

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

Simulação Numérica do Ruído Tonal e de Banda Larga Gerado pelo Movimento Oscilatório de um Pistão Unidimensional

Por,
Hugo Vilela de Araújo Pereira

Brasília
Dezembro de 2014

Hugo Vilela de Araújo Pereira

**Simulação Numérica do Ruído Tonal e de Banda Larga
Gerado pelo Movimento Oscilatório de um Pistão
Unidimensional**

Trabalho submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia

Orientador: Prof. Roberto Francisco Bobenrieth Miserda, UnB/ENM

Brasília
Dezembro de 2014

Hugo Vilela de Araújo Pereira

Simulação Numérica do Ruído Tonal e de Banda Larga Gerado pelo Movimento Oscilatório de um Pistão Unidimensional. Hugo Vilela de Araújo Pereira. – Brasília, Dezembro de 2014.

84 p. : il.; 30 cm.

Orientador: Prof. Roberto Francisco Bobenrieth Miserda, UnB/ENM

Projeto de Graduação – Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia – Dezembro de 2014.

1. Predição numérica. 2. Aeroacústica. 3. Dispersão acústica. I. Prof. Roberto Francisco Bobenrieth Miserda, UnB/ENM II. Universidade de Brasília. III. Faculdade de Tecnologia. IV. Simulação Numérica do Ruído Tonal e de Banda Larga Gerado pelo Movimento Oscilatório de um Pistão Unidimensional.

CDU 02:141:005.6

Hugo Vilela de Araújo Pereira

Simulação Numérica do Ruído Tonal e de Banda Larga Gerado pelo Movimento Oscilatório de um Pistão Unidimensional

Trabalho submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora

Prof. Roberto Francisco Bobenrieth
Miserda, UnB/ENM
Orientador

Prof. Francisco Ricardo da Cunha,
UnB/ENM
Examinador 1

Prof. Rafael Gabler Gontijo,
UnB/ENM
Examinador 2

Brasília, 03 de dezembro de 2014.

A Deus, que renova suas misericórdias a cada manhã.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho ou de qualquer outro.

A meus pais pelo constante amor, apoio e incentivo a prosseguir.

A meu irmão por ser o meu melhor amigo e exemplo.

Ao amor da minha vida por me fazer tão bem em todos os momentos.

A meu segundo irmão, Guilherme Firmino, pela grande amizade e companheirismo.

Ao Prof. Dr. Roberto Francisco Bobenrieth Miserda pelo constante acompanhamento e disposição para ensinar.

A todos os professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília por terem contribuído em minha formação acadêmica e pessoal.

Ao companheiro Bráulio Gutierrez Pimenta por todo apoio ao longo da realização deste trabalho.

Ao amigo Ivan Rosa de Siqueira por todo auxílio e grande disposição em ajudar.

E a todos os amigos conquistados ao longo de minha graduação por terem ajudado de diversas maneiras em meu crescimento pessoal e acadêmico. Em especial, cito: Nathan Brancalião, Platini Kukembila, Ricardo Teixeira, Hugo de Paula, Juliano França e Rodrigo Bento.

Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar, por meio de predições numéricas, a geração de ruído tonal e de banda larga devido ao movimento vibratório de um pistão unidimensional, o que envolve a dispersão de frequência ao longo de todo o espectro de frequência. Para isso, as principais fontes geradoras de ruído e os diferentes regimes de escoamento em função do número de Mach foram discutidos. Com os resultados obtidos para o caso do pistão vibratório, será possível entender melhor fenômenos mais complexos, como é o caso do ruído em turbofans. Destaca-se ainda as definições dos tipos de ruído e as explicações clássicas acerca de suas origens em turbofans, o que envolve conceitos de onda de choque e flutuações não periódicas do campo de pressão por conta do momento angular do escoamento. As equações compressíveis de Euler são numericamente resolvidas por meio da metodologia de discretização de volumes finitos através do código numérico VAT (Virtual Aeroacoustic Tunnel).

Palavras-chaves: Predição numérica, Aeroacústica, Dispersão de frequência

Abstract

The objective of this work is to analyse through numeric predictions the tonal and broadband noise due to the vibrational movement of an unidimensional piston, what involves the frequency dispersion along the frequency spectrum. To do that, the main noise generator fonts and the different stream regimes related to the Mach number were discussed. With the unidimensional piston results, it will be possible to better understand complex phenomena, like the noise generated by turbofans. Note also the definitions about the kinds of noise and their classic explanations about their origin in turbofans, which are related to the concepts of shock wave and nonperiodic fluctuations of the pressure field thanks to the angular momentum of the flow. The compressible Euler equations are numerically solved through the finite volume discretization methodology with the numerical code VAT (Virtual Aeroacoustic Tunnel).

Key-words: Numeric prediction, Aeroacoustic, Frequency dispersion

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação para o estudo proposto	1
1.2	Computational Fluid Dynamics - CFD	2
1.3	Contexto físico do modelo	4
1.4	Revisão bibliográfica	11
1.5	Objetivos	20
1.6	Organização do trabalho	20
2	Formulação matemática	21
3	Metodologia numérica	23
3.1	Cálculo das Variáveis Conservativas e Primitivas	30
3.2	Cálculo das Derivadas nas Faces	31
3.3	Dissipação Artificial	34
3.4	Método de Fronteira Imersa	37
3.5	Estabilidade Numérica	41
4	Validações e resultados	42
4.1	Validação - Tubo de choque	42
4.2	Pistão unidimensional	51
4.2.1	Validação - Decaimento teórico	52
4.2.2	Resultados - Frequência constante	52
4.2.2.1	Caso 1	52
4.2.2.2	Caso 2	56
4.2.2.3	Caso 3	60
4.2.2.4	Caso 4	63
4.2.3	Resultados - Análises em diversas frequências	66
4.2.4	Caso 1	66
4.2.5	Caso 2	69
4.2.6	Caso 3	71
5	Conclusões e trabalhos futuros	75
5.1	Conclusões	75
5.2	Trabalhos futuros	76
	Referências	77

Anexos	80
ANEXO A Primeiro Anexo	81

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação das principais partes de um turbofan. (CATIA, 2013) - Modificado.	1
Figura 2 – Estrutura de uma simulação CFD (Hirsch, 2007) - Modificado.	2
Figura 3 – Estrutura de uma simulação CFD (Hirsch, 2007).	3
Figura 4 – Representação das linhas de corrente para o regime subsônico (Anderson, 2003).	5
Figura 5 – Representação das linhas de corrente para o regime supersônico (Anderson, 2003).	6
Figura 6 – Representação do escoamento subsônico (Anderson, 2003).	6
Figura 7 – Representação do escoamento transônico (Anderson, 2003).	7
Figura 8 – Representação do escoamento supersônico (Anderson, 2003).	7
Figura 9 – Representação do escoamento hipersônico (Anderson, 2003).	8
Figura 10 – Propagação de ondas acústicas em regime (a) subsônico e (b) supersônico (Anderson, 2003).	9
Figura 11 – Curvas $\beta - \theta - M$ (Anderson, 2003) - Modificado.	10
Figura 12 – Representação da relação de <i>by-pass</i> (Wheeler, 2014).	11
Figura 13 – Representação gráfica de ruído tonal (Denenberg, 2014).	12
Figura 14 – Representação gráfica de ruído banda larga (Denenberg, 2014).	12
Figura 15 – Geração de ruído banda larga (Smith, 1989).	13
Figura 16 – Desenho esquemático de um turbofan (Traveria, 2012) - Modificado.	14
Figura 17 – Diagrama em corte do turbofan Pratt & Whitney PW1900G (Whitney, 2014).	15
Figura 18 – Modos acústicos circunferenciais e radiais (Sutliff, 2005).	16
Figura 19 – Geometria das pás do rotor e do estator (Pimenta & Miserda, 2014).	17
Figura 20 – Domínio computacional com malha cartesiana regular (Pimenta & Miserda, 2014).	17
Figura 21 – Campo aeroacústico instantâneo baseado em gradiente de temperatura gerado por cascatas transônicas do rotor (Pimenta & Miserda, 2014).	18
Figura 22 – Flutuação de pressão contabilizada por sondas estáticas (Pimenta & Miserda, 2014).	18
Figura 23 – Campo aeroacústico baseado em gradiente de temperatura gerado pela interação entre rotor e estator em regime transônico para análise em cascata (Pimenta & Miserda, 2014).	19
Figura 24 – Representação geral da forma conservativa (Hirsch, 2007) - Modificado.	23
Figura 25 – Volume de controle hexaédrico (Pazetto, 2011) - Modificado.	26
Figura 26 – Volumes de controle pareados.	27
Figura 27 – Análise de Volume Finito (Arash & Jazayeri, 2002) - Modificado.	28

Figura 28 – Volume ao redor do ponto para o caso 2D com 4 ^a ordem de precisão espacial (Freire & Miserda, 2004) - Modificado.	33
Figura 29 –Tubo de choque.	42
Figura 30 –Onda de choque e leque de expansão em tubo (Noronha & Morais, 2010) - Modificado.	43
Figura 31 –Perfis de temperatura e pressão após o rompimento da membrana em tubo de choque (Liepmann & Roshko, 1957) - Modificado.	44
Figura 32 –Relação simulada de temperatura para o tubo de choque.	46
Figura 33 –Relação simulada de pressão para o tubo de choque.	46
Figura 34 –Relação simulada de velocidade para o tubo de choque.	47
Figura 35 –Relação simulada de Mach para o tubo de choque.	47
Figura 36 –Relação simulada de velocidade para o tubo de choque.	49
Figura 37 –Oscilação numérica na interface da onda de choque para a velocidade.	50
Figura 38 –Oscilação numérica na interface do leque de expansão para a velocidade.	50
Figura 39 –Esquema do pistão unidimensional simulado.	51
Figura 40 –Validação para o decaimento ao longo da propagação de ondas de choque.	52
Figura 41 –Foco na linearidade da solução do Caso 1.	53
Figura 42 –Persistência da linearidade até o limite regular.	54
Figura 43 –SPL para o Caso 1.	55
Figura 44 –Flutuação de pressão RMS para o Caso 1.	55
Figura 45 –Transição entre a linearidade e a não linearidade para o Caso 2.	56
Figura 46 –Formação de ondas de choque na região não linear para o Caso 2.	57
Figura 47 –SPL para o Caso 2.	58
Figura 48 –Flutuação de pressão RMS para o Caso 2.	58
Figura 49 –Ruído tonal gerado em parte do espectro de frequência.	59
Figura 50 –Ruído banda larga gerado em parte do espectro de frequência.	59
Figura 51 –Transição entre a linearidade e a não linearidade para o Caso 3.	60
Figura 52 –Região perfeitamente linear.	61
Figura 53 –Região perfeitamente não linear.	61
Figura 54 –SPL para o Caso 3.	62
Figura 55 –Flutuação de pressão RMS para o Caso 3.	62
Figura 56 –Ruído de banda larga gerado em parte do espectro de frequência.	63
Figura 57 –Não linearidade ao longo de toda a região regular.	64
Figura 58 –Disposição dos volumes de controle e caracterização das ondas de choque.	64
Figura 59 –SPL para o Caso 4.	65
Figura 60 –Flutuação de pressão RMS para o Caso 4.	65
Figura 61 –Ruído de banda larga gerado em parte do espectro de frequência.	66
Figura 62 –Superposição de ondas no Caso 1.	67

Figura 63	–SPL para o Caso 1.	67
Figura 64	–Flutuação de pressão RMS para o Caso 1.	68
Figura 65	–Predominância tonal na solução do Caso 1.	68
Figura 66	–Resposta em pressão para o Caso 2.	69
Figura 67	–SPL para o Caso 2.	70
Figura 68	–Flutuação de pressão RMS para o Caso 2.	70
Figura 69	–Contaminação de parte do espectro de frequência pela banda larga.	71
Figura 70	–Resposta em pressão para o Caso 3.	72
Figura 71	–SPL para o Caso 3.	72
Figura 72	–Flutuação de pressão RMS para o Caso 3.	73
Figura 73	–Contaminação de todo o espectro de frequência pela banda larga.	73
Figura 74	–Acoplamento dos campos de pressão e velocidade para pequenas perturbações.	74

Lista de símbolos

Símbolos latinos

i	Vetor unitário na direção x
j	Vetor unitário na direção y
k	Vetor unitário na direção z
L	Comprimento característico
S	Vetor de superfície
s_x	Componente do vetor de superfície na direção x
s_y	Componente do vetor de superfície na direção y
s_z	Componente do vetor de superfície na direção z
x	Primeira coordenada espacial
y	Segunda coordenada espacial
z	Terceira coordenada espacial
x_i	i -ésima coordenada espacial
a	Velocidade do som no meio
U	Magnitude de velocidade
u	Vetor velocidade
u	Componente do vetor velocidade na direção x
v	Componente do vetor velocidade na direção y
w	Componente do vetor velocidade na direção z
u_i	Componente do vetor velocidade na i -ésima direção
U	Vetor de variáveis conservativas
F	Vetor de fluxo
E	Vetor fluxo na direção x
F	Vetor fluxo na direção y

G	Vetor fluxo na direção z
R	Vetor RHS
Q_S	Fonte volumétrica de uma quantidade genérica U
Q_V	Fonte superficial de uma quantidade genérica U
B	Número de pás do rotor
c_p	Calor específico a pressão constante
c_v	Calor específico a volume constante
C	Circunferência da Nacelle
d	Operador de dissipação artificial agindo sobre uma superfície de volume finito
D	Soma dos operadores de dissipação artificial que agem sobre uma superfície de volume finito
e	Energia interna por unidade de massa
e_k	Energia cinética por unidade de massa
e_T	Energia total por unidade de massa
f_i	Pseudo-força
\mathcal{F}	Função Fluxo
f	Frequência
p	Pressão
q_s	Fluxo volumétrico
n	Vetor normal unitário
t	Vetor tangente unitário
N_v	Número de volumes de controle em uma mecha computacional
R	Constante do gás
t_a	Tempo de aceleração entre a estagnação e a condição de escoamento livre
t	Coordenada temporal
A	Amplitude do deslocamento senoidal

T	Temperatura
V	Volume
K^n	Constante de ordem n do sensor de dissipação artificial
v	Volume específico
f	Frequência
w	Frequência angular
m	Ordem do modo circunferencial
n	Ordem do modo radial
c	Velocidade do som
$k_{dir,mn}$	Número de onda
c_s	Velocidade de propagação da onda de choque
u_2	Velocidade de propagação da superfície de contato
a_4	Velocidade de propagação do leque de expansão

Símbolos gregos

α	Ângulo de ataque
Δt	Passo temporal numérico
Δx	Espaço entre cada volume de controle ao longo do comprimento característico
$\epsilon^{(n)}$	Coefficientes de dissipação artificial de ordem n
ψ	Sensor de dissipação numérica
γ	Razão de calores específicos
Π	Tensor de fluxo
ρ	Densidade
τ	Compressibilidade
τ_T	Compressibilidade isotérmica
τ_S	Compressibilidade isentrópica

θ	Ângulo de cunha
β	Deflexão da onda de choque
μ	Ângulo de Mach
λ	Comprimento de onda
ω	Velocidade angular

Grupos adimensionais

Re	Número de Reynolds
M	Número de Mach
Pr	Número de Prandtl

Sobrescrito

n	Intervalo de tempo
b	Volume de fronteira imersa
*	Propriedade dimensional

Subescrito

T	Transformação isotérmica
S	Transformação isentrópica
ref	Propriedade do escoamento não perturbado

Siglas

BPR	<i>By-pass ratio</i>
UHB	<i>Ultrahigh by-pass ratio</i>
VAT	<i>Virtual Aeroacoustic Tunnel</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>

SPL	<i>Sound Pressure Level</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
CFL	<i>Courant-Friedrichs-Lewy</i>

*Então tomou Samuel uma pedra, e a pôs entre Mizpá e Sem, e chamou-lhe Ebenézer e disse:
Até aqui nos ajudou o Senhor.*

Samuel 7:12

1 Introdução

1.1 Motivação para o estudo proposto

Entender bem quais são as principais fontes geradoras de ruído em um turbofan permite focar em ações capazes de minimizar os índices de intensidade sonora a níveis aceitáveis. Distinguindo ruídos tonais e de banda larga, é necessário ainda compreender quais são os fenômenos físicos responsáveis pela geração de cada tipo de ruído, o que também aumenta o controle dos níveis de intensidade sonora.

Com o crescente enfoque em soluções mais econômicas na aviação, o aumento da relação de *by-pass ratio* (BPR), a razão entre a taxa de ar que passa pelo fan e a taxa de ar que passa pelo core, é uma ótima solução, mas esbarra em regulamentos que impõem níveis máximos de ruídos. A Figura 1 deve ser observada para o melhor entendimento acerca do fan e do core de um turbofan. Enquanto o fan é uma hélice multi-pá com função de comprimir o escoamento (Laurence, 2011), o core é o núcleo do turbofan e é composto pelos compressores de baixa e alta pressão, pela câmara de combustão e pelas turbinas de baixa e alta pressão. Destaca-se que o aumento da relação de *by-pass* reduz o ruído de jato e eleva o ruído de fan. Historicamente falando, os turbojatos ($BPR = 0$) deram lugar à primeira geração de turbofans ($1 \leq BPR \leq 2$). O cenário atual apresenta turbofans com alta relação de *by-pass* ($5 \leq BPR \leq 10$), enquanto que as perspectivas para o futuro são de turbofans com *ultrahigh by-pass ratio* (UHB), o que representa BPR entre 10 e 20 (Berton et al., 2014).

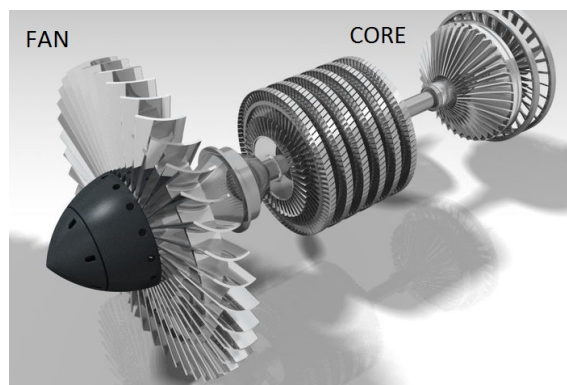


Figura 1 – Representação das principais partes de um turbofan. (CATIA, 2013) - Modificado.

Dessa forma, solucionar o problema de ruído em turbofans é a chave para liberar a utilização de tecnologias inovadoras e altamente eficientes no segmento aeronáutico. Espera-se que aeronaves operando em UHB estejam disponíveis em meados de 2020.

1.2 Computational Fluid Dynamics - CFD

A análise numérica computacional garante a possibilidade de se resolver de forma aproximada problemas matematicamente modelados. Dessa forma, a qualidade de um código computacional está intimamente relacionada com a precisão dos resultados fornecidos, com a velocidade de convergência aos resultados e também com o esforço computacional utilizado, ou seja, com o tempo de processamento e o hardware necessário para a resolução.

A utilização de métodos numéricos ganhou espaço na engenharia com a necessidade de se resolver problemas sem solução analítica, como é o caso de equações não lineares. Além disso, a experimentação de alguns problemas reais de engenharia, como é o caso de túneis supersônicos, tem custos muito elevados, o que favorece ainda mais a utilização de abordagens numéricas. A estrutura da dinâmica dos fluidos computacional está apresentada na Figura 2.

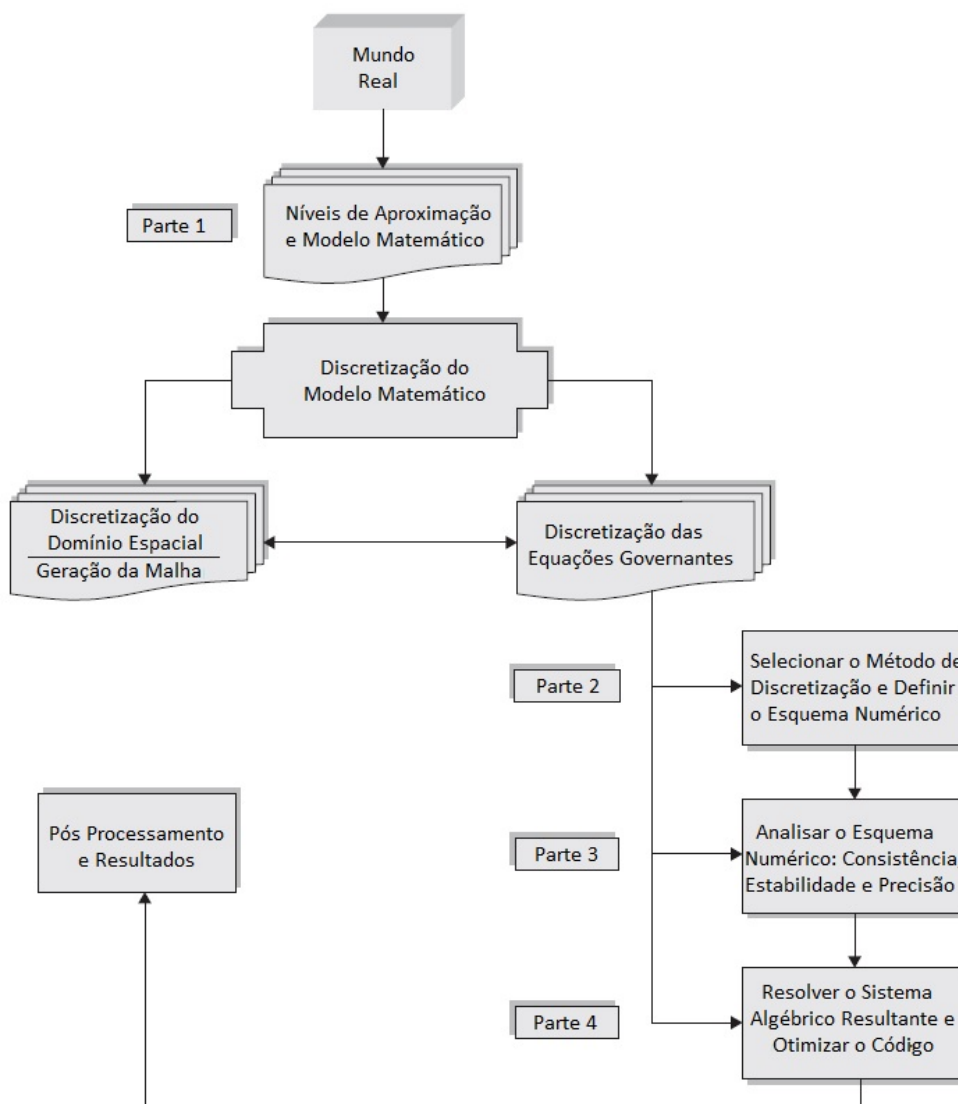


Figura 2 – Estrutura de uma simulação CFD (Hirsch, 2007) - Modificado.

Um conceito de extrema importância e que está intimamente ligado ao desenvolvimento da simulação computacional é a prototipagem virtual, ou seja, a produção sem a necessidade de protótipos físicos. Como já ressaltado anteriormente, a experimentação é, na maioria dos casos, uma prática que eleva muito o preço final do produto. Grandes empresas, como é o caso das fabricantes de avião, se esforçam cada vez mais para lançar um produto com a menor quantidade possível de testes experimentais. Para isso, a área de CFD tem por objetivo fornecer resultados que proporcionem confiança, rapidez e redução de custos ao longo da produção. A Figura 3 ilustra a cronologia da Boeing quanto ao impacto de simulações computacionais. Nota-se que o número de asas testadas experimentalmente caiu de 77 em 1980 para 11 em 2005. Também é possível perceber a importância estratégica de se desenvolver tecnologia e aplicá-la comercialmente, como fica evidenciado na relação dos programas de simulação computacional utilizados pela NASA e pela Boeing.

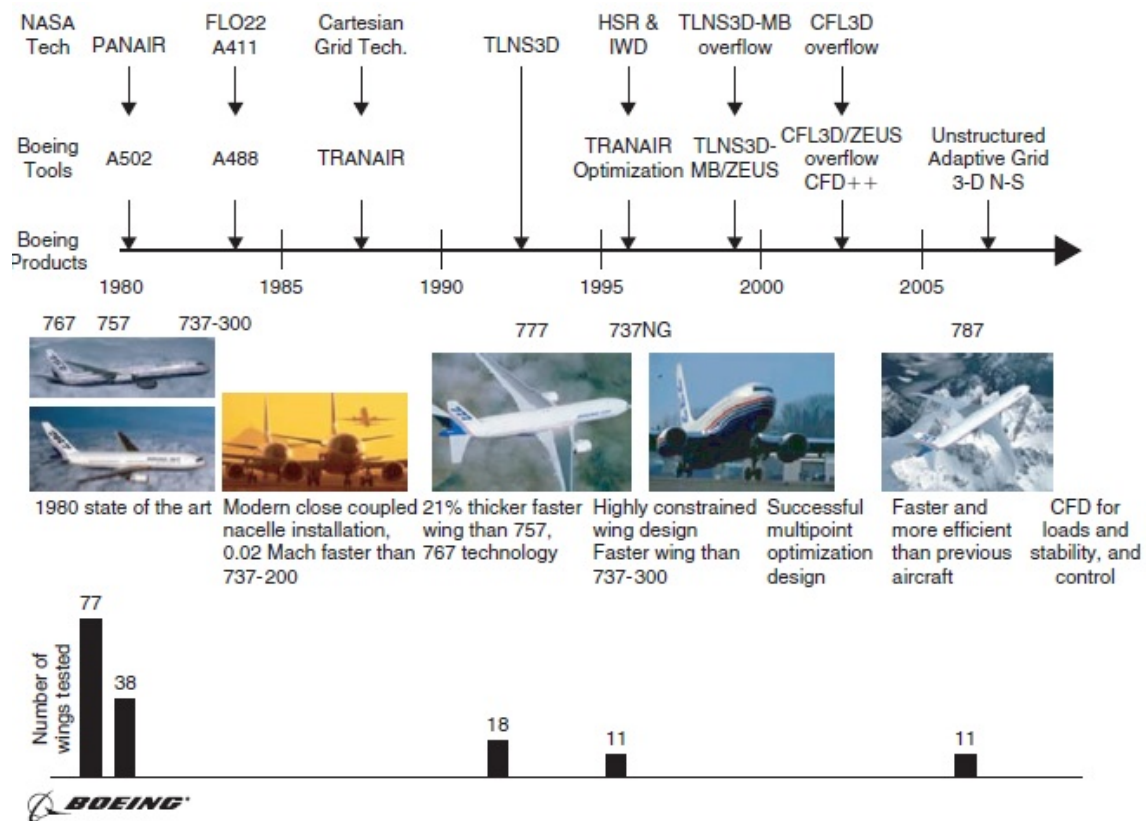


Figura 3 – Estrutura de uma simulação CFD (Hirsch, 2007).

É nesse contexto que está inserido o VAT (Virtual Aeroacoustic Tunnel), programa em Fortran com o objetivo maior de fornecer resultados consistentes no menor tempo possível acerca da simulação da interação entre o rotor e o estator com o escoamento em números de Mach distintos.

1.3 Contexto físico do modelo

A simplificação de que o fluido é incompressível é válida em diversas representações da realidade, mas não deve ser adotada como regra geral para todos problemas envolvendo mecânica dos fluidos. A compressibilidade tem papel fundamental no entendimento de ondas de choque, fenômeno corriqueiro em diversas aplicações de aeronáutica. Segundo Anderson (2003), escoamentos compressíveis são comumente definidos como um escoamento onde a densidade é um parâmetro variável e, com uma definição criteriosa, todos os escoamentos são compressíveis em medidas distintas.

Considerando que a massa específica de um fluido escoando pode variar, a compressibilidade pode ser definida como:

$$\tau = \frac{-1}{v} \left(\frac{dv}{dp} \right). \quad (1.1)$$

A Eq 1.1 representa o significado físico de que a pressão (p) exercida nas paredes de um elemento fluido de volume (v), quando acrescida de uma quantidade (dp), induz à compressão (dv) no elemento fluido (Anderson, 2003). O fato de que o volume está reduzindo justifica o sinal negativo da expressão matemática.

Embora a compressão seja usualmente associada apenas à alteração no volume do elemento fluido, o acréscimo de temperatura também é um fenômeno verificável. Apesar disso, caso a temperatura do elemento permaneça constante por algum mecanismo de transferência de calor, então a Eq 1.1 pode ser definida para um caso de compressibilidade isotérmica, como indicado a seguir:

$$\tau_T = \frac{-1}{v} \left(\frac{dv}{dp} \right)_T. \quad (1.2)$$

Vale ressaltar que todo processo de transferência de calor é irreversível, uma vez que só ocorre espontaneamente em uma direção.

Pode-se ainda observar que, caso a compressão seja considerada adiabática e reversível, a compressibilidade isentrópica deve ser definida. De forma objetiva, uma compressão pode ser adiabática caso não haja calor acrescido ou retirado do elemento fluido e isentrópica caso não haja mecanismos dissipativos de transporte como a viscosidade ou difusão. Na prática, uma compressão pode ser considerada isentrópica caso ocorra lentamente, o que garante a necessidade de se ter um processo reversível, e diante de isolamento térmico, o que garante que o processo seja adiabático (Miserda, 2014), isto é,

$$\tau_s = \frac{-1}{v} \left(\frac{dv}{dp} \right)_s. \quad (1.3)$$

É importante ressaltar que não é possível que uma compressão isotérmica seja isentrópica devido à irreversibilidade previamente citada.

Diante da definição precisa de compressibilidade, o próximo passo é entender a base teórica e quais são os principais regimes de escoamento e suas respectivas representações. Historicamente falando, esse conhecimento foi extremamente relevante no avanço bélico e, em especial, na Segunda Guerra Mundial (Miserda, 2014).

Os diferentes tipos de regimes de escoamento ocorrem em função do número de Mach associado ao problema, o que é influenciado pelo campo de pressão, temperatura e velocidade. Com as variações dos campos em função do espaço e do tempo, percebe-se que Mach é uma propriedade local conceitualmente e matematicamente definida como:

$$M = \frac{\text{Velocidade do escoamento}}{\text{Velocidade do som no meio}} = \frac{U}{\sqrt{\gamma RT}}. \quad (1.4)$$

Em que γ é a razão entre os calores específicos a pressão e a volume constante, R é a constante do gás no meio e T é a temperatura no ponto que se deseja analisar.

Um outro conceito muito importante acerca da base teórica envolvendo escoamentos compressíveis é o da onda de choque. Segundo Miserda (2014), a onda de choque é representada por um salto de velocidade, pressão e temperatura ao longo da espessura do caminho livre médio dos elementos fluidos e está intimamente ligada a perdas no sistema devido à irreversibilidade. De forma resumida, a onda de choque é uma descontinuidade que serve para fazer com que o escoamento perceba um objeto que esteja se movendo acima da velocidade do som, ou seja, para $M > 1$. O entendimento desse conceito de percepção do objeto é facilmente entendido ao se comparar as linhas de corrente para os casos sub e supersônico, o que pode ser visualizado nas Figuras 4 e 5.

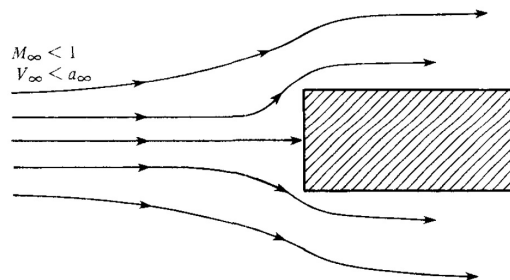


Figura 4 – Representação das linhas de corrente para o regime subsônico (Anderson, 2003).

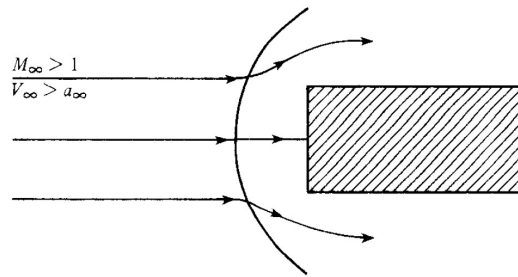


Figura 5 – Representação das linhas de corrente para o regime supersônico (Anderson, 2003).

Finalmente, definindo os principais regimes de escoamento em função do número de Mach (M), é importante entender os casos:

- escoamento subsônico: no caso subsônico, onde $M < 1$ em todos os pontos do escoamento, a velocidade do fluido é menor do que a velocidade do som no meio. Por conta disso, as linhas de corrente são suaves e as propriedades variam continuamente, isto é, sem variações bruscas, como pode ser observado na Figura 6. Vale a percepção de que as linhas de corrente que inicialmente estavam retas e paralelas vão se defletindo por conta do campo de pressão ligado à presença do aerofólio, é assim que o escoamento percebe a presença do corpo quando em regime subsônico. De acordo com Miserda (2014), o campo de pressão para $M < 1$ já é significativo, o que inviabiliza a consideração de que o escoamento é incompressível e eleva a força de sustentação;

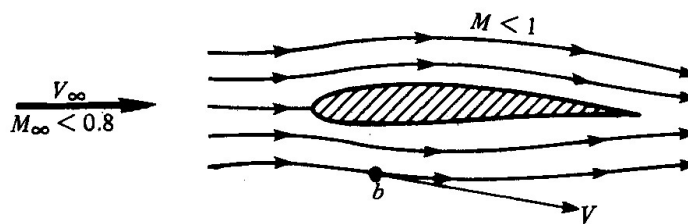


Figura 6 – Representação do escoamento subsônico (Anderson, 2003).

- escoamento transônico: para escoamento não perturbado com $M \simeq 1$, a expansão do escoamento sobre a superfície superior do aerofólio resulta em regiões localmente supersônicas, ilustrando um caso de regime transônico. Vale lembrar que a onda de choque está altamente associada a irreversibilidades e a bruscas variações de propriedades. Simplificadamente, o regime transônico passa de uma condição subsônica para supersônica, voltando ao regime subsônico por meio de uma onda de choque. Ainda vale destacar que a linha sônica ($M = 1$) está indicada de forma tracejada na Figura 7;

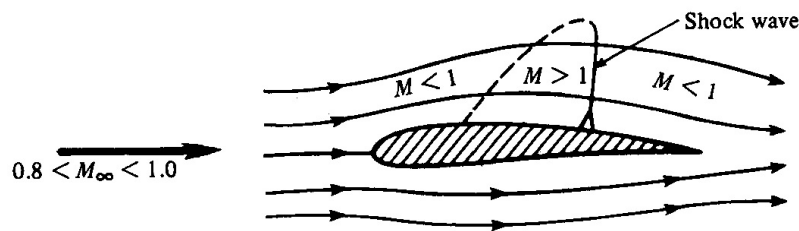


Figura 7 – Representação do escoamento transônico (Anderson, 2003).

- escoamento supersônico: é definido como um escoamento onde $M > 1$ em qualquer ponto do espaço, ou seja, a velocidade do escoamento é sempre maior do que a velocidade do som no meio. É possível perceber na Figura 8 que o escoamento no infinito não percebe a presença do aerofólio até que a onda de choque ocorra, diferente do que acontece no caso subsônico. Ao contrário do que é observado no regime transônico, o regime supersônico revela a presença de uma bolha subsônica logo após a onda de choque. Nota-se que tal bolha se localiza nas proximidades do choque normal, onde há maior variação das propriedades devido ao choque (Miserda, 2014), e não se perpetua ao longo de toda a parede do choque por conta da perda de intensidade do mesmo. É importante destacar a presença de um segundo choque na saída do aerofólio que, em conjunto com a primeira onda de choque, leva ao conhecido *boom sônico*;

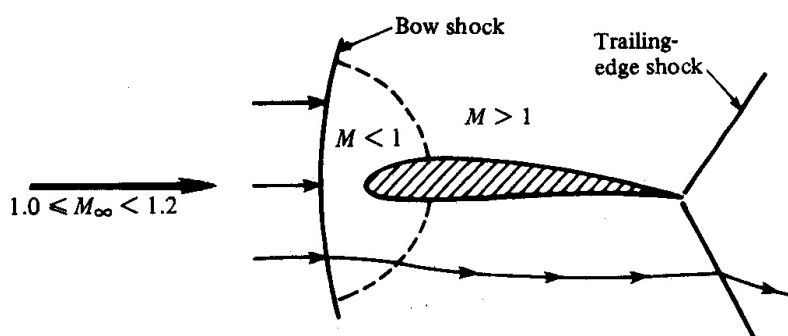


Figura 8 – Representação do escoamento supersônico (Anderson, 2003).

- escoamento hipersônico: o regime hipersônico está associado a velocidades do escoamento cerca de 5 vezes maiores do que a velocidade do som no ar e depende da forma do corpo e da densidade do escoamento. A onda de choque ocorre de forma tão intensa que dissocia os gases oxigênio e nitrogênio, o que garante a formação de plasma. Devido à presença de choque não destacado, a camada limite fica colada na superfície do corpo, o que gera significativo aumento de temperatura (Miserda, 2014).

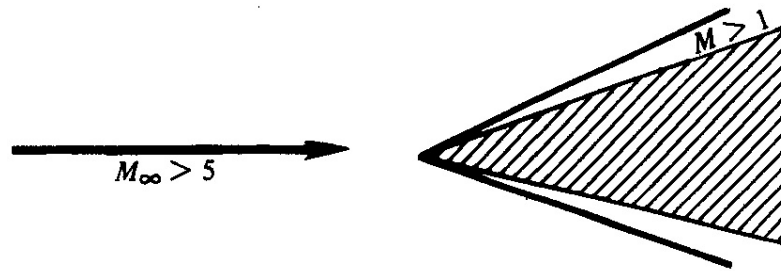


Figura 9 – Representação do escoamento hipersônico (Anderson, 2003).

