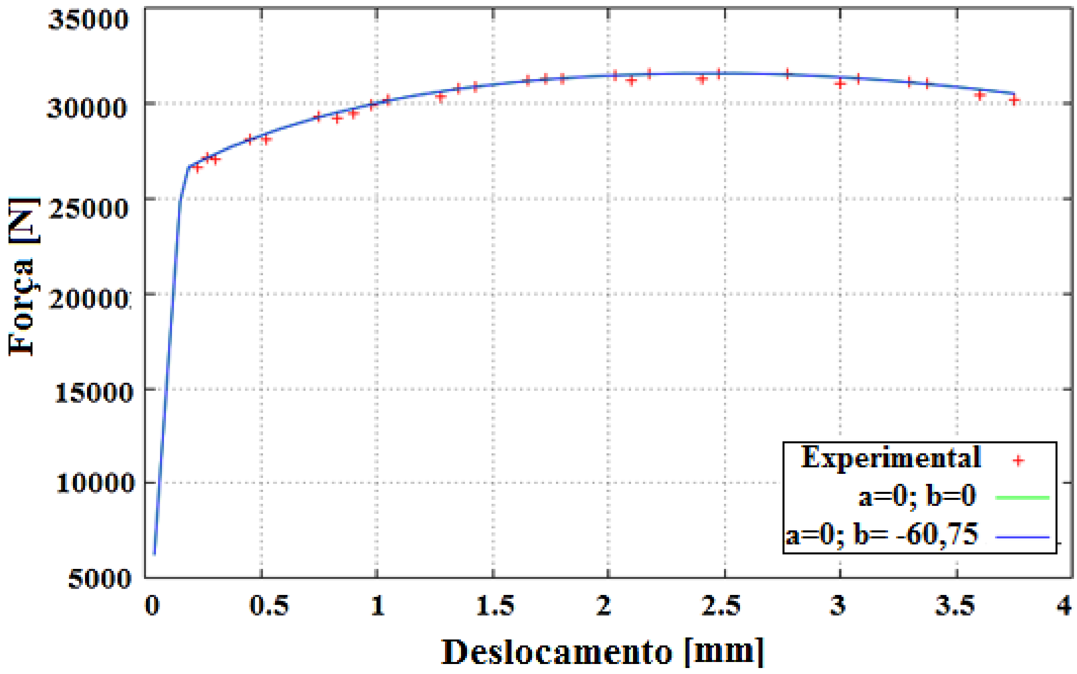


Figura 5. 21 – Curva de reação para o corpo de prova retangular liso em alumínio aeronáutico.

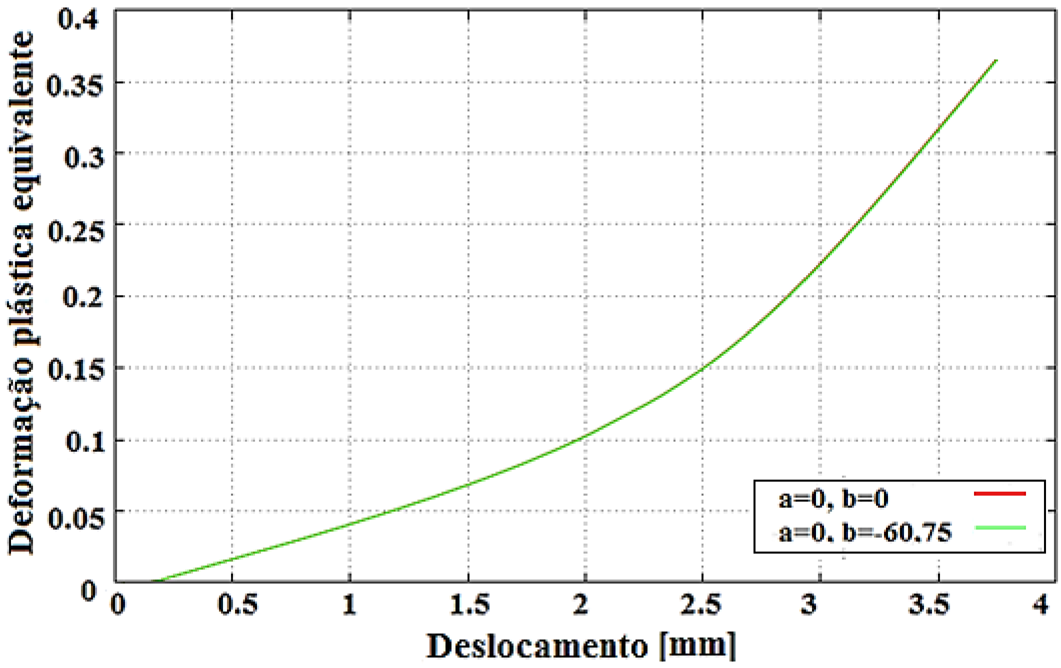


Figura 5. 22 – Evolução da deformação plástica para o corpo de prova retangular liso em alumínio aeronáutico.

Nota-se que na Fig. (5.21) a curva com constante do material de $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$ e a curva com constante do material de $a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$ não se diferem. O efeito da constante do material, b, não foi significativo para este primeiro acaso.

Para o corpo de prova retangular cisalhante obteve-se resultados diferentes, pode-se notar uma diferenciação das curvas geradas.

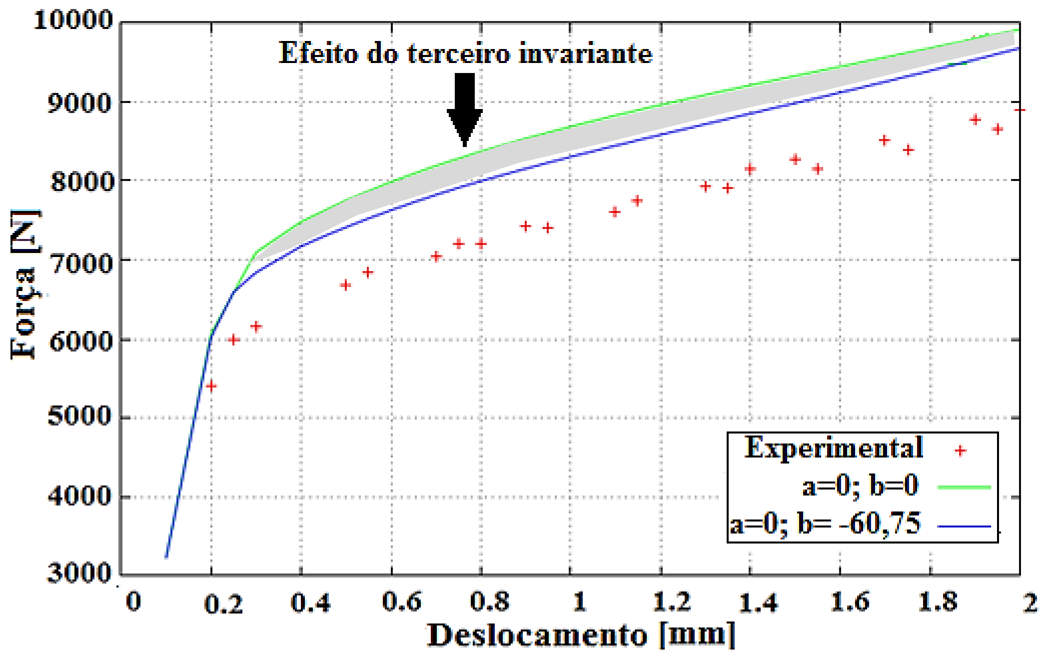


Figura 5. 23 - Curva de reação para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio aeronáutico.

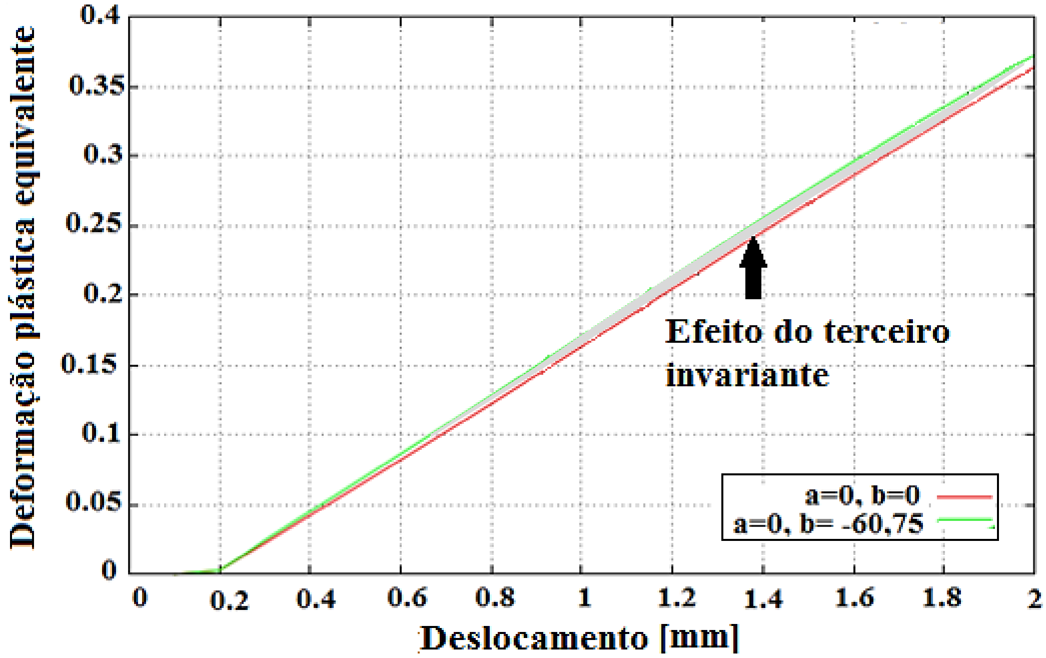


Figura 5. 24 – Evolução da deformação plástica para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio aeronáutico.

Verificou-se que as diferenças dos resultados obtidos das curvas numéricas tanto do aço SAE 1045 e quanto o alumínio aeronáutico foram devido a introdução do efeito do terceiro invariante do tensor desviador, J_3, pela constante do material b_1 diferente de zero. Essa diferença é mais significativa para corpos de provas submetidos a cisalhamento como pode se notar nas Fig. (5.11) e (5.23). Ao se adotar $b_1 = -60,75$, a curva numérica se aproximou mais da curva experimental do que quando utilizou $b_1 = 0$. Pode-se dizer então que a introdução do terceiro invariante do tensor desviador resulta numa melhor previsão do comportamento mecânico de materiais dúcteis (Bai *et al.*, 2008).

Entretanto pode haver casos, como pode se analisar pela Fig. (5.23), por exemplo, que para a curva numérica se aproximar ainda mais da curva experimental, um menor valor do que foi adotado para a constante do material b_1 poderia ser utilizado. Porém como foi visto no capítulo 4, valores muito pequenos de b_1 podem resultar na não convexidade do critério de escoamento de Gao o que é indesejável.

6 ANÁLISE EXPERIMENTAL

Neste capítulo será apresentado os resultados experimentais obtidos do ensaio de corpos de prova da liga de alumínio 6101 para comparação com resultados numéricos. Foram realizados um ensaio de tração uniaxial e um ensaio de cisalhamento com os devidos corpos de prova na máquina da MTS de modelo 647 *Hydraulic Collet Grip*.

6.1 MÁQUINA UTILIZADA

Os ensaios foram realizados no Laboratório de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília na máquina da MTS de modelo 647 *Hydraulic Collet Grip* (Fig. 6.1). Cada garra desta máquina possui força de aperto ajustável para prevenir danos no espécime pela própria garra por aplicação de uma força de aperto excessivo e também para prevenir o deslizamento do corpo de prova durante o teste (Catálogo da MTS, 2013).

Figura 6. 1 - MTS 647 Hydraulic Collet Grip.

Todos os ensaios tiveram a mesma configuração nesta máquina que consistiu em um ensaio axial monotônico com uma taxa de deslocamento de 2 mm/min. Apenas as cunhas das garras foram trocadas para se adequar de acordo com os corpos de prova.

6.2 CARACTERIZAÇÃO DOS CORPOS DE PROVA DE ALUMÍNIO 6101

Para cada ensaio foram utilizadas diferentes geometrias de corpo de prova em alumínio 6101. As Figuras (6.2) e (6.3) apresentam a geometria e dimensões dos corpos de provas para o ensaio de tração e o ensaio de cisalhamento respectivamente.

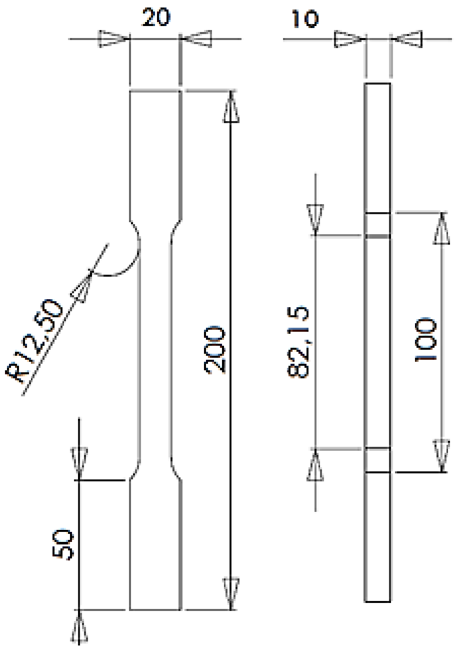


Figura 6. 2 - Corpo de prova retangular em alumínio 6101 utilizado para o ensaio de tração.

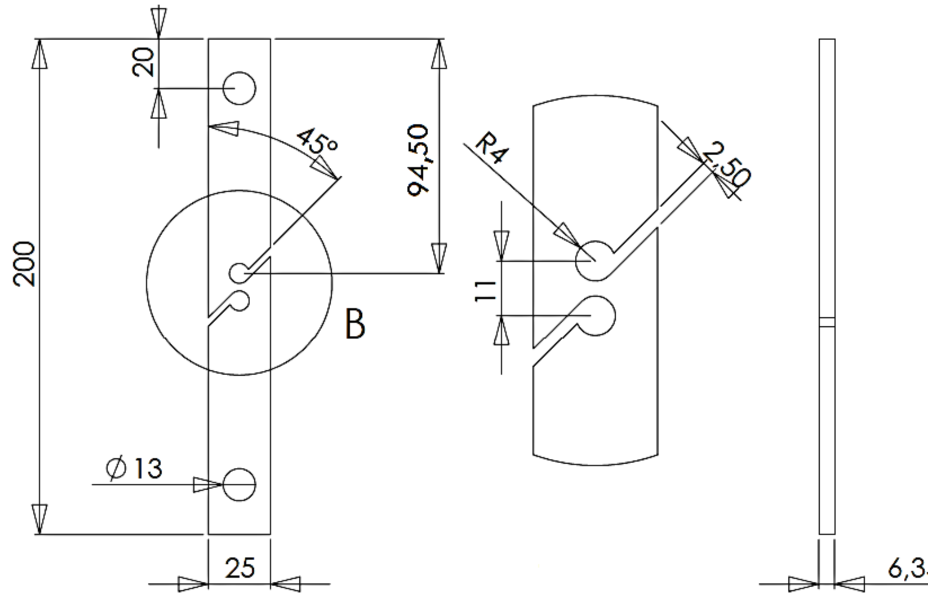


Figura 6. 3 - Corpo de prova retangular em alumínio 6101 utilizado para o ensaio de cisalhamento.

6.3 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Todos as faces dos corpos de prova foram devidamente marcadas pelas letras ‘F’, ‘D’, ‘E’, e ‘V‘ para identificar respectivamente as faces da frente, direita, esquerda e o verso. E ainda foram marcados e medidos os comprimentos do corpo de prova fora da garra da máquina onde sofreria a deformação.

