Marcos Vinicius Silva de Menezes

Democracia Deliberativa e Teoria da Agregação de Juízos: Uma Análise Comparativa de Regras de Agregação

Brasília

2015

Marcos Vinicius Silva de Menezes

Democracia Deliberativa e Teoria da Agregação de Juízos: Uma Análise Comparativa de Regras de Agregação

Monografia apresentada como requisito para obtenção do grau de Bacharel no Curso de Ciências Econômicas do Departamento de Economia da Universidade de Brasília.

Universidade de Brasília – Unb

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Departamento de Economia

Orientador: Leandro Gonçalves do Nascimento

Brasília

2015

Marcos Vinicius Silva de Menezes

Democracia Deliberativa e Teoria da Agregação de Juízos: Uma Análise Comparativa de Regras de Agregação

Monografia apresentada como requisito para obtenção do grau de Bacharel no Curso de Ciências Econômicas do Departamento de Economia da Universidade de Brasília.

Trabalho aprovado. Brasília, 02 de junho de 2015:

Leandro Gonçalves do Nascimento
Orientador

Daniel Oliveira Cajueiro
Membro

Brasília
2015

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que tornaram este trabalho possível. Agradeço à minha família, em especial, à minha irmã Cecília e à minha mãe Maria. Agradeço à Érica. Agradeço ao professor Leandro Gonçalves do Nascimento pela dedicação e paciência, e ao professor Daniel Oliveira Cajueiro por ter, gentilmente, aceito fazer parte da banca.

Por fim, agradeço a todos os contribuintes brasileiros por financiarem este trabalho.

"Not to laugh, not to lament, not to detest, but to understand".
Baruch Spinoza -Theological-Political Treatise

"The highest activity a human being can attain is learning for understanding,
because to understand is to be free."
Baruch Spinoza

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo comparativo de regras de agregação de juízos. Os critérios positivos para que uma agregação de juízos escape ao teorema de impossibilidade de List e Pettit e a manipulação de votos não são conclusivos. Portanto, são introduzidos alguns critérios normativos que tais regras devem satisfazer para serem implementadas em uma sociedade democrática. Conclui-se que a escolha de uma regra de decisão social depende das preferências individuais sobre a conclusão e as premissas de um juízo.

Palavras-chaves: Agregação de juízos. Dilema discursivo. Teorema da impossibilidade. Voto estratégico.

Abstract

We provide a comparative study on some judgment aggregation rules. The positive criteria for an aggregation rule to escape the List and Pettit impossibility theorem and to be strategy-proof are inconclusive. Therefore, we introduce some normative criteria that are appealing to a democratic society. The problem of choosing a social decision rule relies on the individual preferences over the conclusion and the premises.

Key-words: Judgment Aggregation. Discursive Dilemma. Impossibility theorems. Strategic voting.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Este trabalho apresenta uma análise comparativa de regras de agregação de juízos. Assim como o teorema de Arrow (1951, 1963), o teorema de List e Pettit (2002) apresenta uma lista de critérios que uma regra de agregação deve satisfazer: anonimidade, neutralidade e independência. E a conclusão é que a única regra de agregação que satisfaz tais condições é a regra de agregação ditatorial. Apesar deste resultado, as decisões coletivas precisam ser feitas e para isso algum critério de decisão deve ser seguido.

O teorema da impossibilidadide de List e Pettit pode ser evitado pelo relaxamento de algumas hipóteses. Mas qual ou quais hipóteses devem ser relaxadas implica na escolha de novos critérios de análise. Uma análise puramente positiva não gera respostas claras, pois todas as regras de agregação falham em satisfazer os critérios listados pelo teorema de impossibilidade. Portanto, alguns critérios normativos são introduzidos para escolha de quais hipóteses do teorema devem ser modificadas.

Para escolher os critérios normativos, são definidas algumas características desejáveis em uma democracia moderna. Existe um consenso na literatura (Pettit, 2001) de que uma democracia deliberativa deve satisfazer as restrições de pluralismo, anonimidade, decisão e integridade. Estas restrições também resultam em um teorema de impossibilidade para regras de decisão não ditatoriais. Mas a diferença é que agora existem parâmetros políticos que permitem escolher quais hipóteses podem ser enfraquecidas para escapar da ditadura imposta pelos axiomas do teorema.

O dilema discursivo surge da aplicação de regras de agregação distintas. A regra baseada na conclusão diz que a regra de agregação deve ser aplicada nas premissas por cada indivíduo e apenas após a conclusão lógica de cada agente, a regra de maioria simples é aplicada as conclusões. A regra baseada nas premissas diz que a regra de maioria simples deve ser aplicada a todas as premissas de cada agente e a após a escolha de cada premissa é feita a conclusão lógica. Estas duas regras de agregação coincidem com as correntes teóricas liberalismo mínimo e deliberacionismo amplo.

Se o domínio da regra de agregação for restringido, então é possível gerar conjuntos de juízos que são consistentes e completos e que não são gerados por um ditador. Isto é possível porque a condição de domínio irrestrito foi enfraquecida. Este é o caminho proposto pelo deliberacionismo amplo. O caminho preferido pelo liberalismo mínimo é limitar a agenda de votação a apenas premissas atômicas, e assim, evitar inconsistências devido à complexidade das premissas a serem julgadas.

Revisão de Literatura

A teoria de agregação de juízos surgiu com o dilema discursivo (List, 2002) apresentado por Kornhauser e Sager (1986, 1993). Em uma corte constituída por três juízes, um réu é julgado por quebra de contrato. Três premissas são julgadas: p = existia um contrato em vigor; q = o contrato foi quebrado; r = o réu é responsável pela quebra de contrato. A última premissa é uma consequência lógica das demais alternativas. Dependendo da configuração dos perfis de juízos individuais, a agregação de juízos sobre todas as premissas pode gerar resultados logicamente inconsistentes.

Uma generalização do dilema discursivo foi apresenteda por List e Pettit (2002, 2004) usando lógica proposicional. Este teorema foi estendido para lógicas com maior capacidade expressiva por Dietrich (2007). Após ser provado que o problema de agregação de preferências é um caso particular do problema de agregação de juízos (Dietrich e List 2007, Nehring 2004), o interesse pela teoria da agregação de juízos cresceu (List e Puppe, 2009). Uma caracterização da manipulação de votos e agendas foi feita por Dietrich (2007) e por List e Dietrich (2009).

Uma introdução a parte técnica da teoria da agregação de juízos pode ser conferida em List e Puppe (2009) e em List (2011). Uma introdução aos aspectos computacionais da teoria da agregação pode ser vista em Enriss (2001), uma introdução filosófica ao tema pode ser vista em Pettit (2001) e em List (2006). Este trabalho aproxima as abordagens acima listadas, e demonstra que elas são equivalentes conceitualmente.

Este trabalho é dividido em 4 capítulos. O primeiro capítulo contém uma introdução à lógica proposicional. Neste capítulo serão apresentados os conectivos lógicos e as tabelas-verdade associadas a eles. As principais definições da semântica da lógica proposicional serão apresentadas, assim como as definições de conjunto completo e consistente que são centrais para compreensão do demais capítulos.

O segundo capítulo contém uma breve introdução à relação de preferência, produto cartesiano e algumas propriedades que as relações binárias podem satisfazer. Esses conceitos são utilizados para apresentar formalmente o teorema da (im)possibilidade de Arrow (1951, 1963). O paradoxo de Condorcet, que é um caso particular do teorema de Arrow, é utilizado como um exemplo conhecido de agregação de preferências que não é capaz de gerar uma escolha social. Um exemplo de regra de preferências capaz de gerar uma escolha social é apresentado. Essa regra é um caso particular da regra de maioria simples, mas com o domínio de preferências restrito.

O terceiro capítulo apresenta uma introdução à teoria de agregação de juízos. O dilema discursivo é apresentado com o exemplo da corte de juízos. Na seção seguinte é apresentado uma generalização do dilema discursivo. O problema do voto estratégico é considerado dentro do arcabouço teórico da teoria de agregação de juízos, e é apresentado um resultado similar ao teorema de Gibbard-Satterhwaite. Uma breve consideração sobre manipulação de agendas está contida na última seção do capítulo.

O quarto capítulo apresenta a teoria de agregação de juízos sob uma perspectiva política e filosófica. Os axiomas do teorema de List e Pettit (2002) são redefinidos para satisfazer os ideais de uma democracia. Em seguida são apresentadas as teorias do liberalismo mínimo e do deliberacionismo amplo, e é demonstrado que ambas são equivalentes à votação baseada em conclusão e à votação baseada em premissas, quando restritas ao processo de agregação de juízos. Uma análise comparativa é feita com base nos critérios normativos exigidos por cada teoria e pelos princípios democráticos já definidos. Concluímos que a escolha da regra de agregação está estritamente ligada à questão de se uma sociedade deve priorizar a racionalidade coletiva das decisões, ou se deve priorizar o processo deliberativo dos juízos coletivos.

1 Lógica

As linguagens naturais como o português ou o inglês não são adequadas para serem utilizadas como linguagem da matemática, pois estão em constante transformação e possuem ambiguidades imanentes (Mileti, 2014) a qualquer linguagem não formal. Uma maneira de evitar tais problemas é criar uma nova linguagem. A lógica é uma linguagem capaz de denotar sentenças livres de ambiguidade. Não nos deteremos nos aspectos filosóficos da lógica, apenas em sua utilização corrente em matemática.

Este capítulo é dividido em três seções. A primeira seção apresenta alguns exemplos de sentenças afirmativas, que são objeto de estudo da lógica clássica, e outros tipos de sentença que não são proposições. A linguagem da lógica proposicional é apresentada com seus elementos constituintes, os símbolos proposicionais, os conectivos lógicos, dentre outros. A segunda seção introduz a semântica da lógica proposicional. A função de interpretação é definida e as tabelas-verdade associadas a cada conectivo são construídas. A terceira seção apresenta algumas definições como tautologia, contradição, satisfação. Os princípios do terceiro excluído e o princípio da não contradição são apresentados nesta seção.

1.1 Lógica Proposicional

A lógica proposicional é uma área da lógica que estuda as proposições, tanto em sua forma primitiva quanto em sua formação a partir de conectivos lógicos. Uma proposição é uma afirmação que pode ser atribuída valor verdadeiro ou falso. A partir de proposições pode-se criar novas proposições com a utilização de conectivos lógicos. Mas não é qualquer sentença que pode ser representada pela lógica proposicional. Exemplos:

1. Qual é o seu nome?
2. 2+2=5.
3. $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2x \mid_{x=0} = 0$.
4. Zeca é uma pessoa legal.
5. Se chover e Maria não tiver um guarda-chuva, então ela se molhará.
6. Pare!

As sentenças 1, 4 e 6 são sentenças interrogativas, declarativas e imperativas, respectivamente. Estas sentenças não são objetos de estudo da lógica. As demais sentenças são proposições, pois podem ser atribuídas valores verdadeiro ou falso. Estas sentenças são chamadas de sentenças declarativas (Nunes, 2008).

Alfabeto da Lógica Proposicional

A linguagem da lógica proposicional é semelhante a de outras linguagens. No caso do português, as palavras são construídas a partir do alfabeto formado pelas letras $\{a, b, \ldots, z\}$. As sentenças lógicas são formadas a partir do alfabeto lógico e obedecem a regras de formação.

Definição O alfabeto da lógica proposicional é constituído por:

- símbolos de pontuação (,);
- símbolos de verdade: verdadeiro, falso;
- símbolos proposicionais: $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2$, ..., ;
- conectivos proposicionais $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Uma declaração primitiva é uma afirmação que não pode ser decomposta em premissas menores, ou seja, é uma sentença sem conectivos. Os conectivos lógicos unem premissas atômicas e constroem novas premissas. Abaixo estão listados os conectivos da lógica proposicional.

1. $\wedge$ denota *e*.
2. $\vee$ denota *ou*.
3. $\neg$ denota *não*.
4. $\rightarrow$ denota *implica*.
5. $\leftrightarrow$ denota *bi-implicação*.

Uma sentença é uma conjunção se ela é construída a partir de ao menos duas premissas atômicas pelo conectivo $\wedge$. Exemplo[1]: $p = 2$ é um divisor de $4; q = 2$ é um divisor de 8; $p \wedge q = 2$ é um divisor de 4 e 8.

Uma sentença é uma negação ou uma sentença negada se ela é formada pela introdução da negação em uma sentença qualquer. Exemplo: $p = 9$ é múltiplo 2; $\neg p = 9$ não é múltiplo de 2.

[1] O domínio dos exemplos é o $\mathbb{N}$.

Uma sentença é uma disjunção se ela é formada por ao menos duas premissas e o conectivo $\vee$. Exemplo: $p = n$ pode ser decomposto em mais de um fator primo; $q = n$ é primo; $p \vee q =$ Ou n pode ser decomposto em mais de um fator primo, ou n é primo.

Uma sentença é uma implicação, se ela é formada por ao menos duas premissas atômicas e pelo conectivo $\rightarrow$. Exemplo: $p = n_1$ é um número primo; $q = n_2$ não é um número primo; $r = n_2$ é diferente de 0; s = $mdc(n, m) = 1$; $p \wedge q \wedge r \rightarrow s$.

Uma sentença é uma bi-implicação se é obtida de ao menos duas sentenças atômicas por intermédio do conectivo $\leftrightarrow$. Exemplo: $p = n$ é divisivel por 2; $q = n$ é um múltiplo de 2; $p \leftrightarrow q = n$ é múltiplo de 2 se e somente se n é divisível por 2.