Para finalizar o contexto físico do modelo, resta o entendimento da propagação de ondas acústicas e a descrição do diagrama $\beta - \theta - M$, ou seja, a relação entre o ângulo de deflexão da onda de choque, ângulo de cunha e número de Mach, respectivamente. A propagação do som é altamente influenciada pelo efeito Doppler, ou seja, pelo fato de que o som pode se propagar com velocidades relativas distintas ao longo de uma mesma direção (Miserda, 2014). Observando a Figura 10 quanto às influências da velocidade do Escoamento (V) e a velocidade do som no meio (a), é necessário entender que, no caso subsônico (a), as ondas acústicas estão se propagando com $(V + a)$ para frente e $(V - a)$ para trás em um intervalo de tempo t . Pode-se concluir então que, em regime sônico, não haverá propagação de ondas acústicas a montante do emissor, enquanto que a propagação a jusante será igual ao dobro da velocidade do som no meio. Já para o caso supersônico, em que μ representa o ângulo de Mach, há uma direção preferencial de propagação do som, representando a irreversibilidade do processo. Dentro do cone ilustrado em (b), nota-se uma região de ruído, ao passo que a zona de silêncio é identificada fora do cone. Uma situação análoga de velocidade relativa ocorre para a luz emitida por estrelas, já que o afastamento das mesmas em relação à Terra reduz sua velocidade relativa no sentido dos observadores, o que proporciona a percepção de radiação com maiores comprimentos de onda e menores frequências, como é o caso do vermelho (*red shift*). O inverso ocorre com a aproximação das estrelas, já que o aumento da velocidade relativa no sentido dos observadores na Terra garante a percepção de radiação com menores comprimentos de onda e maiores frequências, como é o caso do azul (*blue shift*) (Physics, 2014).

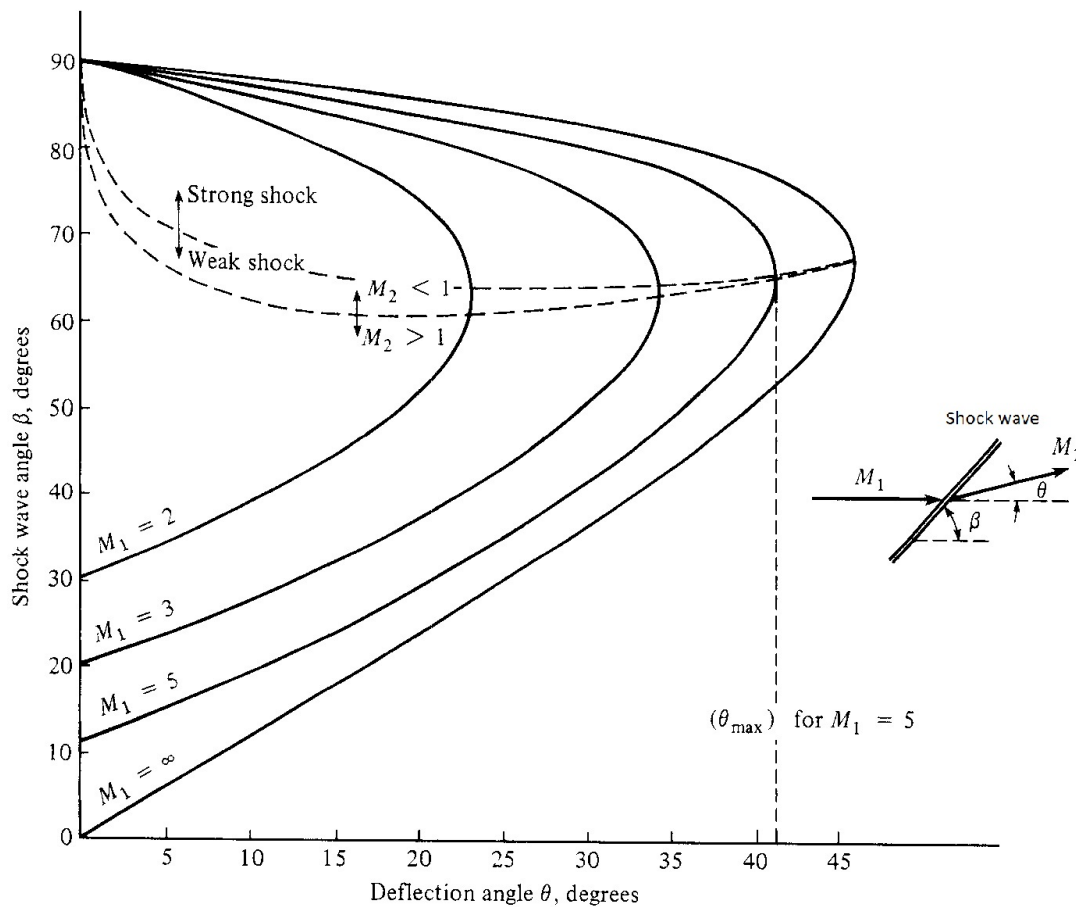


Figura 11 – Curvas $\beta - \theta - M$ (Anderson, 2003) - Modificado.

O diagrama apresentado na Figura 11 é importante para choques oblíquos, fenômeno importante na geração de ruído a partir da concepção clássica. Além disso, é possível perceber que a dissipação de uma onda de choque a partir do choque normal ($\beta = 0$) caminha ao longo de uma curva $\beta - \theta - M$ tendendo para o ângulo de Mach (μ), onde a propagação da onda de choque ocorrerá como onda de Mach. Ressalta-se que o aumento do número de Mach do escoamento não perturbado leva ao aparecimento de características do regime hipersônico. Nesse caso, a onda de choque inicialmente destacada tende a colar na camada limite, elevando significativamente a temperatura da cunha.

1.4 Revisão bibliográfica

Historicamente falando, o crescimento comercial do transporte aéreo sobrepujou questões relacionadas aos níveis aceitáveis de ruído até o final da década de 60 (Smith, 1989). O desafio de minimizar o ruído de aeronaves tem aumentado com o tempo, já que a relação de *by-pass*, razão entre a parcela de ar que vai para o fan e a parcela que passa pela câmara de combustão, é proporcional aos níveis de ruído do fan e tende a aumentar cada vez mais. Como o aumento da relação de *by-pass* garante maior fluxo de massa através do fan, a velocidade de jato é reduzida, o que aumenta ainda mais a predominância do ruído de fan sobre o ruído de jato. A razão indicada pela relação de *by-pass* pode ser visualizada na Figura 12.

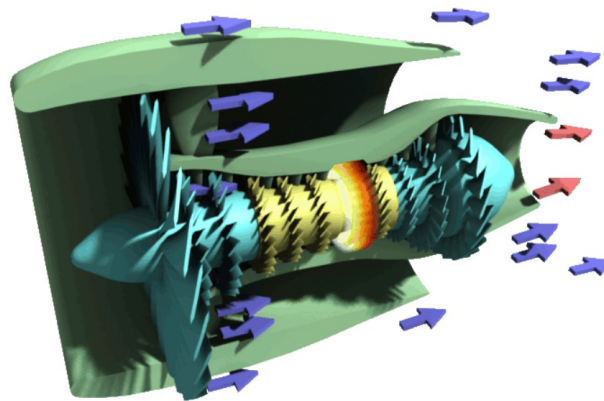


Figura 12 – Representação da relação de *by-pass* (Wheeler, 2014).

Explicando os tipos de ruído, o tonal é conhecido como ruído de frequência discreta e é caracterizado por tons espectrais puros, isto é, formas de onda que ocorrem em uma única frequência. De forma geral, o ruído tonal é produzido por equipamentos rotativos em uma faixa prevista de frequência. Deve-se destacar que o tom fundamental também se manifesta, apesar da intensidade reduzida, em múltiplos inteiros do harmônico, além de que os níveis de tolerância associados ao ruído tonal são em patamares mais baixos, conforme discutido por Control (2014). A Figura 13 ajuda no entendimento desse tipo de ruído, onde a frequência tonal e seus múltiplos estão em destaque.

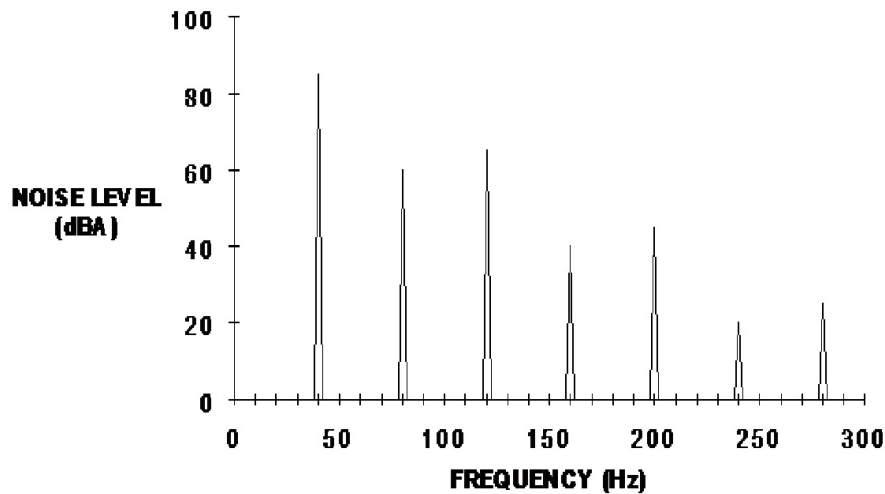


Figura 13 – Representação gráfica de ruído tonal (Denenberg, 2014).

De forma simplificada, a abordagem clássica utilizada para a explicação da geração de ruído tonal no conjunto rotor-estator passa pela interação entre as perturbações do escoamento no caminho de uma pá rotativa.

Já o ruído de banda larga apresenta um espectro de frequência onde não há tons discretos ou dominantes. Segundo a abordagem clássica, as flutuações do campo de pressão devido a um ruído banda larga refletem sua natureza não periódica, o que indica fases e amplitudes relativamente aleatórias. Apesar da ausência de frequências discretas, a energia acústica associada a esse tipo de ruído pode estar concentrada em uma ou mais áreas do espectro. Motores a jato são bons exemplos de fontes geradoras de ruído banda larga, segundo Noise (2014). A Figura 14 ilustra o ruído banda larga, onde não há destaque de uma frequência dominante.

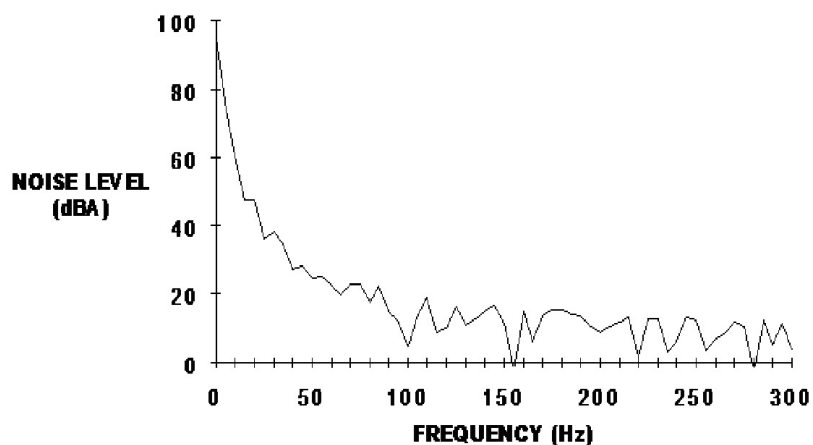


Figura 14 – Representação gráfica de ruído banda larga (Denenberg, 2014).

Como já identificado anteriormente, ruído de banda larga é o resultado de flutuações não periódicas do campo de pressão. No caso das pás do rotor e do estator, o momento angular do escoamento é o responsável por tal flutuação, conforme disposto na Figura 15.

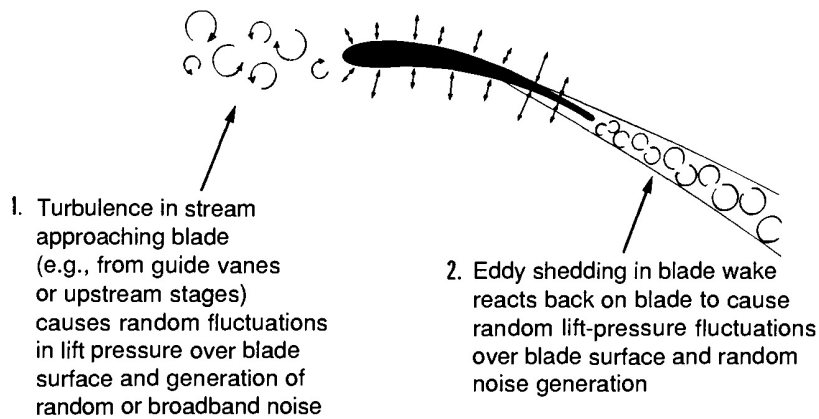


Figura 15 – Geração de ruído banda larga (Smith, 1989).

Para a avaliação do ruído, é comum se valer dos conceitos de SPL (*Sound Pressure Level*) e RMS (*Root Mean Square*), que significam a intensidade sonora, em decibéis, associada às condições simuladas e a variação média de pressão em relação à pressão de referência, respectivamente. A formulação matemática que relaciona esses dois termos é dada por:

$$SPL = 20 \log \left(\frac{P_{RMS}}{P_0} \right), \quad (1.6)$$

em que P_{RMS} representa a média quadrática da pressão sonora e P_0 , uma pressão sonora de referência comumente igual a $20 \mu Pa$.

Entendidos os tipos de ruído, a apresentação de soluções técnica e comercialmente viáveis em turbofans passa pela compreensão das origens de ruído no dispositivo, em conformidade com o apresentado por Miserda (2013):

- interação rotor-estador: os campos de pressão, velocidade e vorticidade gerados pelo rotor interagem com o estator, gerando ruído que possui um espectro com características tonais e de banda larga. O ruído tonal está associado à componente linear da interação nos harmônicos da frequência de passagem da pá do rotor pelo estator, e o ruído de banda larga, à componente não linear dessa interação;
- ruído da serra elétrica: na condição de potência máxima do turbofan, as pontas das pás do rotor do fan estão em regime supersônico, gerando um sistema de ondas de choque que se propaga a montante. As tolerâncias de manufatura das pás é responsável por uma variação das características dessas ondas de choque, gerando um ruído tonal que possui muitos picos próximos da frequência de passagem das pás;
- ruído autoinduzido do rotor: o mecanismo físico do ruído autoinduzido do rotor é equivalente ao ruído autoinduzido em aerofólios, já que ambos são produzidos pelo encontro das camadas limites do intradorso e do extradorso no bordo de fuga das pás do rotor de um fan ou de um aerofólio. Nas condições de operação do fan, esse ruído possui um espectro de banda larga;

- interação da ponta da pá do rotor com a camada limite gerada pela superfície interna da nacelle, o ruído resultante possui um espectro de banda larga;
- ingestão de turbulência pelo turbofan: as estruturas de vorticidade geradas pela turbulência atmosférica interagem com as pás do rotor resultando em um ruído de banda larga.

Um turbofan é constituído basicamente pelo fan, estator e core. O core é composto pelos compressores de baixa e alta pressão, pela câmara de combustão e pelas turbinas de baixa e alta pressão. Os estágios da turbina de alta pressão estão acoplados ao compressor de alta pressão, enquanto os estágios da turbina de baixa pressão estão acoplados ao compressor de baixa pressão e ao rotor do fan. A Figura 16 ilustra um desenho esquemático de um turbofan destacando basicamente os componentes do core.

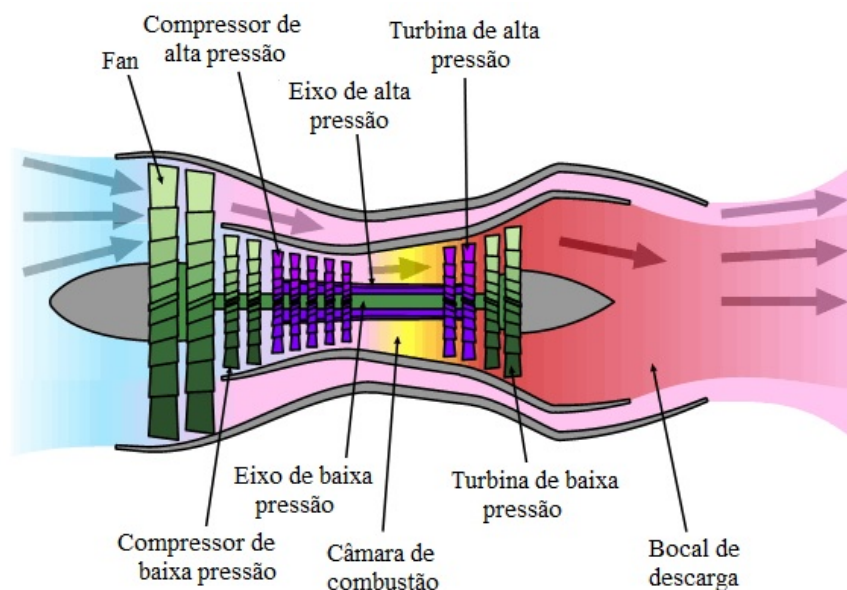


Figura 16 – Desenho esquemático de um turbofan (Traveria, 2012) - Modificado.

A Figura 17 ilustra um turbofan com relação de by-pass de 12:1 e evidencia que os tamanhos do rotor e do estator do fan são muito maiores do que os tamanhos do rotor e do estator de qualquer estágio de compressão ou expansão do core. Essa visível diferença entre os tamanhos característicos permite o entendimento de que o ruído do fan tende a ser predominante em relação ao ruído de jato com o aumento da relação de *by-pass*.

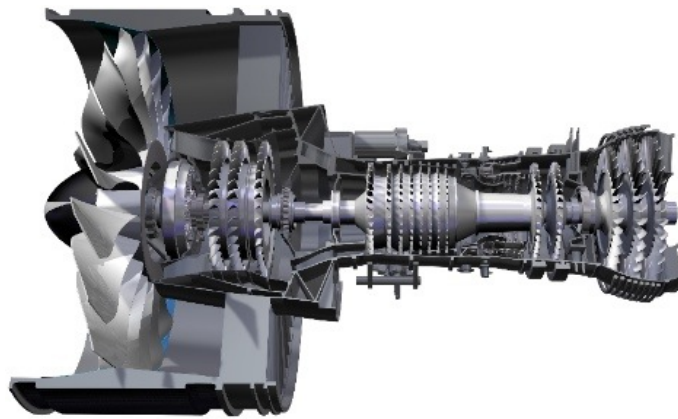


Figura 17 – Diagrama em corte do turbofan Pratt & Whitney PW1900G (Whitney, 2014).

A intensa interação aerodinâmica entre as pás do rotor e do estator também é responsável por parte do ruído gerado em um turbofan. Segundo Pimenta (2014), o ruído gerado pelo rotor é constituído principalmente de natureza tonal dada pela frequência de passagem das pás, seguido de forma secundária pelo ruído de banda larga. No caso dos estatores, a natureza de geração de ruído é parecida com o caso dos rotores, mas não possuem necessariamente uma frequência característica pelo fato de que os estatores não adicionam energia de forma cíclica no escoamento, como fazem os rotores. A assinatura acústica do turbofan também é influenciada pelas condições de operação do sistema, ingestão de turbulência atmosférica e diferentes regimes de operação.

Apesar da influência sonora da interação entre os campos de pressão gerados pelo escoamento e também das esteiras de vorticidade dos rotores irem de encontro às pás do estator de forma cíclica, o principal produto da interação direta entre o rotor e o estator é a produção dos modos tonais de Tyler-Sofrin (Tyler & Sofrin, 1962). Tais modos são correspondentes à frequência de passagem das pás do rotor e de seus harmônicos, o que produz uma família de modos que poderá se propagar a montante ou a jusante do escoamento. De forma resumida, o modelo de Tyler-Sofrin é responsável pela escolha dos modos tangenciais a serem considerados Maldonado & Miserda (2012).

Os modos acústicos podem ser entendidos como modos de vibração e representam as formas mais simples de distribuição de pressão, isso implica que qualquer distribuição complexa de pressão pode ser expressa como uma soma ponderada de modos acústicos. Para Rienstra (2006), os modos são matematicamente interessantes por formarem uma base completa através da qual qualquer solução pode ser representada. Fisicamente, os modos são soluções próprias e, por sua simples estrutura, o comportamento usualmente complicado do campo tonal é mais facilmente entendido. Sutliff (2005) indica que a ordem modal acústica circunferencial (m) representa o número de ciclos de pressão na direção circunferencial e a ordem modal acústica radial (n) representa o número de nós de pressão na direção radial. A Figura 18 traz a representação gráfica dessas ordens modais em que as regiões escuras representam pressões acústicas negativas, enquanto que as regiões claras representam pressões acústicas positivas. Dessa forma,

pode-se entender que o modo $(m,n) = (0,0)$ é definido como uma onda plana e representa um campo de pressão uniforme através do duto.

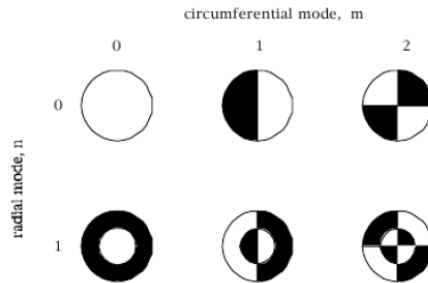


Figura 18 – Modos acústicos circunferenciais e radiais (Sutliff, 2005).

Ainda segundo Sutliff (2005), um típico fan de alta velocidade pode apresentar até 50 ordens de modos circunferenciais (m) e até 12 ordens de modos radiais (n), totalizando 600 modos.

Outro conceito muito importante é o número de comprimentos de onda por unidade de distância, ou seja, o número de onda ($k_{dir,mn}$), representado por:

$$k_{dir,mn} = \frac{1}{\lambda} = \frac{w}{a}, \tag{1.7}$$

em que λ é o comprimento de onda, a é a velocidade do som e w é a frequência angular, matematicamente expressa por:

$$w = 2\pi f \tag{1.8}$$

Quando o número de onda na direção axial, $k_{x,mn}$, é real, a onda sonora se propaga e os modos acústicos são denominados *cut-on*. Por outro lado, quando o número de onda acústico na direção axial é imaginário, a amplitude de onda sonora decai exponencialmente e a onda não se propaga. Para esses casos de ausência de propagação, os modos acústicos são denominados *cut-off* (Maldonado & Miserda, 2012). De forma resumida, os modos *cut-off* são aqueles que não apresentam velocidade tangencial supersônica, ou seja, não se propagam a montante.

Deve-se considerar a grande influência dos modos *cut-off* na geração de ruído do tipo banda larga em turbofans aeronáuticos. Para o melhor entendimento dessa forma de geração de ruído, as ilustrações e explicações a seguir devem ser observadas. As informações adiante são embasadas no trabalho de Pimenta & Miserda (2014).

Para a avaliação do campo de pressão em uma simulação numérica, a correta geometria do corpo é fundamental para o caso bidimensional e tridimensional. A Figura 19 indica o perfil das pás do rotor e do estator com geometria definida pela NASA Glenn Research Center.

Além da geometria, deve-se definir o posicionamento de sondas para que flutuações de pressão sejam mensuradas. Primeiramente, deve-se notar que, na Figura 20, as 16 pás em vermelho representam as pás do rotor, enquanto que as 13 pás do estator estão representadas em azul. As pás estão dispostas em cascata, o que permite a visualização de mais detalhes em

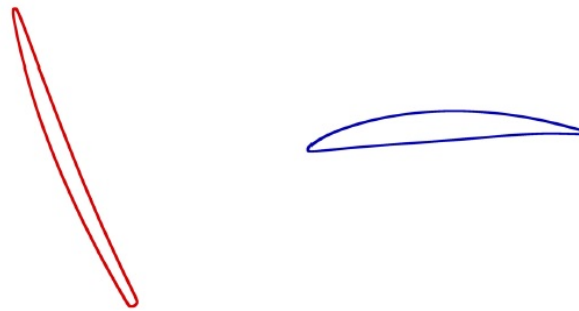


Figura 19 – Geometria das pás do rotor e do estator (Pimenta & Miserda, 2014).

simulações. As 3 sondas estáticas próximas às pás do rotor estão localizadas a 0,12 m, 0,24 m e 0,48 m.

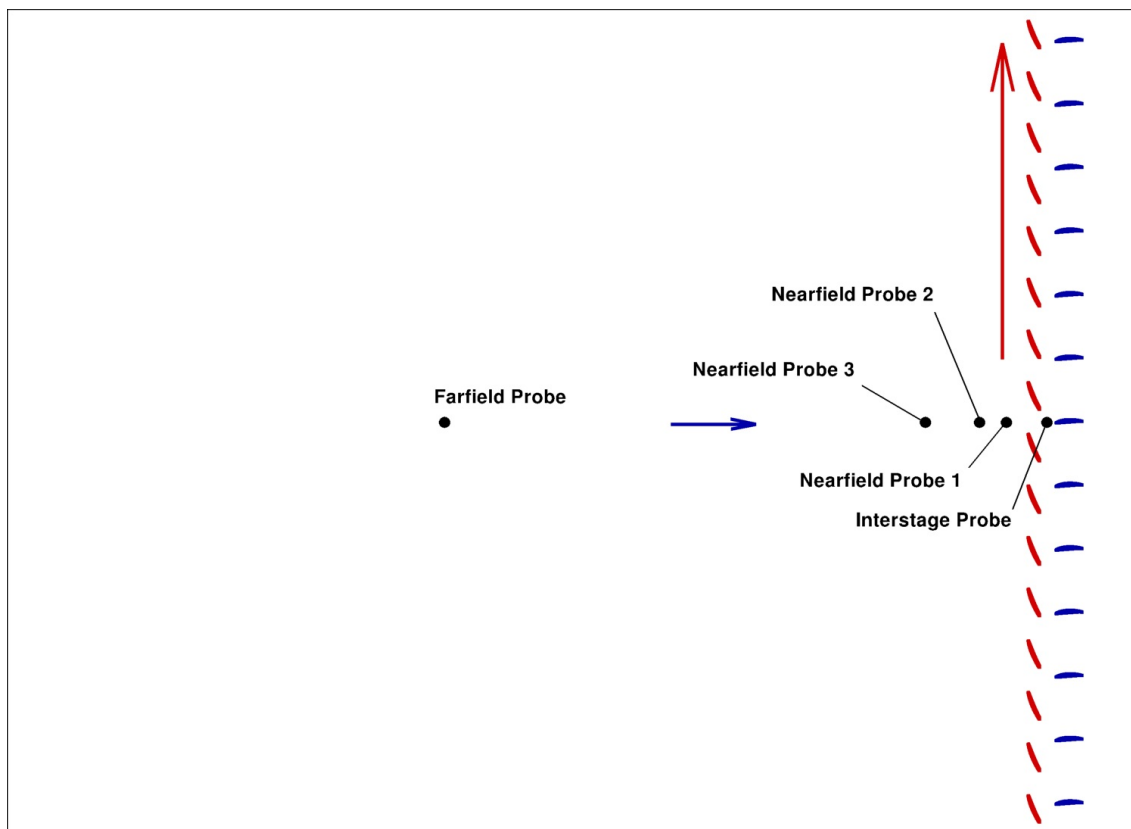


Figura 20 – Domínio computacional com malha cartesiana regular (Pimenta & Miserda, 2014).

Por meio da simulação com o VAT, a Figura 21 ilustra o campo acústico gerado por cascatas transônicas apenas do rotor com 16 pás. Nessa ilustração, é possível perceber que não há estruturas modais acústicas sendo propagadas a montante. Com isso, fica claro que as ondas de choque são exemplos de *cut-off*, o que mostra compatibilidade entre resultados analíticos e numéricos.

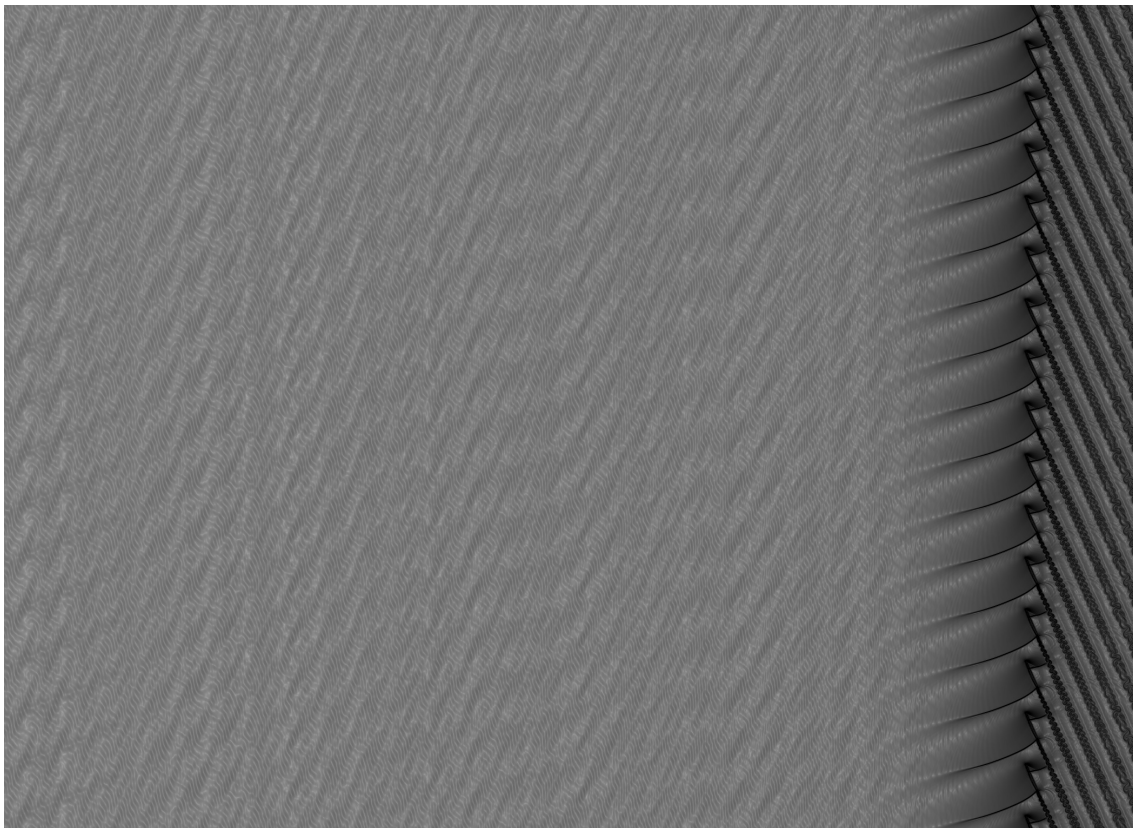


Figura 21 – Campo aeroacústico instantâneo baseado em gradiente de temperatura gerado por cascata transônica do rotor (Pimenta & Miserda, 2014).

Já com a Figura 22, é possível quantificar o decaimento dos modos *cut-off* das ondas de choque geradas em cascata transônica. É válido informar que as sondas estáticas estão localizadas a 0,12 m, 0,24 m e 0,48 m.

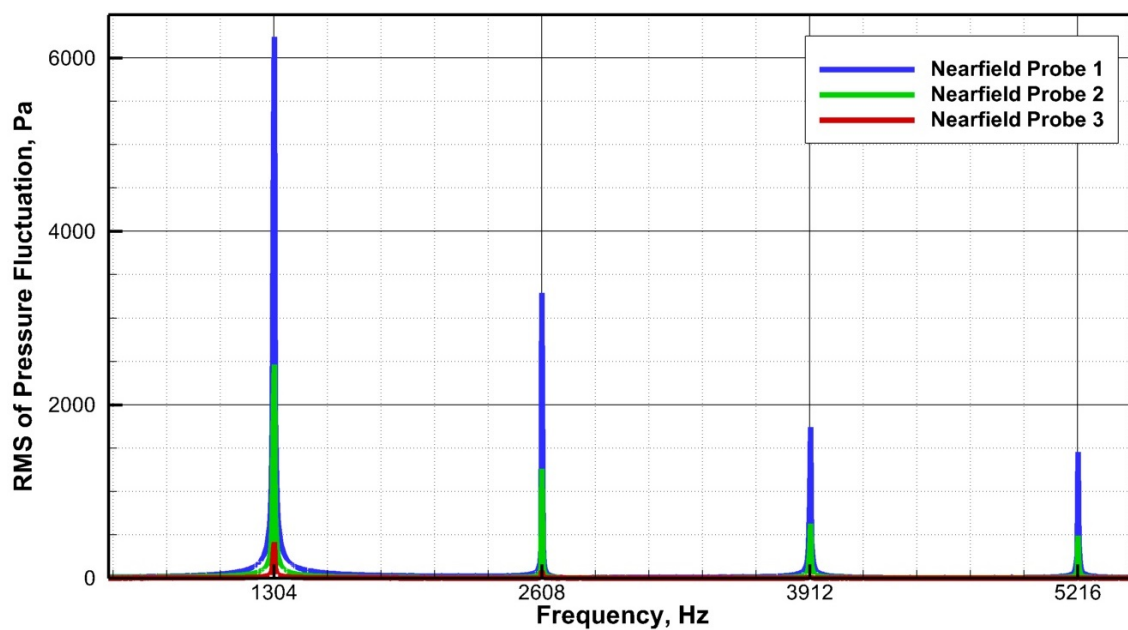


Figura 22 – Flutuação de pressão contabilizada por sondas estáticas (Pimenta & Miserda, 2014)

Em contraponto com os modos *cut-off*, há os modos *cut-on*, os quais apresentam velocidade tangencial supersônica e se propagam a montante. Apenas para ilustrar, a Figura 23 mostra em cascata estruturas modais sendo propagadas a montante devido à interação rotor-estator em regime transônico. Importante ressaltar que m está associado à família de modos, θ_n , ao ângulo medido dos modos e θ_t , ao ângulo teórico dos modos. Os sinais de m indicam propagação em sentido descendente (negativo) e ascendente (positivo).

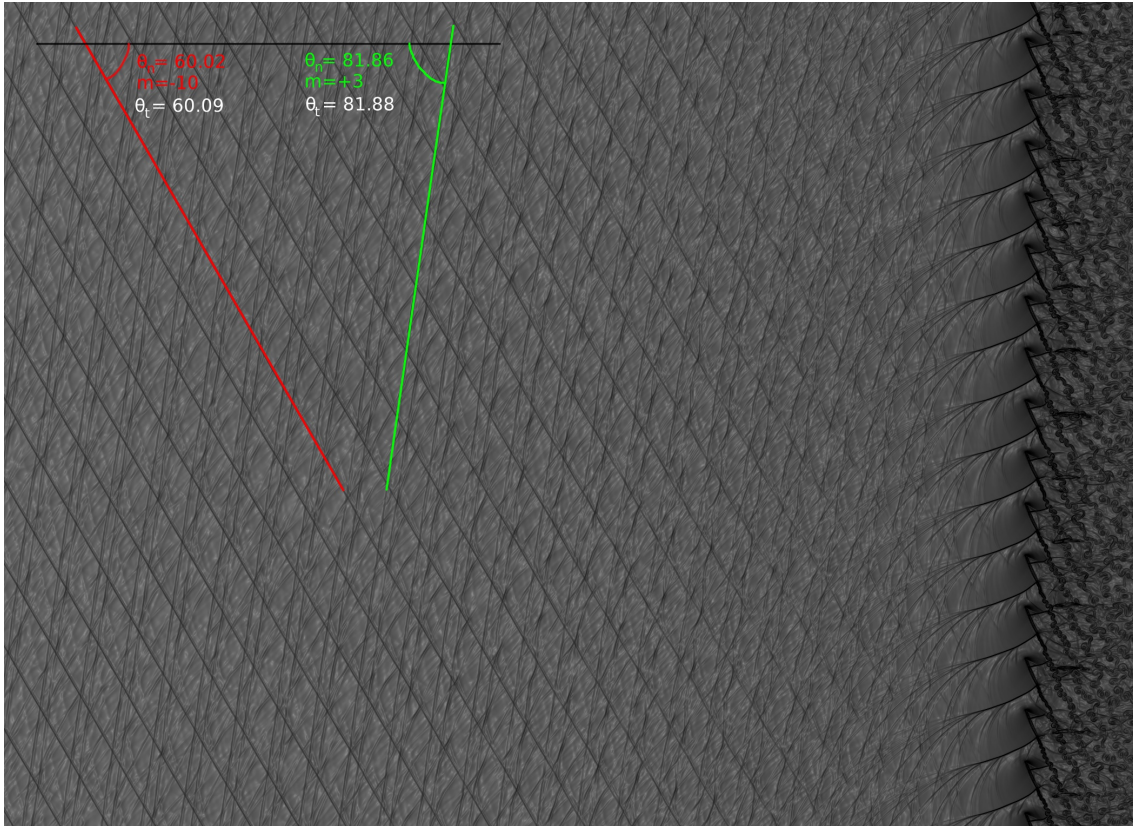


Figura 23 – Campo aeroacústico baseado em gradiente de temperatura gerado pela interação entre rotor e estator em regime transônico para análise em cascata (Pimenta & Miserda, 2014).

1.5 Objetivos

Neste trabalho será simulado numericamente o ruído tonal e de banda larga gerado por um pistão unidimensional por meio do VAT (Virtual Aeroacoustic Tunnel), software desenvolvido pelo Laboratório de Aeroacústica Computacional do Grupo de Pesquisa VORTEX da Universidade de Brasília. O objetivo é avaliar a resposta de um sistema não linear em função da variação da amplitude e frequência de vibração de um pistão. Diante disso, verificar a dispersão de frequência ao longo de todo o espectro.