6.3.1 PROCEDIMENTOS E RESULTADOS PARA O CORPO DE PROVA UTILIZADO NO ENSAIO DE TRAÇÃO.

Para este ensaio teve-se que selecionar uma cunha para garra de modo que o corpo de prova não escorregasse. Utilizou-se também na cunha uma régua para alinhamento do corpo de prova presa por parafuso para garantir a fixação adequada e deste modo não gerar deformação quando a garra o prender causando esforços indesejáveis. O comprimento inicialmente medido do corpo de prova entre as cunhas foi de 104,5 mm. A Figura (6.4) a seguir mostra como os corpos de provas foram fixados e a evolução da deformação em regime plástico até a ruptura do corpo de prova retangular liso em alumínio 6101 no ensaio de tração.

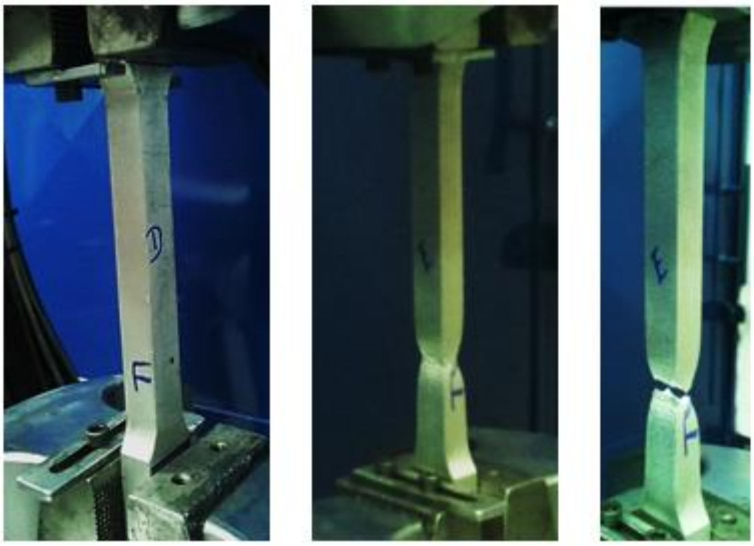


Figura 6. 4 – Corpo de prova retangular liso em alumínio 6101 durante ensaio de tração.

Como resultado obteve-se a Fig. (6.5). Neste pôde-se obter que a ruptura do corpo de prova retangular liso no ensaio de tração se deu com deslocamento axial de 25,79 mm e força axial de 2.736 kN devido a propagação de trincas. A Figura (6.6) apresenta o corpo de prova após a ruptura.

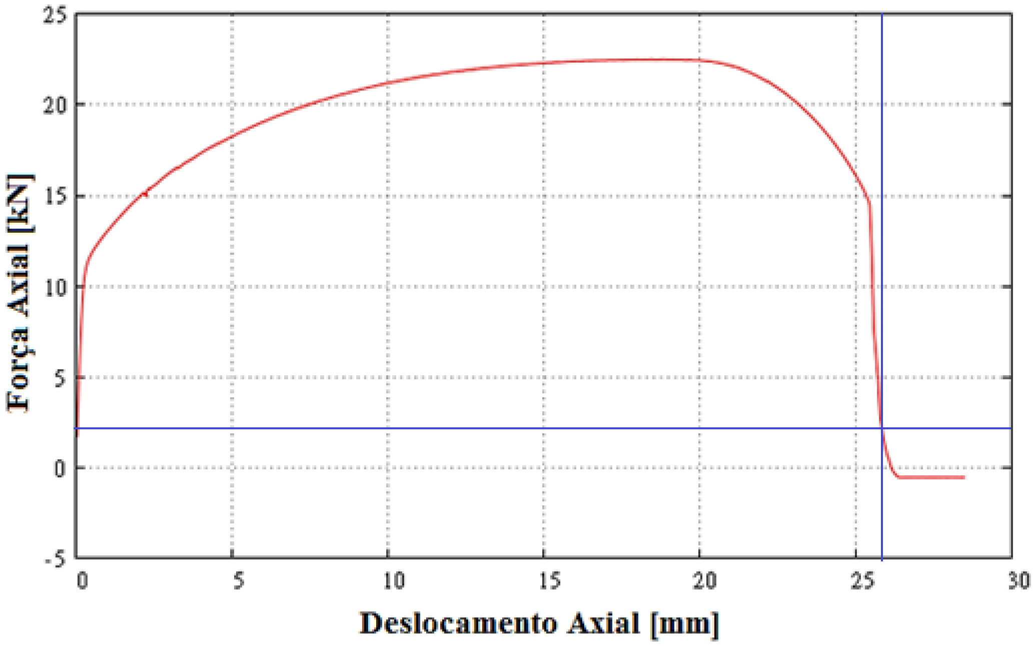


Figura 6. 5 - Resultado do ensaio de tração no corpo de prova liso em alumínio 6101.

Figura 6. 6 - Corpo de prova retangular liso após a ruptura.

6.3.2 PROCEDIMENTOS E RESULTADOS PARA O CORPO DE PROVA UTILIZADO NO ENSAIO DE CISALHAMENTO.

Como o corpo de prova para o ensaio de cisalhamento possui espessura diferente do corpo de prova anterior teve a necessidade de trocar a cunha da garra fazendo o mesmo procedimento e cuidados comentados acima. O comprimento medido entre as garras para este corpo de prova foi de 88 mm. A Figura (6.6) apresenta como o corpo de prova foi fixado e após a ruptura do mesmo.

Figura 6. 7 - Corpo de prova em alumínio 6101 em ensaio de cisalhamento.

Foi gerado a Fig. (6.8) como resultado para este ensaio. Nota-se que a ruptura não aconteceu no valor máximo da força axial apresentado na Fig. (5.8), mas devido a propagação de trincas esta aconteceu no ponto indicado com deslocamento axial de 8,454 mm e força axial de 1,516 kN. A Figura (6.9) mostra o corpo de prova após a ruptura.

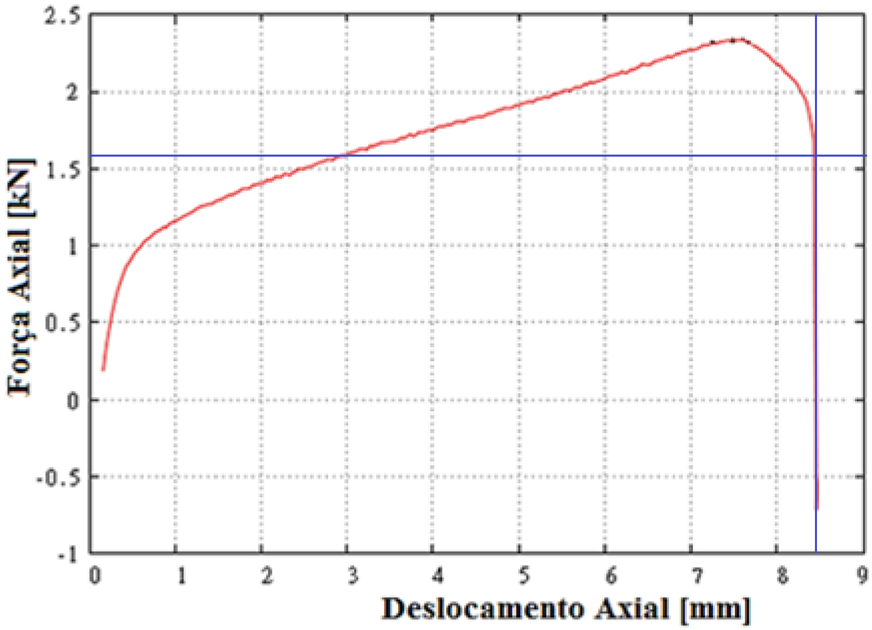


Figura 6. 8 – Resultado do ensaio de cisalhamento do corpo de prova em alumínio 6101.

Figura 6. 9 - Corpo de prova em alumínio 6101 após ensaio de cisalhamento.

6.4 ANÁLISE NUMÉRICA DO ALUMÍNIO 6101

Foi feito uma análise numérica semelhante a que foi feita no capítulo anterior, utilizando um programa de elementos finitos para implementar o modelo de estudo através de uma rotina UMAT.

Os corpos de prova foram simplificados devido sua simetria e modelados como problemas 3D como ilustra a Fig. (6.8) das malhas utilizadas. O número de elementos e nós para cada corpo de prova são apresentados na Tab. (6.1). Para ambos os corpos de prova foi escolhido o elemento hexaédrico de 8 nós.

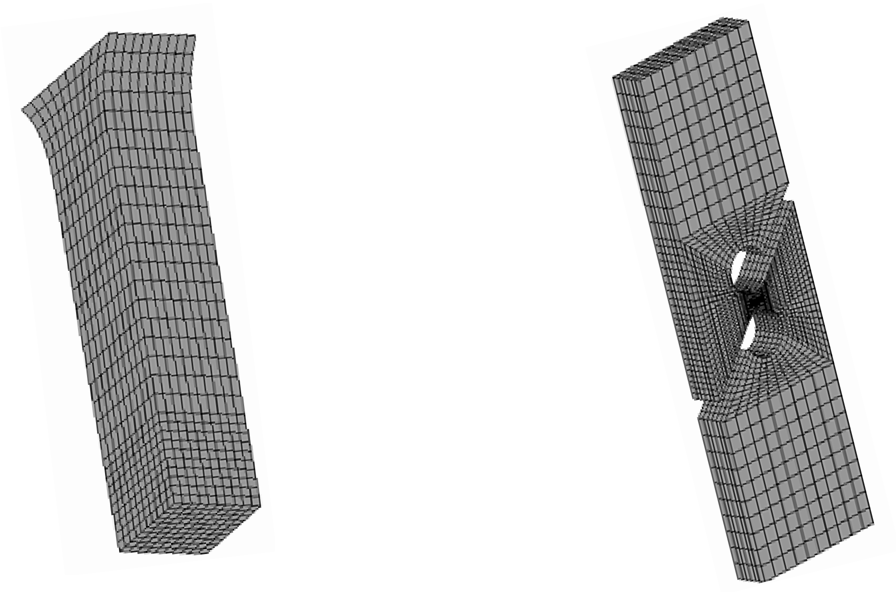
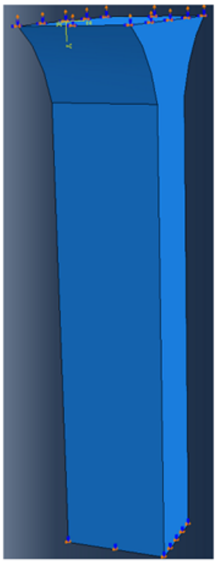


Figura 6. 10 – Malhas utilizadas para o corpo de prova em alumínio 6101.

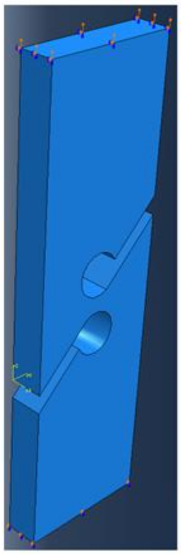
Tabela 6. 1 - Número de nós e de elementos para cada corpo de prova em alumínio 6101.

CORPO DE PROVA EM ALUMÍNIO 6101	NÚMERO DE NÓS	NÚMERO DE ELEMENTOS
Liso	3751	3000
Entalhado	8652	6750

Os corpos de prova em alumínio 6101 foram modelados de forma a representar um ensaio submetendo os mesmos à um deslocamento até a falha experimental como foi realizado em laboratório. Foram aplicados os deslocamentos de $u = 12{,}5\ mm$, e $u = 7{,}50\ mm$ para os corpos de prova retangular liso e cisalhante, respectivamente, com direções e sentidos como ilustra a Fig. (6.9) .



a)



b)

Figura 6. 11 - Condições de contorno realizadas no Abaqus para corpos de prova em alumínio 6101. a) Corpo de prova retangular liso. b) Corpo de prova retangular entalhado.

6.5 RESULTADOS NUMÉRICOS DO ALUMÍNIO 6101

Utilizou-se de resultados experimentais para determinação dos parâmetros materiais, já que assim a curva de reação obtida numericamente é mais próxima possível da curva de reação obtida experimentalmente. Portanto, os parâmetros materiais do alumínio 6101 utilizados na análise estão apresentados na Tab. (6.2). A curva de encruamento deste material é apresentada na Fig. (6.12).

Tabela 6. 2– Propriedades da liga de alumínio 6101. Fonte: Fonte: Patil *et al.*, 2010.

PROPRIEDADES	VALOR	UNIDADE
MÓDULO DE ELASTICIDADE, E	69.000	MPa
COEFICIENTE DE POISSON, v	0,30	-
LIMITE DE ESCOAMENTO INICIAL, σ_{yo}	80	MPa
MÓDULO DE ENDURECIMENTO, H^I	208,0	MPa
EXPOENTE DE ENCRUAMENTO, μ	0,25	-

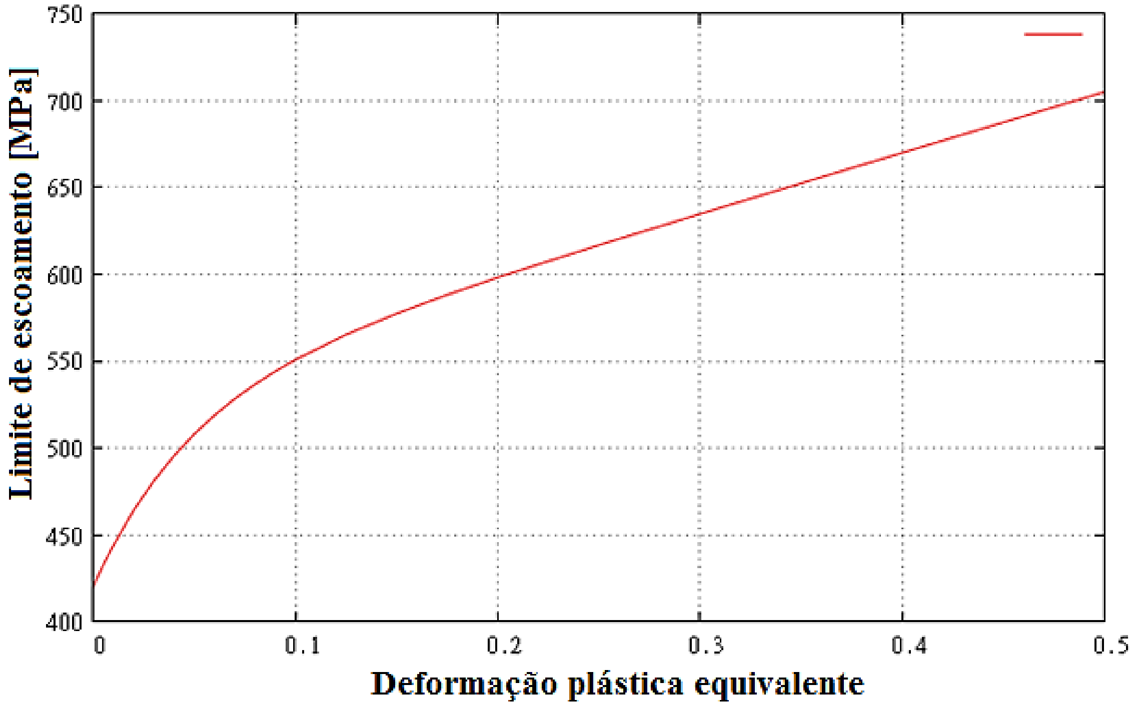


Figura 6. 12 - Curva de encruamento do alumínio 6101. Fonte: Patil *et al.*, 2010.