Fórmulas da Lógica Proposicional

Definição (fórmula). As fórmulas da lógica proposicional são constituídas de forma indutiva, a partir do alfabeto e das regras a seguir. O conjunto das fórmulas é o menor conjunto que satisfaz as regras:

- todo símbolo proposicional é uma fórmula;
- se H é uma fórmula, então $\neg H$, a negação de H, é uma fórmula;
- se H e G são fórmulas, então $H \wedge G$, a conjunção de H e G, é uma fórmula;
- se H e G são fórmulas, então $H \vee G$, a disjunção de H e G, é uma fórmula;
- se H e G são fórmulas, então $H \rightarrow G$, a implicação de H e G, é uma fórmula. Neste caso, H é o antecedente e G é o consequente;
- se H e G são fórmulas, então $H \leftrightarrow G$, a bi-implicação de H e G, é uma fórmula.

Definição (comprimento de uma fórmula). Seja H uma fórmula da Lógica Proposicional. O comprimento de H, denotado por por $comp[H]$, é definido como se segue.

- Se $H = \widehat{P}$ ou é um símbolo de verdade, então $comp[H] = 1$;
- $comp[\neg H] = comp[H] + 1$;
- $comp[H \vee G] = comp[H] + comp[G] + 1$;
- $comp[H \wedge G] = comp[H] + comp[G] + 1$;
- $comp[H \rightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$;
- $comp[H \leftrightarrow G] = comp[H] + comp[G] + 1$.

1.2 Semântica da Lógica Proposicional

Interpretação

A interpretação ou semântica dos elementos sintáticos da linguagem proposicional é determinado por uma função I denominada interpretação.

Definição. Uma interpretação I, na lógica proposicional, é uma função binária total na qual

- o domínio de I é constituído pelo conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional;
- o contradomínio de I é o conjunto $\{V, F\}$.

Essa função associa a cada fórmula φ da lógica proposicional um valor $I(\varphi) = V$ ou $I(\varphi) = F$. Seja L o conjunto de todas as fórmulas da lógica proposicional. Então I pode ser escrito como:

$$I : L \to \{V, F\}$$

$$\varphi \to I(\varphi) = \begin{cases} V, & \text{se} \quad \varphi \quad \text{é verdadeira} \\ F, & \text{se} \quad \varphi \quad \text{é falso.} \end{cases}$$

Para interpretar uma fórmula na lógica proposicional é preciso designar uma interpretação (V ou F) para as fórmulas atômicas e escrever a tabela verdade associada aos conectivos lógicos. As tabelas-verdade listam todas os valores lógicos que uma sentença pode ter dada uma função de interpretação. Abaixo estão as tabelas-verdade de cada conectivo $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Negação

Usamos o não quando queremos negar uma sentença. Exemplo: $p = x \in A$, a sentença $\neg p$ denota o conjunto complementar a A: $\neg p = x \notin A$, ou seja, para todo x que não pertence a A então x pertence a $U \backslash A$

Tabela 1 – Negação

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$
V	F	V	F
F	V	F	V

Como pode ser visto pela tabela, a dupla negação $\neg\neg p$ é equivalente a proposição original p. A proposição $\neg\neg p$ denota a negação de $\neg p$, e a proposição $\neg\neg\neg p$ denota a negação de $\neg\neg p$, ou seja, é a negação da negação da negação de p. Se a sentença p é verdadeira, então a sentença $\neg p$ é falsa, a sentença $\neg\neg p$ é verdadeira, e assim, sucessivamente. A análise quando p é falsa é simétrica.

Conjunção

A conjunção é utilizada para denotar a ocorrência de duas premissas. Exemplo: Um elemento x só está contido em $A \cap B$, se $x \in A$ e $x \in B$. Caso x não esteja contido nos dois conjuntos, então $x \notin A \cap B$; $p \wedge q$ só é verdadeiro se $x \in A$ e $x \in B$.

Tabela 2 – Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Assim, se p é verdadeira e q é verdadeira, então $p \wedge q$ é verdadeira.
Se p é falsa e q é verdadeira, então $p \wedge q$ é falsa.
Se p é verdadeira e q é falsa então $p \wedge q$ é falsa.
Se p é falsa e q é falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Disjunção

A disjunção é utilizada quando existe mais de uma alternativa a ser apresentada (Freitas e Viana, 2010). Exemplo: Um elemento x só pertence a $A \cup B$, se $x \in A$ ou $x \in B$. Portanto, $x \in A \cup B$ é falsa se, e somente se $x \notin A$ e $x \notin B$.

Tabela 3 – Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Assim, se p é verdadeira e q é verdadeira, então $p \vee q$ é verdadeira.
Se p é verdadeira e q é falsa, então $p \vee q$ é falsa.
Se p é falsa e q é verdadeira, então $p \vee q$ é falsa.
Se p é falsa e q é falsa, então $p \vee q$ é falsa.

Implicação

O se ... então é utilizado para denotar a implicação de uma proposição em outra. Exemplo: Sejam A e B tais que $A \subsetneq B$, ou seja, A é um subconjunto próprio de B. Todo elemento x que pertence a A, também pertence a B. A sentença se $x \in A$, então $x \in B$ só é falsa se, e somente se $x \notin B$ e $x \in A$.

Tabela 4 – Implicação

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Assim
Se p é verdadeiro e q é verdadeiro, então $p \to q$ é verdadeiro.
Se p é verdadeiro e q é falso, então $p \to q$ é falso.
Se p é falso e q é falso, então $p \to q$ é verdadeiro.
Se p é falso e q é falso, então $p \to q$ é falso.

Bi-implicação

A bi-implicação é utilizada para dizer que duas sentenças tem o mesmo conteúdo (Freitas e Viana, 2010). Exemplo: duas retas l e m só são paralelas se l é paralela a m e m é paralela a l. O mesmo argumento é válido para o caso de duas retas serem perpendiculares. Sejam n e p duas retas, n só é perpendicular a p se p for perpendicular a n.

Tabela 5 – Bi-implicação

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Assim,
Se p é verdade e q é verdade, então $p \leftrightarrow q$ é verdade.
Se p é verdade e q é falso, então $p \leftrightarrow q$ é falso.
Se p é falso e q é falso, então $p \leftrightarrow q$ é falso.
Se p é falso e q é falso, então $p \leftrightarrow q$ é verdade.

A tabela abaixo sumariza a notação e a tabela-verdade dos conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, $\leftrightarrow$. Para simplificar a notação, a tabela-verdade de cada conectivo está representada pelo conjunto de valores Booleanos $\{0, 1\}$, onde 0 representa a interpretação falsa, e 1 representa a interpretação verdadeira. Formalmente: $f : \times^n\{0, 1\} \to \{0, 1\}$. Onde o conjunto $\times^n\{0, 1\}$ é o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ onde x_i é 0 ou 1.

Tabela 6

Sentença	**Símbolos**	**Tabela-Verdade**
Negação p	$\neg$, $\sim$	0 1
Conjunção p e q	$\wedge$, &	1 0 0 0
Disjunção p ou q	$\vee$	1 1 1 0
Implicação Se p então q, p implica q	$\rightarrow$, $\Rightarrow$	1 0 1 1
Bi-implicação p se, e somente se q, p sse q	$\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$	1 0 0 1

1.3 Propriedades Semânticas da Lógica Proposicional

Definição. Sejam $p, q, p_1, p_2, \ldots, p_n$, fórmulas da Lógica Proposicional. As propriedades básicas são:

1. p é tautologia se, e somente se para toda interpretação I, $I(p) = V$.

   Para denotar que φ é uma tautologia, utilizamos a seguinte notação[2]: $\models \varphi$.

   Exemplos de tautologia:

   a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

   b) $p \vee \neg p$

   Este último exemplo é conhecido como o princípio do terceiro excluído. Este princípio é um dos principais pontos da lógica clássica. No entanto, esta hipótese é alvo de várias críticas (Detlefsen, 1992), pois o fato de uma sentença não ser verdadeira não implica que ela seja necessariamente falsa. É possível verificar se uma sentença é uma tautologia através da tabela verdade. Veja a tabela verdade da sentença $p \wedge \neg p$:

   Tabela 7 – Princípio do Terceiro Excluído

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

   Como a última coluna da tabela só possui valores verdade, então a sentença é uma tautologia. Exemplos:

2. p é satisfatível, se, e somente se, existe uma interpretação I, tal que $I(p) = V$.

[2] O simbolo $\models$ denota implicação semântica, enquanto o símbolo $\vdash$ denota implicação sintática.

a) $p \wedge q$

b) $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), (r \rightarrow p)\}$

Se p e q forem verdadeiras, então $p \wedge q$ é verdadeira, e, portanto $p \wedge q$ é satisfatível. No exemplo b, suponha novamente que todas as proposições p, q e r possuem valor verdade, então claramente $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ e $r \rightarrow p$ são verdadeiras, o que implica que há ao menos uma interpretação que faz com que todas as fórmulas proposicionais sejam verdadeiras, e, portanto, satisfatíveis.

3. p é uma contingência se, e somente se, existem duas interpretações I_1 e I_2, tais que $I_1(p) = V$ e $I_2(p) = F$.

4. p é contraditória, se e somente se, para toda interpretação I, $I(p) = F$.
   Exemplos:

   a) $p \wedge q \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

   b) $p \wedge \neg p$

   O último exemplo é conhecido como princípio da não contradição. Este princípio diz que dada uma sentença e sua negação, ao menos uma delas é falsa.

   Tabela 8 – Princípio da Não-Contradição

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

   Note que todos os valores da última coluna da tabela são falsos. Isto é válido para todas as contradições.

5. p implica semanticamente q, ou q é uma consequência lógica semântica de p, se, e somente se, para toda interpretação I, se $I(p) = V$, então $I(q) = V$.

6. p equivale semanticamente a q, se e somente se, para toda interpretação I, $I(p) = I(q)$.

7. o conjunto $\beta = \{p_1, \ldots, p_n\}$ é satisfatível se, e somente se, existe uma interpretação I, tal que $I(p_1) = V$, $I(p_2) = V, \ldots, I(p_n) = V$. Neste caso, I satisfaz β, i.e, $I(\beta) = V$.

8. o conjunto $\beta = \{p_1, \ldots, p_n\}$ implica semanticamente uma fórmula H, se para toda interpretação I, se $I(\beta) = V$ então $I(p) = V$. A implicação semântica é denotada por $\beta \vDash p$.

Tabela 9

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge q) \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

Seja $H = p \wedge q$, $G = p \rightarrow q$, $E = (p \wedge q) \vee q$.
Claramente $E \vDash G$, pois $\forall I$, se $I(E) = V$ então $I(G) = V$.

Definição. Um conjunto de fórmulas Φ é consistente se, e somente se não existe uma fórmula φ tal que $\Phi \vdash \varphi$ e $\Phi \vdash \neg\varphi$.

Definição. Um conjunto de fórmulas Φ é consistente se, e somente se, é satisfatível.

Exemplo: $\{p, q, (p \rightarrow q) \wedge q\}$. Claramente quando todas as premissas possuem valor verdade, todo o conjunto possui valor verdade. E, portanto, o conjunto é satisfatível e consistente.

Definição. Um conjunto de fórmulas Φ é completo se $\varphi \in \Phi$ ou[3] se $\neg\varphi \in \Phi$ para toda fórmula em $\mathcal{L}$.

Exemplo: $H = \{p, q, p \leftrightarrow q\}$.
As fórmulas $p, q, p \leftrightarrow q$ estão contidas em H, enquanto $\neg p, \neg q, \neg(p \leftrightarrow q)$ não estão contidas em H.

[3] Este é o ou inclusivo, então ambas φ e $\neg\varphi$ podem estar contidas em Φ.

2 Teorema da (Im)possibilidade de Arrow

O teorema de Arrow (1951) afetou profundamente a área de escolha social, além de ter tido implicações para filosofia, política, e outras ciências sociais (Sen, 1985). O teorema de Arrow diz que nenhuma função de bem-estar social satisfaz as condições de domínio irrestrito, princípio de Pareto, independência de alternativas irrelevantes e não-ditadura. Apesar da previsão "pessimista", é possível mostrar que sob a restrição de alguma destas hipóteses existe uma função de bem-estar social que satisfaz as demais hipóteses.

Este capítulo é dividido em 4 seções. A primeira seção introduz alguns conceitos básicos como produto cartesiano, relações binárias e algumas propriedades de relações. A segunda seção apresenta e demonstra o teorema de impossibilidade de Arrow (1951) e discute o papel normativo dos axiomas para teoria da escolha social. A terceira seção mostra um caso particular do teorema de Arrow, o paradoxo de Condorcet. Mesmo que o perfil de preferências individuais de um grupo finito seja transitivo, quando submetido à regra de maioria, o conjunto de preferências coletivos pode ferir a transitividade, e, assim gerar conjuntos de escolha cíclicos. A última seção apresenta um resultado de possibilidade de regras de agregação. Sob a hipótese de restrição do domínio de escolhas, é possível que uma regra de agregação gere resultados.

2.1 Conceitos Básicos

Produto Cartesiano

Dado dois conjuntos não vazios X e Y, o produto cartesiano de X por Y é o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), com $x \in X$ e $y \in Y$. O produto cartesiano de X por Y é denotado por: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \quad \text{e} \quad y \in Y\}$. Dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Exemplo: $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. O conjunto formado por todos os pares ordenados de X por Y é $X \times Y = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$, e $Y \times X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)(2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$. Note que em geral $X \times Y \neq Y \times X$.