O VAT foi desenvolvido em Fortran e, por meio de uma malha de volumes finitos discretos e da utilização do método de fronteira imersa, é possível realizar o cômputo direto do ruído.

1.6 Organização do trabalho

Este projeto é dividido em 5 capítulos, sendo que o primeiro é a introdução e tem por objetivo a contextualização do problema, o que envolve a definição de conceitos correlatos importantes. No segundo capítulo, as equações governantes do fenômeno físico são apresentadas em conjunto com as relações complementares necessárias para a resolução da problemática. No terceiro capítulo, a metodologia numérica utilizada no VAT é descrita, o que envolve cálculo de parâmetros importantes e a definição de fronteira imersa. No quarto capítulo, estão as validações e resultados, além de discussões acerca do trabalho. Já no quinto capítulo, há a conclusão do projeto e também a apresentação de perspectivas de trabalhos futuros.

2 Formulação matemática

A predição de ruído por meio de métodos numéricos deve estar pautada em equações governantes coerentes, condições de contorno bem ajustadas e também em equações de estado aplicáveis a cada caso particular.

Para Batchelor (1967), muitos fluidos apresentam a viscosidade significativamente dependente da temperatura e, para diferenças consideráveis de temperatura, é necessário ainda relacionar a viscosidade como função da variável espacial. Entretanto, o que acontece frequentemente é que as diferenças de temperatura são pequenas o suficiente para considerar o campo de viscosidade uniforme ao longo do escoamento. A consideração de viscosidade nula é o que leva as Equações de Navier-Stokes à simplificação proposta por Euler. Com isso, as Equações de Balanço não serão influenciadas pela densidade de fluxo de calor e também pelo tensor de tensões viscosas.

As equações de Euler podem ser escritas na forma conservativa - abordagem em que o elemento fluido está fixado no espaço - ou não-conservativa - abordagem em que o elemento fluido move-se junto com o escoamento, conforme indicado por Anderson (1995) . Além disso, a forma conservativa apresenta mesma estrutura matemática independente do fenômeno físico, o que facilita bastante a representação de soluções numéricas. Por conta disso, a abordagem conservativa será a metodologia desenvolvida adiante. Nota-se ainda que o referencial é inercial devido a essa escolha de abordagem.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e_T) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho e_T u_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) + f_i u_i. \quad (2.3)$$

Todas as variáveis estão na forma adimensional: x_i é a coordenada espacial na direção i , t é a coordenada temporal, ρ é a massa específica, u_i é a componente da velocidade na direção i , p é a pressão termodinâmica, T é a temperatura e e_T é a energia total por unidade de massa (Aris, 1962). Nesse contexto, a adimensionalização das variáveis é definida como:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L^*}, & y &= \frac{y^*}{L^*}, & z &= \frac{z^*}{L^*}, & t &= \frac{t^*}{L^*/U_{ref}^*}, & u &= \frac{u^*}{U_{ref}^*}, & v &= \frac{v^*}{U_{ref}^*}, & w &= \frac{w^*}{U_{ref}^*}, \\ p &= \frac{p^*}{\rho_{ref}^* (U_{ref}^*)^2}, & \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_{ref}^*}, & T &= \frac{T^*}{T_{ref}^*}, & e &= \frac{e^*}{(U_{ref}^*)^2}, & f &= \frac{f^*}{\rho_{ref}^* (U_{ref}^*)^2 / L^*}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que U_{ref}^* representa a velocidade do escoamento não perturbado, enquanto L^* é o comprimento característico do problema. De forma generalizada, o sobrescrito $*$ indica as variáveis dimensionais da formulação, enquanto as propriedades de referência dizem respeito ao escoamento não perturbado.

A energia total é obtida pela soma da energia interna e da energia cinética:

$$e_T = e + e_k = c_v T + \frac{u_i u_i}{2} \quad (2.5)$$

Para um gás caloricamente e termicamente perfeito, as equações de estado podem ser escritas como:

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (2.6)$$

e

$$T = \frac{\gamma M_{ref}^2 p}{\rho}, \quad (2.7)$$

sendo que γ representa a razão entre os calores específicos a pressão e a volume constante (Oliveira, 2005).

Vale indicar que, em um gás caloricamente perfeito, os calores específicos a volume constante e a pressão constante, c_v e c_p , são constantes. Já para um gás termicamente perfeito, a energia interna e a entalpia dependem unicamente da temperatura (Silva, 2009).

Com o objetivo de evitar oscilações numéricas devido à discretização usada pela metodologia de fronteira imersa, uma pseudoforça (f_i) e um pseudotrabalho ($f_i u_i$) foram introduzidos no lado direito das equações de quantidade de movimento e energia para continuamente acelerar todo o campo do escoamento da condição de estagnação até a condição de operação. Essa operação ocorre em um tempo de aceleração, t_a . O valor da pseudoforça e do pseudotrabalho é nulo após esse período inicial de aceleração, ou seja, $f_i = f_i u_i = 0$.

3 Metodologia numérica

Como já dito anteriormente, a abordagem conservativa considera que o elemento fluido está fixado no espaço enquanto o escoamento se movimenta. Vale destacar, ainda que de forma simplificada, a construção desse conhecimento essencial na área de CFD. Para isso, a Figura 24 traz a representação de uma quantidade escalar genérica (\mathbf{U}) por unidade de volume em um volume de controle (V) fixo no espaço com superfície de controle (S). Segundo Hirsch (2007), a forma conservativa de uma quantidade \mathbf{U} segue a lógica de que a variação total dessa quantidade dentro de um domínio é igual ao balanço entre as quantidades entrando e saindo do domínio, além de se considerar as contribuições de eventuais fontes geradoras que podem ser superficiais (Q_S) ou volumétricas (Q_V). Os termos de fluxo associados à quantidade \mathbf{U} são representados pelo vetor \vec{F} e descrevem como a propriedade em questão é transportada pelo escoamento.

É válido notar que, apesar da forma conservativa ser válida para a representação das equações governantes que envolvem a massa, quantidade de movimento e energia, há quantidades que estão fora dessa abordagem, como é o caso da pressão, temperatura e entropia.

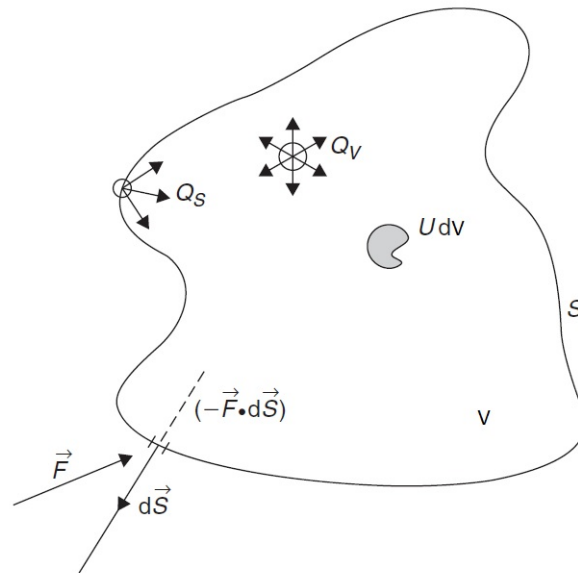


Figura 24 – Representação geral da forma conservativa (Hirsch, 2007) - Modificado.

O primeiro passo para chegar à forma conservativa em sua forma generalizada é considerar a quantidade total da propriedade \mathbf{U} dentro de determinado domínio:

$$\int_V \mathbf{U} dV. \tag{3.1}$$

Ainda quanto a esse termo, é necessário considerar sua variação no tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV. \quad (3.2)$$

Como indicado na Figura 24, a quantidade de \mathbf{U} que cruza a superfície de controle dS por unidade de tempo é definida como o produto escalar do vetor representativo de fluxo com o elemento de superfície. Já levando em consideração a influência do fluxo sobre toda a superfície de controle, nota-se que:

$$- \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (3.3)$$

O sinal negativo pode ser entendido ao saber que a contribuição do fluxo é positiva quando há entrada no domínio.

Por fim, as influências das fontes superficial e volumétrica são representadas por:

$$\int_V Q_V dV + \oint_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S}. \quad (3.4)$$

O saldo do balanço realizado fornece a generalidade da forma conservativa de uma quantidade \mathbf{U} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV = - \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_V Q_V dV + \oint_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S}, \quad (3.5)$$

afirmando que o domínio não varia em função do tempo, tal relação é usualmente descrita por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dV + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V Q_V dV + \oint_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S}, \quad (3.6)$$

é válido ressaltar que a Equação 3.6 é utilizada na metodologia de volumes finitos.

Sabendo que, a partir do Teorema de Gauss, a integral de superfície do fluxo é igual à integral de volume do divergente do fluxo, a Equação 3.6 pode ser reescrita como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_V Q_V dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S dV. \quad (3.7)$$

Já que a Equação 3.7 é determinada para um volume de controle qualquer, a mesma deve ser válida para qualquer ponto do escoamento dentro do domínio previamente estabelecido. Tal consideração possibilita a forma conservativa diferencial da equação:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S, \quad (3.8)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{Q}_S) = Q_V. \quad (3.9)$$

Assumindo que não há nenhum tipo de geração da quantidade \mathbf{U} , pode-se concluir o desenvolvimento apresentando a Equação 3.9 como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0. \quad (3.10)$$

Vale destacar que, na metodologia de diferenças finitas, cada uma das derivadas temporais e espaciais devem ser calculadas para que a simulação numérica seja efetuada. Na Equação 3.10, o termo de fluxo é chamado de advectivo, já que garante a variação das propriedades devido ao movimento do escoamento (Bobenrieth, 2014).

Aplicando a teoria desenvolvida para resolver numericamente a formulação de volume finito, as equações governantes devem escritas na forma conservativa conforme indicado a seguir:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \mathbf{R}. \quad (3.11)$$

O tensor Π é definido como:

$$\Pi = \mathbf{E} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{F} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{G} \otimes \mathbf{k}, \quad (3.12)$$

Com isso, a Eq (3.11) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \Pi = \mathbf{R}. \quad (3.13)$$

Para as equações de Euler, as variáveis conservativas apresentadas no vetor U e os vetores de fluxo E , F , G são dados por:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (\rho e_T + p) u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v v + p \\ \rho v w \\ (\rho e_T + p) v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w w + p \\ (\rho e_T + p) w \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

em que o vetor RHS, representando a pseudo-força e o pseudo-trabalho, é dado por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ f_x u + f_y v + f_z w \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Integrar a Eq. 3.13 ao longo do volume de controle V e aplicar o teorema da divergência ao primeiro termo do lado direito da equação resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV = - \int_V (\nabla \cdot \Pi) dV + \int_V \mathbf{R} dV = - \int_S (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V \mathbf{R} dV. \quad (3.16)$$

A média volumétrica dos vetores $\bar{\mathbf{U}}$ e $\bar{\mathbf{R}}$ é definida como:

$$\bar{\mathbf{U}} \equiv \frac{1}{V} \int_V \mathbf{U} dV, \quad \bar{\mathbf{R}} \equiv \frac{1}{V} \int_V \mathbf{R} dV, \quad (3.17)$$

e a Eq. (3.16) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \int_S (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS + \bar{\mathbf{R}}. \quad (3.18)$$

Avaliando as equações anteriores para as fronteiras de um volume de controle infinitesimal hexaédrico, o resultado obtido é:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} \right)_{i,j,k} = & -\frac{1}{V_{i,j,k}} \left[\int_{S_{i+1/2}} (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_{i-1/2}} (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS \right. \\ & + \int_{S_{j+1/2}} (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_{j-1/2}} (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS \\ & \left. + \int_{S_{k+1/2}} (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_{k-1/2}} (\Pi \cdot \mathbf{n}) dS \right] + \bar{\mathbf{R}}_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que $S_{i+1/2}$, $S_{i-1/2}$, $S_{j+1/2}$, $S_{j-1/2}$, $S_{k+1/2}$ e $S_{k-1/2}$ são as superfícies que definem o volume de controle hexaédrico, conforme pode ser visualizado na Figura 25.

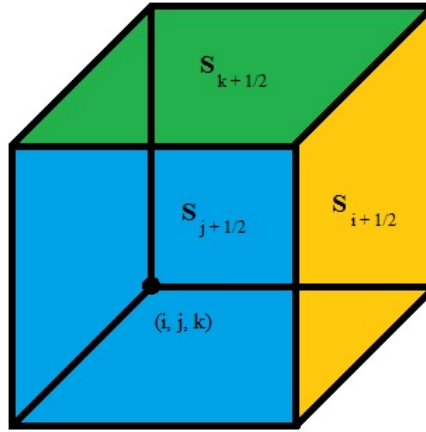


Figura 25 – Volume de controle hexaédrico (Pazetto, 2011) - Modificado.

É válido observar ainda que $S_{i+1/2}$ é a superfície comum entre o volume (i, j, k) e o volume $(i + 1, j, k)$, o que pode ser observado na Figura 26, ilustração de autoria própria.

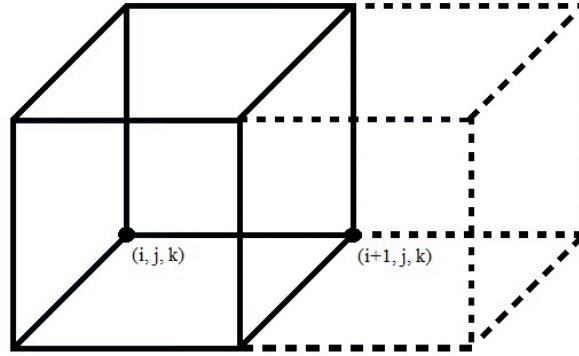


Figura 26 – Volumes de controle pareados.

Considerando o valor do tensor Π constante sobre cada uma das superfícies de controle, é possível escrever uma equação para um volume finito com uma aproximação discreta do tempo para a equação anterior. Nesse momento, é possível entender que a solução analítica é substituída pela solução numérica com um erro associado ao fato de que Π não é rigorosamente constante ao longo de cada superfície de controle. Com um intervalo de tempo Δt , a equação para o volume finito é:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}}{\Delta t} = & -\frac{1}{V_{i,j,k}} \left[(\Pi \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{i-1/2} \right. \\ & + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{j+1/2} + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{j-1/2} \\ & \left. + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{k+1/2} + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{k-1/2} \right] + \bar{\mathbf{R}}_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

Define-se $\mathcal{F}_{i,j,k}$ como a função de fluxo do tensor Π sobre as superfícies do volume finito $V_{i,j,k}$ ao longo de um intervalo Δt de tempo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i,j,k} = & \frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} \left[(\Pi \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{i-1/2} + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{j+1/2} \right. \\ & \left. + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{j-1/2} + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{k+1/2} + (\Pi \cdot \mathbf{S})_{k-1/2} \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

e $\mathcal{R}_{i,j,k}$ como a função do efeito das forças de campo agindo sobre o mesmo volume finito ao longo do mesmo intervalo de tempo:

$$\mathcal{R}_{i,j,k} = \Delta t \cdot \bar{\mathbf{R}}_{i,j,k}. \quad (3.22)$$

Com isso, uma aproximação com tempo discreto e de volume finito da Eq. 3.20 é dado como:

$$\Delta \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} = -\mathcal{F}_{i,j,k} + \mathcal{D}_{i,j,k} + \mathcal{R}_{i,j,k}. \quad (3.23)$$

Nesse momento, é importante discutir um pouco mais acerca do Método dos Volumes Finitos. Como ponto de partida, a forma integral das equações governantes foi utilizada. Em seguida, o domínio de solução foi subdividido em um número finito de volumes de controle adjacentes entre si. A consideração de que as propriedades são constantes em cada uma das faces dos volumes de controle foi utilizada e, com isso, as propriedades no interior dos volumes de controle são calculadas. A utilização de Volumes Finitos pode acomodar qualquer tipo de malha, o que torna o método aplicável para geometrias complexas. De forma simplificada, o Método dos Volumes Finitos representa a influência que um ponto P recebe dos vizinhos (Mazza, 2014). A Figura 27 serve para ilustrar tal influência em uma análise tridimensional.

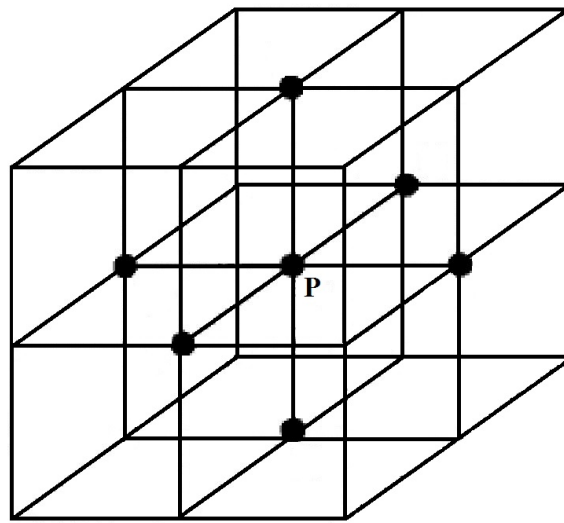


Figura 27 – Análise de Volume Finito (Arash & Jazayeri, 2002) - Modificado.

Na equação 3.23, o termo da dissipação artificial $D_{i,j,k}$ é adicionado ao lado direito com o objetivo de controlar o erro de discretização gerado pelo cálculo do fluxo da função $\mathcal{F}_{i,j,k}$. Para resolver essa equação com elevada resolução temporal, utiliza-se o método Runge-Kutta com precisão de 3ª ordem proposto por Shu e relatado por Yee (1992). Vale ressaltar que métodos Runge-Kutta são capazes de estimar a solução do valor $n + 1$ apenas com o valor de n , representando um dos métodos de ponto único (Hoffman, 1992). Quanto ao fato de que o Runge-Kutta utilizado é com precisão de 3ª ordem, isso implica que o erro de truncamento local desse método será de 4ª ordem, ou seja, o polinômio de Taylor utilizado para eliminar o cálculo das derivadas é de ordem 3. Sabendo que o passo temporal é fixo, haverá 3 pontos igualmente espaçados, sem contar com os pontos da extremidade, ao longo do intervalo que vai de n até $n + 1$. Cada k utilizado nesse método Runge-Kutta representa a inclinação da reta tangente em cada um desses pontos igualmente espaçados no intervalo desejado, ou seja, cada k é a aproximação de uma derivada. (Valle, 2012). Dessa forma, o problema em questão pode ser resolvido com os 3 passos indicados adiante:

$$\bar{U}_{i,j,k}^1 = \bar{U}_{i,j,k}^n - \left(\mathcal{F}_{i,j,k}^n - \mathcal{D}_{i,j,k}^n - \mathcal{R}_{i,j,k}^n \right), \quad (3.24)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^2 = \frac{3}{4} \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^n + \frac{1}{4} \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^1 - \frac{1}{4} \left(\mathcal{F}_{i,j,k}^1 - \mathcal{D}_{i,j,k}^1 - \mathcal{R}_{i,j,k}^1 \right), \quad (3.25)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{3} \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^n + \frac{2}{3} \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^2 - \frac{2}{3} \left(\mathcal{F}_{i,j,k}^2 - \mathcal{D}_{i,j,k}^2 - \mathcal{R}_{i,j,k}^2 \right). \quad (3.26)$$

Como já dito anteriormente, o erro de truncamento está associado à ordem do método Runge-Kutta utilizado. Um questionamento comum é o de se utilizar uma ordem muito elevada com a justificativa de se obter um resultado mais preciso. Nota-se que essa solução não é viável por conta do acréscimo significativo no tempo de processamento computacional, ou seja, deve-se buscar o equilíbrio entre a precisão e a capacidade computacional.

Para calcular $\mathcal{F}_{i,j,k}$ em cada um dos passos citados, o fluxo do tensor Π em cada uma das superfícies de controle deve ser calculado. Para a superfície de controle $S_{i+1/2}$, o fluxo é dado por:

$$(\Pi \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} = \begin{bmatrix} (\Pi \cdot \mathbf{S})_1 \\ (\Pi \cdot \mathbf{S})_2 \\ (\Pi \cdot \mathbf{S})_3 \\ (\Pi \cdot \mathbf{S})_4 \\ (\Pi \cdot \mathbf{S})_5 \end{bmatrix}_{i+1/2}. \quad (3.27)$$

A primeira componente do vetor definido pela equação supracitada está associado à equação da continuidade e é dado por:

$$(\Pi \cdot \mathbf{S})_1 = \rho_{i+1/2} (q_s)_{i+1/2}, \quad (3.28)$$

em que o fluxo volumétrico nada mais é do que:

$$(q_s)_{i+1/2} = \mathbf{u}_{i+1/2} \cdot \mathbf{S}_{i+1/2} = u_{i+1/2} (s_x)_{i+1/2} + v_{i+1/2} (s_y)_{i+1/2} + w_{i+1/2} (s_z)_{i+1/2}. \quad (3.29)$$

Os outros 3 vetores que se seguem estão ligados a componentes da equação do momento linear, enquanto o último vetor está associado à equação da energia. Para as equações de Euler, essas componentes estão descritas da Eq. 3.30 até a Eq. 3.33.

$$(\Pi \cdot \mathbf{S})_2 = (\rho u)_{i+1/2} (q_s)_{i+1/2} + p_{i+1/2} (s_x)_{i+1/2}, \quad (3.30)$$

$$(\Pi \cdot \mathbf{S})_3 = (\rho v)_{i+1/2} (q_s)_{i+1/2} + p_{i+1/2} (s_y)_{i+1/2}, \quad (3.31)$$

$$(\Pi \cdot \mathbf{S})_4 = (\rho w)_{i+1/2} (q_s)_{i+1/2} + p_{i+1/2} (s_z)_{i+1/2}, \quad (3.32)$$

$$(\Pi \cdot \mathbf{S})_5 = (\rho e_T)_{i+1/2} (q_s)_{i+1/2} + p_{i+1/2} (q_s)_{i+1/2}. \quad (3.33)$$

Para calcular o fluxo ($\Pi \cdot \mathbf{S}$) de acordo com as equações de 3.28 até 3.33, é necessário aproximar os valores das variáveis na superfície de controle $\mathbf{S}_{i+1/2}$ pela média dos valores das variáveis conservativas dentro dos volumes de controle, o que resulta no seguinte vetor:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho u} \\ \bar{\rho v} \\ \bar{\rho w} \\ \bar{\rho e_T} \end{bmatrix}_{i,j,k}. \quad (3.34)$$

Para obter as variáveis primitivas das equações do momento e da energia, a média de Favre é utilizada para calcular tais variáveis ponderadas pela massa específica, como indicado a seguir:

$$\tilde{u} = \frac{\bar{\rho u}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{v} = \frac{\bar{\rho v}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{w} = \frac{\bar{\rho w}}{\bar{\rho}}, \quad \tilde{e}_T = \frac{\bar{\rho e_T}}{\bar{\rho}}. \quad (3.35)$$

A média da energia total é dada por:

$$\tilde{e}_T = \tilde{e} + \tilde{e}_k = \tilde{e} + \frac{\tilde{u} \tilde{u} + \tilde{v} \tilde{v} + \tilde{w} \tilde{w}}{2}, \quad (3.36)$$

com isso, a energia interna é calculada como:

$$\tilde{e} = \tilde{e}_T - \tilde{e}_k = \tilde{e}_T - \frac{\tilde{u} \tilde{u} + \tilde{v} \tilde{v} + \tilde{w} \tilde{w}}{2}, \quad (3.37)$$

e a pressão e temperatura médias no volume de controle são calculadas por meio das equações de estado:

$$\tilde{p} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \tilde{e}, \quad \tilde{T} = \frac{\gamma M_{ref}^2 \tilde{p}}{\bar{\rho}}. \quad (3.38)$$

É importante notar que os primeiros termos do lado direito das Eqs. 3.28, 3.30, 3.31, 3.32 e 3.33 são os fluxos de massa, momentum e energia total através da superfície de controle $\mathbf{S}_{i+1/2}$.

3.1 Cálculo das Variáveis Conservativas e Primitivas

O cálculo das variáveis conservativas e primitivas é essencial para a solução numérica do problema em questão. O método utilizado apresenta precisão espacial de 4ª ordem (Gutierrez, 2014) e é apresentado como:

- Variáveis primitivas:

$$u_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\tilde{u}_{i,j,k} + \tilde{u}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\tilde{u}_{i-1,j,k} + \tilde{u}_{i+2,j,k}), \quad (3.39)$$

$$v_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\tilde{v}_{i,j,k} + \tilde{v}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\tilde{v}_{i-1,j,k} + \tilde{v}_{i+2,j,k}), \quad (3.40)$$

$$w_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\tilde{w}_{i,j,k} + \tilde{w}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\tilde{w}_{i-1,j,k} + \tilde{w}_{i+2,j,k}), \quad (3.41)$$

e

$$p_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\tilde{p}_{i,j,k} + \tilde{p}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\tilde{p}_{i-1,j,k} + \tilde{p}_{i+2,j,k}). \quad (3.42)$$

- Variáveis conservativas:

$$\rho_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\bar{\rho}_{i,j,k} + \bar{\rho}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\bar{\rho}_{i-1,j,k} + \bar{\rho}_{i+2,j,k}), \quad (3.43)$$

$$(\rho u)_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\bar{\rho u}_{i,j,k} + \bar{\rho u}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\bar{\rho u}_{i-1,j,k} + \bar{\rho u}_{i+2,j,k}), \quad (3.44)$$

$$(\rho v)_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\bar{\rho v}_{i,j,k} + \bar{\rho v}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\bar{\rho v}_{i-1,j,k} + \bar{\rho v}_{i+2,j,k}), \quad (3.45)$$

$$(\rho w)_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\bar{\rho w}_{i,j,k} + \bar{\rho w}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\bar{\rho w}_{i-1,j,k} + \bar{\rho w}_{i+2,j,k}), \quad (3.46)$$

e

$$(\rho e_T)_{i+1/2} = \frac{9}{16} (\bar{\rho e_T}_{i,j,k} + \bar{\rho e_T}_{i+1,j,k}) - \frac{1}{16} (\bar{\rho e_T}_{i-1,j,k} + \bar{\rho e_T}_{i+2,j,k}). \quad (3.47)$$

3.2 Cálculo das Derivadas nas Faces

Conforme indicado por Freire & Miserda (2004), há ainda a necessidade de se calcular as derivadas do campo de velocidade, pressão e densidade nas faces dos volumes de controle. Com a utilização do Teorema do Gradiente aplicado a uma variável escalar da forma proposta por Hirsch (1988) e para um volume ao redor do ponto de malha, V_p . Vale notar que V_p não coincide com o volume da discretização em volumes finitos, V , volume em que as arestas são os pontos de malha. É importante notar que a determinação de V_p está intimamente ligada com a precisão espacial do cálculo das derivadas espaciais. A implicação desse teorema para o caso da primeira componente de velocidade resulta em:

$$\int_{V_p} (\nabla u) dV_p = \int_{S_p} u dS_p. \quad (3.48)$$

As componentes vetoriais da Equação 3.48 estão explicitadas a seguir:

$$\int_{V_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial k} \right) \mathbf{k} \right] dV_p = \int_{S_p} \left[(u dS_{xp}) \mathbf{i} + (u dS_{yp}) \mathbf{j} + (u dS_{kp}) \mathbf{k} \right]. \quad (3.49)$$

Trabalhando apenas com a componente na direção \mathbf{i} , a Equação 3.49 se resume a:

$$\int_{V_p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dV_p = \int_{S_p} u dS_{xp}. \quad (3.50)$$

Pode-se definir a média volumétrica da derivada para o volume de controle como

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \equiv \frac{1}{V_p} \int_{V_p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dV_p, \quad (3.51)$$

e, substituindo 3.50 em 3.51, o resultado obtido é:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = \frac{1}{V_p} \int_{S_p} u dS_{xp}. \quad (3.52)$$

Trabalhando apenas com a primeira componente da velocidade através da primeira componente do vetor de superfície, o fluxo líquido pode ser definido como:

$$f(u)_x \equiv \int_{S_p} u dS_{xp}. \quad (3.53)$$

Substituindo a Equação 3.53 em 3.52, o resultado é:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{i,j,k} = \frac{1}{V_{p_{i,j,k}}} [f(u)_x]_{i,j,k}. \quad (3.54)$$

Com a Equação 3.54, é possível calcular a média da derivada no volume ao redor de um ponto da malha. Já para o cálculo da derivada na face, a média entre as derivadas dos pontos de malha que definem a face deve ser determinada. Dessa forma, a derivada na face $(i + 1/2)$ será calculada como:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{i+1/2} = \frac{1}{4} \left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{i+1,j,k} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{i+1,j+1,k} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{i+1,j,k+1} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{i+1,j+1,k+1} \right]. \quad (3.55)$$

Com todas as informações previamente apresentadas, o próximo passo é determinar o fluxo líquido da primeira componente de velocidade, ou seja, $[f(u)_x]_{i,j,k}$. Para isso, a quarta ordem de precisão espacial será utilizada, o que está ilustrado na Figura 28 para o caso bidimensional. Vale destacar que a linha tracejada engloba o volume ao redor do ponto de malha, enquanto que o volume correspondente à discretização em volumes finitos é dado pela região hachurada. Além disso, o volume ao redor do ponto engloba exatamente quatro volumes finitos.

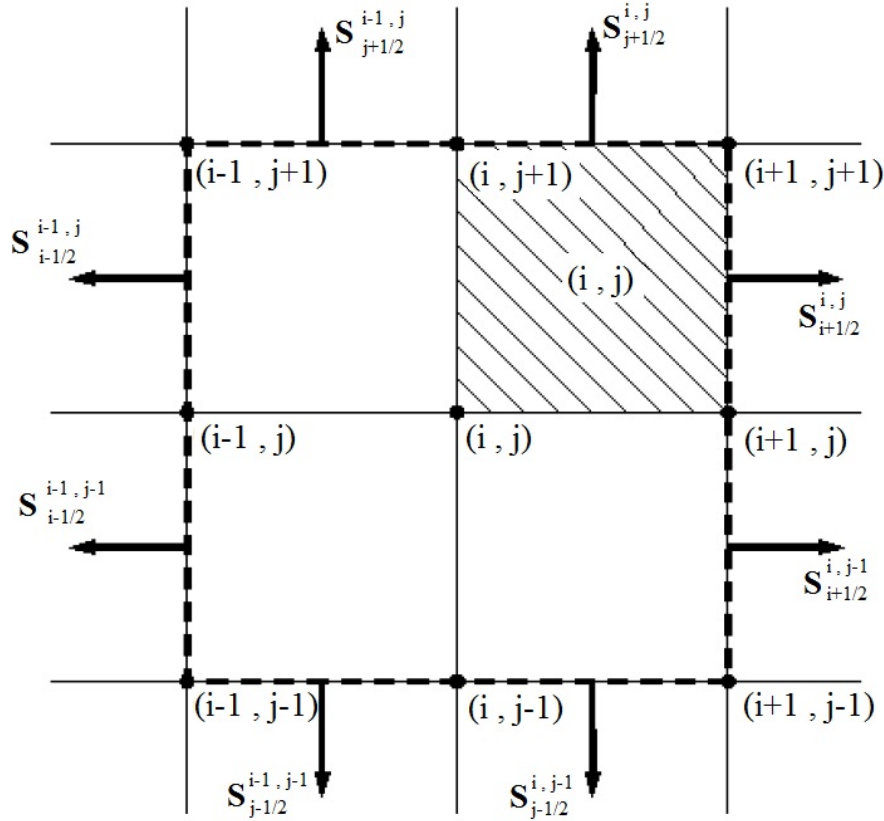


Figura 28 – Volume ao redor do ponto para o caso 2D com 4^a ordem de precisão espacial (Freire & Miserda, 2004) - Modificado.

Para o caso estudado, com quarta ordem de precisão espacial, $[f(u)_x]_{i,j,k}$ tridimensional será obtido de acordo com a seguinte metodologia:

$$[f(\tilde{u})_x]_{i,j,k} = \left[[f(\tilde{u})_x]_{i+1/2} + [f(\tilde{u})_x]_{i-1/2} + [f(\tilde{u})_x]_{j+1/2} + [f(\tilde{u})_x]_{j-1/2} + [f(\tilde{u})_x]_{k+1/2} + [f(\tilde{u})_x]_{k-1/2} + O(\Delta_{i,j,k})^4 \right], \quad (3.56)$$

em que:

$$[f(\tilde{u})_x]_{i+1/2} = \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j,k} + \tilde{u}_{i+1,j,k}) (S_x)_{i+1/2}^{i,j,k} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j-1,k} + \tilde{u}_{i+1,j-1,k}) (S_x)_{i+1/2}^{i,j-1,k} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j,k-1} + \tilde{u}_{i+1,j,k-1}) (S_x)_{i+1/2}^{i,j,k-1} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j-1,k-1} + \tilde{u}_{i+1,j-1,k-1}) (S_x)_{i+1/2}^{i,j-1,k-1} \right], \quad (3.57)$$

$$[f(\tilde{u})_x]_{i-1/2} = \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j,k} + \tilde{u}_{i-2,j,k}) (S_x)_{i-1/2}^{i-1,j,k} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j,k-1} + \tilde{u}_{i-2,j,k-1}) (S_x)_{i-1/2}^{i-1,j,k-1} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j-1,k} + \tilde{u}_{i-2,j-1,k}) (S_x)_{i-1/2}^{i-1,j-1,k} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j-1,k-1} + \tilde{u}_{i-2,j-1,k-1}) (S_x)_{i-1/2}^{i-1,j-1,k-1} \right], \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
[f(\tilde{u})_x]_{j+1/2} &= \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j,k} + \tilde{u}_{i,j+1,k}) (S_x)_{j+1/2}^{i,j,k} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j,k} + \tilde{u}_{i-1,j+1,k}) (S_x)_{j+1/2}^{i-1,j,k} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j,k-1} + \tilde{u}_{i,j+1,k-1}) (S_x)_{j+1/2}^{i,j,k-1} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j,k-1} + \tilde{u}_{i-1,j+1,k-1}) (S_x)_{j+1/2}^{i-1,j,k-1} \right], \tag{3.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f(\tilde{u})_x]_{j-1/2} &= \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j-1,k} + \tilde{u}_{i-1,j-2,k}) (S_x)_{j-1/2}^{i-1,j-1,k} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j-1,k} + \tilde{u}_{i,j-2,k}) (S_x)_{j-1/2}^{i,j-1,k} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j-1,k-1} + \tilde{u}_{i-1,j-2,k-1}) (S_x)_{j-1/2}^{i-1,j-1,k-1} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j-1,k-1} + \tilde{u}_{i,j-2,k-1}) (S_x)_{j-1/2}^{i,j-1,k-1} \right], \tag{3.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f(\tilde{u})_x]_{k+1/2} &= \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j,k} + \tilde{u}_{i,j,k+1}) (S_x)_{k+1/2}^{i,j,k} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j,k} + \tilde{u}_{i-1,j,k+1}) (S_x)_{k+1/2}^{i-1,j,k} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j-1,k} + \tilde{u}_{i-1,j-1,k+1}) (S_x)_{k+1/2}^{i-1,j-1,k} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j-1,k} + \tilde{u}_{i,j-1,k+1}) (S_x)_{k+1/2}^{i,j-1,k} \right], \tag{3.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f(\tilde{u})_x]_{k-1/2} &= \left[\frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j,k-1} + \tilde{u}_{i,j,k-2}) (S_x)_{k-1/2}^{i,j,k-1} + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j,k-1} + \tilde{u}_{i-1,j,k-2}) (S_x)_{k-1/2}^{i-1,j,k-1} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i-1,j-1,k-1} + \tilde{u}_{i-1,j-1,k-2}) (S_x)_{k-1/2}^{i-1,j-1,k-1} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j-1,k-1} + \tilde{u}_{i,j-1,k-2}) (S_x)_{k-1/2}^{i,j-1,k-1} \right], \tag{3.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,j,k} &= \left[\frac{1}{8} (V_{i,j,k} + V_{i-1,j,k} + V_{i,j-1,k} + V_{i-1,j-1,k} \right. \\
&\quad \left. + V_{i,j,k-1} + V_{i-1,j,k-1} + V_{i,j-1,k-1} + V_{i-1,j-1,k-1}) \right]^{1/3}. \tag{3.63}
\end{aligned}$$

3.3 Dissipação Artificial

O modelo de dissipação artificial aqui utilizado é baseado no trabalho de Jameson (1997) e algumas modificações foram feitas para aumentar a estabilidade numérica do código para a simulação do caso de interação entre o rotor e o estator. Com isso, a dissipação artificial pode é representada por:

$$\mathcal{D}_{i,j,k} = (d_{i+1/2} - d_{i-1/2}) + (d_{j+1/2} - d_{j-1/2}) + (d_{k+1/2} - d_{k-1/2}), \tag{3.64}$$

para a superfície $\mathbf{S}_{i+1/2}$:

$$d_{i+1/2} = \epsilon_{i+1/2}^{(2)} \left[\bar{\mathbf{U}}_{i+1,j,k} - \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} \right] - \epsilon_{i+1/2}^{(4)} \left[\bar{\mathbf{U}}_{i+2,j,k} - 3\bar{\mathbf{U}}_{i+1,j,k} + 3\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} - \bar{\mathbf{U}}_{i-1,j,k} \right]. \quad (3.65)$$

O primeiro e segundo termos do lado direito da Eq. 3.65 são os operadores de dissipação de 2ª e 4ª ordem, respectivamente. Para esses operadores, os coeficientes são:

$$\epsilon_{i+1/2}^{(2)} = \max \left[(\Psi_{rot})_{i+1/2}, (\Psi_{div})_{i+1/2}, (\Psi_{prs})_{i+1/2}, (\Psi_{den})_{i+1/2} \right]. \quad (3.66)$$

$$\epsilon_{i+1/2}^{(4)} = \max \left[0, \left(K^{(4)} - \epsilon_{i+1/2}^{(2)} \right) \right], \quad (3.67)$$

em que $K^{(4)}$ é uma constante de calibração do operador de 4ª ordem.