6.5.1 TENSÃO E DEFORMAÇÃO EQUIVALENTES OBTIDAS PARA O ALUMÍNIO 6101

Os resultados obtidos de tensão equivalente e deformação plástica, considerando as constantes do material iguais à $a_1 = 0$ e $b_1 = 0$, estão apresentados nas Fig. (6.13) a (6.16).

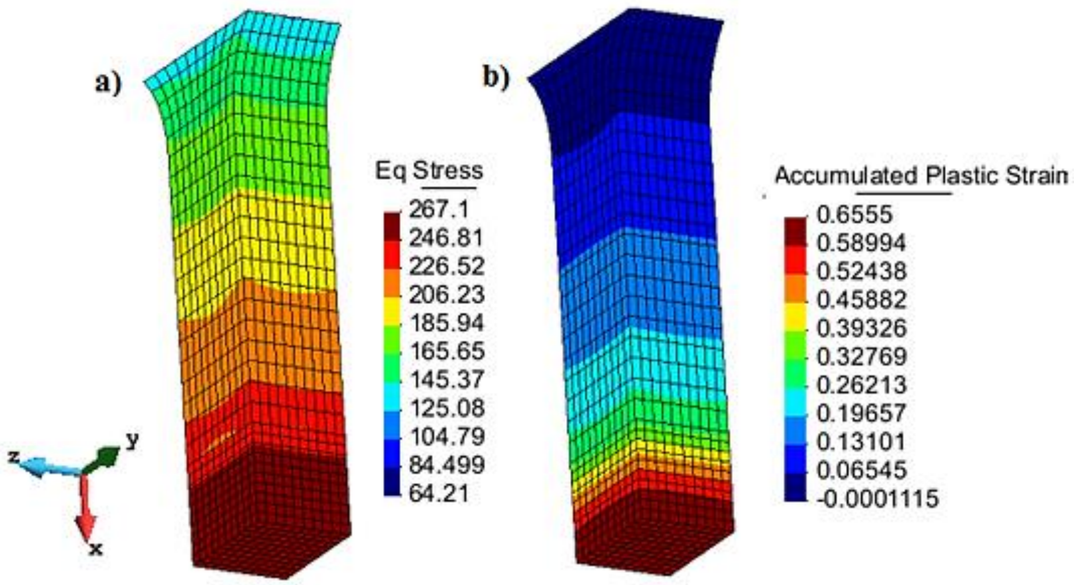


Figura 6. 13 - Resultados para o corpo de prova retangular liso em alumínio 6101. a) Tensão equivalente de von Mises. b) a Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = 0$).

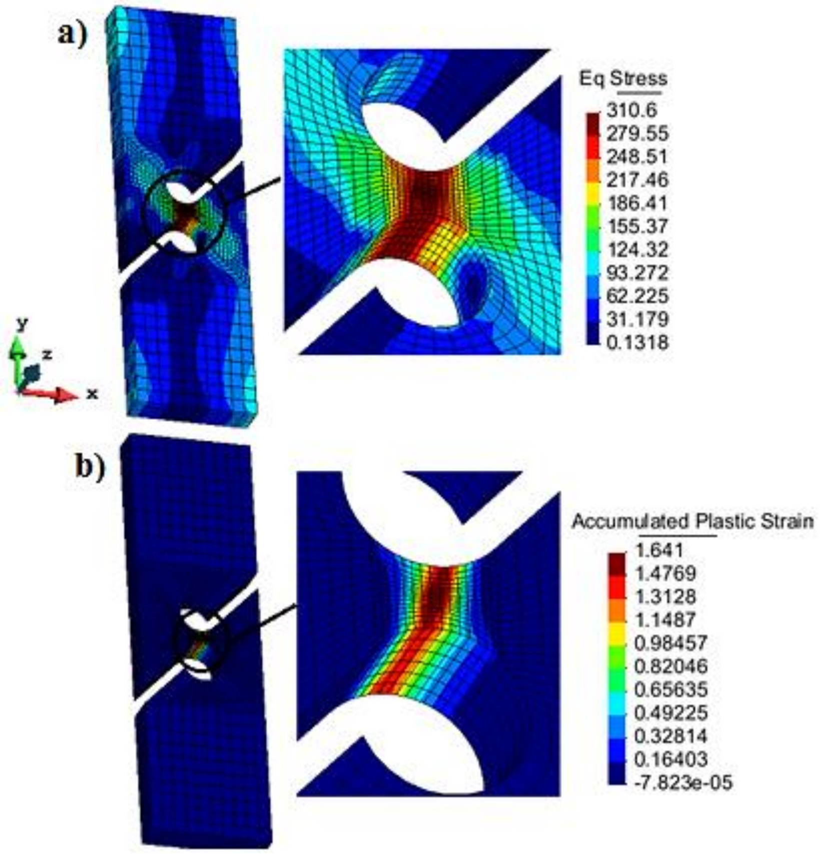


Figura 6. 14 - Resultados para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio 6101.a) Tensão equivalente de von Mises.b) Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = 0$).

Os resultados de tensão equivalente e deformação plástica, considerando as constantes do material iguais à $a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$, foram:

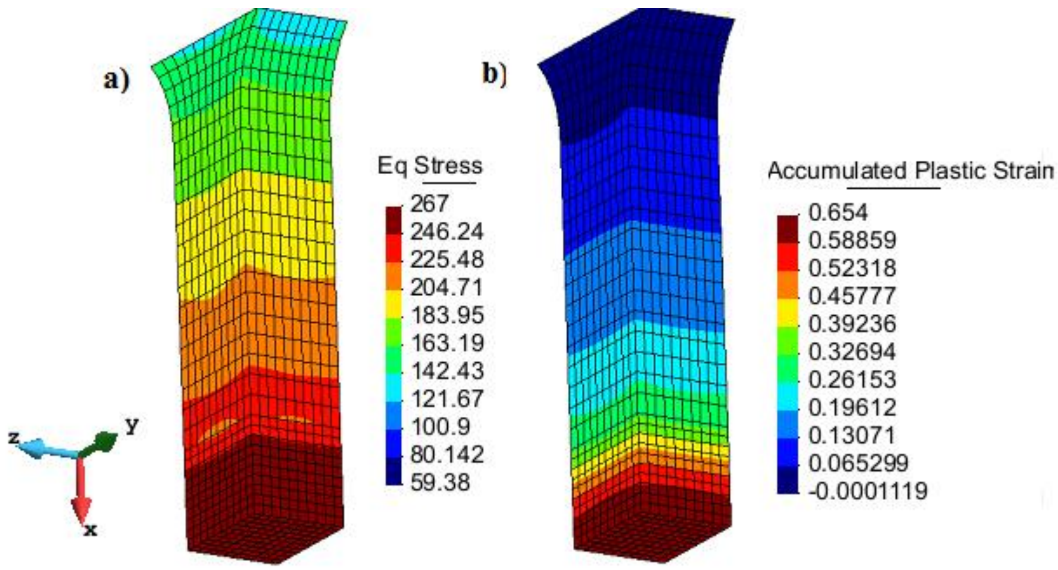


Figura 6. 15 - Resultados para o corpo de prova retangular liso em alumínio 6101.a) Tensão equivalente de von Mises.b) Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$).

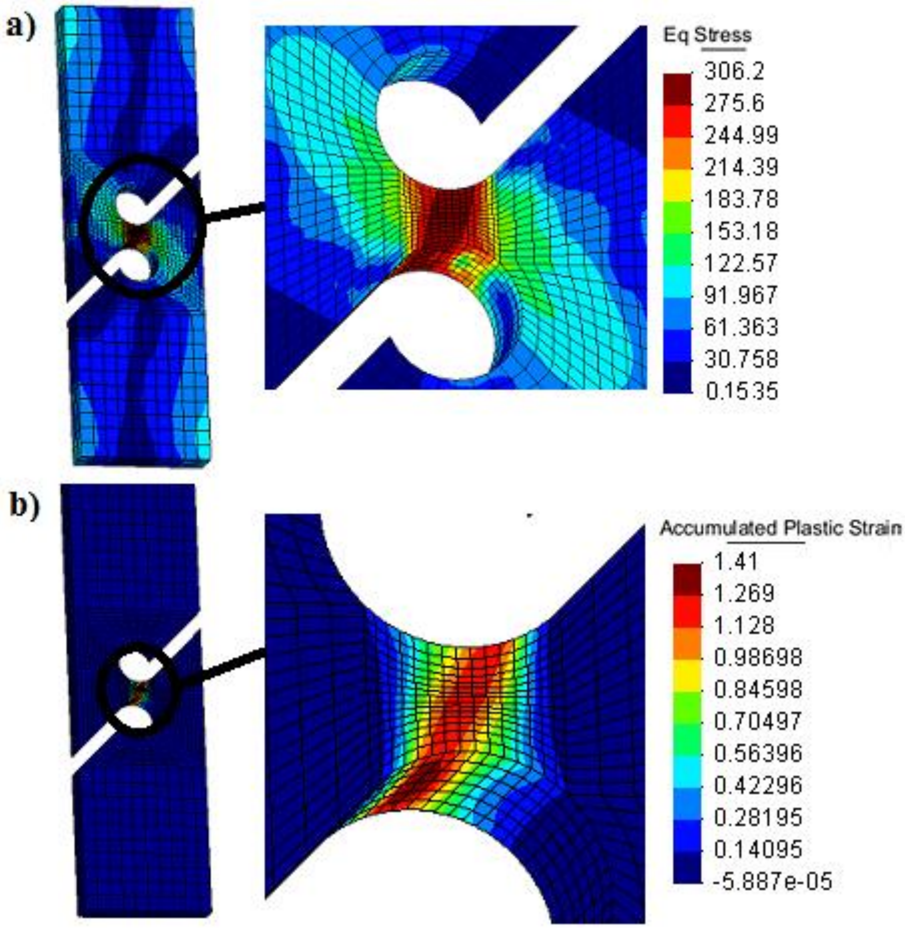


Figura 6. 16 - Resultados para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio 6101.a) Tensão equivalente de von Mises.b) Deformação plástica equivalente ($a_1 = 0$ e $b_1 = -60{,}75$).

6.5.2 CURVAS DE REAÇÃO E EVOLUÇÃO DA DEFORMAÇÃO PLÁSTICA OBTIDAS PARA O ALUMINIO 6101

As curvas de reação e evolução da deformação plástica para os corpos de prova em alumínio 6101 estão apresentadas pelas Fig. (6.17) a (6.20).

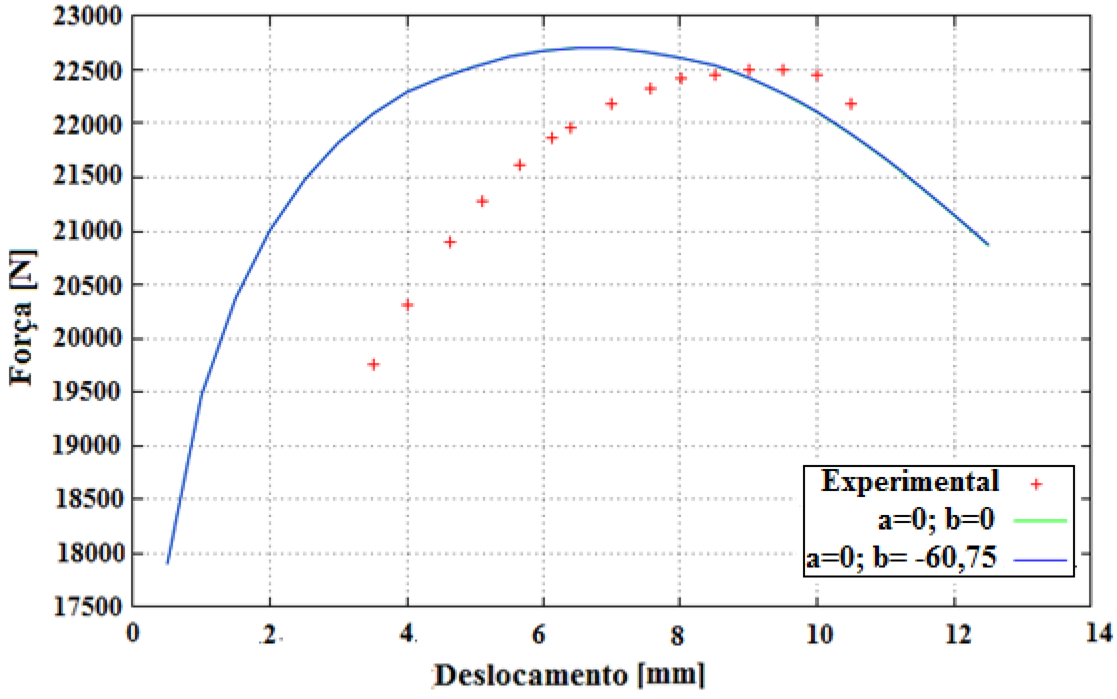


Figura 6. 17 – Curva de reação para o corpo de prova retangular liso em alumínio 6101.

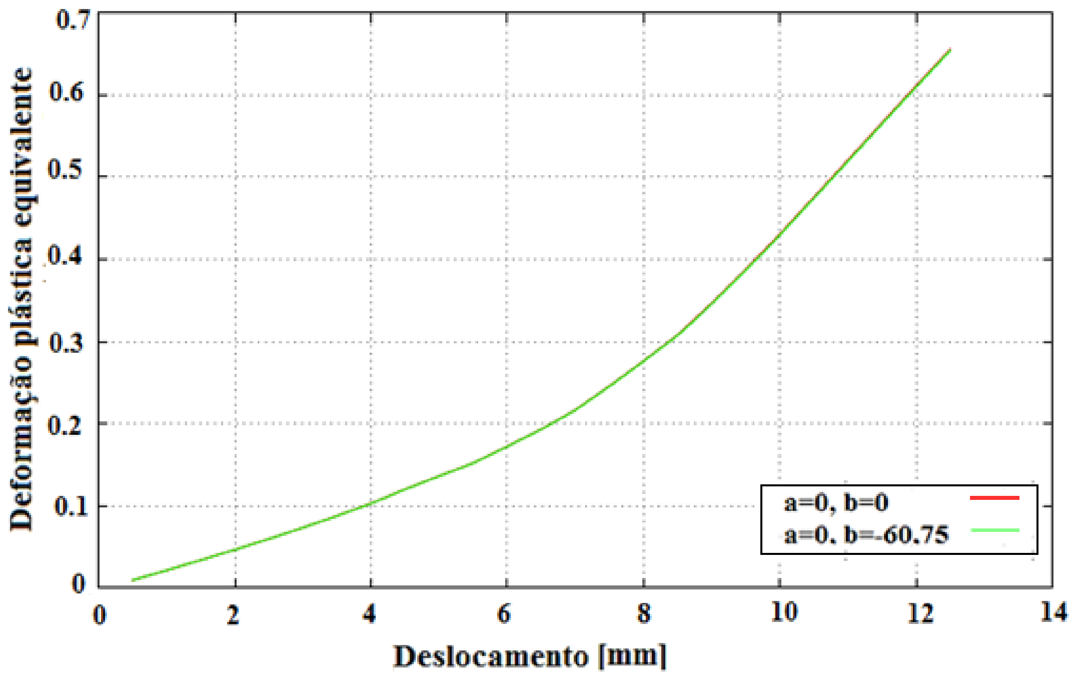


Figura 6. 18 – Evolução da deformação plástica para o corpo de prova entalhado em alumínio 6101.