Relações Binárias

Uma relação binária é constituída por:

1. Um conjunto de partida X.

2. Um conjunto de chegada Y.

3. Uma sentença $p(x,y)$, em que $x \in X$ e $y \in Y$, tal que $(a,b) \in X \times Y$. Quando a sentença é verdadeira, então diz-se que a está relacionado com b através da relação R, i.e, aRb. E quando a sentença é falsa, diz-se que a não está relacionado com b através da relação R, i.e, $a\not R b$.

Definição. R é relação binária de X em Y se, e somente se $R \subseteq X \times Y$.

Exemplo: Seja $Y \times X = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$, qualquer subconjunto de $X \times Y$ é uma relação: $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$.

Relações de Preferências

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o conjunto de todos os estados sociais possíveis. Uma relação de preferência estrita é denotada por $P : x_iPx_j \leftrightarrow [x_iRx_j \wedge \neg x_jRx_i]$, para $i \neq j$. A relação de indiferença é denotada por $I : x_iIx_j \leftrightarrow [x_iRx_j \wedge x_jRx_i]$, para $i \neq j$. Uma relação R é chamada de ordem em X se é reflexiva, completa e transitiva. x_iPx_j representa "x_i é estritamente melhor que x_j"; x_iRx_j denota "x_i é ao menos tão bom quanto x_j"; x_iIx_j representa "o agente é indiferente entre x_i e x_j".

Propriedades

Seja R uma relação binária sobre $X \times X$, onde $X \neq \varnothing$. A relação binária R pode satisfazer as seguintes propriedades:

1. *Reflexividade:* $\forall x \in X : xRx$.

2. *Completude:* $\forall x, y \in X : (x \neq y) \rightarrow (xRy \vee yRx)$.

3. *Transitividade:* $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$.

4. *Anti-Simetria:* $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y$.

5. *Assimetria:* $\forall x, y \in X : xRy \rightarrow \neg yRx$.

6. *Simetria:* $\forall x, y \in X : xRy \rightarrow yRx$.

7. *Transitividade Negativa:* $\forall x, y, z \in X$, $[\neg(xRy) \wedge \neg(yRx)] \rightarrow \neg(xRz)$.

8. *Irreflexividade:* $\forall x \in X, \neg(xRx)$.

9. *Quasi-Transitividade:* $\forall x, y, z \in X, xPy \wedge yPz \rightarrow xPz$.

10. *Aciclicidade:* $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, $x_1Px_2, x_2Px_3, \ldots, x_{n-1}Px_n \rightarrow x_1Rx_n$.

2.2 Teorema da (Im)Possibilidade de Arrow

As relações de preferências individuais são construídas a partir de uma série de axiomas sobre o comportamento dos agentes. Esta abordagem pode ser estendida a decisões coletivas. A primeira tentativa (Mueller, 2003) de construir uma função de bem-estar social como uma relação de ordem sobre um conjunto de estados sociais possíveis foi feita por Arrow (1951). Arrow definiu uma série de propriedades "desejáveis"que uma função de bem-estar social deveria satisfazer. Essas propriedades possuem caráter tanto objetivo quanto normativo. As restrições que devem ser impostas a uma função de bem-estar social são baseadas em princípios éticos e sociais previamente determinados. A discussão do teorema da impossibilidade de Arrow segue a demonstração feita por Mueller (2003).

Os axiomas a seguir foram retirados de Gaertner (2009) e adaptados aos axiomas presentes em Vickrey (1960).

Condição U (Domínio Irrestrito). O domínio do mapeamento f inclui todas as possibilidades lógicas de ordenamento em X.

Condição P (Princípio Fraco de Pareto). Para todo $x, y \in X$, se para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ xP_iy, então xPy.

Condição I (Independência de Alternativas Irrelevantes). Se para algum par x, y e para todo i, xR_iy se e somente se xR'_iy, e yR_ix se e somente se yR'_ix, entao $f(R_1, \ldots, R_n)$ e $f(R'_1, \ldots, R'_n)$ ordenam x e y da mesma maneira.

Condição D (Princípio não Ditatorial). Não existe um indivíduo i na sociedade tal que para todos os perfis de escolha no domínio de f, $\forall x, y \in X : xP_iy \rightarrow xPy$.

Transitividade. Uma função de bem-estar social gera um ordenamento consistente de todas as alternativas possíveis: $xPyPz \rightarrow xPz$ e $xIyIz \rightarrow xIz$.

O princípio fraco de Pareto diz que se uma relação de preferência sobre um conjunto de elementos é a mesma para todos os indivíduos da sociedade, então esta relação de preferências é mantida pela sociedade. O princípio de domínio irrestrito diz que os perfis de relações de preferências de um conjunto de elementos podem assumir qualquer configuração. A condição de independência de alternativas irrelevantes diz que a escolha social entre dois elementos quaisquer do conjunto de elementos sociais possíveis só depende dos elementos em questão, e quaisquer outros elementos não afetam a relação de preferência. O princípio não ditatorial elimina a possibilidade de um único indivíduo tomar todas as decisões sociais.

Teorema geral da possibilidade de Arrow (1951,1963). Para um número finito de indivíduos e ao menos três alternativas sociais, não existe uma função de bem-estar social que satisfaz as condições U, P, I e D.

Definição. Um conjunto de indivíduos V é quase decisivo para x contra algum y se xPy para todo i em V, e yP_ix para todo i fora de V, x é socialmente preferido a y.

Definição. Um conjunto de indivíduos V é decisivo para algum x contra algum y, se xP_iy para todo i em V, então xPy.

A prova do teorema de Arrow está presente em Mueller (2003)[1].

	Passo	Justificativa
1	Seja D o conjunto de indivíduos decisivos sobre x e y	Suposição
2	Assuma que todos os membros de D, vale $xPyPz$, e para todos os outros indivíduos fora de D, vale $yPzPx$	Domínio Irrestrito
3	Para sociedade vale xPy	Definição de D
4	Para sociedade vale yPz	Princípio Fraco de Pareto
5	Para sociedade vale xPz	Transitividade
6	Para os membros de D vale xPz	Suposição
7	A sociedade prefere x a z independentemente de quaisquer outras alternativas.	Independência de Alternativas Irrelevantes
8	D é decisivo sobre x e z	Definição
9	D é decisivo para todos os pares de alternativas	Repetição dos passos 2-8
10	D deve conter ao menos dois indivíduos	Princípio não-Ditatorial
11	Divida D em dois subconjuntos A e B	Suposição
12	Suponha que para A vale $xPyPz$, para B vale $yPzPx$, para C vale $zPxPy$	Domínio Irrestrito

[1] Para ver uma demonstração mais detalhada do teorema consulte Gaertner (2009).

13	Como para todos os membros de A e B vale yPz para sociedade vale yPz	Definição de D
14	Se para a sociedade vale yPx, então B é decisivo sobre x e y	Definição de D
15	Se para a sociedade vale xPy, então para sociedade vale xPz	Transitividade
16	Então A é decisivo sobre x e z	Definição de D

Em qualquer caso, um dos subconjuntos de D é decisivo sobre o par de escolha, e pelo item 9, D é decisivo sobre todas as relações de preferências. Os passos 10-16 podem ser repetidos até que o conjunto decisivo contenha um único individuo, e, portanto o princípio não ditatorial é ferido.

Existem alguns caminhos para escapar do resultado do teorema da impossibilidade de Arrow. Alguns trabalhos como Sen (1966, 1969, 1970), Pattanaik (1968, 1971), Mas-Collel e Sonnenschein (1972), e Gibbard (1969) enfraqueceram a hipótese de transitividade de R. Outro grupo, como Fishburn (1970, 1973), Plott (1973) estudaram as consequências de dispensar as relações binárias da análise de preferências e focar em uma função de escolha.

2.3 Paradoxo de Condorcet

O paradoxo de Condorcet é um caso particular do teorema da (im)possibilidade de Arrow. O paradoxo surge da aplicação da regra de maioria simples a um perfil de preferências. A regra de maioria simples pode gerar preferências sociais cíclicas, mesmo que o perfil de preferências de cada indivíduo seja transitivo. Esse fato é conhecido como paradoxo de Condorcet.

Para ilustrar o paradoxo de Condorcet considere o seguinte perfil de preferências:

$$xP_1y, \quad yP_1z, \quad xP_1z$$

$$yP_2z, \quad zP_2x, \quad yP_2x$$

$$zP_3x, \quad xP_3y, \quad zP_3y$$

Quando a regra de maioria é aplicada aos perfis de preferências acima, ela gera a seguinte relação de preferências sociais:

$$xPy, \quad yPz, \quad zPx.$$

Este perfil de preferências é cíclico. Note que x é escolhida em comparação a y, e y é escolhida em comparação a z, mas z é preferida a x, ferindo a transitividade das relações de preferência. Neste exemplo não há uma decisão social, pois se x é escolhida, há um elemento socialmente preferido, z, mas y é escolhido em comparação a z, mas x é preferido socialmente, portanto, a agregação de preferências continua neste ciclo e não gera uma resposta, apesar de todos os perfis de preferências individuais serem transitivos.

2.4 Preferências "Single-peaked"

Se o perfil de escolhas dos indivíduos for controlado, o problema de ciclos do problema de Condorcet pode ser eliminado. Se o perfil de preferências for limitado a uma única escolha por vez, ou seja, as escolhas forem unidimensionais e o ponto favorito de cada indivíduo neste espaço, ocorrer em um único ponto do espaço, e neste mesmo ponto, o ponto de máximo individual também for um ponto de máximo coletivo, então é possível eliminar o problema de ciclos de preferências.

Condição de "Single-Peakedness". Um indivíduo possui preferências "single-peaked"se, e somente se para uma única alternativa $x^* \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que a preferência do agente é crescente nas posições à esquerda de x_i^* e decrescente à direita de x_i^*, ou seja, se e somente se $x_i^* RyRz$ sempre que $x_i^* \geqslant y \geqslant z$,

Teorema da possibilidade para preferências "single-peaked". Se o número de votantes for ímpar e se o ordenamento de preferências dos indivíduos satisfizer a propriedade "single-peaked" sobre quaisquer $3-$uplas de alternativas, então a regra de maioria é uma função de bem estar social para qualquer número de indivíduos.

O primeiro exemplo apresenta um perfil de preferências que foi denominado por Black (1948) de preferências *single peaked.* As figuras 1 e 2 ilustram graficamente um perfil de preferências *single-peaked* e outro que não é *single-peaked.* Na figura 1, claramente o ponto de máximo de cada indivíduo coincide com o ponto de máximo coletivo no mesmo ponto.

Exemplo: Considere três indivíduos com níveis de renda distintos. O primeiro possui renda alta, o segundo possui renda média e o terceiro possui renda baixa. Considere a existência de três carros com preços distintos. Suponha que os preços são ordenados de modo que o preço do primeiro carro é maior do que o do segundo, e o do segundo é maior do que o do terceiro. Claramente este ordenamento satisfaz a propriedade de transitividade, e, portanto, o preço do primeiro carro é maior do que o preço do terceiro carro. Suponha que os indivíduos preferem o carro que podem comprar com seu orçamento. Portanto o indivíduo de baixa renda prefere o carro com menor preço, o indivíduo de renda média prefere o carro com que tem a mediana dos preços e o indivíduo de renda alta prefere o carro com maior preço.

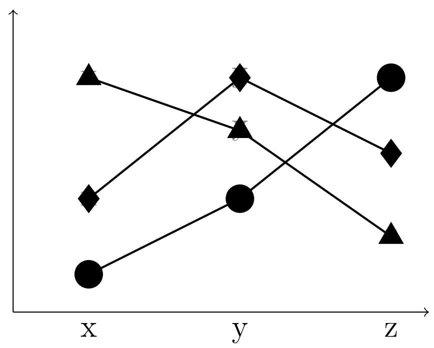


Figura 1 – Perfil de preferências *single peaked*.

Exemplo: O perfil de preferências

$$xP_1yP_1z \qquad yP_2zP_2x \qquad zP_3zP_3y$$

onde a relação binária P_i deota a preferência estrita de uma alternativa a outra. Esse perfil de preferências não é acíclico, e, portanto, também não é *single peaked*.

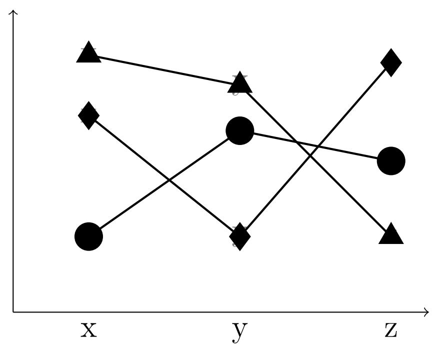


Figura 2 – Perfil de preferências não *single peaked*.

3 Agregação de Juízos

Suponha que um grupo de juízes estão em uma corte decidindo sobre um determinado processo. O resultado do julgamento independe da regra que agrega os juízos de cada juiz? Se não, qual a regra melhor caracteriza um procedimento democrático? É possível que alguma regra de agregação de juízos satisfaça uma série de propriedades mínimas exigidas por um processo democrático? Essas são algumas questões levantadas pela teoria de agregação de juízos.