Para refinar a estabilidade numérica da metodologia de fronteira imersa, alguns sensores são utilizados para amortecer oscilações numéricas em variáveis termodinâmicas (pressão e densidade) e aerodinâmicas (vorticidade e divergente):

- Sensor baseado em vorticidade

$$(\Psi_{rot})_{i+1/2} = K_{rot}^{(2)} \cdot |\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}|_{i+1/2}, \quad (3.68)$$

- Sensor baseado no divergente

$$(\Psi_{div})_{i+1/2} = K_{div}^{(2)} \cdot |\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}|_{i+1/2}, \quad (3.69)$$

- Sensor baseado na pressão

$$(\Psi_{prs})_{i+1/2} = K_{prs}^{(2)} \cdot |\nabla \tilde{p}|_{i+1/2}, \quad (3.70)$$

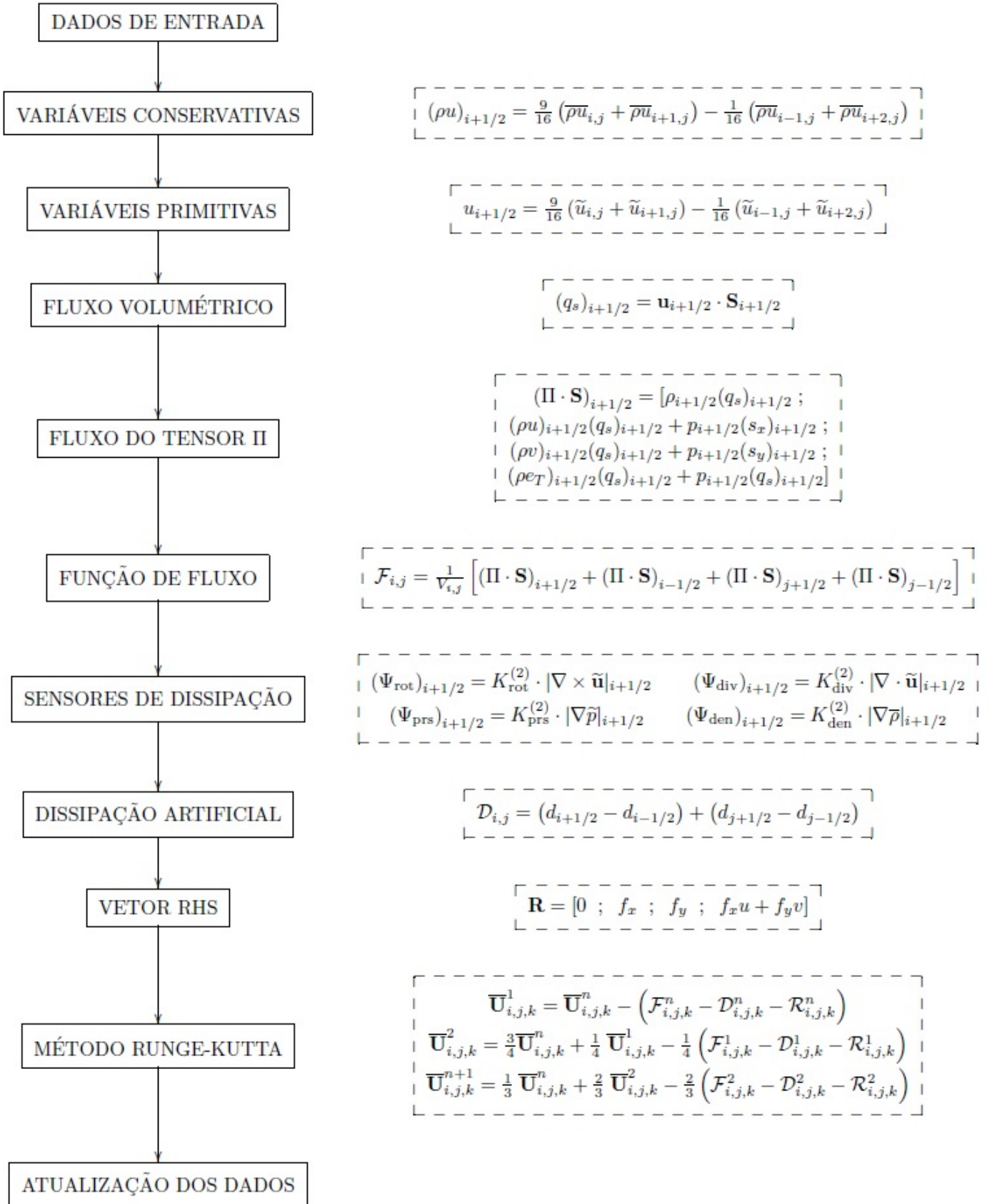
- Sensor baseado na densidade

$$(\Psi_{den})_{i+1/2} = K_{den}^{(2)} \cdot |\nabla \tilde{\rho}|_{i+1/2}. \quad (3.71)$$

Note que $K^{(2)}$ é uma constante de calibração distinta para cada sensor apresentado.

Uma vez que o cálculo da vorticidade e do divergente do campo de velocidade, da mesma forma que os gradientes de temperatura e densidade, tem precisão de 4ª ordem no espaço, o método numérico também apresentará resultados com 4ª ordem de precisão espacial e 3ª ordem de precisão temporal devido ao Runge-Kutta.

Para a compreensão da estrutura lógica da programação numérica aplicada a soluções envolvendo as equações de Euler, o fluxograma a seguir deve ser analisado.



Note que a solução numérica é o resultado de diversas iterações do processo apresentado. Vale destacar ainda que os valores de temperatura, pressão e velocidade do escoamento não perturbado estão definidos nos dados de entrada da programação.

3.4 Método de Fronteira Imersa

De acordo com Pazetto (2011), a principal característica do Método de Fronteira Imersa é o fato de que a malha cartesiana é regular, não sendo necessário adaptar a malha ao contorno de alguma superfície sólida. Dessa forma, a fronteira sólida é delimitada através da imposição de condições específicas ao campo cinemático e termodinâmico dos volumes de controle em contato com o corpo.

Como citado anteriormente, a abordagem utilizada para a determinação das condições de contorno é imposta diretamente às fronteiras dos volumes de controle. A média das variáveis conservativas ao longo dos volumes de controle é dada por:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho u} \\ \bar{\rho v} \\ \bar{\rho w} \\ \bar{\rho e_T} \end{bmatrix}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho \tilde{u}} \\ \bar{\rho \tilde{v}} \\ \bar{\rho \tilde{w}} \\ \bar{\rho \tilde{e}_T} \end{bmatrix}_{i,j,k}. \quad (3.72)$$

Para impor a condição de deslizamento na fronteira dos volumes para as equações de Euler, a velocidade do fluido sobre a superfície sólida deve ser decomposta em uma componente normal e em uma componente tangencial, como indicado a seguir:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_n + \tilde{\mathbf{u}}_t = \tilde{u}_n \mathbf{n} + \tilde{u}_t \mathbf{t}. \quad (3.73)$$

A condição de impenetrabilidade imposta à fronteira dos volumes de controle determina que a componente normal de velocidade do fluido deve ser igual à componente normal de velocidade do corpo em movimento, u_{n_B} . Dessa forma, as componentes normal e tangencial da velocidade sobre a fronteira dos volumes de controle são determinadas por:

$$\tilde{u}_n = u_{n_B} \quad e \quad \tilde{u}_t \neq 0. \quad (3.74)$$

É importante notar que, para a cascata do estator, $u_{n_B} = 0$, enquanto que, para a cascata do rotor, a velocidade dos corpos em movimento é igual à componente normal de velocidade da cascata para cada ponto das paredes sólidas, relação dada por $u_{n_B} = \mathbf{v}_{rotor} \cdot \mathbf{n}$.

Para as equações de Euler, não há difusão de momento na direção normal sobre as paredes sólidas do rotor e do estator, relação expressa por:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_n} = 0. \quad (3.75)$$

A condição de contorno para o campo estático de pressão sobre a parede é obtida por meio da equação do momento linear na direção normal:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_n) + \frac{\partial}{\partial x_n} (\bar{\rho} \tilde{u}_n \tilde{u}_n) + \frac{\partial}{\partial x_t} (\bar{\rho} \tilde{u}_n \tilde{u}_t) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_n}, \quad (3.76)$$

em que a expansão de todos os termos resulta em:

$$\tilde{u}_n \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} + (\tilde{u}_n)^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_n} + (2\bar{\rho} \tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_n} + (\tilde{u}_n \tilde{u}_t) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_t} + (\bar{\rho} \tilde{u}_t) \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_t} + (\bar{\rho} \tilde{u}_n) \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial x_t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_n}. \quad (3.77)$$

Aplicando a condição de impenetrabilidade à equação de quantidade de movimento na direção normal:

$$u_{n_B} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial u_{n_B}}{\partial t} + (u_{n_B})^2 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_n} + (2\bar{\rho} u_{n_B}) \frac{\partial u_{n_B}}{\partial x_n} + (u_{n_B} u_t) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_t} + (\bar{\rho} u_t) \frac{\partial u_{n_B}}{\partial x_t} + (\bar{\rho} u_{n_B}) \frac{\partial u_t}{\partial x_t} = -\frac{\partial p}{\partial x_n}. \quad (3.78)$$

Para a cascata do estator, $u_{n_B} = 0$, o que leva à seguinte conclusão:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_n} = 0. \quad (3.79)$$

Já para a cascata do rotor, $u_{n_B} \neq 0$, se medido por um observador inercial estacionário em relação ao estator. Assim sendo, o campo de pressão estática é independente da velocidade de um observador em sistema inercial e, se o mesmo está em movimento com a mesma velocidade constante da cascata do rotor, o resultado é que $u_{n_B} = 0$, levando à conclusão de que:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_n} = 0. \quad (3.80)$$

Em outras palavras, para um observador estacionário em relação ao estator, o rotor está em movimento. Já para um observador que está se movimentando com o rotor, o estator está se movendo e o rotor é estacionário. Uma vez que o campo de pressão estática é independente do sistema inercial do observador, a condição de contorno para o campo de pressão estática deve ser o mesmo para a cascata do rotor e do estator.

Considerando que as paredes das cascatas do rotor e do estator são adiabáticas, a condição de contorno para a temperatura é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_n} = 0. \quad (3.81)$$

Diferenciando a equação de estado para um gás ideal com respeito à direção normal:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} (\bar{\rho} \mathcal{R} \tilde{T}) = \mathcal{R} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_n} + \mathcal{R} \tilde{T} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_n}, \quad (3.82)$$

o que resulta em:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_n} = 0. \quad (3.83)$$

Como:

$$\tilde{e} = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1) M_{ref}^2 \tilde{T}}, \quad (3.84)$$

a condição de parede adiabática resulta em:

$$\frac{\partial \tilde{e}}{\partial x_n} = 0. \quad (3.85)$$

Como \mathbf{n} é um vetor unitário com direção normal à parede do corpo com componentes cartesianas $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$, as derivadas das variáveis \tilde{u} , $\tilde{\mathbf{u}}_n$, $\bar{\rho}$ e \tilde{e} do escoamento na direção normal podem ser determinadas como:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_n} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = n_x \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial z}, \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_n} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = n_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \tilde{e}}{\partial x_n} = \frac{\partial \tilde{e}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{e}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \tilde{e}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \tilde{e}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = n_x \frac{\partial \tilde{e}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \tilde{e}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \tilde{e}}{\partial z} \quad (3.88)$$

Dependendo da resolução da malha cartesiana adotada, mais de um ponto de superfície pode estar associado a uma fronteira de volume e, nesse caso, a média entre todos os vetores normais associados a esses pontos é utilizada.

As derivadas na direção normal das fronteiras dos volumes (sobrescrito b) podem ser avaliadas de acordo com as seguintes condições de contorno:

$$0 = n_x \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^b + n_y \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} \right)_{i,j,k}^b + n_z \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial z} \right)_{i,j,k}^b, \quad (3.89)$$

$$0 = n_x \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^b + n_y \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \right)_{i,j,k}^b + n_z \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)_{i,j,k}^b, \quad (3.90)$$

$$0 = n_x \left(\frac{\partial \tilde{e}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^b + n_y \left(\frac{\partial \tilde{e}}{\partial y} \right)_{i,j,k}^b + n_z \left(\frac{\partial \tilde{e}}{\partial z} \right)_{i,j,k}^b. \quad (3.91)$$

Se $n_x > 0$, a derivada $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ na região regular de uma malha cartesiana na fronteira de volumes de controle pode ser calculada com precisão espacial de quarta ordem por meio da utilização da metodologia de diferenças finitas obtidas por ajuste polinomial proposta por Tanehill et al. (1997):

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^b = \frac{1}{12\Delta x} \left[-25\bar{\rho}_{i,j,k}^b + 48\bar{\rho}_{i+1,j,k} - 36\bar{\rho}_{i+2,j,k} + 16\bar{\rho}_{i+3,j,k} - 3\bar{\rho}_{i+4,j,k} + O(\Delta x)^4 \right]. \quad (3.92)$$

Definindo o operador de diferença como:

$$D_i^+ \bar{\rho} = \frac{1}{25} \left(48\bar{\rho}_{i+1,j,k} - 36\bar{\rho}_{i+2,j,k} + 16\bar{\rho}_{i+3,j,k} - 3\bar{\rho}_{i+4,j,k} \right), \quad (3.93)$$

a Eq. 3.92 pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right)_{i,j,k} = \frac{25}{12\Delta x} \left[-\bar{\rho}_{i,j,k}^b + D_i^+ \bar{\rho} + O(\Delta x)^4 \right]. \quad (3.94)$$

Se $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ($n_x = 1$, $n_y = 0$ e $n_z = 0$), a Eq. 3.90 se resume a:

$$0 = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^b, \quad (3.95)$$

e, introduzindo esse resultado na Eq. 3.94:

$$\bar{\rho}_{i,j,k}^b = D_i^+ \bar{\rho} + O(\Delta x)^4. \quad (3.96)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, se $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ ($n_x = 0$, $n_y = 1$ e $n_z = 0$),

$$\bar{\rho}_{i,j,k}^b = D_j^+ \bar{\rho} + O(\Delta y)^4, \quad (3.97)$$

e se $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ($n_x = 0$, $n_y = 0$ e $n_z = 1$),

$$\bar{\rho}_{i,j,k}^b = D_k^+ \bar{\rho} + O(\Delta z)^4. \quad (3.98)$$

Para um caso geral, em que $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$, a densidade média é calculada na fronteira de volumes de controle como um valor ponderado:

$$\bar{\rho}_{i,j,k}^b = \frac{|n_x| D_i \bar{\rho} + |n_y| D_j \bar{\rho} + |n_z| D_k \bar{\rho}}{|n_x| + |n_y| + |n_z|}. \quad (3.99)$$

Para um procedimento análogo, considerando que $\partial \bar{\rho} / \partial x_n = \partial \tilde{\epsilon} / \partial x_n = \partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial x_n = 0$, a energia interna média e a velocidade tangencial são valores ponderadamente calculados como:

$$\tilde{\epsilon}_{i,j,k}^b = \frac{|n_x| D_i \tilde{\epsilon} + |n_y| D_j \tilde{\epsilon} + |n_z| D_k \tilde{\epsilon}}{|n_x| + |n_y| + |n_z|}, \quad (3.100)$$

e

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^b = \frac{|n_x| D_i \tilde{\mathbf{u}} + |n_y| D_j \tilde{\mathbf{u}} + |n_z| D_k \tilde{\mathbf{u}}}{|n_x| + |n_y| + |n_z|}. \quad (3.101)$$

Nas Equações apresentadas, o operador de diferença (D_i , D_j e D_k) pode ser apresentado como (D_i^+ , D_j^+ e D_k^+) se os valores n_x , n_y e n_z forem positivos ou como (D_i^- , D_j^- e D_k^-) se os valores n_x , n_y e n_z forem negativos.

Como a velocidade normal, $\tilde{\mathbf{u}}_n$, é conhecida para cada fronteira de volume de controle, suas componentes cartesianas também são conhecidas e dadas por:

$$(\tilde{\mathbf{u}}_n)_{i,j,k}^b = \left(\tilde{u}_{n_x} \mathbf{i} + \tilde{u}_{n_y} \mathbf{j} + \tilde{u}_{n_z} \mathbf{k} \right)_{i,j,k}^b, \quad (3.102)$$

e como:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j,k}^b = (\tilde{\mathbf{u}})_{i,j,k}^b = (\tilde{\mathbf{u}}_n)_{i,j,k}^b + (\tilde{\mathbf{u}}_t)_{i,j,k}^b, \quad (3.103)$$

as componentes cartesianas da velocidade tangencial, $\tilde{\mathbf{u}}_t$, são dadas por:

$$(\tilde{u}_{tx})_{i,j,k}^b = (\tilde{u} - \tilde{u}_{nx})_{i,j,k}^b, \quad (\tilde{u}_{ty})_{i,j,k}^b = (\tilde{v} - \tilde{u}_{ny})_{i,j,k}^b, \quad (\tilde{u}_{tz})_{i,j,k}^b = (\tilde{w} - \tilde{u}_{nz})_{i,j,k}^b. \quad (3.104)$$

Dessa forma, os vetores das variáveis conservativas para as fronteiras dos volumes de controle são dados por:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^b = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}(\tilde{u}_{tx} + \tilde{u}_{nx}) \\ \bar{\rho}(\tilde{u}_{ty} + \tilde{u}_{ny}) \\ \bar{\rho}(\tilde{u}_{tz} + \tilde{u}_{nz}) \\ \bar{\rho} \left[\tilde{\epsilon} + \frac{1}{2} \left[(\tilde{u}_{tx} + \tilde{u}_{nx})^2 + (\tilde{u}_{ty} + \tilde{u}_{ny})^2 + (\tilde{u}_{tz} + \tilde{u}_{nz})^2 \right] \right] \end{bmatrix}_{i,j,k}^b. \quad (3.105)$$

3.5 Estabilidade Numérica

O código numérico utilizado neste trabalho é baseado na metodologia explícita para o cálculo das derivadas, isso quer dizer que se utiliza um passo temporal n para o cálculo da derivada em i . A limitação desse método é a estabilidade numérica para números de CFL maiores do que 1. O número de CFL representa a razão entre a velocidade de propagação física e a velocidade de propagação numérica, podendo ser calculado por:

$$CFL = \frac{a}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}, \quad (3.106)$$

em que a representa a velocidade de propagação do som no meio, Δx é a distância entre dois volumes de controle consecutivos em um comprimento característico e Δt é o passo temporal utilizado na simulação numérica.

4 Validações e resultados

Com forte fundamentação teórica, domínio da formulação matemática e da metodologia numérica, o foco recai sobre o desenvolvimento de códigos numéricos capazes de oferecer resultados precisos no menor tempo possível. Primeiramente, a versão bidimensional do VAT foi utilizada como base para o desenvolvimento de uma versão unidimensional, o que permite entender melhor o funcionamento da programação e também simular casos mais simples. Como o caso unidimensional é apenas uma particularidade da metodologia tridimensional apresentada ao longo do trabalho, vale citar apenas que a diferença entre as abordagens de Euler e Navier-Stokes será a presença da tensão normal na direção x (σ_{xx}). Todas as validações e resultados deste trabalho estão fundamentados na abordagem de Euler.

4.1 Validação - Tubo de choque

A validação de um código numérico é fundamental para que haja garantia de que os resultados fornecidos apresentam consistência física. Dessa forma, a validação da versão unidimensional do VAT se baseou em um experimento com solução analítica, o tubo de choque. Segundo Leódido et al. (2004), o tubo de choque é um dispositivo composto basicamente por duas câmaras separadas por uma membrana, conforme ilustrado na Figura 29.

Primeiramente, destaca-se que, segundo Yunus & Cimbala (2007), as ondas de choque normal são aquelas que ocorrem em um plano normal à direção do escoamento e esse processo é altamente irreversível. Além disso, o leque de expansão representa uma região de expansão contínua composta por um número infinito de ondas de Mach também conhecidas por *ondas de expansão de Prandtl-Meyer*.

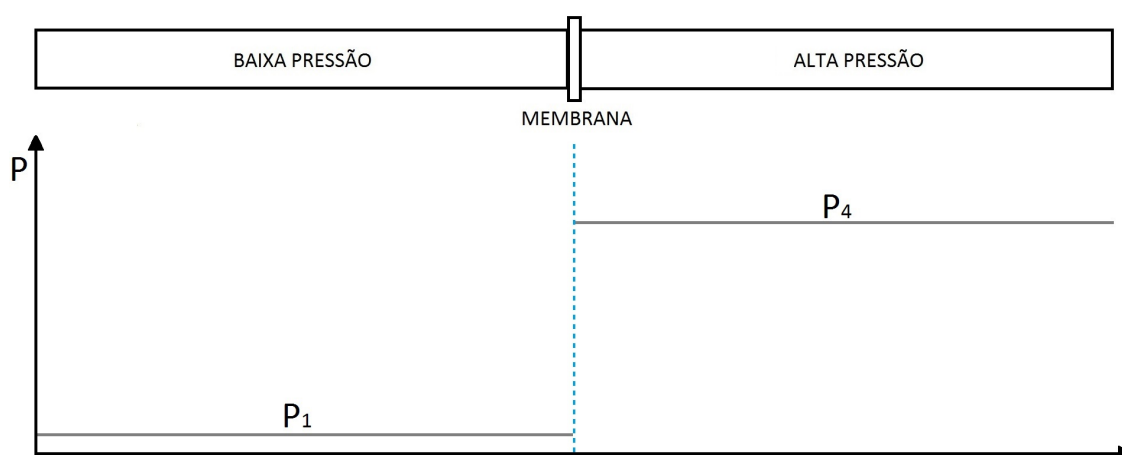


Figura 29 – Tubo de choque.

A primeira câmara, também chamada de tubo indutor, é preenchida com gás a pressão elevada, enquanto que a segunda câmara, tubo induzido, é preenchida com gás a baixa pressão. Além das distintas pressões, também é possível diferenciar as temperaturas dos gases e até mesmo os gases contidos em cada câmara. A membrana é responsável por manter a diferença de pressão inicial entre as câmaras, mas seu rompimento forma uma onda de choque normal que se desloca dentro do tubo induzido e também um leque de expansão que se desloca dentro do tubo indutor, conforme representado na Figura 30. A propagação dessas ondas gera variações de pressão, temperatura e densidade em função da diferença inicial de pressão entre as duas câmaras e das propriedades do gás utilizado. Importante ressaltar que, de acordo com Liepmann & Roshko (1957), ao se desprezar os termos de difusividade, haverá sempre uma superfície de contato que funciona como uma frente de pistão e que se movimenta em direção à câmara de baixa pressão.

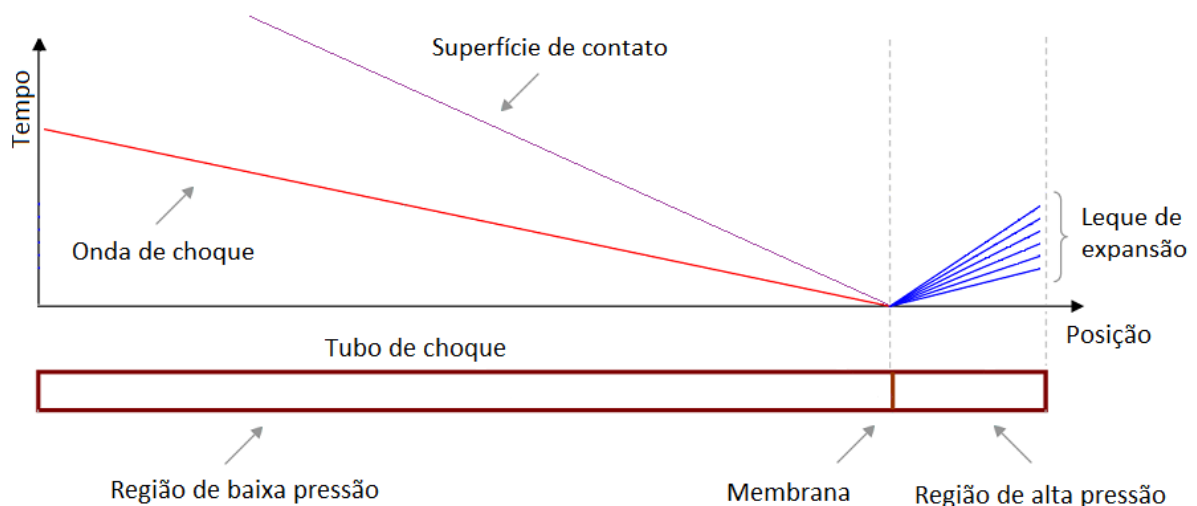


Figura 30 – Onda de choque e leque de expansão em tubo (Noronha & Morais, 2010) - Modificado.

Para a validação proposta, o comprimento do tubo é infinito, o que evita fenômenos de reflexão de onda. Com isso, a configuração usual em que o tubo de alta pressão apresenta menor comprimento quando comparado com o tubo de baixa pressão não se confirma.

De acordo com Noronha & Morais (2010), quatro regiões principais se formam dentro do tubo após a remoção do diafragma e é possível avaliar as condições de temperatura, pressão e densidade a partir dessa setorização:

- Região 1: a jusante da onda de choque normal. Nessa região, as condições iniciais ainda não foram afetadas pela onda de choque;
- Região 2: a montante da onda de choque normal. As condições iniciais já foram afetadas pela onda de choque;

- Região 3: a montante da onda de expansão. As condições iniciais já foram afetadas pela onda de expansão;
- Região 4: a jusante da onda de expansão. Nessa região, as condições iniciais ainda não foram afetadas pela onda de expansão.

Todas essas quatro regiões e os perfis de temperatura e pressão logo após a ruptura da membrana podem ser melhor entendidos ao se analisar a Figura 31.

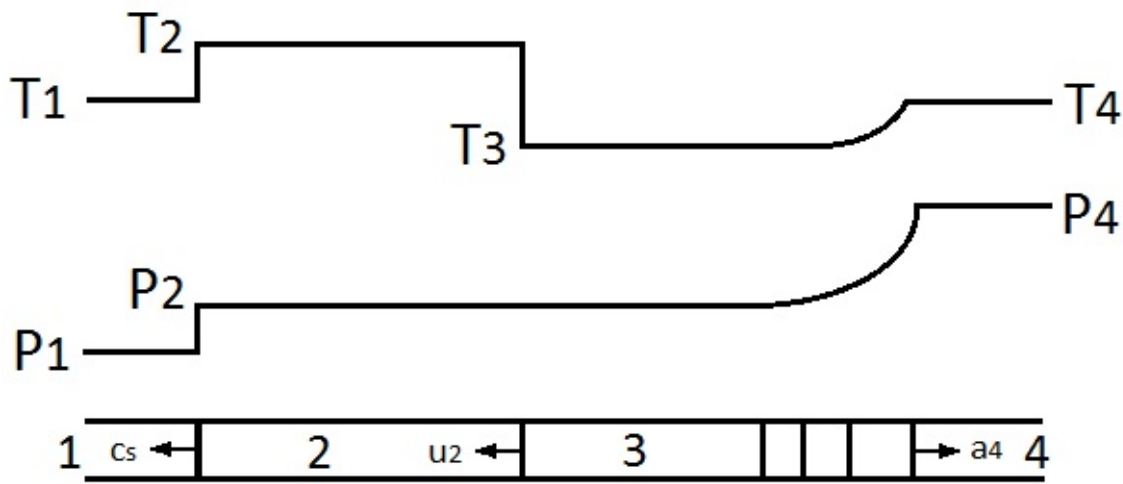


Figura 31 – Perfis de temperatura e pressão após o rompimento da membrana em tubo de choque (Liepmann & Roshko, 1957) - Modificado.

Vale destacar que, na Figura 31, c_s , u_2 e a_4 indicam as velocidades de propagação da onda de choque, superfície de contato e leque de expansão, respectivamente.

Analisando fisicamente o problema, a superfície de contato deve separar gases com temperaturas e densidades distintas, mas as pressões e velocidades devem ser iguais, como apresentado a diante:

$$p_2 = p_3 \quad , \quad u_2 = u_3. \tag{4.1}$$

Segundo Liepmann & Roshko (1957), essas duas condições são suficientes para se determinar a intensidade da onda de choque, p_2/p_1 , e a intensidade do leque de expansão, p_3/p_4 , em função de valores tabelados de p_4/p_1 .

Inicialmente, as equações a seguir devem ser consideradas para o cálculo das velocidades u_2 e u_3 :

$$u_2 = a_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{\frac{2}{\gamma_1}}{(\gamma_1 + 1) \frac{p_2}{p_1} + (\gamma_1 - 1)}}, \tag{4.2}$$

$$u_3 = \frac{2a_4}{\gamma_4 - 1} \left[1 - \frac{p_3}{p_4}^{\frac{\gamma_4 - 1}{2\gamma_4}} \right]. \tag{4.3}$$

Importante identificar que a_1 e a_4 indicam a velocidade do som para as condições iniciais das regiões 1 e 4, respectivamente. O mesmo ocorre para os outros parâmetros envolvidos. Considerando a aplicação das relações 4.1 em 4.2 e 4.3, a expressão matemática resultante é:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[1 - \frac{(\gamma_4 - 1) \left(\frac{a_1}{a_4}\right) \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}{\sqrt{2\gamma_1} \sqrt{2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1) \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}} \right]^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}. \quad (4.4)$$

Com isso, a intensidade da onda de choque é uma variável implícita que depende da razão p_4/p_1 . Já a intensidade do leque de expansão será determinada por:

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{p_3}{p_1} \frac{p_1}{p_4} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_4}{p_1}. \quad (4.5)$$

Uma vez determinada a intensidade do choque, todas as outras quantidades do escoamento são facilmente determinadas por meio das relações de choque normal. As tabelas referentes às propriedades de choque normal estão dispostas no ANEXO A.

Conforme informado anteriormente, a densidade e a temperatura não serão necessariamente iguais entre as regiões 2 e 3. Dessa forma, a temperatura T_3 é dada pela seguinte relação isentrópica:

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{(\gamma_4 - 1)}{\gamma_4}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{p_4}{p_1}\right)^{\frac{(\gamma_4 - 1)}{\gamma_4}}. \quad (4.6)$$

Enquanto isso, a temperatura T_2 é dada pela relação de Rankine-Hugoniot:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{p_1}{p_2}}. \quad (4.7)$$

Evitando a solução de um problema com variável implícita, a validação proposta seguirá um caminho distinto do apresentado por Liepmann & Roshko (1957). Para tal, inicia-se com o ajuste da Equação 4.4 para a simulação realizada, tal ajuste consiste em adotar a razão de calores específicos e velocidade do som no meio como parâmetros constantes em ambas as câmaras inicialmente pressurizadas de maneira distinta. Assim sendo:

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_4, \quad a = a_1 = a_4. \quad (4.8)$$

Aplicando as considerações dispostas em 4.8, a Equação 4.4 se resume a:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[1 - \frac{(\gamma - 1) \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}{\sqrt{2\gamma} \sqrt{2\gamma + (\gamma + 1) \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)}} \right]^{\frac{-2\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (4.9)$$

Com a razão P_2/P_1 igual a 1,458, a Equação 4.9 fornece que P_4/P_1 é igual a 2,17 para o ar. Adotando essa razão de pressões e temperatura inicial constante ao longo do tubo, os resultados da simulação realizada estão apresentados em seguida.

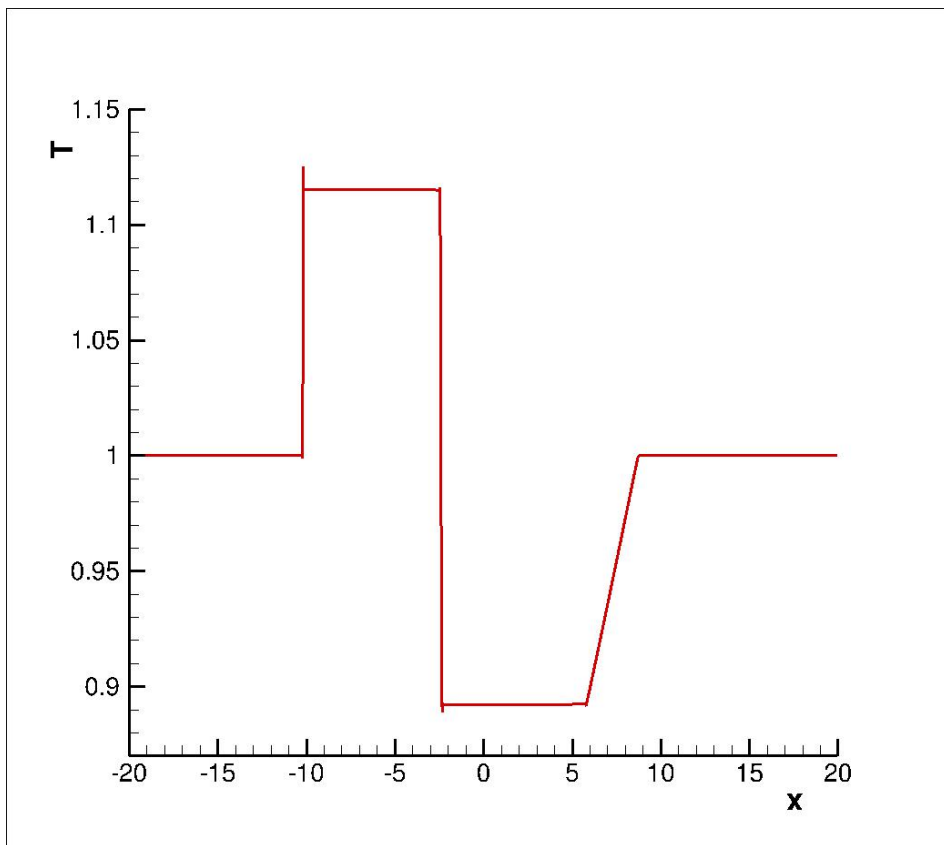


Figura 32 – Relação simulada de temperatura para o tubo de choque.

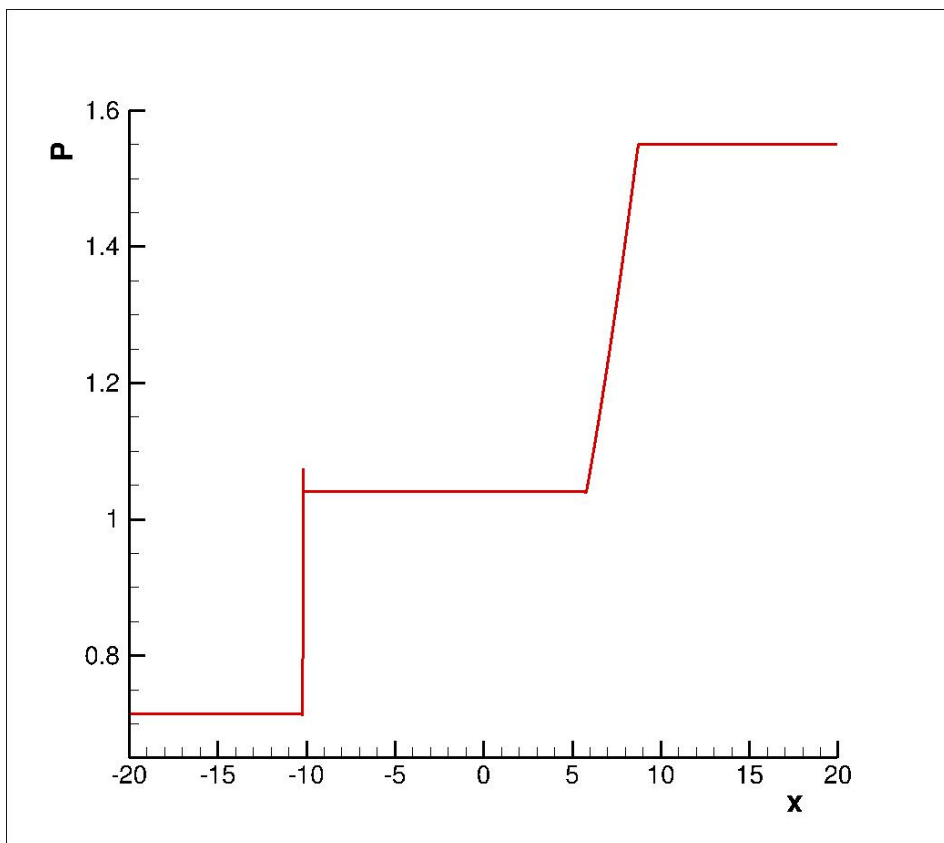


Figura 33 – Relação simulada de pressão para o tubo de choque.