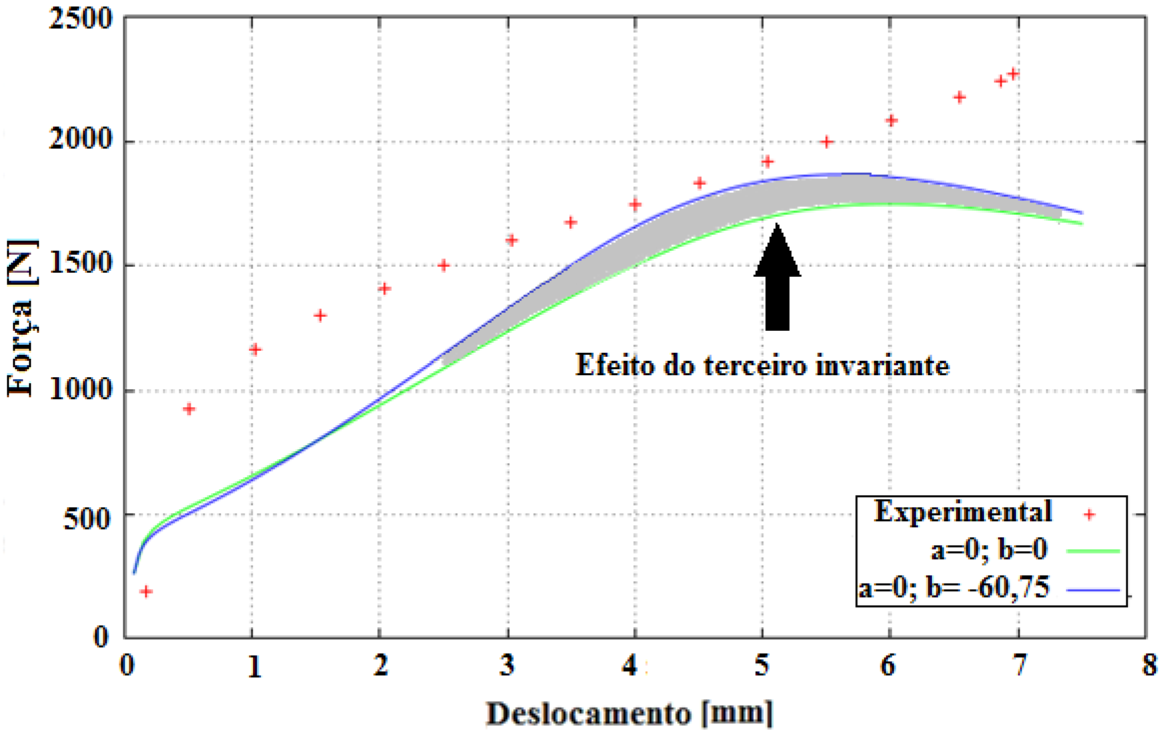


Figura 6. 19 – Curva de reação para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio 6101.

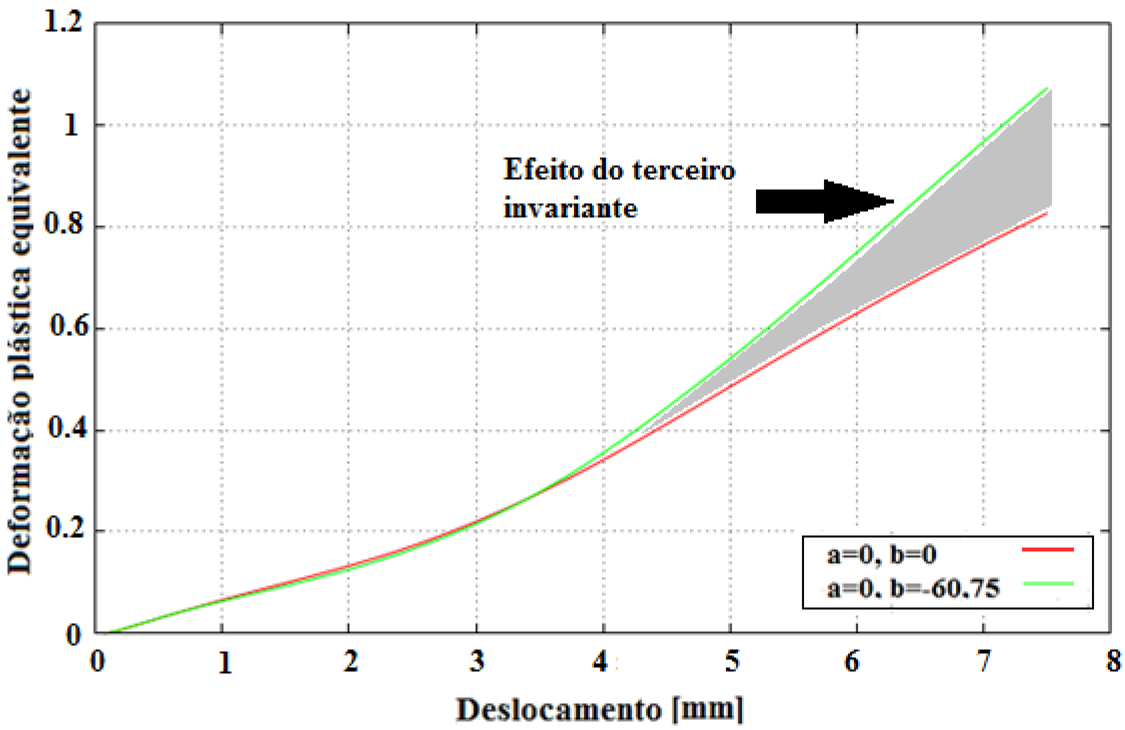


Figura 6. 20 – Curva de reação para o corpo de prova retangular entalhado em alumínio 6101.

Os resultados obtidos dos corpos de prova em alumínio 6101 mostram uma grande discrepância das curvas numéricas obtidas com a curva experimental. Esse erro foi devido aos dados da curva de encruamento que não foram corretamente identificados. Mas ainda pode se notar uma grande diferenciação entre as curvas numéricas devido a introdução do terceiro invariante do tensor desviador.

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho mostrou-se a influência do terceiro invariante do tensor desviador no comportamento de alguns materiais dúcteis: aço SAE 1045, alumínio aeronáutico e alumínio 6101. Isto foi possível pela implementação em programas de elementos finitos de uma rotina UMAT que foi desenvolvida a partir de um algoritmo implícito de integração, que descrevia o domínio elástico proposto por Gao.

Analisou-se a influência das constantes do material, a_1e b_1, na superfície de escoamento de Gao. Pode-se concluir que utilizando do domínio elástico proposto por Gao é possível descrever o comportamento mecânico de uma gama muito maior de materiais, pois ele pode descrever os materiais dúcteis que se comportam de maneira intermediária entre o critério de escoamento de von Mises e o de Tresca.

Verificou-se a existência de valores críticos da constante do material b_1 que resultam na não convexidade da superfície de escoamento de Gao o que não é desejável, pois causa problemas de convergência.

Foi realizado a modelagem dos ensaios dos corpos de prova no programa comercial de elementos finitos Abaqus CAE 6.10-1. Para realizar simulações com menor custo computacional e ainda condizentes com a realidade, os corpos de prova foram modelados de forma simplificada e foram geradas malhas estruturadas com refinamento na região de interesse (Alves, 2007).

A partir das curvas numéricas obtidas do aço SAE 1045 e o alumínio aeronáutico, verificou-se que a introdução do terceiro invariante do tensor desviador resulta numa melhor previsão do comportamento mecânico de materiais dúcteis que estão submetidos a cisalhamento.

Foram realizados ensaios de tração e cisalhamento de corpos de prova em alumínio 6101, porém não foi possível comparar o resultado experimental obtido com o resultado numérico devido a identificação incorreta da curva de encruamento que foi utilizada para a análise numérica. Pela importância de se conhecer os procedimentos experimentais e analisar a evolução da deformação até ruptura dos corpos de prova, decidiu-se manter esta parte no trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade Pires, F.M. (2005). Issues on the finite elemento modelling of degradation and the prediction of failure in finitely straining ductile materials. Swansea, School of Engineering, University of Wales. Ph.D.

Alves, L. M. (2007). Métodos dos Elementos Finitos, Curitiba, 2007. Apostila organizada como resultado do estudo das aulas para obtenção de créditos da Disciplina de Método dos Elementos Finitos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Paraná.

Bai, Y., Wierzbicki, T. (2007). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, International Journal of Plasticity, 24:1071-1096.

Bai, Y., (2008). Effect of Loading History on Necking and Fracture. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Bardet, J. P. (1990). Lode Dependence for Isotropic Pressure-Sensitive Elastoplastic materials. Journal of Applied Mechanics, 57:498-506.

Brünig, M. (1999). Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids. International Journal of Plasticity 15, 1237-1264. 294

Brünig, M., Berger, S., Obrecht, H. (2000). Numerical simulation of the localization behavior of hydrostatic-stress-sensitive metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42:2147-2166.

Catálogo da MTS, (2013). Series 647 Hydraulic Wedge Grips Reference Manual.

De Souza Neto, E.A. (2002). A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model. Comm. Num. Meth. Engng.,18:541-554.

De Souza Neto, E.A., Peric, Owen, D.R.J. (2008). Computational methods for plasticity: theory and applications. *John Wiley & Sons Ltd*.

Dieter, G. E. (1981). Metalurgia Mecânica, 2ª Edição, Guananbara-Koogan, Rio de Janeiro.

Driemeier, L., Brünig, M., Micheli, G., Alves, M. (2010). Experiments on stress triaxiality dependence of material behavior of aluminum alloys, Mechanics of Materials, vol.42, 2:207-217.

Gao, X., Zhang, T., Zhou J., Graham S. M. , Hayden M., Roe C. (2011) On stress state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule. International Journal of Plasticity 27 (2011) 217–231.

Malcher, L., (2011). Da Mecânica do Dano Continuo: Uma evolução do Modelo de Lemaitre para Redução da Dependência do Ponto de Calibração. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas Publicação ENMTD-09/2011. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília.

Malcher, L., Andrade Pires, F.M., César de Sá, J.M.A. (2012). An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities. International Journal of Plasticity, vol.30-31, pp.81-115, 2012

Mirone, G., Corallo, D. (2010). A local viewpoint for evaluating the influence of stress triaxiality and Lode angle on ductile failure and hardening, International Journal of Plasticity, vol. 26, 3:348-371.

Patil, B.V., Chakkingal, U., Kumar, T.S.P. (2010). Influence of Outer Corner Radius in Equal Channel Angular Pressing. World Academy of Science, Engineering and Technology 62, 714-720.

Simo, J.C., & Hughes, T.J.R. (1998). Computacional Inelasticity. New York: Springer-Verlag.

Socie, D., Marquis, G.B. (2000). Multiaxial Fatigue, Society of automotive engineers.

Teng, X. (2008). Numerical prediction of slant fracture with continuum damage mechanics. Engineering Fracture Mechanics, 75:2020-2041.

ANEXOS

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \mathbb{I} + \Delta\gamma \mathbb{D}^e : \frac{\partial \boldsymbol{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \tag{I.1}$$

$$\frac{\partial R_{\sigma_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{N}_{n+1} \tag{I.2}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \boldsymbol{N}_{n+1} \tag{I.3}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} = -H^I \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{N}_{n+1}}{\boldsymbol{\sigma}_{eq\; n+1}} \tag{I.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \frac{-5}{6}\left[\frac{c_1}{6}\left(a_1 {I_1}^6 + 27 {J_2}^3 + b_2 {J_3}^2\right)\right]^{-\frac{11}{6}} \left(6 a_1 {I_1}^5 \boldsymbol{I} + 81 {J_2}^2 \boldsymbol{S} + 2 b_1 J_3 \det(\boldsymbol{S})\, \boldsymbol{S}^{-T} : \mathbb{I}^{\boldsymbol{d}}\right) \\ + \left[\frac{c_1}{6}\left(a_1 {I_{1(n+1)}}^6 + 27 {J_{2(n+1)}}^3 + b_2 {J_{3(n+1)}}^2\right)\right]^{-\frac{5}{6}} \left(30 a_1 {I_{1(n+1)}}^4 \boldsymbol{I}^2 \right. \\ \left. + 162 J_{2(n+1)} {\boldsymbol{S}_{(n+1)}}^{\boldsymbol{2}} + 2 b_1 J_{3(n+1)} \left(\det\left(\boldsymbol{S}_{(n+1)}\right) {\boldsymbol{S}_{(n+1)}}^{-T} : \mathbb{I}^{\boldsymbol{d}}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{I.5}$$

Depois de instalados os programas Microsoft Visual Studio 2008 Professional Edition e Intel Fortran Compiler Version 11.1 é necessário configurar o Abaqus com estes. Para isto deve-se encontrar os arquivos vcvars32.bat e ifortvars_intel64.bat. Estes arquivos podem ser encontrados em um caminho similar a: “C:\Program Files (x86)\ Microsoft Visual Studio 11.0 \ VC \ bin\ vcvars32.bat" e "C:\ Program Files (x86)\ Intel\ Compiler\ 11.1\ 072\ bin\ intel64 \ifortvars_intel64.bat". Em seguida, clica-se no ícone de atalho do Abaqus CAE na área de trabalho com o botão direito selecionando-se a opção propriedades de forma que se abra uma janela como mostrado na Fig. (II.1).

Na janela de propriedades do Abaqus CAE na opção *Destino* deve-se escrever o caminho onde se encontram os arquivos vcvars32.bat e ifortvars_intel64.bat e, em seguida, deve-se clicar em *Aplicar* para salvar esta alteração. Na opção *Destino*, escreveu-se exatamente como:

"C:\Program Files (x86)\Microsoft Visual Studio 11.0\VC\bin\vcvars32.bat" && "C:\Program Files (x86)\Intel\Compiler\11.1\072\bin\intel64\ifortvars_intel64.bat" && "C:\Users\Jonatas\Abaqus 6.10-1\abq6101.bat" cae || pause

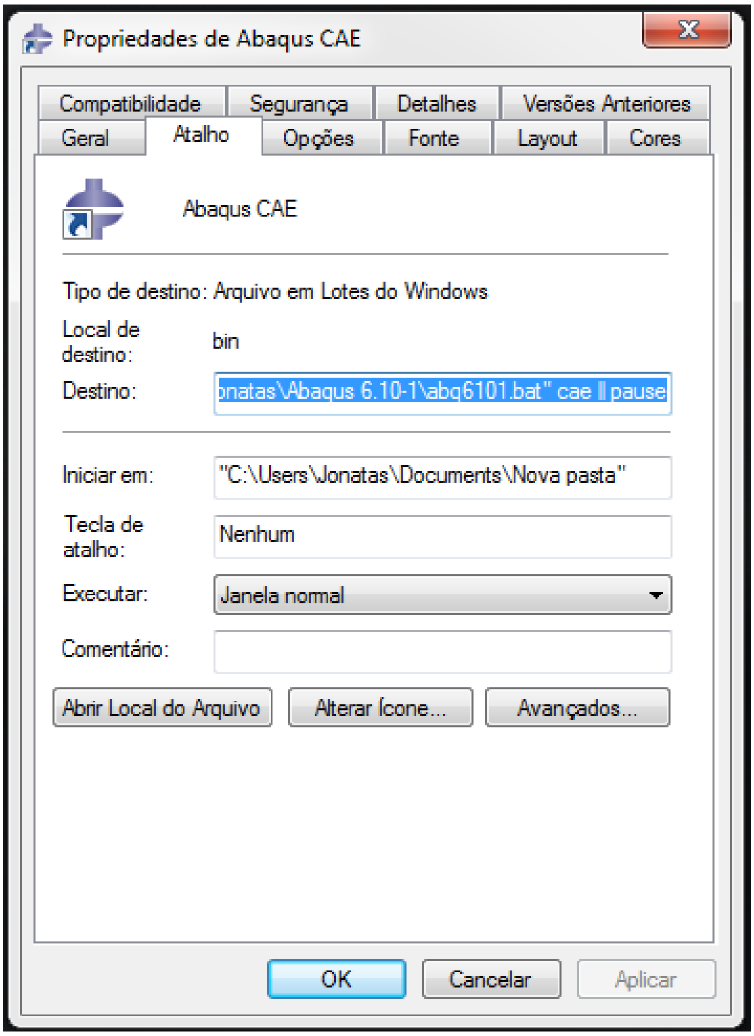


Figura II. 1 – Janela de propriedades de Abaqus CAE

É importante mencionar que apenas no ícone em que foi feito este procedimento é que vai ser possível de executar a sub-rotina, pois apenas neste foi feito a configuração do Abaqus com os outros programas. Para identificar que o ícone é o desejado como também verificar se o procedimento de configuração está certo, ao abrir o Abaqus uma janela como mostrado na Fig.(II.2) deve aparecer na qual mostra que os outros programas estão rodando junto com o Abaqus.