A princípio, a teoria de agregação de juízos parece ser uma extensão da teoria da escolha social. No entanto, a teoria de agregação de juízos difere da teoria da escolha social, pois, enquanto a última analisa a agregação de preferências ordenadas de um grupo de indivíduos sobre um conjunto de escolha, a primeira analisa a aceitação ou não de um conjunto de premissas. Essas premissas não são ordenadas por uma relação de preferências, mas são aceitas ou rejeitadas dada uma regra de agregação de juízos. A principal diferença entre as duas teorias (List e Pettit, 2002) é que a teoria de escolha social trata do problema de agregação de preferências quando as mesmas são independentes, enquanto a teoria da agregação de juízos trata do problema de agregação de juízos sobre questões que são interdependentes.

As origens teóricas da teoria da agregação de juízos podem ser remetidas ao trabalho de de Kornhauser e Sager (List, 2012) sobre a dependência do resultado de uma agregação de juízos em relação a regra de votação. A interpretação do paradoxo discursivo como uma inconsistência lógica de juízos se deve a Pettit (2001) e List e Pettit (2002). List e Pettit (2004) produziram o primeiro modelo de agregação de juízos, e provaram que em um julgamento de ao menos duas proposições atômicas e ao menos uma proposição composta e sua negação, não existe uma regra de agregação de juízos que satisfaça as condições de domínio irrestrito (ou universal), racionalidade coletiva, anonimidade e sistematicidade.

3.1 Dilema Discursivo

A regra de maioria simples é utilizada em diversas situações em que é necessário chegar a uma resposta para determinar agregações de preferências em situações rotineiras. Sua utilização frequente se deve a uma série de propriedades atraentes por ela satisfeitas, a saber, domínio irrestrito, anonimidade, neutralidade e resposta positiva. A única regra de votação que satisfaz essas propriedades é a regra de maioria, esse resultado se deve a May (1952). No entanto, mesmo quando aplicada a um conjunto de escolhas com apenas três alternativas, a regra de maioria simples pode gerar ciclos - fato conhecido como paradoxo de Condorcet.

No caso de agregações de juízos, os agentes não ordenam os elementos de um determinado conjunto de acordo com suas preferências, mas decidem pela aceitação ou não de um conjunto de proposições. A regra de maioria também pode gerar inconsistências quando aplicada a agregação de juízos. Para ilustrar os possíveis problemas considere o caso em que três juízes devem decidir sobre um caso de quebra de contrato. O exemplo é baseado no exemplo original de Kornhauser e Sager (1986, 1993). Os juízes devem decidir sobre as seguintes proposições:
P: O réu estava contratualmente obrigado a não fazer uma determinada ação.
Q: O réu cometeu a ação.
R: O réu é responsável pela quebra de contrato.

Se as proposições P e Q forem verdadeiras, então R também é verdadeira, de acordo com a doutrina legal (List, 2012). O primeiro juiz julga que as duas primeiras proposições são verdadeiras, e consequentemente, a última proposição também o é. O segundo juiz julga que a proposição P é verdadeira, mas a proposição Q é falsa, e, portanto, R também é falsa. O terceiro juiz julga que P é falsa, mas Q é verdadeira, e, portanto, R é falsa.

	P	Q	R
Juiz 1	*Sim*	*Sim*	*Sim*
Juiz 2	*Sim*	*Não*	*Não*
Juiz 3	*Não*	*Sim*	*Não*
Maioria	*Sim*	*Sim*	*Não*

O resultado do julgamento depende do método de agregação de juízos. Se a regra de maioria for aplicada às premissas, então a proposição p será julgada verdadeira, a proposição q será julgada verdadeira, e, portanto, r será julgada verdadeira. Se a regra de maioria for aplicada apenas à conclusão, ou seja, a proposição r, então r será julgada falsa. Portanto, o resultado do julgamento depende da regra de agregação de juízos.

Além de gerar resultados diferentes, dependendo da regra utilizada para agregar os juízos, o exemplo anterior apresenta outro problema. Quando a regra de maioria simples é aplicada às premissas, ela gera um resultado inconsistente, pois $\{p, q, \neg r\}$ é logicamente inconsistente[1] em relação a $r \leftrightarrow p \wedge q$.

3.2 O Modelo

O modelo de agregação de juízos foi apresentado por List e Pettit (2002), mas a notação utilizada neste trabalho segue a notação de Endriss (2001). As proposições são representadas em uma linguagem formal (List e Pettit, 2007), definida por:

[1] Um conjunto de fórmulas Ψ é consistente se e somente se não existe uma fórmula ψ tal que $\Psi \vdash \psi$ e $\Psi \vdash \neg\psi$. Caso contrário, o conjunto Ψ é inconsistente.

- Um conjunto não vazio $\mathcal{L}$ de proposições, que é fechado por complementariedade, i.e, $\neg\varphi \in \Phi$ sempre que $\varphi \in \Phi$.

- Uma relação de implicação[2] $\vDash$. Para $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}$ e cada proposição $p \in \mathcal{L}$, $\mathcal{X} \vDash p$.

Uma agenda Φ é um conjunto finito de fórmulas proposicionais que são livres ou são dupla negações das fórmulas. O conjunto $J \subseteq \Phi$ é chamado conjunto de juízos da agenda Φ. O conjunto de todos os juízos consistentes e completos para uma agenda Φ é denotado por $J(\Phi)$. Cada agente produz um conjunto de juízos $J_i \in \mathcal{J}(\Phi)$, onde $i \in \mathcal{N} = \{i_1, \ldots, i_n\}$ para $n \geqslant 2$. Seja $N_\varphi^{\mathbf{J}} := \{i \in \mathcal{N} | \varphi \in J_i\}$ o conjunto de indivíduos que aceitam a fórmula φ no perfil $\mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_n) \in \mathcal{J}(\Phi)^{\mathcal{N}}$. Um procedimento de agregação de juízos é uma função $F : \mathcal{J}(\Phi)^{\mathcal{N}} \to 2^\Phi$ que mapeia qualquer perfil de conjuntos de juízos completos[3] e consistentes em um único conjunto de juízos coletivos.

A teoria da agregação de juízos manteve a abordagem axiomática da teoria da escolha social. Algumas definições foram readaptadas ao contexto da lógica proposicional. A lista a seguir (Endriss, 2011) apresenta algumas dessas definições:

1. **Unanimidade.** Se todos os indivíduos aceitam a fórmula dada, então a sociedade também aceita a fórmula: se $\varphi \in J_1 \cap \cdots \cap J_n$ então $\varphi \in F(\mathbf{J})$.

2. **Anonimidade.** O processo de agregação precisa ser simétrico com respeito aos indivíduos: $F(J_1, \ldots, J_n) = F(J_{\pi(1)}, \ldots, J_{\pi(n)})$ para qualquer permutação $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

3. **Neutralidade.** Se duas fórmulas possuem o mesmo padrão aceitação em um perfil, então ambas as fórmulas ou nenhuma devem ser aceitas: se $N_\varphi^{\mathbf{J}} = N_\psi^{\mathbf{J}}$ então $\varphi \in F(\mathbf{J}) \Leftrightarrow \psi \in F(\mathbf{J})$.

4. **Independência.** Se uma fórmula possui o mesmo padrão de aceitação individual em dois perfis distintos, então ela deve ser aceita em ambos os perfis ou em nenhum: se $N_\varphi^{\mathbf{J}} = N_\varphi^{\mathbf{J'}}$ então $\varphi \in F(\mathbf{J}) \Leftrightarrow \varphi \in F(\mathbf{J'})$.

5. **Monotonicidade.** Se uma fórmula aceita recebe apoio adicional, então ela ainda será aceita: se $\varphi \in J'_{i*} \backslash J_{i*}$ e $J_i = J'_i$ para todo $i \neq i^*$ então $\varphi \in F(\mathbf{J}) \Rightarrow \varphi \in F(\mathbf{J'})$.

A condição de unanimidade exige que o resultado de agregação de juízos seja consistente com os juízos individuais, se todos os agentes são favoráveis a um juízo, o resultado da agregação também deve ser favorável. A condição de anonimidade exige que a regra de agregação independa da ordem em que os juízos individuais sejam agregados, ou seja, a agregação não considera os indivíduos, apenas os juízos são considerados. A

[2] Nesse caso $\vDash$ denota tanto a relação de implicação semântica $\vDash$ quanto a implicação sintática $\vdash$.

[3] Um conjunto de fórmulas Ψé completo se $\psi \in \Psi$ ou se $\neg\psi \in \Psi$ para toda fórmula em $\psi \in \Psi$.

condição de neutralidade diz que se duas fórmulas são consideradas verdadeiras ou falsas em um perfil de juízos, então ambas devem julgadas igualmente verdadeiras ou falsas. A condição de independência diz que se uma fórmula é julgada da mesma maneira em dois perfis individuais distintos, então ambas devem ser julgadas. A condição de monotonicidade diz que se uma fórmula é aceita em um perfil de juízos, então se um novo indivíduo for adicionado e ele também aceitar a fórmula, então a agregação deve ser a mesma sobre o novo perfil de juízos.

Como foi mostrado no exemplo da corte de juízes, a regra de maioria pode gerar resultados inconsistentes. Mas o paradoxo discursivo não se limita ao caso de agregação por maioria. O resultado a seguir é similar ao teorema de Arrow, e demonstra que qualquer regra de agregação de juízos gera um conjunto inconsistente sob a restrição de algumas propriedades.

Teorema (List e Pettit, 2002). Nenhum procedimento de agregação de juízos para uma agenda Φ com $\{p, q, p \wedge q\} \subseteq \Phi$ que satisfaz anonimidade, neutralidade, e independência gera um conjunto de juízos que seja completo e consistente.[4]

3.3 Agregação de Juízos à Prova de Estratégias

Na seção anterior foi apresentado o problema do paradoxo discursivo, e como foi demonstrado por List e Pettit (2002), o problema de inconsistência de agregação de juízos se estende para todas as regras de agregação de juízos, não se limitando ao caso da agregação por maioria. Esse resultado é similar ao teorema da (im)possibilidade de Arrow (1951).

Outra questão que foi alvo da análise da teoria da escolha social é o problema de manipulação de agenda. O teorema de Gibbard-Satterwhaite (1973, 1975) garante que se uma função de escolha social satisfaz unanimidade e é a prova de manipulação, então a função é ditatorial. Portanto, o problema de manipulação de votos é um problema ligado à agregação de preferências. No entanto, a relação entre o voto estratégico e a teoria de agregação de juízos não é óbvia. O teorema de Gibbard-Satterwhaite é um resultado sobre uma função de escolha social, ou seja, sobre uma operação que mapeia conjuntos de preferências individuais em um conjunto de preferências coletivo. O mesmo teorema não é imediato para agregação de juízos, pois, as preferências não são primitivas dos modelos de agregação de juízos (Dietrich e List, 2007). Mas sob algumas hipóteses adicionais, é possível mostrar que não existe uma regra de agregação de juízos não manipulável que satisfaz domínio universal e outras condições adicionais.

[4] Consulte o apêndice para ver a demonstração do teorema.

Modelo Básico

O modelo básico foi retirado de Dietrich(2006), mas segue a notação de Endriss (2001). Uma agenda Φ é um conjunto finitio de fórmulas proposicionais que são livres ou são dupla negações das fórmulas e que são fechadas sob complementariedade, i.e., $\sim \varphi \in \Phi$ sempre que $\varphi \in \Phi$. Um conjunto de juízos J para uma agenda Φ é um subconjunto de Φ. O conjunto de todos os juízos consistentes e completos para uma agenda Φ é denotado por $J(\Phi)$. Seja $\mathcal{N} = \{i_1, \ldots, i_n\}$ um conjunto finito de agentes ($n \geqslant 2$). Defina o conjunto $\mathcal{L}$, como o menor conjunto que contém todas as proposições $a, b, c, \ldots$, tal que

- $\mathcal{L}$ contém todos as proposições atômicas, i.e. $\mathcal{L}$ contém todos os símbolos da lógica proposicional;
- se $\mathcal{L}$ contém p e q, então $\mathcal{L}$ também contém $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q$.

Uma interpretação é uma função que atribui valor verdadeiro ou falso para cada proposição em $\mathcal{L}$, e que satisfaz as propriedades de consistência. Um conjunto $J \subseteq \mathcal{L}$ é (logicamente) consistente/inconsistente se existe uma designação que atribui 'verdade' para cada $p \in J$. E para $J \subseteq \mathcal{L}$ e $p \in \mathcal{L}$, J implica p, $J \models p$, se $J \cup \{\neg p\}$ é inconsistente.

Uma agenda Φ é um subconjunto não vazio de $\mathcal{L}$. No exemplo $\Phi = \{a, b, a \rightarrow b, \neg a, \neg b, \neg(a \rightarrow b)\}$. As condições de racionalidade nos conjuntos de julgamento são: completude, e consistência. Essas são as condições de List para que o conjunto de proposições seja fechado por dedução[5].

Cada agente produz um conjunto de juízos $J_i \in \mathcal{J}(\Phi)$. Seja $N^{\mathbf{J}}_{\varphi} := \{i \in \mathcal{N} | \varphi \in J_i\}$ o conjunto de indivíduos que aceitam a fórmula φ no perfil $\mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_n) \in \mathcal{J}(\Phi)^{\mathcal{N}}$. Um procedimento de agregação de juízos é uma função $F : \mathcal{J}(\Phi)^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{J}$ que mapeia qualquer perfil de conjuntos de juízos completos e consistentes em um único conjunto de juízos coletivos. O conjunto $J = \varnothing$ é consistente mas incompleto, o conjunto $J = \{a, a \rightarrow b, \neg b\}$ é completo mas inconsistente, e o conjunto $J = \{a, a \rightarrow b, b\}$ é consistente e completo.