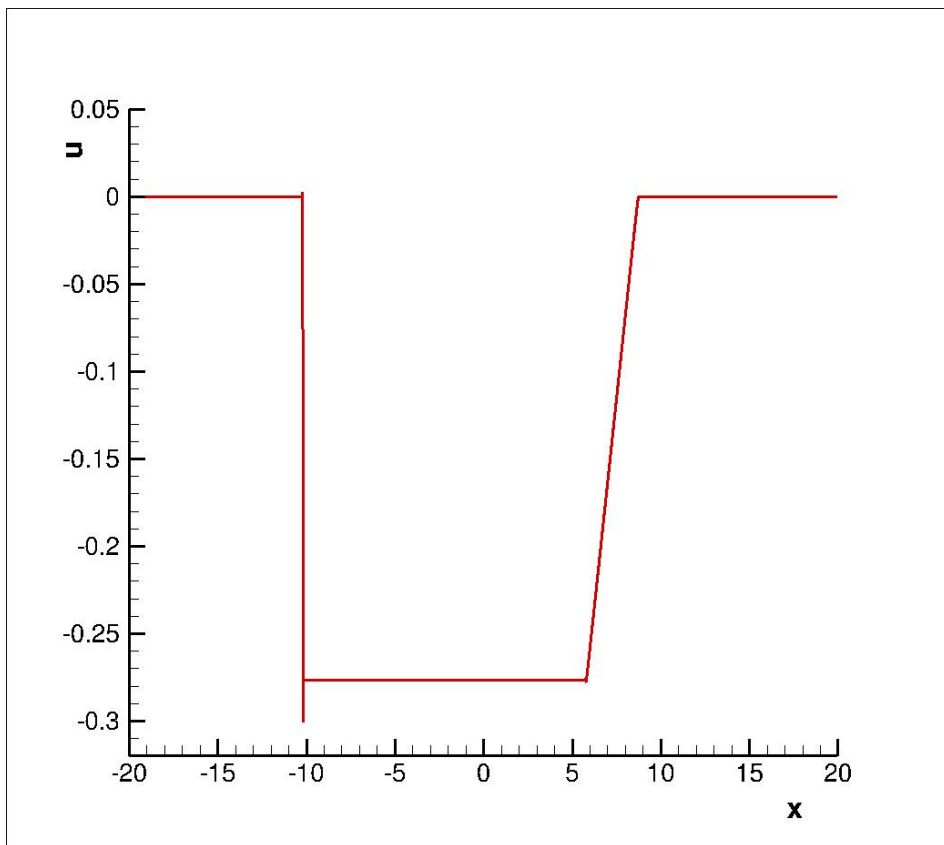


Figura 34 – Relação simulada de velocidade para o tubo de choque.

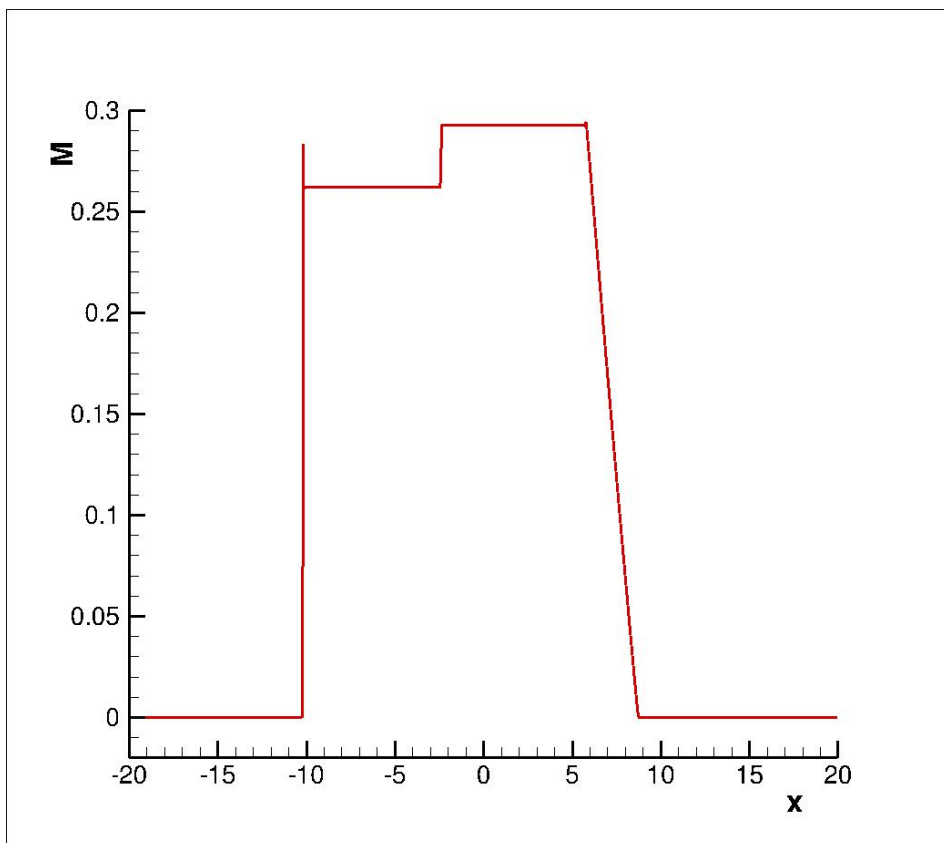


Figura 35 – Relação simulada de Mach para o tubo de choque.

Importante notar que a validação proposta para a versão unidimensional do VAT envolve parâmetros com caráter termodinâmico e cinemático. Uma informação relevante diz respeito à comparação entre o sistema de referencial adotado nas tabelas de choque normal e o adotado para a simulação numérica realizada. Para o choque normal, a referência está na onda de choque, enquanto que o referencial adotado na simulação está no tubo. Com isso, a temperatura e a pressão estática, por serem parâmetros termodinâmicos e não dependerem do referencial considerado, permitem a comparação direta com os valores apresentados no ANEXO A. Em contrapartida, a velocidade e o número de Mach estão intimamente relacionados com o referencial e carecem de maior análise para validação.

Vale destacar que as Figuras 32 a 35 apresentam valores parametrizados em função de quantidades de referência, isso ocorre em função da adimensionalização proposta. Os patamares apresentados nessas ilustrações estão tabelados adiante:

PARÂMETROS	VALORES SIMULADOS
P_1	0,7142
P_2	1,0412
T_1	1,0000
T_2	1,1152
M	0,2928
M_2	0,2620
u_2	0,2766
u_3	0,2766

De posse desses patamares simulados, é possível comparar os valores com os resultados apresentados na teoria. Ressalta-se apenas que o valor de referência para a velocidade u_2 foi obtido por meio da Equação 4.2.

PARÂMETROS	VALORES DE REFERÊNCIA	VALORES SIMULADOS
P_2/P_1	1,458	1,4578
T_2/T_1	1,115	1,1152
u_2	96,249 m/s	96,0324 m/s

Para a validação de M_2 , número de mach obtido após a onda de choque, basta considerar a razão entre a velocidade u_2 e a velocidade do som no meio com a nova temperatura devido à onda de choque, o que resulta em aproximadamente 0,26, valor coerente com o simulado.

Analisar criticamente o resultado obtido numericamente também é uma forma de validação do código. Sabe-se que a velocidade de propagação da onda de choque (c_s) é superior à velocidade de propagação do leque de expansão (a_4), fenômeno que pode ser facilmente observado na Figura 36 ao considerar que, inicialmente, a membrana entre as câmaras com pressões distintas estava localizada na origem do eixo das abscissas. Análises semelhantes podem ser feitas para os outros parâmetros simulados.

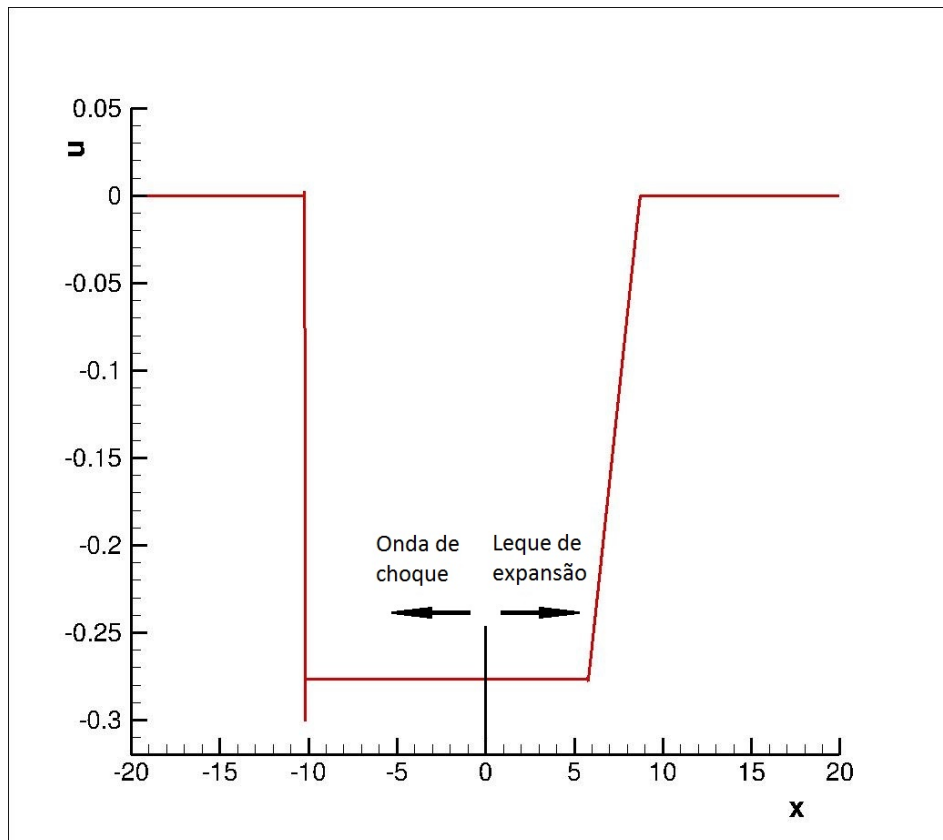


Figura 36 – Relação simulada de velocidade para o tubo de choque.

Cabe ainda uma discussão a respeito da oscilação numérica presente principalmente nas interfaces envolvendo a onda de choque e o leque de expansão. Tal ocorrência é usual em códigos numéricos e exemplifica na prática a importância de se ajustar os parâmetros de dissipação artificial. Nas Figuras 37 e 38, é possível observar com maior detalhe a ocorrência de oscilação numérica nos resultados obtidos.

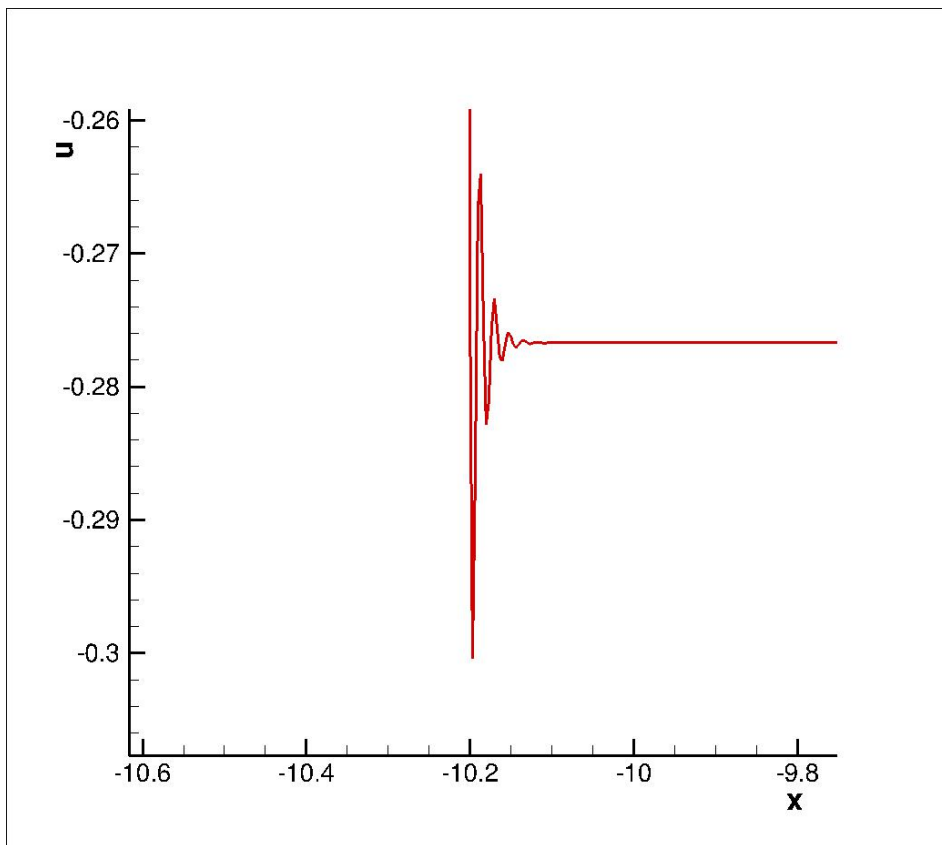


Figura 37 – Oscilação numérica na interface da onda de choque para a velocidade.

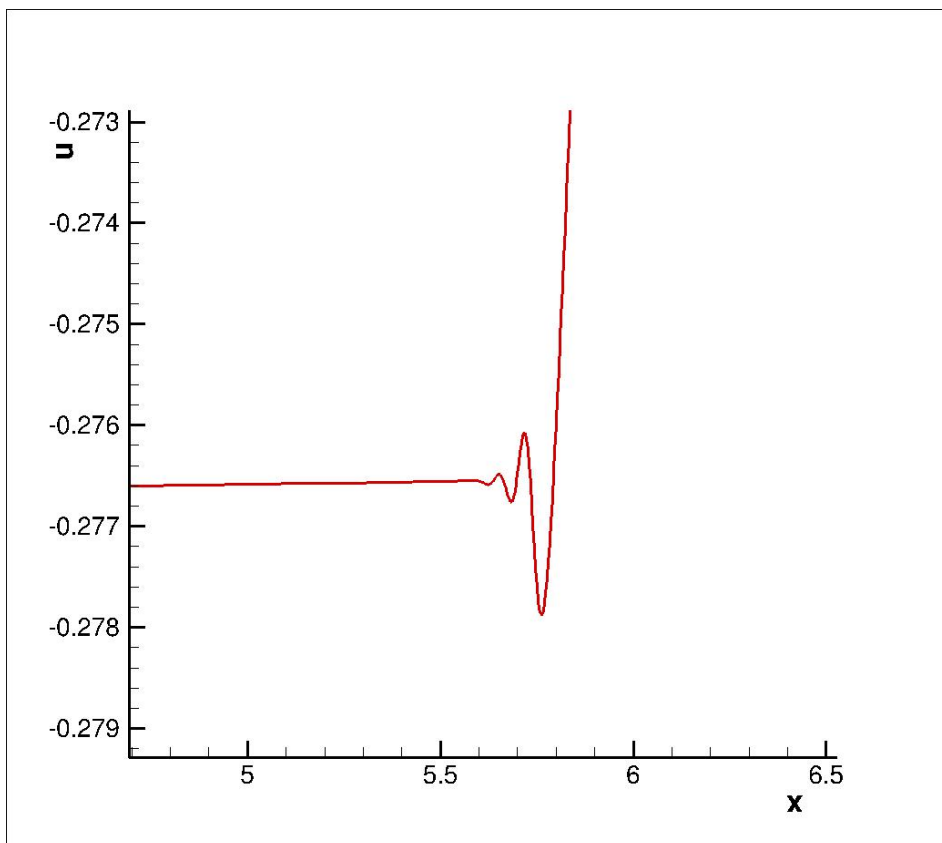


Figura 38 – Oscilação numérica na interface do leque de expansão para a velocidade.

Nota-se claramente que a oscilação numérica na interface da onda de choque é mais intensa quando comparada com o leque de expansão para os parâmetros de dissipação artificial utilizados. Isso ocorre principalmente em função da natureza altamente irreversível das ondas de choque e também da descontinuidade gerada no meio. As oscilações numéricas tendem a ser maiores no campo de velocidade devido ao termo advectivo da equação governante. Importante evidenciar que, quanto maior o gradiente de uma propriedade, maior será a oscilação numérica presente na solução.

Diante do fato de que os quatro parâmetros utilizados na validação apresentaram boa concordância com os valores de referência, declara-se validada a versão unidimensional do VAT.

4.2 Pistão unidimensional

A bibliografia clássica de aeroacústica tem muito bem arraigado o conceito de linearidade das soluções para a grande maioria das perturbações impostas a um sistema qualquer. Em contraposição a esse conceito, a dispersão de frequência, ou acústica, representa a resposta em diversas frequências para uma perturbação em uma única frequência.

O pistão unidimensional idealizado para as simulações numéricas realizadas pode ser melhor entendido através da Figura 39. Os principais parâmetros influentes na simulação são a amplitude do movimento e a frequência do mesmo.

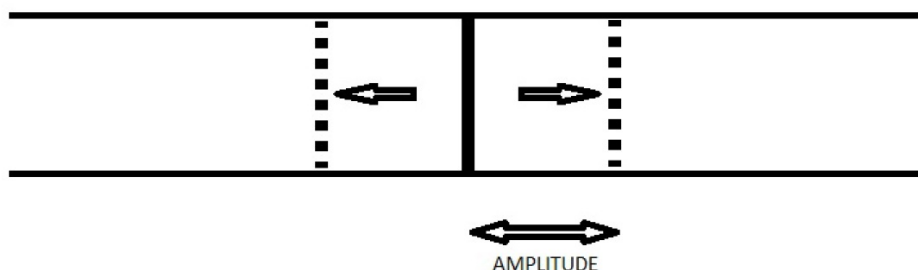


Figura 39 – Esquema do pistão unidimensional simulado.

Através do código numérico, o deslocamento do pistão unidimensional foi determinado através da função seno. A velocidade associada ao movimento do pistão pode ser obtida por meio da derivada temporal da função de deslocamento imposta ao caso. As Equações 4.10 e 4.11 indicam as funções dimensionais para o deslocamento e velocidade, respectivamente. Ressalta-se que A indica a amplitude do movimento e w , a velocidade angular.

$$x(t) = A \operatorname{sen}(wt) \quad (4.10)$$

$$u(t) = Aw \operatorname{cos}(wt) \quad (4.11)$$

Para o código numérico, tanto o deslocamento quanto a velocidade devem ser expressos de forma adimensional, o que justifica a utilização de uma velocidade de referência e também

de um comprimento característico para o problema. Para o estudo proposto, a velocidade de referência é a velocidade de propagação do som no ar à 300 K e assume o valor aproximado de $347,1887\text{ m/s}$. Com 200 comprimentos característicos para cada lado do pistão unidimensional, a região regular total é de 80 m ao impor o comprimento característico equivalente a $0,2\text{ m}$.

4.2.1 Validação - Decaimento teórico

Segundo Mofrey & Fisher (1970), a propagação de ondas de choque fracas sofre decaimento proporcional à razão $1/x$. Com o objetivo de se realizar mais uma validação do código unidimensional desenvolvido, o decaimento resultante da simulação de um pistão unidimensional com amplitude de deslocamento igual a $0,001\text{ m}$ e frequência de 2000 Hz foi comparado com a função $f(x) = \frac{0,355}{x} + 0,0042$, em vermelho na ilustração a seguir, e o resultado pode ser observado na Figura 40.

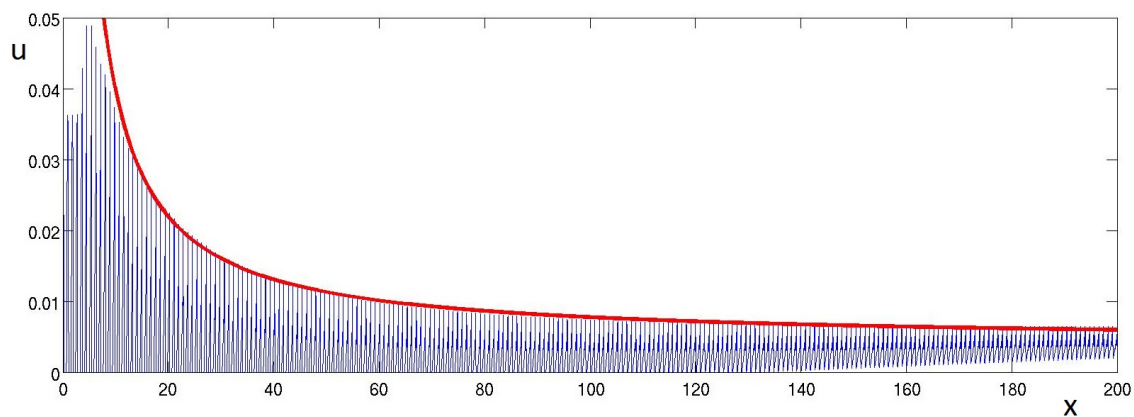


Figura 40 – Validação para o decaimento ao longo da propagação de ondas de choque.

Como ressaltado anteriormente, o fato de que a teoria é válida apenas para choques fracos justifica o pequeno desajuste da curva teórica com os resultados experimentais para os primeiros choques, como ilustrado na Figura 40.

4.2.2 Resultados - Frequência constante

Após diversas simulações, a metodologia escolhida para a apresentação dos resultados a seguir traz a variação da amplitude de deslocamento do pistão para uma frequência fixa de 2.000 Hz .

4.2.2.1 Caso 1

O primeiro caso simulado impõe amplitude de $0,00001\text{ m}$ para a frequência de 2.000 Hz . Inicialmente, é válido informar que todos os gráficos apresentados a seguir que relacionam pressão relativa e espaço estão na forma adimensional por uma pressão de referência e pelo comprimento característico do problema. A Figura 41 indica resposta linear para a perturbação

exercida ao sistema pelo pistão unidimensional e o desnível pode ser explicado pelo fato de que o lado de pressão da pá varia a cada meia oscilação, começando da esquerda para a direita. Na Figura 42, é possível observar que a linearidade da solução persiste até o limite regular da simulação. Além disso, a condição mínima de 20 volumes de controle por comprimento de onda também pode ser observada para o caso proposto.

Interessante notar que a resposta linear ilustrada na Figura 41 não sofre decaimento ao longo da região regular, fato que pode ser justificado devido a ausência de irreversibilidades.

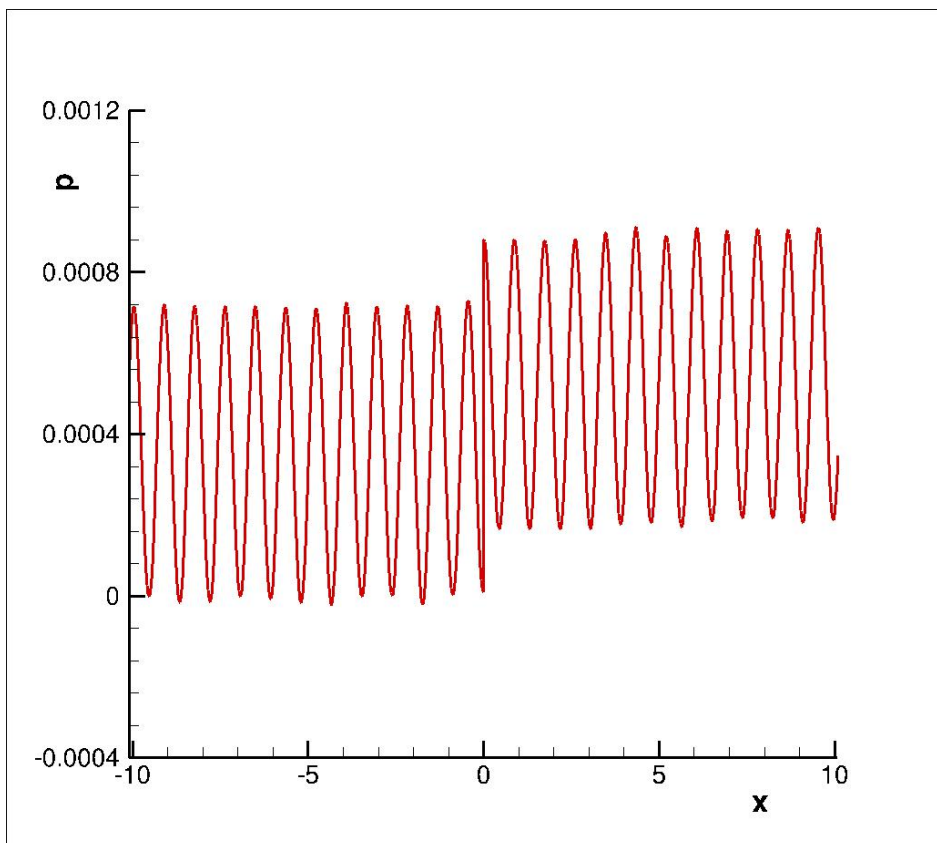


Figura 41 – Foco na linearidade da solução do Caso 1.

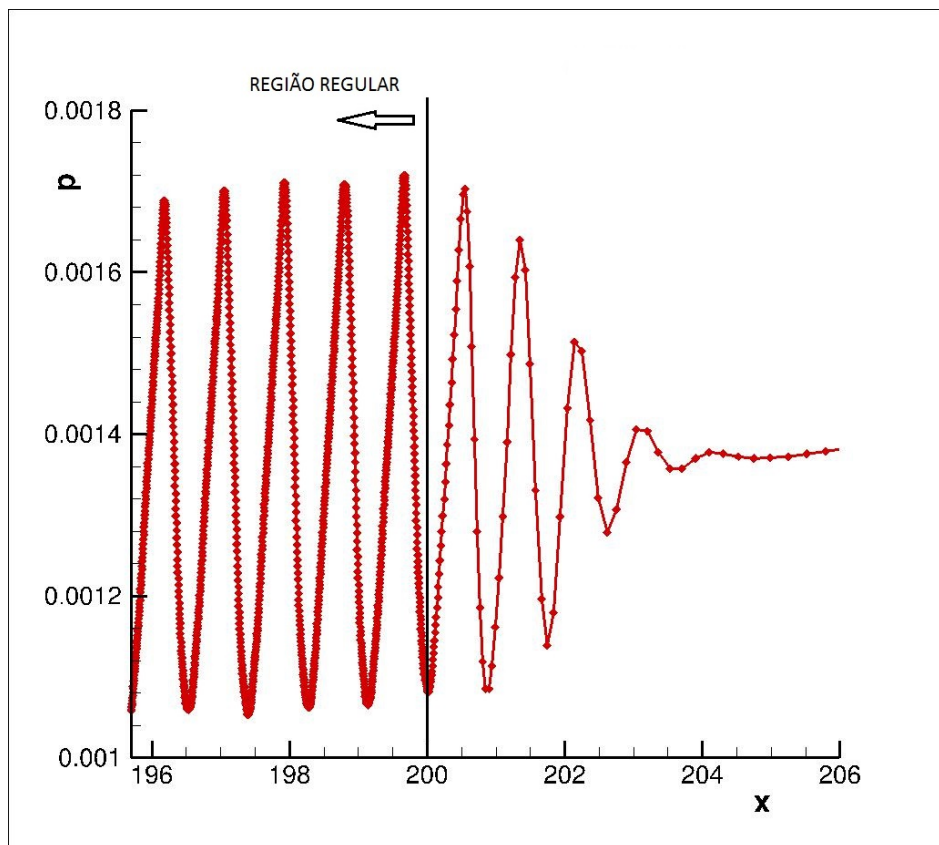


Figura 42 – Persistência da linearidade até o limite regular.

Para o completo entendimento dos casos simulados, destaca-se que a análise do tipo SPL (*Sound Pressure Level*) diz respeito à intensidade sonora, em decibéis, associada às condições simuladas. Enquanto isso, a flutuação RMS (*Root Mean Square*), em pascal, representa a variação média de pressão em relação à pressão de referência (Iazzetta, 2007). Todas as análises SPL e RMS apresentadas adiante foram realizadas para uma sonda posicionada a 200 comprimentos característicos do pistão unidimensional, o que equivale a 40 *m*.

Analisando as Figuras 43 e 44, é possível notar a predominância tonal da solução do Caso 1 em detrimento do ruído de banda larga. Isso implica que a propagação ocorre em múltiplos da frequência de excitação, ou seja, não há espalhamento de frequência ou dispersão acústica. Para a resposta linear, pode-se afirmar que a velocidade de propagação do som no meio é aproximadamente constante e também que o espectro de frequência é dominado pela frequência de excitação e seus harmônicos.

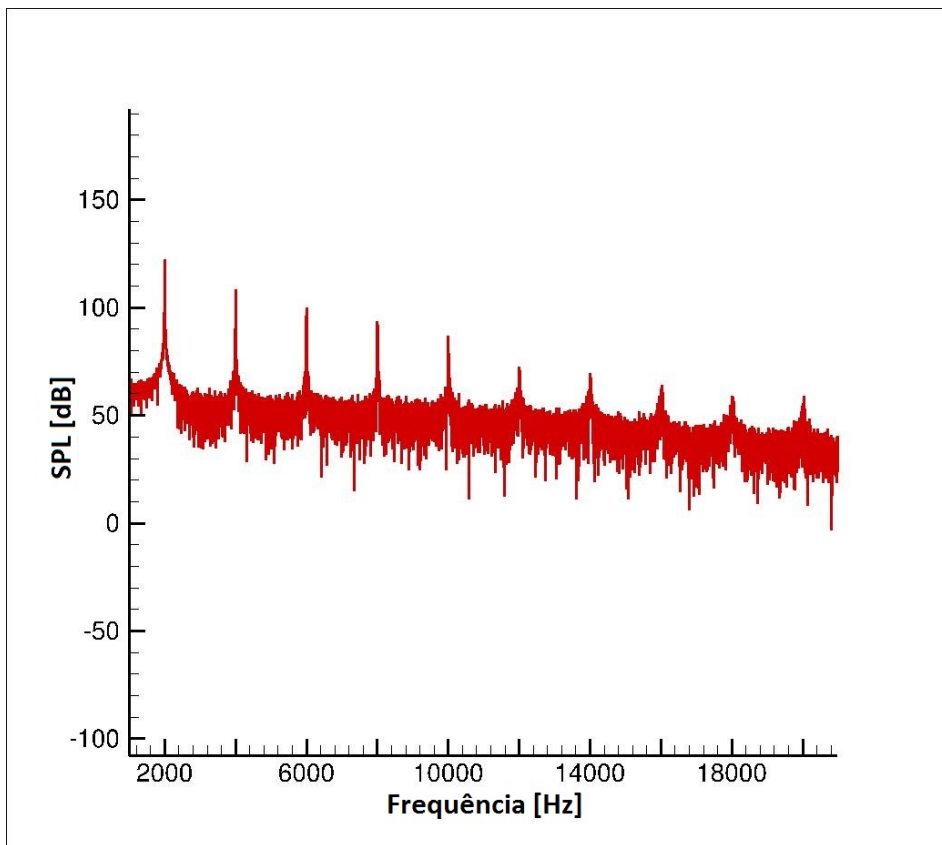


Figura 43 – SPL para o Caso 1.

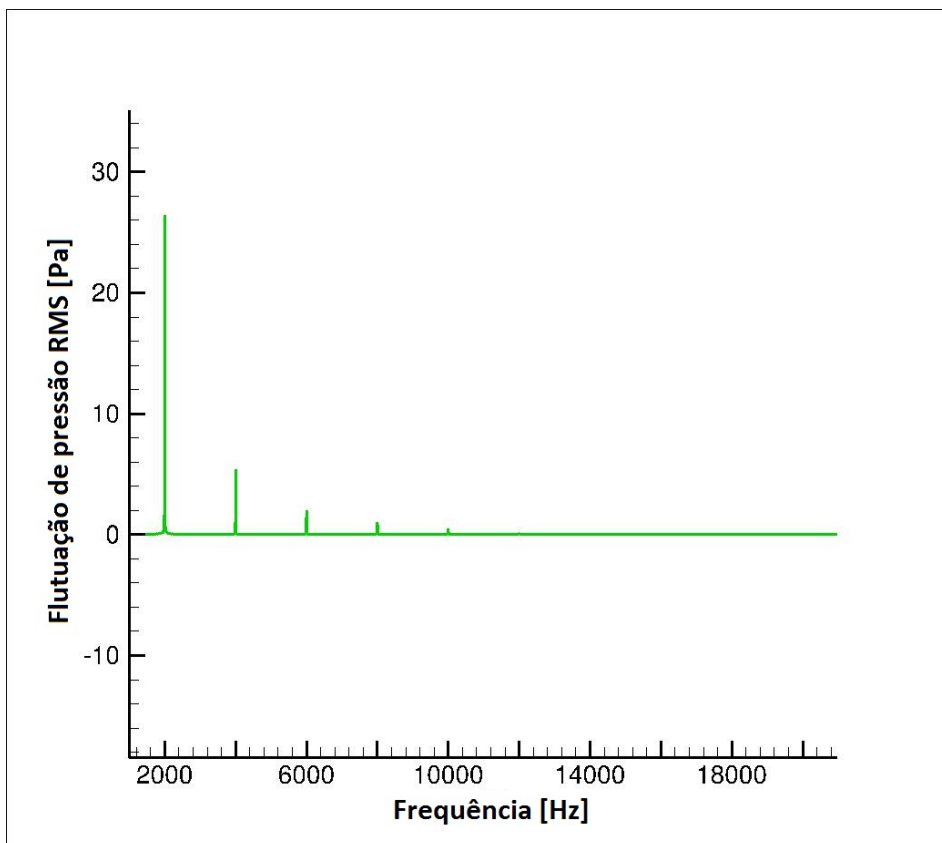


Figura 44 – Flutuação de pressão RMS para o Caso 1.

4.2.2.2 Caso 2

O segundo caso simulado impõe amplitude de $0,0001\text{ m}$ para a frequência de 2.000 Hz . A Figura 45 indica o início da transição entre a resposta linear e a não linear para a perturbação exercida ao sistema pelo pistão unidimensional, tal transição pode ser melhor observada na Figura 46. Vale destacar que, diferentemente do que foi apresentado para o Caso 1, o Caso 2 apresenta certo decaimento ao longo da região regular, o que pode ser facilmente entendido ao se considerar as irreversibilidades ligadas às ondas de choque presentes nas regiões não lineares.

O entendimento do fenômeno detalhado na Figura 46 é de fundamental importância para os resultados apresentados pela simulação. Ao se perturbar o sistema com as condições inicialmente impostas, a velocidade de propagação do som no meio varia devido a alterações no campo de pressão e temperatura, ou seja, a velocidade de propagação do som varia localmente, garantindo o desenvolvimento de ondas de choque. De forma resumida, a ocorrência de ondas de choque está associada ao fato de que a parte superior da onda tem velocidade maior do que a parte inferior, fenômeno responsável pelo achatamento parcial do perfil das ondas de propagação até que o choque seja evidenciado.

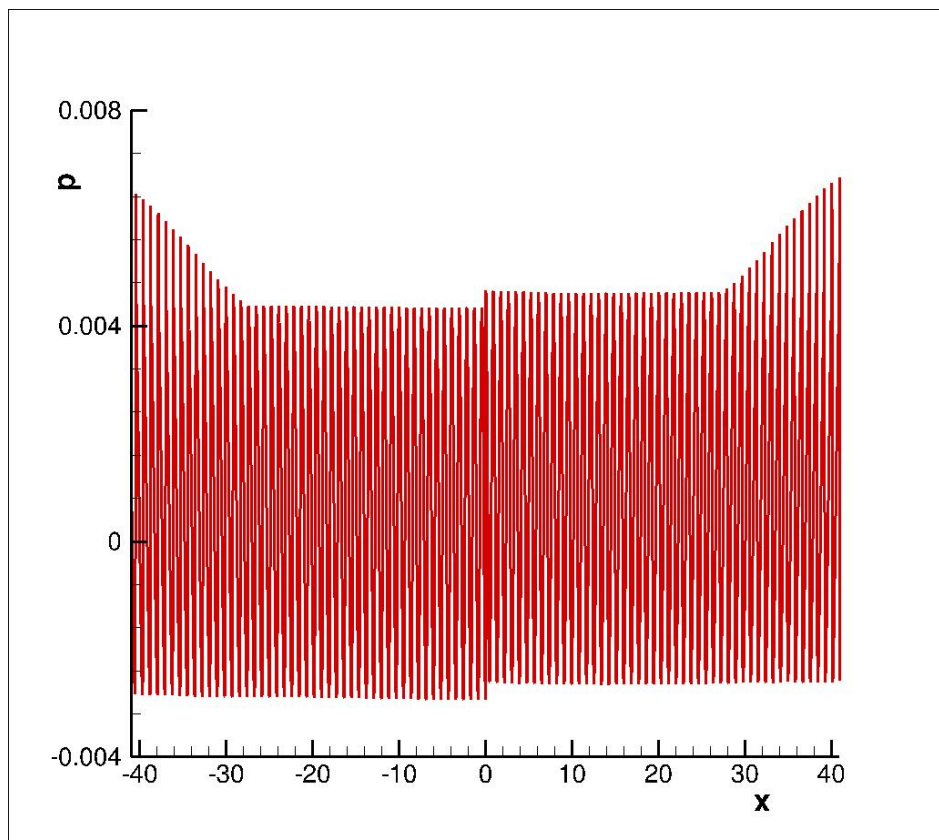


Figura 45 – Transição entre a linearidade e a não linearidade para o Caso 2.