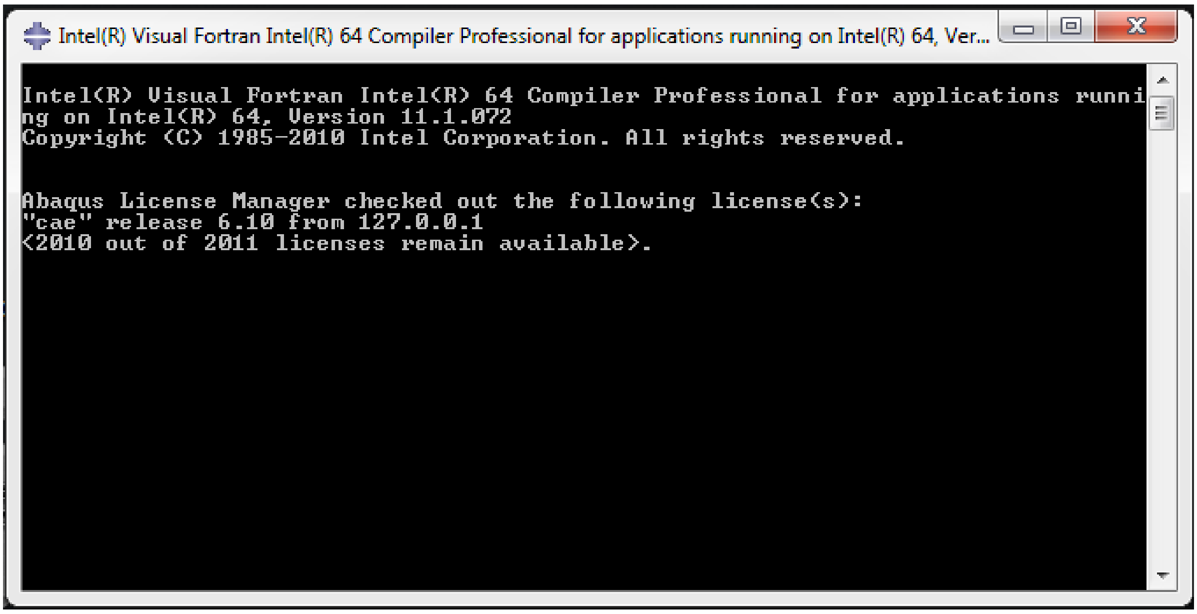


Figura II. 2 - Janela de abertura do Abaqus CAE 6.10-1

Feito isto, o programa comercial de elementos finitos Abaqus CAE 6.10-1 está preparado para executar uma sub-rotina UMAT. Para sua execução seguem-se os seguintes procedimentos:

i. Após projetado ou mesmo importado o modelo a ser estudado no Abaqus, clica-se duas vezes com o botão esquerdo sobre *Jobs* na árvore de projeto. E na janela *Create Job* que aparecerá pode-se criar um *Job-1* sobre o modelo clicando-se em *Continue*.

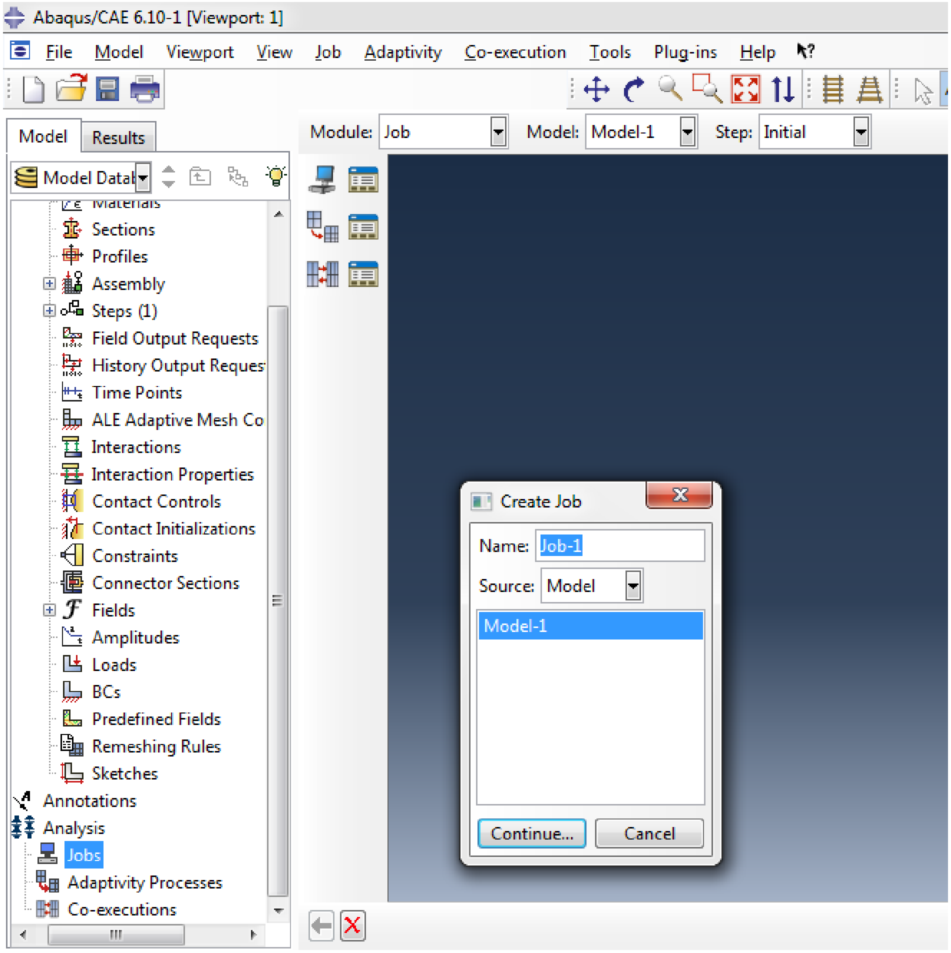


Figura II. 3 - Passo 1 - Implementação da sub-rotina UMAT

ii. Sobre a janela *Edit job* que aparecerá seleciona-se a aba *General*. E na opção *User subroutine file* clica-se em *Select*.

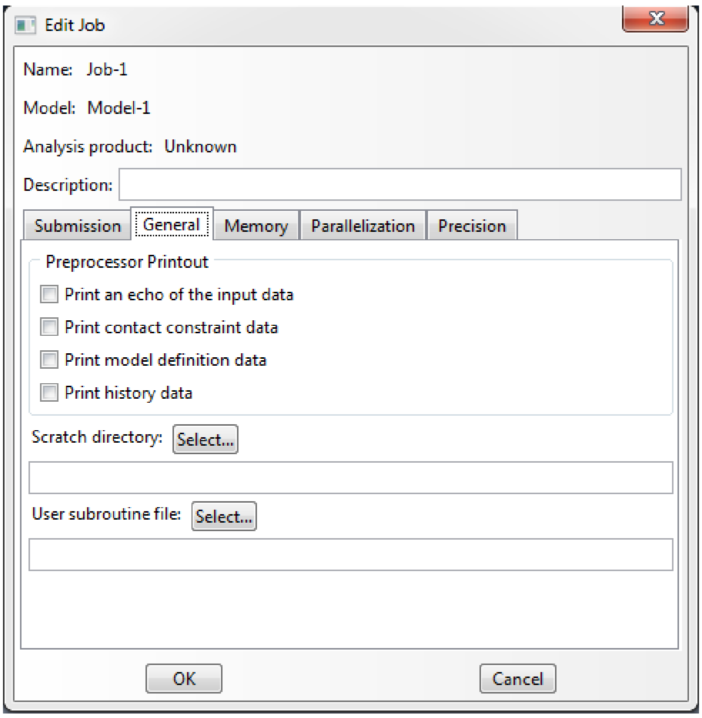


Figura II. 4 - Passo 2 - Implementação da sub-rotina UMAT

iii. Na nova janela *Select User Subroutine File* seleciona-se o arquivo em que esteja a rotina desejada e em seguida clica-se em *OK*. Nota-se que a rotina está em linguagem FORTRAN e esta, portanto, terá formato *.for.

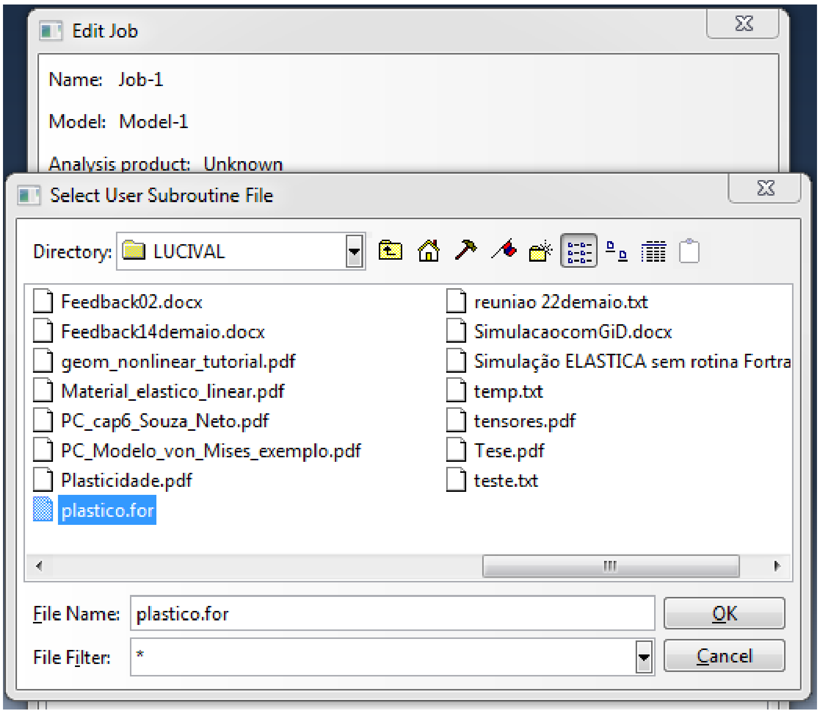


Figura II. 5 - Passo 3 - Implementação da sub-rotina UMAT.

iv. Novamente na janela *Edit job*, pode-se notar o caminho onde se encontra o arquivo na opção *User subroutine file*. E por fim clica-se em *OK*.

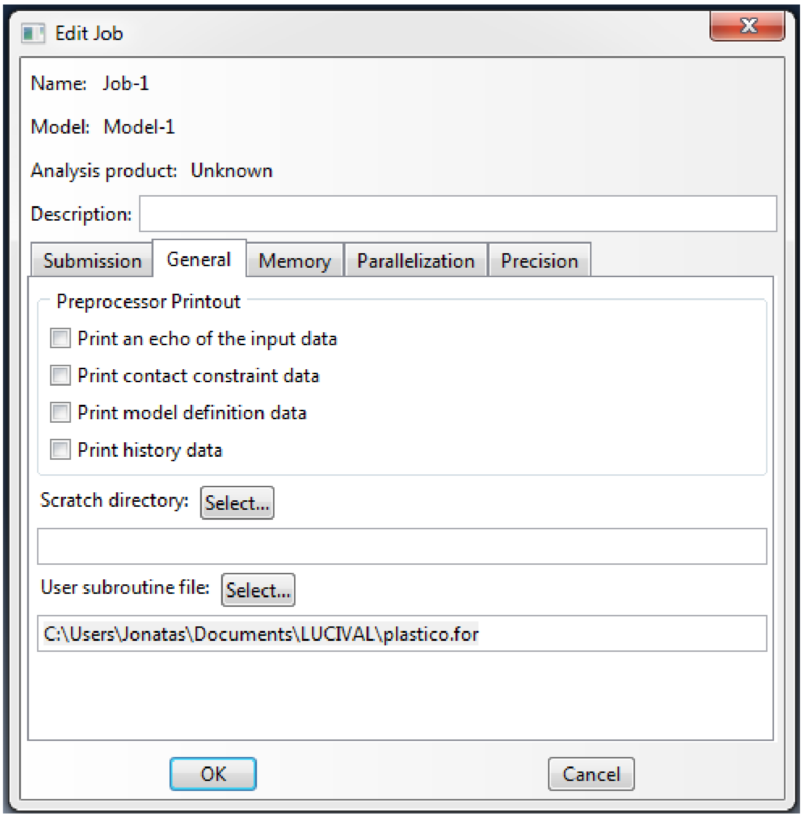


Figura II. 6 - Passo 4 - Implementação da sub-rotina UMAT.

Na janela *Job Manager* pode-se então pedir para executar o *Job-1* clicando-se em *Submit*. O programa então irá executar o job conforme a sub-rotina UMAT selecionada.