Domínio Universal. Domínio(F) é o conjunto de perfis possíveis de juízos que são completos e consistentes.

Exemplos de agregação de juízos

Algumas agendas ilustram o problema de manipulação pelo voto estratégico. A agenda conjuntiva é $\Phi = \{a_1, \ldots, a_n, c, c \leftrightarrow (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n), \textit{negações}\}$, onde $a_1, \ldots, a_n$ são premissas ($n \geqslant 1$), c é a conclusão, e $c \leftrightarrow (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)$ é a regra de conexão. A

5 Na lógica proposicional, um conjunto é fechado por dedução se: um conjunto H, o conjunto de proposições verdadeiras, e R, uma operação (consequência lógica), então se p pertence a H e é relacionado com q pela operação R, ou seja, $p \vdash q$

agenda disjuntiva é $\Psi = \{a_1, \ldots, a_n, c, c \leftrightarrow (a_1 \vee \cdots \vee a_n), \textit{negações}\}$, onde $a_1, \ldots, a_n$ são as premissas, c é a conclusão, e $c \leftrightarrow (a_1 \vee \cdots \vee a_n)$. A agenda contendo a relação de preferências clássica também pode ser representada na lógica. A agenda de preferências é o conjunto $\Gamma = \{xRy : x, y \in K, \textit{negações}\}$, onde K são constantes representando opções ($|K| \geqslant 3$) e R é uma relação binária.

Abaixo estão listadas algumas regras de agregação que satisfazem a condição domínio universal (Dietrich e List, 2007).

"Votação baseada em premissas"(Forma Conjuntiva).[6] Para cada $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)*, $F(J_1, \ldots, J_n)$ é o conjunto contendo:

- Qualquer premissa a_j se e somente se $a_j \in J_i$ mais do que $a_j \notin J_i$, para mais agentes i.
- A regra de conexão $c \leftrightarrow (a_1 \wedge \cdots \wedge, a_k)$.
- A conclusão c se e somente se $a_j \in F(J_1, \ldots, J_n)$ para toda premissa a_j.
- Qualquer negação proposicional $\neg p$ se e somente se $p \notin F(J_1, \ldots, J_n)$.

Votação baseada em premissas (Forma Disjuntiva). Para cada $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)*, $F(J_1, \ldots, J_n)$ é o conjunto contendo:

- Qualquer premissa a_j se, e somente se mais i's possuem mais $a_j \in J_i$ do que $a_j \notin J_i$.
- A regra de conexão $c \leftrightarrow (a_1 \vee \cdots \vee a_k)$,
- A conclusão c se e somente se $a_j \in F(J_1, \ldots, J_n)$ para alguma premissa a_j.
- Qualquer negação proposicional $\neg p$ se e somente se $p \notin F(J_1, \ldots, J_n)$.

"Votação baseada na conclusão."[7] Para cada $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)*. $F(J_1, \ldots, J_n)$ é o conjunto que contém

- Se $c \in J_i$ mais do que $c \notin J_i$, para mais agentes i, então o conjunto conterá apenas a conclusão c,
- Se $c \notin J_i$ mais do que $c \in J_i$, para mais agentes i, então o conjunto conterá apenas a conclusão $\neg c$.

[6] Esta é uma tradução livre do original *premise-based voting*.
[7] Esta é uma tradução livre do original *conclusion-based voting*.

"Propositionwise Majority Voting". Para cada $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domain(F)*, $F(J_1, \ldots, J_n)$ é o conjunto de todas as proposições $p \in \Phi$ tais que $p \in J_i$ mais do que $p \notin J_i$, para mais jogadores i.

Ditatorial. Para cada $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)*, $F(J_1, \ldots, J_n) = J_i$.

Consistência e Completude das Regras de Agregação

O dilema discursivo surge da impossibilidade da regra de maioria gerar conjuntos consistentes e completos. Mas este problema não se reduz ao caso da regra de maioria. Para analisar a consistência e completude dos conjuntos gerados pelas regras de agregação listadas na seção 3.3.1, considere novamente o exemplo da corte de juízes.

	P	*Q*	*R*
Juiz 1	*Sim*	*Sim*	*Sim*
Juiz 2	*Sim*	*Não*	*Não*
Juiz 3	*Não*	*Sim*	*Não*
Maioria	*Sim*	*Sim*	*Não*

A regra ditatorial gera conjuntos de juízos consistentes e completos, pois ela depende apenas do julgamento do individuo i sobre todas as premissas, e como, por hipótese, todos os conjuntos de julgamentos individuais são consistentes e completos, segue que o conjunto de agregação ditatorial também é consistente e completo. "Votação baseada na conclusão"gera conjunto consistentes, pois a regra não depende das premissas, depende apenas da conclusão. Mas o conjunto gerado é incompleto, pois não há juízos sobre as premissas, apenas sobre a conclusão c. A regra "votação baseada nas premissas"gera conjuntos consistentes, pois as conclusões dependem da decisão majoritária sobre as premissas, e, portanto, a conclusão é consequência lógica dessa agregação. O conjunto gerado também é completo, pois os juízos são aplicados a todas as premissas, e após o julgamento sobre cada premissa, é derivada a conclusão, e, portanto, todo o conjunto de premissas é julgado. A regra "propositionwise majority voting"gera conjuntos completos, mas inconsistentes, como foi demonstrado pelo exemplo da corte de juizes.

Manipulação de Votos

Suponha que um comitê constituído por três indivíduos é formado para decidir sobre um conjunto de premissas e que os indivíduos se importam apenas com a conclusão do julgamento c. As premissas são relevantes apenas para atingir o resultado esperado. Suponha agora que o comitê utiliza cada uma das regras de agregação apresentadas no exemplo do dilema discursivo.

Se o comitê utilizar a votação baseada na conclusão, então apenas os juízos sobre c são considerados. Claramente, não existem incentivos para os agentes não representarem verdadeiramente seus juízos, pois um falso juízo pode alterar o resultado da agregação para o a conclusão não desejada.

Se o comitê utilizar a votação ditatorial, os juízos dos agentes $j \neq i$- onde i denota o ditador- são irrelevantes, e, portanto, não há incentivos para julgar as premissas verdadeiramente.

Se o comitê utilizar a votação baseada em premissas, então os agentes devem votar sobre as premissas a e b. O agente 1 não tem incentivos em não representar verdadeiramente seu julgamento sobre as premissas a ou b, pois se o agente julgar alguma das duas premissas falsas, c não será aceita, o que é contrário a sua vontade. Mas os agentes 2 e 3 têm incentivos para votar estrategicamente. Se o agente 2 alterar seu julgamento sobre a premissa a para falsa, então o resultado c não será aceito, como desejado pelo agente 2. Se o agente 3 alterar seu juízo sobre a premissa b para falsa, então o resultado c não será aceito, como desejado pelo agente 3.

Condição de Não-Manipulação

Um conjunto de juízos J concorda com outro conjunto de juízos J^* sobre a proposição $\varphi \in \Phi$ se ambos ou nenhum dos conjuntos J e J^* contém φ. Caso contrário, J discorda de J^* sobre a proposição φ. Dois perfis são $i-$variantes em relação ao outro se ambos coincidem sobre todas as proposições, exceto φ_i.

Definição. Uma regra de agregação F é manipulável no perfil $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)* sobre a proposição $\varphi \in \Phi$, pelo individuo i, se J_i discorda de $F(J_1, \ldots, J_n)$ sobre φ,mas concorda com $F(J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n)$ sobre φ para algum i-variante $(J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)*.

No exemplo da corte de juízes é possível ver que a votação baseada em premissas é manipulável pelo indivíduo 2, se ele declarar seu conjunto de juízos $J_2^* = \{\neg a, \neg b, c \leftrightarrow (a \wedge b), \neg c\}$ ao invés de $J_2 = \{a, \neg b, c \leftrightarrow (a \wedge b), \neg c\}$, e pelo individuo 3, se ele declarar seu conjunto de juízos $J_3^* = \{\neg a, \neg b, c \leftrightarrow (a \wedge b), \neg c\}$ ao invés de $J_3 = \{\neg a, b, c \leftrightarrow (a \wedge b), \neg c\}$.

Não-Manipulação em Γ. Uma regra de agregação F é não manipulável por nenhum indivíduo sobre qualquer proposição em Γ. De forma equivalente, para qualquer indivíduo i, o perfil $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)* e proposições $\varphi \in \Gamma$, se J_i discorda com $F(J_1, \ldots, J_n)$ sobre φ, então J_i ainda discorda com $F(J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n)$ sobre φ para todo i-variante $(J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)*.

Não-manipulação em Γ requer que qualquer subconjunto de Γ seja também não manipulável, ou seja, se $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, e se Γ_2 é não manipulável, então Γ_1 também é não manipulável.

Independência sobre Γ. Para qualquer proposição $\varphi \in \Gamma$ e perfis $(J_1, \ldots, J_n), (J_1^*, \ldots, J_n^*) \in$ *Domínio(F)*, se [para todo indivíduo $i, \varphi \in J_i$ se e somente se $\varphi \in J_i^*$] então $[\varphi \in F(J_1, \ldots, J_n)$ se e somente se $\varphi \in F(J_1^*, \ldots, J_n^*)]$.

Monotonicidade em Γ. Para qualquer $\varphi \in \Gamma$, o par de i-variantes e indivíduo i $(J_1, \ldots, J_n), (J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)* com $\varphi \notin J_i$ e $\varphi \in J_i^*$, $p \in F(J_1, \ldots, J_n)$ implica $\varphi \in F(J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n)$.

Monotonicidade Fraca em Γ. Para qualquer proposição $\varphi \in \Gamma$, indivíduo i e conjuntos de juízos $J_1, \ldots, J_{i-1}, J_{i+1}, \ldots, J_n$ se existe um par de i-variantes $(J_1, \ldots, J_n), (J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)* com $\varphi \notin J_i$ e $\varphi \in J_i^*$, então para algum par $\varphi \in F(J_1, \ldots, J_n)$ implica $\varphi \in F(J_1, \ldots, J_i^*, \ldots, J_n)$.

Teorema. Seja Φ uma agenda. Para cada $\Gamma \subseteq \Phi$, se F satisfaz o domínio universal então as seguintes condições são equivalentes:

- F é não manipulável em Γ.
- F é independente de Γ e monotônica em Γ.
- F é independente em Γ e fracamente monotônica em Γ

Para o caso de agendas conjuntivas ou conjuntivas, a votação baseada na conclusão é independente, pois os juízos sobre c são independentes dos juízos sobre as premissas, e também é monotônica, pois a adição de um indivíduo que aceita a conclusão c não altera o resultado. Já a votação baseada em premissas não é independente, e, portanto, é manipulável (Dietrich e List, 2007).

Racionalidade Coletiva. Para qualquer perfil $(J_1, \ldots, J_n) \in$ *Domínio(F)*, $F(J_1, \ldots, J_n)$ é consistente e completo.

Capacidade de Resposta. Para uma proposição contingente $\varphi \in \Phi$, existem dois perfis $(J_1, \ldots, J_n), (J_1^*, \ldots, J_n^*) \in$ *Domínio(F)* tal que $\varphi \in F(J_1, \ldots, A_n)$ e $\varphi \notin F(J_1^*, \ldots, J_n^*)$.

Teorema. Para uma agenda conexa por caminho Φ (por exemplo, a agenda conjuntiva, a agenda disjuntiva ou agenda de preferências), uma regra de agregação F satisfaz as condições de domínio universal, racionalidade coletiva, capacidade de resposta é não manipulável se e somente se F é ditatorial para algum indivíduo.

3.4 Manipulação de Agenda

O exemplo a seguir foi retirado de Dietrich (2006). Três ministros devem decidir sobre as seguintes proposições: p: Aumentar o déficit fiscal; q: Os gastos em educação devem crescer; $p \to q$: Se é possível aumentar o déficit então os gastos em educação devem ser aumentados.

	p	$p \to q$	q
Ministro 1	Sim	Sim	Sim
Ministro 2	Sim	Não	Não
Ministro 3	Não	Sim	Não
Maioria	Sim	Sim	Não

Denomina-se manipulação de agenda o fato de uma agenda ser modificada por alguns agentes para que certas proposições sejam aceitas pela regra de agregação de juízos.

O exemplo dado pode ser utilizado para ilustrar a manipulação de uma agenda. Três ministros devem decidir sobre as seguintes proposições: "o déficit orçamentário pode ser aumentado"é denotado por a e "os gastos com educação devem aumentar"é denotado por b. Assumindo que o conjunto de juízos coletivos $\mathbf{J}$ é selecionado por maioria simples,

1. A agenda $\Phi = \{a, b, \neg a, \neg b\}$ gera $\mathbf{J} = \{a, \neg b\}$.
2. A agenda $\Phi = \{a, a \to b, \neg a, \neg(a \to b)\}$ gera $\mathbf{J} = \{a, a \to b\}$.
3. A agenda $\Phi = \{a, a \to, b, \neg a, \neg(a \to b), \neg b\}$ gera $\mathbf{J} = \{a, a \to b, \neg b\}$, que é um conjunto inconsistente.