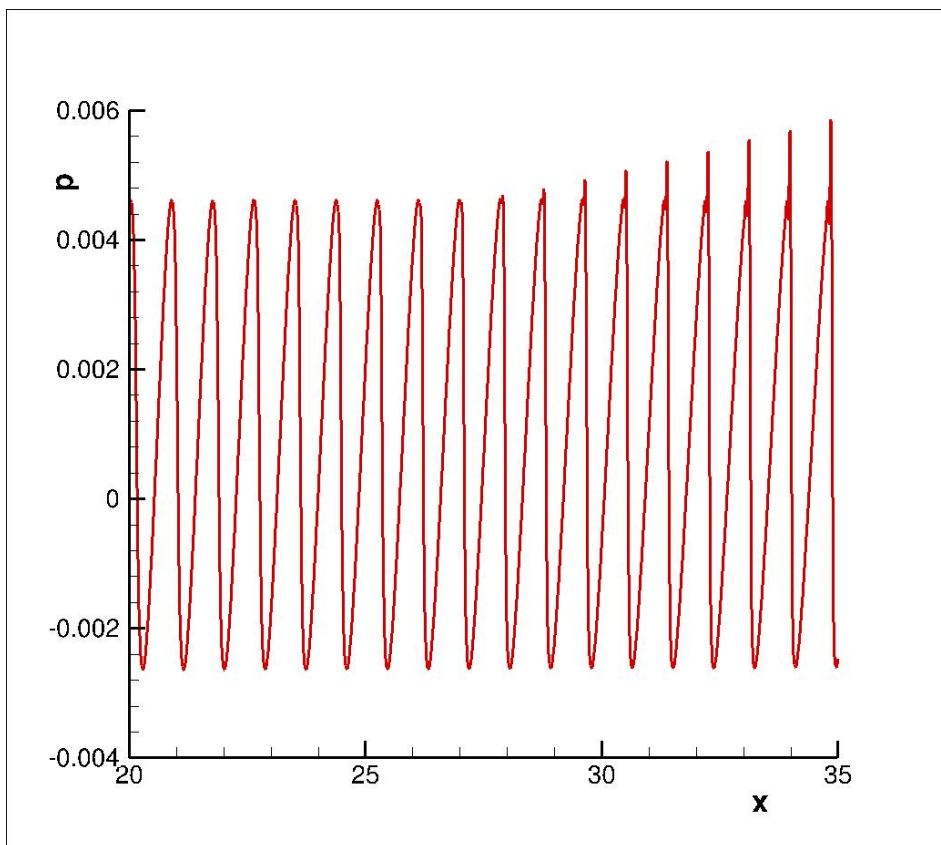


Figura 46 – Formação de ondas de choque na região não linear para o Caso 2.

Analisando as Figuras de 47 a 50, é possível notar o crescimento da não linearidade associada ao caso simulado. A Figura 49 revela ruído tonal para frequências mais baixas, enquanto que a Figura 50 deixa claro o início da dispersão de frequência ocorrendo em frequências mais elevadas. Deve-se destacar que a não linearidade representa a realidade física das equações governantes associadas ao problema. A medida que a amplitude de oscilação do pistão unidimensional é elevada, o espectro tende a ser cada vez menos dominado pela frequência de excitação e seus harmônicos, além disso, a velocidade de propagação do som no meio já não pode mais ser considerada constante.

Resta dizer ainda que o código numérico desenvolvido funcionou de forma altamente estável para a região linear, não linear e também para a região de transição, o que aumenta a confiabilidade dos resultados apresentados.

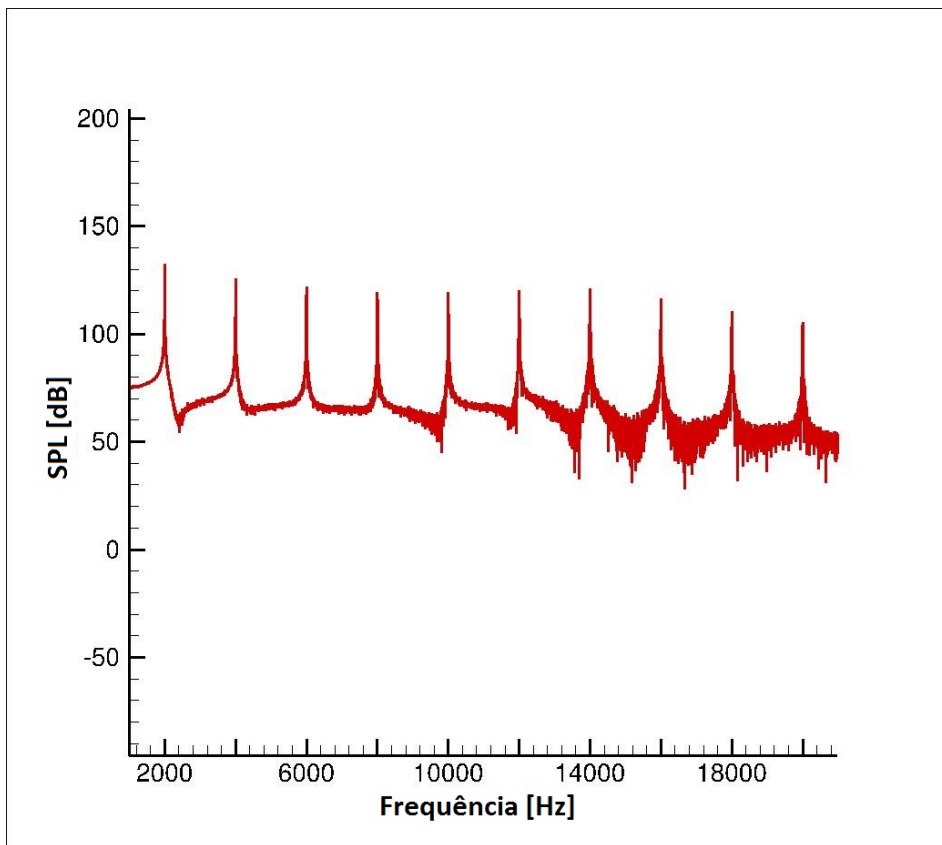


Figura 47 – SPL para o Caso 2.

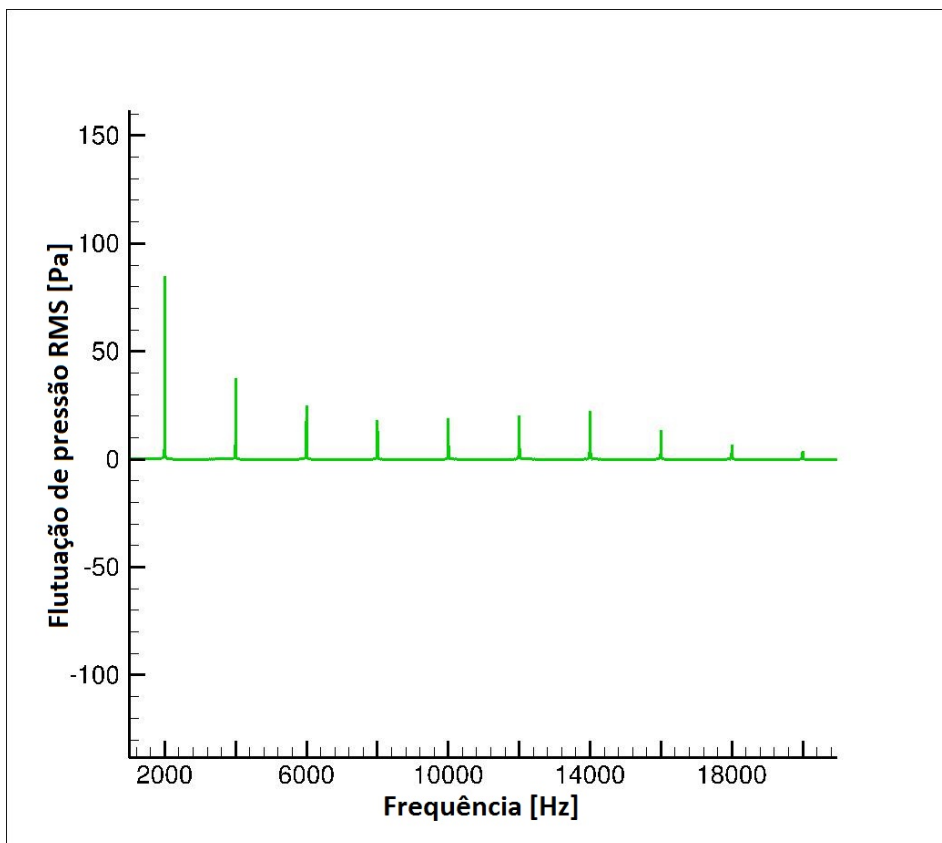


Figura 48 – Flutuação de pressão RMS para o Caso 2.

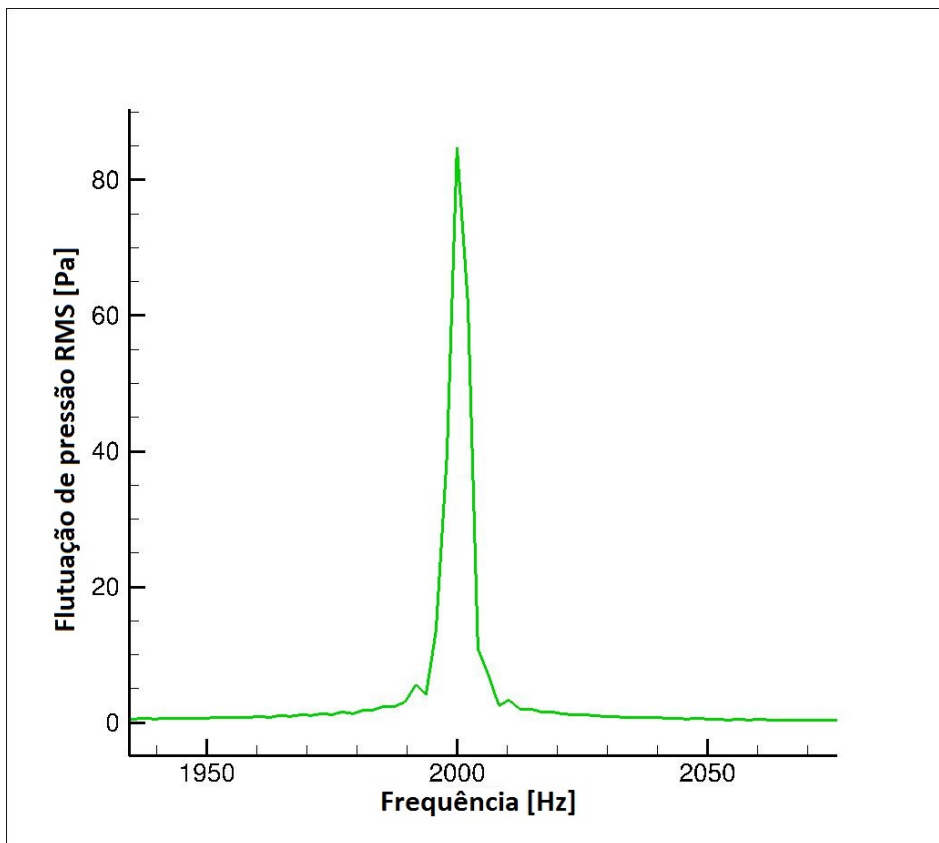


Figura 49 – Ruído tonal gerado em parte do espectro de frequência.

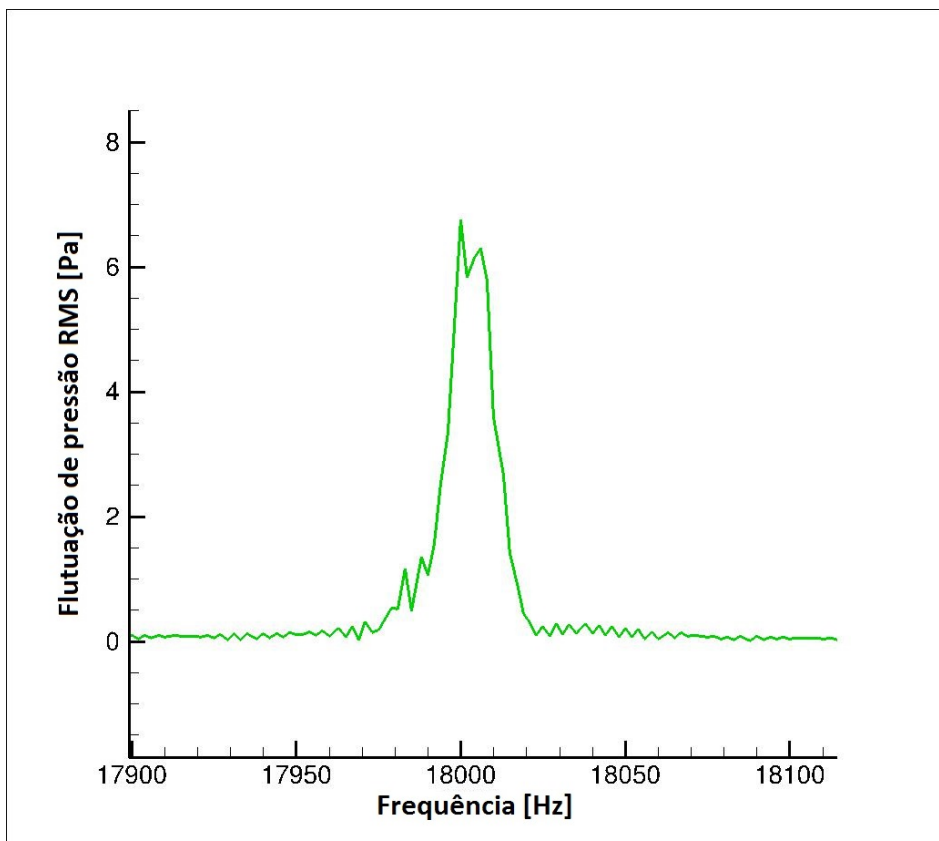


Figura 50 – Ruído banda larga gerado em parte do espectro de frequência.

4.2.2.3 Caso 3

O terceiro caso simulado impõe amplitude de $0,001\text{ m}$ para a frequência de 2.000 Hz . A Figura 51 indica que a região linear para o Caso 3 é muito menor do que a apresentada no Caso 2. Interessante notar que, com o aumento da amplitude do movimento vibratório, o desnível de pressão entre os lados de pressão da pá se torna menos acentuado devido ao aumento da velocidade do pistão. Com o objetivo de evidenciar a região linear e a não linear, as Figuras 52 e 53 revelam as respostas perfeitamente senoidal e do tipo dente de serra, respectivamente. Na Figura 52, é possível identificar com mais clareza a inversão das ondas por conta do lado de pressão alternante do pistão. Com a Figura 53, é possível ainda ver com mais clareza o erro numérico associado às ondas de choque, tal erro não pode ser responsabilizado pela geração de ruído do tipo banda larga, uma vez que está igualmente presente em todas as frentes de onda de choque. Ao se comparar as Figuras 56 e 50, é válido afirmar que o ruído de banda larga se intensificou com o aumento da amplitude do movimento do pistão unidimensional.

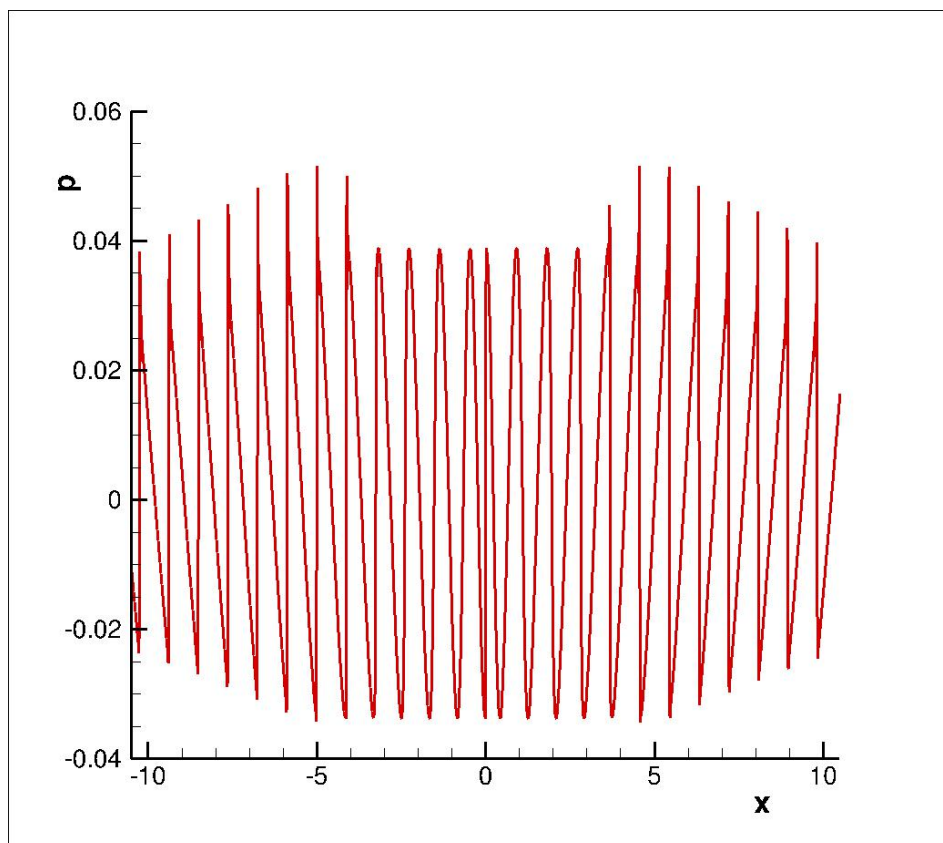


Figura 51 – Transição entre a linearidade e a não linearidade para o Caso 3.

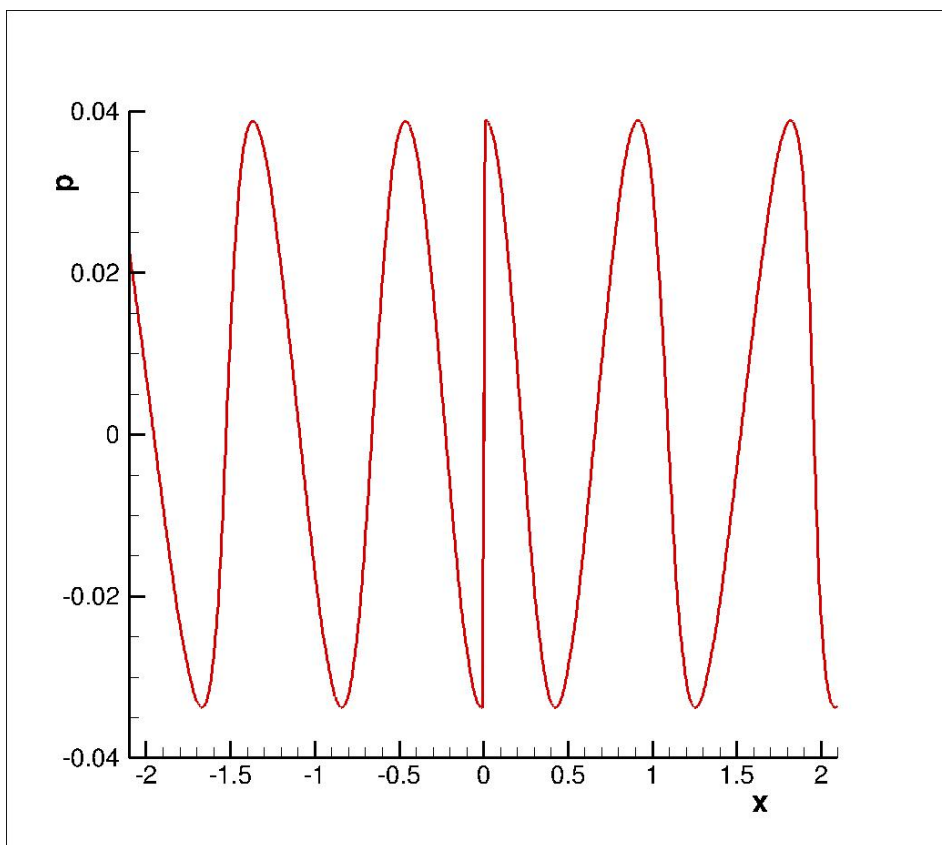


Figura 52 – Região perfeitamente linear.

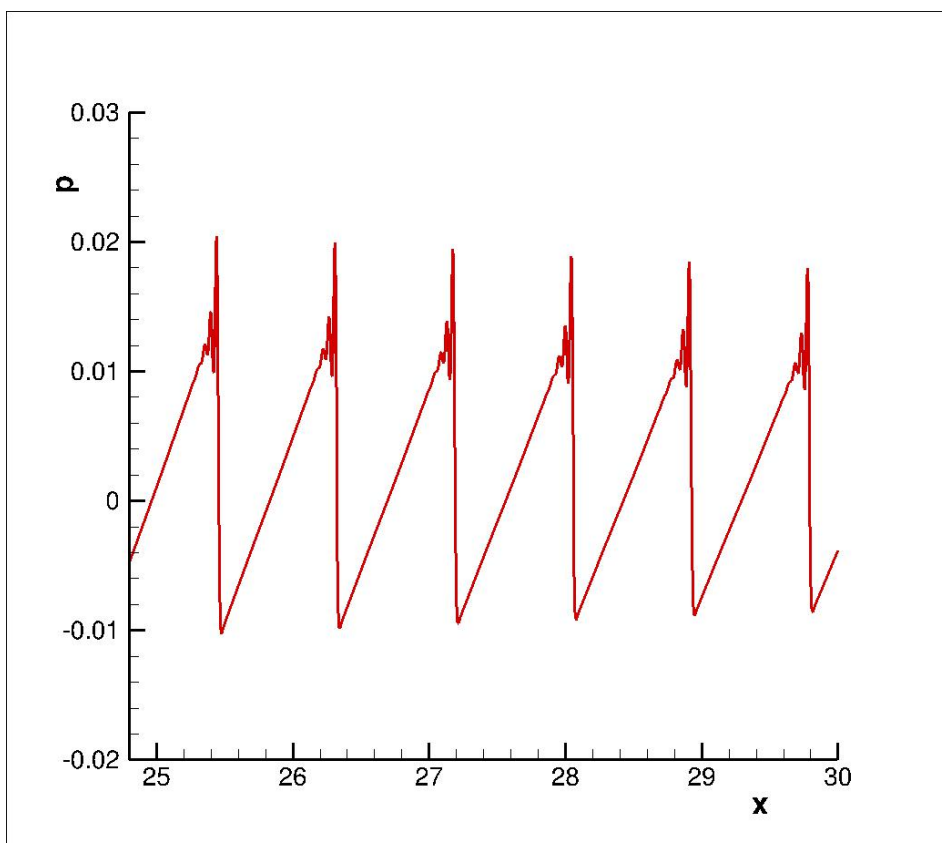


Figura 53 – Região perfeitamente não linear.

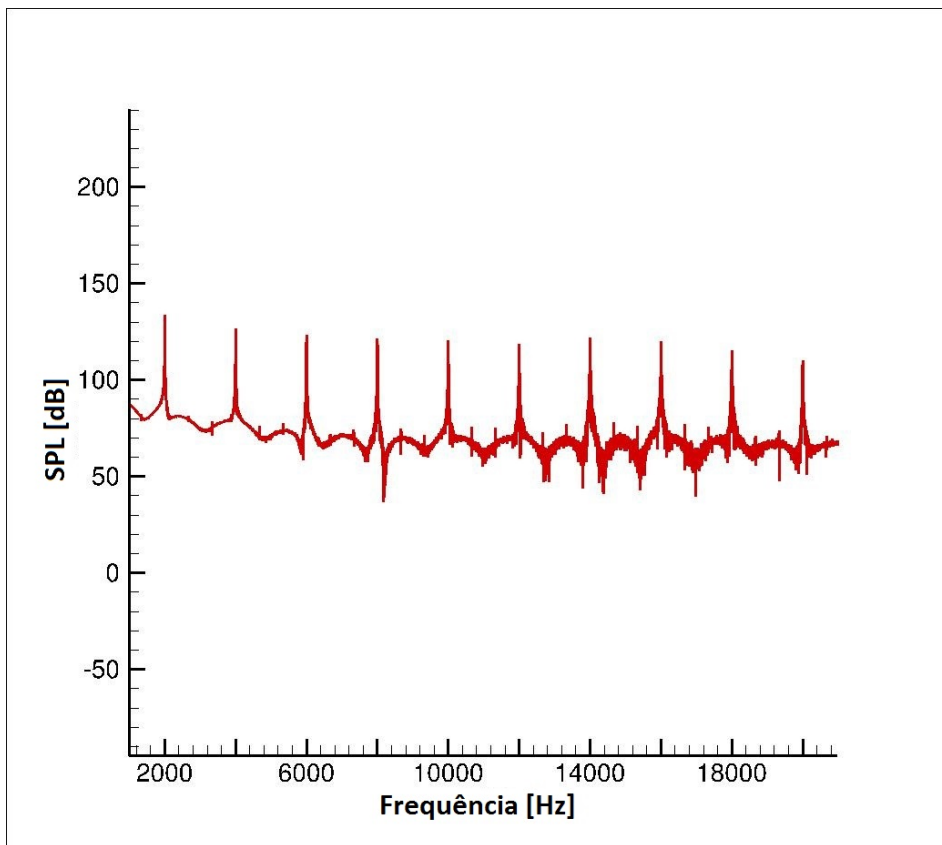


Figura 54 – SPL para o Caso 3.

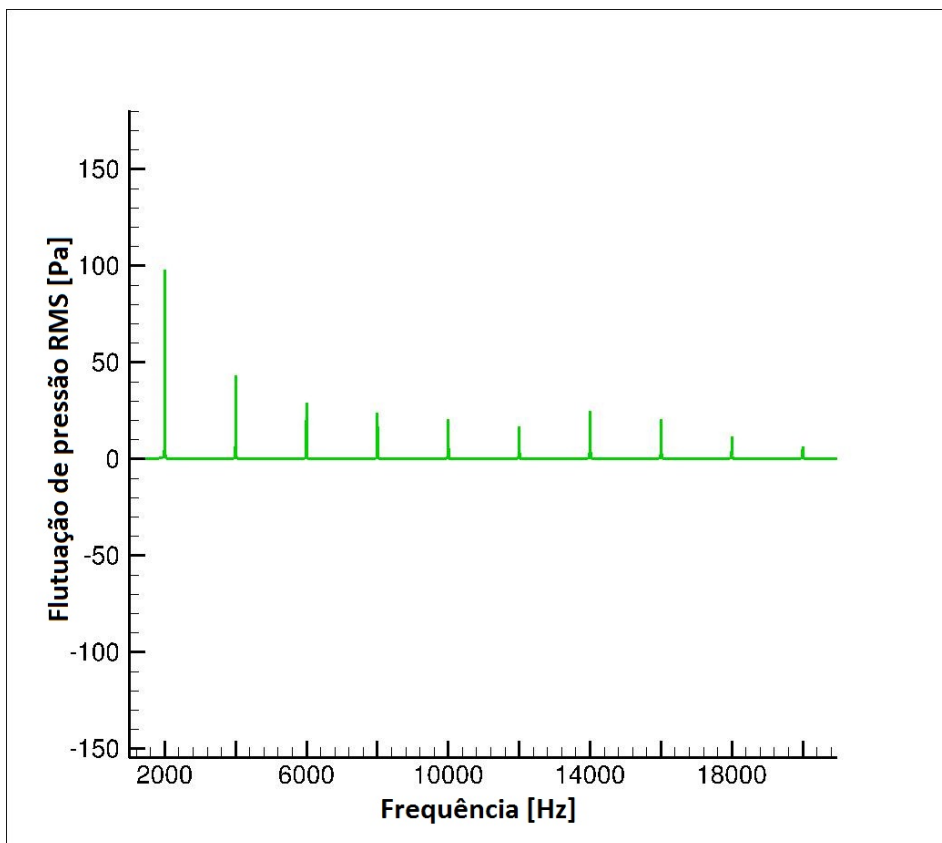


Figura 55 – Flutuação de pressão RMS para o Caso 3.

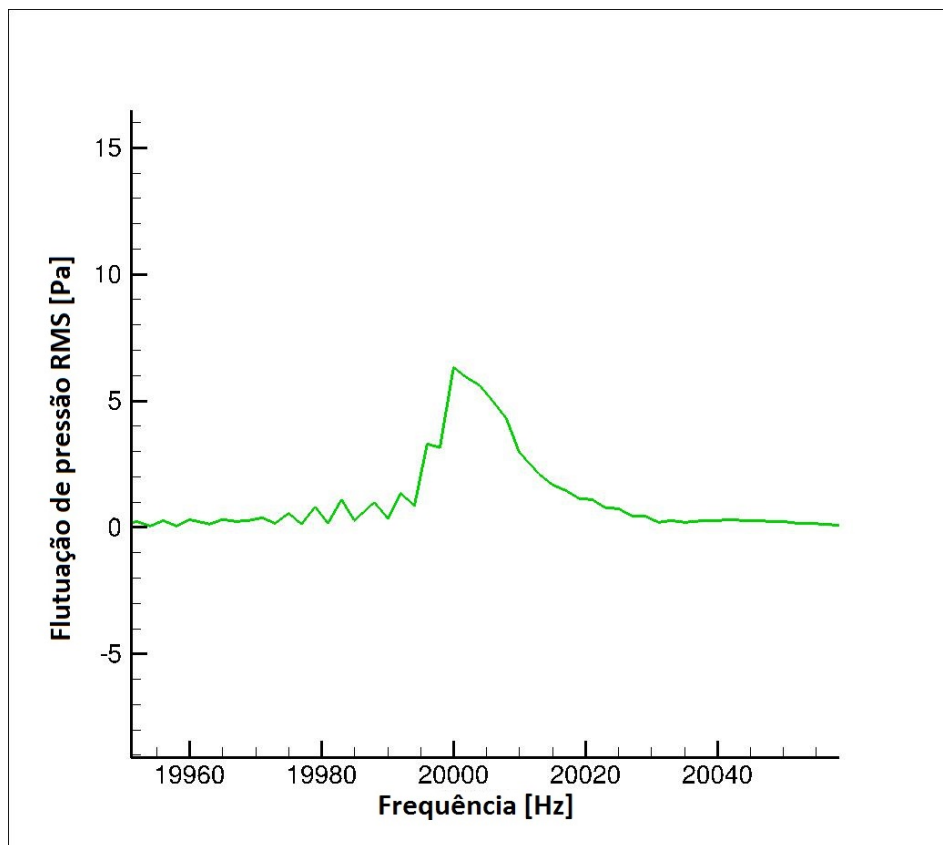


Figura 56 – Ruído de banda larga gerado em parte do espectro de frequência.

4.2.2.4 Caso 4

O quarto caso simulado impõe amplitude de $0,01\text{ m}$ para a frequência de 2.000 Hz . A Figura 57 evidencia a completa não linearidade da solução para as condições simuladas. A caracterização das ondas do tipo dente de serra como sendo ondas de choque fica inegável com a análise da baixa densidade de volumes de controle para a elevada variação de pressão, conforme indicado na Figura 58. Apesar das Figuras 60 e 61 mostrarem redução na influência tonal e aumento da dispersão de frequência por meio de ruídos de banda larga, a solução para o caso simulado ainda é predominantemente tonal.

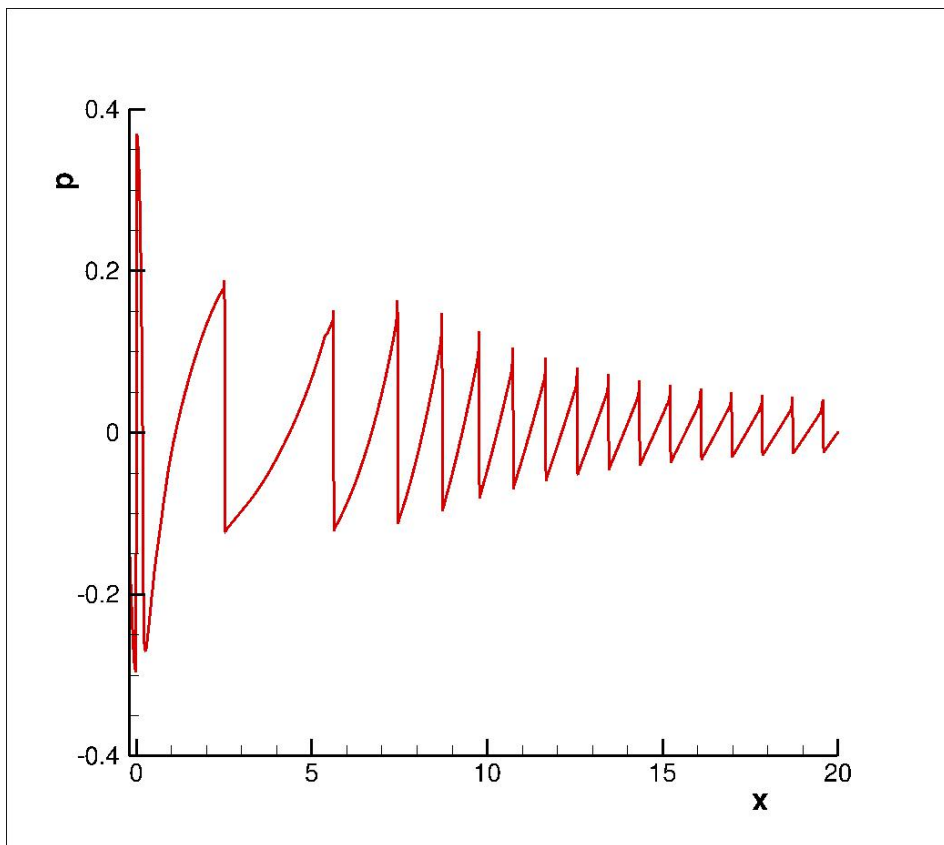


Figura 57 – Não linearidade ao longo de toda a região regular.

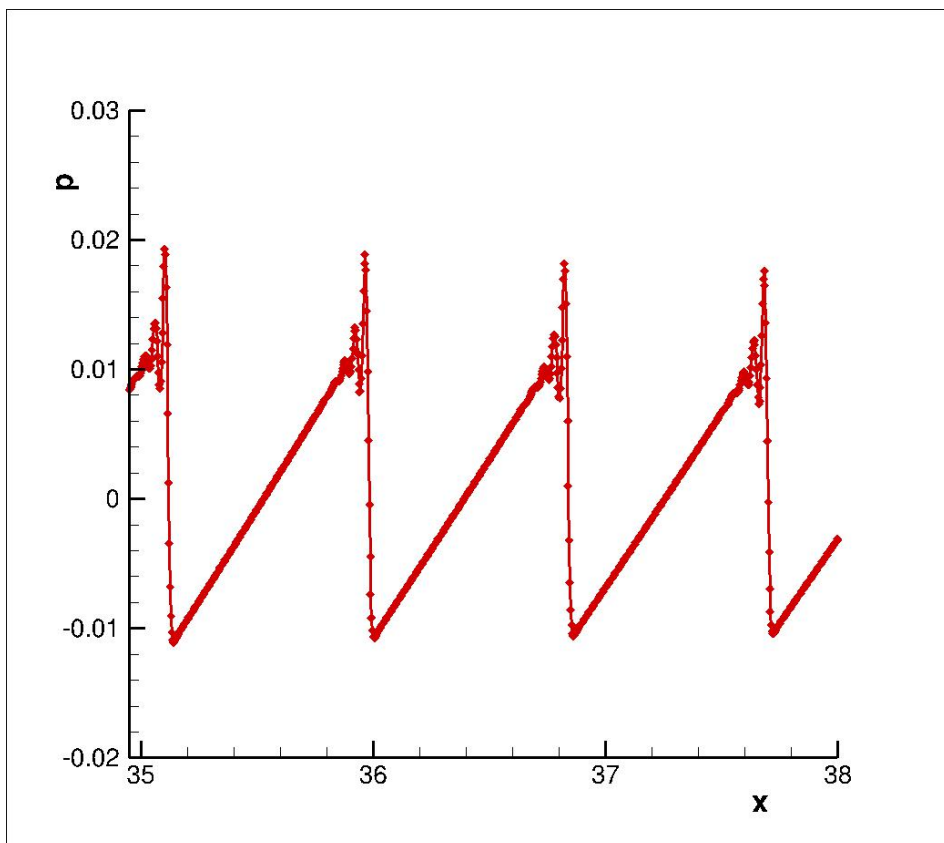


Figura 58 – Disposição dos volumes de controle e caracterização das ondas de choque.

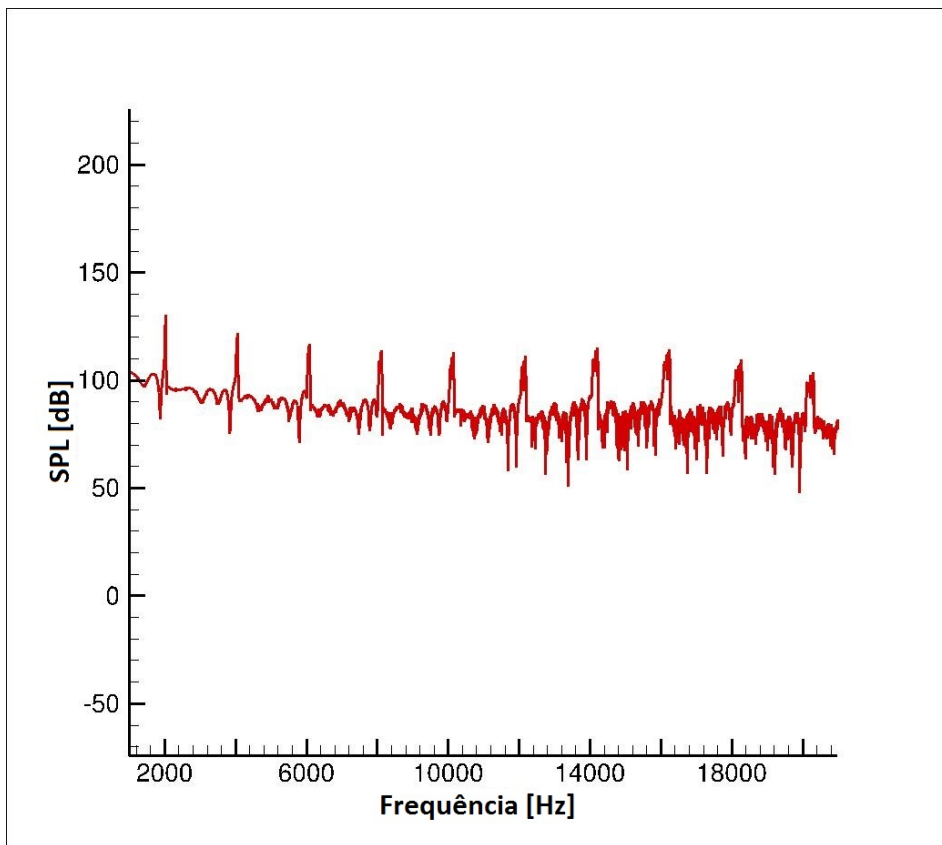


Figura 59 – SPL para o Caso 4.