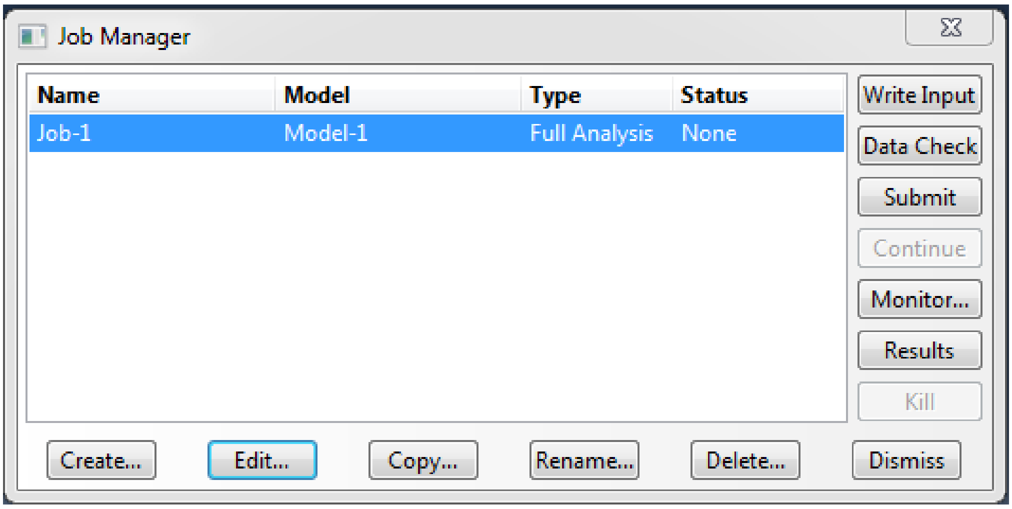


Figura II. 7 - Janela Job Manager.

```
! BEGIN_SUBROUTINE SUGA
!
SUBROUTINE SUGA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE  , RPROPS , RSTAVA ,
STRAN , &
              STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA  , NSTRE  , NLALGV)
IMPLICIT NONE
!=============================================================================
====
!=============================================================================
====
!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER::  IPHARD=6, KSTRE=6
!=============================================================================
====
!=============================================================================
====
!DATA DECLARATION
REAL(8) R0      /0.0D0/
REAL(8) RP5     /0.5D0/
REAL(8) R1      /1.0D0/
REAL(8) R2      /2.0D0/
REAL(8) R3      /3.0D0/
REAL(8) R4      /4.0D0/
REAL(8) R5      /5.0D0/
REAL(8) R6      /6.0D0/
REAL(8) R11     /11.0D0/
REAL(8) R27     /27.0D0/
REAL(8) R81     /81.0D0/
REAL(8) R243    /243.0D0/
REAL(8) R729    /729.0D0/
REAL(8) R1458   /1458.0D0/
REAL(8) TOL     /1.D-06/
INTEGER MXITER  /50/
!=============================================================================
====
!=============================================================================
====
! DECLARATION OF ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE , NLALGV

REAL(8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION(NIPROP) :: IPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRPROP) :: RPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA)  :: STRAN
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)  :: STRES
LOGICAL, DIMENSION(NLALGV) :: LALGVA
!=============================================================================
====
!=============================================================================
====
! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL IFPLAS , SUFAIL

INTEGER I , J , NHARD , IITER , K

REAL(8) EPBARN , YOUNG  , POISS , AONE , BONE , GMODU  , BULK   , R2G    ,
R3G    , &
```

```
      EEV    , P      , EEVD3 , VARJ2T , QTRIAL , DETS   , SIGMAY , XI
, PHI    , &
      EPBAR  , HSLOPE , VARJ2 , SEQ    , EQ2    , ADBETA , BDBETA , CDBETA
, DDBETA , &
      RESNOR , CONE   , ALPHA

REAL(8) PLFUN , DPLFUN

! FOURTH ORDER IDENTITY TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: FOID
! SECOND ORDER IDENTITY TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: SOID
! DEVIATORIC INDENTITY TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DFOID
! DEVIATORIC STRAIN TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: EET
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: STRIAL
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: SINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: PROSINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: BETA
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: FLOWV
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: EQ1
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SDOTS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE)       :: DXI
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SITDSIT
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: PROSITDSIT
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: PROSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: PRODSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: SDSINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DBETA
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DFLOWV
REAL(8), DIMENSION(8,8)         :: MATRIX
REAL(8), DIMENSION(8)           :: RHS
REAL(8), DIMENSION(8)           :: RES
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DXIDBETA
! *******************************************************
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! FÁBIO REIS & FILIPE XAVIER -  AUGUST, 2012
! *******************************************************
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÕES
! GLOBAIS
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: DC_DALPHA_SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL(8) DC_ALPHA_SIGMA
REAL(8) EQ3
!=========================================================================
====
!=========================================================================
====
! INITILIZE LOCAL VARIABLES
IFPLAS=.FALSE.
SUFAIL=.FALSE.

I=0 ; J=0 ; NHARD=0 ; IITER=0 ; K=0

EPBARN=R0  ; YOUNG=R0     ; POISS=R0  ; AONE=R0     ; BONE=R0   ; GMODU=R0
      ; BULK=R0
R2G=R0     ; R3G=R0       ; EEV=R0    ; P=R0        ; EEVD3=R0  ; EET=R0
; VARJ2T=R0
```

```fortran
QTRIAL=R0  ; DETS=R0       ; SIGMAY=R0 ; XI=R0       ; PHI=R0    ; EPBAR=R0
; STRIAL=R0
HSLOPE=R0  ; VARJ2=R0      ; SEQ=R0    ; PROSINVT=R0 ; BETA=R0   ; FLOWV=R0
; EQ1=R0
EQ2=R0     ; SDOTS=R0      ; ADBETA=R0 ; BDBETA=R0   ; CDBETA=R0 ;
DDBETA=R0    ; DXI=R0
SITDSIT=R0 ; PROSITDSIT=R0 ; SITDS=R0  ; PROSITDS=R0 ; DSITDS=R0 ;
PRODSITDS=R0 ; SDSINVT=R0
DBETA=R0   ; DFLOWV=R0     ; MATRIX=R0 ; DXIDBETA=R0 ; CONE=R0   ; ALPHA=R0

! INITILIZE THE FOURTH ORER IDENTITY TENSOR
FOID=R0
FOID(1,1)=R1
FOID(2,2)=R1
FOID(3,3)=R1
FOID(4,4)=R1
FOID(5,5)=R1
FOID(6,6)=R1
! INITILIZE THE SECON ORDER IDENTITY TENSOR
SOID=R0
SOID(1)=R1
SOID(2)=R1
SOID(3)=R1

! COMPUTE (FOID-(SOID \OTIMES SOID)/3)
DFOID=R0
DO I=1,NSTRE
      DO J=1,NSTRE
            DFOID(I,J)=FOID(I,J)-(R1/R3)*SOID(I)*SOID(J)
      ENDDO
ENDDO
DFOID(4,4)=DFOID(4,4)*R2
DFOID(5,5)=DFOID(5,5)*R2
DFOID(6,6)=DFOID(6,6)*R2

! *******************************************************
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! *******************************************************
SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0 ; EQ3=R0
!===========================================================================
====
!===========================================================================
====
! STATE UPDATE
DGAMA=R0
STRES=R0
EPBARN=RSTAVA(KSTRE+1)
! SET SOME MATERIAL PROPERTIES
YOUNG=RPROPS(2)
POISS=RPROPS(3)
NHARD=IPROPS(3)
AONE=RPROPS(4)
BONE=RPROPS(5)
CONE=((R4/R729)*BONE + R1)**(-R1/R6)
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU
! COMPUTE THE ELASTIC TRIAL STATE
EEV=STRAN(1)+STRAN(2)+STRAN(3)
P=BULK*EEV
! ELASTIC TRIAL DEVIATORIC STRAIN
```

```
EEVD3=EEV/R3
EET(1)=STRAN(1)-EEVD3
EET(2)=STRAN(2)-EEVD3
EET(3)=STRAN(3)-EEVD3
EET(4)=STRAN(4)/R2
EET(5)=STRAN(5)/R2
EET(6)=STRAN(6)/R2
! COMPUTE TRIAL EFFECTIVE STRESS
VARJ2T=(R1/R2)*R2G*R2G*(EET(1)*EET(1)+EET(2)*EET(2)+EET(3)*EET(3)+R2*EET(4)
*EET(4)+&
       R2*EET(5)*EET(5)+R2*EET(6)*EET(6))
!
DETS=R2G*R2G*R2G*(EET(1)*EET(2)*EET(3)+EET(4)*EET(5)*EET(6)+EET(4)*EET(5)*E
ET(6)-&
                  EET(6)*EET(2)*EET(6)-EET(5)*EET(5)*EET(1)-
EET(3)*EET(4)*EET(4))
!
ALPHA=( R27*(VARJ2T**R3) + BONE*(DETS**R2) )
QTRIAL=CONE*( ALPHA**(R1/R6) )
SIGMAY=PLFUN(EPBARN,NHARD,RPROPS(IPHARD))
! CHECK FOR PLASTIC ADMISSIBILITY
PHI=QTRIAL-SIGMAY
IF(PHI/SIGMAY.GT.TOL)THEN
      ! PLASTIC DOMAIN
      IFPLAS=.TRUE.
      ! INITIALIZE VARIABLES FOR NEWTON-RAPHSON METHOD
      EPBAR=EPBARN
      STRIAL=R2G*EET
      STRES=STRIAL
      DO IITER=1,50
            SIGMAY=PLFUN(EPBAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
            HSLOPE=DPLFUN(EPBAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
            DETS=STRES(1)*STRES(2)*STRES(3)+&
                 STRES(4)*STRES(5)*STRES(6)+&
                 STRES(4)*STRES(5)*STRES(6)-&
                     STRES(6)*STRES(2)*STRES(6)-&
                 STRES(5)*STRES(5)*STRES(1)-&
                 STRES(3)*STRES(4)*STRES(4)
            VARJ2=(R1/R2)*(STRES(1)*STRES(1)+STRES(2)*STRES(2)+&
                      STRES(3)*STRES(3)+R2*STRES(4)*STRES(4)+&
                      R2*STRES(5)*STRES(5)+R2*STRES(6)*STRES(6))
            !
            ALPHA=( R27*(VARJ2**R3) + BONE*(DETS**R2) )
        SEQ=CONE*( ALPHA**(R1/R6) )
            !
            SINVT(1)=(STRES(2)*STRES(3)-STRES(5)*STRES(5))/DETS
            SINVT(2)=(STRES(1)*STRES(3)-STRES(6)*STRES(6))/DETS
            SINVT(3)=(STRES(1)*STRES(2)-STRES(4)*STRES(4))/DETS
            SINVT(4)=-(STRES(4)*STRES(3)-STRES(5)*STRES(6))/DETS
            SINVT(5)=-(STRES(1)*STRES(5)-STRES(4)*STRES(6))/DETS
            SINVT(6)=(STRES(4)*STRES(5)-STRES(6)*STRES(2))/DETS

            ! COMPUTE THE PROJECTION OF SINVT -> (I4-(I2 \OTIMES
I2)/3):S^(-T)
            PROSINVT=R0
            DO I=1,NSTRE
                  DO J=1,NSTRE
                        PROSINVT(I)=PROSINVT(I)+DFOID(I,J)*SINVT(J)
                  ENDDO
            ENDDO
            ! COMPUTE BETA
            DO I=1,NSTRE
                  BETA(I)=R27*R3*VARJ2*VARJ2*STRES(I) +
BONE*R2*DETS*(DETS*PROSINVT(I))
```

```
        ENDDO
        ! COMPUTE ALPHA
        DO I=1,NSTRE
              FLOWV(I)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*BETA(I)
        ENDDO
        DO I=1,NSTRE
              EQ1(I)=STRES(I)-STRIAL(I)+R2G*DGAMA*FLOWV(I)
        ENDDO
        ! INITILIZE THE RESIDUAL EQUATION --> EQ2
        SIGMA=STRES
        SIGMA(1)=SIGMA(1)+P
        SIGMA(2)=SIGMA(2)+P
        SIGMA(3)=SIGMA(3)+P
        ! **************************************
        ! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
        ! **************************************
        DC_ALPHA_SIGMA=R0

      DC_ALPHA_SIGMA=FLOWV(1)*SIGMA(1)+FLOWV(2)*SIGMA(2)+FLOWV(3)*SIGMA(3)+
&

R2*FLOWV(4)*SIGMA(4)+R2*FLOWV(5)*SIGMA(5)+R2*FLOWV(6)*SIGMA(6)
        EQ2=EPBAR-EPBARN-DGAMA*DC_ALPHA_SIGMA/SIGMAY
        ! INITILIZE THE RESIDUAL EQUATION --> EQ3
        EQ3=SEQ-SIGMAY

      !=====================================================================
====

      !=====================================================================
====
        ! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES

      !=====================================================================
====

      !=====================================================================
====
        !************************
        ! COMPUTE S \OTIMES S
        !************************
        SDOTS=R0
        DO I=1,NSTRE
              DO J=1,NSTRE
                    IF(J.GE.4)THEN
                          SDOTS(I,J)=R2*STRES(I)*STRES(J)
                    ELSE
                          SDOTS(I,J)=STRES(I)*STRES(J)
                    ENDIF
              ENDDO
        ENDDO
        ! =========================================
        ! COMPUTE DBETA
        ! =========================================
        ADBETA=R27*R3*R2*VARJ2
        BDBETA=R27*R3*VARJ2*VARJ2
        CDBETA=BONE*R2*DETS*DETS
        DDBETA=R0
        ! =========================================
        ! COMPUTE DXI
        ! =========================================
        DXI=R0
        DO I=1,NSTRE
```

```
                    DXI(I)=R27*R3*VARJ2*VARJ2*STRES(I) +
BONE*R2*DETS*(DETS*SINVT(I))
            ENDDO
            ! ==========================================
            ! COMPUTE DXI \OTIMES BETA
            ! ==========================================
            DXIDBETA=R0
            DO I=1,NSTRE
                  DO J=1,NSTRE
                        IF(J.GE.4)THEN
                              DXIDBETA(I,J)=R2*BETA(I)*DXI(J)
                        ELSE
                              DXIDBETA(I,J)=BETA(I)*DXI(J)
                        ENDIF
                  ENDDO
            ENDDO
            ! ==========================================
            ! COMPUTE S^(-T) \OTIMES S^(-T)
            ! ==========================================
            SITDSIT=R0
            DO I=1,NSTRE
                  DO J=1,NSTRE
                        IF(J.GE.4)THEN
                              SITDSIT(I,J)=R2*SINVT(I)*SINVT(J)
                        ELSE
                              SITDSIT(I,J)=SINVT(I)*SINVT(J)
                        ENDIF
                  ENDDO
            ENDDO
            PROSITDSIT=R0
            DO I=1,NSTRE
                  DO J=1,NSTRE
                        DO K=1,NSTRE

      PROSITDSIT(I,J)=PROSITDSIT(I,J)+DFOID(I,K)*SITDSIT(K,J)
                        ENDDO
                  ENDDO
            ENDDO
            ! ==========================================
            ! COMPUTE S^(-T) \OTIMES S
            ! ==========================================
            SITDS=R0
            DO I=1,NSTRE
                  DO J=1,NSTRE
                        IF(J.GE.4)THEN
                              SITDS(I,J)=R2*SINVT(I)*STRES(J)
                        ELSE
                              SITDS(I,J)=SINVT(I)*STRES(J)
                        ENDIF
                  ENDDO
            ENDDO
            PROSITDS=R0
            DO I=1,NSTRE
                  DO J=1,NSTRE
                        DO K=1,NSTRE

      PROSITDS(I,J)=PROSITDS(I,J)+DFOID(I,K)*SITDS(K,J)
                        ENDDO
                  ENDDO
            ENDDO
            ! ==========================================
            ! DERIVATIVE OF S^(-T) IN RELATION TO S
            ! ==========================================