Em (1) o conjunto de juízos coletivos contém b, em (2) o conjunto implica $\neg b$, e em (3) o conjunto é inconsistente.
Manipulação geral de agenda. O resultado da agregação da agenda em 1 é $\neg b$, ou seja, não há aumento de gastos com educação. Se um formulador de agenda for a favor do aumento de gastos em educação, então ele pode alterar o resultado substituindo a agenda 1 pela agenda 2, pois, a agenda 2 só é consistente se b for aceito.

Manipulação lógica de agenda. A agenda 2 pode levar ao conjunto de agregação de juízos $\{\neg a, a \to b\}$, que não implica em b ou$\neg b$. O formulador de agenda pode alterar a agenda para $\{a, a \leftrightarrow b, \neg a, \neg(a \leftrightarrow b)\}$, que implica b sempre que o conjunto for consistente e completo.

4 Democracia Deliberativa e a Escolha da Regra de Agregação de Juízos

No capítulo 3 foram apresentados alguns dos principais teoremas de impossibilidade da teoria de agregação de juízos. Apesar de tais teoremas apresentarem limitações inerentes à qualquer regra de agregação de juízos, quando algumas hipóteses são enfraquecidas é possível construir conjuntos de juízos coletivos que são consistentes e completos.

Mas a teoria de agregação de juízos não possui apenas interesses teóricos. Muitos processos de agregação de juízos ocorrem em uma sociedade democrática. Uma pergunta natural a ser levantada é: qual regra de agregação de juízos preserva os ideais de uma democracia? Para que a pergunta seja melhor direcionada, primeiramente devemos definir a qual concepção de democracia nos referimos[1], e, consequentemente, quais ideais democráticos as regras de agregação devem satisfazer.

O conceito de democracia e democracia deliberativa são tão diversos quanto as escolas e autores que as definem. Dada a complexidade do tema e o limite natural imposto ao escopo deste trabalho, nos limitaremos a concepção de democracia deliberativa presente em Petit (2001).

4.1 Os Ideais da Democracia Deliberativa

Apesar de relativa heterogeneidade quanto a forma e execução de uma democracia deliberativa, existe certo consenso na literatura (Petit, 2001) sobre quais ideais ela deve satisfazer:

- *A restrição de inclusão:* A todos os indivíduos de uma sociedade devem ser dados direitos iguais a votar em questões coletivas relevantes.
- *A restrição crítica:* Todos os indivíduos devem deliberar sobre as questões a serem votadas com base em preocupações comuns.
- *A restrição dialógica:* A deliberação deve ser aberta, não coerciva e mútua. E não deve existir um espaço arbitrário onde a deliberação deve ocorrer.

A restrição da inclusão garante a todos os agentes participação igualitária no processo deliberativo, excluindo assim, assimetrias de poder nas discussões públicas. A restrição crítica exige que os agentes deliberem racionalmente sobre problemas sociais, e que considerem o problema sob uma perspectiva coletiva. A restrição dialógica impõe aos

[1] Não é objetivo deste trabalho apresentar uma discussão sobre o tema, para tal propósito consulte Finley, M.I. (1988), Dahl, Robert A (1985).

agentes a necessidade de que a discussão seja coletiva, excluindo assim, a possibilidade de os agentes formarem seus juízos isoladamente. E também exclui da deliberação qualquer forma de coerção ou arbitrariedade.

4.2 Deliberação ou Racionalidade Coletiva?

Considerando os ideiais democráticos e os princípios ressaltados pelas regras de agregação, deve se considerar quais regras reforçam os ideais da democracia deliberativa. A votação ditatorial claramente fere todos os ideais democráticos. A "propositionwise voting"pode gerar conjuntos de juízos inconsistentes, mesmo para um número limitado de proposições. Portanto, a busca por uma regra de agregação de juízos pode ser reduzida as regras de votação baseadas em premissas (vbp) e votação baseada em conclusões (vbc).

Um ideal democrático que não foi considerado por Petit (2001) é o princípio da contestabilidade (Bovens e Rabinowicz, 2004). Os indivíduos devem ter o direito de questionar as decisões coletivas. A vbp impõe aos agentes a necessidade de deliberar sobre as premissas da agenda para atingir um resultado. Logo, a vbp satisfaz o ideal de contestabilidade. Já a vbc não exige qualquer contestação, pois os agentes apenas se preocupam com as conclusões impostas pelas premissas. Uma outra característica da vbc é que ela não exige qualquer deliberação coletiva, apenas que os indivíduos deliberem isoladamente.

As diferenças entre a vbp e a vbc não se limitam a questão se são as premissas ou se são as conclusões que devem ser submetidas a regra de maioria. Elas se estendem ao caso de quais princípios democráticos cada uma reforça. A vbc exige que cada agente decida individualmente seus juízos sobre as conclusões. Tal regra garante que o conjunto de juízos coletivos sempre sejam consistentes, ou seja, a vbc impõe a sociedade uma condição de racionalidade em detrimento da deliberação. Já a vbp exige que os agentes façam seus juízos sobre cada uma das premissas, e apenas depois, as premissas são submetidas a agregação majoritária. A vbp garante que as questões coletivas sejam deliberadas na esfera pública, reforçando o papel deliberativo dos juízos, mas sob o risco de que coletivamente um conjunto de proposições irracionais sejam aprovadas (Petitt, 2001).

4.3 Liberalismo Mínimo e Deliberacionismo Amplo

List (2006) reinterpreta o problema da escolha entre a vbp e vbc como um problema multidimensional. A questão recai tanto em "qual"escolha é feita, como também no "porquê"da escolha. Segundo List, estas duas questões podem ser reduzidas a dois espectros políticos: liberalismo mínimo[2] e deliberacionismo amplo[3].

[2] Tradução livre de *minimal liberal account.*
[3] Tradução livre de *comprehensive deliberative account.*

O liberalismo mínimo considera o problema de "qual"questão social é relevante e o deliberacionismo amplo considera o problema do "porquê"da questão ser relevante. O liberalismo mínimo não considera as motivações de uma determinada decisão. Os juízos individuais devem considerar apenas o fim ao qual as premissas são julgadas. E o processo de deliberação é visto como uma ameaça a estabilidade social, pois gera conflitos que não estão diretamente ligados ao juízo em questão. Para o liberalismo mínimo, não é relevante se um indivíduo é favorável aos direitos humanos por convicções religiosas, princípios morais ou porque foi convencido por argumentos racionais. Uma agenda de votação só é relevante porque ela gera conjuntos soluções, ou seja, a partir premissas os indivíduos são capazes de chegar à conclusões coletivas sobre os problemas de ordem social.

Já o deliberacionismo amplo ressalta o papel da deliberação e do julgamento sobre as decisões. Não basta que uma agenda de premissas seja votada, e que gere conclusões sociais. Para os deliberacionistas, o próprio processo de deliberação deve ser alvo debate público. O que se entende por racionalidade coletiva e quais princípios racionais devem guiar a deliberação são as principais questões a serem levantadas em um juízo coletivo. O processo de deliberação deve ser integrado ao espaço público e constituído nele. Portanto, para o deliberacionismo amplo, as premissas devem ser construídas na esfera pública e este processo deve nortear os juízos individuais.

A diferença entre o liberalismo mínimo e a deliberação ampla podem afetar o resultado de uma agregação de juízos coletivos, como foi demonstrado pelo exemplo da corte de juízes apresentado no capítulo 3. O liberalismo mínimo representa a votação baseada em conclusões, enquanto o deliberacionismo amplo representa a votação baseada em premissas. Ambas são posições políticas ideais (List, 2006), e devem ser compreendidas como simplificações de posições políticas que demarcam todo espectro de teorias políticas.

4.4 Princípios Democráticos e o Dilema Discursivo

Reconsidere o exemplo da corte de juízes apresentado no capítulo 3. Para um grupo formado por três indivíduos, é apresentado uma agenda que contém duas premissas e uma fórmula conjuntiva das duas premissas. A agenda pode ser julgada segundo os princípios do liberalismo mínimo ou do deliberacionismo amplo.

Para o liberalismo mínimo apenas as conclusões são importantes para a agregação de juízos. Portanto, o liberalismo mínimo é equivalente a votação baseada em conclusões (vbc). Pela vbc o indivíduo 1 aprova as premissas p e q, o que implica na aceitação de c. O indivíduo 2 aprova a premissa p, mas não a premissa q, e, portanto, c não é aceita. O indivíduo 3 não aceita a premissa p, mas aceita a premissa q, e, portanto c não é aceita. Quando a regra de maioria simples é aplicada as conclusões, c é rejeitada. Note que as premissas não são levadas a público. Os juízos sobre as premissas são formados isoladamente, e apenas após a conclusão de cada agente, as conclusões são agregadas.

Para o deliberacionismo amplo, o debate público é o objetivo das decisões coletivas. Portanto, pode-se interpretar o deliberacionismo amplo como a votação baseada em premissas (vbp). Pela vbp os indivíduos 1 e 2 aceitam a premissa p e o indivíduo 3 a rejeita; os indivíduos 1 e 3 aceitam a premissa q, enquanto o indivíduo 2 a rejeita. Pela regra de maioria simples, as premissas p e q sã aceitas, o que resulta na aceitação de c. Como já foi ressaltado no exemplo da corte de juízes, as regras de agregação vbc e vbp podem gerar resultados distintos.

O resultado do dilema discursivo pode ser reinterpretado como o conflito de princípios democráticos. Uma regra de agregação pode reforçar a racionalidade coletiva, i.e, pode garantir que os conjuntos de agregação de juízos coletivos sejam sempre consistentes, ou pode garantir o princípio da deliberação, i.e, ela pode impedir que qualquer premissa rejeitada pela maioria dos indivíduos seja aceita pela regra de agregação.

Tabela 10 – Dilema Discursivo (Forma Conjuntiva)

	p	q	$c \leftrightarrow (p \wedge q)$	c
Indivíduo 1	Sim	Sim	Sim	Sim
Indivíduo 2	Sim	Não	Sim	Não
Indivíduo 3	Não	Sim	Sim	Não
Maioria	Sim	Sim	Sim	Não

Os exemplos de agregação de juízos que apresentados foram sobre agendas na forma conjuntiva. Um exemplo de agregação na forma disjuntiva será apresentado a seguir. As conclusões são similares ao caso com agenda conjuntiva. Considere um grupo formado por três indivíduos e uma agenda formada por três proposições atômicas e uma fórmula disjuntiva.

Tabela 11 – Dilema Discursivo (Forma Disjuntiva)

	p	q	r	$c \leftrightarrow (p \vee q \vee r)$	c
Indivíduo 1	Sim	Não	Não	Sim	Sim
Indivíduo 2	Não	Sim	Não	Sim	Sim
Indivíduo 3	Não	Não	Sim	Sim	Sim
Maioria	Não	Não	Não	Sim	Sim

O liberalismo mínimo, para fins pragmáticos, pode ser considerado como equivalente a vbc e o deliberacionismo pode ser considerado equivalente a vbp. Pela vbc, o indivíduo 1 aceita a proposição p e rejeita as proposições q e r, e, consequentemente, aceita a conclusão c. O indivíduo 2 aceita a proposição q e rejeita as proposições p e r, e, consequentemente, aceita a conclusão c. O indivíduo 3 aceita a proposição r, e rejeita as proposições p e q, e, consequentemente aceita a conclusão c. Se aplicada às conclusões, a regra de maioria simples implica na aceitação da conclusão c.

Pela vbp, o indivíduo 1 aceita a premissa p e os indivíduos 2 e 3 a rejeitam. O indivíduo 2 aceita a premissa q e os indivíduos 1 e 3 a rejeitam. O indivíduo 3 aceita a premissa r e os indivíduos 1 e 2 a rejeitam. Quando a regra de maioria simples é aplicada a cada proposição, nenhuma premissa é aceita, e, consequentemente a conclusão c é rejeitada.

4.5 Escapando do Dilema Discursivo

No capítulo 3 foi demonstrado que nenhuma regra de agregação satisfaz as condições de anonimidade, neutralidade e independência. Este resultado (List, 2006) pode ser reformulado da seguinte forma:

Proposição. Para nenhuma agenda não simples existe uma regra de agregação que satisfaz as condições de pluralismo, resposta positiva sistemática, anonimidade, decisão, e integridade.

O pluralismo desempenha o mesmo papel que a condição de agenda irrestrita (universal). A regra de agregação deve aceitar quaisquer perfis de juízos individuais. A condição de integridade exige que tais perfis de juízos sejam consistentes, ou seja, deve existir uma interpretação que atribui valor verdade simultaneamente a todas as fórmulas da agenda. A condição de resposta positiva sistemática garante a existência de uma única regra de agregação tal que o resultado da agregação de juízos coletivos em cada proposição é o mesmo resultado da agregação de juízos individuais sobre a mesma proposição. A condição de anonimidade exige que o resultado da agregação de juízos independa da configuração do perfil de juízos individuais, ou seja, para qualquer permutação dos indivíduos pertencentes à sociedade, o resultado da agregação não é alterado. A condição de decisão exige que para toda proposição pertencente a agenda exista um resultado da agregação para tal preposição, seja a aceitação da proposição ou a rejeição da proposição.

Se alguma hipótese da proposição for relaxada, então é possível que uma regra de agregação satisfaça todas as demais propriedades e não seja uma regra ditatorial. A escolha das hipóteses que serão enfraquecidas depende da perspectiva política. Sob liberalismo amplo uma regra de agregação deve sempre ser coletivamente consistente, e sob a perspectiva do deliberacionismo amplo, uma premissa deve sempre passar pelo escrutínio público. Portanto, as hipóteses devem satisfazer algum desses princípios para que sejam aceitas.