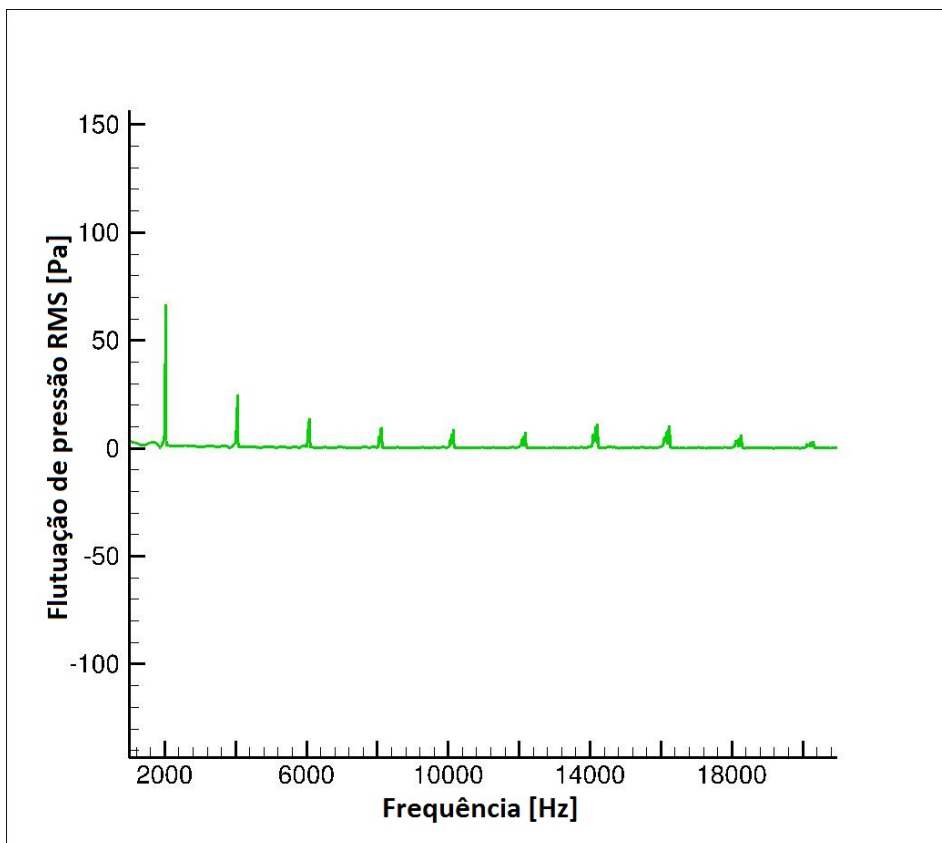


Figura 60 – Flutuação de pressão RMS para o Caso 4.

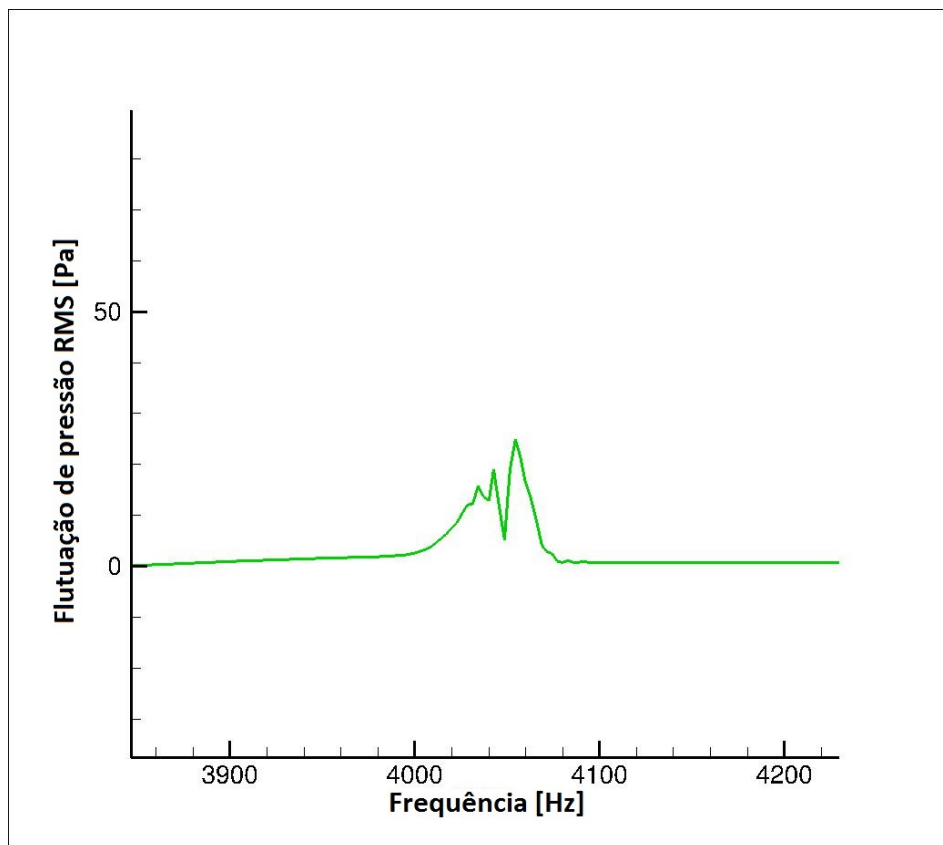


Figura 61 – Ruído de banda larga gerado em parte do espectro de frequência.

4.2.3 Resultados - Análises em diversas frequências

Os resultados apresentados adiante levam em consideração a resposta do sistema para baixa amplitude e frequências diversas.

4.2.4 Caso 1

O primeiro caso simulado dessa série de resultados impõe amplitude de $0,001\text{ m}$ para a frequência de 10.000 Hz . A Figura 62 evidencia que, com o aumento da frequência, o processo de superposição de ondas começa a acontecer. As primeiras frentes de onda afetam os campos de temperatura e pressão do sistema e as novas frentes de onda já se propagarão de forma distinta, fenômeno que não ocorre em baixas frequências.

A superposição, conforme ilustrado na Figura 62, pode ser considerada como o início da dispersão de frequência ao longo do espectro, mas a resposta quanto à geração de ruído ainda é predominantemente tonal, como se pode notar pelas Figuras 63 e 64. Apesar da predominância tonal, já é possível perceber indícios de banda larga na Figura 65.

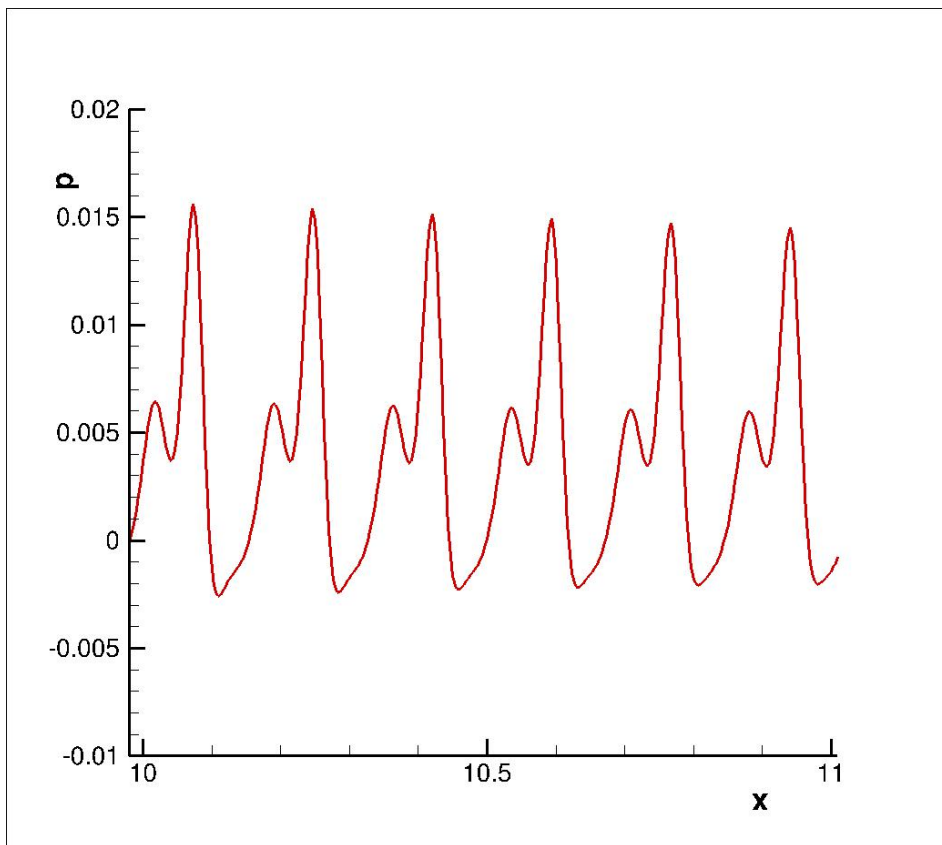


Figura 62 – Superposição de ondas no Caso 1.

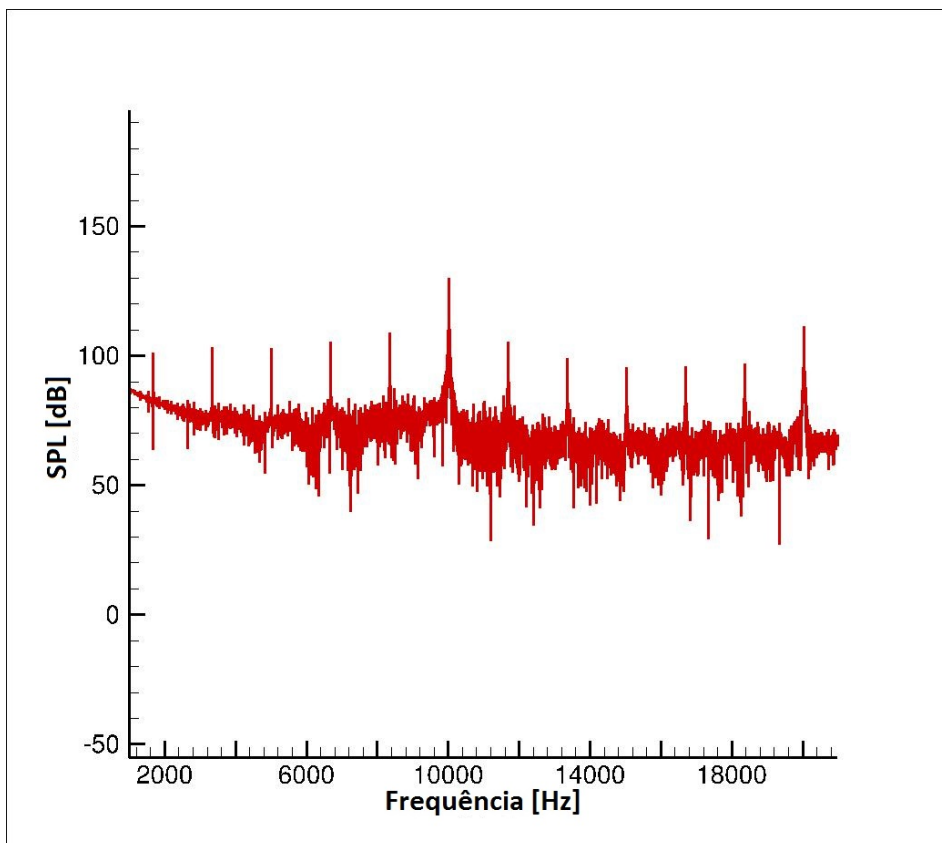


Figura 63 – SPL para o Caso 1.

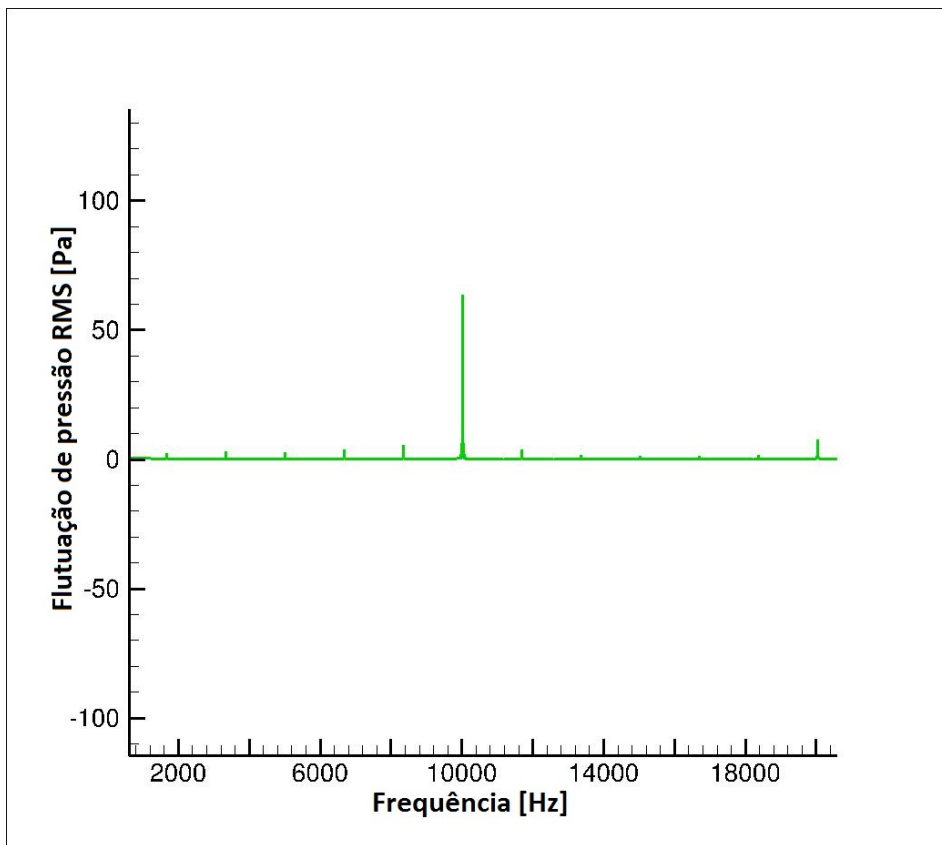


Figura 64 – Flutuação de pressão RMS para o Caso 1.

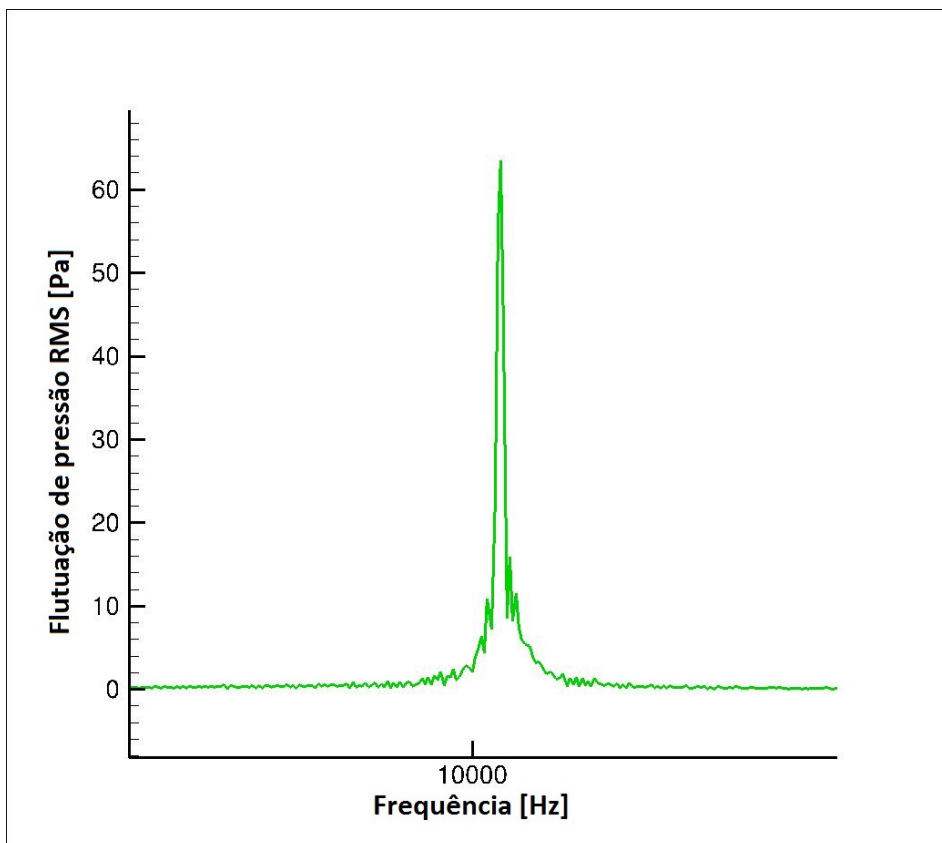


Figura 65 – Predominância tonal na solução do Caso 1.

4.2.5 Caso 2

O segundo caso simulado dessa série de resultados impõe amplitude de $0,0001\text{ m}$ para a frequência de 50.000 Hz . Apesar de que as condições simuladas não foram suficientes para contaminar todo o espectro de frequência com a banda larga, conforme ilustrado pelas Figuras 67 e 68, grande parte do mesmo apresenta elevada dispersão de frequência, como apresentado na Figura 69.

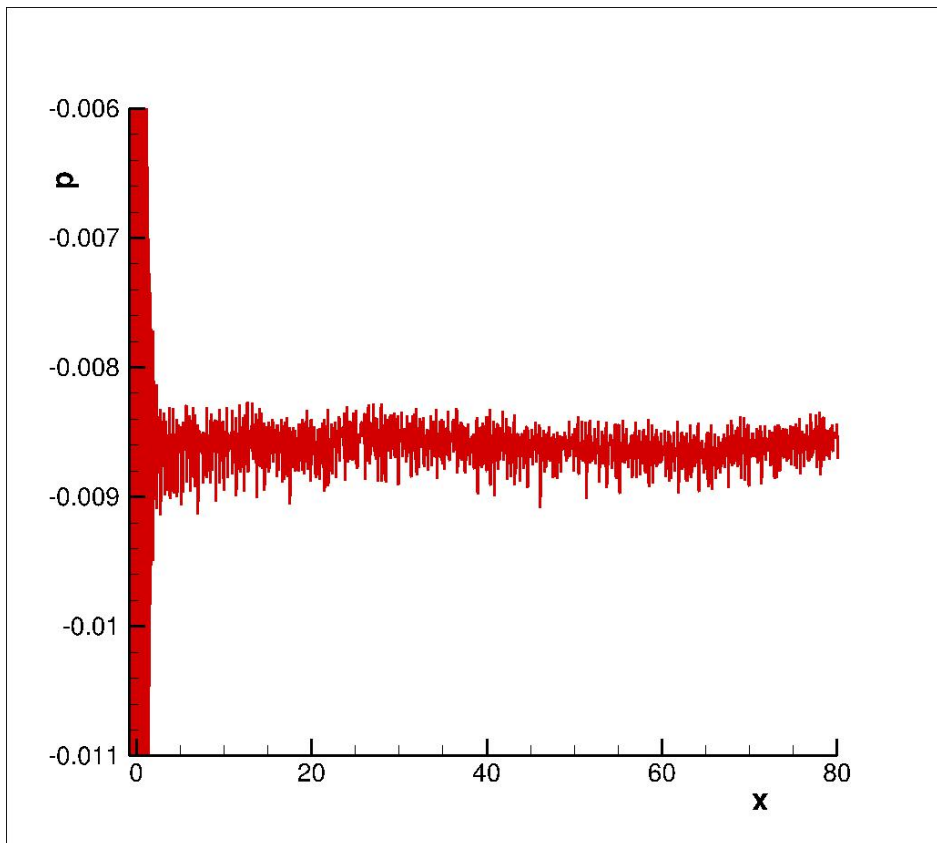


Figura 66 – Resposta em pressão para o Caso 2.

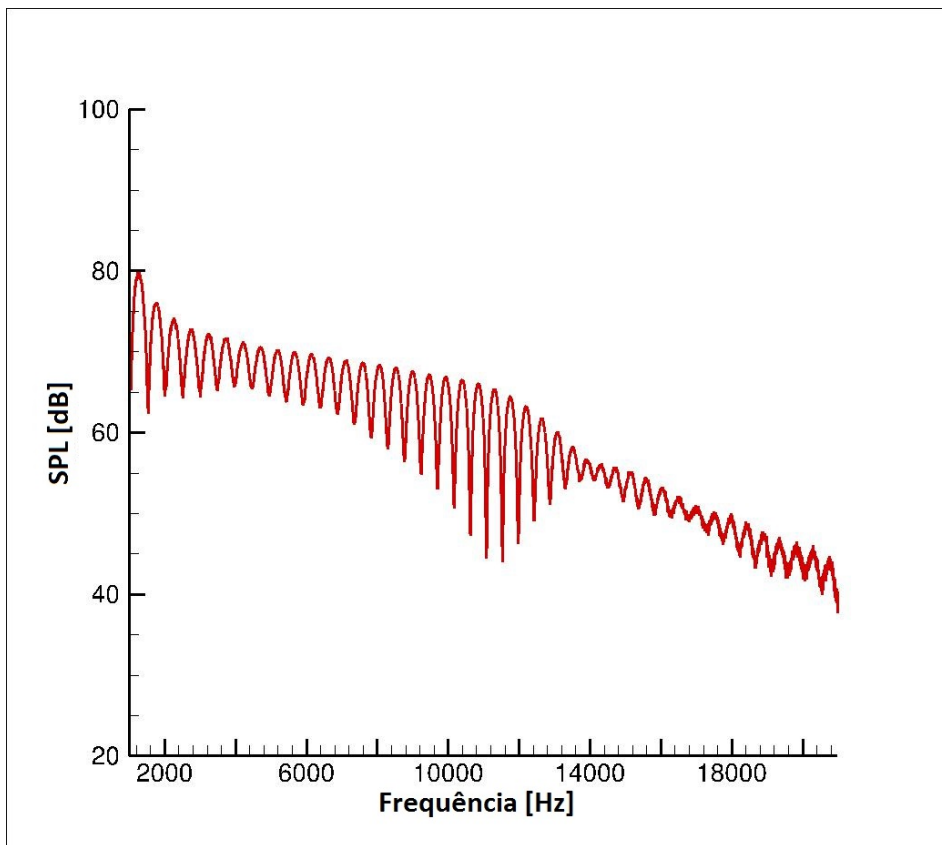


Figura 67 – SPL para o Caso 2.

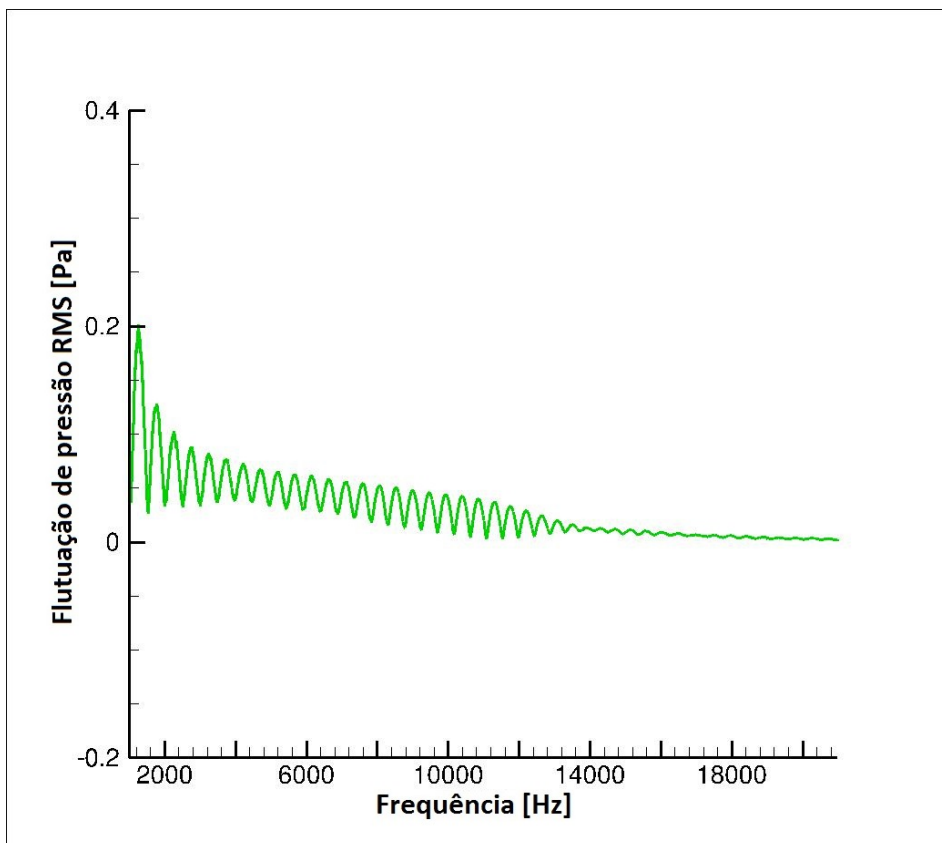


Figura 68 – Flutuação de pressão RMS para o Caso 2.

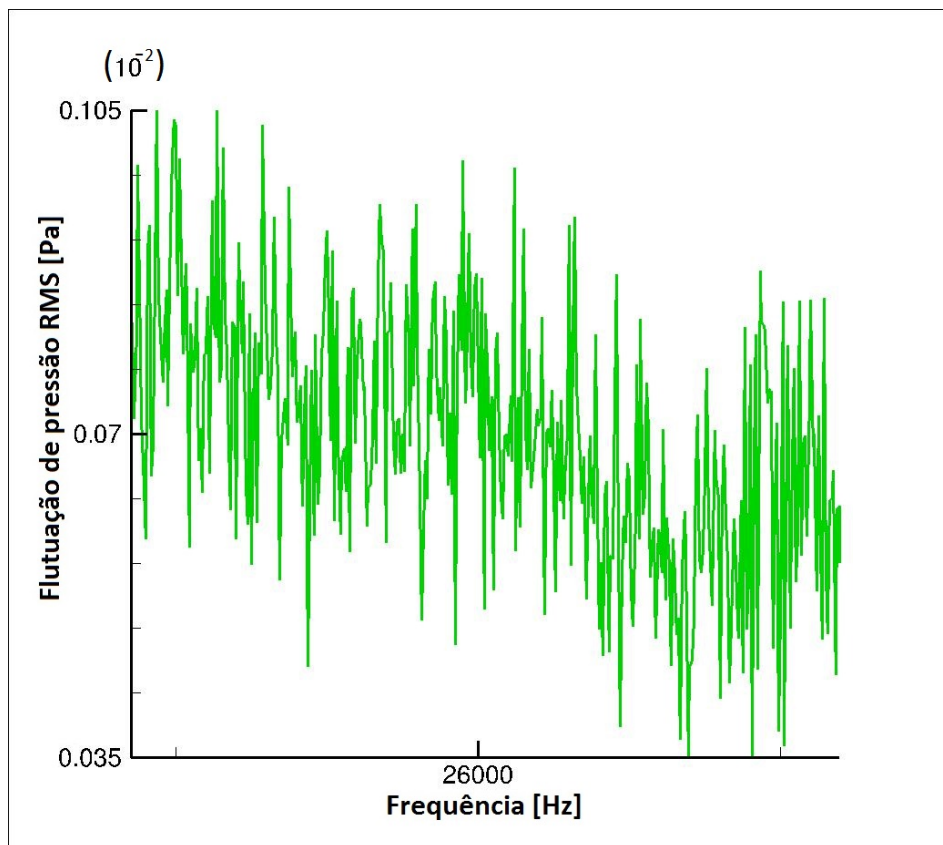


Figura 69 – Contaminação de parte do espectro de frequência pela banda larga.

4.2.6 Caso 3

O terceiro caso simulado dessa série de resultados impõe amplitude de $0,0001\text{ m}$ para a frequência de 500.000 Hz . A Figura 70 evidencia uma resposta completamente não linear, o que pode ser confirmado pelo fato de que a Figura 71 indica a total predominância do ruído de banda larga. Já nas Figuras 72 e 73, é possível notar que todo o espectro foi contaminado com a dispersão de frequência.

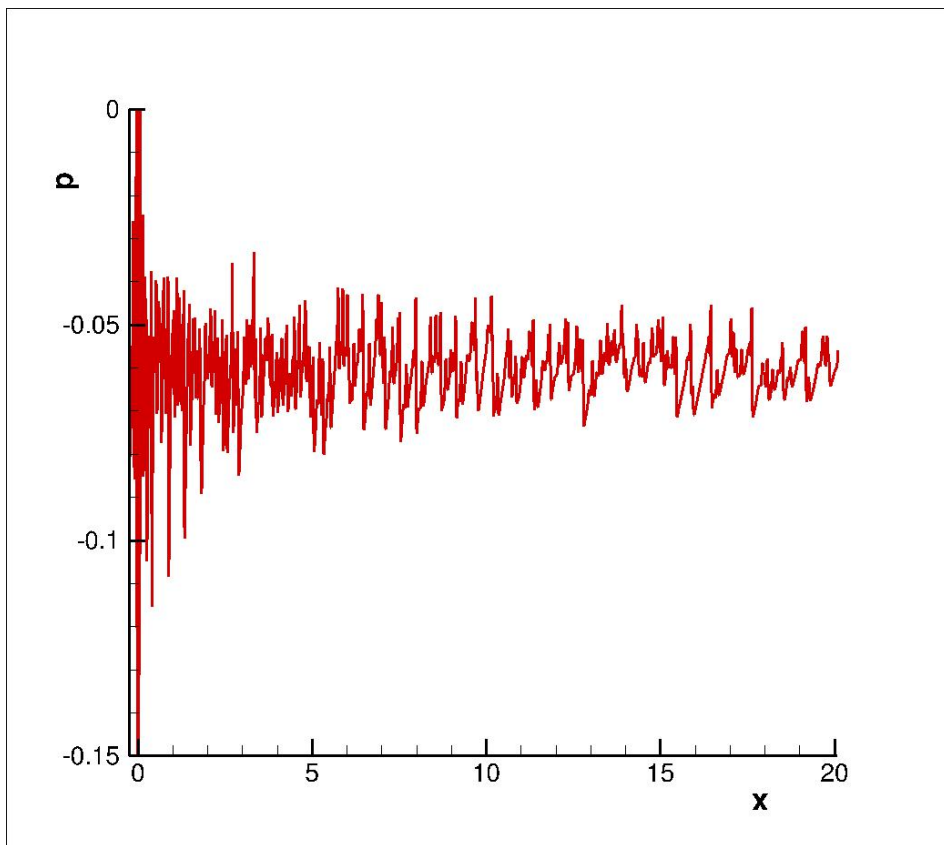


Figura 70 – Resposta em pressão para o Caso 3.

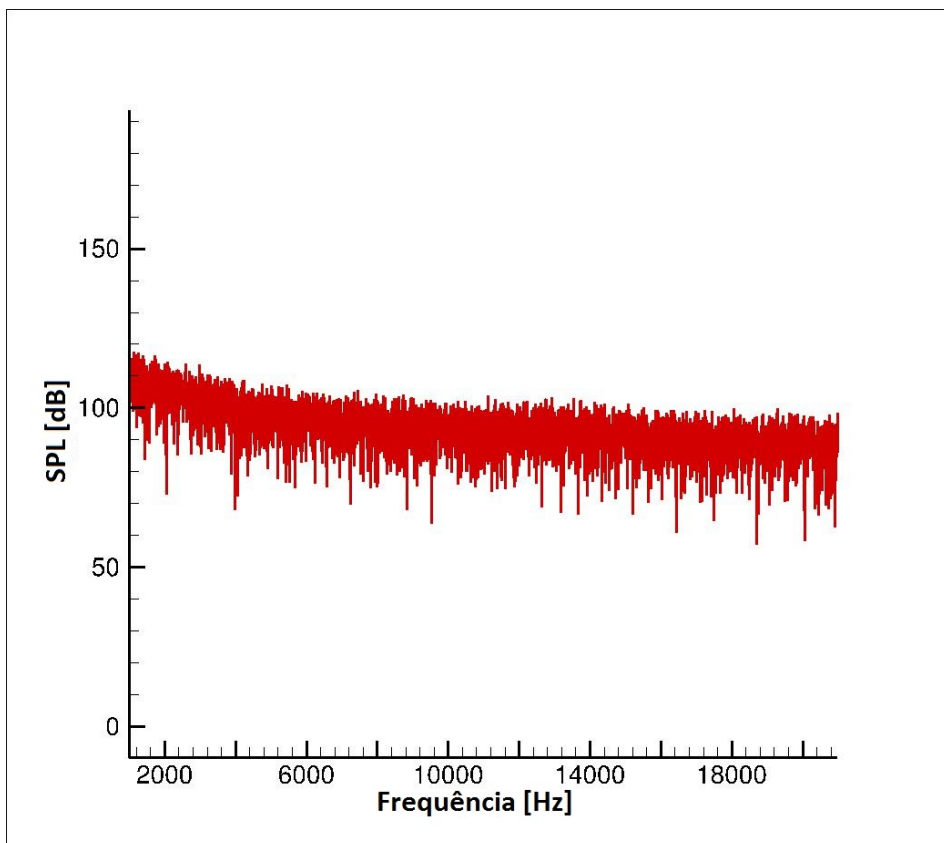


Figura 71 – SPL para o Caso 3.

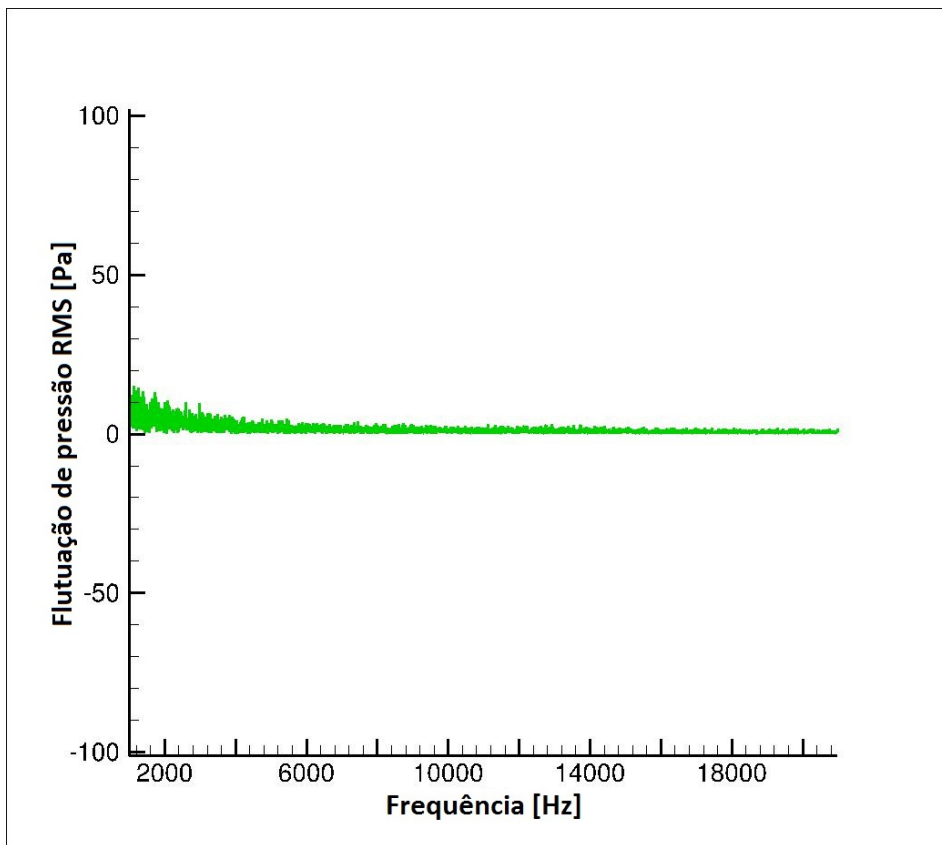


Figura 72 – Flutuação de pressão RMS para o Caso 3.

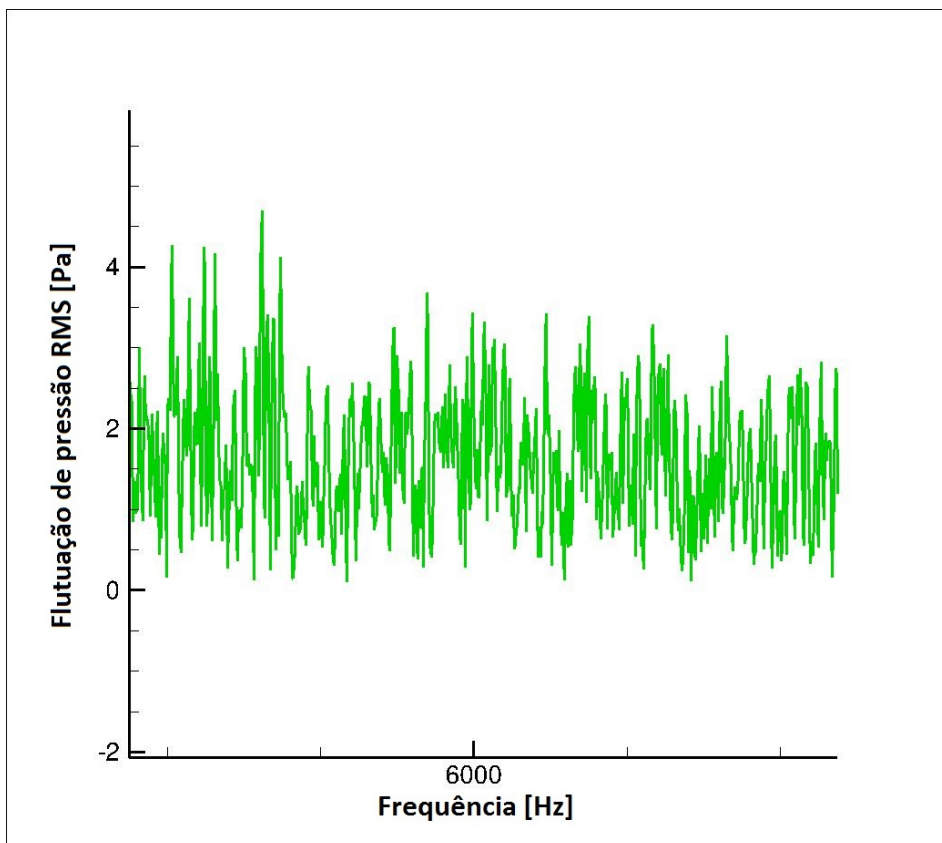


Figura 73 – Contaminação de todo o espectro de frequência pela banda larga.