            DSITDS=R0
```

```
      DSITDS(1,1)=-SINVT(1)*SINVT(1)
      DSITDS(1,2)=-SINVT(4)*SINVT(4)
      DSITDS(1,3)=-SINVT(6)*SINVT(6)
      DSITDS(1,4)=-R2*SINVT(1)*SINVT(4)
      DSITDS(1,5)=-R2*SINVT(6)*SINVT(4)
      DSITDS(1,6)=-R2*SINVT(1)*SINVT(6)

      DSITDS(2,1)=-SINVT(4)*SINVT(4)
      DSITDS(2,2)=-SINVT(2)*SINVT(2)
      DSITDS(2,3)=-SINVT(5)*SINVT(5)
      DSITDS(2,4)=-R2*SINVT(2)*SINVT(4)
      DSITDS(2,5)=-R2*SINVT(5)*SINVT(2)
      DSITDS(2,6)=-R2*SINVT(4)*SINVT(5)

      DSITDS(3,1)=-SINVT(6)*SINVT(6)
      DSITDS(3,2)=-SINVT(5)*SINVT(5)
      DSITDS(3,3)=-SINVT(3)*SINVT(3)
      DSITDS(3,4)=-R2*SINVT(5)*SINVT(6)
      DSITDS(3,5)=-R2*SINVT(3)*SINVT(5)
      DSITDS(3,6)=-R2*SINVT(3)*SINVT(6)

      DSITDS(4,1)=-SINVT(4)*SINVT(1)
      DSITDS(4,2)=-SINVT(2)*SINVT(4)
      DSITDS(4,3)=-SINVT(5)*SINVT(6)
      DSITDS(4,4)=-(SINVT(1)*SINVT(2)+SINVT(4)*SINVT(4))
      DSITDS(4,5)=-(SINVT(5)*SINVT(4)+SINVT(2)*SINVT(6))
      DSITDS(4,6)=-(SINVT(5)*SINVT(1)+SINVT(4)*SINVT(6))

      DSITDS(5,1)=-SINVT(6)*SINVT(4)
      DSITDS(5,2)=-SINVT(5)*SINVT(2)
      DSITDS(5,3)=-SINVT(3)*SINVT(5)
      DSITDS(5,4)=-(SINVT(5)*SINVT(4)+SINVT(6)*SINVT(2))
      DSITDS(5,5)=-(SINVT(3)*SINVT(2)+SINVT(5)*SINVT(5))
      DSITDS(5,6)=-(SINVT(3)*SINVT(4)+SINVT(6)*SINVT(5))

      DSITDS(6,1)=-SINVT(6)*SINVT(1)
      DSITDS(6,2)=-SINVT(6)*SINVT(2)
      DSITDS(6,3)=-SINVT(3)*SINVT(6)
      DSITDS(6,4)=-(SINVT(5)*SINVT(1)+SINVT(6)*SINVT(4))
      DSITDS(6,5)=-(SINVT(3)*SINVT(4)+SINVT(5)*SINVT(6))
      DSITDS(6,6)=-(SINVT(3)*SINVT(1)+SINVT(6)*SINVT(6))

      PRODSITDS=R0
      DO I=1,NSTRE
            DO J=1,NSTRE
                  DO K=1,NSTRE
PRODSITDS(I,J)=PRODSITDS(I,J)+DFOID(I,K)*DSITDS(K,J)
                  ENDDO
            ENDDO
      ENDDO
      ! ==========================================
      ! COMPUTE S^(-T) \OTIMES S
      ! ==========================================
      SDSINVT=R0
      DO I=1,NSTRE
            DO J=1,NSTRE
                  IF(J.GE.4)THEN
                        SDSINVT(I,J)=R2*STRES(I)*SINVT(J)
                  ELSE
                        SDSINVT(I,J)=STRES(I)*SINVT(J)
                  ENDIF
            ENDDO
      ENDDO
```

```
! ==========================================
! COMPUTE DBETA
! ==========================================
DO I=1,NSTRE
      DO J=1,NSTRE

DBETA(I,J)=ADBETA*SDOTS(I,J)+BDBETA*FOID(I,J)+R2*CDBETA*PROSITDSIT(I,
J)+CDBETA*PRODSITDS(I,J)
      ENDDO
ENDDO
! ==========================================
! COMPUTE DALPHA
! ==========================================
DFLOWV=R0
DO I=1,NSTRE
      DO J=1,NSTRE
            DFLOWV(I,J)=CONE*(R1/R6)*( (-R5/R6)*( ALPHA**(-
R11/R6) )*DXIDBETA(I,J) + ( ALPHA**(-R5/R6) )*DBETA(I,J) )
      ENDDO
ENDDO
! ***************************************
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E SIGMA
! ***************************************
DC_DALPHA_SIGMA=R0
DO I=1,NSTRE
      DO J=1,NSTRE

DC_DALPHA_SIGMA(I)=DC_DALPHA_SIGMA(I)+DFLOWV(J,I)*SIGMA(J)
      ENDDO
ENDDO


! =====================================================
! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====================================================
MATRIX=R0
DO I=1,NSTRE
      DO J=1,NSTRE
            MATRIX(I,J)=FOID(I,J)+R2G*DGAMA*DFLOWV(I,J)
      ENDDO
ENDDO

MATRIX(1,8)=R2G*FLOWV(1)
MATRIX(2,8)=R2G*FLOWV(2)
MATRIX(3,8)=R2G*FLOWV(3)
MATRIX(4,8)=R2G*FLOWV(4)
MATRIX(5,8)=R2G*FLOWV(5)
MATRIX(6,8)=R2G*FLOWV(6)

! =====================================================
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====================================================

MATRIX(7,1)=-DGAMA*(FLOWV(1)+DC_DALPHA_SIGMA(1))/SIGMAY
MATRIX(7,2)=-DGAMA*(FLOWV(2)+DC_DALPHA_SIGMA(2))/SIGMAY
MATRIX(7,3)=-DGAMA*(FLOWV(3)+DC_DALPHA_SIGMA(3))/SIGMAY
MATRIX(7,4)=-DGAMA*(FLOWV(4)+DC_DALPHA_SIGMA(4))/SIGMAY
MATRIX(7,5)=-DGAMA*(FLOWV(5)+DC_DALPHA_SIGMA(5))/SIGMAY
MATRIX(7,6)=-DGAMA*(FLOWV(6)+DC_DALPHA_SIGMA(6))/SIGMAY
MATRIX(7,7)=R1+DGAMA*DC_ALPHA_SIGMA*HSLOPE/(SIGMAY*SIGMAY)
MATRIX(7,8)=-DC_ALPHA_SIGMA/SIGMAY

! =====================================================
```

```fortran
        ! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
        ! ====================================================

        MATRIX(8,1)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(1)
        MATRIX(8,2)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(2)
        MATRIX(8,3)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(3)
        MATRIX(8,4)=R2*CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(4)
        MATRIX(8,5)=R2*CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(5)
        MATRIX(8,6)=R2*CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(6)
        MATRIX(8,7)=-HSLOPE
        MATRIX(8,8)=R0

        RHS=R0
        RHS(1)=-EQ1(1)
        RHS(2)=-EQ1(2)
        RHS(3)=-EQ1(3)
        RHS(4)=-EQ1(4)
        RHS(5)=-EQ1(5)
        RHS(6)=-EQ1(6)
        RHS(7)=-EQ2
        RHS(8)=-EQ3

      !======================================================================
==
        ! SOLVE THE EQUATION SYSTEM

      !======================================================================
==
        RES=R0
        CALL SOLVERMA(MATRIX,RHS,RES,8)
        ! UPDATE VARIABLES
        STRES(1)=STRES(1)+RES(1)
        STRES(2)=STRES(2)+RES(2)
        STRES(3)=STRES(3)+RES(3)
        STRES(4)=STRES(4)+RES(4)
        STRES(5)=STRES(5)+RES(5)
        STRES(6)=STRES(6)+RES(6)
        EPBAR=EPBAR+RES(7)
        DGAMA=DGAMA+RES(8)

      !======================================================================
==
        ! CHECK CONVERGENCE

      !======================================================================
==
        RESNOR=R0
        IF(DABS(STRES(1)).LE.TOL)THEN
              RESNOR=RESNOR+DABS(RES(1))
        ELSE
              RESNOR=RESNOR+DABS(RES(1)/STRES(1))
        ENDIF
        IF(DABS(STRES(2)).LE.TOL)THEN
              RESNOR=RESNOR+DABS(RES(2))
        ELSE
              RESNOR=RESNOR+DABS(RES(2)/STRES(2))
        ENDIF
        IF(DABS(STRES(3)).LE.TOL)THEN
              RESNOR=RESNOR+DABS(RES(3))
        ELSE
              RESNOR=RESNOR+DABS(RES(3)/STRES(3))
        ENDIF
        IF(DABS(STRES(4)).LE.TOL)THEN
              RESNOR=RESNOR+DABS(RES(4))
```

```
            ELSE
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(4)/STRES(4))
            ENDIF
            IF(DABS(STRES(5)).LE.TOL)THEN
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(5))
            ELSE
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(5)/STRES(5))
            ENDIF
            IF(DABS(STRES(6)).LE.TOL)THEN
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(6))
            ELSE
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(6)/STRES(6))
            ENDIF
            IF(EPBAR.LT.TOL)THEN
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(7))
            ELSE
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(7)/EPBAR)
            ENDIF
            IF(DGAMA.LE.TOL)THEN
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(8))
            ELSE
                  RESNOR=RESNOR+DABS(RES(8)/DGAMA)
            ENDIF
            IF(RESNOR.LE.TOL)THEN
                  RSTAVA(KSTRE+1)=EPBAR
                  RSTAVA(1)=(STRES(1)/R2G)+(R1/R3)*P/BULK
                  RSTAVA(2)=(STRES(2)/R2G)+(R1/R3)*P/BULK
                  RSTAVA(3)=(STRES(3)/R2G)+(R1/R3)*P/BULK
                  RSTAVA(4)=(STRES(4)/R2G)*R2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENÇÃO!!!!!!!!!!!!!!!!
                  RSTAVA(5)=(STRES(5)/R2G)*R2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENÇÃO!!!!!!!!!!!!!!!!
                  RSTAVA(6)=(STRES(6)/R2G)*R2
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENÇÃO!!!!!!!!!!!!!!!!
                  STRES(1)=STRES(1)+P
                  STRES(2)=STRES(2)+P
                  STRES(3)=STRES(3)+P
!                 write(*,*)'================'
!                 write(*,*)stres(1)
!                 write(*,*)stres(2)
!                 write(*,*)stres(3)
!                 write(*,*)stres(4)
!                 write(*,*)stres(5)
!                 write(*,*)stres(6)
!                 write(*,*)rstava
!                 stop
                  GOTO 1000
            ENDIF
      ENDDO
ELSE
! ELASTIC DOMAIN
      STRES(1)=R2G*EET(1)+P
      STRES(2)=R2G*EET(2)+P
      STRES(3)=R2G*EET(3)+P
      STRES(4)=R2G*EET(4)
      STRES(5)=R2G*EET(5)
      STRES(6)=R2G*EET(6)

      RSTAVA(1)=STRAN(1)
      RSTAVA(2)=STRAN(2)
      RSTAVA(3)=STRAN(3)
      RSTAVA(4)=STRAN(4)
      RSTAVA(5)=STRAN(5)
      RSTAVA(6)=STRAN(6)
```

```
ENDIF
1000 CONTINUE
LALGVA(1)=IFPLAS
LALGVA(2)=SUFAIL
RETURN
END
```

```
! BEGIN_SUBROUTINE CTGA
!
SUBROUTINE CTGA3D(DGAMA , DMATX    , EPFLAG   , IPROPS ,&
              NTYPE , RPROPS   , RSTAVA   , STREST ,&
              NDDIM , NRPROPS , NIPROPS , NSTRES ,&
              NRSTAV)
IMPLICIT NONE
!===========================================================================
====
!===========================================================================
====
!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER::  IPHARD=6, KSTRE=6
!===========================================================================
====
!===========================================================================
====
!DATA DECLARATION
REAL(8) R0      /0.0D0/
REAL(8) RP5     /0.5D0/
REAL(8) R1      /1.0D0/
REAL(8) R2      /2.0D0/
REAL(8) R3      /3.0D0/
REAL(8) R4      /4.0D0/
REAL(8) R5      /5.0D0/
REAL(8) R6      /6.0D0/
REAL(8) R11      /11.0D0/
REAL(8) R27     /27.0D0/
REAL(8) R81     /81.0D0/
REAL(8) R243    /243.0D0/
REAL(8) R729    /729.0D0/
REAL(8) R1458   /1458.0D0/
!===========================================================================
====
!===========================================================================
====
! DECLARATION OF ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NDDIM , NRPROPS , NIPROPS , NSTRES , NRSTAV
LOGICAL EPFLAG
REAL(8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION(NIPROPS)       :: IPROPS

REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DMATX
REAL(8), DIMENSION(NRPROPS)       :: RPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRSTAV)        :: RSTAVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: STREST
!===========================================================================
====
!===========================================================================
====
! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL ERROR

INTEGER I , J , NHARD , K

REAL(8) PLFUN , DPLFUN

REAL(8) EPBAR   , YOUNG   , POISS   , AONE , BONE , GMODU , BULK , R2G , &
      R3G     , P       , SIGMAY , HSLOPE , DETS   , VARJ2 , SEQ  , XI   , &
      ADBETA , BDBETA , CDBETA , DDBETA , CONE, ALPHA
```

```
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: SOID
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: FOID
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DEVPRJ
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: STRES
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: SINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: PROSINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: BETA
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DFOID
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: FLOWV
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SDOTS
REAL(8), DIMENSION(NSTRES)        :: DXI
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SITDSIT
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PROSITDSIT
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PROSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PRODSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SDSINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DBETA
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DFLOWV
REAL(8), DIMENSION(8,8)           :: MATRIX
REAL(8), DIMENSION(8,8)           :: MINVERSE
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES)   :: DXIDBETA
! ********************************************************
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! ********************************************************
REAL(8), DIMENSION(6) :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÕES
! GLOBAIS
REAL(8), DIMENSION(6) :: DC_DALPHA_SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL(8) DC_ALPHA_SIGMA

! INITIALIZE LOCAL VARIABLES
ERROR=.FALSE.

I=0 ; J=0 ; NHARD=0 ; K=0

SOID=R0       ; FOID=R0     ; DEVPRJ=R0      ; EPBAR=R0    ; YOUNG=R0    ;
POISS=R0
AONE=R0       ; BONE=R0     ; GMODU=R0       ; BULK=R0     ; R2G=R0      ;
R3G=R0
P=R0          ; STRES=R0    ; SIGMAY=R0      ; HSLOPE=R0   ; DETS=R0     ;
VARJ2=R0
SEQ=R0        ; XI=R0       ; SINVT=R0       ; PROSINVT=R0 ; BETA=R0     ;
DFOID=R0
FLOWV=R0      ; ADBETA=R0   ; BDBETA=R0      ; CDBETA=R0   ; DDBETA=R0   ;
SDOTS=R0
DXI=R0        ; SITDSIT=R0 ; PROSITDSIT=R0 ; SITDS=R0     ; PROSITDS=R0 ;
DSITDS=R0