Uma maneira de escapar desse resultado é aceitar que algum indivíduo seja responsável pelas decisões coletivas. Mas uma sociedade regida por um ditador não satisfaz qualquer princípio democrático e pode ser descartada. Uma outra maneira de escapar do resultado é reduzir a agenda pública. Se a agenda é constituída somente por fórmulas atômicas, então as condições listadas pela proposição são satisfeitas. Este caminho é o aconselhado pelo liberalismo mínimo, pois as decisões coletivas podem ser reduzidas às conclusões dos juízos individuais. Uma agenda simples, portanto, evita conflitos gerados pelo processo de deliberação sobre as premissas, e por ser formada apenas por premissas atômicas é possível agregar os juízos coletivos sem satisfazer a proposição.

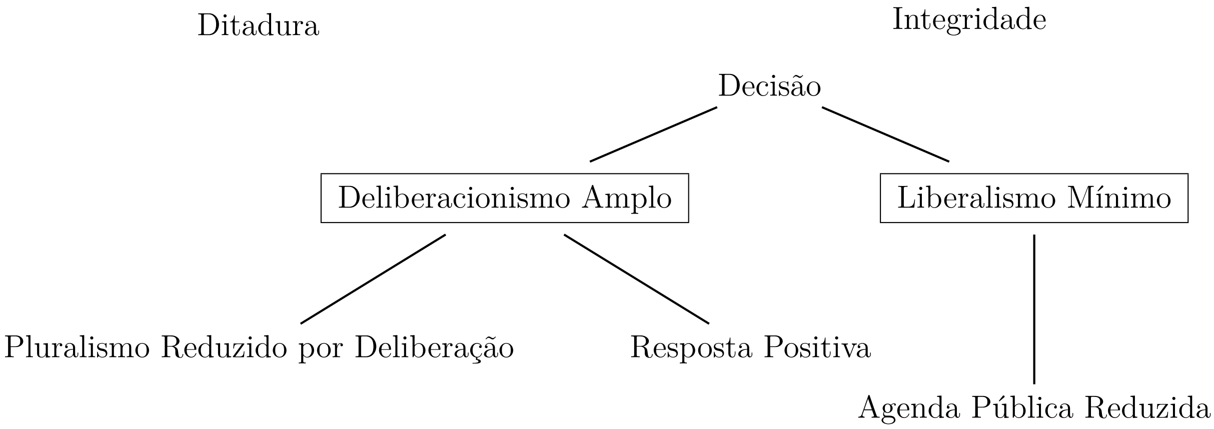
Uma outra maneira de escapar do dilema discursivo é reduzir o pluralismo. O pluralismo é uma interpretação para a hipótese de domínio irrestrito. Se o domínio das proposições for restringido através da escolha das premissas que serão julgadas, então é possível escapar do dilema discursivo. A escolha das proposições que entrarão em juízos é feita através da deliberação pública. Este é o caminho escolhido pela teoria da deliberação ampla, pois reforça o papel da deliberação na agregação de juízos coletivos.

A restrição de resposta positiva exige que todas as premissas sejam agregadas segundo a mesma regra de agregação. Mas se apenas algumas premissas forem julgadas e as demais forem derivadas logicamente, então é possível escapar do dilema discursivo. Os proponentes do deliberacionismo amplo são favoráveis a este caminho, pois segundo a vbp, as premissas são votadas segundo a regra de maioria simples, mas a conclusão é apenas uma implicação lógica das premissas, sendo, portanto, desnecessário ser agregada.

A restrição de integridade exige que o conjunto de premissas coletivas seja consistente. Relaxar esta hipótese implica na aceitação de conjuntos "ilógicos", e nem o liberalismo mínimo nem o deliberacionismo amplo são favoráveis a esta via.

A demanda por decisão exige que todas as premissas de uma agenda sejam julgadas. Mas algumas premissas podem ser deixadas indeterminadas se elas não receberem uma quantidade mínima de votos. Esta abordagem é atraente para ambas as teorias. Para o liberalismo mínimo é desejável que um juízo coletivo tenha apoio unânime (Buchanan e Tullock, 1962), e as premissas que não passem por uma votação mínima devem permanecer sem resolução. Já para o deliberacionismo amplo, a agenda de votação deve ser escolhida coletivamente, e portanto, as premissas devem receber apoio da maioria da sociedade para que sejam votadas. As premissas que não satisfizerem este número devem permanecer indeterminadas. Em suma, para o liberalismo mínimo algumas premissas podem permanecer indeterminadas, pois desta forma somente as premissas necessárias são votadas, enquanto para o deliberacionismo amplo uma agenda complexa é preferível, pois ela inclui os argumentos coletivos em favor de alguma premissa ao passo que somente as premissas preferidas coletivamente são de fato julgadas.

A árvore abaixo sumariza as hipóteses defendidas por cada corrente política. Os nódulos que não estão ligados são os que não são defendidos nem pelo liberalismo mínimo, nem pelo deliberacionismo amplo.



4.6 Voto Estratégico e Regras de Agregação

Reconsidere o exemplo do dilema discursivo na forma conjuntiva. O problema é o mesmo e as premissas possuem o mesmo significado. Até o momento estamos assumindo tacitamente que os agentes declaram seus juízos verdadeiramente. Os indivíduos podem tanto se preocupar apenas com as premissas quanto podem se preocupar apenas com as conclusões dos juízos.

Tabela 12

	p	q	$c \leftrightarrow (p \wedge q)$	c
Indivíduo 1	Sim	Sim	Sim	Sim
Indivíduo 2	Sim	Não	Sim	Não
Indivíduo 3	Não	Sim	Sim	Não
Maioria	Sim	Sim	Sim	Não

Suponha que os indivíduos se preocupam apenas com as conclusões da votação. Se a votação baseada em premissas for usada para agregar os juízos, o indivíduo 1 votará pela aceitação das premissas p e q. Mas os indivíduos 2 e 3 têm incentivos a não declararem seus juízos verdadeiros. Note que o indivíduo 2 continua votando contrariamente a proposição q, mas agora também vota contra a proposição p, pois se declarar ser contrário a p, então serão dois votos contrários a p e apenas um voto a favor, revertendo assim o resultado coletivo sobre a premissa p de "sim"para "não". Já o indivíduo 3 vota contra a proposição p, mas muda sua posição sobre a proposição q. Se 2 votar contrariamente a proposição q, então o resultado sobre a mesma passa a ser de dois votos contrários e apenas um a favor de sua aceitação. A mudança dos votos dos indivíduos 2 e 3 tem como objetivo manipular o resultado final. Como ambos são contrários à aceitação da conclusão c, eles se declaram contrários as proposições p e q, pois se qualquer uma das duas não for aceita então a conclusão c também não será aceita.

Mas se a votação baseada em conclusões for utilizada então nenhum indivíduo terá incentivos para não representar seus juízos verdadeiros. Como apenas as conclusões estão sendo agregadas, o desvio do juízo de algum dos agentes pode implicar na mudança do resultado da agregação. Claramente nenhum agente pode modificar o resultado da agregação através da manipulação de seu voto. Portanto, a agregação baseada em conclusões é à prova de estratégias. Essa conclusão é favorável a posição do liberalismo mínimo, pois enquanto a vbc é à prova de estratégias, a vbp pode ser manipulada pelo voto estratégico.

4.7 Manipulação Estratégica e Agregação à Prova de Manipulação

Foi mostrado que a votação baseada em conclusões é à prova de estratégias, enquanto a votação baseada em premissas não o é. O exemplo deixa em aberto: sob quais condições uma regra de agregação é manipulável?

Uma agregação de juízos coletivos é manipulável se as seguintes condições são satisfeitas (Dietrich e List, 2004):

- se o indivíduo revela seus juízos verdadeiramente, então o juízo coletivo sobre a mesma proposição difere de seu próprio juízo.

- se o indivíduo não revela verdadeiramente seus juízos, então o juízo coletivo sobre a mesma proposição é igual ao seu próprio juízo.

Na seção anterior foi dado um exemplo de um perfil de juízos que não era manipulável se a votação baseada em conclusões fosse utilizada. Mas não foi fornecida uma definição sobre o que é um juízo à prova de estratégias. Abaixo estão definidos os conceitos que são utilizados para generalizar a classe de regras de agregação manipuláveis.

Juízos à prova de estratégia. Não existe um perfil de juízos individuais pelo qual um procedimento de agregação de juízos é manipulável por qualquer indivíduo em qualquer proposição (List, 2006).

Proposição. Para uma agenda conjuntiva ou disjuntiva não existe uma regra de agregação que satisfaz as condições de pluralismo, unanimidade, anonimidade, integridade, e que seja decisiva e à prova de estratégias.

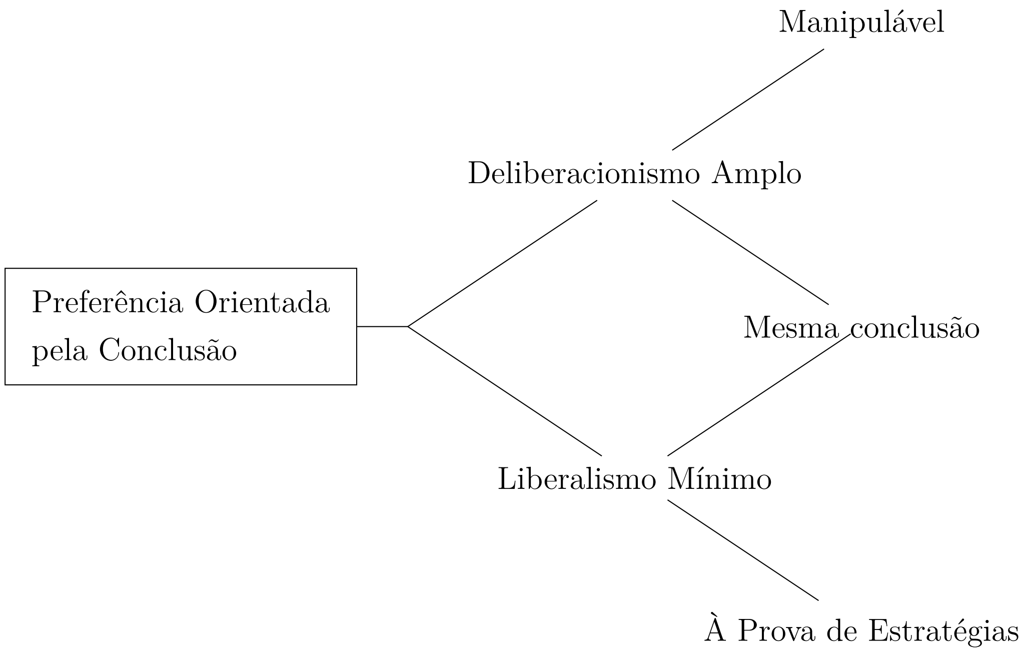
Este resultado se assemelha ao teorema de Gibbard-Satterhwaite (1973, 1975). Não existe uma regra de agregação que satisfaz as condições listadas pela proposição e não seja ditatorial. Assim como o teorema de List e Pettit (2002), este resultado pode ser evitado se algumas das condições impostas forem relaxadas.

Agenda pública. Se a agenda for reduzida a apenas proposições atômicas, então todas as condições da proposição são satisfeitas. A votação baseada em conclusões só agrega proposições atômicas, e, portanto, é à prova de estratégias. Em vista disso,o liberalismo mínimo é à prova de estratégias, mas o deliberacionismo amplo não o é.

No exemplo do dilema discursivo, o resultado da agregação de juízos de ambas as regras de agregação é o mesmo. Este resultado não se limita ao exemplo dado. Se as preferências são orientadas pela conclusão (poc), então a votação baseada em conclusões e a votação baseada em premissas são equivalentes estrategicamente. Sob a vbc, os agentes não possuem incentivos a não representarem verdadeiramente seus juízos. Sob a vbp os indivíduos têm incentivos a votarem a favor de todas as premissas se eles são favoráveis à conclusão, e votarem contra todas as premissas se eles são contrários à conclusão. Logo, a vbc e vbp são equivalentes estrategicamente (Dietrich e List, 2004).