Por fim, a Figura 74 serve para mostrar que, para as pequenas perturbações impostas ao longo de todo o trabalho, o campo de pressão está acoplado ao campo de velocidade.

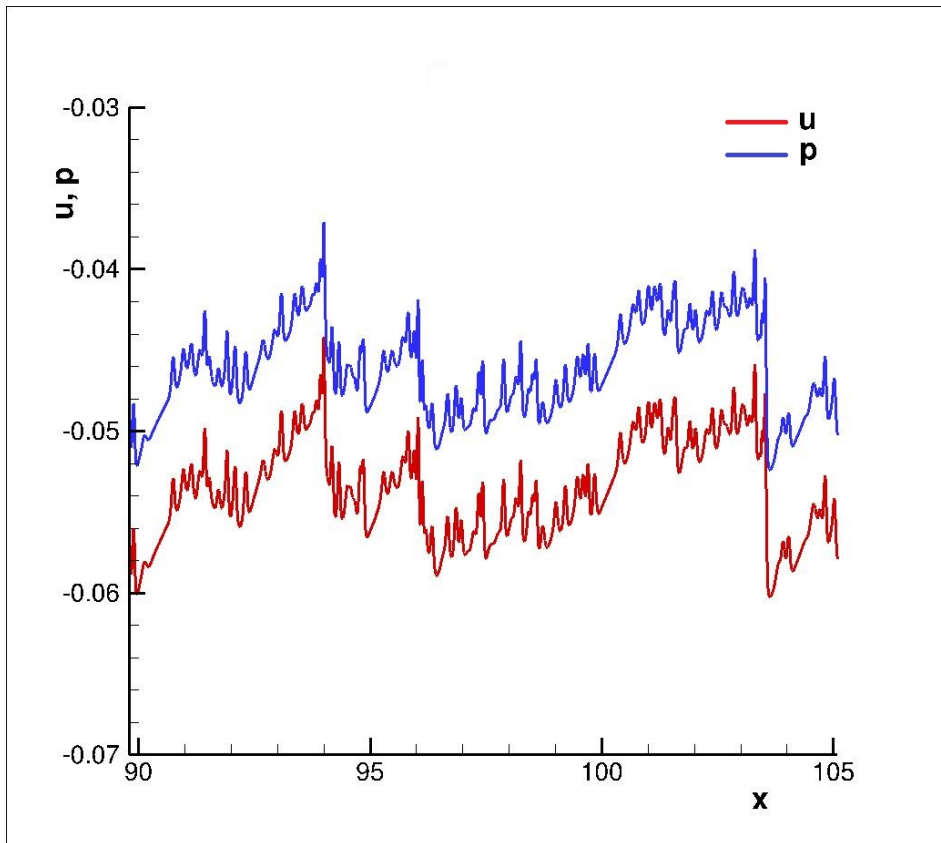


Figura 74 – Acoplamento dos campos de pressão e velocidade para pequenas perturbações.

5 Conclusões e trabalhos futuros

5.1 Conclusões

Primeiramente, a validação do código numérico foi realizada para o caso de onda de choque e leque de expansão por meio do tubo de choque. A segunda validação consistiu em comparar o decaimento de ondas de choque com o resultado teórico. O terceiro passo consistiu em realizar a validação para uma pequena perturbação gerando uma resposta linear, solução em que o espectro de frequência é dominado pela frequência de excitação. Diante da completa validação, foi possível avaliar separadamente o comportamento do sistema para o aumento da amplitude de oscilação do pistão unidimensional e também da frequência de excitação. Com o aumento da amplitude, observou-se o desenvolvimento da resposta não linear, evidenciando que a velocidade de propagação do som no meio não é uma constante. Para o aumento da frequência, a predominância tonal deu lugar ao ruído de banda larga e soluções totalmente não lineares foram obtidas. Tanto para a formação de ondas de choque quanto para a dispersão de frequência ao longo de todo o espectro, o caminho do caos foi observado.

Pelos resultados obtidos a partir de simulações numéricas, fica muito claro que a não linearidade das equações é parâmetro essencial na dispersão de frequência ao longo de todo o espectro, independente da viscosidade e também da dimensão do problema avaliado. A relevância do ruído de banda larga se mostrou crescente diante de amplitudes de oscilação cada vez maiores e predominante para os casos de elevada frequência. Com isso, a solução linear comumente adotada por diversas fontes bibliográficas como sendo a regra geral não se confirmou. A linearidade só foi obtida para condições muito restritas de amplitude, o que fortalece o conceito de dispersão acústica mesmo para casos unidimensionais. Diante disso, é possível afirmar que, para geometria tridimensionais complexas, como é o caso de turbofans aeronáuticos, a dispersão de frequência é um fenômeno real.

5.2 Trabalhos futuros

Com o foco na complementaridade do trabalho e também no enriquecimento do nível de detalhes, proposições de trabalhos futuros consistem na avaliação bidimensional e tridimensional da dispersão acústica. O estudo bidimensional poderia ser realizado com uma geometria cilíndrica pulsando em amplitudes e frequências diversas. Analogamente, o caso tridimensional poderia ser realizado com a geometria de uma esfera pulsante em amplitudes e frequências diversas. É importante considerar os resultados unidimensionais para se prosseguir com o estudo da dispersão acústica, já que a mesma ocorre sem que haja qualquer rotacionalidade, mas apenas devido à natureza não linear das equações governantes.

Referências

- Anderson, J. (1995). *Computational Fluid Dynamics - The Basics with Applications*. Tata-Mcgraw Hill.
- Anderson, J. (2003). *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*. McGraw-Hill.
- Arash, M. & Jazayeri, A. (2002). *Numerical Simulation of Combustion in Porous Media*. Tossi University of Technology.
- Aris, R. (1962). *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications.
- Batchelor, G. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library.
- Berton, J., Haller, J., Thurman, R., & Fisher, L. (2014). <https://mdao.grc.nasa.gov>. GLENN RESEARCH CENTER.
- Bobenrieth, R. (2014). *Notas de aula: Tópicos Especiais em Mecânica dos Fluidos*. Laboratório de Aeroacústica Computacional - Universidade de Brasília.
- CATIA (2013). <http://grabcad.com>. Catia.
- Control, N. (2014). www.industrialnoisecontrol.com. INC.
- Denenberg, J. (2014). <http://doctord.dyndns.org>. Noise Cancellation Technologies.
- Freire, A. & Miserda, R. (2004). *Simulação Numérica do escoamento Transônico Laminar em uma Base Bidimensional*. Laboratório de Aeroacústica Computacional - Universidade de Brasília.
- Gutierrez, B. (2014). *Direct Noise Computation of Linear and Nonlinear Rotor-Stator Interaction Modes in Transonic Cascades*. Laboratório de Aeroacústica Computacional - Universidade de Brasília.
- Hirsch, C. (1988). *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Chichester.
- Hirsch, C. (2007). *Numerical Computation of Internal and External Flows - SECOND EDITION*. Sabre Foundation.
- Hoffman, D. (1992). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker.
- Iazzetta, F. (2007). www.eca.usp.br. USP.
- Jameson, A. (1997). *Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes*. AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, AIAA-81-1259.

- Laurence, N. (2011). <http://grupomotopropulsor.blogspot.com.br>. Grupo Motopropulsor.
- Leódido, L., Diniz, A., & Vianna, J. (2004). *Uso de um Tubo de Choque Didático em Aulas Práticas de Engenharia Mecânica*. Universidade de Brasília.
- Liepmann, H. & Roshko, A. (1957). *Tubo de Choque*. California Institute of Technology.
- Maldonado, A. & Miserda, R. (2012). *Predição Numérica do Ruído Tonal para o Advanced Noise Control Fan*. Laboratório de Aeroacústica Computacional, UnB.
- Mazza, R. (2014). *Fundamentos em CFD - Volumes Finitos*. FEM/UNICAMP.
- Miserda, R. (2013). *Predição Numérica da Geração, Propagação e Atenuação do Ruído de Fan em Turbofans*. Laboratório de Aeroacústica Computacional - Universidade de Brasília.
- Miserda, R. (2014). *Notas de aula: Escoamentos Compressíveis*. Laboratório de Aeroacústica Computacional - Universidade de Brasília.
- Mofrey, C. & Fisher, M. (1970). *Shock-Wave Radiation from a Supersonic Ducted Rotor*. Institute of Sound and Vibration Research, The University, Southampton.
- Noise, B. (2014). <http://www.brd-nonoise.com>. Noise and Vibration Control.
- Noronha, B. & Morais, L. (2010). *Tubo de Choque*. Universidade Estadual de Campinas.
- Oliveira, M. (2005). *Termodinâmica*. Livraria da Física.
- Pazetto, G. (2011). *Simulação Numérica do Ruído Tonal Gerado por Dois Cilindros*. Laboratório de Aeroacústica Computacional - Universidade de Brasília.
- Physics, H. (2014). <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu>. Hyper Physics.
- Pimenta, B. (2014). *Modelagem e Simulação Numérica do Ruído Gerado e Propagado de Forma Não Linear em Turbofans Aeronáuticos*. Laboratório de Aeroacústica Computacional, UnB.
- Pimenta, B. & Miserda, R. (2014). *Direct Noise Computation of Linear and Nonlinear Rotor-Stator Interaction Modes in Transonic Cascades*. Laboratório de Aeroacústica Computacional, UnB.
- Rienstra, S. (2006). *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology.
- Silva, D. (2009). *Análise de Escoamento Hipersônico em Tubeiras do Tipo Convergente-Divergente em Não-Equilíbrio Químico*. Dissertação de Mestrado - INPE.
- Smith, M. (1989). *Aircraft noise*. Cambridge Aerospace Series.
- Sutliff, D. (2005). *Rotating Rake Turbofan Duct Mode Measurement System*. NASA TM 2005-213828.

- Tanehill, J., Dale, A., & Richard, P. (1997). *Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes*. AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, AIAA-81-1259.
- Traveria, M. (2012). <http://cesda.wordpress.com>. Cesda Blog.
- Tyler, J. & Sofrin, T. (1962). *Axial Flow Compressor Noise Studies*. SAE Transactions.
- Valle, K. (2012). *Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta*. Universidade Federal de Minas Gerais.
- Wheeler, R. (2014). *Jet Engine Diagrams*. Zephyris.
- Whitney, P. (2014). www.purepowerengine.com. Pratt and Whitney.
- Yee, H. (1992). *Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution*. Journal of Computational Physics.
- Yunus, A. & Cimbala, J. (2007). *Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações*. McGraw-Hill.

Anexos

ANEXO A – Primeiro Anexo

Propriedades do choque normal (Anderson, 2003) - Parte 1 - Modificado.

M	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$	$\frac{p_{02}}{p_1}$	M_2
0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1000 + 01	0.1893 + 01	0.1000 + 01
0.1020 + 01	0.1047 + 01	0.1033 + 01	0.1013 + 01	0.1000 + 01	0.1938 + 01	0.9805 + 00
0.1040 + 01	0.1095 + 01	0.1067 + 01	0.1026 + 01	0.9999 + 00	0.1984 + 01	0.9620 + 00
0.1060 + 01	0.1144 + 01	0.1101 + 01	0.1039 + 01	0.9998 + 00	0.2032 + 01	0.9444 + 00
0.1080 + 01	0.1194 + 01	0.1135 + 01	0.1052 + 01	0.9994 + 00	0.2082 + 01	0.9277 + 00
0.1100 + 01	0.1245 + 01	0.1169 + 01	0.1065 + 01	0.9989 + 00	0.2133 + 01	0.9118 + 00
0.1120 + 01	0.1297 + 01	0.1203 + 01	0.1078 + 01	0.9982 + 00	0.2185 + 01	0.8966 + 00
0.1140 + 01	0.1350 + 01	0.1238 + 01	0.1090 + 01	0.9973 + 00	0.2239 + 01	0.8820 + 00
0.1160 + 01	0.1403 + 01	0.1272 + 01	0.1103 + 01	0.9961 + 00	0.2294 + 01	0.8682 + 00
0.1180 + 01	0.1458 + 01	0.1307 + 01	0.1115 + 01	0.9946 + 00	0.2350 + 01	0.8549 + 00
0.1200 + 01	0.1513 + 01	0.1342 + 01	0.1128 + 01	0.9928 + 00	0.2408 + 01	0.8422 + 00
0.1220 + 01	0.1570 + 01	0.1376 + 01	0.1141 + 01	0.9907 + 00	0.2466 + 01	0.8300 + 00
0.1240 + 01	0.1627 + 01	0.1411 + 01	0.1153 + 01	0.9884 + 00	0.2526 + 01	0.8183 + 00
0.1260 + 01	0.1686 + 01	0.1446 + 01	0.1166 + 01	0.9857 + 00	0.2588 + 01	0.8071 + 00
0.1280 + 01	0.1745 + 01	0.1481 + 01	0.1178 + 01	0.9827 + 00	0.2650 + 01	0.7963 + 00
0.1300 + 01	0.1805 + 01	0.1516 + 01	0.1191 + 01	0.9794 + 00	0.2714 + 01	0.7860 + 00
0.1320 + 01	0.1866 + 01	0.1551 + 01	0.1204 + 01	0.9758 + 00	0.2778 + 01	0.7760 + 00
0.1340 + 01	0.1928 + 01	0.1585 + 01	0.1216 + 01	0.9718 + 00	0.2844 + 01	0.7664 + 00
0.1360 + 01	0.1991 + 01	0.1620 + 01	0.1229 + 01	0.9676 + 00	0.2912 + 01	0.7572 + 00
0.1380 + 01	0.2055 + 01	0.1655 + 01	0.1242 + 01	0.9630 + 00	0.2980 + 01	0.7483 + 00
0.1400 + 01	0.2120 + 01	0.1690 + 01	0.1255 + 01	0.9582 + 00	0.3049 + 01	0.7397 + 00
0.1420 + 01	0.2186 + 01	0.1724 + 01	0.1268 + 01	0.9531 + 00	0.3120 + 01	0.7314 + 00
0.1440 + 01	0.2253 + 01	0.1759 + 01	0.1281 + 01	0.9476 + 00	0.3191 + 01	0.7235 + 00
0.1460 + 01	0.2320 + 01	0.1793 + 01	0.1294 + 01	0.9420 + 00	0.3264 + 01	0.7157 + 00
0.1480 + 01	0.2389 + 01	0.1828 + 01	0.1307 + 01	0.9360 + 00	0.3338 + 01	0.7083 + 00
0.1500 + 01	0.2458 + 01	0.1862 + 01	0.1320 + 01	0.9298 + 00	0.3413 + 01	0.7011 + 00
0.1520 + 01	0.2529 + 01	0.1896 + 01	0.1334 + 01	0.9233 + 00	0.3489 + 01	0.6941 + 00
0.1540 + 01	0.2600 + 01	0.1930 + 01	0.1347 + 01	0.9166 + 00	0.3567 + 01	0.6874 + 00
0.1560 + 01	0.2673 + 01	0.1964 + 01	0.1361 + 01	0.9097 + 00	0.3645 + 01	0.6809 + 00
0.1580 + 01	0.2746 + 01	0.1998 + 01	0.1374 + 01	0.9026 + 00	0.3724 + 01	0.6746 + 00
0.1600 + 01	0.2820 + 01	0.2032 + 01	0.1388 + 01	0.8952 + 00	0.3805 + 01	0.6684 + 00
0.1620 + 01	0.2895 + 01	0.2065 + 01	0.1402 + 01	0.8877 + 00	0.3887 + 01	0.6625 + 00
0.1640 + 01	0.2971 + 01	0.2099 + 01	0.1416 + 01	0.8799 + 00	0.3969 + 01	0.6568 + 00
0.1660 + 01	0.3048 + 01	0.2132 + 01	0.1430 + 01	0.8720 + 00	0.4053 + 01	0.6512 + 00
0.1680 + 01	0.3126 + 01	0.2165 + 01	0.1444 + 01	0.8639 + 00	0.4138 + 01	0.6458 + 00
0.1700 + 01	0.3205 + 01	0.2198 + 01	0.1458 + 01	0.8557 + 00	0.4224 + 01	0.6405 + 00
0.1720 + 01	0.3285 + 01	0.2230 + 01	0.1473 + 01	0.8474 + 00	0.4311 + 01	0.6355 + 00
0.1740 + 01	0.3366 + 01	0.2263 + 01	0.1487 + 01	0.8389 + 00	0.4399 + 01	0.6305 + 00
0.1760 + 01	0.3447 + 01	0.2295 + 01	0.1502 + 01	0.8302 + 00	0.4488 + 01	0.6257 + 00
0.1780 + 01	0.3530 + 01	0.2327 + 01	0.1517 + 01	0.8215 + 00	0.4578 + 01	0.6210 + 00
0.1800 + 01	0.3613 + 01	0.2359 + 01	0.1532 + 01	0.8127 + 00	0.4670 + 01	0.6165 + 00
0.1820 + 01	0.3698 + 01	0.2391 + 01	0.1547 + 01	0.8038 + 00	0.4762 + 01	0.6121 + 00
0.1840 + 01	0.3783 + 01	0.2422 + 01	0.1562 + 01	0.7948 + 00	0.4855 + 01	0.6078 + 00
0.1860 + 01	0.3870 + 01	0.2454 + 01	0.1577 + 01	0.7857 + 00	0.4950 + 01	0.6036 + 00
0.1880 + 01	0.3957 + 01	0.2485 + 01	0.1592 + 01	0.7765 + 00	0.5045 + 01	0.5996 + 00
0.1900 + 01	0.4045 + 01	0.2516 + 01	0.1608 + 01	0.7674 + 00	0.5142 + 01	0.5956 + 00
0.1920 + 01	0.4134 + 01	0.2546 + 01	0.1624 + 01	0.7581 + 00	0.5239 + 01	0.5918 + 00
0.1940 + 01	0.4224 + 01	0.2577 + 01	0.1639 + 01	0.7488 + 00	0.5338 + 01	0.5880 + 00
0.1960 + 01	0.4315 + 01	0.2607 + 01	0.1655 + 01	0.7395 + 00	0.5438 + 01	0.5844 + 00
0.1980 + 01	0.4407 + 01	0.2637 + 01	0.1671 + 01	0.7302 + 00	0.5539 + 01	0.5808 + 00

Propriedades do choque normal (Anderson, 2003) - Parte 2 - Modificado.

M	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$	$\frac{p_{02}}{p_1}$	M_2
0.2000 + 01	0.4500 + 01	0.2667 + 01	0.1687 + 01	0.7209 + 00	0.5640 + 01	0.5774 + 00
0.2050 + 01	0.4736 + 01	0.2740 + 01	0.1729 + 01	0.6975 + 00	0.5900 + 01	0.5691 + 00
0.2100 + 01	0.4978 + 01	0.2812 + 01	0.1770 + 01	0.6742 + 00	0.6165 + 01	0.5613 + 00
0.2150 + 01	0.5226 + 01	0.2882 + 01	0.1813 + 01	0.6511 + 00	0.6438 + 01	0.5540 + 00
0.2200 + 01	0.5480 + 01	0.2951 + 01	0.1857 + 01	0.6281 + 00	0.6716 + 01	0.5471 + 00
0.2250 + 01	0.5740 + 01	0.3019 + 01	0.1901 + 01	0.6055 + 00	0.7002 + 01	0.5406 + 00
0.2300 + 01	0.6005 + 01	0.3085 + 01	0.1947 + 01	0.5833 + 00	0.7294 + 01	0.5344 + 00
0.2350 + 01	0.6276 + 01	0.3149 + 01	0.1993 + 01	0.5615 + 00	0.7592 + 01	0.5286 + 00
0.2400 + 01	0.6553 + 01	0.3212 + 01	0.2040 + 01	0.5401 + 00	0.7897 + 01	0.5231 + 00
0.2450 + 01	0.6836 + 01	0.3273 + 01	0.2088 + 01	0.5193 + 00	0.8208 + 01	0.5179 + 00
0.2500 + 01	0.7125 + 01	0.3333 + 01	0.2137 + 01	0.4990 + 00	0.8526 + 01	0.5130 + 00
0.2550 + 01	0.7420 + 01	0.3392 + 01	0.2187 + 01	0.4793 + 00	0.8850 + 01	0.5083 + 00
0.2600 + 01	0.7720 + 01	0.3449 + 01	0.2238 + 01	0.4601 + 00	0.9181 + 01	0.5039 + 00
0.2650 + 01	0.8026 + 01	0.3505 + 01	0.2290 + 01	0.4416 + 00	0.9519 + 01	0.4996 + 00
0.2700 + 01	0.8338 + 01	0.3559 + 01	0.2343 + 01	0.4236 + 00	0.9862 + 01	0.4956 + 00
0.2750 + 01	0.8656 + 01	0.3612 + 01	0.2397 + 01	0.4062 + 00	0.1021 + 02	0.4918 + 00
0.2800 + 01	0.8980 + 01	0.3664 + 01	0.2451 + 01	0.3895 + 00	0.1057 + 02	0.4882 + 00
0.2850 + 01	0.9310 + 01	0.3714 + 01	0.2507 + 01	0.3733 + 00	0.1093 + 02	0.4847 + 00
0.2900 + 01	0.9645 + 01	0.3763 + 01	0.2563 + 01	0.3577 + 00	0.1130 + 02	0.4814 + 00
0.2950 + 01	0.9986 + 01	0.3811 + 01	0.2621 + 01	0.3428 + 00	0.1168 + 02	0.4782 + 00
0.3000 + 01	0.1033 + 02	0.3857 + 01	0.2679 + 01	0.3283 + 00	0.1206 + 02	0.4752 + 00
0.3050 + 01	0.1069 + 02	0.3902 + 01	0.2738 + 01	0.3145 + 00	0.1245 + 02	0.4723 + 00
0.3100 + 01	0.1104 + 02	0.3947 + 01	0.2799 + 01	0.3012 + 00	0.1285 + 02	0.4695 + 00
0.3150 + 01	0.1141 + 02	0.3990 + 01	0.2860 + 01	0.2885 + 00	0.1325 + 02	0.4669 + 00
0.3200 + 01	0.1178 + 02	0.4031 + 01	0.2922 + 01	0.2762 + 00	0.1366 + 02	0.4643 + 00
0.3250 + 01	0.1216 + 02	0.4072 + 01	0.2985 + 01	0.2645 + 00	0.1407 + 02	0.4619 + 00
0.3300 + 01	0.1254 + 02	0.4112 + 01	0.3049 + 01	0.2533 + 00	0.1449 + 02	0.4596 + 00
0.3350 + 01	0.1293 + 02	0.4151 + 01	0.3114 + 01	0.2425 + 00	0.1492 + 02	0.4573 + 00
0.3400 + 01	0.1332 + 02	0.4188 + 01	0.3180 + 01	0.2322 + 00	0.1535 + 02	0.4552 + 00
0.3450 + 01	0.1372 + 02	0.4225 + 01	0.3247 + 01	0.2224 + 00	0.1579 + 02	0.4531 + 00
0.3500 + 01	0.1412 + 02	0.4261 + 01	0.3315 + 01	0.2129 + 00	0.1624 + 02	0.4512 + 00
0.3550 + 01	0.1454 + 02	0.4296 + 01	0.3384 + 01	0.2039 + 00	0.1670 + 02	0.4492 + 00
0.3600 + 01	0.1495 + 02	0.4330 + 01	0.3454 + 01	0.1953 + 00	0.1716 + 02	0.4474 + 00
0.3650 + 01	0.1538 + 02	0.4363 + 01	0.3525 + 01	0.1871 + 00	0.1762 + 02	0.4456 + 00
0.3700 + 01	0.1580 + 02	0.4395 + 01	0.3596 + 01	0.1792 + 00	0.1810 + 02	0.4439 + 00
0.3750 + 01	0.1624 + 02	0.4426 + 01	0.3669 + 01	0.1717 + 00	0.1857 + 02	0.4423 + 00
0.3800 + 01	0.1668 + 02	0.4457 + 01	0.3743 + 01	0.1645 + 00	0.1906 + 02	0.4407 + 00
0.3850 + 01	0.1713 + 02	0.4487 + 01	0.3817 + 01	0.1576 + 00	0.1955 + 02	0.4392 + 00
0.3900 + 01	0.1758 + 02	0.4516 + 01	0.3893 + 01	0.1510 + 00	0.2005 + 02	0.4377 + 00
0.3950 + 01	0.1804 + 02	0.4544 + 01	0.3969 + 01	0.1448 + 00	0.2056 + 02	0.4363 + 00
0.4000 + 01	0.1850 + 02	0.4571 + 01	0.4047 + 01	0.1388 + 00	0.2107 + 02	0.4350 + 00
0.4050 + 01	0.1897 + 02	0.4598 + 01	0.4125 + 01	0.1330 + 00	0.2159 + 02	0.4336 + 00
0.4100 + 01	0.1944 + 02	0.4624 + 01	0.4205 + 01	0.1276 + 00	0.2211 + 02	0.4324 + 00
0.4150 + 01	0.1993 + 02	0.4650 + 01	0.4285 + 01	0.1223 + 00	0.2264 + 02	0.4311 + 00
0.4200 + 01	0.2041 + 02	0.4675 + 01	0.4367 + 01	0.1173 + 00	0.2318 + 02	0.4299 + 00
0.4250 + 01	0.2091 + 02	0.4699 + 01	0.4449 + 01	0.1126 + 00	0.2372 + 02	0.4288 + 00
0.4300 + 01	0.2140 + 02	0.4723 + 01	0.4532 + 01	0.1080 + 00	0.2427 + 02	0.4277 + 00
0.4350 + 01	0.2191 + 02	0.4746 + 01	0.4616 + 01	0.1036 + 00	0.2483 + 02	0.4266 + 00
0.4400 + 01	0.2242 + 02	0.4768 + 01	0.4702 + 01	0.9948 - 01	0.2539 + 02	0.4255 + 00
0.4450 + 01	0.2294 + 02	0.4790 + 01	0.4788 + 01	0.9550 - 01	0.2596 + 02	0.4245 + 00

Propriedades do choque normal (Anderson, 2003) - Parte 3 - Modificado.

M	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$	$\frac{p_{02}}{p_1}$	M_2
0.4500 + 01	0.2346 + 02	0.4812 + 01	0.4875 + 01	0.9170 - 01	0.2654 + 02	0.4236 + 00
0.4550 + 01	0.2399 + 02	0.4833 + 01	0.4963 + 01	0.8806 - 01	0.2712 + 02	0.4226 + 00
0.4600 + 01	0.2452 + 02	0.4853 + 01	0.5052 + 01	0.8459 - 01	0.2771 + 02	0.4217 + 00
0.4650 + 01	0.2506 + 02	0.4873 + 01	0.5142 + 01	0.8126 - 01	0.2831 + 02	0.4208 + 00
0.4700 + 01	0.2560 + 02	0.4893 + 01	0.5233 + 01	0.7809 - 01	0.2891 + 02	0.4199 + 00
0.4750 + 01	0.2616 + 02	0.4912 + 01	0.5325 + 01	0.7505 - 01	0.2952 + 02	0.4191 + 00
0.4800 + 01	0.2671 + 02	0.4930 + 01	0.5418 + 01	0.7214 - 01	0.3013 + 02	0.4183 + 00
0.4850 + 01	0.2728 + 02	0.4948 + 01	0.5512 + 01	0.6936 - 01	0.3075 + 02	0.4175 + 00
0.4900 + 01	0.2784 + 02	0.4966 + 01	0.5607 + 01	0.6670 - 01	0.3138 + 02	0.4167 + 00
0.4950 + 01	0.2842 + 02	0.4983 + 01	0.5703 + 01	0.6415 - 01	0.3201 + 02	0.4160 + 00
0.5000 + 01	0.2900 + 02	0.5000 + 01	0.5800 + 01	0.6172 - 01	0.3265 + 02	0.4152 + 00
0.5100 + 01	0.3018 + 02	0.5033 + 01	0.5997 + 01	0.5715 - 01	0.3395 + 02	0.4138 + 00
0.5200 + 01	0.3138 + 02	0.5064 + 01	0.6197 + 01	0.5297 - 01	0.3528 + 02	0.4125 + 00
0.5300 + 01	0.3260 + 02	0.5093 + 01	0.6401 + 01	0.4913 - 01	0.3663 + 02	0.4113 + 00
0.5400 + 01	0.3385 + 02	0.5122 + 01	0.6610 + 01	0.4560 - 01	0.3801 + 02	0.4101 + 00
0.5500 + 01	0.3512 + 02	0.5149 + 01	0.6822 + 01	0.4236 - 01	0.3941 + 02	0.4090 + 00
0.5600 + 01	0.3642 + 02	0.5175 + 01	0.7038 + 01	0.3938 - 01	0.4084 + 02	0.4079 + 00
0.5700 + 01	0.3774 + 02	0.5200 + 01	0.7258 + 01	0.3664 - 01	0.4230 + 02	0.4069 + 00
0.5800 + 01	0.3908 + 02	0.5224 + 01	0.7481 + 01	0.3412 - 01	0.4378 + 02	0.4059 + 00
0.5900 + 01	0.4044 + 02	0.5246 + 01	0.7709 + 01	0.3180 - 01	0.4528 + 02	0.4050 + 00
0.6000 + 01	0.4183 + 02	0.5268 + 01	0.7941 + 01	0.2965 - 01	0.4682 + 02	0.4042 + 00
0.6100 + 01	0.4324 + 02	0.5289 + 01	0.8176 + 01	0.2767 - 01	0.4837 + 02	0.4033 + 00
0.6200 + 01	0.4468 + 02	0.5309 + 01	0.8415 + 01	0.2584 - 01	0.4996 + 02	0.4025 + 00
0.6300 + 01	0.4614 + 02	0.5329 + 01	0.8658 + 01	0.2416 - 01	0.5157 + 02	0.4018 + 00
0.6400 + 01	0.4762 + 02	0.5347 + 01	0.8905 + 01	0.2259 - 01	0.5320 + 02	0.4011 + 00
0.6500 + 01	0.4912 + 02	0.5365 + 01	0.9156 + 01	0.2115 - 01	0.5486 + 02	0.4004 + 00
0.6600 + 01	0.5065 + 02	0.5382 + 01	0.9411 + 01	0.1981 - 01	0.5655 + 02	0.3997 + 00
0.6700 + 01	0.5220 + 02	0.5399 + 01	0.9670 + 01	0.1857 - 01	0.5826 + 02	0.3991 + 00
0.6800 + 01	0.5378 + 02	0.5415 + 01	0.9933 + 01	0.1741 - 01	0.6000 + 02	0.3985 + 00
0.6900 + 01	0.5538 + 02	0.5430 + 01	0.1020 + 02	0.1635 - 01	0.6176 + 02	0.3979 + 00
0.7000 + 01	0.5700 + 02	0.5444 + 01	0.1047 + 02	0.1535 - 01	0.6355 + 02	0.3974 + 00
0.7100 + 01	0.5864 + 02	0.5459 + 01	0.1074 + 02	0.1443 - 01	0.6537 + 02	0.3968 + 00
0.7200 + 01	0.6031 + 02	0.5472 + 01	0.1102 + 02	0.1357 - 01	0.6721 + 02	0.3963 + 00
0.7300 + 01	0.6200 + 02	0.5485 + 01	0.1130 + 02	0.1277 - 01	0.6908 + 02	0.3958 + 00
0.7400 + 01	0.6372 + 02	0.5498 + 01	0.1159 + 02	0.1202 - 01	0.7097 + 02	0.3954 + 00
0.7500 + 01	0.6546 + 02	0.5510 + 01	0.1188 + 02	0.1133 - 01	0.7289 + 02	0.3949 + 00
0.7600 + 01	0.6722 + 02	0.5522 + 01	0.1217 + 02	0.1068 - 01	0.7483 + 02	0.3945 + 00
0.7700 + 01	0.6900 + 02	0.5533 + 01	0.1247 + 02	0.1008 - 01	0.7680 + 02	0.3941 + 00
0.7800 + 01	0.7081 + 02	0.5544 + 01	0.1277 + 02	0.9510 - 02	0.7880 + 02	0.3937 + 00
0.7900 + 01	0.7264 + 02	0.5555 + 01	0.1308 + 02	0.8982 - 02	0.8082 + 02	0.3933 + 00
0.8000 + 01	0.7450 + 02	0.5565 + 01	0.1339 + 02	0.8488 - 02	0.8287 + 02	0.3929 + 00
0.9000 + 01	0.9433 + 02	0.5651 + 01	0.1669 + 02	0.4964 - 02	0.1048 + 03	0.3898 + 00
0.1000 + 02	0.1165 + 03	0.5714 + 01	0.2039 + 02	0.3045 - 02	0.1292 + 03	0.3876 + 00
0.1100 + 02	0.1410 + 03	0.5762 + 01	0.2447 + 02	0.1945 - 02	0.1563 + 03	0.3859 + 00
0.1200 + 02	0.1678 + 03	0.5799 + 01	0.2894 + 02	0.1287 - 02	0.1859 + 03	0.3847 + 00
0.1300 + 02	0.1970 + 03	0.5828 + 01	0.3380 + 02	0.8771 - 03	0.2181 + 03	0.3837 + 00
0.1400 + 02	0.2285 + 03	0.5851 + 01	0.3905 + 02	0.6138 - 03	0.2528 + 03	0.3829 + 00
0.1500 + 02	0.2623 + 03	0.5870 + 01	0.4469 + 02	0.4395 - 03	0.2902 + 03	0.3823 + 00
0.1600 + 02	0.2985 + 03	0.5885 + 01	0.5072 + 02	0.3212 - 03	0.3301 + 03	0.3817 + 00
0.1700 + 02	0.3370 + 03	0.5898 + 01	0.5714 + 02	0.2390 - 03	0.3726 + 03	0.3813 + 00

Propriedades do choque normal (Anderson, 2003) - Parte 4 - Modificado.

M	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$	$\frac{p_{02}}{p_1}$	M_2
0.1800 + 02	0.3778 + 03	0.5909 + 01	0.6394 + 02	0.1807 - 03	0.4176 + 03	0.3810 + 00
0.1900 + 02	0.4210 + 03	0.5918 + 01	0.7114 + 02	0.1386 - 03	0.4653 + 03	0.3806 + 00
0.2000 + 02	0.4665 + 03	0.5926 + 01	0.7872 + 02	0.1078 - 03	0.5155 + 03	0.3804 + 00
0.2200 + 02	0.5645 + 03	0.5939 + 01	0.9506 + 02	0.6741 - 04	0.6236 + 03	0.3800 + 00
0.2400 + 02	0.6718 + 03	0.5948 + 01	0.1129 + 03	0.4388 - 04	0.7421 + 03	0.3796 + 00
0.2600 + 02	0.7885 + 03	0.5956 + 01	0.1324 + 03	0.2953 - 04	0.8709 + 03	0.3794 + 00
0.2800 + 02	0.9145 + 03	0.5962 + 01	0.1534 + 03	0.2046 - 04	0.1010 + 04	0.3792 + 00
0.3000 + 02	0.1050 + 04	0.5967 + 01	0.1759 + 03	0.1453 - 04	0.1159 + 04	0.3790 + 00
0.3200 + 02	0.1194 + 04	0.5971 + 01	0.2001 + 03	0.1055 - 04	0.1319 + 04	0.3789 + 00
0.3400 + 02	0.1348 + 04	0.5974 + 01	0.2257 + 03	0.7804 - 05	0.1489 + 04	0.3788 + 00
0.3600 + 02	0.1512 + 04	0.5977 + 01	0.2529 + 03	0.5874 - 05	0.1669 + 04	0.3787 + 00
0.3800 + 02	0.1684 + 04	0.5979 + 01	0.2817 + 03	0.4488 - 05	0.1860 + 04	0.3786 + 00
0.4000 + 02	0.1866 + 04	0.5981 + 01	0.3121 + 03	0.3477 - 05	0.2061 + 04	0.3786 + 00
0.4200 + 02	0.2058 + 04	0.5983 + 01	0.3439 + 03	0.2727 - 05	0.2272 + 04	0.3785 + 00
0.4400 + 02	0.2258 + 04	0.5985 + 01	0.3774 + 03	0.2163 - 05	0.2493 + 04	0.3785 + 00
0.4600 + 02	0.2468 + 04	0.5986 + 01	0.4124 + 03	0.1733 - 05	0.2725 + 04	0.3784 + 00
0.4800 + 02	0.2688 + 04	0.5987 + 01	0.4489 + 03	0.1402 - 05	0.2967 + 04	0.3784 + 00
0.5000 + 02	0.2916 + 04	0.5988 + 01	0.4871 + 03	0.1144 - 05	0.3219 + 04	0.3784 + 00