PRODSITDS=R0 ; SDSINVT=R0 ; DBETA=R0       ; DFLOWV=R0    ; MINVERSE=R0 ;
DXIDBETA=R0
CONE=R0       ; ALPHA=R0

! ********************************************************
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! ********************************************************
SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0
!==========================================================================
====
```

```
!==========================================================================
====
EPBAR=RSTAVA(KSTRE+1)
! SET SOME MATERIAL PROPERTIES
YOUNG=RPROPS(2)
POISS=RPROPS(3)
NHARD=IPROPS(3)
AONE=RPROPS(4)
BONE=RPROPS(5)
CONE=((R4/R729)*BONE + R1)**(-R1/R6)
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU
IF(EPFLAG)THEN
!      PLASTIC DOMAIN
      ! INITILIZE THE FOURTH ORER IDENTITY TENSOR
      FOID=R0
      FOID(1,1)=R1
      FOID(2,2)=R1
      FOID(3,3)=R1
      FOID(4,4)=R1
      FOID(5,5)=R1
      FOID(6,6)=R1
      ! INITILIZE THE SECON ORDER IDENTITY TENSOR
      SOID=R0
      SOID(1)=R1
      SOID(2)=R1
      SOID(3)=R1

      ! COMPUTE (FOID-(SOID \OTIMES SOID)/3)
      DFOID=R0
      DO I=1,NSTRES
            DO J=1,NSTRES
                  DFOID(I,J)=FOID(I,J)-(R1/R3)*SOID(I)*SOID(J)
            ENDDO
      ENDDO
      DFOID(4,4)=DFOID(4,4)*R2
      DFOID(5,5)=DFOID(5,5)*R2
      DFOID(6,6)=DFOID(6,6)*R2
      P=(STREST(1)+STREST(2)+STREST(3))/R3
      STRES(1)=STREST(1)-P
      STRES(2)=STREST(2)-P
      STRES(3)=STREST(3)-P
      STRES(4)=STREST(4)
      STRES(5)=STREST(5)
      STRES(6)=STREST(6)
      SIGMAY=PLFUN(EPBAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
      HSLOPE=DPLFUN(EPBAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
      DETS=STRES(1)*STRES(2)*STRES(3)+&
           STRES(4)*STRES(5)*STRES(6)+&
           STRES(4)*STRES(5)*STRES(6)-&
             STRES(6)*STRES(2)*STRES(6)-&
           STRES(5)*STRES(5)*STRES(1)-&
           STRES(3)*STRES(4)*STRES(4)
      !
      VARJ2=(R1/R2)*(STRES(1)*STRES(1)+STRES(2)*STRES(2)+&
                STRES(3)*STRES(3)+R2*STRES(4)*STRES(4)+&
                R2*STRES(5)*STRES(5)+R2*STRES(6)*STRES(6))
      ! SEQ -- > SIGMA_EQ
      ALPHA=( R27*(VARJ2**R3) + BONE*(DETS**R2) )
    SEQ=CONE*( ALPHA**(R1/R6) )
      !
```

```
        SINVT(1)=(STRES(2)*STRES(3)-STRES(5)*STRES(5))/DETS
        SINVT(2)=(STRES(1)*STRES(3)-STRES(6)*STRES(6))/DETS
        SINVT(3)=(STRES(1)*STRES(2)-STRES(4)*STRES(4))/DETS
        SINVT(4)=-(STRES(4)*STRES(3)-STRES(5)*STRES(6))/DETS
        SINVT(5)=-(STRES(1)*STRES(5)-STRES(4)*STRES(6))/DETS
        SINVT(6)=(STRES(4)*STRES(5)-STRES(6)*STRES(2))/DETS
        ! COMPUTE THE PROJECTION OF SINVT -> (I4-(I2 \OTIMES I2)/3):S^(-T)
        PROSINVT=R0
        DO I=1,NSTRES
              DO J=1,NSTRES
                    PROSINVT(I)=PROSINVT(I)+DFOID(I,J)*SINVT(J)
              ENDDO
        ENDDO
        ! COMPUTE BETA
        DO I=1,NSTRES
              BETA(I)=R27*R3*VARJ2*VARJ2*STRES(I) +
  BONE*R2*DETS*(DETS*PROSINVT(I))
        ENDDO
        ! COMPUTE ALPHA
        DO I=1,NSTRES
              FLOWV(I)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*BETA(I)
        ENDDO
        SIGMA=STRES
        SIGMA(1)=SIGMA(1)+P
        SIGMA(2)=SIGMA(2)+P
        SIGMA(3)=SIGMA(3)+P
        ! **************************************
        ! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
        ! **************************************
        DC_ALPHA_SIGMA=R0
        DC_ALPHA_SIGMA=FLOWV(1)*SIGMA(1)+FLOWV(2)*SIGMA(2)+FLOWV(3)*SIGMA(3)+
  &

  R2*FLOWV(4)*SIGMA(4)+R2*FLOWV(5)*SIGMA(5)+R2*FLOWV(6)*SIGMA(6)
        !======================================================================
  ====
        !======================================================================
  ====
        ! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES
        !======================================================================
  ====
        !======================================================================
  ====
        !************************
        ! COMPUTE S \OTIMES S
        !************************
        SDOTS=R0
        DO I=1,NSTRES
              DO J=1,NSTRES
                    IF(J.GE.4)THEN
                          SDOTS(I,J)=R2*STRES(I)*STRES(J)
                    ELSE
                          SDOTS(I,J)=STRES(I)*STRES(J)
                    ENDIF
              ENDDO
        ENDDO
        ! ==========================================
        ! COMPUTE DBETA
        ! ==========================================
        ADBETA=R27*R3*R2*VARJ2
        BDBETA=R27*R3*VARJ2*VARJ2
        CDBETA=BONE*R2*DETS*DETS
        DDBETA=R0
        ! ==========================================
```

```
        ! COMPUTE DXI
        ! =========================================
        DXI=R0
        DO I=1,NSTRES
              DXI(I)=R27*R3*VARJ2*VARJ2*STRES(I) +
  BONE*R2*DETS*(DETS*SINVT(I))
        ENDDO
        ! =========================================
        ! COMPUTE DXI \OTIMES BETA
        ! =========================================
        DXIDBETA=R0
        DO I=1,NSTRES
              DO J=1,NSTRES
                    IF(J.GE.4)THEN
                          DXIDBETA(I,J)=R2*BETA(I)*DXI(J)
                    ELSE
                          DXIDBETA(I,J)=BETA(I)*DXI(J)
                    ENDIF
              ENDDO
        ENDDO
        ! =========================================
        ! COMPUTE S^(-T) \OTIMES S^(-T)
        ! =========================================
        SITDSIT=R0
        DO I=1,NSTRES
              DO J=1,NSTRES
                    IF(J.GE.4)THEN
                          SITDSIT(I,J)=R2*SINVT(I)*SINVT(J)
                    ELSE
                          SITDSIT(I,J)=SINVT(I)*SINVT(J)
                    ENDIF
              ENDDO
        ENDDO
        PROSITDSIT=R0
        DO I=1,NSTRES
              DO J=1,NSTRES
                    DO K=1,NSTRES

        PROSITDSIT(I,J)=PROSITDSIT(I,J)+DFOID(I,K)*SITDSIT(K,J)
                    ENDDO
              ENDDO
        ENDDO
        ! =========================================
        ! COMPUTE S^(-T) \OTIMES S
        ! =========================================
        SITDS=R0
        DO I=1,NSTRES
              DO J=1,NSTRES
                    IF(J.GE.4)THEN
                          SITDS(I,J)=R2*SINVT(I)*STRES(J)
                    ELSE
                          SITDS(I,J)=SINVT(I)*STRES(J)
                    ENDIF
              ENDDO
        ENDDO
        PROSITDS=R0
        DO I=1,NSTRES
              DO J=1,NSTRES
                    DO K=1,NSTRES
                          PROSITDS(I,J)=PROSITDS(I,J)+DFOID(I,K)*SITDS(K,J)
                    ENDDO
              ENDDO
        ENDDO
```

```
! ==========================================
! DERIVATIVE OF S^(-T) IN RELATION TO S
! ==========================================
DSITDS=R0
DSITDS(1,1)=-SINVT(1)*SINVT(1)
DSITDS(1,2)=-SINVT(4)*SINVT(4)
DSITDS(1,3)=-SINVT(6)*SINVT(6)
DSITDS(1,4)=-R2*SINVT(1)*SINVT(4)
DSITDS(1,5)=-R2*SINVT(6)*SINVT(4)
DSITDS(1,6)=-R2*SINVT(1)*SINVT(6)

DSITDS(2,1)=-SINVT(4)*SINVT(4)
DSITDS(2,2)=-SINVT(2)*SINVT(2)
DSITDS(2,3)=-SINVT(5)*SINVT(5)
DSITDS(2,4)=-R2*SINVT(2)*SINVT(4)
DSITDS(2,5)=-R2*SINVT(5)*SINVT(2)
DSITDS(2,6)=-R2*SINVT(4)*SINVT(5)

DSITDS(3,1)=-SINVT(6)*SINVT(6)
DSITDS(3,2)=-SINVT(5)*SINVT(5)
DSITDS(3,3)=-SINVT(3)*SINVT(3)
DSITDS(3,4)=-R2*SINVT(5)*SINVT(6)
DSITDS(3,5)=-R2*SINVT(3)*SINVT(5)
DSITDS(3,6)=-R2*SINVT(3)*SINVT(6)

DSITDS(4,1)=-SINVT(4)*SINVT(1)
DSITDS(4,2)=-SINVT(2)*SINVT(4)
DSITDS(4,3)=-SINVT(5)*SINVT(6)
DSITDS(4,4)=-(SINVT(1)*SINVT(2)+SINVT(4)*SINVT(4))
DSITDS(4,5)=-(SINVT(5)*SINVT(4)+SINVT(2)*SINVT(6))
DSITDS(4,6)=-(SINVT(5)*SINVT(1)+SINVT(4)*SINVT(6))

DSITDS(5,1)=-SINVT(6)*SINVT(4)
DSITDS(5,2)=-SINVT(5)*SINVT(2)
DSITDS(5,3)=-SINVT(3)*SINVT(5)
DSITDS(5,4)=-(SINVT(5)*SINVT(4)+SINVT(6)*SINVT(2))
DSITDS(5,5)=-(SINVT(3)*SINVT(2)+SINVT(5)*SINVT(5))
DSITDS(5,6)=-(SINVT(3)*SINVT(4)+SINVT(6)*SINVT(5))

DSITDS(6,1)=-SINVT(6)*SINVT(1)
DSITDS(6,2)=-SINVT(6)*SINVT(2)
DSITDS(6,3)=-SINVT(3)*SINVT(6)
DSITDS(6,4)=-(SINVT(5)*SINVT(1)+SINVT(6)*SINVT(4))
DSITDS(6,5)=-(SINVT(3)*SINVT(4)+SINVT(5)*SINVT(6))
DSITDS(6,6)=-(SINVT(3)*SINVT(1)+SINVT(6)*SINVT(6))

PRODSITDS=R0
DO I=1,NSTRES
      DO J=1,NSTRES
            DO K=1,NSTRES

PRODSITDS(I,J)=PRODSITDS(I,J)+DFOID(I,K)*DSITDS(K,J)
            ENDDO
      ENDDO
ENDDO
! ==========================================
! COMPUTE S^(-T) \OTIMES S
! ==========================================
SDSINVT=R0
DO I=1,NSTRES
      DO J=1,NSTRES
            IF(J.GE.4)THEN
                  SDSINVT(I,J)=R2*STRES(I)*SINVT(J)
            ELSE
```

```
                  SDSINVT(I,J)=STRES(I)*SINVT(J)
            ENDIF
      ENDDO
ENDDO
! =========================================
! COMPUTE DBETA
! =========================================
DO I=1,NSTRES
      DO J=1,NSTRES

DBETA(I,J)=ADBETA*SDOTS(I,J)+BDBETA*FOID(I,J)+R2*CDBETA*PROSITDSIT(I,
J)+CDBETA*PRODSITDS(I,J)
      ENDDO
ENDDO
! =========================================
! COMPUTE DALPHA
! =========================================
DFLOWV=R0
DO I=1,NSTRES
      DO J=1,NSTRES
            DFLOWV(I,J)=CONE*(R1/R6)*( (-R5/R6)*( ALPHA**(-R11/R6)
)*DXIDBETA(I,J) + ( ALPHA**(-R5/R6) )*DBETA(I,J) )
      ENDDO
ENDDO

! **************************************
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E SIGMA
! **************************************
DC_DALPHA_SIGMA=R0
DO I=1,6
      DO J=1,6

DC_DALPHA_SIGMA(I)=DC_DALPHA_SIGMA(I)+DFLOWV(J,I)*SIGMA(J)
      ENDDO
ENDDO

! ======================================================
! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! ======================================================
MATRIX=R0
DO I=1,6
      DO J=1,6
                  MATRIX(I,J)=FOID(I,J)+R2G*DGAMA*DFLOWV(I,J)
      ENDDO
ENDDO

MATRIX(1,8)=R2G*FLOWV(1)
MATRIX(2,8)=R2G*FLOWV(2)
MATRIX(3,8)=R2G*FLOWV(3)
MATRIX(4,8)=R2G*FLOWV(4)
MATRIX(5,8)=R2G*FLOWV(5)
MATRIX(6,8)=R2G*FLOWV(6)

! ======================================================
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! ======================================================

MATRIX(7,1)=-DGAMA*(FLOWV(1)+DC_DALPHA_SIGMA(1))/SIGMAY
MATRIX(7,2)=-DGAMA*(FLOWV(2)+DC_DALPHA_SIGMA(2))/SIGMAY
MATRIX(7,3)=-DGAMA*(FLOWV(3)+DC_DALPHA_SIGMA(3))/SIGMAY
MATRIX(7,4)=-DGAMA*(FLOWV(4)+DC_DALPHA_SIGMA(4))/SIGMAY
MATRIX(7,5)=-DGAMA*(FLOWV(5)+DC_DALPHA_SIGMA(5))/SIGMAY
MATRIX(7,6)=-DGAMA*(FLOWV(6)+DC_DALPHA_SIGMA(6))/SIGMAY
MATRIX(7,7)=R1+DGAMA*DC_ALPHA_SIGMA*HSLOPE/(SIGMAY*SIGMAY)
```

```fortran
MATRIX(7,8)=-DC_ALPHA_SIGMA/SIGMAY

! ====================================================
! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! ====================================================

MATRIX(8,1)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(1)
MATRIX(8,2)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(2)
MATRIX(8,3)=CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(3)
MATRIX(8,4)=R2*CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(4)
MATRIX(8,5)=R2*CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(5)
MATRIX(8,6)=R2*CONE*(R1/R6)*( ALPHA**(-R5/R6) )*DXI(6)
MATRIX(8,7)=-HSLOPE
MATRIX(8,8)=R0

! COMPUTE THE INVERCE OF MATRIX
CALL RMINVE (MATRIX , MINVERSE , 8 , ERROR)
DMATX=R0
DO I=1,NSTRES
      DO J=1,NSTRES
            DO K=1,NSTRES
                  DMATX(I,J)=DMATX(I,J)+MINVERSE(I,K)*DFOID(K,J)
            ENDDO
      ENDDO
ENDDO

DO I=1,NSTRES
      DO J=1,NSTRES
            DMATX(I,J)=R2G*DMATX(I,J)
      ENDDO
ENDDO

! COLUMN 1 - XX
DMATX(1,1)=DMATX(1,1)+BULK
DMATX(2,1)=DMATX(2,1)+BULK
DMATX(3,1)=DMATX(3,1)+BULK
! COLUMN 2 - YY
DMATX(1,2)=DMATX(1,2)+BULK
DMATX(2,2)=DMATX(2,2)+BULK
DMATX(3,2)=DMATX(3,2)+BULK
! COLUMN 3 - ZZ
DMATX(1,3)=DMATX(1,3)+BULK
DMATX(2,3)=DMATX(2,3)+BULK
DMATX(3,3)=DMATX(3,3)+BULK
! COLUMN 4 - XY
DMATX(1,4)=DMATX(1,4)/R4
DMATX(2,4)=DMATX(2,4)/R4
DMATX(3,4)=DMATX(3,4)/R4
DMATX(4,4)=DMATX(4,4)/R4
DMATX(5,4)=DMATX(5,4)/R4
DMATX(6,4)=DMATX(6,4)/R4
! COLUMN 5 - YZ
DMATX(1,5)=DMATX(1,5)/R4
DMATX(2,5)=DMATX(2,5)/R4
DMATX(3,5)=DMATX(3,5)/R4
DMATX(4,5)=DMATX(4,5)/R4
DMATX(5,5)=DMATX(5,5)/R4
DMATX(6,5)=DMATX(6,5)/R4
! COLUMN 5 - XZ
DMATX(1,6)=DMATX(1,6)/R4
DMATX(2,6)=DMATX(2,6)/R4
DMATX(3,6)=DMATX(3,6)/R4
DMATX(4,6)=DMATX(4,6)/R4
DMATX(5,6)=DMATX(5,6)/R4
```

```
      DMATX(6,6)=DMATX(6,6)/R4

ELSE
      ! ELASTIC DOMAIN
      FOID(1,1)=R1
      FOID(2,2)=R1
      FOID(3,3)=R1
      FOID(4,4)=RP5
      FOID(5,5)=RP5
      FOID(6,6)=RP5
      SOID(1)=R1
      SOID(2)=R1
      SOID(3)=R1
      DO I=1,NSTRES
            DO J=1,NSTRES
                  DEVPRJ(I,J)=FOID(I,J)-SOID(I)*SOID(J)*(R1/R3)
            ENDDO
      ENDDO
      DO I=1,NSTRES
            DO J=I,NSTRES
                  DMATX(I,J)=R2G*DEVPRJ(I,J)+BULK*SOID(I)*SOID(J)
            ENDDO
      ENDDO
! Assemble lower triangle
! -----------------------
      DO J=1,NSTRES-1
            DO I=J+1,NSTRES
                  DMATX(I,J)=DMATX(J,I)
            ENDDO
      ENDDO
ENDIF
RETURN
END
```