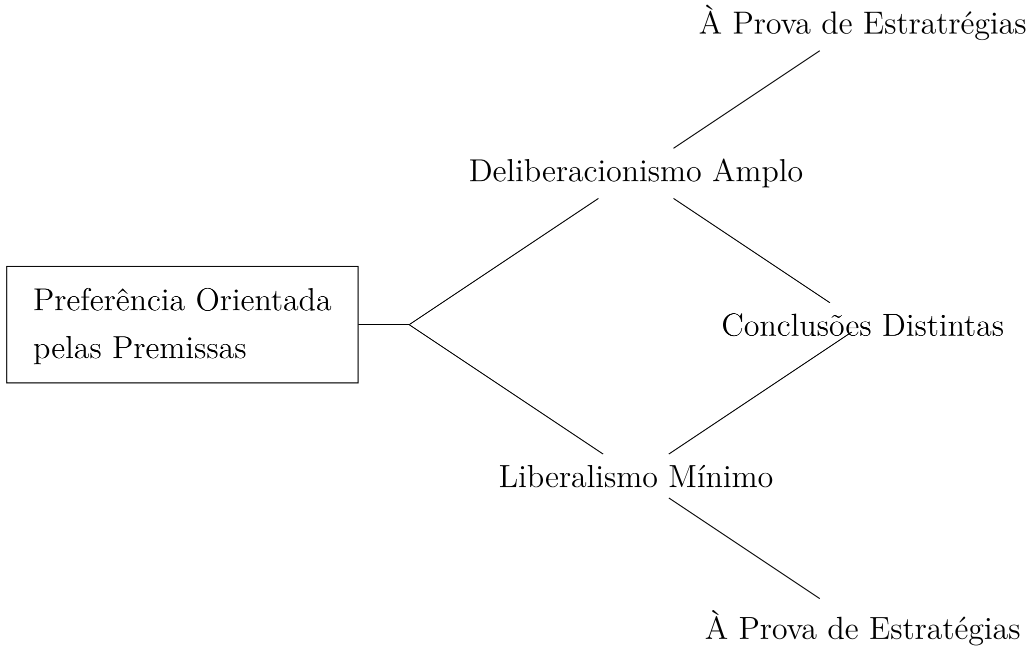
Mas se as preferências dos agentes são orientadas pelas premissas (pop), então a equivalência estratégica entre a vbc e a vbp acaba. Como não há premissas a serem votadas na vbc, não há incentivos para os indivíduos não representarem verdadeiramente seus juízos. No caso da vbp, os indivíduos também reportarão verdadeiramente seus juízos, pois uma representação falsa pode induzir a não aceitação da premissa preferida pelo agente. A árvore abaixo sumariza esses resultados.

Figura 3 – Manipulação de Votos (poc)



Portanto, o deliberacionismo amplo (vbp) apresenta a melhor proposta de agregação de juízos se os indivíduos só se preocuparem com as premissas. Mas se os indivíduos só preocuparem com as conclusões, o liberalismo mínimo (vbc) apresenta a melhor proposta de decisões coletivas. Sob a segunda perspectiva, ambas as regras são logicamente equivalentes, apesar de os indivíduos não reportarem verdadeiramente seus juízos na vbp. Mas quando os indivíduos só se preocupam com as premissas, nada garante que ambas as regras de votação terão o mesmo resultado. A árvore abaixo sumariza os resultados.

Figura 4 – Manipulação de Votos (pop)



Conclusão

Este trabalho fez uma análise comparativa de algumas regras de agregação de juízos. Para isso foi apresentada uma breve introdução à teoria de agregação de juízos. O dilema discursivo foi caracterizado e posteriormente foi demonstrada uma generalização - que a única regra de agregação de juízos que satisfaz as condições de anonimidade (A), neutralidade (N) e independência (I) é a regra ditatorial. O exemplo da corte de juízes foi utilizado para apresentar um outro problema do processo de decisão social, o problema de manipulação estratégica de votos. Foi demonstrado que regras de agregação votação baseada em conclusões e votação baseada em premissas são logicamente equivalentes, mas a primeira é à prova de estratégias, enquanto a segunda é manipulável.

Após os teoremas de impossibilidade serem apresentados, introduzimos alguns critérios normativos que uma regra de agregação deve satisfazer em uma sociedade democrática. Estes critérios foram retirados de duas teorias políticas ideais, o liberalismo mínimo e o deliberacionismo amplo. Existem várias maneiras de escapar do teorema de List e Pettit. Se algumas hipóteses do teorema forem enfraquecidas é possível que uma regra de agregação coletiva satisfaça as condições A, N, I e seja não ditatorial. Para escolher quais hipóteses podem ser enfraquecidas, reformulamos os axiomas do teorema de List e Pettit. As restrições que precisam ser satisfeitas são: pluralismo, integridade, resposta positiva, anonimidade, e que seja decisiva e não ditatorial.

Vimos que segundo o liberalismo mínimo, uma regra de agregação deve se limitar às conclusões e a agenda de juízos deve ser a mais simples possível, pois uma agenda complexa pode gerar conflitos e instabilidade social. Quanto à regra de agregação, o liberalismo mínimo é equivalente a votação baseada em conclusões (vbc). Mostramos que uma agenda composta apenas por premissas atômicas é o caminho escolhido pelo liberalismo mínimo para escapar do dilema discursivo. Outro caminho escolhido pelos liberais é enfraquecer a hipótese de resposta positiva para todas as premissas. Uma premissa só deve ser aceita se ela tiver apoio unânime ou de uma super maioria (Buchanan e Tullock.1962).

Para os deliberacionistas, uma agregação de juízos coletivas deve ser pública. Portanto, as razões das deliberações individuais devem ser incorporadas à agenda de agergação. Se o pluralismo for limitado pelo processo deliberativo, ou seja, se o domínio das agendas de votação for restrito pelo debate público, então é possivel escapar do teorema de List e Pettit. Assim como o liberalismo mínimo, o deliberacionismo amplo é a favor de enfraquecer a necessidade de que todas as proposições tenham uma decisão coletiva. Mas os motivos para apoiarem este caminho diferem. Para os deliberacionistas, uma premissa só deve ser julgada coletivamente se ela for adicionada a agenda de agregação após deliberação pública.

Demonstramos que a votação baseada em conclusões não está sujeita à votação estratégica, mas a votação baseada em premissas está sujeita à manipulação de votos. Este resultado só é válido sob a hipótese de que as preferências dos agentes são orientadas pela conclusão (poc), ou seja, os indivíduos não se importam com as premissas, apenas com a conclusão da agregação. No entanto, os resultados dos dois métodos de agregação são iguais. Mas se a preferência dos agentes é orientada pelas premissas, ou seja, apenas o resultado da agregação das premissas importa, então os resultados dos dois métodos de decisão coletivos podem diferir.

Concluímos que a escolha da regra de agregação depende dos critérios normativos selecionados. Se uma decisão coletiva deve manter a racionalidade coletiva e ser à prova de estratégias, então o liberalismo mínimo (vbc) é a melhor escolha. Se uma decisão coletiva deve reforçar a deliberação e o debate público, então o deliberacionismo amplo (vbp) é a melhor escolha. As regras de agregação estão submetidas à possibilidade de manipulação, mas qual das duas regras é imune à votação estratégica depende em última instância das preferências individuais. Se as preferências são orientadas pelas premissas (pop) ou se são orientadas pelas conclusões (poc) é determinante para escolha entre a votação baseada em conclusões e a votação baseada em premissas.

Referências

Arrow, K. Social Choice and Individual Values. Yale University Press, 1970.

Bovens, L., Rabinowicz, W. "Voting Procedures for Complex Collective Decisions: an Epistemic Perspective". *Ratio Juris*, v.17(2), p. 241-58, 2004.

Buchanan, J. M., Tullock, G. The Calculus of Consent: Logical Foundations of Constitutional Democracy. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1962.

Dahl, R. Um prefácio à teoria democrática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1985.

Detlefsen, M. Proof and Knowledge in Mathematics. Routledge, 1992.

Dietrich, F. "A Generalised Model of Judgment Aggregation". *Social Choice and Welfare*, v. 28(4), p. 529-565, 2007.

Dietrich, F."Judgment Aggregation: (Im)possibility Theorems". *Journal of Economic Theory*, v. 126(1), p. 286-298, 2006.

Dietrich, F., List, C. "Arrow's Theorem in Judgment Aggregation". *Social Choice and Welfare*, v. 29(1), p. 19-33, 2007.

Dietrich, F., List, C. "Strategy-Proof Judgment Aggregation". *Economics and Philosophy*, v. 23(3), p. 269-300, 2007.

Ebbinghaus, H. D., Flum, W. T. J. Mathematical Logic. Undergraduate Texts in Mathematics, 2nd Edition, 1996.

Endriss, U. Logic and Social Choice. Logic and Philosophy Today, College Publications, 2001.

Finley, M.I. Democracia Antiga e Moderna. Rio de Janeiro: Graal, 1988.

Fishburn, P. C. "Intransitive Individual Indifference and Transitive Majorities". *Econometrica*, v. 38, 1970.

Fishburn, P. C. "The Theory of Social Choice". Princeto: Princeton University, 1973.

Freitas, R., e Viana, P. Curso Básico de Lógica Matemática. Disponível em : <http://www.uff.br/grupodelogica/textos/cblm.pdf>. Acesso em: 20 junho 2015.

Gaertner, W. A Primer in Social Choice Theory. Oxford University Press,First Edition, 2009.

Gibbard, A. "Manipulation of Voting Schemes: A General Result". *Econometrica*, v.10, p. 587-601, 1973.

Kornhauser, L. A., Sager, L. G. "Unpacking the Court". *The Yale Law Journal*, v. 96(1), p. 82-117, 1986.

Kornhauser, L. A., Sager, L. G. "The One and the Many: Adjudication in Collegial Courts". *California Law Review*, v. 81(1), p. 1-59, 1993.

List, C. "The Discursive Dilemma and Public Reason". *Ethics*, v. 106(1), p. 362-402, 2006.

List, C. "The Theory of Judgment Aggregation: An Introductory Review". *Synthese*, v. 187(1), p. 179-207, 2012.

List, C., Pettit, P. "Aggregating Sets of Judgments: An Impossibility Result". *Economics and Philosophy*, v.18, p. 89-110, 2002.

List, C., Puppe, C. Judgment Aggregation: a Survey. In: Anand, Paul e Pattanaik. Prasanta e Puppe, Clemens. The Handbook of Rational and Social Choice. Oxford University Press, Oxford, UK.

Mass-Collel, A., Sonnenschein, H. "General Possibility Theorems for Group Decisions". *The Review of Economic Studies*, v. 39(2), p 185-192, 1972.

May, K. O. "A Set of Independent Necessary and Suficient Conditions for Simple Majority Decisions". *Econometrica*, v. 20(4), p. 680-684, 1952.

Mileti, J.R. Mathematical Logic for Mathematicians. Disponível em : <http://math.uchicago.edu/ drh/mathlogic.pdf>. Acesso em: 20 junho 2015.

Mueller, D. Public Choice III. Cambridge University Press, 2003.

Nehring, K. "Arrow's Theorem as Corollary". *Economic Letters*, v. 83(3), p. 379-382, 2003.

Nunes de Souza, J. Lógica para Ciência da Computação. Editora Campus/Elsevier, Segunda Edição, 2008.

Pattanaik, P. K. "A Note on Democratic Decisions and the Existence of Choice Sets". *Review of Economic Studies*, v. 35, 1968.

Pattanaik, P. K. "A Generalization of Some Theorems on the Transitivity of Social Decision with Restricted Individual Preferences". mimeo, 1971.

Pettit, P. "Deliberative Democracy and the Discursive Dilemma". *Philosophical Issues*, v. 11(1), 268-299, 2001.

Satterwhaite, A. "Strategy-Proofness and Arrow's Condition". *Journal of Economic Theory*, v. 10, p. 187-217, 1975.

Sen, A. K. "A Possibility Theorem on Majority Decisions". *Econometrica*, v. 75, 1966.

Sen, A. K. "Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions". *Quarterly Journal of Economics*, v. 36,1969.

Sen, A. K. Collective Choice and Social Welfare. San Francisco: Holden Day, 1970.

Sen, A. K. "Social Choice and Justice: A Review Article". *Journal of Economic Literature*, v. 23(4), p. 1764-1776, 1985.

Vickrey, W. "Utility, Strategy, and Social Decision Rules". *Quarterly Journal of Economics*, v. 74 (3), p. 507-535, 1960.

]

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstração do Teorema de List e Pettit

Prova. Para qualquer agregação que satisfaça anonimidade, neutralidade e independência. a aceitação coletiva de uma fórmula dependerá apenas do número de indivíduos que a aceitam. Em particular, $|N_{\varphi}^{J}| = |N_{\psi}^{J}|$ implica $\varphi \in F(J) \Leftrightarrow \psi \in F(J)$. A demonstração se resume ao caso em que o número de indivíduos é par, e ao caso em que o número de indivíduos é ímpar:

1. Suponha que o número de indivíduos é par. Considere o perfil J no qual metade dos indivíduos aceitam p e a outra metade aceita $\neg p$, i.e., $|N_{p}^{J}| = |N_{\neg p}^{J}|$. Então, $p \in F(J) \Leftrightarrow \neg p \in F(J)$, significa que o conjunto de juízos coletivos deve aceitar ambos p e $\neg p$, ou rejeitar ambos. No primeiro caso, o conjunto de agregações de juízos não é consistente, e no segundo caso, o conjunto de agregações de juízos não é completo.

2. Suponha que n é ímpar (e $n \geqslant 3$). Considere um perfil J sob o qual $\frac{n-1}{2}$ indivíduos aceitam p e q, 1 indivíduo aceita p e não aceita q, 1 indivíduo aceita q e não aceita p, e os demais $\frac{n-3}{2}$ indivíduos não aceitam p ou q. Então $|N_{p}^{J}| = |N_{q}^{J}| = |N_{\neg(p \wedge q)}^{J}|$. Portanto, todos ou nenhum p, q e $\neg(p \wedge q)$ deve estar em $F(J)$. No primeiro caso $F(J)$ não é consistente. No segundo caso, para que o conjunto seja completo é necessário que $\neg p, \neg q$ e $p \wedge q$ estajam em $F(J)$, que novamente violaria a consistência. Portanto, não existe um procedimento de agregação de juízos para qualquer número de indivíduos que satisfaça os três axiomas e gere conjuntos consistentes e completos.

Portanto, para qualquer número de indivíduos não é possível planejar um F que satisfaz todos os três axiomas e gere um conjunto de juízos completo e consistente.